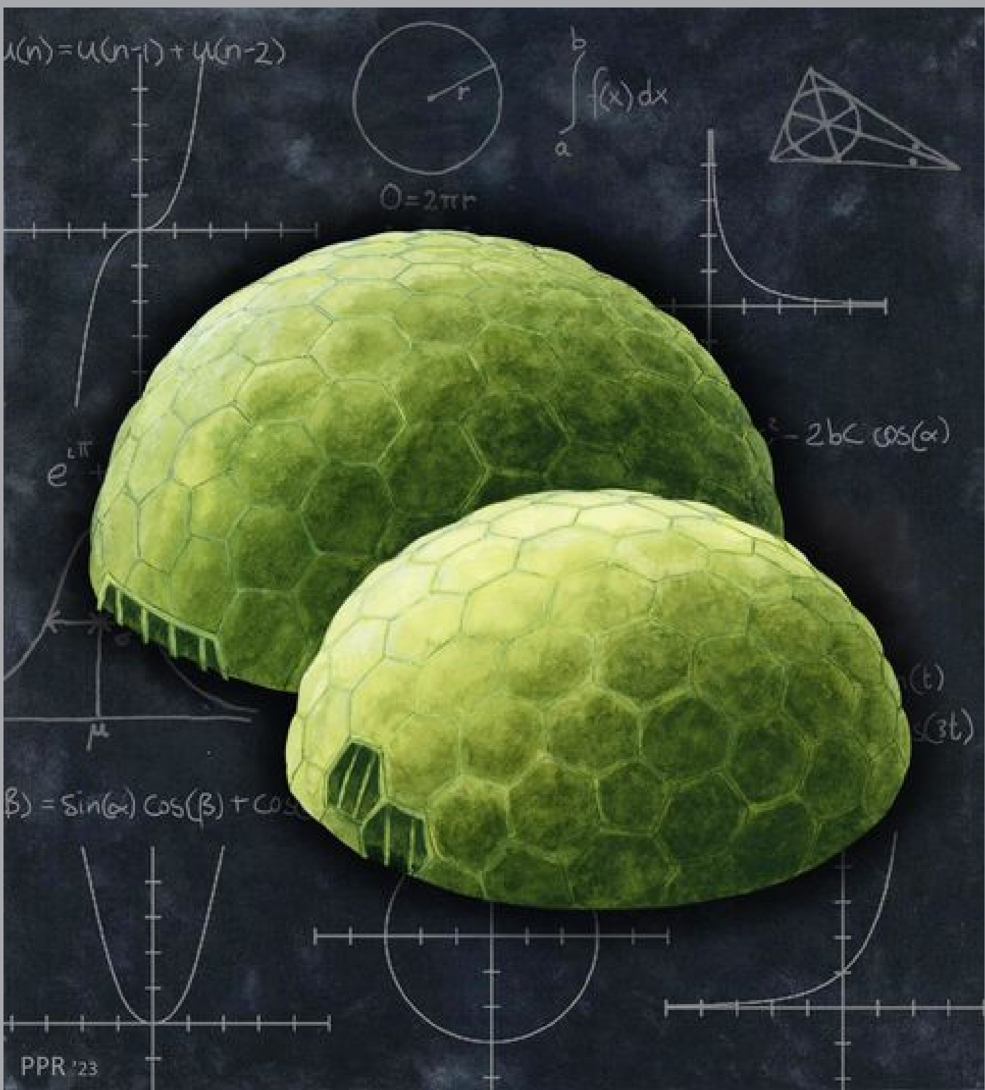
Wiskunde D

6 VWO

Katern 1



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

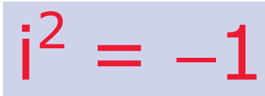
Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Complexe getallen

Inleiding

Er bestaan vergelijkingen die geen reële oplossingen hebben, bijvoorbeeld $x^2 = -1$.
Je zou die vergelijking door worteltrekken willen oplossen, maar $x = \sqrt{-1}$ is geen reël getal en dus heb je tot nu toe altijd gezegd dat er geen oplossingen van die vergelijking bestaan.
Maar als je afspreekt dat i het getal is waarvoor geldt $\mathrm{i}^2 = -1$, dan heeft de vergelijking $x^2 = -1$ in ieder geval als oplossing $x = \mathrm{i}$.
Zo krijg je een nieuwe soort getallen waarmee je weer kunt leren rekenen...



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- complexe getallen kennen;
- werken met complexe getallen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen);
- complexe getallen voor te stellen door vectoren.

Voorkennis

- het begrip reëel getal en rekenen met reële getallen;
- werken met vectoren in een xy-vlak.

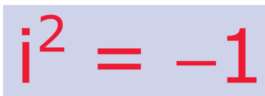
Verkennen

Opgave V1

Je hebt nu afgesproken dat i het getal is waarvoor $\mathrm{i}^2 = -1$.
Daarmee heeft de vergelijking $x^2 = -1$ twee oplossingen, namelijk $x = \mathrm{i} \vee x = -\mathrm{i}$.

a Welke oplossingen heeft $x^2 = -4$?

b Welke oplossingen heeft $(x-1)^2 + 15 = 0$?



Figuur 1.2

Uitleg

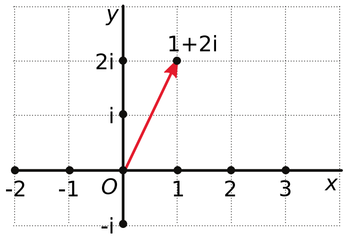
Je bent gewend om te zeggen dat de vergelijking $x^2 = -1$ geen oplossingen heeft. Dat is echter niet helemaal correct: je moet zeggen dat er geen reële oplossingen zijn. Spreek je af dat er een getal i bestaat (waarvoor de bestaande rekenregels gelden) met als eigenschap $\mathrm{i}^2 = -1$ dan heeft deze vergelijking als oplossing $x = \mathrm{i} \vee x = -\mathrm{i}$.
De letter ‘i’ komt van ‘imaginair’ en is bedacht door de wiskundige Leonhard Euler. Het getal i is een voorbeeld van een complex getal.
Ga er van uit dat je met i kunt rekenen als een ‘gewoon’ getal.

Stel je eens voor dat je de vergelijking $x^2 - 2x + 5 = 0$ wilt oplossen.
Met de abc-formule vind je $x = \frac{2+\sqrt{-16}}{2} \vee x = \frac{2-\sqrt{-16}}{2}$. Er zijn dus geen reële oplossingen.

Door te rekenen met i kun je schrijven $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot -1} = \sqrt{16\mathrm{i}^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{\mathrm{i}^2} = 4\mathrm{i}$ en dan is $x = 1 + 2\mathrm{i} \vee x = 1 - 2\mathrm{i}$. En nu heeft de vergelijking twee oplossingen...

Je kunt je een getal als $z = 1 + 2\,\mathrm{i}$ voorstellen als een vector in een 'gewoon' tweedimensionaal rechthoekig assenstelsel Oxy. Daarin beschrijf je vectoren door kentallenparen zoals $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dit kun je ook als voorstelling voor het complex getal $1 + 2\,\mathrm{i}$ gebruiken. Het werken met complexe getallen als vectoren maakt een verbinding tussen getallentheorie en meetkunde.



Figuur 1.3

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. De afspraak $\mathrm{i}^2 = -1$ maakt het mogelijk om uit negatieve getallen wortel te trekken.

a Bereken $\sqrt{-25}$.

b Welke oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = -25$?

c Welke oplossingen heeft $(x - 2)^2 = -4$?

d Welke oplossingen heeft $x^2 + 4x + 3 = 0$.

e Welke oplossingen heeft $x^2 + 4x + 30 = 0$.

Opgave 2

Een complex getal heeft de vorm $z = x + \mathrm{i}y$. Maar je kunt het ook voorstellen door een vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vanuit de oorsprong van een xy-assenstelsel.

a Teken de volgende complexe getallen als vectoren: $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = 2 + 3\mathrm{i}$, $z_3 = -3 + \mathrm{i}$, $z_4 = -3$, $z_5 = 1 - 4\mathrm{i}$ en $z_6 = -2\mathrm{i}$.

b Waar zitten de gewone reële getallen in dit assenstelsel?

Theorie en voorbeelden

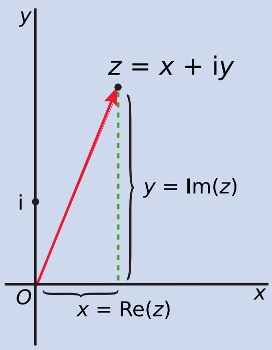
Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **complex getal** is een getal van de vorm $z = x + \mathrm{i}\,y$ met x en y reële getallen en i het getal met de eigenschap $\mathrm{i}^2 = -1$.

y is het **imaginaire deel**: $y = \mathrm{Im}\,(z)$.
Als $x = 0$ is het getal zuiver imaginair.
x is het **reële deel**: $x = \mathrm{Re}\,(z)$.
Als $y = 0$ is het getal zuiver reëel.
Alle reële getallen vormen samen de verzameling $\mathbb{R}$, alle complexe getallen de verzameling $\mathbb{C}$.

Een complex getal kan meetkundig worden voorgesteld door een vector vanuit O in een Oxy-assenstelsel.
Je noemt zo'n Oxy-vlak waarin je complexe getallen tekent het **complexe vlak**.



Figuur 1.4

Met complexe getallen rekenen wil je op dezelfde wijze doen als met reële getallen. In de voorbeelden zie je wat dit betekent. Je kunt ook met complexe getallen rekenen alsof het vectoren zijn met kentallen $x = \text{Re}(z)$ en $y = \text{Im}(z)$.

Het complexe getal $x - \text{i}\, y$ heet de **geconjugeerde** van $z = x + \text{i}\, y$.
Notatie: $\overline{z} = x - \text{i}\, y$.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Stel je twee complexe getallen voor: $z_1 = 1 + 2\,\text{i}$ en $z_2 = 2 - 3\,\text{i}$.
Bereken $z_1 + z_2$ en $z_1 - z_2$.
Laat ook zien hoe dit er in het complexe vlak uitziet.

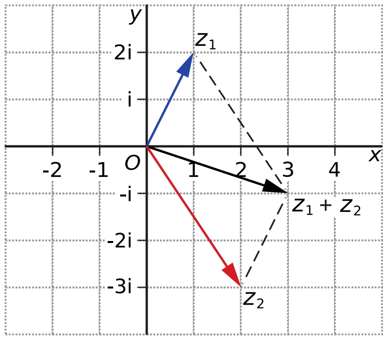
Antwoord

$z_1 + z_2 = 1 + 2\,\text{i} + 2 - 3\,\text{i} = 3 - \text{i}$.

$z_1 - z_2 = 1 + 2\,\text{i} - (2 - 3\,\text{i}) = \text{-}1 + 5\,\text{i}$.

In de applet zie je de constructie van $z_1 + z_2$.
De constructie van $z_1 - z_2$ is hiermee ook te doen door gebruik te maken van
$z_1 - z_2 = z_1 + \text{-}z_2 = 1 + 2\,\text{i} + \text{-}2 + 3\,\text{i}$.

Je kunt met de applet ook andere optellingen en aftrekkingen van complexe getallen oefenen.



Figuur 1.5

Opgave 3

Geef in één figuur het complexe getal $z = x + \text{i}y$ en $\text{Re}(z)$ en $\text{Im}(z)$ en $\overline{z}$ weer. Bekijk eventueel nog even enkele complexe getallen met de applet in de **Theorie**.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe twee complexe getallen worden opgeteld. Het aftrekken van twee complexe getallen is gebaseerd op $z_1 - z_2 = z_1 + \text{-}z_2$. Hierin is $\text{-}z_2$ het tegenovergestelde van z_2.

a Neem $z_1 = 1 - 2\text{i}$ en $z_2 = 3 + \text{i}$. Maak met de applet $z_1 + z_2$. Welk complex getal is $z_1 + z_2$?

b Neem weer $z_1 = 1 - 2\text{i}$ en $z_2 = 3 + \text{i}$. Maak met de applet $z_1 - z_2$. Welk complex getal is $z_1 - z_2$?

c Oefen het optellen en aftrekken van complexe getallen met de applet.

Voorbeeld 2

Stel je twee complexe getallen voor: $z_1 = 1 + 2\,\text{i}$ en $z_2 = 2 - 3\,\text{i}$.
Bereken $z = z_1 \cdot z_2$.
Bepaal Re (z) en Im (z).

Antwoord

$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2\,\text{i}) \cdot (2 - 3\,\text{i}) = 2 - 3\,\text{i} + 4\,\text{i} - 6\,\text{i}^2$

Omdat $\text{i}^2 = -1$, staat hier: $z_1 \cdot z_2 = 2 - 3\,\text{i} + 4\,\text{i} + 6 = 8 + \text{i}$.

En dus is Re $(z) = 8$ en Im $(z) = 1$.

Omdat machten herhaalde vermenigvuldigingen zijn, kun je zo ook machten van complexe getallen berekenen.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** kun je zien hoe je twee complexe getallen vermenigvuldigt. Een voorstelling met vectoren is daar (nog) niet bij gemaakt.

a Loop zelf de berekening in het voorbeeld na.

b Neem $z_1 = 1 - 2\text{i}$ en $z_2 = 3 + \text{i}$. Bereken $z_1 \cdot z_2$.

c Bepaal Re$(z_1 \cdot z_2)$ en Im$(z_1 \cdot z_2)$.

Voorbeeld 3

Stel je twee complexe getallen voor: $z_1 = 1 + 2\,\text{i}$ en $z_2 = 2 - 3\,\text{i}$.

Bereken $z = \frac{z_1}{z_2}$.

Bepaal Re (z) en Im (z).

Antwoord

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2\text{i}}{2-3\text{i}} = \frac{1+2\text{i}}{2-3\text{i}} \cdot \frac{2+3\text{i}}{2+3\text{i}} = \frac{2+7\text{i}+6\text{i}^2}{4-9\text{i}^2} = \frac{-4+7\text{i}}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{7}{13}\text{i}.$

Je ziet, dat door met een handig gekozen 1 te vermenigvuldigen zo'n breuk kan worden geschreven als één complex getal.
Je vermenigvuldigt dan teller en noemer met de geconjugeerde van de noemer.

En dus is Re $(z) = -\frac{4}{13}$ en Im $(z) = \frac{7}{13}$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** kun je zien hoe je twee complexe getallen deelt. Een voorstelling met vectoren is daar (nog) niet bij gemaakt.

a Loop zelf de berekening in het voorbeeld na.

b Neem $z_1 = 1 - 2\text{i}$ en $z_2 = 3 + \text{i}$. Bereken $\frac{z_1}{z_2}$.

c Bepaal Re$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ en Im$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

Opgave 7

Bereken $(2 + 2\,\text{i})^3$.

Opgave 8

Je grafische rekenmachine kan waarschijnlijk ook met complexe getallen rekenen. Bekijk in het **Practicum** hoe dat gaat.

Controleer de antwoorden van de opgaven 4 tot en met 7 met de grafische rekenmachine.

Verwerken

Opgave 9

LET OP! Het is de bedoeling dat je deze opgave handmatig doet. Gebruik de grafische rekenmachine alleen als controlemiddel! Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = 2+2\text{i}$ en $z_2 = 3-4\text{i}$. Bereken:

a $z_1 + z_2$

b $3z_1$

c $2z_1 - z_2$

d $z_1 \cdot z_2$

e $\text{i} \cdot z_1$

f $\frac{z_1}{z_2}$

Opgave 10

Gegeven zijn de vectoren $z_1 = 2 + 4\,\text{i}$ en $z_2 = 1 - 2\,\text{i}$.
Het optellen van twee complexe getallen kun je met vectoren zichtbaar maken.

a Welk complex getal is $z_1 + z_2$?
Teken de constructie van dit getal in het complexe vlak.

b Welk complex getal is $z_1 - z_2$?
Teken de constructie van dit getal in het complexe vlak.

c Construeer met behulp van vectoren $2z_1 + z_2$.

Opgave 11

Als je een complex getal vermenigvuldigt met i, dan gebeurt er meetkundig iets bijzonders.

a Neem het complexe getal $z = 3$. Teken in een complex vlak zowel z als $\text{i}\cdot z$. Welk verband is er tussen beide vectoren?

b Neem het complexe getal $z = 3 + \text{i}$. Teken zowel z als $\text{i}\cdot z$. Bestaat hetzelfde verband tussen beide vectoren?

c Doe dit ten slotte nog eens in het algemeen. Neem $z = x + \text{i}\,y$. Welk verband bestaat er in het algemeen tussen de vectoren die horen bij z en $\text{i}\,z$?

d Leg uit of de regel $\text{i}^2 = -1$ ook in dit verband past.

Opgave 12

Bereken $\text{Re}\,(z)$ en $\text{Im}\,(z)$.

a $z = 2 + 3\,\text{i} - (5 + 4\,\text{i})$

b $z = (2 + \text{i})(3 - 2\,\text{i})$

c $z = 2 + 3\,\text{i}\,(2 - 5\,\text{i})^2$

d $z = (3 + 4\,\mathrm{i})(3 - 4\,\mathrm{i})$

e $z = 6 + 4\,\mathrm{i} - (1 + \mathrm{i})^2 - (2 + 3\,\mathrm{i})\,\mathrm{i}$

f $z = \frac{3+2\,\mathrm{i}}{5+3\,\mathrm{i}}$

Opgave 13

Bepaal de oplossingen van de vergelijkingen:

a $(z - 2)^2 = -9$

b $2(z - \mathrm{i})^2 + 8 = 0$

c $12 + z^2 = 4$

d $5z + 2 = 3z + 4\,\mathrm{i}$

e $5z + 2 = 3\,\mathrm{i}\,z + 4\,\mathrm{i}$

Opgave 14

Bereken het reële en het imaginaire deel van $(2 - 3\,\mathrm{i})^5$.

Toepassen

Opgave 15: Algemene rekenregels

Ga uit van de twee complexe getallen $z_1 = a + b\mathrm{i}$ en $z_2 = c + d\mathrm{i}$.

Leid nu algemene rekenregels af voor de som, het verschil, het product en het quotiënt van twee complexe getallen.

Testen

Opgave 16

Gegeven de complexe getallen $z_1 = -3 + 4\mathrm{i}$ en $z_2 = 4 - \mathrm{i}$.

a Construeer en bereken $z_1 + z_2$ en $z_1 - z_2$.

b Construeer en bereken $z_1 + 2z_2$.

c Bereken $z_1 \cdot z_2$.

d Bereken $z_1 \cdot z_2$.

Opgave 17

Bereken $\mathrm{Re}(z)$ en $\mathrm{Im}(z)$ als

a $z = \mathrm{i}(3 - 5\mathrm{i})$

b $z = \frac{1}{3-5\mathrm{i}}$

c $z = (4 - \mathrm{i})^2(3 + 3\mathrm{i})$

d $z = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op:

a $(z + \mathrm{i})^2 = -16$

b $2\mathrm{i}z - 5 = 3z + 2\mathrm{i}$

Practicum GR

Op de meeste grafische rekenmachines kun je gewoon met complexe getallen rekenen.
Je moet dan wel het symbool i op je rekenmachine weten te vinden. Het zal ergens bij de cijfertoetsen zitten.
Verder moet je op de rekenmachine het **rekenen met complexe getallen** soms instellen.

Bij de **TI-84** kies je in het MODE-menu voor de instelling $a + b\,\mathrm{i}$. De rekenmachine zet dan de wortel uit -1 ook om in een complex getal...

Hiernaast zie je hoe de berekeningen van $1 + 2\,\mathrm{i} + 2 - 3\,\mathrm{i}$, $1 + 2\,\mathrm{i} - (2 - 3\,\mathrm{i})$, $(1 + 2\,\mathrm{i}) \cdot (2 - 3\,\mathrm{i})$ en $\frac{1+2\,\mathrm{i}}{2-3\,\mathrm{i}}$ in zijn werk gaan.

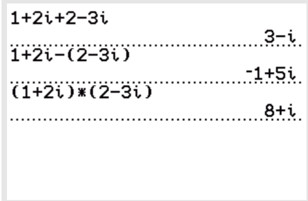
Maar bijvoorbeeld $(1 + 2\,\mathrm{i})^3$ is ook heel eenvoudig...

Verder heeft de TI-84 na drukken op [MATH] een menu CMPLX waarin allerlei zaken zijn te vinden die met complexe getallen te maken hebben. Bijvoorbeeld kun je daar het reële en het imaginaire deel van een complex getal en zijn geconjugeerde vinden.

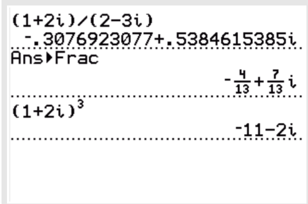
Bij de **Casio fx-CG50** zet je in het menu “Run-Matrix” via [SHIFT] [MENU] (Setup) de ‘Complex Mode’ op $a + b\,\mathrm{i}$. De machine maakt dan van bijvoorbeeld $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$.
Om met complexe getallen te rekenen gebruik je de i die zit op de toets waar de 0 op staat, je toetst daarvoor dus [SHIFT] [0]. Via [F3](COMPLEX) vind je het reële deel en het imaginaire deel van een complex getal.

Bij de **HP prime** kun je via “Settings” kiezen voor de manier waarop complexe getallen worden weergegeven, als $a + b\,\mathrm{i}$ of als (a,b). Daar moet je ook aanvinken dat je complexe resultaten wilt toestaan om bijvoorbeeld $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$ te krijgen. Verder zit de i op toets waar de 2 op staat, je toetst daarvoor dus [SHIFT] [2]. Via de “Toolbox” vind je het reële deel en het imaginaire deel van een complex getal.

Bij de **NumWorks** kies je in het menu “Instellingen” voor “Complex formaat: Cartesisch” $a + \mathrm{i}\,b$. De rekenmachine zet dan de wortel uit -1 ook om in een complex getal...
Verder rekent de machine gewoon met complexe getallen. De i zit als knop op het toetsenbord. Via de “Toolbox” vind je het reële deel en het imaginaire deel van een complex getal.



Figuur 1.6



Figuur 1.7

1.2 Modulus en argument

Inleiding

Complexe getallen kun je voorstellen door vectoren in het complexe vlak. Bijvoorbeeld is het complexe getal $1 + 2\,\text{i}$ te tekenen als vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ vanuit de oorsprong. Zo'n vector maakt een bepaalde hoek met de positieve x-as en heeft een bepaalde lengte. Die twee getallen kun je ook gebruiken voor de beschrijving van de vector. Daarmee kun je dus complexe getallen weergeven met behulp van een hoek (het argument) en de lengte (de modulus). Je zult zien dat deze voorstelling van een complex getal vaak goed bruikbaar is.

Je leert in dit onderwerp

- complexe getallen weergeven met behulp van de hoek met de positieve x-as en de lengte;
- rekenen met complexe getallen in de poolvoorstelling;
- werken met de stelling van De Moivre.

Voorkennis

- de basisbegrippen van complexe getallen;
- complexe getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Verkennen

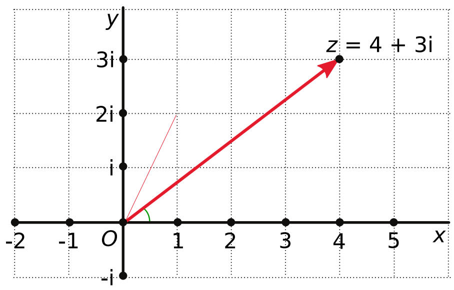
Opgave V1

Je ziet hier de vector die hoort bij het complexe getal $4 + 3\,\text{i}$.

a Welke lengte heeft deze vector?

b Welke hoek maakt deze vector met de positieve x-as?

c Probeer het getal z nu te op te schrijven door gebruik te maken van deze lengte en deze hoek.



Figuur 2.1

Uitleg 1

Bekijk de applet

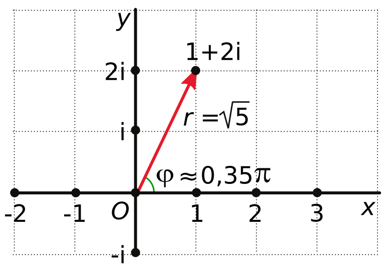
Een complex getal als $z = 1 + 2\,\mathrm{i}$ kun je voorstellen door de vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ vanuit de oorsprong van een Oxy-assenstelsel (het complexe vlak). Als je die vector tekent, dan zie je dat hij een hoek φ met de positieve x-as maakt en een bepaalde lengte heeft. Deze hoek heet wel het argument van z: arg (z). Als je aanneemt dat $-\pi < \varphi \leq \pi$ dan is dit de hoofdwaarde van het argument en schrijf je: Arg (z).

Ga na, dat de lengte (de modulus) $|z|$ van deze vector $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ is en dat $\tan(\varphi) = \frac{2}{1} = 2$.

De bijbehorende hoek is ongeveer $1{,}11$ rad.
$z = 1 + 2\,\mathrm{i}$ kun je benaderen door $z \approx \sqrt{5} \cdot \cos(1{,}11) + \mathrm{i} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(1{,}11)$

Op het eerste gezicht lijkt deze schrijfwijze (de **poolvoorstelling** van $1 + 2\,\mathrm{i}$) misschien niet erg handig. Maar dat wordt anders als je twee complexe getallen gaat vermenigvuldigen:
Je zult zien dat om het product van twee complexe getallen te vinden alleen hun lengtes hoeven te worden vermenigvuldigd en beide hoeken te worden opgeteld.

Met de applet kun je ook andere complexe getallen bekijken en omzetten naar de poolvoorstelling...



Figuur 2.2

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je een complex getal kunt schrijven als: $z = r \cdot \cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot r \sin(\varphi)$. Hierin is φ de hoek die de bijbehorende vector met de positieve x-as maakt en r de lengte van die vector. Neem nu $z = 2 + 2\mathrm{i}$.

a Bepaal r en $\varphi = \arg(z)$.

b Waarom zijn er meerdere waarden voor φ mogelijk?

c Wat is Arg(z)?

d Schrijf $z = 2 + 2\mathrm{i}$ in de vorm $z = r \cdot \cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot r \cdot \sin(\varphi)$.

Opgave 2

Neem het complexe getal $z_1 = 1 - 2\mathrm{i}$.

a Bepaal $\varphi = \arg(z_1)$ in radialen en in twee decimalen nauwkeurig.

b Schrijf het complexe getal in de vorm $z_1 = r \cdot \cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot r \cdot \sin(\varphi)$.

Neem het complexe getal $z_2 = -1 + 2\mathrm{i}$.

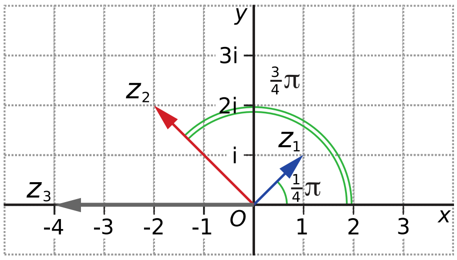
c Als je $\varphi = \arg(z_2)$ bepaalt met $\tan(\varphi) = -\frac{2}{1}$, krijg je niet meteen de goede hoek. Hoe komt dat?

d Schrijf dit complexe getal in de vorm $z_2 = r \cdot \cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot r \cdot \sin(\varphi)$.

Uitleg 2

Bekijk de applet

In de applet zie je hoe je twee complexe getallen vermenigvuldigt. Het lijkt er op dat bij het vermenigvuldigen de lengtes van z_1 en z_2 worden vermenigvuldigd, maar de argumenten (de hoeken) worden opgeteld. Dat dit in het algemeen het geval is kun je bewijzen vanuit de poolvoorstellingen van beide complexe getallen.
In het algemeen is:
$z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + \text{i}\sin(\varphi_1))$ en $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + \text{i}\sin(\varphi_2))$.
Hierin is r de lengte en φ de hoek (tussen $-\pi$ en π) van het betreffende complexe getal.



Figuur 2.3

Door deze twee uitdrukkingen te vermenigvuldigen en de formules voor $\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ en $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ toe te passen kun je bewijzen dat:

De **vermenigvuldigingsregel**:
Als je twee complexe getallen $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + \text{i}\sin(\varphi_1))$ en $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + \text{i}\sin(\varphi_2))$ vermenigvuldigt, dan krijg je
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \text{i} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.
Je vermenigvuldigt dus de lengtes en telt de argumenten (hoofdwaarden van de hoeken) op.

Hieruit volgt meteen: als $z = r(\cos(\varphi) + \text{i}\sin(\varphi))$ dan is
$z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + \text{i}\sin(2\varphi))$.

Deze regel is door hem te herhalen uit te breiden naar (gehele positieve) machten van complexe getallen:
$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \text{i}\sin(n\varphi))$

Dit wordt wel de stelling van De Moivre genoemd.

Opgave 3

Bestudeer **Uitleg 2**.

a Bewijs de vermenigvuldigingsregel voor complexe getallen op de manier die in de uitleg wordt beschreven.

In de uitleg vind je ook de stelling van De Moivre. Hij volgt uit de vermenigvuldigingsregel voor complexe getallen. Neem $z = 1{,}5 + 2\,\text{i}$.

b Bereken z^2.

c Schrijf nu zowel z als z^2 in de poolvoorstelling. Controleer dat $|z^2| = |z|^2$ en $\arg(z^2) = 2 \cdot \arg(z)$.

d Leg nu uit waarom de stelling van De Moivre voor $n = 2$ uit de vermenigvuldigingsregel voor complexe getallen volgt.

e Doe het voorgaande ook met z^3 en leg uit waarom de stelling van De Moivre voor $n = 3$ uit de vermenigvuldigingsregel voor complexe getallen volgt.

f Waarom geldt $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + k \cdot 2\pi$ en dus de stelling van De Moivre?

g Bereken met de stelling van De Moivre $(2 + 0{,}5\,\text{i})^4$. Controleer het antwoord met je grafische rekenmachine.

Opgave 4

Dat complexe getallen kunnen worden gedeeld heb je al gezien. Net als bij vermenigvuldiging kun je eenvoudige regels afleiden voor het gedrag van modulus en argument daarbij: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ en $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

a Neem $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ en $z_2 = 1 - \mathrm{i}$ en bereken $\frac{z_1}{z_2}$. Laat zien dat de beide regels opgaan.

b De regel voor het delen van complexe getallen kun je bewijzen op de wijze die in **Uitleg 2** staat beschreven voor de vermenigvuldigingsregel. Laat dat zien.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Elk complex getal kan worden geschreven in de vorm

$z = x + \mathrm{i}\,y = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$:

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de **absolute waarde** of de **modulus** van z;
- φ is de hoek die de vector, die het complexe getal z voorstelt, maakt met de positieve x-as, het **argument** van z, notatie: $\arg(z)$.

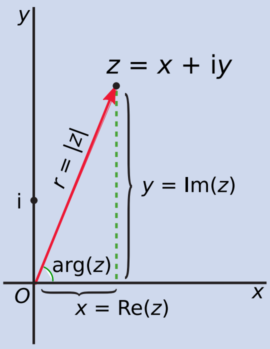
Laat je voor φ alleen waarden toe vanaf - π tot en met π, dan heb je de **hoofdwaarde van het argument**, notatie $\mathrm{Arg}(z)$.

Het getal 0 is een beetje een uitzondering: dat getal heeft een absolute waarde van 0, maar er hoort geen argument bij. Verder hebben alle andere complexe getallen zowel een modulus (absolute waarde) als een argument.
De hiervoor beschreven voorstelling van een complex getal als $z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ noem je de **poolvoorstelling** van z.

Twee belangrijke stellingen:

De **vermenigvuldigingsregel**:
Als je twee complexe getallen z_1 en z_2 vermenigvuldigt, dan geldt: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ en
$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

De **stelling van De Moivre**:
Voor elke waarde van φ en elk gehele getal n geldt:
$(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$



Figuur 2.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Bepaal modulus en argument van $z = 3 + 4\,\text{i}$.

Antwoord

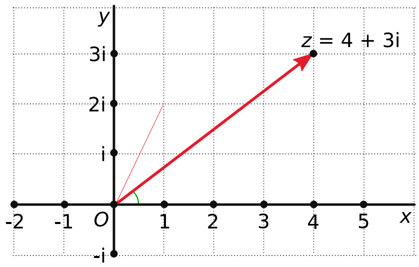
Bekijk de bijpassende vector.

De lengte van die vector is $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

De hoek die deze vector met de positieve x-as maakt is $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0{,}93$.

Dus de modulus van z is 5 en het argument van z is $\arg(z) \approx 0{,}93$.

Met de TI-84 kun je de modulus en het argument van een complex getal meteen bepalen in het [MATH] CMPLX menu: je gebruikt dan angle(3+4i) voor de hoek en abs(3+4i) voor de modulus van bijvoorbeeld $3 + 4\,\text{i}$. Andere grafische rekenmachines kennen vergelijkbare instellingen.



Figuur 2.5

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je modulus en argument bepaalt van $z = 3 + 4\text{i}$.

a Maak z met de applet. Lees $|z|$ en $\arg(z)$ uit de applet af.

b Controleer dat deze waarden overeenstemmen met de berekende waarden.

c Schrijf $z = 3 + 4\text{i}$ in de poolvoorstelling.

d Schrijf $\overline{z}$ in de poolvoorstelling.

Opgave 6

Neem nu $z = -4 + 2\text{i}$.

a Maak z met de applet en lees $|z|$ en $\arg(z)$ uit de applet af.

b Bepaal $|z|$ en $\arg(z)$ ook door berekening.

c Schrijf z in de poolvoorstelling.

d Oefen het schrijven van complexe getallen in de poolvoorstelling met deze applet.

Voorbeeld 2

Laat zien dat voor de complexe getallen $z_1 = 3 + 4\,\text{i}$ en $z_2 = 2{,}4 + \text{i}$ de vermenigvuldigingsregel geldt.

Antwoord

Ga na (zie **Voorbeeld 1**) dat: $|z_1| = 5$ en $\arg(z_1) \approx 0{,}93$.
Ga ook na, dat: $|z_2| = 2{,}6$ en $\arg(z_2) \approx 0{,}39$.

Nu is $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4\,\text{i})(2{,}4 + \text{i}) = 3{,}2 + 12{,}6\,\text{i}$.

Hiervoor geldt: $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{3{,}2^2 + 12{,}6^2} = 13$ en

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arctan\left(\frac{12{,}6}{3{,}2}\right) \approx 1{,}32$.

Inderdaad geldt
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ en $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Natuurlijk is dit nog geen bewijs voor de vermenigvuldigingsregel.

Het kan zijn dat $\arg(z_1) + \arg(z_2)$ op meer dan 2π uitkomt. In dat geval zullen $\arg(z_1 \cdot z_2)$ en $\arg(z_1) + \arg(z_2)$ verschillen. Neem je echter de hoofdwaarde van het argument, dan ontstaat dit probleem niet.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe de vermenigvuldigingsregel voor complexe getallen wordt gecontroleerd.

a Voer zelf deze berekening uit zonder naar het voorbeeld te kijken.

b Neem $z_1 = 1 + \text{i}$ en $z_2 = 1 - \text{i}$ en controleer die vermenigvuldigingsregel ook met deze twee complexe getallen.

Voorbeeld 3

De stelling van De Moivre is handig bij het berekenen van machten van complexe getallen. Bereken op die manier $(3 + 4\,\text{i})^4$.

Antwoord

Voor $z = 3 + 4\,\text{i}$ geldt $|z| = 5$ en $\arg(z) \approx 0{,}93$.
Dus is $z \approx 5 \cdot (\cos(0{,}93) + \text{i}\sin(0{,}93))$.

Dan is $z^4 \approx 5^4 \cdot (\cos(0{,}93) + \text{i}\sin(0{,}93))^4$.

Volgens de stelling van De Moivre is
$(\cos(0{,}93) + \text{i}\sin(0{,}93))^4 = \cos(4 \cdot 0{,}93) + \text{i}\sin(4 \cdot 0{,}93) =$
$\cos(3{,}72) + \text{i}\sin(3{,}72)$.

En dus is $z^4 \approx 625 \cdot (\cos(3{,}72) + \text{i}\sin(3{,}72)) \approx -523{,}3 - 341{,}7\,\text{i}$.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** kun je zien hoe je met behulp van de stelling van De Moivre de macht van een complex getal met de hand berekent.

a Loop zelf de berekening in het voorbeeld na.

b Bereken $(1 + \text{i})^5$ op de manier van het voorbeeld.

c Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

Verwerken

Opgave 9

LET OP! Het is de bedoeling dat je deze opgave handmatig doet. Gebruik de grafische rekenmachine alleen als controlemiddel! Bepaal modulus, argument en de hoofdwaarde van het argument van de volgende complexe getallen. Schrijf ze vervolgens in de poolvoorstelling.

a 1

b 2

c $1 + \text{i}$

d i

e -3i

f $-1 + \mathrm{i}$

g $1 - \mathrm{i}$

h $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}$

Opgave 10

Gegeven is $z = (1 + \mathrm{i})\left(0{,}5\sqrt{3} + 0{,}5\mathrm{i}\right)$.

Bereken exact: $\mathrm{Re}(z)$,$\mathrm{Im}(z)$,$|z|$,$\arg(z)$ en $\mathrm{Arg}(z)$.

Opgave 11

Toon aan, dat $\mathrm{Re}\,(z) \leq |z|$ voor elk complex getal z.

Opgave 12

Gegeven $z_1 = -2 + 1{,}5\mathrm{i}$ en $z_2 = 4 - 3\mathrm{i}$.

Laat zien dat voor deze twee complexe getallen de vermenigvuldigingsregel geldt.

Opgave 13

a Bereken $(2 - 2\,\mathrm{i})^5$ met behulp van de stelling van De Moivre.

b Bereken $z = (2 - 3\,\mathrm{i})^5$ met behulp van de stelling van De Moivre.

c Wat is het nadeel van het gebruik van deze stelling?

Opgave 14

Onder het toegevoegde complexe getal van een complex getal $z = x + \mathrm{i}\,y$ versta je het complexe getal $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y$. Je kent dit als $\overline{z}$, de geconjugeerde van z.

a Toon aan, dat $z\,\overline{z} = |z|^2$

b Bewijs: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

c Bewijs: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

d Bewijs dat $z = \overline{z}$ alleen geldig is als z reëel is, maar dan ook altijd waar is.

Toepassen

Opgave 15: Driehoeksongelijkheid

Je weet vast wel, dat in een driehoek elke zijde korter is dan de som van de lengtes van de twee andere zijden. In de vlakke meetkunde heet dit de driehoeksongelijkheid.

Toon behulp van deze ongelijkheid aan, dat: $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Opgave 16: Verzamelingen complexe getallen

Je kunt een complex getal ook voorstellen als een punt in het complexe vlak. Teken daarin alle complexe getallen z waarvoor geldt:

a $|z| = 5$

b $|z - 2| = 2$

c $|z - \mathrm{i}| = 2$

d $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$

Testen

Opgave 17

Bereken modulus en argument van

a $z = \mathrm{i}(3 - 5\mathrm{i})$

b $z = \frac{1}{3-5\mathrm{i}}$

c $z = (2 - \mathrm{i})^5(3 + 3\mathrm{i})^2$

d $z = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$

Opgave 18

Vat een complex getal op als een punt in een xy-vlak. Teken de complexe getallen die voldoen aan:

a $|z + \mathrm{i}| = 3$

b $|z + \overline{z}| < 2$

1.3 De formule van Euler

Inleiding

De beroemde wiskundige Euler voerde veel van de moderne notaties voor wiskunde in. Hij bedacht de i-notatie van complexe getallen en voerde het getal e in. En hij was in staat om met behulp van deze twee constanten de complexe getallen in een zeer handzame vorm te schrijven.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- complexe getallen schrijven in de vorm $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$;
- rekenen met complexe getallen in die vorm.

Voorkennis

- werken met complexe getallen in het complexe vlak;
- werken met modulus en argument bij de poolvoorstelling van een complex getal;
- het getal e gebruiken en exponentiële functies differentiëren.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt elk complex getal schrijven in de poolvoorstelling $z = x + \mathrm{i}\,y = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$.
Neem aan dat r een constante is en φ variabel, dan is $z = f(\varphi)$.
Neem ook aan dat je deze functie kunt differentiëren alsof i een constante is.

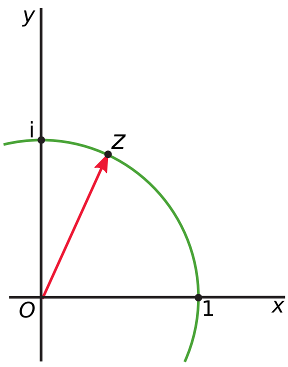
a Laat zien, dat $f'(\varphi) = \mathrm{i} \cdot f(\varphi)$.

b Welke functie heeft dezelfde eigenschap als f?

Uitleg

Bekijk de applet

Elk complex getal kan worden geschreven als:
$z = x + \mathrm{i}\,y = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$.
Wanneer $r = 1$ dan levert dit op: $z = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$.
Dit complexe getal ligt op een cirkel met straal 1 om de oorsprong van het complexe vlak. Als φ varieert van 0 tot 2π dan doorloopt het complexe getal die hele cirkel.



Figuur 3.2

Nu komt iets verrassends...
Stel, je vat $\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$ op als functie van φ. Vervolgens ga je deze functie differentiëren met behulp van de regels die voor reële functies gelden. Je neemt aan dat i een constante is.
Dus: $f(\varphi) = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$
geeft: $f'(\varphi) = -\sin(\varphi) + \mathrm{i}\cos(\varphi) = \mathrm{i}(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$.
Kennelijk geldt $f'(\varphi) = \mathrm{i} \cdot f(\varphi)$.
Nu is er een reële functie die gelijk is aan zijn eigen afgeleide, namelijk de e-macht.

Je zou kunnen opschrijven: als $g(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ dan is $g'(\varphi) = \mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$.
De functie f van hiervoor vertoont dan hetzelfde gedrag als $g(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$.
Euler bewees ook echt dat $f(\varphi) = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$.
Dit is de formule van Euler.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de formule van Euler: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi)$.
Een bewijs van deze formule is door Euler gegeven, maar valt buiten het bestek van dit onderwerp.

a Waarom is er in de uitleg nog geen sprake van een echt bewijs van deze formule?

b Leg uit dat deze formule betekent dat je elk complex getal kunt schrijven als $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$

c Schrijf $z = 2 + 2\mathrm{i}$ in de vorm $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Opgave 2

Neem het complexe getal $z_1 = 1 - \mathrm{i}$.

a Schrijf het complexe getal in de vorm $z_1 = r_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_1}$.

Neem het complexe getal $z_2 = -1 + \mathrm{i}$.

b Schrijf dit complexe getal in de vorm $z_2 = r_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_2}$.

c Bereken $z_1 \cdot z_2$ met behulp van de schrijfwijze uit a en b.

d Bereken $z_1 \cdot z_2 = (1 - \mathrm{i})(-1 + \mathrm{i})$ door haakjes wegwerken.

e Laat zien dat beide antwoorden uit c en d overeen komen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Voor elke waarde van φ geldt:

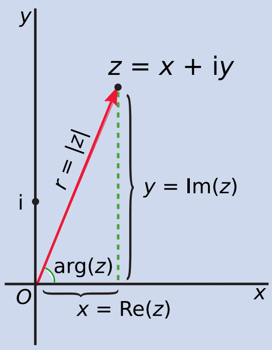
De **formule van Euler**:
$\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$

Nu is elk complex getal op drie manieren te schrijven:

- $z = x + \mathrm{i}\,y$
- $z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$
- $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$

waarin x het reële deel, y het imaginaire deel, r de modulus en φ het argument van het complexe getal in kwestie zijn.

Met complexe getallen die zijn geschreven als e-macht is het vermenigvuldigen opeens heel eenvoudig geworden. Je gaat er daarbij van uit dat je de rekenregels voor het werken met reële e-machten nog steeds kunt toepassen. De vermenigvuldigingsregel is dan in die vorm eenvoudig te bewijzen. En datzelfde geldt voor de stelling van De Moivre...



Figuur 3.3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Schrijf $z = 3 + 4\,\mathrm{i}$ in de vorm $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$.

Antwoord

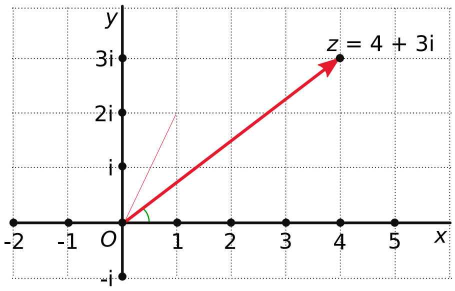
Maak de bijpassende vector met deze applet.

De lengte van die vector is $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

De hoek die deze vector met de positieve x-as maakt is $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0{,}93$.

Dus de modulus van z is 5 en het argument van z is $\mathrm{Arg}\,(z) \approx 0{,}93$.

En dus is $z = 5\,\mathrm{e}^{0{,}93i}$.



Figuur 3.4

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je $z = 3 + 4\mathrm{i}$ in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ zet.

a Maak z met de applet en ga na dat de waarden voor r en φ overeenstemmen met de berekende waarden.

b Schrijf $\overline{z}$ in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Opgave 4

Neem nu $z = -4 + 2\mathrm{i}$.

a Maak z met de applet en lees $|z|$ en $\arg(z)$ uit de applet af.

b Bepaal $|z|$ en $\arg(z)$ ook door berekening.

c Schrijf z in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

d Oefen het schrijven van complexe getallen in de poolvoorstelling met deze applet.

Voorbeeld 2

Laat zien hoe je de formule van Euler gebruikt om de complexe getallen $z_1 = 3 + 4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 2{,}4 + \mathrm{i}$ te vermenigvuldigen en te delen.

Antwoord

Ga na (zie **Voorbeeld 1**) dat: $z_1 \approx 5\,\mathrm{e}^{0{,}93i}$.
Ga ook na, dat: $z_2 \approx 2{,}6\,\mathrm{e}^{0{,}39\,\mathrm{i}}$.
Je rekent met deze e-machten zoals met reële e-machten.

Nu is $z_1 \cdot z_2 \approx 5\,\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}} \cdot 2{,}6\,\mathrm{e}^{0{,}39\,\mathrm{i}} = 13\,\mathrm{e}^{1{,}32\,\mathrm{i}}$.

Dit levert hetzelfde resultaat als
$z_1 \cdot z_2 = (3 + 4\,\mathrm{i})(2{,}4 + \mathrm{i}) = 3{,}2 + 12{,}6\,\mathrm{i}$.
Controleer dat zelf...

Verder is: $\frac{z_1}{z_2} \approx \frac{5 \cdot \mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}}{2{,}6 \cdot \mathrm{e}^{0{,}39\,\mathrm{i}}} = \frac{5}{2{,}6} \cdot \mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i} - 0{,}39\,\mathrm{i}} = \frac{25}{13}\mathrm{e}^{0{,}54\,\mathrm{i}}$.

Ga ook nu zelf na dat dit overeenkomt met $\frac{z_1}{z_2} = \frac{280}{169} + \frac{165}{169}\,\mathrm{i}$.

Opgave 5

Je kent de vermenigvuldigingsregel voor complexe getallen. In **Voorbeeld 2** zie je hoe vermenigvuldigen en delen gaat als je complexe getallen in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ schrijft.

a Voer de berekeningen in dit voorbeeld zelf uit.

b Oefen dit voor meerdere complexe getallen. Controleer je antwoorden met je grafische rekenmachine.

c Bewijs de regels voor vermenigvuldigen en delen van complexe getallen door ze in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ te schrijven.

Voorbeeld 3

Bereken $z = (3 + 4\,\mathrm{i})^4$ met behulp van de formule van Euler.

Antwoord

Stel eerst vast dat $3 + 4\,\mathrm{i} \approx 5\,\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}$.

Dan is $z \approx \left(5\,\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}\right)^4 = 5^4\left(\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}\right)^4 = 625\,\mathrm{e}^{4 \cdot 0{,}93\,\mathrm{i}} = 625\,\mathrm{e}^{3{,}72\,\mathrm{i}}$.

Dit kun je schrijven als $z \approx -523{,}3 - 341{,}7\,\mathrm{i}$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** kun je zien hoe je met behulp van de formule van Euler de macht van een complex getal met de hand berekent.

a Loop zelf de berekening in het voorbeeld na.

b Bereken $(1 + \mathrm{i})^5$ op de manier van het voorbeeld.

c Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

d De stelling van De Moivre kun je bewijzen vanuit de formule van Euler. Laat zien hoe.

Voorbeeld 4

Bereken $z_1 = \sqrt{3 + 4\,\mathrm{i}}$ en $z_2 = \frac{1}{(3+4\,\mathrm{i})^4}$.

Antwoord

Stel eerst vast dat $3 + 4\,\mathrm{i} \approx 5\,\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}$.

Dan is $z_1 = \sqrt{3 + 4\,\mathrm{i}} = (3 + 4\,\mathrm{i})^{0{,}5} \approx \left(5 \cdot \mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}\right)^{0{,}5} = 5^{0{,}5} . \mathrm{e}^{0{,}5 \cdot 0{,}93\,\mathrm{i}} = \sqrt{5}\,\mathrm{e}^{0{,}46\,\mathrm{i}}$.

En dus is $z_1 \approx \sqrt{5}(\cos(0{,}46) + \mathrm{i}\sin(0{,}46)) = 2 + \mathrm{i}$.
(Het is wel zaak om niet tussentijds af te ronden!)

Verder is $z_2 = \frac{1}{(3+4\,\mathrm{i})^4} = (3 + 4\,\mathrm{i})^{-4} \approx \left(5\,\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}\right)^{-4} = 5^{-4} . \mathrm{e}^{-4 \cdot 0{,}93\,\mathrm{i}} = \frac{1}{625}\mathrm{e}^{-3{,}71\,\mathrm{i}}$.

En dus is $z_2 \approx \frac{1}{625}(\cos(-3{,}71) + \mathrm{i}\sin(-3{,}71)) = -0{,}0013 + 0{,}0009\,\mathrm{i}$.
(In vier decimalen nauwkeurig.)

Opgave 7

In **Voorbeeld 4** kun je zien hoe je met behulp van de formule van Euler wortels en negatieve machten van een complex getal met de hand berekent.

a Loop zelf de berekeningen in het voorbeeld na.

b Je kunt de eerste berekening in het voorbeeld makkelijk controleren door terug te rekenen. Laat dat zien.

c De stelling van De Moivre is met behulp van de formule van Euler uit te breiden tot willekeurige reële waarden van n. Licht dit toe.

Worteltrekken uit complexe getallen is lastiger dan uit het voorbeeld blijkt.
Er geldt namelijk: $3 + 4\,\mathrm{i} \approx 5\,\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i} + k \cdot 2\pi}$.

d Laat zien dat hieruit volgt dat er eigenlijk twee complexe getallen zijn die de wortel uit $3 + 4\,\mathrm{i}$ kunnen zijn.

En het wordt nog erger. Ook de bekende rekenregels voor wortels leveren problemen op.

e Laat zien dat $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12} \neq \sqrt{-3 \cdot -12}$.

Verwerken

Opgave 8

Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

a 2

b i

c $3\mathrm{i}$

d $1 - \mathrm{i}$

e $-1 + \mathrm{i}$

f $-2 - 2\,\mathrm{i}$

Opgave 9

Gegeven is $z = (1 + \mathrm{i})\left(0{,}5\sqrt{3} + 0{,}5\,\mathrm{i}\right)$.

Schrijf z in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ door gebruik te maken van de formule van Euler.

Opgave 10

Schrijf deze complexe getallen in de vorm $z = x + \mathrm{i}\,y$:

$z_1 = 2\mathrm{e}^{0{,}5\pi\mathrm{i}}$; $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}}$; $z_3 = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}$; $z_4 = \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}}$; $z_5 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$

Opgave 11

a Bereken $(2 - 2\mathrm{i})^5$ met behulp van de formule van Euler.

b Bereken $(2 - 3\mathrm{i})^5$ met behulp van de formule van Euler.

Opgave 12

Bereken met behulp van de formule van Euler: $z = \frac{2}{(1+\text{i})^4}$.

Toepassen

Opgave 13: Sinus en cosinus als e-macht

Je kent nu de formule van Euler: $\text{e}^{\text{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \text{i} \cdot \sin(\varphi)$.

a Laat zien, dat $\text{e}^{-\text{i}\varphi} = \cos(\varphi) - \text{i} \cdot \sin(\varphi)$.

b Toon nu aan dat $\cos(\varphi) = 0{,}5\left(\text{e}^{\text{i}\varphi} + \text{e}^{-\text{i}\varphi}\right)$.

c Leid een vergelijkbare formule af voor $\sin(\varphi)$.

Testen

Opgave 14

Bereken z met behulp van de formule van Euler.

a $z = \text{i}(3 - 5\text{i})$

b $z = \frac{1}{3-5\text{i}}$

c $z = (2 - \text{i})^5 (3 + 3\text{i})^2$

d $z = \frac{(1+\text{i})^2}{\sqrt{3}-\text{i}}$

1.4 Vergelijkingen

Inleiding

Door het invoeren van de complexe getallen kun je opeens ook vergelijkingen als $x^2+1=0$ oplossen. In feite zijn alle kwadratische vergelijkingen nu op te lossen. Maar... het gaat nog veel verder: het is gebleken dat alle vergelijkingen van de vorm

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

(met n een positief geheel getal) precies n oplossingen hebben als je complexe getallen gebruikt. (Wat niet wil zeggen dat je ze ook kunt vinden en er kunnen gelijke bij zijn!)
Dit heet de hoofdstelling van de algebra.

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen van de vorm $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ oplossen met complexe getallen.

Voorkennis

- werken met complexe getallen, ook in de poolvoorstelling;
- de formule van Euler toepassen bij de schrijfwijze van complexe getallen;
- met complexe getallen rekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je kent de abc-formule voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen.

a Los nu op: $x^2 + 2x + 2 = 0$. Welke twee complexe getallen vormen de oplossing?

b Je kunt ook vergelijkingen met hogere machten oplossen. Los op: $x^4 + 16x^2 = 0$.

Uitleg

Van het oplossen van vergelijkingen met complexe getallen heb je al het nodige gezien. Sterker nog: complexe getallen zijn ingevoerd om vergelijkingen te kunnen oplossen die tot dan toe onoplosbaar waren.

De oplossing van $z^2 = -1$ is (per definitie): $z = -\text{i} \vee z = \text{i}$.

Maar hoe zit het nu met een vergelijking als $z^4 = -1$?
Welnu: daar helpt de formule van Euler.
Schrijf -1 in de poolvoorstelling $-1 = 1 \cdot \text{e}^{\pi \text{i} + k \cdot 2\pi \text{i}}$.
De vergelijking wordt dan $z^4 = 1 \cdot \text{e}^{\pi \text{i} + k \cdot 2\pi \text{i}}$.

Dit geeft $z = \left(1 \cdot \text{e}^{\pi \text{i} + k \cdot 2\pi \text{i}}\right)^{\frac{1}{4}} = 1 \cdot \text{e}^{0{,}25\pi \text{i} + k \cdot 0{,}5\pi \text{i}}$.

En dit levert maar liefst vier verschillende waarden voor z op:

- $z_1 = 1 \cdot \mathrm{e}^{0,25\pi\,\mathrm{i}}$
- $z_2 = 1 \cdot \mathrm{e}^{0,75\pi\,\mathrm{i}}$
- $z_3 = 1 \cdot \mathrm{e}^{1,25\pi\,\mathrm{i}}$
- $z_4 = 1 \cdot \mathrm{e}^{1,75\pi\,\mathrm{i}}$

En als dat wordt gevraagd kun je deze antwoorden in de vorm $z = x + \mathrm{i}\,y$ zetten. Je krijgt dan vaak wel benaderingen.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je de vergelijking $z^4 = -1$ wordt opgelost door gebruik te maken van $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

a Bepaal zelf deze oplossing en schrijf alle vier de z-waarden in de vorm $x + \mathrm{i}\,y$.

b Los op dezelfde manier op $z^4 = 1$.

Opgave 2

Er zijn ook vergelijkingen waarin al meteen complexe getallen voorkomen, zoals $(1+\mathrm{i})z = 2 - 2\,\mathrm{i}$. Dergelijke vergelijkingen los je net zo op als je altijd gewend bent: met de balansmethode.

a Waarom is hier de oplossing $z = \frac{2-2\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$?

b Meestal wil je een oplossing hebben in de vorm $x + \mathrm{i}\,y$, pas dan heb je een complex getal als oplossing. Welke oplossing heeft deze vergelijking dus?

c Los ook met de balansmethode op: $(1+\mathrm{i})z = 2z - 2\,\mathrm{i}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je weet dat er zelfs eenvoudige vergelijkingen bestaan die niet oplosbaar zijn binnen de verzameling der reële getallen. Het allereenvoudigste voorbeeld daarvan is wel de vergelijking: $x^2 + 1 = 0$. Want immers van elk reëel getal x is het kwadraat positief of 0 en dus nooit gelijk aan -1.

Er zijn wel complexe getallen te vinden waarvan het kwadraat negatief is. Bijvoorbeeld is: $\mathrm{i}^2 = -1$.
In de verzameling der complexe getallen is de vergelijking $z^2 + 1 = 0$ dus wel oplosbaar:
$z^2 + 1 = 0$ geeft $z^2 = -1$ en daarom $z = \mathrm{i} \vee z = -\mathrm{i}$.

Zo hebben wiskundigen bewezen dat in het stelsel der complexe getallen elke vergelijking van de vorm:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

precies n oplossingen heeft. Dit is de **hoofdstelling van de algebra**.

Het bewijs van deze stelling voert op dit moment te ver. Wel vind je hier een paar voorbeelden van het oplossen van vergelijkingen. Het gaat daarbij om het vinden van alle oplossingen, niet alleen maar de reële oplossingen.
Bij het oplossen zul je van de diverse schrijfwijzen van complexe getallen gebruik moeten maken.

Voorbeeld 1

Bepaal alle oplossingen in het complexe vlak van de vergelijking $z^3 = -1$.

Antwoord

Het getal -1 is te schrijven als: $-1 = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}}$.

Omdat $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$, kun je de gegeven vergelijking schrijven als: $\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}\right)^3 = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}}$, zodat $r^3\,\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,\varphi} = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}}$.

Dit betekent dat: $r^3 = 1$ en dus $r = 1$.

En ook dat: $3\varphi = \pi + k \cdot 2\pi$ en dus $\varphi = \frac{1}{3} \cdot \pi + k \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.

Daarmee heb je drie oplossingen in het complexe vlak gevonden, te weten:

$$z_1 = 1\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{i}} = 1\left(\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$z_2 = 1\,\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}} = 1(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)) = -1$$

$$z_3 = 1\,\mathrm{e}^{\frac{5}{3}\pi\,\mathrm{i}} = 1\left(\cos\left(\tfrac{5}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{5}{3}\pi\right)\right) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de vergelijking $z^3 = -1$ wordt opgelost door gebruik te maken van $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

a Los op dezelfde manier op $z^3 = 1$.

b Los op dezelfde manier op $z^4 = -1$.

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $z^2 + 2z + 5 = 0$ op.

Antwoord

Deze vergelijking kun je oplossen met door kwadraat afsplitsen: $z^2 + 2z + 5 = 0$ wordt $(z+1)^2 - 1 + 5 = 0$ en dus $(z+1)^2 = -4$.

Omdat $-4 = 4\,\mathrm{i}^2$ wordt de vergelijking $(z+1)^2 = 4\,\mathrm{i}^2$.
Dus vind je twee complexe oplossingen: $z_1 = -1 + 2\,\mathrm{i}$ en $z_2 = -1 - 2\,\mathrm{i}$.
Deze vergelijking heeft geen reële oplossingen.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je kwadratische vergelijkingen kunt oplossen door kwadraat afsplitsen. Je maakt dan gebruik van $\mathrm{i}^2 = -1$.

a Leg uit waarom $-4 = 4\,\mathrm{i}^2$.

b Laat zien hoe je zo de twee oplossingen vindt.

c Laat zien hoe je dit ook met de formule van Euler kunt doen.

d Laat zien hoe je de vergelijking in het voorbeeld ook met de abc-formule kunt oplossen.

e Los nu zelf op: $z^2 + 5z + 10 = 0$.

Voorbeeld 3

Los de vergelijking $(z+1-\text{i})^6 = \text{-i}$ op.

Antwoord

Deze vergelijking kun je op dezelfde wijze oplossen als die in het eerste voorbeeld.

Daartoe schrijf je: $z+1-\text{i} = r\,\text{e}^{\text{i}\,\varphi}$ en $\text{-i} = \text{e}^{1{,}5\pi\,\text{i}}$.
Wanneer je dit in de gegeven vergelijking stopt, vind je: $\left(r\,\text{e}^{\text{i}\,\varphi}\right)^6 = \text{e}^{1{,}5\pi\,\text{i}}$.

Dit betekent: $r^6 = 1$ en dus $r = 1$.

En ook: $6\varphi = 1{,}5\pi + k\cdot 2\pi$ zodat $\varphi = \frac{1}{4}\pi + k\cdot\frac{1}{3}\pi$.

Ga dat zelf na. Hiermee kun je alle zes de complexe oplossingen vinden.

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** kun je zien hoe je de vergelijking $(z+1-\text{i})^6 = \text{-i}$ oplost.

a Voer zelf die oplossing uit.

b Bepaal nu de zes complexe oplossingen van deze vergelijking.

c Controleer je antwoorden door invullen in de gegeven vergelijking.

Opgave 6

Bij het oplossen van vergelijkingen waarin complexe getallen voorkomen gebruik je vaak al bekende oplossingstechnieken.

a Los op: $2z + 5\text{i} = 3\text{i}z - 4$.

b Los op: $\frac{z+1}{z-\text{i}} = 2$.

c Los op: $\frac{3}{z} = 2\text{i}$.

Verwerken

Opgave 7

Los op. Schrijf de oplossingen in de vorm $r\cdot\text{e}^{\varphi\,\text{i}}$.

a $z^5 = 1$

b $3z^3 = \text{-}24$

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen exact op in $\mathbb{C}$.

a $z^3 = \text{i}$

b $z^4 = \text{-}16$

c $z^2 = \text{-i}$

d $z^3 = \text{-}27\text{i}$

e $z^4 = \text{-}8 + 8\text{i}\sqrt{3}$

f $\text{i}z^2 = 0{,}5$

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op in $\mathbb{C}$. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

- **a** $(z - \mathrm{i})^4 = 1$
- **b** $3z^2 + z + 3 = 0$
- **c** $z^2 = 8 + 6\mathrm{i}$
- **d** $(z + 1 - 2\,\mathrm{i})^3 = -2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}$
- **e** $2z^2 + 4\mathrm{i}z = 1$
- **f** $z^8 + 15z^4 - 16 = 0$

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen exact op in $\mathbb{C}$.

- **a** $3z + 2\mathrm{i} = 4\mathrm{i}z$
- **b** $(z - 1)^2 = 2\mathrm{i}$
- **c** $z^6 = -27$
- **d** $(z + 4\mathrm{i})\,(z - 4\mathrm{i}) = 16$

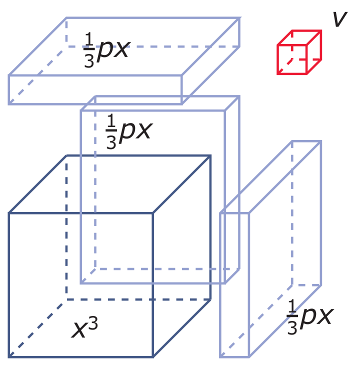
Opgave 11

Los op $z^2 = \mathrm{i}^{\mathrm{i}}$.

Toepassen

Opgave 12: De formule van Cardano

De formule van Cardano is vergelijkbaar met de abc-formule, maar dan voor een vergelijking als $x^3 + px = q$. De oplossing uit de tijd van **Girolamo Cardano** (1501—1576) was meetkundig, hier zie je hem in beeld. Hij verdeelt px in drie balken en bouwt zo door een kubusje met inhoud v toe te voegen een kubus met inhoud t. Nu is $t – v = q$. Verder is $\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{v} = x$. En ook is $\sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[3]{v} \cdot x = px$ de inhoud van één balkje, dus $t \cdot v = p^3$.



Figuur 4.1

Uit $t – v = q$ en $t \cdot v = p^3$ kun je afleiden dat $t = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$

en $v = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$.

Hieruit vind je $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$.

Dit is de formule van Cardano, hoewel hij voor het eerst door Scipio del Ferro is ontdekt. Je vindt er één oplossing van de gegeven vergelijking mee.

- **a** Schrijf zelf deze afleiding volledig uit.
- **b** Bepaal hiermee een reële oplossing van de vergelijking $x^3 + 6x = 20$.
- **c** Hoe kun je nu de twee complexe oplossingen vinden? Bepaal ze.

Deze methode werkt alleen als er geen x^2 in de derdegraadsvergelijking staat en de coëfficiënt voor x^3 gelijk is aan 1.

- **d** Hoe kun je nu toch met behulp van de formule van Cardano een oplossing vinden voor een vergelijking van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$?
- **e** Los exact op: $3x^3 + 11x^2 + 32x - 12 = 0$

Testen

Opgave 13

Los de volgende vergelijkingen op in $\mathbb{C}$. (Benaderingen in twee decimalen.)

a $(z - \mathrm{i})^3 = \mathrm{i}$

b $z^2 = \frac{1}{3-4\mathrm{i}}$

c $z^6 = 64\mathrm{i}$

d $\mathrm{i}z + 2 = 5 - \frac{2}{z}$

1.5 Complexe functies

Inleiding

Een reële functie heeft een voorschrift dat bij een getal uit het domein (een deel van de reële getallen) een getal uit het bereik (ook een deel van de reële getallen) berekent. Zowel domein als bereik zijn deel van een getallenlijn en dus kun je met twee getallenlijnen (een x-as en een y-as) deze functie in beeld brengen als een grafiek.
Bij een complexe functie is het domein een deel van het complexe Oxy-vlak en het bereik ook. Om zo'n functie in beeld te brengen moet je dus twee keer het complexe vlak tekenen en aangeven welk complexe getal als functiewaarde bij het complexe origineel hoort.
Soms kun je zowel domein als bereik in één assenstelsel aangeven...

Je leert in dit onderwerp

- het begrip complexe functie kennen;
- van sommige complexe functies domein en bereik weergeven in het complexe vlak.

Voorkennis

- werken met complexe getallen, ook in de poolvoorstelling;
- de formule van Euler toepassen bij de schrijfwijze van complexe getallen;
- met complexe getallen rekenen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is het complexe getal $z = 1 + 2\,\mathrm{i}$.
Hierna wordt steeds een complexe functie gegeven. Bereken telkens $f(z)$.
Leg ook uit, hoe $f(z)$ in het complexe vlak kan ontstaan uit z.

a $f(z) = 2z$

b $f(z) = \mathrm{i}\,z$

c $f(z) = \mathrm{i}\,z + 2$

d $f(z) = z^2$

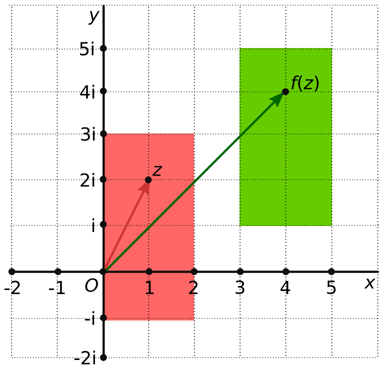
e $f(z) = \frac{1}{z}$

Uitleg 1

Bekijk de applet

Als van de complexe variabele $z = a+b\,\text{i}$ het reële deel kan variëren vanaf 0 t/m 2 en het imaginaire deel vanaf -1 t/m 3, dan ligt z binnen het gebied $[0,2] \times [-1,3]$ van het complexe vlak. Dat is een rechthoekje.

De functie f met voorschrift $f(z) = z+3+2\,\text{i}$ heeft dan $[0,2]\times[-1,3]$ als domein. Deze functie telt bij elke z uit het domein het complexe getal $3+2\,\text{i}$ op.
Het resultaat (het bereik van f) is een **translatie** (verschuiving) over vector $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.



Figuur 5.1

Je ziet hier domein (rood) en bereik (groen) in één figuur.
z_f stelt de functiewaarde $f(z)$ voor.

Uiteraard zijn ook andere complexe functies denkbaar, kijk maar verder...

Opgave 1

In **Uitleg 1** wordt de complexe functie f met $f(z) = z + 3 + 2\text{i}$ bekeken.

a Bereken $f(-1)$, $f(2-\text{i})$, $f(2+3\text{i})$ en $f(3\text{i})$. Bekijk in de applet hoe die functiewaarden ontstaan uit de gegeven z-waarden.

b Als $D_f = [0,2] \times [-1,3]$ wat is dan B_f? Ga met de applet na, dat elk punt in het domein van f een functiewaarde heeft in het bereik van f.

c Als D_f bestaat uit alle waarden van z met $|z| \le 2$, wat is dan B_f?

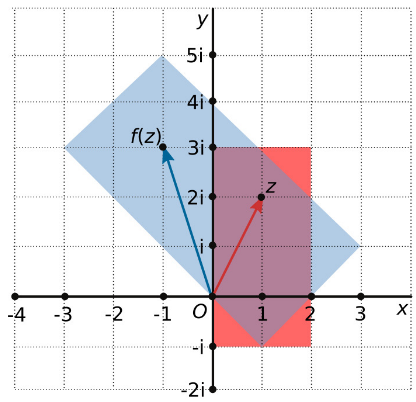
d Hoe ontstaat $f(z) = z + a + b\text{i}$ uit z?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Als van de complexe variabele $z = a+b\,\text{i}$ het reële deel kan variëren vanaf 0 t/m 2 en het imaginaire deel vanaf -1 t/m 3, dan ligt z binnen het gebied $[0,2] \times [-1,3]$ van het complexe vlak. Dat is een rechthoekje.

De functie g met voorschrift $g(z) = (1+\text{i})\cdot z$ heeft $[0,2]\times[-1,3]$ als domein. Deze functie vermenigvuldigt elke z uit het domein met het complexe getal $1+\text{i}$.
Het resultaat (het bereik van g) is dat elke $|z|$ wordt vermenigvuldigd met $|1+\text{i}| = 2$ en bij $\arg(z)$ telkens $\arg(1+\text{i}) = \frac{1}{4}\pi$ wordt opgeteld. Er vindt dus t.o.v. van de oorsprong O een **vergroting** met $\sqrt{2}$ en een **rotatie** (draaiing) over $\frac{1}{4}\pi$ plaats. Dit noem je een **draaivermenigvuldiging**.



Figuur 5.2

Je ziet hier domein (rood) en bereik (blauw) in één figuur.
z_g stelt de functiewaarde $g(z)$ voor. Domein en bereik overlappen

elkaar. Dat is natuurlijk heel vaak het geval. Het domein van de functie kan wel het gehele complexe vlak beslaan en het bereik is ook (een deel van) het complexe vlak. Meestal is het beter om twee afzonderlijke complexe vlakken te tekenen.

Opgave 2

In **Uitleg 2** wordt de complexe functie g met $g(z) = (1+\text{i}) \cdot z$ bekeken.

a Bereken $g(\text{-i})$, $g(2-\text{i})$, $g(2+3\text{i})$ en $g(3\text{i})$. Bekijk in de applet hoe die functiewaarden ontstaan uit de gegeven z-waarden.

b Als $\text{D}_g = [0,2] \times [-1,3]$ wat is dan B_g? (Je kunt het bereik nu niet op dezelfde wijze beschrijven als het domein, maar je kunt het wel omschrijven.) Ga met de applet na, dat elk punt in het domein van g een functiewaarde heeft in het bereik van g.

c Als D_g bestaat uit alle waarden van z met $|z| \leq 2$, wat is dan B_g?

d Als D_g bestaat uit alle waarden van z met $|z| \leq 2$ en $0 \leq \arg(z) \leq 0{,}5\pi$, wat is dan B_g?

e Hoe ontstaat $g(z) = (a+b\text{i}) \cdot z$ uit z?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **complexe functie** f heeft een voorschrift waarmee je bij een complex getal z een **functiewaarde** $f(z)$ kunt berekenen. Het domein van f is (een deel van) het complexe vlak, het bereik ook. Een eenvoudige grafiek is daarom niet te maken. Wel kun je vaak aangeven hoe de waarden van het bereik meetkundig uit de waarden van z ontstaan. Je noemt dit **meetkundige afbeeldingen**.

Bij de functie $f(z) = z + a + b\text{i}$ wordt op elke z uit het domein van f een **translatie** (verschuiving) met vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ toegepast.

Bij de functie $f(z) = (a+b\text{i}) \cdot z$ wordt op elke z uit het domein van f een **draaivermenigvuldiging** om de oorsprong O met factor $|a+b\text{i}| = \sqrt{a^2+b^2}$ en draaihoek $\arg(a+b\text{i}) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ toegepast.

Deze regels kun je zelf vrij gemakkelijk bewijzen met behulp van de voorgaande theorie.

Dit betekent bijvoorbeeld dat een **complexe lineaire functie** zoals
$f(z) = (a+b\text{i}) \cdot z + c + d\text{i}$ op elke z een draaivermenigvuldiging om O gevolgd door een translatie toepast.
En uit de vermenigvuldigingsregel volgt dat de **complexe kwadratische functie** $f(z) = z^2$ de modulus van elke z kwadrateert en het argument verdubbelt.
Bij veel complexe functies kun je vergelijkbare uitspraken doen...

Voorbeeld 1

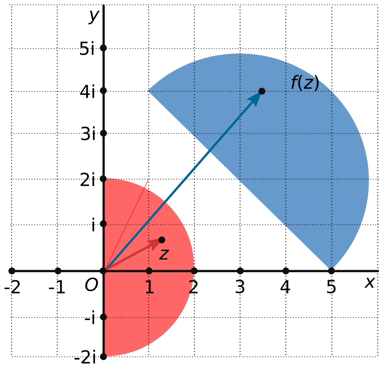
Bekijk de applet

Gegeven is de complexe functie $f(z) = (1 + \mathrm{i})z + 3 + 2\,\mathrm{i}$
Het domein bestaat uit alle waarden van z met $|z| \leq 2$ en $-0{,}5\pi \leq \arg(z) \leq 0{,}5\pi$.
Teken het domein en het bereik van f in één figuur.

Antwoord

Het domein is het binnengebied en de rand van een halve cirkel met straal 2 en middelpunt O.
Het getal z kan nu gemakkelijk worden voorgesteld door $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$.
Ga na dat elke z die voldoet aan de voorwaarden binnen het rode gebied blijft.

De functie is een lineaire complexe functie.
De vermenigvuldiging met $1 + \mathrm{i}$ zorgt voor een draaivermenigvuldiging om O met factor $|1 + \mathrm{i}| = 2$ en draaihoek $\arg(1 + \mathrm{i}) = 0{,}25\pi$.
Het optellen van $3 + 2\,\mathrm{i}$ zorgt voor een verschuiving over vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Ga na, dat $z_f = f(z)$ steeds binnen het (blauwe) bereik blijft.



Figuur 5.3

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe bij de functie f met $f(z) = (1 + \mathrm{i})\,z + 3 + 2\mathrm{i}$ en een gegeven domein het bereik wordt bepaald. Neem nu als domein $\mathrm{D}_f = [0{,}2] \times [-1{,}3]$

a Welke draaivermenigvuldiging en welke translatie moet je toepassen om het bereik te krijgen?

b Bereken $f(-\mathrm{i}), f(2 - \mathrm{i}), f(2 + 3\,\mathrm{i})$ en $f(3\,\mathrm{i})$.

c Beschrijf het bereik van f.

Opgave 4

Gegeven is de lineaire complexe functie g met $g(z) = 2\mathrm{i}z + 3 - \mathrm{i}$.
Neem als domein alle complexe getallen waarvoor $|z| \leq 3$ en $0 \leq \arg(z) \leq 0{,}5\pi$.

a Bereken $g(0)$, $g(3)$ en $g(3\,\mathrm{i})$.

b Met welke draaivermenigvuldiging en welke translatie kan het bereik ontstaan uit het gegeven domein?

c Teken het bijbehorende bereik.

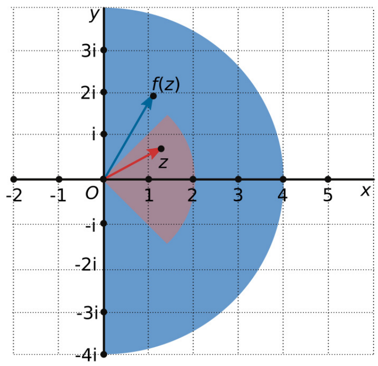
Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Gegeven is de complexe functie $f(z) = z^2$.
Het domein bestaat uit alle waarden van z met $|z| \leq 2$ en $-0{,}25\pi \leq \arg(z) \leq 0{,}25\pi$.
Teken het domein en het bereik van f in één figuur.
Hoe zijn het reële deel en het imaginaire deel van $f(z)$ uit die van z af te leiden?

Antwoord

Het domein is het binnengebied en de rand van een kwart cirkel met straal 2 en middelpunt O. Het getal z stel je voor door $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Ga na dat elke z die voldoet aan de voorwaarden binnen het rode gebied blijft.
Omdat $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ geldt: $z^2 = r^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$.
Dus $|f(z)| = |z|^2$ en $\arg(f(z)) = 2 \cdot \arg(z)$.
Dit geldt ook voor de punten op de rand van het domein. En daarom wordt het bereik een halve cirkel (alle argumenten verdubbelen) met als straal het kwadraat van de straal van het domein. Ga na, dat $z_f = f(z)$ steeds binnen het (blauwe) bereik blijft.



Figuur 5.4

Als $z = a + b\,\mathrm{i}$, dan is $z^2 = (a + b\,\mathrm{i})^2 = a^2 - b^2 + 2ab\,\mathrm{i}$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je bij $f(z) = z^2$ bij een gegeven domein het bereik bepaalt.

a Welke drie complexe getallen vormen de ‘hoekpunten’ van het gegeven domein?

b Laat door berekening zien dat de functiewaarden bij die drie complexe getallen de ‘hoekpunten’ van het bereik vormen.

c Neem nu als domein alle complexe getallen $z = 2 + b\mathrm{i}$ met $|b| \leq 2$. Beschrijf het bijbehorende bereik.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Gegeven is de complexe functie $f(z) = \frac{1}{z}$.
Het domein bestaat uit alle waarden van z met $|z| \leq 2$ en $0 \leq \arg(z) \leq 0{,}5\pi$.
Teken het domein en het bereik van f in één figuur.
Welke waarden van z blijven even ver van de oorsprong afliggen?

Antwoord

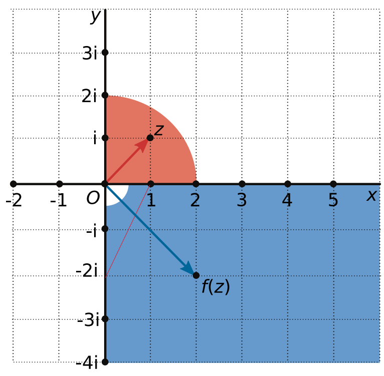
Het domein is het binnengebied en de rand van een kwart cirkel met straal 2 en middelpunt O. Het getal z stel je voor door $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$. Ga na dat elke z die voldoet aan de voorwaarden binnen het rode gebied blijft.

Omdat $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ geldt: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}$.

Dus $|f(z)| = \frac{1}{|z|}$ en $\arg(f(z)) = -\arg(z)$.

Dit geldt ook voor de punten op de rand van het domein. En daarom wordt het bereik het buitengebied van een kwartcirkel met straal $\frac{1}{2}$ en begrensd door de positieve x-as en de negatieve y-as. Ga na, dat $z_f = f(z)$ steeds binnen het (blauw begrensde) bereik blijft.

De z-waarden met $|z| = 1$ houden dezelfde afstand tot O.



Figuur 5.5

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je bij $f(z) = \frac{1}{z}$ bij een gegeven domein het bereik bepaalt. De complexe getallen $z = 0, z = 2$ en $z = 2\mathrm{i}$ vormen de 'hoekpunten' van het gegeven domein.

a Bereken $f(2)$ en $f(2\mathrm{i})$.

b Welke moeilijkheid doet zich voor bij het berekenen van $f(0)$?

c Beschrijf het bereik op dezelfde manier als het gegeven domein.

d Neem als domein alle waarden van z met $|z| \leq 4$ en $0 \leq \arg(z) \leq \pi$. Beschrijf het bereik.

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de complexe functie f met $f(z) = 2\,\mathrm{i}\,z + 1 - \mathrm{i}$.

a Bereken $f(0), f(3), f(2\,\mathrm{i})$ en $f(3 + 2\,\mathrm{i})$.

b Neem als domein $\mathrm{D}_f = [0,3] \times [0,2]$ en teken het bijpassende bereik.

c Door middel van welke afbeeldingen ontstaat dit bereik uit het gegeven domein?

d Toon aan dat bij elk complex getal $z = x + yi$ in dit domein een functiewaarde $f(z)$ hoort die in het bijpassende bereik ligt.

Opgave 8

Neem als domein alle complexe getallen $z = x + \mathrm{i}y$ met $|x| \leq 3$ en $|y| \leq 3$. Teken bij elk van de volgende complexe functies het bijpassende bereik.

a $f(z) = 2\mathrm{i}z$

b $g(z) = z + 1 - 2\mathrm{i}$

c $h(z) = (2 + 2\mathrm{i})\,z - 1$

d $k(z) = \frac{z}{1+\mathrm{i}}$

Opgave 9

De functie f met $f(z) = z^3$ heeft als domein alle complexe getallen waarvoor $|z| \leq 2$ en $0{,}25\pi \leq \arg(z) \leq 0{,}75\pi$.

a Beschrijf het bijbehorende bereik net zoals het domein is beschreven.

b Beredeneer dat alle complexe getallen die liggen op een lijn door de oorsprong O van het complexe vlak functiewaarden hebben die ook op een lijn door O liggen.

c Hoe zit dat met de functiewaarden van complexe getallen die op een lijn liggen die niet door O gaat?

Opgave 10

De functie f met $f(z) = \sqrt{z}$ heeft als domein alle complexe getallen waarvoor $|z| \leq 2$ en $-0{,}5\pi \leq \arg(z) \leq 0{,}5\pi$.

a Bereken $f(2\text{i})$ en $f(-2\text{i})$.

b Teken het bijbehorende bereik.

Opgave 11

De functie f met $f(z) = (1 + \text{i})\, z + 2\text{i}$ heeft als domein een vierkant met een oppervlakte van 25.

Hoe groot is de oppervlakte van het bijpassende bereik?

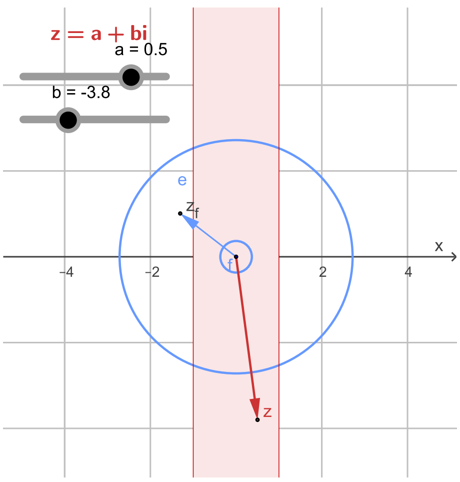
Toepassen

Opgave 12: Complexe e-macht

De functie $f(z) = \text{e}^z$ is de **complexe e-machtsfunctie**. Hij is periodiek.

Stel $z = a + b\,\text{i}$ en a kies je uit $[-1,1]$ en b uit $[-10,10]$.
Het domein van f wordt dan de rechthoek $[-1,1] \times [-10,10]$.
In de applet zie je z en $z_f = f(z)$ bij dit domein.
Het bereik wordt het gebied tussen de twee (blauwe) cirkels om O.

Bekijk de applet.



Figuur 5.6

Dat is gemakkelijk in te zien, want
$f(z) = \text{e}^{a+b\,\text{i}} = \text{e}^a \cdot \text{e}^{b\,\text{i}}$.
Voor de functiewaarden geldt dus $|f(z)| = \text{e}^a$ en
$\arg(f(z)) = b$.
De twee cirkels die het bereik bepalen hebben straal e^{-1} en e^1.

De periodiciteit van $f(z)$ blijkt als je alleen b verandert: $f(a + b\,\text{i}) = f(a + (b + 2\pi)\,\text{i})$.

Op dezelfde wijze kun je de complexe functie $g(z) = \ln(z)$ bestuderen.
Dan merk je dat het handiger is om uit te gaan van $z = r\,\text{e}^{\text{i}\varphi}$ ...

a Laat zien, dat $\text{e}^{1+\pi\text{i}} = -\text{e}$ en dat $\text{e}^{1+0{,}5\pi\text{i}} = \text{ei}$.

b Neem $z = x + \text{i}y$ en laat zien dat: $|f(z)| = \text{e}^x$ en $\arg(f(z)) = y$.

c Waarom is f een periodieke functie? Geef twee voorbeelden van complexe getallen die dezelfde functiewaarde hebben.

d Neem als domein $D_f = [-2,2] \times [-4,4]$ en teken het bijpassende bereik.

e Wat is het kleinste domein dat hetzelfde bereik heeft?

f Bekijk nu de complexe functie g met $g(z) = ln(z)$. Nu kun je complexe getallen het beste schrijven in de vorm $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Laat zien dat $ln(\mathrm{i}) = 0{,}5\pi$ en dat $ln(-1) = \pi$.

g Bereken nu exact: $g(1 + \mathrm{i})$, $g(3\mathrm{i})$ en $g(2 - 2\mathrm{i})$.

h Neem als domein alle reële getallen met $|z| \leq 2$. Bepaal het bijbehorende bereik.

Testen

Opgave 13

Gegeven is de complexe functie f met $f(z) = \left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) z - \mathrm{i}$.

a Bereken $f(0)$, $f(2)$, $f(3\mathrm{i})$ en $f(2 + 3\mathrm{i})$.

b Neem als domein $D_f = [-2,2] \times [-3,3]$ en beschrijf het bijpassende bereik.

c Door middel van welke afbeeldingen ontstaat dit bereik uit het gegeven domein?

d Voor welke waarde van z geldt: $f(z) = z$?

Opgave 14

De functie f heeft als domein alle complexe getallen waarvoor $|z| \leq 3$ en $-0{,}25\pi \leq \arg(z) \leq 0{,}25\pi$. Teken het bijpassende bereik als

a $f(z) = z^2$

b $f(z) = (3 + 4\mathrm{i})\, z$

c $f(z) = 0{,}5\mathrm{i}z + 3 - \mathrm{i}$

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Complexe getallen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- complex getal — reëel deel — imaginair deel — complexe vlak — geconjugeerde
- modulus (absolute waarde) — argument — poolvoorstelling — vermenigvuldigingsregel — stelling van De Moivre
- formule van Euler
- hoofdstelling van de algebra
- complexe functie — translatie en draaivermenigvuldiging

Activiteitenlijst

- een complex getal voorstellen in het complexe vlak — het imaginaire en het reële deel bepalen
- de poolvoorstelling van een complex getal opstellen — van een poolvoorstelling naar a + bi terugrekenen — de vermenigvuldigingsregel en de stelling van De Moivre gebruiken bij vermenigvuldigen en machtsverheffen
- complexe getallen schrijven in de vorm $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ met $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$ — met complexe getallen in die vorm rekenen
- vergelijkingen oplossen en daarbij complexe oplossingen bepalen
- functiewaarden bij complexe functies berekenen — bij het domein van een complexe functie het bereik in beeld brengen

Achtergronden

Sinds **Girolamo Cardano (1501—1576)** wordt gerekend met getallen die nu ‘imaginaire getallen’ worden genoemd. Cardano's belangrijkste werk op het gebied van de wiskunde is zijn ‘Ars Magna’. Daarin maakte hij de oplossing van alle typen derdegraads en vierdegraads vergelijkingen bekend. De door hem ingelijfde methode van **Tartaglia(1449—1557)** werd er in uitgelegd. Hoewel Cardano geen enkel begrip had van complexe getallen ontdekte hij dat er bij de oplossing van bepaalde derdegraads vergelijkingen met wortels uit negatieve getallen moest worden gewerkt. In feite maakte hij zo de eerste berekeningen met imaginaire getallen.

Figuur 6.1 **Girolamo Cardano**

Veel wiskundigen na hem moesten niets van deze in hun ogen imaginaire (aldus **Descartes (1596—1650)**) grootheden hebben, ze bestonden slechts in de verbeelding. Ze waren hoogstens nuttig (volgens **Albert Girard (1595—1632)** in zijn ‘L'Invention nouvelle en l'algèbre’ om bepaalde typen vergelijkingen te kunnen oplossen.

Desondanks bedacht **Raphael Bombelli (1526—1572)** rekenregels voor complexe getallen en bleven deze getallen in verschillende wiskundige problemen opduiken. In 1685 bedacht **John Wallis (1616—1703)** als eerste een meetkundige voorstelling gebaseerd op het werken met twee assen. Tegenwoordig worden complexe getallen veel toegepast.

Het werk van de Italiaanse wiskundigen uit de 16e eeuw leverde een algemene methode op voor het oplossen van derdegraads vergelijkingen. Daarbij speelt de **formule van Cardano** een belangrijke rol.

Testen

Opgave 1

Bereken het reële en het imaginaire deel van de complexe getallen.

a $z = (8 - 3\,\text{i})(2 + 5\,\text{i})$

b $z = (2 - 2\,\text{i})^2 \cdot (\text{-}4 + 3\,\text{i})$

c $z = \frac{2-2\,\text{i}}{\text{-}4+3\,\text{i}}$

Opgave 2

Los de vergelijkingen algebraïsch op en schrijf de oplossingen in de vorm $z = a + b\,\text{i}$. Rond alleen bij b en e af op twee decimalen, geef voor de rest exacte antwoorden.

a $2z^2 - 4z + 9 = 0$

b $z^4 = 1 - \text{i}$

c $\text{i}\,(z - \text{i})^2 = 16$

d $\text{i}\,z + 2 = 4\,\text{i} - 2z$

e $(z + 2 - \text{i})^3 = 1 + \sqrt{3}\,\text{i}$

Opgave 3

Teken (met toelichting) in het complexe vlak de punten z waarvoor geldt: $|z - 1| = 3$.

Opgave 4

Gegeven is de complexe functie $f(z) = (1 + 2\text{i}) \cdot z$. Het bereik van f is een cirkel met een oppervlakte van 64π.

Bereken de oppervlakte van het bijbehorende domein.

Opgave 5

Gegeven is de complexe functie $g(z) = \text{i}z + 1 - \text{i}$. Het domein van g is gegeven door $|z| \leq 3$ en $\text{Arg}(z) \geq 0{,}5\pi$.

Teken het bereik van g.

Opgave 6

Gegeven is de complexe functie: $f(z) = \frac{z}{1+\mathrm{i}}$

a Stel $z = a + b\mathrm{i}$. Bereken a en b als $f(z)$ de geconjugeerde is van $z + 1$.

b Stel $z = a + b\mathrm{i}$. Neem aan dat $1 \leq a \leq 3$ en $0 \leq b \leq 4$. Alle z-waarden die hieraan voldoen vormen het domein van f. Beschrijf het bijbehorende bereik.

Toepassen

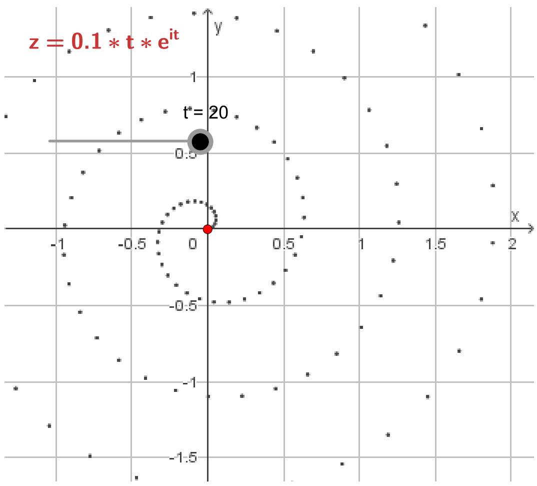
Opgave 7: Vlakke krommen

Bekijk de applet

Met behulp van complexe getallen kun je krommen in het complex vlak beschrijven.

In de notatie van Euler $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ is het namelijk goed mogelijk om r en/of φ te variëren. Beide kunnen bijvoorbeeld worden opgevat als functie van een parameter t. Afhankelijk van t krijg je dan telkens een nieuw punt in het assenstelsel. Die punten kunnen allerlei krommen vormen. Een cirkel maken is zo heel gemakkelijk, toch?

Als je t laat toenemen zie je hier (punten van) de kromme ontstaan waarvoor geldt $z = 0{,}1t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.



Figuur 6.2

a Hoe ziet de kromme er uit die wordt beschreven door: $z = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$?

b Bekijk de spiraal die in de applet ontstaat. Hoe kun je aan de gegeven formule zien dat het een spiraal moet worden?

c Hoe kun je met behulp van complexe getallen een cirkel beschrijven?

d Hoe kun je een ellips beschrijven?

e Een ingewikkelder kromme is de verzameling van alle punten z die beschreven wordt door: $z = \frac{2t}{1+t} \cdot \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}$, met $t \geq 0$. Beschrijf de kromme die deze verzameling in het complexe vlak vormt.

f Het is niet beslist nodig om de notatie van Euler te gebruiken. Ook in de schrijfwijze $z = x + \mathrm{i}y$ kunnen zowel x als y een functie van t zijn. Zoek een paar ‘mooie’ krommen en beschrijf die met behulp van complexe getallen. Probeer telkens ook te bepalen hoe $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$ van t afhangen. Teken ook de uitgezochte krommen!

Opgave 8: Mathematische slinger

Een mathematische slinger is een (niet bestaanbare) ideale slinger. Hij is het best te benaderen door een naar verhouding kleine loden kogel aan een lange, sterke maar ragdunne draad te hangen. Als je de kogel uit zijn evenwichtsstand brengt en loslaat gaat hij slingeren. Bij de ideale slinger neem je dan aan, dat de draad geen massa heeft en geen luchtweerstand ondervindt.
De kogel wordt voortbewogen door een component van de zwaartekracht, waarvoor volgens de tweede wet van Newton geldt:
$F = m \cdot a = -mg \sin(\alpha)$

Hierin is:

- a is de versnelling (in m/s^2), de afgeleide van de snelheid v (in m/s), die de afgeleide van de afgelegde weg s (in m) is;
- m is de massa in g;
- g is de zwaartekrachtversnelling;
- α is de hoek van de draad met de evenwichtsstand (in rad).

α hangt af van de tijd t (in s).
Verder is $s = l \sin(\alpha)$ met l in m. $\sin(\alpha) \approx \alpha$ voor kleine hoeken.
Voor $\alpha(t)$ geldt: $l \cdot \alpha''(t) = -g \cdot \alpha(t)$.
Deze differentiaalvergelijking is op te lossen m.b.v. complexe getallen. De oplossingen zijn $\alpha(t) = r\,\mathrm{e}^{ct\,\mathrm{i}}$, r en c zijn hierin nog te bepalen constanten. Het reële deel van deze functie is de sinusoïde die de beweging van de kogel beschrijft.

a Leid voor $\alpha(t)$ de volgende differentiaalvergelijking af: $\alpha''(t) = -\frac{g}{l} \cdot \alpha(t)$.

b Laat zien, dat aan een dergelijke differentiaalvergelijking een functie van de vorm $\alpha(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}ct}$ voldoet. r en c zijn hierin nog te bepalen constanten.Bepaal deze constanten, dat wil zeggen druk ze uit in g en l.

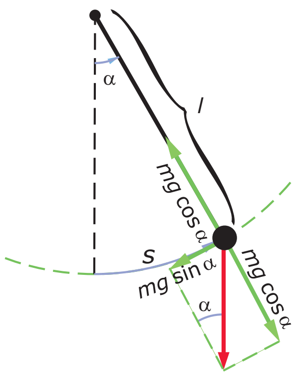
c Herleid de functie die je nu krijgt naar de vorm: $\alpha(t) = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$. Laat zien, dat het reële deel van de gevonden functie $\alpha(t)$ een zuivere sinusoïde oplevert.

d Neem $l = 1$ m en zoek de juiste waarde van g op. Neem aan dat $\alpha(0) = 0{,}1$ rad. Stel nu een functievoorschrift op voor de a afhankelijk van t.

e Natuurlijk moet je eigenlijk rekening houden met de luchtweerstand en de wrijving die daardoor ontstaat. Die wrijving is recht evenredig met $l \cdot \alpha'(t)$. Laat zien, dat nu geldt: $ml\alpha''(t) + kl\alpha'(t) = -mg\alpha(t)$, waarin k een positieve constante, de wrijvingscoëfficiënt, is.

f Deze differentiaalvergelijking is nog niet eenvoudig op te lossen. Probeer een functie als $\alpha(t) = \mathrm{e}^{zt}$, waarin z een willekeurig constant complex getal is.

Laat zien dat de differentiaalvergelijking dan overgaat in $mlz^2 + klz = -mg$.



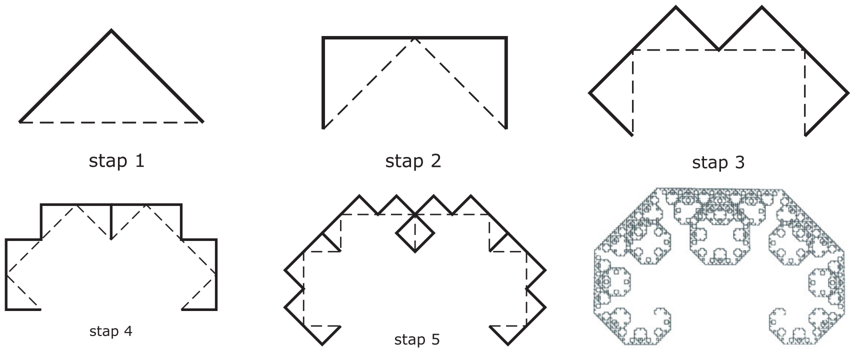
Figuur 6.3

g Neem $l = 1$ m, $m = 500$ g en $k = 0{,}10$. Bepaal nu de oplossingen $\alpha(t)$ van de differentiaalvergelijking. Is de grafiek van het reële deel van $\alpha(t)$ nu ook een zuivere sinusoïde?

h Heeft de differentiaalvergelijking voor alle waarden van m, l en k zinvolle oplossingen? Verklaar je antwoord.

Opgave 9: Fractalen

Omstreeks 1918 ontdekte de Franse wiskundige **Gaston Julia** een zeer grillige meetkundige structuur, waarvan hij zich toen nauwelijks een visuele voorstelling kon maken. Pas in de laatste jaren zijn wiskundigen met behulp van snelle computers met grote grafische mogelijkheden in staat om deze structuren - die de wiskundige **Mandelbrot** fractalen is gaan noemen - zichtbaar te maken.



Figuur 6.4

De fractal van Levy bijvoorbeeld is te construeren door te beginnen met een (niet te klein) lijnstuk en dat te vervangen door een half vierkant waarvan de uiteinden samenvallen met die van het lijnstuk. Vervolgens herhaal je dat met de twee lijnstukjes die je gekregen hebt, enzovoorts, tot in het oneindige door.

De Levy-fractal kun je beschrijven met een stelsel complexe functies.
Begin met de complexe getallen z met $\text{Im}(z) = 0$ en $\text{Re}(z)$ uit $[0,4]$.
Pas op elke z deze twee functies toe:

$$L(z) = \frac{1}{2}(1 + \text{i})z$$

$$R(z) = \frac{1}{2}(1 - \text{i})z + 2(1 + \text{i})$$

Teken de beide beeldlijnstukken. Pas op elk der beeldlijnstukken opnieuw beide functies toe. Je krijgt dan vier beeldlijnstukjes, waarop je opnieuw beide functies loslaat. En zo ad infinitum.

Als je googlet op ‘fractal’ vind je veel sites waar prachtige voorbeelden van fractalen zijn te zien...

a Maak zelf de fractal van Levy.

Het vreemde van fractalen is dat er een (in principe) oneindig lange gebroken lijn ontstaat op een eindig oppervlak. Fractalen zijn met de computer te tekenen en met complexe getallen vaak te beschrijven met behulp van eenvoudige lineaire complexe functies.

b Gegeven is de complexe functie $f(z) = (1 + \text{i})\, z$. Teken het beeld van $z_1 = 0$ en $z_2 = 4$ en van het lijnstuk tussen beide punten.

c Met welke factor wordt de lengte van het lijnstuk vermenigvuldigd? Over welke hoek wordt het gedraaid?

d Beantwoord dezelfde vragen voor de complexe functie $g(z) = (1 + \mathrm{i})\, z + (1 - \mathrm{i})$.

Fractalen kunnen nu ontstaan door complexe functies na elkaar te blijven uitvoeren. Bijvoorbeeld kan de Levy-fractal beschreven worden met behulp van een stelsel complexe functies. Begin met de complexe getallen z gelegen op het lijnstukje met eindpunten $z_1 = 0$ en $z_2 = 4$. Pas op elke z deze twee functies toe: $L : L(z) = 0{,}5(1 + \mathrm{i})\, z$; $R : R(z) = 0{,}5(1 - \mathrm{i})\, z + 2(1 + \mathrm{i})$.

e Teken de beide beeldlijnstukken. Pas op elk der beeldlijnstukken opnieuw beide functies toe. Je krijgt dan vier beeldlijnstukjes, waarop je opnieuw beide functies loslaat. Enzovoort.

f Een andere bekende fractal is de H-fractal. Daarbij zet je telkens aan de eindpunten van een lijnstuk twee lijnstukjes die er loodrecht op staan en er de helft van zijn. Teken eens een H-fractal (weer 12 stappen) en probeer hem door een stelsel complexe functies te beschrijven.

Echte liefhebbers van programmeren hebben natuurlijk aan een eenvoudig functievoorschrift genoeg om het ontstaan van de twee fractalen hierboven met de computer in beeld brengen! Daarbij kun je gebruik maken van het feit dat complexe getallen kunnen worden voorgesteld door vectoren (x, y). Er bestaan veel websites waarop fractalen zichtbaar worden gemaakt. Misschien raak je er door geïnspireerd om ze zelf te programmeren. Bekijk ze maar eens...

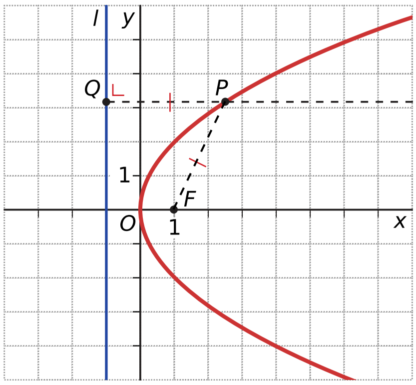
2

Krommen en oppervlakken

2.1 Parametervoorstellingen

Inleiding

Behalve cirkels zijn er nog veel meer soorten krommen. De parabool is daarvan een voorbeeld. Hier zie je hoe hij kan ontstaan, beweeg punt Q maar eens over lijn l. Maar hoe beschrijf je een parabool algebraïsch?



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- een parabool beschrijven met een vergelijking en een parametervoorstelling;
- raaklijnen aan een parabool opstellen.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen en parametervoorstellingen van lijnen en cirkels;
- snijpunten, hoeken en afstanden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

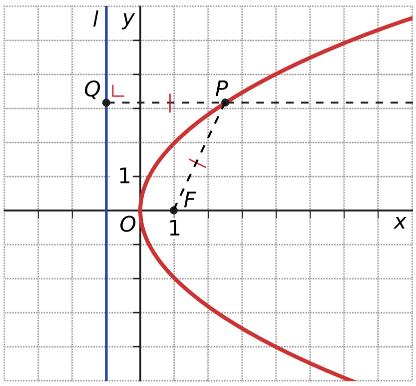
Bekijk de applet.

Beweeg punt Q over de lijn L en je ziet dat punt P een kromme doorloopt. Die kromme heet parabool.

a Wat is een parabool precies? Aan welke eigenschap moeten alle punten P voldoen?

b Hoe zou je een vergelijking van een parabool kunnen opstellen?

c Hoe zou je een vergelijking van een raaklijn aan deze parabool kunnen opstellen?



Figuur 1.2

Uitleg

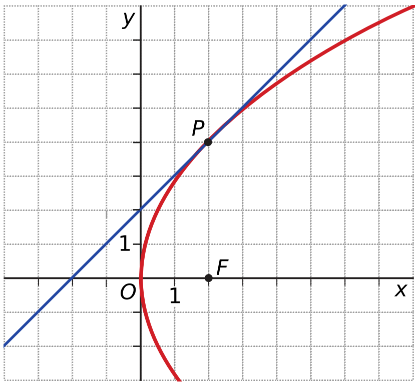
Bekijk de applet.

Je ziet hier de parabool met vergelijking $y^2 = 8x$. Ga dat na.

Je kunt je voorstellen dat een punt P deze parabool doorloopt met de 'tijd' t. Neem je nu aan dat $y = t$, dan volgt uit de vergelijking $8x = t^2$, dus $x = \frac{1}{8}t^2$.

Maar zo'n breuk is te vermijden.
Neem liever $y = 4t$, dan krijg je $8x = 16t^2$ en dus $x = 2t^2$.

Een geschikte parametervoorstelling zonder breuken is $x = 2t^2$ en $y = 4t$.



Figuur 1.3

Het punt $P(2,4)$ ligt op de parabool, de raaklijn in dit punt aan de parabool is getekend.
Om een vergelijking van deze raaklijn op te stellen moet je de richtingscoëfficiënt ervan weten. Bij een cirkel maak je gebruik van het feit dat zo'n raaklijn loodrecht op de straal naar het raakpunt staat, maar bij een parabool gaat dit niet. Je kunt de helling van de raaklijn echter uit de parametervoorstelling afleiden.

Breng je Q dichter bij P dan gaat de helling van lijn PQ die van de raaklijn benaderen. De helling van de raaklijn is daarom:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(t)}{\Delta x(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}}{\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4}{4t}$$

Omdat in het punt $P(2,4)$ geldt dat $t = 1$, krijg je een raaklijnrichtingscoëfficiënt van 1.
Je kunt ook zeggen dat in $P(2,4)$ de kromme een richtingsvector van $\vec{r} = \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ heeft. En als je t opvat als de tijd, dan heeft het bewegende punt P in $(2,4)$ een snelheid van $\sqrt{4^2 + 4^2}$, de lengte van de richtingsvector in dat punt.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de parabool $p: y^2 = 8x$.

a Bepaal zelf het brandpunt F en de vergelijking van de richtlijn r van deze parabool.

b Teken zelf een parabool (met GeoGebra?) waarvan de richtlijn de lijn $y = 3$ en het brandpunt $F(0,-3)$ is. Stel de vergelijking van deze parabool op en stel een bijpassende parametervoorstelling op.

c Voor welke punten op de parabool geldt $y = -2$?
Bereken deze punten eerst met behulp van de vergelijking en daarna met behulp van de parametervoorstelling.

d Waarvoor is de parametervoorstelling van de parabool handig? Bekijk eventueel de uitleg nog eens.

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg**. Het gaat nu om het opstellen van de vergelijking van een raaklijn aan een parabool in een punt op de parabool.

a Waarom is het bepalen van de hellingwaarde van zo'n raaklijn bij een parabool moeilijker dan bij een cirkel?

b Ga na dat de parametervoorstelling bij deze parabool klopt door deze in de vergelijking in te vullen.

c Je ziet hoe je de helling van de raaklijn kunt berekenen. Waarom geldt $\Delta t \to 0$ als $\Delta x \to 0$?

d Bereken nu met behulp van differentiëren de richtingscoëfficiënt van de gevraagde raaklijn en stel een vergelijking van die raaklijn op.

e Laat zien dat $Q(8,8)$ een punt van de parabool is en stel de vergelijking op van de raaklijn in dat punt aan de parabool.

f Punt R doorloopt de gegeven parabool. Welke snelheid heeft dit punt als het in $(18,14)$ zit?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

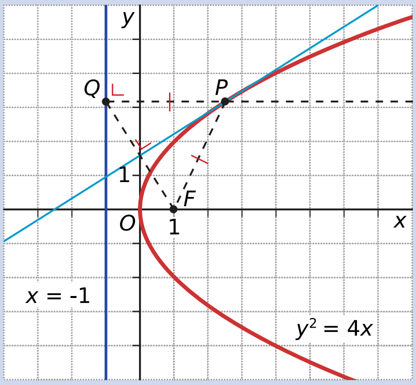
Een parabool is een kromme met vergelijking $(y-b)^2 = 2p(x-a)$ als de as horizontaal is. Hierin is p de halve afstand van het brandpunt tot de richtlijn en $T(a,b)$ de top van de parabool. Als $p > 0$ ligt de top aan de linkerkant, als $p < 0$ ligt de top rechts.
Door x en y te verwisselen krijg je een parabool met een verticale as. Als $p > 0$ ligt de top aan de onderkant, als $p < 0$ ligt de top boven.

Bij zo'n parabool (en bij veel krommen) kun je een **parametervoorstelling** maken. Bijvoorbeeld kun je dat bij de parabool met de algemene vergelijking hierboven bereiken door $y = t$ te kiezen. Je hebt dan y in t uitgedrukt en daarmee kun je ook x in t uitdrukken. De parametervoorstelling bestaat uit twee formules van de vorm $x = x(t)$ en $y = y(t)$.

De vergelijking van een **raaklijn** aan een parabool in een punt op de kromme bepaal je met behulp van een parametervoorstelling van de parabool. Voor de helling, de richtingscoëfficiënt, van zo'n raaklijn geldt:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Om de vergelijking van de raaklijn op te stellen bepaal je eerst de waarde van t die bij het gegeven punt op de parabool hoort.



Figuur 1.4

Deze t-waarde vul je in $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ in. Daarmee bereken je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn en dan kun je met de coördinaten van het gegeven punt de gewenste vergelijking in elkaar zetten.

De vector $\vec{r} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ is de **richtingsvector** van de parabool in het punt $P(x(t), y(t))$. Dit punt beweegt dan met een snelheid van $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

Voorbeeld 1

Stel een vergelijking en een parametervoorstelling op van de parabool met top $T(2,1)$ en richtlijn $y = -2$.

Antwoord

Omdat de richtlijn evenwijdig is aan de x-as, is de as van de parabool evenwijdig aan de y-as.
Wanneer de top $(0,0)$ zou zijn, was de vergelijking van de vorm: $x^2 = 2py$.
De top van de parabool ligt 3 eenheden boven de richtlijn, dus $p = 6$.

Omdat de top van de parabool (en dus ook de parabool zelf) van $(0,0)$ is verschoven naar $(2,1)$ is de vergelijking $(x-2)^2 = 12(y-1)$.

Om een parametervoorstelling te maken, kies je (bijvoorbeeld): $x = t + 2$.
Dan wordt de vergelijking $t^2 = 12(y-1)$, zodat $y = \frac{1}{12}t^2 + 1$.

De parametervoorstelling wordt: $x = t + 2$ en $y = \frac{1}{12}t^2 + 1$.

Opgave 3

In de **Theorie** wordt verteld dat $y^2 = 2px$ de vergelijking van een parabool met richtlijn $x = -0{,}5p$ en brandpunt $F(0{,}5p; 0)$ is.

a Je verschuift de top $(0,0)$ van deze parabool naar $(a,0)$. Hoe ziet de vergelijking er dan uit?

b Je verschuift de top $(0,0)$ van deze parabool naar $(0,b)$. Hoe ziet de vergelijking er dan uit?

c Schrijf een vergelijking op van de parabool met brandpunt $F(4,6)$ en richtlijn $x = 3$.

d Maak bij de parabool in c ook een parametervoorstelling.

Opgave 4

Stel een vergelijking en een parametervoorstelling op van de parabool p met richtlijn $y = 1$ en brandpunt $F(2,5)$.
Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 1**.

Voorbeeld 2

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de parabool p met vergelijking $y^2 = 4x + 2y$ in het punt $P(2,4)$.

Antwoord

Een parametervoorstelling van deze parabool is $x = t^2 - t$ en $y = 2t$.

Het punt $P(2,4)$ ligt op de parabool. (Altijd even nagaan!)
In dat punt is $t = 2$.

Voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn geldt:
$\frac{\text{d}y}{\text{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2}{2t-1}$.

De gevraagde raaklijn heeft dus een richtingscoëfficiënt van $\frac{2}{3}$.
De vergelijking ervan is $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

Opgave 5

In de **Theorie** gaat het over het opstellen van de vergelijking van een raaklijn aan een parabool. Neem nu de parabool gegeven door $y^2 = 6x + 6$.

a Bereken de punten op de parabool met $x = 5$.

b Maak een parametervoorstelling bij deze parabool.

c Bereken in beide punten die je bij a hebt gevonden de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt.

d Stel van beide raaklijnen bedoeld in c de vergelijking op.

In de **Theorie** staat ook dat je de raaklijn aan een parabool op een andere manier kunt berekenen, namelijk met behulp van de discriminant van een kwadratische vergelijking.

e Neem het punt $P(0{,}5\,;\,3)$ op de parabool. Stel een vergelijking op van de lijn door P met richtingscoëfficiënt a.

f Snijd deze lijn met de parabool en bereken vervolgens a zo, dat beide snijpunten samenvallen.

g Welke vergelijking heeft de raaklijn in P aan de parabool?

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Schrijf door kwadraat afsplitsen de vergelijking van de parabool zo, dat je er de top uit kunt aflezen.

b Bepaal de coördinaten van het brandpunt en de vergelijking van de richtlijn van deze parabool.

c Laat zien hoe de parametervoorstelling van deze parabool kan worden gevonden.

d Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan parabool p in de punten van p waarvoor $x = 0$.

Voorbeeld 3

De parabool p is gegeven door de parametervoorstelling $x = 2t + 4$ en $y = 4t^2 + 3$.
Bereken het brandpunt en de richtlijn van deze parabool.

Antwoord

Uit $x = 2t + 4$ volgt $t = 0{,}5x - 2$.
Invullen in $y = 4t^2 + 3$ geeft $y = 4(0{,}5x - 2)^2 + 3$.

Deze vergelijking kun je schrijven als $(x - 4)^2 = y - 3$.

De vergelijking van de parabool heeft dus de vorm $(x - a)^2 = 2p(y - b)$ met $a = 4$, $b = 3$ en $p = 0{,}5$.

De as van zo'n parabool is evenwijdig aan de y-as en de top is $(4{,}3)$.
Het brandpunt ligt $0{,}25$ hoger dan de top en is dus het punt $(4\,;\,3{,}25)$.
De richtlijn ligt $0{,}25$ lager dan de top en is dus de lijn $y = 2{,}75$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** worden van een parabool die is gegeven door een parametervoorstelling het brandpunt en de vergelijking van de richtlijn bepaald.

a Laat zien hoe je de vergelijking $(x - 4)^2 = y - 3$ kunt vinden.

b Leg uit waarom $p = 0{,}5$ en $b = 3$.

c Waarom ligt de top van deze parabool boven de richtlijn?

d Ga zelf na, hoe brandpunt en richtlijn nu worden gevonden.

Verwerken

Opgave 8

Hieronder wordt telkens een parabool p omschreven. Stel een vergelijking en een parametervoorstelling van p op.

a p heeft brandpunt (-4,0) en richtlijn $x = 2$.

b p heeft top $(0{,}2)$ en richtlijn $y = 0$.

c p heeft brandpunt $(0{,}2)$ en top $(4{,}2)$.

d p heeft brandpunt $(3{,}0)$, een richtlijn evenwijdig aan de y-as en gaat door $(0{,}4)$.

Opgave 9

De parabool p is gegeven door de parametervoorstelling $x = t^2 - 4$ en $y = 2t + 2$.
Lijn l gaat door $A(0{,}2)$ en $B(3{,}0)$.

a Bereken van p de coördinaten van het brandpunt en de vergelijking van de richtlijn.

b Bereken de exacte coördinaten van de snijpunten van p en l.

c Lijn l snijdt p in twee punten. Bereken in elk van deze punten de hoek waaronder l parabool p snijdt.

Doe de volgende opdracht alleen als je de techniek van het integreren beheerst.

d Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de parabool en de lijn.

Opgave 10

Gegeven zijn ten opzichte van een cartesisch assenstelsel de parabool $p : (y-2)^2 = -x+3$ en de cirkel $c : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 13$.

a Teken beide krommen (met GeoGebra?) in één figuur.

b Bereken de exacte coördinaten van de snijpunten van p en c.

c Bereken van beide krommen de coördinaten van de snijpunten met de assen.

d Bereken de hoek(en) waaronder beide krommen elkaar snijden.

Opgave 11

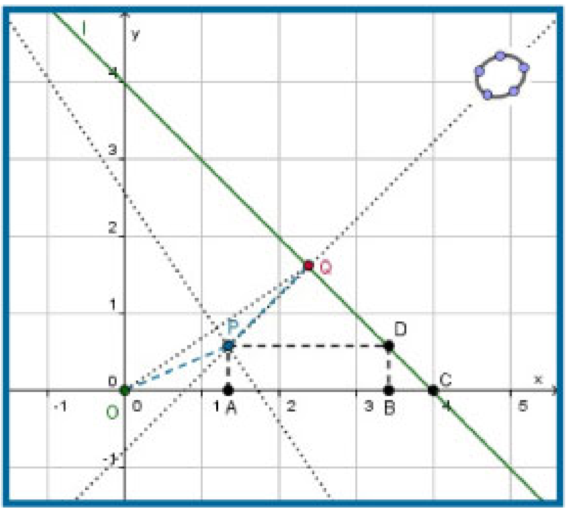
Een lijn l met richtingscoëfficiënt 3 raakt de parabool p met vergelijking $y^2 - 8y + 6x + 10 = 0$.
Bereken de exacte coördinaten van het raakpunt.

Toepassen

Opgave 12: Scheve parabool

Bekijk de applet

Een parabool hoeft geen symmetrieas te hebben die evenwijdig is aan de x-as of de y-as. De symmetrieas kan ook 'scheef' zijn. Neem bijvoorbeeld een parabool p waarvan het brandpunt de oorsprong O van het assenstelsel is en de richtlijn de lijn $l : x + y = 4$ is.



Figuur 1.5

a Construeer deze parabool met behulp van GeoGebra.

b In de figuur hiernaast is P een punt van de parabool, dus $|OP| = |PQ|$.
Leid uit $|OA| = x$ en $|AP| = y$ af dat $|PQ|^2 = 0{,}5 \cdot (4 - x - y)^2$.

c Laat zien dat voor P geldt:
$2\left(x^2 + y^2\right) = (4 - x - y)^2$.

d Laat zien dat bij parabool p de vergelijking $x^2 - 2xy + y^2 + 8x + 8y - 16 = 0$ hoort.

e Deze vergelijking kun je schrijven als $(x-y)^2 + 8(x+y) - 16 = 0$. Neem je nu $x - y = 4t$ dan kun je ook $x + y$ in t uitdrukken. Maak zo een parametervoorstelling van p.

f Bereken nu de coördinaten van de punten op p waarin de raaklijn evenwijdig loopt aan de x-as of de y-as.

Testen

Opgave 13

Een parabool p is gegeven door $x = 4 - 0{,}1t^2$ en $y = t - 3$.

a Bereken het brandpunt en de richtlijn van p.

b Bereken de hoek die de raaklijnen aan de parabool in de punten op p met $x = $ -6 met elkaar maken.

c In welk punt van p heeft de raaklijn een hellingwaarde van -2? Bereken de exacte coördinaten van dat punt.

Opgave 14

De cirkel $c : (x - 12)^2 + (y - 2)^2 = 65$ en de parabool $p : y^2 - 4y = 8x - 28$ hebben vier snijpunten.

a Bereken de coördinaten van die snijpunten.

b Bereken de grootte van één van de hoeken die de cirkel en de parabool met elkaar maken.

2.2 2D Krommen

Inleiding

De technieken die je bij lijnen, cirkels en parabolen hebt geleerd zijn ook bruikbaar bij andere vlakke krommen. Voorbeelden daarvan zijn de ellips en de hyperbool, maar ook de lemniscaat, de spiraal, het folium van Descartes, de conchoïde, enzovoorts. Je komt er in dit onderdeel diverse tegen...

Je leert in dit onderwerp

- enkele vlakke krommen beschrijven met een vergelijking en een parametervoorstelling;
- raaklijnen aan vlakke krommen opstellen, ook met behulp van impliciet differentiëren;
- symmetrie van vlakke krommen bewijzen.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen en parametervoorstellingen van lijnen, cirkels en parabolen;
- vergelijkingen van raaklijnen aan cirkels en parabolen opstellen;
- snijpunten, hoeken en afstanden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

Je ziet in de applet een cirkel met middelpunt $M(-3,0)$ en straal r en een punt $F(3,0)$. Je kunt r variëren.

Als je punt Q over cirkel c beweegt doorloopt punt P een ellips of een hyperbool.

a Wanneer is er sprake van een ellips, wanneer van een hyperbool?

b Neem $r = 8$ en stel een vergelijking van de ellips kunnen op. Hoe kun je daar een parametervoorstelling bij maken?

c Neem $r = 4$ en probeer hetzelfde voor deze hyperbool te doen.

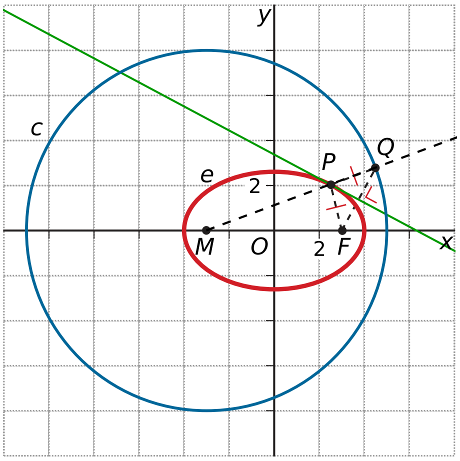
Uitleg 1

Bekijk de applet

Als je voor de richtcirkel $r = 8$ neemt, ontstaat de ellips met vergelijking
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.
Het getal $16 = 4^2$ is het kwadraat van de halve lengte van het lijnstuk dat de ellips afsnijdt van de lijn door beide brandpunten. Het getal $7 = \left(\sqrt{7}\right)^2$ is het kwadraat van de halve lengte van de andere symmetrieas.

Je kunt er een parametervoorstellingen bij maken. Daarbij moet je (net als bij de parametervoorstelling van een cirkel) denken aan de goniometrische formule $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$. Neem $x = 4\cos(t)$ en $y = \sqrt{7}\sin(t)$ en je vult dit in de vergelijking van de ellips in, dan ontstaat juist die formule. En aangezien die formule voor elke t geldig is, heb je meteen een geldige parametervoorstelling voor de ellips.

Met deze parametervoorstelling kun je vergelijkingen van raaklijnen aan een ellips opstellen, net als je dat eerder bij de parabool hebt gedaan.



Figuur 2.1

Opgave 1

Bekijk de ellips uit **Uitleg 1** nog eens.

a Toon aan dat elk punt A met $x = 4\cos(t)$ en $y = \sqrt{(7)}\sin(t)$ (met t in radialen) op deze ellips ligt.

Hiermee heb je een geschikte parametervoorstelling voor de ellips gevonden.

b Bereken met behulp van die parametervoorstelling de punten op de ellips waar de raaklijn horizontaal is en waar de raaklijn verticaal is.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de ellips in het punt P met x-coördinaat 2 en een positieve y-coördinaat.

Het centrum van de ellips e is $(0,0)$. Je verschuift de ellips tot het centrum $(3,2)$ is. Er ontstaat een nieuwe ellips e_2.

d Stel een parametervoorstelling op van e_2.

e Stel een vergelijking op van e_2.

f Bereken van deze nieuwe ellips de exacte snijpunten met de coördinaatassen.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Als je voor de richtcirkel $r = 4$ neemt, ontstaat de hyperbool met vergelijking
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^5}{5} = 1$.
Het getal $4 = 2^2$ is het kwadraat van de halve lengte van het lijnstuk dat de hyperbool afsnijdt van de lijn door beide brandpunten.
Het getal $5 = \left(\sqrt{3^2 - 2^2}\right)^2$ is de wortel uit het verschil van de kwadraten van de afstanden van een brandpunt tot het symmetriepunt en van een top tot het symmetriepunt.

Wil je nu een raaklijn aan deze hyperbool opstellen voor bijvoorbeeld $\left(4, \sqrt{15}\right)$ dan kun je met een parametervoorstelling gaan werken.
Zo'n parametervoorstelling vind je door $y = \sqrt{5}t$ te kiezen en dan $x(t)$ te bepalen. Dat gaat prima, alleen krijg je nogal vervelende wortelvormen. Die zijn vooral vervelend omdat je er mee moet differentiëren.

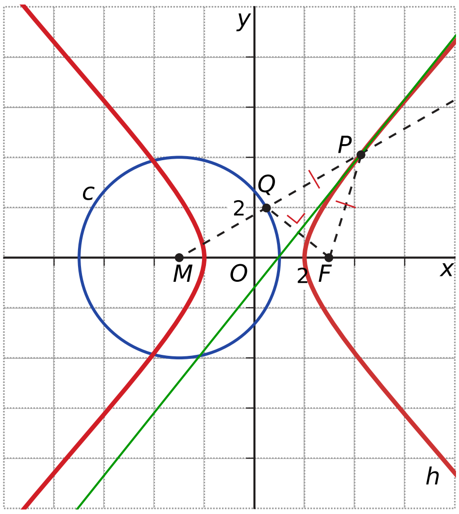
Maar het kan ook anders.
Doe net alsof je een parametervoorstelling $x = x(t)$ en $y = y(t)$ hebt gemaakt en vul die in de vergelijking van de hyperbool in:
$\frac{(x(t))^2}{4} - \frac{(y(t))^2}{5} = 1$ geeft $5(x(t))^2 - 4(y(t))^2 = 20$

En nu ga je dit gewoon differentiëren naar t, gebruik de kettingregel:
$5 \cdot 2(x(t))^1 \cdot x'(t) - 4 \cdot 2(y(t))^1 \cdot y'(t) = 0$ en dit geeft: $8y(t) \cdot y'(t) = 10x(t) \cdot x'(t)$ ofwel $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{10x(t)}{8y(t)} = \frac{5x}{4y}$.

Dus is de helling in een punt $P(x,y)$ gelijk aan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{5x}{4y}$.

Wil je de helling in $\left(4, \sqrt{15}\right)$?
Dan vul je die waarden in je formule voor de hellingswaarde in: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{5 \cdot 4}{4 \cdot \sqrt{15}} = \frac{5}{\sqrt{15}}$.

Deze handige techniek heet 'impliciet differentiëren'. Het werkt ook voor parabolen, ellipsen en andere krommen in 2D.



Figuur 2.2

Opgave 2

Bekijk de hyperbool uit **Uitleg 2** nog eens.

a Toon aan dat elk punt A met $x = \frac{2}{\cos(t)}$ en $y = \sqrt{5} \cdot \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ (met t in radialen) op deze hyperbool ligt.

Hiermee heb je een geschikte parametervoorstelling voor de hyperbool gevonden.

b Bereken met behulp van die parametervoorstelling de punten op de hyperbool waar de raaklijn verticaal is.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de hyperbool in het punt P met x-coördinaat 3 en een positieve y-coördinaat.

Het centrum van de hyperbool h is $(0,0)$. Je verschuift de ellips tot het centrum $(3,2)$ is. Er ontstaat een nieuwe ellips h_2.

d Stel een vergelijking op van h_2.

e Bereken van deze nieuwe hyperbool de exacte snijpunten met de coördinaatassen.

Opgave 3

Bekijk hoe in **Uitleg 2** de helling in het punt $\left(4,\sqrt{15}\right)$ wordt bepaald door impliciet differentiëren.

a Doe dit zelf ook eens.

b Stel de vergelijking op van de raaklijn aan de hyperbool in het genoemde punt.

Opgave 4

Gegeven is de ellips $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$.

a Bereken beide snijpunten met de y-as van deze ellips.

b Stel met behulp van impliciet differentiëren de vergelijking op van de raaklijn aan de ellips in het bovenste van de bij a genoemde snijpunten.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

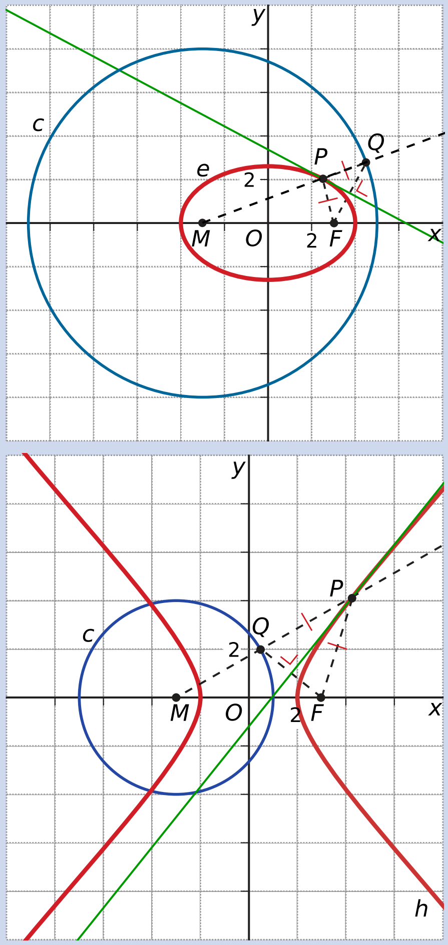
De **ellips** en de **hyperbool** zijn krommen die bestaan uit punten P met gelijke afstand tot een punt F als tot een cirkel c. Dit punt F heet het **brandpunt** (of focus), de cirkel heet de **richtcirkel**. De ellips ontstaat als F binnen de cirkel, de hyperbool als F er buiten ligt. Kies je de assen zo, dat $F = (p,0)$ en c middelpunt $(-p,0)$ en straal r heeft, dan krijg je

- voor de ellips:
  vergelijking: $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ waarin $m = 0{,}5r$ en $n^2 = (0{,}5r)^2 - p^2$
  parametervoorstelling: $x(t) = m\cos(t)$ en $y(t) = n\sin(t)$
- voor de hyperbool:
  vergelijking: $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ waarin $m = 0{,}5r$ en $n^2 = p^2 - (0{,}5r)^2$
  parametervoorstelling: $x(t) = \pm m\sqrt{1-t^2}$ en $y(t) = nt$

De parametervoorstellingen zijn vooral handig als je met hellingen, raaklijnen, wilt werken.

Soms is het handig om het daadwerkelijk bepalen van $x(t)$ en $y(t)$ te vermijden. Je doet dan net alsof die functies er zijn en je gaat **impliciet differentiëren**. Daarbij moet je goed met de kettingregel werken en de vergelijking die je krijgt herleiden tot de vorm: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Dit impliciet differentiëren kun je ook op andere krommen in 2D toepassen.



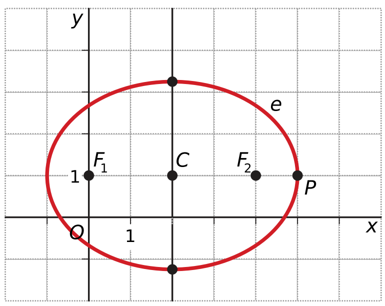
Figuur 2.3

Voorbeeld 1

Stel een vergelijking en een parametervoorstelling op van de ellips met brandpunten $F_1(0,1)$ en $F_2(4,1)$ die door $P(5,1)$ gaat.

Antwoord

Midden tussen beide brandpunten ligt het symmetriecentrum $C(2,1)$ van de ellips.
De ellips is de kromme van punten die evenver van F_2 als van de cirkel met middelpunt F_1 en straal r liggen. Nu is $r = |F_1P| + |F_2P| = 5 + 1 = 6$.
De brandpunten liggen een afstand van $p = 2$ van het centrum C.
De vergelijking van de ellips wordt daarom: $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2-2^2} = 1$ en dus $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$.



Figuur 2.4

De parametervoorstelling lijkt op die van een cirkel, maar dan met twee verschillende ‘stralen’ voor de x-richting en de y-richting.
Ga na dat $x = 3\cos(t) + 2$ en $y = 5\sin(t) + 1$ een passende parametervoorstelling is.

Opgave 5

In de **Theorie** wordt verteld dat de vergelijking van een ellips $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ is, als het centrum van die ellips $O(0,0)$ is en zowel het middelpunt van de richtcirkel als het brandpunt op de x-as liggen.
In de praktijk noem je ook het middelpunt van de richtcirkel een brandpunt van de ellips.

a Wat stelt m voor? Beschrijf zowel de betekenis bij de constructie als de afmeting van de ellips die erbij hoort.

b Wat stelt n voor? Beschrijf zowel de betekenis bij de constructie als de afmeting van de ellips die erbij hoort.

c Je kunt deze ellips ook construeren door F als middelpunt van de richtcirkel te nemen en M als brandpunt. Laat dat zien (bijvoorbeeld door de constructie met GeoGebra te maken).

d Je verschuift het centrum $O(0,0)$ van een ellips naar $C(a,b)$. Hoe ziet de vergelijking van die ellips er uit?

e Laat zien, dat $x = m \cdot \cos(t)$ en $y = n \cdot \sin(t)$ (met t in radialen) een geschikte parametervoorstelling is van een ellips met centrum $O(0,0)$.

f Welke parametervoorstelling is geschikt voor een ellips met centrum $C(a,b)$?

Opgave 6

In de **Theorie** wordt verteld dat de vergelijking van een hyperbool $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ is, als het centrum van die hyperbool $O(0,0)$ is en zowel het middelpunt van de richtcirkel als het brandpunt op de x-as liggen. Ga er in het vervolg van uit dat een hyperbool uit twee takken bestaat.

a Ga nog eens na dat de applet in de **Theorie** ook beide takken construeert.

b Licht toe dat de volgende definitie beter bij zo'n hyperbool past:
Een hyperbool is de verzameling punten P waarvoor geldt dat het absolute verschil van de afstanden van P tot elk van de gegeven brandpunten F_1 en F_2 constant is.

c Wat stelt m voor? Beschrijf zowel de betekenis bij de constructie met een richtcirkel als de afmeting van de hyperbool die erbij hoort.

d Je verschuift het centrum $O(0,0)$ van een hyperbool naar $C(a,b)$. Hoe ziet de vergelijking van die hyperbool er uit?

e Laat zien, dat $x = \frac{m}{\cos(t)}$ en $y = \frac{n\sin(t)}{\cos(t)}$ (met t in radialen) een geschikte parametervoorstelling is van een hyperbool met centrum $O(0,0)$.

f Welke parametervoorstelling is geschikt voor een hyperbool met centrum $C(a,b)$?

Opgave 7

De ellips die je in **Voorbeeld 1** ziet is symmetrisch t.o.v. de lijn $y = 4$.

a Toon dit aan.

b Welke andere symmetrieas heeft de ellips? Bewijs ook die symmetrie.

Opgave 8

In **Voorbeeld 1** gaat het over het opstellen van de vergelijking van een ellips als de brandpunten en een punt van de ellips zijn gegeven.

a Laat met behulp van een tekening zien dat de richtcirkel (met middelpunt F_1) een straal van 6 moet hebben.

b Licht nu toe hoe je de vergelijking van de ellips kunt vinden.

c Licht ook toe hoe je zelf de parametervoorstelling kunt vinden.

d Met behulp van de parametervoorstelling kun je de hellingwaarde van de raaklijn in een punt van de ellips bepalen. Bereken de hellingwaarde in elk van de twee punten waarvoor geldt $x = 0{,}5$.

Voorbeeld 2

De brandpunten van de hyperbool met vergelijking $4x^2 - y^2 - 8x + 4y = 16$ liggen beide op een lijn evenwijdig aan de x-as. Bereken hun coördinaten. Stel een vergelijking op van de raaklijnen aan deze hyperbool voor $x = 4$.

Antwoord

Nu is $4x^2 - 8x = 4\left(x^2 - 2x\right) = 4\left((x-1)^2 - 1\right) = 4(x-1)^2 - 4$.

En $-y^2 + 4y = -(y-2)^2 + 4$.
Hiermee wordt de vergelijking $4(x-1)^2 - (y-2)^2 = 16$.

Die kun je schrijven als: $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$. Nu kun je de brandpunten bepalen.

Voor de vergelijking van een raaklijn moet je $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ bepalen.
Maar, je hebt geen parametervoorstelling van de hyperbool. Die is ook niet nodig. Je werkt met de gegeven vergelijking en doet net alsof $x = x(t)$ en $y = y(t)$. Je differentieert dan de vergelijking van de hyperbool (let op de kettingregel) alsof je met functies van t te maken hebt (dit heet **impliciet differentiëren**):

$8x \cdot x'(t) - 2y \cdot y'(t) - 8x'(t) + 4y'(t) = 0$

Dit geeft: $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{8-8x}{4-2y}$ en dus $\frac{dy}{dx} = \frac{8-8x}{4-2y}$.

Ga na dat bij $x = 4$ hoort $y = 2 \pm 2\sqrt{5}$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is dan $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Nu kun je de vergelijkingen van beide raaklijnen opstellen.

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Ga na hoe je door kwadraat afsplitsen de vergelijking van de hyperbool zo kunt schrijven dat je het centrum ervan kunt aflezen.

b Bepaal de coördinaten van de brandpunten van deze hyperbool.

c De rechtertak van de hyperbool kan worden geconstrueerd met behulp van een richtcirkel. Welk middelpunt heeft deze richtcirkel? En hoe groot is de straal ervan?

Bestudeer nog even de manier waarop een formule voor het hellingsgetal van de raaklijn in een punt van de hyperbool wordt berekend. De techniek van impliciet differentiëren kun je vaak toepassen.

d Laat zien hoe je aan de formule voor $\frac{dy}{dx}$ kunt komen.

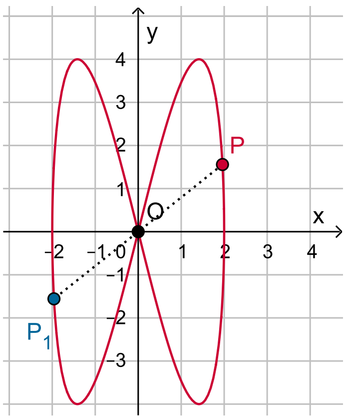
e Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de hyperbool voor $x = 4$.

f Onderzoek of er punten op de hyperbool zijn waarin de raaklijn een richtingscoëfficiënt van 1 heeft.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Hiernaast zie je een kromme k die 'lemniscaat' heet.
Hij heeft de vergelijking $y^2 = 4x^2(4 - x^2)$. Bewijs dat hij symmetrisch is t.o.v. de oorsprong van het assenstelsel.



Figuur 2.5

Antwoord

Een kromme is symmetrisch t.o.v. de oorsprong als behalve $P(x,y)$ ook $P_1(-x,-y)$ op de kromme ligt. Ga dit na, door P over de kromme te 'bewegen'.

Dit betekent dat ook $P_1(-x,-y)$ aan de vergelijking van de lemniscaat moet voldoen. Door de coördinaten van P in de gegeven vergelijking in te vullen, kun je eenvoudig nagaan dat dit inderdaad zo is...

Opgave 10

In **Voorbeeld 3** zie je een 'lemniscaat'.

a Bewijs dat de lemniscaat symmetrisch is t.o.v. de x-as.

b Stel met behulp van impliciet differentiëren een formule op voor $\frac{dy}{dx}$.

c Bereken hiermee de coördinaten van de punten op de lemniscaat waarin de raaklijn evenwijdig is aan de x-as.

d Bereken de hellingsgetallen van de twee raaklijnen in $(0,0)$ aan de lemniscaat. Welke hoek maken deze twee raaklijnen met elkaar?

e De lemniscaat snijdt van de lijn $y = px$ twee lijnstukken af met een lengte van $\sqrt{15}$. Bereken p.

Een parametervoorstelling van de lemniscaat is
$(x,y) = (2\cos(t), 4\sin(2t))$.

f Controleer dat deze parametervoorstelling dezelfde kromme beschrijft als de gegeven vergelijking.

g Bereken de twee hellingsgetallen van de raaklijnen in $(0,0)$ nog eens met behulp van deze parametervoorstelling.

Verwerken

Opgave 11

Hieronder wordt een kromme k omschreven. Stel een vergelijking en een parametervoorstelling van k op.

a k is een ellips met brandpunten $(-3,2)$ en $(5,2)$ die door $(1,5)$ gaat.

b k is een hyperbool met brandpunten $(-3,2)$ en $(5,2)$ die door $(5,8)$ gaat.

c k is een ellips waarvan de richtcirkel de vergelijking $x^2 + y^2 = 9$ heeft en het brandpunt $F(0,2)$ is.

Opgave 12

Gegeven zijn de ellips e door $x^2+4y^2 = 4x+8y-4$ en de parabool p door $(x-2)^2 = 4y$.

a Bereken van de ellips de coördinaten van de brandpunten.

b Bewijs de symmetrie van de ellips t.o.v. het punt C dat midden tussen beide brandpunten ligt.

c Bereken de snijpunten van beide krommen.

d Bereken de hoeken waaronder beide krommen elkaar snijden.

Opgave 13

De hyperbool h is gegeven door de vergelijking $x^2 - y^2 = 1$.

a Bereken de snijpunten van h met de assen.

b Bereken de exacte coördinaten van de brandpunten van h.

c Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan de hyperbool in de punten van h die liggen op de lijn $x = 2$. Bereken de coördinaten van het snijpunt van beide raaklijnen.

De lijn l door de punten $A(1,1)$ en $B(3,2)$ snijdt h in twee punten C en D.

d Welke hoek maken de raaklijnen in C en D aan de hyperbool met elkaar?

e Bewijs dat de cirkel met vergelijking $x^2+y^2 = p$ de hyperbool voor geen enkele reële waarde van p loodrecht snijdt.

Opgave 14

De ellips e is gegeven door de parametervoorstelling $(x,y) = (2+2\cos(t), \sin(t))$.

a Welke vergelijking heeft deze ellips?

De rechte lijn l met vergelijking $y = x - 1$ snijdt de ellips in A en B.

b Bereken de lengte van lijnstuk AB.

c Onder welke hoek(en) snijdt l de ellips?

d Stel de vergelijkingen op van de twee raaklijnen aan e die door het punt $P(0,2)$ gaan.

Opgave 15

Gegeven is de kromme k door $(x+y)^2 = 8x$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van k met de beide assen.

b Bereken de coördinaten van de punten van k waarin de raaklijn evenwijdig is met één der assen.

c De lijn met vergelijking $x - y = p$ raakt k. Bereken p.

d Toon aan dat elke lijn met vergelijking $x + y = q$ precies één punt met k gemeen heeft, maar hem niet raakt.

Toepassen

Opgave 16: Het folium van Descartes

Het folium van Descartes is de kromme f die kan worden beschreven door de vergelijking $x^3 + y^3 = 6xy$.

a Deze kromme kan ook worden beschreven door de parametervoorstelling $x = \frac{6t}{1+t^3}$ en $y = \frac{6t^2}{1+t^3}$. Toon dat aan.

b Bereken de coördinaten van alle punten op f waarin de raaklijn evenwijdig loopt met de x-as of de y-as.

c Toon aan dat f in de oorsprong O twee raaklijnen heeft die loodrecht op elkaar staan.

d Bewijs dat het folium van Descartes symmetrisch is t.o.v. de lijn $y = x$.

e Teken de kromme f.

Testen

Opgave 17

Een ellips e is gegeven door de vergelijking $x^2 + 8y^2 = 16$.

a Bereken de coördinaten van de brandpunten van e en de straal van een mogelijke richtcirkel van e.

b Stel een parametervoorstelling op voor e.

c Bereken de hoek die de raaklijnen aan de ellips in de punten op e met $y = 1$ met elkaar maken.

d In welk punten van e heeft de raaklijn een hellingwaarde van -2? Bereken de exacte coördinaten van die punten.

Opgave 18

Een tak van een hyperbool h wordt geconstrueerd met behulp van de richtcirkel $x^2 + (y-2)^2 = 4$ en brandpunt $F(0,3)$.

a Stel een vergelijking op van deze hyperbool.

b Bewijs de symmetrie van deze hyperbool t.o.v. het punt dat midden tussen F en het middelpunt van de richtcirkel ligt.

c Er zijn twee lijnen met vergelijking $y = ax + 2$ die de hyperbool raken. Bereken a.

2.3 3D Krommen

Inleiding

Mooie krommen? Denk maar eens aan achtbanen, zoals deze... Je beschrijft ze met parametervoorstellingen in 3D, dus met zowel x als y (in het grondvlak) als z (in de hoogte) als functie van de tijd t.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- krommen in 3D beschrijven met parametervoorstellingen;
- werken met snelheidsvectoren en de snelheid waarmee een punt een kromme doorloopt berekenen.

Voorkennis

- werken met parametervoorstellingen en vergelijkingen van krommen in 2D;
- werken met vectorvoorstellingen in 3D;
- snijpunten berekenen en evenwijdigheid in 3D.

Verkennen

Opgave V1

Een kromme wordt beschreven door
$x(t) = 8\cos(t)$, $y(t) = 8\sin(t)$ en $z(t) = 10 + 8\sin(2t)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.
Het Oxy-vlak is het grondvlak, z is de hoogte boven dit grondvlak.
Wat stel je je hierbij voor kromme voor?
Stel je voor dat het punt P over deze kromme loopt.

a Hoe ziet de beweging van P er uit als je loodrecht op het Oxy-vlak kijkt?

b Hoe ziet de beweging van P er uit ruimtelijk uit? (Probeer een schets te maken.)

Figuur 3.2

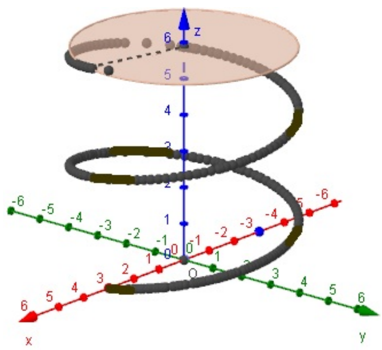
Uitleg

Met $P(x(t), y(t))$ beschrijf je hoe de coördinaten van een punt in een Oxy-vlak veranderen met de tijd t. Je krijgt dan een kromme in twee dimensies, x en y.

Is het Oxy-vlak als grondvlak op te vatten en kun je tegelijkertijd het punt omhoog en/of omlaag bewegen, dan heb je behalve $x(t)$ en $y(t)$ ook een functie $z(t)$ nodig. Die laatste functie legt dan vast hoe hoog het punt boven het Oxy-vlak zit. Je krijgt nu een kromme in drie dimensies.

Hier zie je een voorbeeld van zo'n 3D-kromme: als de cirkel gelijkmatig omhoog beweegt en tegelijk de rode punt op de cirkel langzaam draait om de verticale as, ontstaat (een stukje van) een Archimedische schroeflijn.

Er geldt: $(x,y,z) = \left(3\cos(t), 3\sin(t), \frac{3}{2\pi}t\right)$.



Figuur 3.3 **Zie figuurapplet.**

Wanneer je de 3D-kromme recht van boven (in de z-richting) bekijkt zie je de 2D-kromme $(x,y) = (3\cos(t), 3\sin(t))$, een cirkel. Bekijk je de 3D-kromme precies vanuit de y-richting, zie je $(x,z) = (3\cos(t), 3\sin(t))$, een sinusoïde om de z-as.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Bekijk minstens één winding van een (Archimedische) schroeflijn.

a Maak om te beginnen een tabel met waarden voor x, y en z als $t = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi, \ldots, 2\pi$.

b Teken vervolgens een ruimtelijk xyz-assenstelsel met de punten uit je tabel er in. Probeer nu zelf de schroeflijn te tekenen.

c Bekijk van boven (dus langs de z-as naar beneden) op de schroeflijn. Wat zie je?

d Kijk je van boven, dan speelt de z-waarde geen rol. Laat zien dat de kromme dan een cirkel is en stel een vergelijking van die cirkel op.

e Kijk nu langs de y-as naar de kromme. Wat zie je?

f Bij kijken langs de y-as speelt de y-waarde geen rol. Nu is x een functie van z. Welk functievoorschrift hoort daar bij?

g Beschrijf zo ook met een formule de kromme die je ziet als je langs de x-as kijkt.

Opgave 2

Bekijk de schroeflijn uit de voorgaande opgave nog eens.

a Hoe kun je het snijpunt van deze kromme met het vlak $z = 2$ berekenen?

b Bereken de snijpunten van de schroeflijn met het vlak $x = y$. Waarom zijn het er oneindig veel?

Opgave 3

Een rechte lijn l heeft vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a Welke parametervoorstelling heeft deze lijn?.

b Teken l in een assenstelsel met een kubus met ribben van 6 (zie figuur hiernaast).

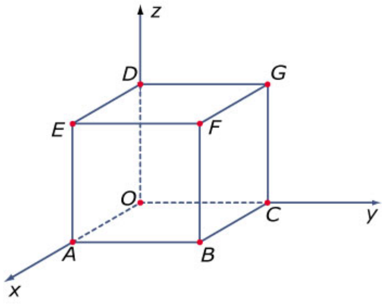
c In welke punten snijdt l de kubus?

Stel je voor dat de beweging van punt P in het assenstelsel beschreven wordt door deze rechte lijn. t is de tijd in seconden.

d Welke waarden kan t aannemen voor de punten P die binnen de kubus liggen?

e Hoe lang is het gedeelte van l dat binnen de kubus ligt?

f Hoe lang bevindt P zich binnen de kubus? Met welke snelheid beweegt P?



Figuur 3.4

Opgave 4

Een punt P beweegt met een constante snelheid en richting in een driedimensionaal rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel. Op $t = 0$ bevindt P zich in $(7,0,4)$ en op $t = 1$ in $(7,1,3)$.

a Waar zit P op $t = 10$? En op $t = -2$?

b Geef een parametervoorstelling van de baan van P.

c Hoe groot is de snelheid waarmee P beweegt?

d Welke vector is de snelheidsvector van P? Wat is het verschil tussen de snelheid en de snelheidsvector?

e Laat zien dat de snelheidsvector $\vec{v} = (x'(t), y'(t), z'(t))$ is.

Een ander punt Q doorloopt de baan beschreven door $(x,y,z) = (9+t, 6+2t, 6+2t)$.

f Botsen de punten P en Q op elkaar?

g Hebben de banen van deze punten een snijpunt?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

$(x,y,z) = (x(t),y(t),z(t))$ is een **plaatsvector** in een Oxy-assenstelsel die afhangt van de 'tijd' t. Het punt dat door deze plaatsvector wordt aangewezen beschrijft een **driedimensionale kromme** K. (Hier is een Archimedische schroeflijn te zien als de rode punt over de cirkel beweegt.)

De bijbehorende **snelheidsvector** is

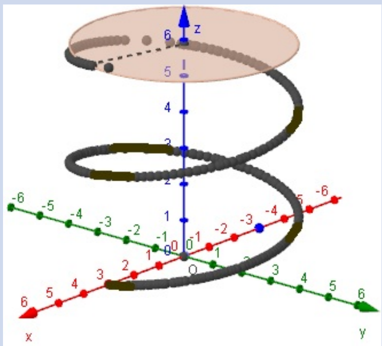
$\vec{v} = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

De **snelheid** is de lengte van deze snelheidsvector:

$|v| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$

De achterliggende theorie is onderdeel van het wiskunde B programma.

Bekijk je deze kromme vanuit de richting van één der assen, dan krijg je als aanzicht een **tweedimensionale kromme**. En daarin spelen behalve t alleen de twee variabelen een rol die zijn uitgezet op de assen loodrecht op de kijkrichting.



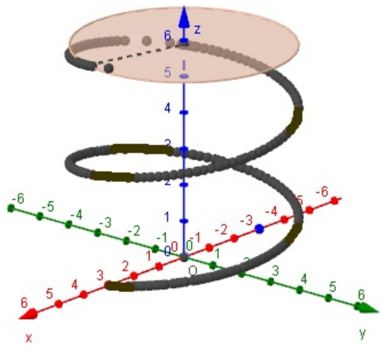
Figuur 3.5 **Zie figuurapplet.**

Voorbeeld 1

Als je de cirkel rustig omhoog beweegt tot het middelpunt $(0,0,3)$ is, zie je één winding van een Archimedische schroeflijn ontstaan. De bijbehorende parametervoorstelling is:

$(x,y,z) = \left(3\cos(t), 3\sin(t), \frac{3}{2\pi}t\right)$.

De spoed van de schroeflijn is de afstand tussen twee windingen gemeten in de richting van de as van de cilinder waar hij op ligt. Hoe lang is elke omwenteling en hoe groot is de spoed van deze schroeflijn?



Figuur 3.6 **Zie figuurapplet.**

Antwoord

De schroeflijn ligt op een cilinder met straal 3.
Tussen $t = 0$ en $t = 2\pi$ zit één omwenteling.
Bij $t = 0$ hoort het punt $(3,0,0)$.
Bij $t = 2\pi$ hoort het punt $(3,0,3)$.
Bekijk je één omwenteling dan is die te tekenen als diagonaal van een opengeklapte cilindermantel. Zo'n cilindermantel is een rechthoek van $2\pi \cdot 3$ bij 3. De lengte van de diagonaal is $(6\pi)^2 + 3^2 \approx 19{,}1$.

Het verschil in ‘hoogte’ tussen beginpunt en eindpunt van deze omwenteling is 3 (eenheden). Dit is de spoed van de schroeflijn.

Opgave 5

In de **Theorie** zie je hoe een kromme (of een rechte) in de ruimte kan worden beschreven met een parametervoorstelling.

a Waarom kan dit in het algemeen niet met een vergelijking in x, y en z?

b Leg uit hoe je aan de parametervoorstelling ziet dat de figuur die je in de applet kunt construeren een schroeflijn is.

c In **Voorbeeld 1** wordt de lengte van deze schroeflijn berekend. Voer deze berekening zelf uit.

In dit voorbeeld wordt ook verteld wat de spoed van een schroeflijn is.

d Hoe ziet de parametervoorstelling er uit van een schroeflijn met dezelfde spoed die ligt op een cilinder om de z-as met straal 2?

e Hoe ziet de parametervoorstelling er uit van een schroeflijn met een twee keer zo grote spoed die ligt op een cilinder om de z-as met straal 2?

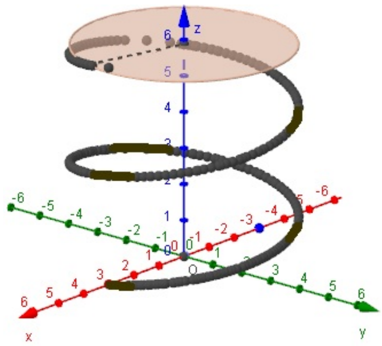
f Hoe ziet de parametervoorstelling er uit van een schroeflijn met spoed 2π die ligt op een cilinder om de x-as met straal 2?

Voorbeeld 2

Als je de cirkel rustig omhoog beweegt tot het middelpunt (0,0,3) is, zie je één winding van een Archimedische schroeflijn ontstaan. De bijbehorende parametervoorstelling is:

$(x,y,z) = \left(3\cos(t), 3\sin(t), \frac{3}{2\pi}t\right)$.

Laat zien dat deze schroeflijn met een constante snelheid wordt doorlopen.



Figuur 3.7 **Zie figuurapplet.**

Antwoord

De snelheidsvector is:

$\vec{v} = \left(-3\sin(t), 3\cos(t), \frac{3}{2\pi}\right)$.

De snelheid zelf is $|v| = \sqrt{(-3\sin(t))^2 + (3\cos(t))^2 + \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2} =$

$= \sqrt{9 + \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2}$.

Dit is een constant getal.

Het komt overeen met de in **Voorbeeld 1** gevonden lengte van elke omwenteling. Als je weet dat de snelheid constant is kun je die namelijk ook berekenen door de lengte van elke omwenteling te delen door de omwentelingstijd 2π.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** gaat het over de snelheid waarmee een punt op een schroeflijn beweegt.

a Waarom beweegt een punt over deze schroeflijn altijd met een constante snelheid?

b Is ook de snelheidsvector constant? Waarom?

c Bekijk de gegeven parametervoorstelling. Hoe moet je deze parametervoorstelling aanpassen om het punt twee keer zo snel te laten bewegen?

d Met behulp van de snelheidsvector kun je een parametervoorstelling van de raaklijn in een punt van de schroeflijn bepalen. Stel een parametervoorstelling van de raaklijn aan de schroeflijn op in het punt A waarvoor geldt $x = 0{,}5\pi$.

e Welke hoek maakt deze raaklijn met de y-as?

f Deze raaklijn snijdt het xy-vlak. In welk punt en onder welke hoek?

Opgave 7

Ten opzichte van een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel beweegt een punt P over de kromme k met parametervoorstelling $(x,y,z) = \left(t, t+2, \sqrt{(t)}\right)$. Hierin is t de tijd in seconden.

a Op welk tijdstip zit P op de y-as? In welk punt?

b Bereken op welk tijdstip P in het vlak $z = 9$ zit.

c Teken een bovenaanzicht van kromme k. (Je kijkt dan langs de z-as naar beneden.)

d Teken een vooraanzicht van kromme k. (Je kijkt dan langs de x-as naar achteren.)

e Stel de snelheidsvector van k op.

f Met welke snelheid beweegt P als dit punt door het vlak $z = 9$ gaat?

g Onder welke hoek gaat P door het vlak $z = 9$?

h Op welk tijdstip zit P het dichtst bij O? Hoe groot is de afstand van P tot O dan?

Voorbeeld 3

Een kromme wordt beschreven door
$x(t) = 8\sin(t)$, $y(t) = 8\sin(2t)$ en $z(t) = 10 + 8\sin(2t)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.
Het Oxy-vlak is het grondvlak, z is de hoogte boven dit grondvlak.
Leg uit waarom deze kromme een soort van achtbaan voorstelt.

Antwoord

Recht van boven gezien (vanuit de z-richting) zie je de tweedimensionale kromme:
$(x(t), y(t)) = (8\sin(t), 8\sin(2t))$.
Dit is voor t op $[0,2\pi]$ een Lissajousfiguur in de vorm van een liggende acht. Deze kromme doorloop je in het Oxy-vlak.

In de z-richting doorloop je tegelijkertijd twee keer een sinusoïde met amplitude 8 en evenwichtsstand $z = 10$.
Is dat een achtbaan of niet...?

Opgave 8

De kromme waarvan je in **Voorbeeld 3** een parametervoorstelling ziet is een soort achtbaan.

a Welke waarden kunnen x, y en z aannemen?

b Welke parametervoorstelling heeft de projectie van deze kromme op het xy-vlak (het bovenaanzicht dus)?

c Teken (in GeoGebra?) de kromme die bij deze projectie hoort.

d Laat zien dat de projectie een 8 is die symmetrisch is t.o.v. de oorsprong van het assenstelsel.

e Licht nu toe waarom hier sprake is van een achtbaan.

f Bereken de hoogste punten van deze achtbaan en bereken de snelheid in die punten.

g Bereken in deze hoogste punten ook de hoek die de baan op dat moment met het horizontale xy-vlak maakt.

h Op welke momenten bereikt een punt dat deze achtbaan doorloopt zijn hoogste snelheid?

i Bereken de totale lengte van de achtbaan.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven zijn de krommen $k_1 : (x,y,z) = (t+1,2t,t+3)$ en $k_2 : (x,y,z) = \left(s,s,s^2\right)$.

a Leg uit waarom k_1 een rechte lijn is.

b Bereken de kortste afstand van k_1 tot de oorsprong O van het assenstelsel.

c Bereken de hoek waaronder beide krommen elkaar snijden.

d Heeft k_2 een raaklijn evenwijdig aan het yz-vlak? En aan het xy-vlak?

e Teken de kubus $OABC.DEFG$ met $A(6,0,0)$. Teken in die kubus de delen van k_1 en k_2 die erbinnen liggen.

f k_2 heeft twee punten met de kubus gemeen. Bereken de coördinaten van die twee punten.

g Hoe lang is het gedeelte van k_1 dat binnen de kubus ligt?

Opgave 10

De schroeflijn s is gegeven door de parametervoorstelling $(x,y,z) = (2t,4\sin(t),4\cos(t))$ met $t \geq 0$.

a Welk punt is het beginpunt van deze kromme?

b Welke waarden kunnen x, y en z aannemen?

c Waaraan kun je zien dat deze kromme op een cilinder ligt? Welke as heeft die cilinder?

d Hoe lang is elke omwenteling van de schroeflijn?

e Welke hoek maakt de schroeflijn met het vlak $x = 4$?

f Welke snelheid heeft een punt P dat over deze schroeflijn beweegt op het moment dat $x = 4$?

Opgave 11

Gegeven is ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ de kromme k door $(x,y,z) = \left(2t,t^2-t,\mathrm{e}^t\right)$.

a Bereken de snijpunten van k met de coördinaatvlakken.

b Bereken de punten van k waarin de raaklijn evenwijdig is met één der coördinaatvlakken.

c Bereken de hoek waaronder k de z-as snijdt.

Opgave 12

Twee punten bewegen in een driedimensionaal $Oxyz$-assenstelsel. P_1 beweegt volgens een rechte lijn en met een constante snelheid. Op $t = 0$ bevindt het zich in $(0,0,6)$ en op $t = 1$ in $(2,4,6)$.
De baan van P_2 wordt beschreven door
$(x,y,z) = \left(2t,4t,t^2-0{,}25\right)$.
Ook hierin is t de tijd en $t \geq 0$.

a Bereken het punt waarop beide punten tegen elkaar botsen.

b Hoe groot is de snelheid van P_1 bij de botsing?

c En hoe groot is de snelheid van P_2 op dat moment?

d Onder welke hoek botsen de punten op elkaar?

Toepassen

Opgave 13: De konische schroeflijn

Een voorbeeld van een konische schroeflijn is de kromme k gegeven door $(x,y,z) = ((4\pi - t)\sin(t), (4\pi - t)\cos(t), 2t))$ met $0 \leq t \leq 4\pi$. Een punt P beweegt over deze kromme, waarbij t de tijd in seconden voorstelt.

a Bereken het snijpunt van k met de z-as.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van k met het yz-vlak en teken de projectie van k op dat vlak (een vooraanzicht dus).

c Teken ook (met GeoGebra?) de projectie van k op het xy-vlak.

d R is de afstand van P tot de oorsprong van het assenstelsel. Stel een zo eenvoudig mogelijke formule voor R op.

e Stel een formule op voor de snelheid v van P als functie van t. Met welke snelheid begint P aan zijn beweging?

f Op welke tijdstippen is v maximaal of minimaal?

g Onder welke hoek met de z-as nadert P het eindpunt van zijn baan?

h Hoe lang is deze konische schroeflijn?

Testen

Opgave 14

Gegeven is de schroeflijn s door de parametervoorstelling $(x,y,z) = (2 + 2\cos(t), 2 + 2\sin(t), t)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

a Maak een schets van deze schroeflijn in de kubus $OABC.DEFG$ waarvan $A(4,0,0)$ en $D(0,0,4)$ is.

b Bereken de snijpunten van s met deze kubus.

c Hoe lang is het deel van de schroeflijn dat binnen de kubus ligt?

d Onderzoek of er een punt op de schroeflijn is waarin de raaklijn evenwijdig is met lijn OF.

Opgave 15

De punten P en Q bewegen in een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel.
Voor P geldt: $(x,y,z) = \left(t, 2t, 0{,}25t^2\right)$.
Voor Q geldt: $(x,y,z) = (t, 6+t, 3+t)$.
Hierin is t de tijd in seconden. Beide punten starten op $t = 0$ maar op verschillende plaatsen. Na verloop van tijd botsen ze op elkaar.

a Welk van deze punten beweegt niet met een constante snelheid? Bereken van dit punt de beginsnelheid.

b Welke hoek maken hun banen op $t = 0$ met elkaar?

c Botsen de punten op elkaar? Zo ja, na hoeveel seconden is dat?

d Met welke snelheden botsen de punten op elkaar?

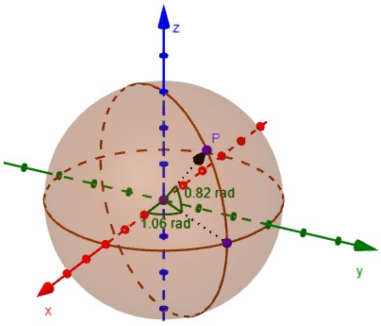
e Hoe ver ligt het punt waarop P en Q op elkaar botsen van de oorsprong af?

f Hoeveel bedraagt de grootste afstand tussen beide punten?

2.4 Bollen en cilinders

Inleiding

Nu ga je oppervlakken in 3D bekijken.
Bijvoorbeeld deze bol. Bij het boloppervlak kun je ook met parametervoorstellingen en vergelijkingen werken.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- oppervlakken in 3D beschrijven met parametervoorstellingen en vergelijkingen;
- snijpunten en raakvlakken berekenen.

Voorkennis

- werken met parametervoorstellingen in 2D en 3D en vergelijkingen van krommen in 2D;
- snijpunten met de assen en raaklijnen aan krommen berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de bol in de **Inleiding**. Je ziet een bol met middelpunt $O(0,0,0)$ en straal 3.
Stel je voor dat het punt $P(x,y,z)$ over deze bol beweegt.

a Hoe ver ligt P altijd van O af?

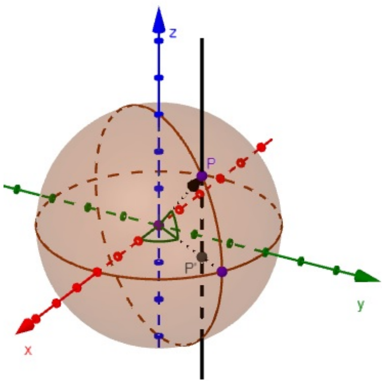
b Welke vergelijking in x, y en z levert dat op?

c Hoe ziet die vergelijking er uit als je het middelpunt verschuift?

Uitleg 1

Een boloppervlak bestaat uit alle punten P die een vaste afstand r hebben tot een vast punt M. r heet de straal en M het middelpunt van de bol. Punt P' ligt in het Oxy-vlak en PP' staat loodrecht op dat vlak.

Is $O(0,0,0)$ het middelpunt van de bol dan geldt voor elk punt $P(x,y,z)$ dat $r = |OP|^2 = |OP'|^2 + |PP'|^2$. En omdat $|OP'|^2 = x^2 + y^2$ en $|PP'| = z$ vind je
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
Dit is de vergelijking van een bol(oppervlak) met middelpunt O en straal r.



Figuur 4.2 **Zie figuurapplet.**

Je kunt deze vergelijking (net als bij een cirkel) eenvoudig aanpassen voor het geval het middelpunt $M(a,b,c)$ is. Het maken van een parametervoorstelling is wat lastiger. Net als bij de vectorvoorstelling van een plat vlak heb je twee parameters nodig.

Ook het cilinderoppervlak heeft een vergelijking en een parametervoorstelling.

Opgave 1

Bekijk de **Inleiding**. Je ziet een bol B met middelpunt $O(0,0,0)$ en straal 3.

a Welke van de volgende punten liggen op het boloppervlak, welke liggen er binnen en welke erbuiten?
$A(2,2,1)$, $B(0,0,\text{-}3)$, $C(\text{-}2,1,\text{-}2)$, $D(2;2{,}5;\text{-}1)$, $E\left(\sqrt{8},0,1\right)$, $F(\text{-}1{,}5;1{,}5;1{,}5)$

b Bepaal a zo, dat $G(a,a,a)$ op het boloppervlak ligt.

c Voor welke waarden van a ligt G binnen de bol?

d Aan welke vergelijking moeten de punten $P(x,y,z)$ voldoen als P op de bol ligt?

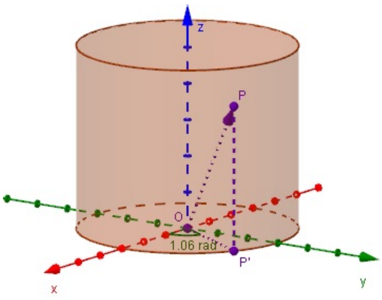
e Beschrijf de kromme die de doorsnede voorstelt van de bol met het vlak $z=0$. Doe hetzelfde voor $z=1$, $z=2$ en $z=3$.

f Beschrijf ook de doorsnede van de bol met het vlak $y+z=0$.

Uitleg 2

Een cilinderoppervlak bestaat uit alle punten P die een vaste afstand r hebben tot een vaste lijn a. r heet de straal en a de as van de cilinder. Punt P' ligt in het Oxy-vlak en PP' staat loodrecht op dat vlak.

Is de z-as de as van de cilinder dan geldt voor elk punt $P(x,y,z)$ dat $r^2 = |OP'|^2 = x^2+y^2$ en daarom geldt voor elke P:
$x^2+y^2=r^2$
Dit is de vergelijking van een cilinder(oppervlak) met als as de z-as en straal r.



Figuur 4.3 **Zie figuurapplet.**

Je kunt deze vergelijking (net als bij een cirkel) eenvoudig aanpassen voor het geval de as evenwijdig aan de z-as en door het punt $M(a,b,c)$ gaat. En ook voor het geval de as evenwijdig loopt met één van de andere coördinaatassen.
Het maken van een parametervoorstelling gaat vrij gemakkelijk. Net als bij de vectorvoorstelling van een plat vlak heb je twee parameters nodig.

Opgave 2

De doorsnede van de bol B met het xy-vlak is een cirkel met vergelijking $x^2+y^2=9$.

a Teken die cirkel in een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel.

b Teken ook alle punten in het vlak $z=1$ waarvoor geldt $x^2+y^2=9$.

c Doe hetzelfde voor de vlakken $z=2$, $z=3$, $z=5$ en $z=\text{-}5$.

d Teken de cilinder waar al deze cirkels op liggen. Aan welke vergelijking voldoet elk punt op deze cilinder?

De cilinder die je zojuist hebt getekend heeft de z-as als symmetrieas en straal 3.

e Welke vergelijking heeft een cilinder waarvan de x-as de symmetrieas is en de straal 4 is?

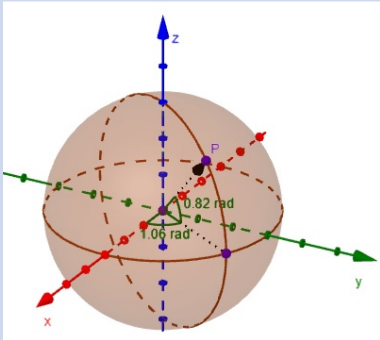
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **boloppervlak** bestaat uit alle punten P die een vaste afstand r hebben tot een vast punt M. r heet de **straal** en M het **middelpunt** van de bol.

Een bol(oppervlak) met middelpunt $M(a,b,c)$ en straal r heeft als **vergelijking**:
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

Een **parametervoorstelling** van een bol(oppervlak) maak je vanuit twee draaihoeken u en v en met behulp van sinus en cosinus.

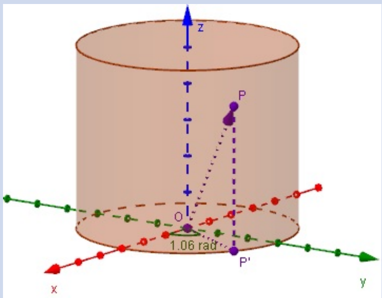


Figuur 4.4

Een **cilinderoppervlak** bestaat uit alle punten P die een vaste afstand r hebben tot een vaste lijn a. r heet de **straal** en a de **as** van de cilinder.

De **vergelijking** van een cilinder(oppervlak) met een as door $M(a,b,c)$ en evenwijdig de z-as en straal r is: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Deze vergelijking moet je aanpassen voor situaties waarin de as van de cilinder evenwijdig is met één van de andere coördinaatassen. Een **parametervoorstelling** van een cilinderoppervlak maak je vanuit één draaihoek u en een verschuiving v. Zie **Voorbeeld 2**.



Figuur 4.5

Voorbeeld 1

Stel een vergelijking op van het raakvlak V aan de bol B met vergelijking $x^2+y^2+z^2=4x+6z+16$ in het punt $P(4,3,7)$.

Antwoord

Bepaal eerst door kwadraat afsplitsen het middelpunt van de bol B.
De vergelijking wordt: $(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=29$.
Het middelpunt van de bol wordt $M(2,0,3)$.

Vervolgens ga je na, dat $P(4,3,7)$ op het boloppervlak ligt.

De straal $\overrightarrow{MP}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ staat loodrecht op het raakvlak V en is dus normaalvector van dit vlak.
Verder ligt het punt $(4,3,7)$ in V.

De vergelijking van V is: $2x+3y+4z=45$.

Opgave 3

In de **Theorie** zie je hoe je de bol en de cilinder kunt beschrijven met behulp van een vergelijking.

a Bepaal het middelpunt en de straal van de bol met vergelijking $(x-1)^2+(y-4)^2+z^2=25$.

b Stel een vergelijking op van de bol met middelpunt $M(-2,1,2)$ die door het punt $A(-1,-1,-3)$ gaat.

c Stel een vergelijking op van de cilinder door $O(0,0,0)$ waarvan de as evenwijdig is aan de y-as en door $P(1,0,3)$ gaat.

Opgave 4

Je kunt aan bollen en cilinders ook raaklijnen en raakvlakken maken. In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de vergelijking van een raakvlak aan een bol opstelt in een punt op de bol.

a Waarom wordt in het voorbeeld eerst de vergelijking van de bol zo geschreven dat je het middelpunt kunt bepalen? Doe dit zelf ook.

b Ga na, hoe nu de vergelijking van het raakvlak wordt opgesteld.

Neem vervolgens het oppervlak C met vergelijking $x^2 + y^2 = 8x + 13$.

c Toon aan dat dit oppervlak een cilinder is en bereken de straal van die cilinder. Beschrijf ook de as van de cilinder.

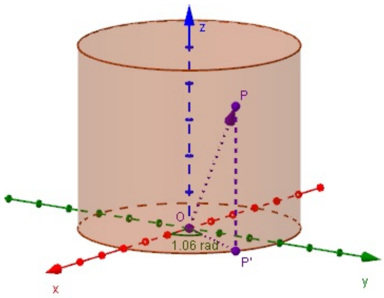
d Stel de vergelijking op van het raakvlak W aan C in het punt $Q(2,5,3)$.

e Welke vergelijking heeft het raakvlak aan C dat evenwijdig is met W?

f Voor welke waarden van a raakt de lijn $l : (x,y,z) = (2 + at,5 + 2t,4 - t)$ de cilinder C?

Voorbeeld 2

Gegeven is de cilinder $x^2 + y^2 = 9$.
Stel hierbij een parametervoorstelling op.



Figuur 4.6

Antwoord

De parametervoorstelling van een cilinder lijkt veel op de parametervoorstelling van een cirkel. Je werkt met een draaihoek u net als bij de cirkel en je gebruikt een verschuiving v.

Bij deze cilinder kies je als draaihoek (in radialen) de hoek u die OP' met de positieve x-as maakt.

De verschuiving v is de vector $\overrightarrow{P'P}$.
Je kunt nu de coördinaten van elk punt P op de cilinder beschrijven door:
$x = 3\cos(u)$, $y = 3\sin(u)$ en $z = v$.

De parametervoorstelling van deze cilinder is dus
$(x,y,z) = (3\cos(u),3\sin(u),v)$.
Hierbij is $0 \leq u \leq 2\pi$ en kan v alle waarden aannemen.

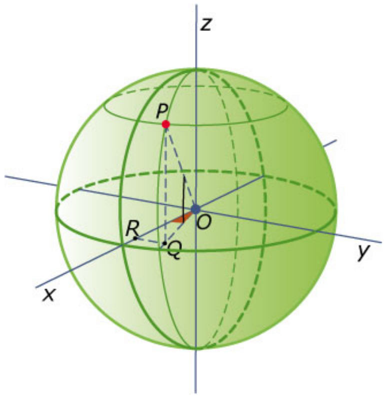
Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt een parametervoorstelling van een cilinder opgesteld.

a Laat zien, dat $x = 3\cos(u)$, $y = 3\sin(u)$ en $z = v$ voldoen aan de gegeven vergelijking van de cilinder.

b Welke kromme ontstaat er als je $v = u$ neemt?

Je kunt ook voor een bol een parametervoorstelling maken. Daarvoor kunnen als parameters de hoeken $u = \angle ROQ$ en $v = \angle QOP$ worden gebruikt. Hierin is QR loodrecht op de x-as en PQ loodrecht op het xy-vlak. De bol heeft middelpunt O en straal r.



Figuur 4.7

c Welke waarden moeten u en v aannemen om een complete bol te beschrijven?

d Laat zien, dat $x = r\cos(u)\cos(v)$, $y = r\sin(u)\cos(v)$ en $z = r\sin(v)$.

e Toon aan dat de bij b gevonden uitdrukkingen voor x, y en r voldoen aan de bolvergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Opgave 6

Stel een vergelijking en een parametervoorstelling op van het oppervlak V dat hieronder wordt beschreven.

a V is een cilinder met de y-as als as die door $P(3,4,5)$ gaat.

b V is een bol met middelpunt O die het vlak $x + y + z = 6$ raakt.

c V is een cilinder met een as door $(4,4,0)$ die zowel het xz-vlak als het yz-vlak raakt.

d V is een bol door de punten $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(2,2,2)$ en $D(0,2,2)$.

Voorbeeld 3

Een oppervlak wordt ten opzichte van een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel beschreven door
$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.
Leg uit waarom dit oppervlak wel een ellipsoïde wordt genoemd.

Antwoord

Om deze vraag te kunnen beantwoorden heb je een voorstelling van het oppervlak nodig. Aanzichten helpen daarbij.

Recht van boven gezien (vanuit de z-richting) zie je de tweedimensionale kromme:
$4x^2 + y^2 = 16$.
Dit kun je schrijven als $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.
En deze kromme is een ellips door de punten $(2,0,0)$, $(0,4,0)$, $(-2,0,0)$ en $(0,-4,0)$.
Ga dat na...

En zo kun je het oppervlak ook vanuit de x-richting en de y-richting bekijken.
Je ontdekt dat het oppervlak kan ontstaan door de ellips in het xy-vlak te wentelen om de y-as. En daarmee verklaar je de naam ‘ellipsoïde’ als omwentelingsellips.

Opgave 7

Het oppervlak waarvan je in **Voorbeeld 3** een vergelijking ziet heet een ellipsoïde.

a Teken in een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel de drie doorsneden van dit oppervlak met de coördinaatvlakken.

b Leg uit waarom het oppervlak kan worden gezien als een ellips die om de y-as wordt gewenteld.

c Bewijs de symmetrie van deze ellipsoïde t.o.v. de y-as.

Ook van zo'n ellipsoïde kun je een parametervoorstelling maken.

d Kies twee geschikte parameters en geef een bijpassende parametervoorstelling.

e Stel een vergelijking op van de ellipsoïde met centrum O die door $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ en $C(0,0,6)$ gaat en waarvan de x-as, de y-as en de z-as symmetrieassen zijn. Maak er ook een parametervoorstelling bij.

Verwerken

Opgave 8

Bepaal middelpunt en straal van de bol of symmetrieas en straal van de cilinder als deze vergelijkingen of parametervoorstellingen zijn gegeven.

a $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 4y - 8z + 5 = 0$

b $(x,y,z) = (v + 2{,}2\cos(u) + 3{,}2\sin(u) + 4)$

c $x^2 + y^2 = 12x$

d $(x,y,z) = (5 + 5\cos(u)\cos(v), 5 + 5\sin(u)\cos(v), 5\sin(v))$

Opgave 9

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ is de kubus $OABC.DEFG$ gegeven door $A(4,0,0)$, $C(0,4,0)$ en $D(0,0,4)$. Verder is bol B_1 gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

a Teken de kubus en het gedeelte van de bol B_1 in het assenstelsel.

b Bol B_2 met middelpunt G raakt B_1. Stel een vergelijking van B_2 op.

c Stel een vergelijking op van bol B_3 waarvan AG de middellijn is.

Een cilinder C met straal 3 heeft de lijn BF als as.

d Stel een vergelijking van C op.

e Bereken de (kortste) afstand van bol B_1 tot cilinder C.

f Er bestaan twee vlakken V_1 en V_2 die zowel B_1 als C raken, evenwijdig zijn met de z-as en tussen de bol en de cilinder in liggen. Met één van die twee vlakken heeft B_1 het punt P gemeen en C de lijn l. Bereken de afstand van P tot l.

Opgave 10

Een viervlak $O.ABC$ is ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ gegeven door $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$ en $C(0,0,6)$.

a Stel een vergelijking op van de omgeschreven bol van dit viervlak, dus van de bol die door alle hoekpunten ervan gaat.

b Stel een vergelijking op van de ingeschreven bol van dit viervlak, dus van de bol die alle vlakken van dit viervlak raakt.

Opgave 11

Gegeven is de bol B door de parametervoorstelling $(x,y,z) = (4+3\cos(v)\cos(u), 3+3\cos(v)\sin(u), 2+3\sin(v))$
met $0 \leq u \leq 2\pi$ en $-0{,}5\pi \leq v \leq 0{,}5\pi$.

a Stel een vergelijking op van deze bol.

b De doorsnede van het vlak $z=4$ met deze bol is een cirkel. Welke straal heeft deze cirkel? En welke waarde van v hoort er bij?

c Welke vergelijking heeft de cilinder C die B raakt volgens de cirkel waarvoor geldt $v=0$?

d Welke vergelijking heeft het vlak dat zowel de bol als de cilinder raakt en waarvoor geldt $u=0{,}25\pi$?

e De lijn l met parametervoorstelling $(x,y,z) = (2,1,3) + t(4,4,0)$ snijdt de bol B in twee punten P en Q. Onder welke hoek snijdt l de bol?

Opgave 12

Een cilinder wordt gesneden door twee vlakken V en W die beide loodrecht op de as l van de cilinder staan. De afstand tussen V en W is 2 cm. Op de snijcirkel van de cilinder en vlak V ligt een punt A. Op de snijcirkel van de cilinder en vlak W ligt een punt B. $|AB| = 4$ cm en de afstand van lijn AB tot l is 1 cm.

a Bereken de straal van de cilinder.

b Bereken de hoek die beide raakvlakken in A en B aan de cilinder met elkaar maken.

Testen

Opgave 13

Bepaal (indien mogelijk) middelpunt en straal van de bol of symmetrieas en straal van de cilinder als deze vergelijkingen of parametervoorstellingen zijn gegeven.

a $x^2 + z^2 - 4x + 4z = 0$

b $(x,y,z) = (2\sin(v), 2\cos(u)\cos(v), 2\sin(u)\cos(v)+4)$

c $x^2 + y^2 + z^2 = 10y - 6z - 39$

d $(x,y,z) = (5+5\cos(u), 5+5\sin(u), 5v)$

Opgave 14

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is $A(0,0,4)$, $B(4,0,0)$, $C(0,0,\text{-}4)$, $D(\text{-}4,0,0)$ en $T(0,0,8)$.

a Stel een vergelijking op van de bol door de hoekpunten van deze piramide.

b Bereken de hoeken waaronder de lijn AT deze bol snijdt in graden nauwkeurig.

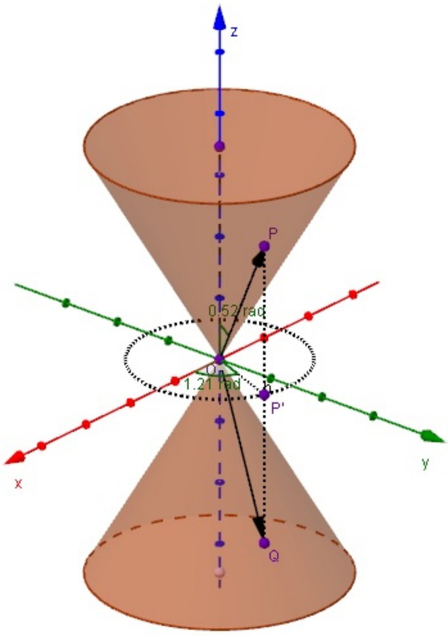
c Een cilinder waarvan lijn OT de symmetrieas is raakt alle vier de zijden van grondvlak $ABCD$ van de piramide. Stel van deze cilinder een vergelijking op.

d De cilinder bedoeld in c snijdt ribbe BT in punt P. Bereken $|OP|$.

2.5 Kegels en kegelsneden

Inleiding

Een ander voorbeeld van een oppervlak is het kegeloppervlak. Je ziet er hier één.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- kegeloppervlakken in 3D beschrijven met parametervoorstellingen en vergelijkingen;
- kegelsneden herkennen.

Voorkennis

- werken met parametervoorstellingen en vergelijkingen van krommen en oppervlakken in 2D en 3D.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de kegel in de **Inleiding** met top $O(0,0,0)$.
Verder wordt de kegel bepaald door de constante hoek φ tussen de as (hier de z-as) en de lijn OP als het punt $P(x,y,z)$ over deze kegel beweegt. Neem aan dat die hoek $\varphi = 30° = \frac{1}{6}\pi \approx 0{,}52$ rad is.

a Hoe ver ligt P van de as af als $z = 3$?

b Hoe groot is de straal van de cirkel waar P op ligt voor een willekeurige waarde van z?

c Welke vergelijking in x, y en z levert dat op?

d Hoe ziet die vergelijking er uit als je de top verschuift?

Uitleg 1

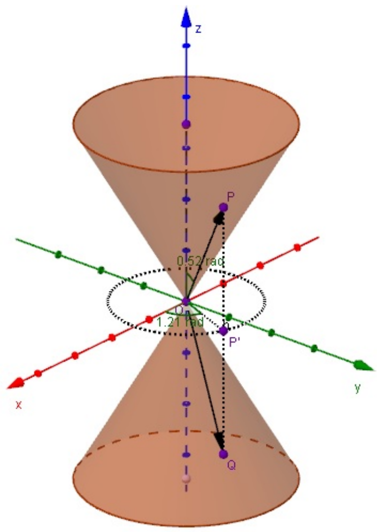
Een kegeloppervlak bestaat uit alle punten P die een recht evenredig toenemende afstand hebben tot een vaste lijn a. a heet de as van de kegel en het punt waar de afstand tot de as 0 is heet de top T. De afstand van P tot de as wordt bepaald door de halve tophoek φ, dat is de hoek tussen de as en de lijn TP.

Is $O(0,0,0)$ de top en de z-as de as van de kegel, dan ligt elk punt $P(x,y,z)$ op een cirkel met straal $r = z \cdot \tan(\varphi)$. En omdat $|OP'|^2 = x^2 + y^2 = r^2$ vind je

$x^2 + y^2 = z^2 \cdot \tan^2(\varphi)$

Dit is de vergelijking van een kegel(oppervlak) met de z-as als as, O als top en φ als halve tophoek.

Je kunt deze vergelijking eenvoudig aanpassen voor het geval de top $T(a,b,c)$ en de as evenwijdig met één van de coördinaatassen is. Ook een parametervoorstelling is mogelijk.



Figuur 5.2 **Zie figuurapplet.**

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Je ziet een kegel K met top $O(0,0,0)$, de z-as als symmetrieas en een halve tophoek $\varphi = \frac{1}{6}\pi$.

a Neem nu aan dat punt P op de kegel K een z-waarde van 5 heeft. Bereken dan de straal van de cirkel waar P op ligt.

b Bereken nu de y-coördinaat van P als de x-coördinaat 3 is.

c Voor een ander punt P geldt x = -3 en $y = 2$. Bereken de z-waarden die dit punt P kan hebben.

d Aan welke vergelijking moeten de punten $P(x,y,z)$ voldoen als P op de kegel ligt?

e Leid nu zelf de algemene vergelijking af van een kegel met top $O(0,0,0)$, de z-as als symmetrieas en een halve tophoek φ.

Opgave 2

Natuurlijk hoeft een kegel niet de z-as als as te hebben en de oorsprong als top.

a Stel een vergelijking op van een kegel met de x-as als symmetrieas, de oorsprong als top en een halve tophoek van $\frac{1}{4}\pi$.

b Laat zien, dat een ‘kegel’ met een halve tophoek van $0°$ een rechte lijn oplevert. Neem bijvoorbeeld de x-as als symmetrieas en de oorsprong als top.

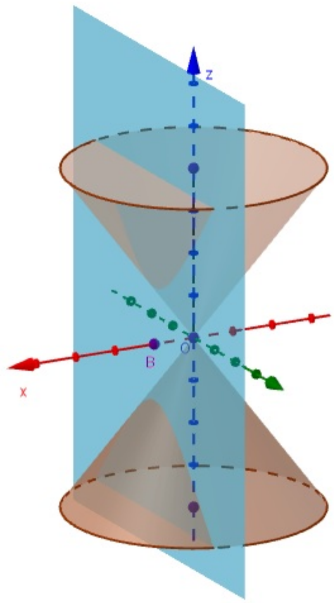
c Welke waarden kan de halve tophoek aannemen?

d Stel een vergelijking op van een kegel met top $T(1,2,3)$, een as evenwijdig aan de y-as die door het punt $(2,0,0)$ gaat.

Uitleg 2

Als je een kegel(oppervlak) K doorsnijdt met een vlak, dan krijg je een kegelsnede. Hier zie je de doorsnede met een vlak dat evenwijdig is aan de as van de kegel.
Zolang het punt B niet samenvalt met de top van de kegel wordt de doorsnede dan een hyperbool.
Dat kun je vanuit de vergelijking $x^2 + y^2 = z^2 \cdot \tan^2(\varphi)$ van de kegel gecombineerd met de vergelijking $x = c$ voor het vlak afleiden.

Door het vlak niet evenwijdig aan de as van de kegel te tekenen, kun je ook een parabool, een ellips of een cirkel maken.



Figuur 5.3 **Zie figuurapplet.**

Opgave 3

In **Uitleg 2** zie je een (deel van een) doorsnede van een vlak en een kegel, een kegelsnede.

a In de animatie lijkt de doorsnede een hyperbool. Is elke doorsnede evenwijdig aan de as een hyperbool?

b Stel je nu voor dat het vlak niet langer evenwijdig is aan de as. Wanneer is de doorsnede dan geen hyperbool, maar een parabool?

c Welke vormen kan de doorsnede van een vlak met een kegel allemaal aannemen? Beschrijf ook onder welke omstandigheden een bepaalde vorm optreedt.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

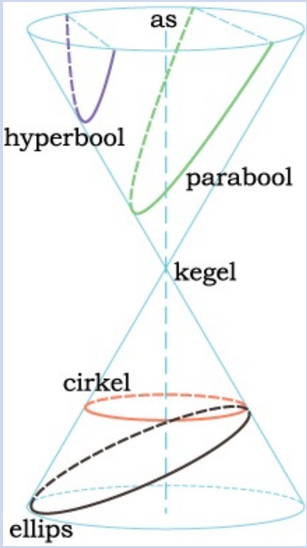
Een **kegeloppervlak** bestaat uit alle punten P die een recht evenredig toenemende afstand hebben tot een vaste lijn a. a heet de **as** van de kegel en het punt waar de afstand tot de as 0 is heet de top. De afstand van P tot de as wordt bepaald door de **halve tophoek** $\boldsymbol{\varphi}$, dat is de hoek tussen de as en de lijn TP.

Een kegel(oppervlak) met top $T(a,b,c)$, de as evenwijdig aan de z-as en halve tophoek φ heeft als **vergelijking**:
$(x-a)^2+(y-b)^2=(z-c)^2 \cdot \tan^2(\varphi)$.

Deze vergelijking moet je aanpassen voor situaties waarin de as van de cilinder evenwijdig is met één van de andere coördinaatassen. Een **parametervoorstelling** van een kegel(oppervlak) maak je vanuit een draaihoek u en een verschuiving v. Zie **Voorbeeld 2**.

Een **kegelsnede** is de doorsnede van een kegel(oppervlak) met een vlak dat niet door de top van de kegel gaat. Is dit vlak evenwijdig aan de as van de kegel, dan is de kegelsnede een hyperbool. Door het vlak een steeds grotere hoek met de as te laten maken krijg je:

- een hyperbool zolang die hoek kleiner is dan φ;
- een parabool als die hoek gelijk is aan φ;
- een ellips als die hoek groter is dan φ maar kleiner dan $90°$;
- een cirkel als die hoek gelijk is aan $90°$.



Figuur 5.4

Voorbeeld 1

Stel een vergelijking op van het raakvlak aan de kegel K met vergelijking
$x^2+y^2-z^2=4x+6z+5$ in het punt $P(5,4,2)$.

Antwoord

Bepaal eerst door kwadraat afsplitsen de top en de as van de kegel K.
De vergelijking wordt: $(x-2)^2+y^2=(z+3)^2$.
De top van de kegel wordt $T(2,0,-3)$ en de as van de kegel is evenwijdig met de z-as.

Vervolgens ga je na, dat $P(5{,}4{,}2)$ op het kegeloppervlak ligt.
De normaalvector van het raakvlak is nu een vector die loodrecht staat op de vector $\overrightarrow{TP}$ en ligt in het vlak door P en de as van de kegel.
De vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ is zo'n vector.
Dus het raakvlak heeft vergelijking $3x + 4y - 5z = 21$.

Opgave 4

Je kunt aan kegels ook raaklijnen en raakvlakken maken. In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de vergelijking van een raakvlak aan een kegel opstelt in een punt op de kegel.

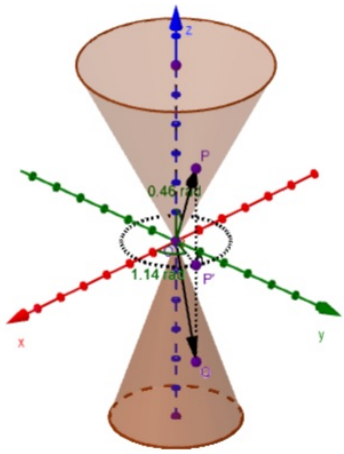
a Waarom wordt in het voorbeeld eerst de vergelijking van de kegel zo geschreven dat je de top, de as en de halve tophoek kunt bepalen? Doe dit zelf ook.

b Ga zelf na, dat $P(5{,}4{,}2)$ inderdaad op de kegel ligt.

c Bepaal zelf de normaalvector van het raakvlak en stel de vergelijking ervan op.

Voorbeeld 2

Gegeven is de kegel $x^2 + y^2 = 0{,}25z^2$.
Stel hierbij een parametervoorstelling op.



Figuur 5.5 **Zie figuurapplet.**

Antwoord

De parametervoorstelling van een kegel lijkt veel op de parametervoorstelling van een cirkel. Je werkt met een draaihoek u net als bij de cirkel en je gebruikt een verschuiving v.

Bij deze kegel kies je als draaihoek (in radialen) de hoek u die lijnstuk OP' met de positieve x-as maakt.

De verschuiving v is de vector $\overrightarrow{P'P}$ die een hoek φ met de z-as maakt, waarvoor geldt $\tan^2(\varphi) = 0{,}25$, dus $\tan(\varphi) = 0{,}5$.
Je kunt nu de coördinaten van elk punt P op de kegel beschrijven door:
$x = 0{,}5v\cos(u)$, $y = 0{,}5v\sin(u)$ en $z = v$.

De parametervoorstelling van de kegel is
$(x,y,z) = (0{,}5v\cos(u); 0{,}5v\sin(u); v)$.
Hierbij is $0 \leq u \leq 2\pi$ en kan v alle waarden aannemen.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt een parametervoorstelling van een kegel met een gegeven vergelijking opgesteld.

a Hoe groot is de halve tophoek φ? Geef je antwoord in graden nauwkeurig.

b Licht toe, dat $\left|\overrightarrow{OP'}\right| = \frac{1}{2}v\sqrt{2}$.

c Leid zelf de parametervoorstelling van de kegel af.

d Laat zien, dat de gevonden parametervoorstelling ook aan de gegeven vergelijking voldoet.

e Geef een parametervoorstelling van de kegel $x^2 + y^2 = z^2\tan^2(\varphi)$.

Opgave 6

Stel een vergelijking en een parametervoorstelling op van de kegel K die hieronder wordt beschreven.

a K heeft y-as als as, top $T(0,-2,0)$ en gaat door $P(3,4,5)$.

b K heeft de lijn a door $A(2,4,0)$ en $B(2,4,6)$ als as en een halve tophoek van $\varphi = \frac{1}{4}\pi$.

c K heeft de lijn a door $A(2,4,0)$ en $B(2,4,6)$ als as en raakt het vlak $x + y + z = 6$.

Voorbeeld 3

De kegel K met vergelijking $x^2+y^2 = 0{,}25z^2$ wordt gesneden door het vlak V met vergelijking $x = 3$. Toon aan dat de kegelsnede die hierdoor ontstaat een hyperbool is.

Antwoord

De punten van de doorsnede van K en V moet aan beide vergelijkingen voldoen.
Daarom geldt voor die punten $3^2 + y^2 = 0{,}25z^2$.
Dit kun je schrijven als $\frac{z^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$.
En dat is de vergelijking van een hyperbool in een Oyz-assenstelsel waarvan de z-as de symmetrieas is.

Opgave 7

In de **Theorie** zie je welke krommen als kegelsnede kunnen voorkomen.
In **Voorbeeld 3** wordt aangetoond dat de doorsnede van de kegel $x^2 + y^2 = 0{,}25z^2$ en het vlak $x = 3$ een hyperbool is.

a Loop het voorbeeld na.

b Neem nu in plaats van het vlak $x = 3$ het vlak met vergelijking $x + z = 3$. Toon aan dat de bijbehorende kegelsnede nu een ellips is.

c Levert de doorsnede van elk vlak met vergelijking $x + z = p$ en de kegel een ellips op? Waarom?

Wil de kegelsnede een parabool zijn, dan moet het vlak waarmee de kegel wordt doorsneden een even grote hoek met de as van de kegel maken als de halve tophoek.

d Laat zien, dat dit geldt voor het vlak $2x + z = 6$.

e Toon aan dat de bij d horende kegelsnede inderdaad een parabool is.

Verwerken

Opgave 8

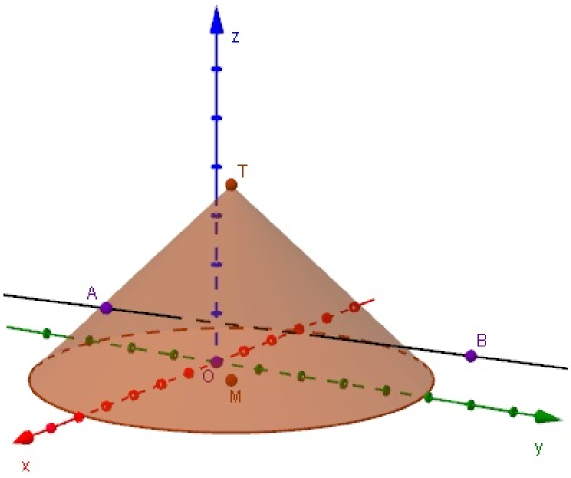
Bepaal de top, de as en de halve tophoek van de kegel waarvan deze vergelijking of parametervoorstelling is gegeven.

a $x^2 + z^2 = 0{,}5y^2 - 4x + 4y - 4z$

b $(x,y,z) = (v, 2v\cos(u) + 3, 2v\sin(u) + 4)$

Opgave 9

In de ruimtemeetkunde bestaat een kegel vaak niet uit twee delen met de top T in de midden, maar slechts uit één gedeelte waarvan de top dan ook echt het hoogste punt is. Verder loopt zo'n kegel meestal niet oneindig door, maar heeft hij een bepaalde hoogte en een grondcirkel. Hier zie je zo'n kegel. De tophoek is $T(1,1,4)$, het middelpunt van de grondcirkel is $M(1,1,0)$ en de straal van de grondcirkel is 4. Verder zijn gegeven de punten $A(4,0,2)$ en $B(0,6,1)$.



Figuur 5.6

a Stel een vergelijking op voor deze kegel. Geef de begrenzing aan door te vermelden welke waarden z mag aannemen.

b Stel een parametervoorstelling op van de lijn l door A en B en onderzoek of l de kegel snijdt.

c Laat zien, dat de doorsnede van deze kegel met het vlak $y = 0$ een tak van een hyperbool is.

Opgave 10

Gegeven is in een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel de kegel K door de vergelijking $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

a Bereken de tophoek van deze kegel.

b Stel een parametervoorstelling op voor K.

c Toon aan dat het vlak $y = z$ de kegel raakt.

d Stel een vergelijking op van het raakvlak aan deze kegel dat door het punt $P(3,4,5)$ gaat.

e Het vlak met vergelijking $z = x + 2$ snijdt deze kegel volgens een kromme k. Welke vorm heeft deze kromme? Beschrijf hem met passende vergelijkingen.

Opgave 11

Gegeven zijn de bol B en de kegel K door de vergelijkingen

$B : (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 16$

en

$K : (x-4)^2 - (y-4)^2 + (z-4)^2 = 0$

a Teken de loodrechte projecties van deze twee oppervlakken op elk van de drie coördinaatvlakken.

De hoek waaronder twee oppervlakken elkaar in een bepaald punt snijden is de hoek tussen de raakvlakken aan deze oppervlakken in dat punt.

b Onder welke hoek snijden beide oppervlakken elkaar?

Opgave 12

De uitslag van een meetkundige kegel is een deel van een cirkel. Je knipt daartoe de kegelmantel open langs een rechte lijn vanuit de top naar de grondcirkel. In sommige gevallen is die uitslag precies een halve cirkel.

a Hoe groot is in dat geval de halve tophoek van de kegel?

b Neem aan dat de halve cirkel een booglengte van 10π heeft. Hoe hoog is dan de kegel?

c Deze kegel wordt in een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel geplaatst met de grondcirkel in het xy-vlak en de z-as als as. Stel een vergelijking en een parametervoorstelling van de kegel op.

d Er zijn twee vlakken die de kegel raken in de punten op de grondcirkel met $x = 4$. Welke hoek maken deze vlakken met elkaar?

Testen

Opgave 13

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ heeft kegel K als top het punt $T(5,5,10)$ en als as een lijn a door T en evenwijdig aan de z-as. De kegel gaat verder door het punt $(5,0,0)$.

a Stel een vergelijking en een parametervoorstelling van deze kegel op.

b Stel vergelijkingen op van de beide raakvlakken door $O(0,0,0)$ aan K.

c Stel een vergelijking op van de bol B die door de top van de kegel gaat en de doorsnijdingscirkel met het xy-vlak met de kegel gemeen heeft.

d Het vlak V door $(0,0,10)$, $(5,5,0)$ en $(0,5,0)$ snijdt van de bol een cirkel af. Bereken de straal van die cirkel.

e De doorsnede van V en de kegel K is een kegelsnede. Onderzoek welke vorm deze kegelsnede heeft.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Krommen en oppervlakken** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

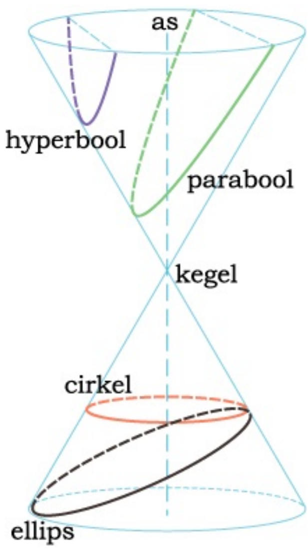
- cirkel, lijn — vergelijking — parametervoorstelling
- parabool — brandpunt, richtlijn — hyperbool, ellips — brandpunten, richtcirkel — vergelijkingen en parametervoorstellingen van krommen
- 3D krommen — schroeflijn
- oppervlakken — bol, cilinder
- kegel — kegelsnede

Activiteitenlijst

- vanuit vergelijkingen van lijnen en cirkels de karakteristieken bepalen — omzetten van vergelijkingen naar parametervoorstellingen v.v.
- werken met vergelijking en parametervoorstelling van parabool, ellips, hyperbool en andere krommen
- werken met parametervoorstelling van een kromme in 3D
- werken met parametervoorstelling en vergelijking van een bol en cilinder
- werken met parametervoorstelling en vergelijking van kegel — kegelsneden herkennen

Achtergronden

Apollonius van Perga (262—190 v.Chr.) was een Grieks wiskundige, die bekend stond als 'de grote geometer', de grote meetkundige. Vooral zijn boek 'Kegelsneden' waarin de begrippen parabool, hyperbool en ellips werden geïntroduceerd, is heel erg beroemd geworden. Hij beschreef er de cirkel, de ellips, de parabool en de hyperbool in als doorsnijdingen van een vlak met een (dubbele) kegel en leidde de belangrijkste eigenschappen van deze vlakke krommen af. Later paste hij deze kennis toe op de bewegingen van hemellichamen.
Dit geschrift bestond uit acht boeken, waarvan alleen de eerste vier in het Grieks en de eerste zeven in het Arabisch zijn blijven bestaan.
De eerste vier boeken vormen een elementaire inleiding in de basiseigenschappen van de kegelsneden. Dit werk was meestal afkomstig van werk van Euklides, Aristeus en Menaechmus. Maar sommige delen zijn verder uitgewerkt. Het gaat daar over eigenschappen van raaklijnen, brandpunten, middellijnen en over de wijze van constructie van deze krommen.



Figuur 6.1

De boeken V t/m VII zijn door Apollonius geheel zelf bedacht. In boek V gaat het over normalen (dat zijn loodlijnen op raaklijnen in het raakpunt) van kegelsneden getrokken vanuit bepaalde punten.

Testen

Opgave 1

Hieronder zie je een aantal vergelijkingen of parametervoorstellingen van krommen en/of oppervlakken. Bepaal telkens om welke kromme en welk oppervlak het gaat en geef de karakteristieken ervan, zoals brandpunt(en), richtlijn(-cirkel), middelpunt, straal, top, symmetrieas, e.d.

a $x^2 + 4y^2 = 6x - 8y$

b $(x,y) = \left(2t, \frac{1}{4}t^2 + 4\right)$

c $x^2 - 6x = y^2 - z^2 + 4z - 13$

d $(x,y,z) = (2 + 2v, 3 + 4\cos(u), \text{-}5 + 4\sin(u))$

Opgave 2

Gegeven is ten opzichte van een rechthoekig Oxy-assenstelsel de cirkel c met middelpunt $O(0,0)$ en straal 5. Verder zijn gegeven de punten $A(4,0)$ en $B(7,0)$.
De kromme k bestaat uit alle punten met gelijke afstand tot punt A als tot cirkel c.

a Geef een vergelijking van k. Hoe heet zo'n kromme?

b Stel ook een parametervoorstelling voor k op.

c Bereken de coördinaten van de punten op k waarin de raaklijn aan k evenwijdig is met de lijn $y = x$.

d Stel vergelijkingen op van de raaklijnen door punt B aan kromme k.

Opgave 3

Gegeven zijn ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$ en de parabool $p: y^2 = \text{-}0{,}5x + 1{,}5$.

a Toon aan dat de top van de parabool en het middelpunt van de cirkel hetzelfde punt zijn.

b Bereken de coördinaten van het brandpunt en de vergelijking van de richtlijn van p.

c Bereken de hoek waaronder beide krommen elkaar snijden.

d Bereken de lengte van de kleinste cirkelboog die de parabool uit de cirkel wegsnijdt.

Opgave 4

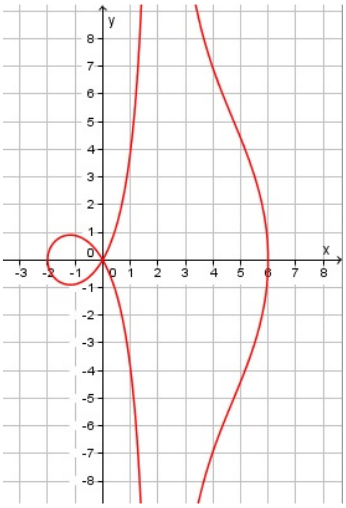
Een voorbeeld van een conchoïde is de kromme k die bestaat uit alle punten (x,y) die voldoen aan de vergelijking $\left(x^2+y^2\right)(x-2)^2=16x^2$.

a Welke waarden kunnen x en y aannemen?

b Bereken de coördinaten van snijpunten van k met de assen.

c Bereken de coördinaten van de punten van k waarin de raaklijn evenwijdig is met de y-as.

d Bereken de hoek waaronder beide raaklijnen aan k in $O(0,0)$ elkaar snijden.



Figuur 6.2

Opgave 5

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ is de bol B gegeven door de parametervoorstelling

$(x,y,z)=(4+5\cos(u)\cos(v), 3+5\sin(u)\cos(v), 5\sin(v))$

waarin $0\leq u<2\pi$ en $-\frac{1}{2}\pi\leq v\leq\frac{1}{2}\pi$.

a Bepaal de coördinaten van het middelpunt M en de lengte r van de straal van bol B.

b Geef een vergelijking van B.

c Bereken de coördinaten van de snijpunten van bol B met de coördinaatassen.

d Het vlak $V: z=2{,}5$ snijdt de bol volgens een cirkel c. Bereken de straal van c.

e Kegel K heeft M als top en snijdt de bol volgens cirkel c. Stel een vergelijking en een parametervoorstelling van deze kegel op.

f Bereken de hoek waaronder de bol en de kegel elkaar snijden in graden nauwkeurig.

g Rechte lijn l door $P(4,6,4)$ maakt een hoek van $60°$ met de bol en is evenwijdig met de vlak $x=y$. Stel een parametervoorstelling op van l.

Opgave 6

Gegeven is ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ een kegel met top T op de z-as en een grondcirkel die in het Oxy-vlak de vergelijking $x^2+y^2=36$ heeft. De tophoek van de kegel is $90°$.
Op de y-as ligt punt $P(0,12,0)$ en op de x-as ligt het punt $A(6,0,0)$. Het punt Q ligt op AT zo, dat de afstand van Q tot OT gelijk is aan 3.

a Teken deze kegel en punt P in het assenstelsel.

b Bepaal de coördinaten van punt Q.

c Bereken de afstand van lijn PQ tot lijn OT.

d Lijn PQ snijdt de kegel behalve in punt Q ook in punt R. Teken dit punt in je figuur en bereken de coördinaten van R.

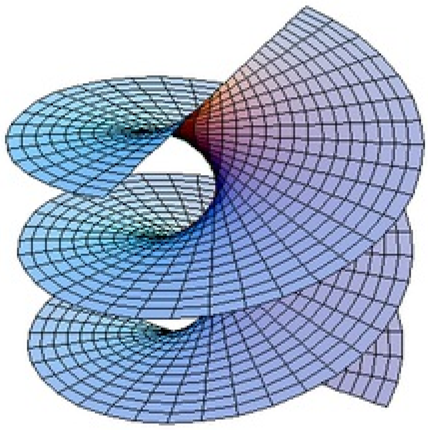
e Bereken de hoek waaronder PQ de kegel snijdt in graden nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 7: Regeloppervlakken

Oppervlakken die kunnen ontstaan door een rechte lijn in de ruimte te bewegen heten wel regeloppervlakken. Een regeloppervlak is een oppervlak, waarbij door elk punt van het oppervlak minstens één rechte - een beschrijvende of regel - gaat, die volledig tot het oppervlak behoort.

Voorbeelden zijn een cilinder, een kegel, een elliptische cilinder en de helicoïde die je hiernaast ziet (de parametervoorstelling ervan is $x = v\cos(au)$, $y = v\sin(au)$ en $z = u$.



Figuur 6.3

Een oppervlak E heeft parametervoorstelling $(x,y,z) = (2 + 4\cos(u), 4 + 2\cos(u), v)$.

a Om welke type regeloppervlak gaat het hier? Beschrijf het zo nauwkeurig mogelijk.

b Teken de doorsneden van het oppervlak E met de coördinaatvlakken.

c Geef een vergelijking van dit oppervlak.

Bekijk de helicoïde met $(x,y,z) = (v\cos(au), v\sin(au), u)$. Neem $a = 0{,}5$.

d Wat heeft deze figuur met een wenteltrap te maken?

e Welke rechte lijnen liggen er op?

f Laat zien dat er ook schroeflijnen op dit oppervlak liggen.

Opgave 8: Omwentelingsoppervlakken

Door een kegelsnede te wentelen om een as ontstaan omwentelingsoppervlakken zoals de ellipsoïde, de paraboloïde en de hyperboloïde. Maar je kunt ook andere krommen om een as wentelen.

- Een voorbeeld van een paraboloïde is het oppervlak met vergelijking $x^2 + z^2 = y$. Dit oppervlak ontstaat door de parabool met vergelijking $y = x^2$ om de y-as te wentelen.
- Een voorbeeld van een éénbladige hyperboloïde is het oppervlak met vergelijking $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

a Hoe zien de doorsneden van de paraboloïde met de vlakken $y = p$ (met $p > 0$) er uit?

b Hoe zien de doorsneden van de paraboloïde met de vlakken $z = p$ er uit?

c Geef een definitie van deze paraboloïde in termen van een brandpunt en een richtvlak.

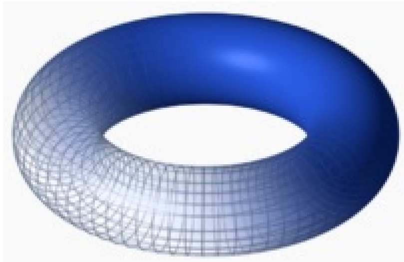
d Licht toe hoe de éénbladige hyperboloïde ontstaat.

Opgave 9: Torus en apenzadel

De **torus** is een buisachtig oppervlak, zeg maar de binnenband van een fietsband. Je ziet er hiernaast een voorbeeld van. Het oppervlak met vergelijking

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)^2+z^2=1$$

is een voorbeeld van een torus.



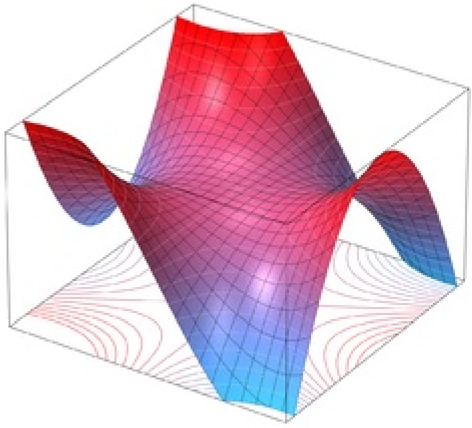
Figuur 6.4

a Teken de doorsneden van de torus met elk van de coördinaatvlakken.

b Welke waarden kan z aannemen? En x en y?

c Geef vergelijkingen van de doorsneden van de torus met de vlakken $x = 1$, $x = 2$ en $x = \sqrt{5}$ en schets deze doorsneden.

Hier zie je een oppervlak dat **apenzadel** wordt genoemd. Een voorbeeld van een apenzadel is een oppervlak met de vergelijking $z = x^3 - 3xy^2$.



Figuur 6.5

d Waarom heet dit oppervlak zo, denk je?

e Teken de doorsneden van dit oppervlak met elk van de coördinaatvlakken.

f Welke punt is het 'zadelpunt'?

g Je hebt ontdekt dat er op dit oppervlak rechte lijnen voorkomen. Eén daarvan is de doorsnede van het oppervlak met het vlak $x = 0$. Welke andere twee kun je uit de symmetrie van de figuur afleiden?

Examen

Opgave 10: Scheve parabool

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ is de kromme k gegeven door

$x = t^2 - t - 2$ en $y = t^2 + t + \frac{1}{4}$

waarbij $t \in \mathbb{R}$.

a Bereken de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van k en de coördinaatassen.

b Bereken de coördinaten van de punten van k waarin de raaklijn aan k evenwijdig is aan de x-as of de y-as.

c Kromme k snijdt de y-as in twee punten A en B. Bereken de hoek die de raaklijnen in deze punten aan de kromme met elkaar maken in graden nauwkeurig.

d Er bestaat een waarde van p waarvoor de lijn $x + y = p$ precies één punt met de kromme k gemeen heeft. Bereken p.

e De kromme k is een parabool. Stel een vergelijking op van de symmetrieas van deze parabool.

(bron: examen vwo wiskunde B in 1988, eerste tijdvak, opgave 3, aangepast)

Opgave 11: Bol en cilinder

De kubus $OABC.DEFG$ is ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ gegeven door $A(6,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $D(0,0,6)$.

De bol β gaat door B en F en raakt lijn OC in O.

a Stel een vergelijking op voor bol β.

Het midden van het lijnstuk AB is het middelpunt van een bol γ die door F gaat.

b Bereken de lengte van het lijnstuk dat γ van de lijn EG afsnijdt.

Een cilinder heeft als as lijn OA en straal 3.
Binnen het vierkant $ABFE$ ligt het punt R zo, dat

- de lijn CR deze cilinder raakt en bovendien
- de lijn CR een hoek van 30° maakt met de lijn BC.

c Bereken de coördinaten van R.

(bron: examen vwo wiskunde B in 1991, eerste tijdvak, opgave 4, aangepast)

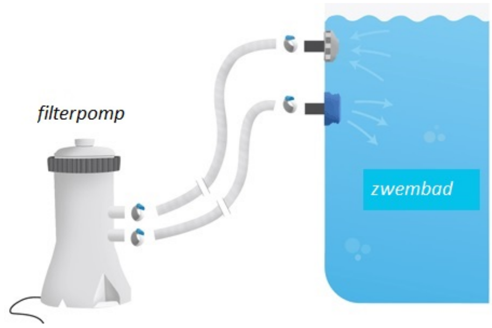
3

Differentiaalvergelijkingen

3.1 Continue dynamische modellen

Inleiding

Een bijzonder type wiskundige modellen dat veel voorkomt is het dynamische model. Daarbij worden rekenmodellen opgesteld van de veranderingen van de situatie met de tijd. En daarmee wordt dan gerekend, of (als de situatie niet te complex is) er wordt geprobeerd één of meer formules af te leiden waarmee de toestand op elk tijdstip kan worden bepaald. Als dit rekenmodel niet een verandering in vaste tijdstappen, maar een continue verandering in de tijd beschrijft, spreek je van een continu dynamisch model. De vergelijkingen waaruit het model bestaat zijn dan differentiaalvergelijkingen.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrippen continu dynamisch model, differentiaalvergelijking en oplossing van een differentiaalvergelijking;
- oplossingen van differentiaalvergelijkingen controleren.

Voorkennis

- werken met formules van rijen, directe formules en recursieformules, ook met de grafische rekenmachine;
- differentievergelijkingen en hun oplossingen bepalen in bepaalde situaties.

Verkennen

Opgave V1

In een zwembad is op zeker moment de chloorconcentratie 1 liter/m^3. Dat is te hoog en dus wordt het water ververst. Elk uur wordt 60 m^3 water vervangen door 60 m^3 schoon water. Er zit in totaal 1000 m^3 water in het zwembad.

a Bereken na hoeveel uur de chloorconcentratie is gehalveerd.

b Je kunt ook de stapgrootte niet in uren nemen, maar in bijvoorbeeld minuten. Wat verandert er dan?

c En wat gebeurt er als je de stapgrootte naar 0 laat naderen?

Uitleg 1

In een zwembad is op zeker moment de chloorconcentratie 1 L/m^3. Dat is te hoog en dus wordt het water ververst. Elk uur wordt 60 m^3 water vervangen door 60 m^3 schoon water. Er zit in totaal 1000 m^3 water in het zwembad.

Noem de chloorconcentratie $C(t)$ waarin t de tijd in uren is en C in L/m^3.
Ga ervan uit dat het schone water zich onmiddellijk met al het badwater vermengt, zodat $C(t)$ in het hele zwembad steeds op een bepaald tijdstip hetzelfde is.

Elk uur wordt de chloorconcentratie met $\Delta C(t) = 0{,}060 \cdot C(t)$ verminderd.

Dan geldt de modelvergelijking:
$C(t+1) = C(t) - 0{,}060 \cdot C(t) = 0{,}940 \cdot C(t)$

De chloorconcentratie op $t = 0$ (als het verversen van het water begint) is $C(0)$.

Voer deze formule in op de grafische rekenmachine. Uit de grafiek of de tabel blijkt dat de halveringstijd ongeveer 11 uur is.

In werkelijkheid wordt er echter voortdurend water ververst, dit gebeurt niet in tijdstappen. Die tijdstappen moeten kleiner worden, naar 0 naderen.

Neem je de tijdstap bijvoorbeeld Δt uur dan wordt
$\Delta C(t) = 0{,}060 \cdot C(t) \cdot \Delta t$ en de modelvergelijking
$C(t + \Delta t) = C(t) - 0{,}060 \cdot C(t) \cdot \Delta t$.

Deze modelvergelijking kun je schrijven als
$C(t + \Delta t) - C(t) = -0{,}060 \cdot C(t) \cdot \Delta t$.

En dus als: $\frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t} = -0{,}060 \cdot C(t)$.

Nu is $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t} = C'(t)$.

Als $\Delta t \to 0$ wordt de modelvergelijking $C'(t) = -0{,}060 \cdot C(t)$.

Zo'n vergelijking noem je een differentiaalvergelijking.

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** het verhaal van het verversen van het water in een zwembad.

a Licht toe hoe je aan de differentievergelijking $C(t+1) = C(t) - 0{,}060 \cdot C(t)$ komt en laat zien dat de halveringstijd van de chloorconcentratie dan iets meer dan 11 uur is.

b Laat zien dat de differentievergelijking nu $C(t+1) = C(t) - 0{,}001 \cdot C(t)$ wordt. Bereken de halveringstijd nauwkeuriger.

Opgave 2

In het zwembadprobleem waren de instroomsnelheid en de uitstroomsnelheid beide 60 m^3 per uur. Neem nu eens aan dat die instroom/uitstroomsnelheid gelijk is aan 120 m^3 per uur.

a Stel de bijbehorende differentievergelijking voor willekeurige stapgrootte Δt op.

b Bepaal de bijbehorende halveringstijd als $\Delta t = 1$.

c Je wilt de bijbehorende halveringstijd bepalen als $\Delta t = \frac{1}{60}$. Waarom gaat dit niet met de differentievergelijking bij b en de grafische rekenmachine? Laat zien hoe je dit kunt oplossen.

Opgave 3

Je ziet in **Uitleg 1** dat (bij t in uren) de stapgrootte Δt naar 0 wordt gebracht.

a Licht toe hoe je aan de differentiaalvergelijking $C'(t) = -0{,}060 \cdot C(t)$ komt.

b Het verloop van $C(t)$ wil je weten, wat is dus de oplossing van zo'n differentiaalvergelijking?

Uitleg 2

In een zwembad is op zeker moment de chloorconcentratie 1 liter/m^3. Dat is te hoog en dus wordt het water ververst. Elk uur wordt 60 m^3 water vervangen door 60 m^3 schoon water. Er zit in totaal 1000 m^3 water in het zwembad.

Hiervoor heb je de differentiaalvergelijking $C'(t) = -0{,}060 \cdot C(t)$ afgeleid, met t in uren.

Je wilt weten hoe $C(t)$ verloopt, dus een formule voor $C(t)$ opstellen die voor elke waarde van t voldoet aan de differentiaalvergelijking. Dat is voor de meeste differentiaalvergelijkingen niet eenvoudig. Maar je hebt op je grafische rekenmachine gezien dat de differentievergelijking met stapgrootte 1 een exponentieel verval laat zien. Bovendien lijkt de exponentiële functie het meest op zijn afgeleide.

Neem je bijvoorbeeld $C(t) = \text{e}^{-0{,}06t}$ dan is
$C'(t) = -0{,}06 \cdot \text{e}^{-0{,}06t} = -0{,}06 \cdot C(t)$ voor elke waarde van t.

De functie $C(t) = \text{e}^{-0{,}06t}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking. Maar beslist niet de enige oplossing.

Ga na dat alle functies van de vorm $C(t) = C(0) \cdot \text{e}^{-0{,}06t}$ met $C(0)$ een constante, oplossing zijn van deze differentiaalvergelijking.

Vanuit de randvoorwaarde dat de concentratie 1 liter/m^3 is op $t = 0$, kun je $C(0)$ bepalen.

Opgave 4

In **Uitleg 2** wordt beweerd dat alle functies van de vorm $C(t) = C(0) \cdot \text{e}^{-0{,}06t}$ oplossing zijn van de differentiaalvergelijking $C'(t) = -0{,}060 \cdot C(t)$.

a Bepaal de afgeleide van $C(t)$ en laat zien dat de functies $C(t)$ voor elke waarde van t voldoen aan de differentiaalvergelijking.

b Wat stelt $C(0)$ voor in deze situatie?

c Hoe groot is $C(0)$ in de beschreven situatie?

Opgave 5

Ook functies van de vorm $C(t) = b \cdot g^t$ zijn oplossing van de differentiaalvergelijking $C'(t) = -0{,}060 \cdot C(t)$.

a Bepaal de afgeleide van $C(t)$ en laat zien dat de functies $C(t)$ voor elke waarde van t voldoen aan de differentiaalvergelijking als je voor g de juiste waarde kiest.

b Neem $C(0) = 1$ L/m^3? Welke oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking past daar bij?

c Bereken nu de halveringstijd vanuit de gevonden oplossing.

d Bereken de halveringstijd als de randvoorwaarde is dat de concentratie chloor op $t = 0$ dubbel zo hoog is.

e Hoe lang duurt het bij de nieuwe randvoorwaarde tot de concentratie chloor weer onder de $0{,}5$ L/m^3 is?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **continu dynamisch model** is een rekenmodel voor een praktische situatie die met de tijd (die continu voortschrijdt) verandert. Zo'n model bestaat uit:

- variabelen die met de tijd veranderen;
- modelformules zoals $f'(t) = a \cdot f(t) + b$ (of ingewikkelder) waarin $f(t)$ een functie en t de tijd voorstelt;
- randvoorwaarden zoals een beginwaarde.

De modelformules heten **differentiaalvergelijkingen**. In een differentiaalvergelijking tref je behalve een functie ook de afgeleide of de tweede afgeleide van die functies aan.

De **oplossing van een differentiaalvergelijking** bestaat uit alle formules voor de functie $f(t)$ die er voor elke toegestane waarde van t voldoen. Vaak zijn dat meerdere formules van een bepaalde gedaante. Met behulp van de **randvoorwaarden** kun je bepalen welke van alle mogelijke oplossingen bij de specifieke situatie behoort.

Voorbeeld 1

Als je een glas melk vanuit de koelkast (temperatuur 6 °C) in een kamer zet waarin de temperatuur hoger is (kamertemperatuur bijvoorbeeld 20 °C), dan wordt de melk warmer. Uit de natuurkunde is bekend dat de temperatuurtoename per tijdseenheid recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving. Daarom kun je een discreet dynamisch model maken voor het opwarmen van de melk dat er zo uitziet:

$T(t + \Delta t) - T(t) = c \cdot (20 - T(t)) \cdot \Delta t$

Zet deze differentievergelijking om in een differentiaalvergelijking door $\Delta t \to 0$ te nemen.

Antwoord

Schrijf eerst de differentievergelijking als $\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t} = c \cdot (20 - T(t))$

Neem nu de limiet voor $\Delta t \to 0$ en je vindt:

$T'(t) = c \cdot (20 - T(t))$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Licht de differentievergelijking die is gegeven toe.

b Waarom is het in dit model nu nog niet belangrijk in welke eenheid de tijd wordt gemeten?

c Neem t in minuten, $c = 0{,}2$ en $\Delta t = 1$ en bereken het verloop van de opwarming in de eerste 10 minuten.

Opgave 7

Je haalt een fles cola uit de koelkast (temperatuur 8 °C) en zet dit in een ruimte met een temperatuur van 19 °C). Hierbij kun je een vergelijkbaar dynamisch model maken als in **Voorbeeld 1**.

a Schrijf eerst de bijbehorende differentievergelijking op.

b Als t wordt gemeten in minuten, is de evenredigheidsconstante gelijk aan $0{,}4$. Stel de bijpassende differentiaalvergelijking op.

Voorbeeld 2

Als je een glas melk vanuit de koelkast (temperatuur 6 °C) in een kamer zet waarin de temperatuur hoger is (kamertemperatuur bijvoorbeeld 20 °C), dan wordt de melk warmer. Uit de natuurkunde is bekend dat de temperatuurtoename per tijdseenheid recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving. Daarom kun je een continu dynamisch model maken voor het opwarmen van de melk dat er zo uitziet:

$T'(t) = c \cdot (20 - T(t))$

Aan deze differentievergelijking voldoen functies van de vorm $T(t) = 20 - a \cdot \text{e}^{-ct}$, waarin a een constante is. Laat zien dat dit klopt.

Antwoord

Door differentiëren vind je $T'(t) = ac \cdot \text{e}^{-ct}$.

Vul nu $T'(t)$ en $T(t)$ in de differentiaalvergelijking in. Je vindt:

$ac \cdot \text{e}^{-ct} = c \cdot \left(20 - \left(20 - a \cdot \text{e}^{-ct}\right)\right)$

Ga na, dat aan beide zijden van het isgelijkteken voor elke waarde van t hetzelfde staat.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Laat zien dat de gegeven functie inderdaad aan de differentiaalvergelijking voldoet.

b Neem t in minuten en $c = 0{,}2$. Welke serie oplossingen heeft de differentiaalvergelijking dan?

c Hoe kun je a berekenen?

d Bereken vervolgens de tijd die nodig is om de melk een temperatuur van 12 °C te laten bereiken.

Opgave 9

De snelheid waarmee in een zwembad gechloord water wordt vervangen door schoon water, heet de spoelsnelheid. Ga uit van een spoelsnelheid van 2 m^3 per minuut en een beginconcentratie van 1 L/m^3.

a Stel de bijbehorende differentiaalvergelijking op.

b Laat zien dat bij deze differentiaalvergelijking functies van de vorm $C(t) = C(0) \cdot \text{e}^{-0{,}002t}$ passen

c Bereken $C(0)$.

d Bereken vervolgens de tijd die nodig is om de chloorconcentratie te halveren.

Verwerken

Opgave 10

Bepaal de differentiaalvergelijkingen bij de volgende differentievergelijkingen:

a $H(t + \Delta t) = H(t) + 3 \cdot (t + H(t)) \cdot \Delta t$

b $N(t + \Delta t) = N(t) + 5 \cdot \Delta t \cdot N(t) - 2 \cdot \Delta t \cdot (N(t))^2$

c $f(x + \Delta x) = f(x) + x \cdot f(x) \cdot \Delta x$

Opgave 11

Als het licht door een bepaald materiaal (bijvoorbeeld een glasplaat) gaat, neemt de intensiteit ervan voortdurend af. Die intensiteitsafname is recht evenredig met de intensiteit aan het begin van een gepasseerde laag materiaal. Noem de intensiteit van het licht $I(d)$ waarin d de dikte van de gepasseerde laag materiaal is in m. Bekijk eerst wat er gebeurt in stappen van $\Delta d = 1$ m.

a Laat zien, dat dan geldt: $I(d + 1) = I(d) - k \cdot I(d)$, waarin k een evenredigheidsconstante is die afhangt van het materiaal.

b Neem aan dat $k = 0{,}2$ en $I(0) = 100$ bereken $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$, $I(4)$ en $I(5)$.

c Leidt een directe formule af voor $I(d)$ en bereken met behulp daarvan na hoeveel m de lichtintensiteit is gehalveerd.

Neem nu een stapgrootte van Δd. Ga nog steeds uit van $k = 0{,}2$.

d Stel de bijpassende differentievergelijking op en leidt daaruit de bijbehorende differentiaalvergelijking af.

e Toon aan dat functies van de vorm $I(d) = I(0) \cdot \text{e}^{-0{,}2d}$ oplossingen zijn van deze differentiaalvergelijking.

f Neem weer $I(0) = 100$ en bereken de waarde van d waarna de lichtintensiteit is gehalveerd..

Opgave 12

Als je een kop koffie uit een koffiezetter haalt, dan is de koffie meestal gloeiend heet. Neem aan dat de koffie 90 °C is.
Breng je die koffie in een kamer met een binnentemperatuur van 20 °C , dan koelt hij af. De temperatuurafname van de koffie is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

Gebruik voor de tijd (min) de variabele t en voor de temperatuur van de koffie (°C) de variabele T. Neem om te beginnen een stapgrootte van $\Delta t = 1$ minuut.

a Stel een passende modelformule op; c is de evenredigheidsconstante.

Neem $c = 0{,}1$.

b Maak voor de eerste vijf minuten een tabel van de temperatuur van de koffie.

c Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van de koffie is gezakt tot onder de 50 °C.

d Stel een differentiaalvergelijking bij dit probleem op, neem weer $c = 0{,}1$.

e Toon aan dat functie van de vorm $T(t) = 20 + k \cdot \text{e}^{-0{,}1t}$ oplossingen zijn van deze differentiaalvergelijking.

f Gebruik $T(0) = 90$ en bereken na hoeveel tijd de temperatuur van de koffie 25 °C is geworden.

Opgave 13

Gegeven is de differentiaalvergelijking $y'(t) = t \cdot y(t)$. Er geldt $y(0) = 1$.

a Laat zien dat de volgende functies geen oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn: $y_1(t) = 0$, $y_2(t) = 1$, $y_3(t) = t + 1$ en $y_4(t) = \cos(t)$.

b Functies van de vorm $y_5(t) = c \cdot \text{e}^{0{,}5t^2}$ zijn oplossing van deze differentiaalvergelijking. Laat dit zien en bepaal voor welke waarde van c dan ook aan de randvoorwaarde $y(0) = 1$ is voldaan.

Opgave 14

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend met een constante snelheid van 12 mg/uur. Het lichaam breekt dit medicijn af met een snelheid die recht evenredig is met de al in het bloed aanwezige hoeveelheid medicijn. Noem de in het bloed aanwezige hoeveelheid medicijn $M(t)$, waarbij t de tijd in uren is en $M(0) = 0$ mg.

a Stel voor dit proces een passende differentievergelijking op.

b Leid uit de gevonden differentievergelijking een differentiaalvergelijking af.

c Laat zien dat $M(t) = \frac{1}{c} \cdot \left(12 - k \cdot \text{e}^{-ct}\right)$ een oplossing van deze differentiaalvergelijking is.

d Neem $c = 0{,}15$ en bereken k vanuit de randvoorwaarde.

e Hoeveel medicijn zit er op de lange duur in het lichaam?

Testen

Opgave 15

Bij een bepaald dynamisch proces hoort de differentievergelijking $H(t + \Delta t) = H(t) + \frac{H(t)}{t} \cdot \Delta t$. Verder is gegeven dat $H(2) = 10$.

a Welke differentiaalvergelijking kun je bij dit dynamisch proces opstellen?

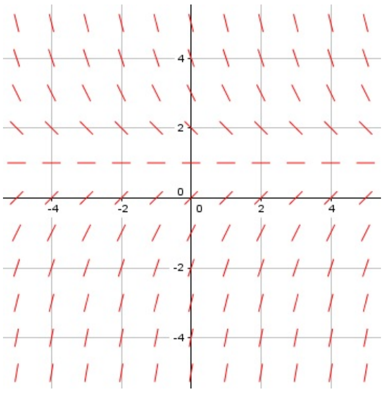
b Toon aan dat functies van de vorm $H(t) = a \cdot t$ oplossingen zijn van de gevonden differentiaalvergelijking.

c Bereken de juiste waarde van a vanuit de gegeven randvoorwaarde.

3.2 Differentiaalvergelijkingen

Inleiding

Je hebt kennis gemaakt met differentiaalvergelijkingen, vergelijkingen waarin behalve een functie ook de afgeleide (en soms nog hogere afgeleiden) van deze functie voorkomen. In het algemeen zijn differentiaalvergelijkingen moeilijk op te lossen, hun oplossingen zijn (directe) formules voor het functievoorschrift. In de loop van dit onderwerp zul je weliswaar een aantal oplossingsmethoden voor specifieke soorten d.v.'s leren kennen, maar voor nu leer je eerst enkele algemene manieren kennen om oplossingen te benaderen of om een beeld te krijgen van het soort functie die het betreft.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de oplossingen van een differentiaalvergelijking benaderen met de methode van Euler;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking zoeken met behulp van een richtingsveld (lijnelementenveld).

Voorkennis

- het begrip continu dynamisch model en de bijbehorende differentiaalvergelijkingen;
- het begrip oplossing van een differentiaalvergelijking;
- oplossingen van differentiaalvergelijkingen controleren.

Verkennen

Opgave V1

Hoe vind je nu in het algemeen de oplossingen van een differentiaalvergelijking?

Dat is nog niet zo eenvoudig, maar een eerste idee zou kunnen zijn: probeer een tabel te maken van de functiewaarden, al is het maar door een goede benadering. Bekijk de differentiaalvergelijking $f'(x) = x + f(x)$ maar eens.

a Welke differentievergelijking kun je erbij maken?

b Neem vervolgens een stapgrootte van bijvoorbeeld $\Delta x = 0{,}1$ en begin met bijvoorbeeld $f(0) = 0$ en maak een tabel met functiewaarden

c Hierbij kun je de grafiek maken van een oplossing (een functie) van deze differentiaalvergelijking. Doe dat.

Uitleg 1

Het vinden van de oplossingen van een differentiaalvergelijking, dus van functies die er aan voldoen, is vaak nog niet eenvoudig.

Bekijk bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking $f'(x) = x + f(x)$ maar eens.

Het is niet gemakkelijk om functievoorschriften te bedenken die hier aan voldoen. Maar je kunt wel functiewaarden benaderen door weer terug te gaan naar de bijbehorende differentievergelijking.

Daarbij gebruik je $f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Daarmee schrijf je de differentiaalvergelijking als differentievergelijking:

$f(x + \Delta x) = f(x) + (x + f(x)) \cdot \Delta x$

En voor stapgrootte Δx kun je een getal kiezen, bijvoorbeeld $\Delta x = 0{,}1$.

Als je dan functiewaarden wilt berekenen van de oplossing die door $(0{,}0)$ gaat, begin je zo:

$f(0) = 0$ (daar ga je van uit)

$f(0{,}1) = f(0 + 0{,}1) = f(0) + (0 + f(0)) \cdot 0{,}1 = 0$

$f(0{,}2) = f(0{,}1 + 0{,}1) = f(0{,}1) + (0{,}1 + f(0{,}1)) \cdot 0{,}1 = 0{,}01$

$f(0{,}3) = f(0{,}2 + 0{,}1) = f(0{,}2) + (0{,}2 + f(0{,}2)) \cdot 0{,}1 = 0{,}031$

En zo kun je door gaan.

Dit wordt de methode van Euler genoemd. Hoe kleiner je stapgrootte, hoe beter de benaderingen, maar hoe meer werk. Gelukkig bestaan er computerprogramma's die dit werk voor je kunnen doen, zie het **Practicum**.

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe de methode van Euler wordt gebruikt om een oplossing van een differentiaalvergelijking in beeld te krijgen.

a Laat zien hoe je aan de differentievergelijking komt.

b Maak een tabel voor de functiewaarden $f(0)$, $f(0{,}1)$, $f(0{,}2)$, ..., $f(1{,}0)$ en teken de bijpassende grafiek van f.

c Er zijn ook oplossingen waarvoor niet geldt $f(0) = 0$, maar waarvoor $f(0)$ een andere waarde heeft. Zijn deze grafieken altijd eenvoudig met behulp van transformaties uit de grafiek bij b af te leiden?

Opgave 2

Bekijk de differentiaalvergelijking $f'(x) = x + f(x)$ nog eens.

a Is er een oplossing van de vorm $y = ax + b$?

b Waarom kan de oplossing die je bij a hebt gevonden nooit de enige zijn?

c Laat zien dat deze differentiaalvergelijking oplossingen heeft van de vorm $f(x) = -x - 1 + a\,\mathrm{e}^{x}$.

d Welke van deze oplossingen gaat door $(0{,}0)$? Klopt dit met je tabel uit de vorige opgave?

Opgave 3

Bekijk de differentiaalvergelijking $C'(t) = 1 - C(t)$.

a Benader de oplossing van deze differentiaalvergelijking waarvoor geldt $C(0) = 0{,}5$ met de methode van Euler. Kies een stapgrootte van $\Delta t = 0{,}2$ en maak een grafiek van deze oplossing.

b Op grond van je grafiek kun je vermoeden dat de oplossing de vorm $C(t) = 1 + a \cdot g^{-t}$ heeft. Laat zien dat dit klopt en bepaal de juiste waarden van a en g

Uitleg 2

Bekijk de applet: lijnelementenveld

Een totaal andere manier om naar de oplossingen van een differentiaalvergelijking van de vorm $f'(x) = ...$ (waarbij op de stippeltjes een uitdrukking staat met alleen x en $y = f(x)$) te kijken zie je hier.

Neem weer de differentiaalvergelijking $f'(x) = x + f(x)$.

Je kunt dit schrijven als $\frac{dy}{dx} = x + y$.

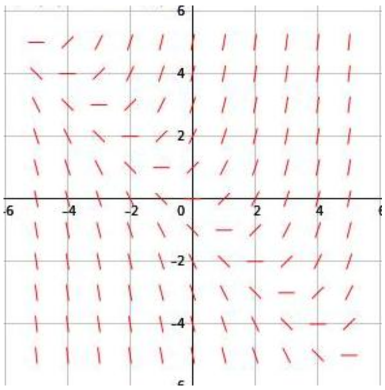
En dan bedenk je dat $\frac{dy}{dx}$ de helling is van de raaklijn aan de grafiek van $y = f(x)$. En in elk punt (x,y) kun je een klein stukje van zo'n raaklijn tekenen, bijvoorbeeld:

- In $(0,0)$ geldt $\frac{dy}{dx} = 0 + 0 = 0$.
- In $(0,1)$ geldt $\frac{dy}{dx} = 0 + 1 = 1$.
- In $(2,3)$ geldt $\frac{dy}{dx} = 2 + 3 = 5$.

Gelukkig bestaan er computerprogramma's die stukjes raaklijn met de berekende helling snel voor je tekenen, zie het **Practicum**. Daarin zie je hoe deze applet is gemaakt met behulp van GeoGebra.

Zo'n programma kan ook de grafiek van de oplossing door een bepaald punt voor je maken. Je krijgt dan vaak een idee van het soort functie waar je mee te maken hebt.

Een figuur zoals dit noem je een richtingsveld bij de differentiaalvergelijking, of ook wel een lijnelementenveld.



Figuur 2.2

Opgave 4

Bekijk het richtingsveld bij de differentiaalvergelijking $f'(x) = x + f(x)$.

a Ga na, dat bij de punten die in **Uitleg 2** worden genoemd inderdaad de juiste helling in de figuur wordt weergegeven.

b Welke helling heeft het lijnelement bij het punt $A(-1,4)$? Ga na, dat de gevonden waarde klopt met de figuur.

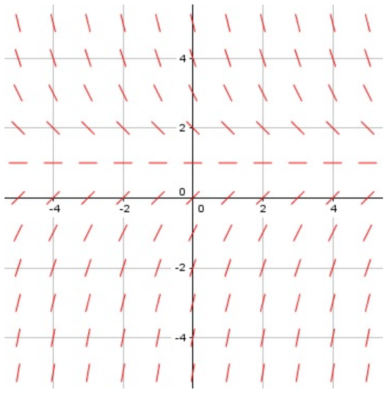
c In het lijnelementenveld kun je zien dat de grafiek van één der oplossingen een rechte lijn is. Welke formule hoort er bij die lijn?

d In de applet kun je de grafiek van de oplossing van de differentiaalvergelijking zien die door $(0,0)$ gaat. Ga na, dat deze grafiek overeenkomt met die van de functie $f(x) = -x - 1 + 1\,\mathrm{e}^{x}$.

e Bekijk het **Practicum** en maak zelf een richtingsveld bij de differentiaalvergelijking $f'(x) = x + f(x)$ met behulp van GeoGebra. Teken er ook de grafiek van een oplossing in.

Opgave 5

Bekijk het richtingsveld bij de differentiaalvergelijking $C'(t) = 1 - C(t)$ of liever: maak het zelf met GeoGebra.



Figuur 2.3

a Bereken de helling in alle punten op de t-as (de x-as).

b Welke helling heeft het lijnelement bij het punt $A(-2,4)$? Ga na, dat de gevonden waarde klopt met de figuur.

c In het lijnelementenveld kun je zien dat de grafiek van één der oplossingen een rechte lijn is. Welke formule hoort er bij die lijn?

d Schets (of maak met GeoGebra) de grafiek van de oplossing van de differentiaalvergelijking die door $(0,0)$ gaat. Welk soort functievoorschriften hoort bij deze differentiaalvergelijking?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **differentiaalvergelijking** is een vergelijking waarin behalve een functie f ook zijn afgeleide of zelfs hogere afgeleiden voorkomen.

De **oplossing van een differentiaalvergelijking** bestaat uit alle formules voor $f(x)$ die er voor elke toegestane waarde van x aan voldoen. Met behulp van de **randvoorwaarden** kun je bepalen welke van alle mogelijke oplossingen een grafiek heeft door een bepaald punt.

Bij differentiaalvergelijkingen van de vorm $f'(x) = ...$ waarbij op de stippeltjes een uitdrukking staat met alleen x en $y = f(x)$, kun je

- oplossingen benaderen met de **methode van Euler**, waarbij je de bijbehorende differentievergelijking met een bepaalde stapgrootte gebruikt om vanuit een gegeven randvoorwaarde functiewaarden te berekenen;
- oplossingen in beeld brengen met een **richtingsveld**, ook wel **lijnelementenveld** genoemd, waarin je in alle gewenste punten binnen een bepaald gebied raaklijnstukjes tekent aan de (op dat moment onbekende) grafieken van de oplossingen.

Er bestaan computerprogramma's zoals GeoGebra die je het vele werk dat daarmee is gemoeid uit handen nemen, bekijk het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Als je een glas melk vanuit de koelkast (temperatuur 6 °C) in een kamer zet waarin de temperatuur hoger is (kamertemperatuur bijvoorbeeld 20 °C), dan wordt de melk warmer. Uit de natuurkunde is bekend dat de temperatuurtoename recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving. Daarom kun je een continu dynamisch model maken voor het opwarmen van de melk dat er zo uitziet:

$T'(t) = c \cdot (20 - T(t))$.

Neem aan dat $c = 0{,}15$, dat t in uren is en dat $T(0) = 6$ °C. Benader met de methode van Euler de temperatuur na 2 uur.

Antwoord

Schrijf eerst de differentiaalvergelijking als

$\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t} \approx 0{,}15 \cdot (20 - T(t))$

Zo krijg de differentievergelijking

$T(t + \Delta t) = T(t) + 0{,}15 \cdot (20 - T(t)) \cdot \Delta t$

Je weet dat $T(0) = 6$ °C en je wilt $T(2)$ weten.

Kies als stapgrootte bijvoorbeeld $\Delta t = 0{,}2$. Je krijgt:

$T(0{,}2) = T(0) + 0{,}15 \cdot (20 - T(0)) \cdot 0{,}2 = 6 + 0{,}15 \cdot 14 \cdot 0{,}2 = 6{,}42$

$T(0{,}4) = T(0{,}2)+0{,}15\cdot(20 - T(0{,}2))\cdot 0{,}2 = 6{,}42+0{,}15\cdot 13{,}58\cdot 0{,}2 = 6{,}8274$

En ga zo maar door...

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Maak de benadering van $T(2)$ af.

b Hoe kun je sneller een benadering van $T(2)$ vinden?

c Hoe kun je een nauwkeuriger benadering krijgen?

Opgave 7

Bekijk de differentiaalvergelijking $H'(t) = -0{,}05 \cdot H(t)$ met $H(0) = 100$.

a Benader $H(1)$ met de methode van Euler. Neem een stapgrootte van $\Delta t = 0{,}1$.

b Als het goed is zie je bij a dat $H(t)$ afneemt en wel steeds iets minder snel. Zo kom je op het idee dat $H(t) = H(0) \cdot g^t$ een mogelijke oplossingsfunctie zou kunnen zijn. Laat zien dat dit zo is en bepaal g.

c Hoeveel wijkt je antwoord bij a af van de werkelijke waarde van $H(1)$?

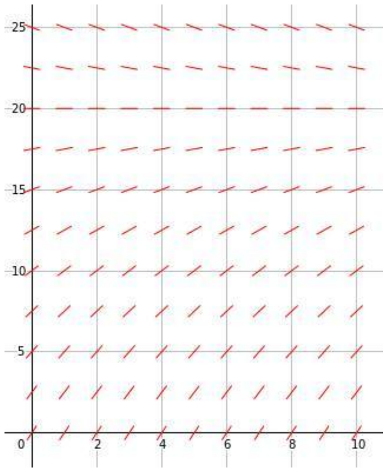
Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Bekijk het lijnelementenveld bij de differentiaalvergelijking $T'(t) = 0{,}15 \cdot (20 - T(t))$.

Bereken $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ in het punt $(5{,}18)$ en laat zien dat deze hellingswaarde overeenkomt met de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van de oplossingsfunctie door dit punt.

Hoe maak je zo'n richtingsveld?



Figuur 2.4

Antwoord

$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0{,}15 \cdot (20 - 18) = 0{,}30$

Je maakt zo'n richtingsveld door in veel punten de waarde van $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ te berekenen en dan in zo'n punt een klein lijnstukje te tekenen met die waarde als hellingswaarde. Dit laat je meestal doen door een computerprogramma zoals GeoGebra, zie het **Practicum**.

Om na te gaan dat de gevonden hellingswaarde overeenkomt met de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van de oplossingsfunctie door dit punt, ga je deze oplossing proberen te vinden.

In het lijnelementenveld lijken exponentiële functies met een horizontale asymptoot $T = 20$ goede kandidaten te zijn voor de oplossingen van de differentiaalvergelijking. Ga dus uit van $T(t) = 20 - a \cdot g^t$.

$T(t) = 20 - a \cdot g^t$ en $T'(t) = -a \cdot \ln(g) \cdot g^t$ invullen geeft $g = \mathrm{e}^{-0{,}15t}$.

Je krijgt dan $T(t) = 20 - a \cdot \mathrm{e}^{-0{,}15t}$.

De grafiek moet door $(5{,}18)$ gaan en dit geeft $a \approx 4{,}23$.

Je hebt nu de complete functie $T(t) \approx 20 - 4{,}23 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}15x}$.

En daarvan kun je dan weer helling berekenen voor $t = 5$. Ga na dat je ook ongeveer $0{,}30$ krijgt.

Opgave 8

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

a Maak zelf het lijnelementenveld met behulp van GeoGebra, bekijk eventueel het **Practicum**.

b Voer de berekening van de oplossingsfunctie zelf volledig uit.

c Laat zien dat deze oplossingsfunctie in $(5{,}18)$ een hellingswaarde van ongeveer $0{,}30$ heeft.

Opgave 9

Bekijk de differentiaalvergelijking $H'(t) = -0{,}05 \cdot H(t)$ met $H(0) = 100$ die een vervalproces beschrijft.

a Maak een bijbehorend lijnelementenveld met behulp van GeoGebra, bekijk eventueel het **Practicum**. Leg uit waarom bijna alle lijnelementen een negatieve helling hebben. Welke lijnelementen niet?

b Waarom hebben alle punten die op dezelfde horizontale lijn liggen ook dezelfde helling?

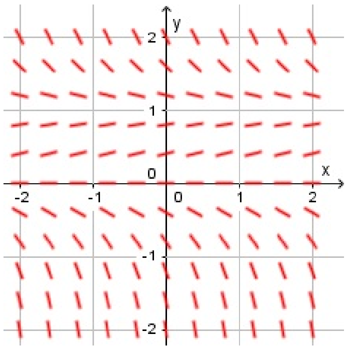
c Maak in GeoGebra de oplossing van deze differentiaalvergelijking die aan de randvoorwaarde voldoet. Welke formule hoort er bij?

Voorbeeld 3

Bekijk het lijnelementenveld bij de differentiaalvergelijking $f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$.

Welke twee constante functies zijn oplossing van deze differentiaalvergelijking?

Toon aan, dat functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{1+A \cdot \mathrm{e}^{-x}}$ oplossing van deze differentiaalvergelijking zijn.



Figuur 2.5

Antwoord

In het lijnelementenveld zie je dat op de lijnen $y = 0$ en $y = 1$ alle hellingen de waarde 0 hebben. Je kunt gemakkelijk nagaan dat $y = 0$ en $y' = 0$ er voor zorgen dat links en rechts van het isgelijkteken hetzelfde staat. Dit betekent dat $y = 0$ een oplossing van de differentiaalvergelijking is. En hetzelfde geldt voor $y = 1$.

Bij $f(x) = \frac{1}{1+A \cdot \mathrm{e}^{-x}}$ hoort $f'(x) = \frac{A \cdot \mathrm{e}^{-x}}{(1+A \cdot \mathrm{e}^{-x})^2}$.

Als je beide in de differentiaalvergelijking invult, kun je laten zien dat links en rechts van het isgelijkteken hetzelfde komt te staan voor elke waarde van x.

Opgave 10

Bekijk de differentiaalvergelijking uit **Voorbeeld 3**.

a Maak zelf het bijbehorende lijnelementenveld met behulp van GeoGebra.

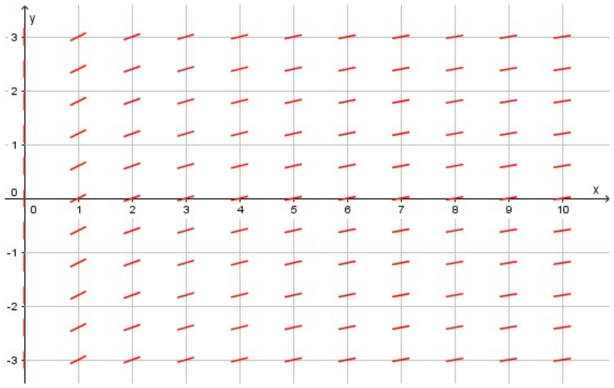
b Laat zien, dat $y = 1$ aan de gegeven differentiaalvergelijking voldoet.

c Laat zien dat functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{1+A \cdot \mathrm{e}^{-x}}$ voldoen aan de differentiaalvergelijking.

d Teken in het richtingsveld dat je bij a hebt gemaakt de oplossingsfunctie $f(x)$ waarvoor geldt $f(0) = 0{,}5$.

Opgave 11

Hier zie je het richtingsveld bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ met $x > 0$.



Figuur 2.6

a Hoe lopen de lijnelementen in de buurt van de y-as?

b Maak zelf dit richtingsveld en bekijk een aantal grafieken van oplossingen ervan.

c Bedenk welk type functies voldoet aan de differentiaalvergelijking en toon dan aan dat ze dit ook inderdaad doen.

Verwerken

Opgave 12

Gegeven is de differentiaalvergelijking $f'(x) = \sin(f(x))$ met beginwaarde $f(0) = 1$.

a Bepaal de bijbehorende differentievergelijking.

b Neem een stapgrootte van $\Delta x = 1$ en benader daarmee $f(1)$.

c Doe hetzelfde nog eens met een stapgrootte van $\Delta x = 0{,}05$. Hoe groot is het verschil met het voorgaande antwoord?

Opgave 13

Gegeven is de differentiaalvergelijking $f'(x) = f(x) \cdot (3 - f(x))$.

a Bepaal $f'(x)$ in de punten $(1,1)$, $(4,5)$ en $(-1,1)$.

b Maak met GeoGebra een lijnelementenveld van deze differentiaalvergelijking met $-3 \leq x \leq 3$ en $-1 \leq y \leq 6$.

c Welke twee horizontale lijnen voldoen aan deze differentiaalvergelijking?

d Het lijnelement in $(1,1)$ is een deel van de raaklijn aan de grafiek van een oplossingsfunctie. Stel een vergelijking op van die raaklijn.

e Teken in het richtingsveld de grafiek van de oplossingsfunctie door $(0,1)$. Ga na dat hierbij de functie $f(x) = \frac{3}{1+2e^{-3x}}$ hoort en laat met een berekening zien dat deze functie inderdaad aan de differentiaalvergelijking voldoet.

Opgave 14

Een bolvormig klontje ijs zal in huis buiten de koelkast smelten. In het begin zal het meeste ijs smelten omdat het oppervlak van het klontje dan het grootst is. Het lijkt niet onredelijk om aan te nemen dat de snelheid van het massaverlies van het klontje evenredig is met de oppervlakte ervan. Je wilt een rekenmodel voor het smelten opstellen onder deze aanname.

a Welke van de volgende grootheden zijn in dit probleem constant en welke niet?

- oppervlakte A
- volume V
- straal r
- massa m
- dichtheid $\rho = \frac{m}{V}$

b Laat met behulp van de formules de oppervlakte en de inhoud van een bol zien, dat voor een bol geldt: $A \approx 4{,}84V^{\frac{2}{3}}$.

Neem voor de constante dichtheid van het ijs $0{,}9$ kg/m^3.

c Geef een formule voor het verband tussen de oppervlakte A en de massa m van het ijsklontje.

d Laat zien dat met bovenstaande modelaanname, de massa van het ijsklontje beschreven wordt door $m'(t) = -c \cdot (m(t))^{\frac{2}{3}}$ met $c > 0$.

e Uit experimenteren blijkt dat de evenredigheidsconstante c gelijk is aan $0{,}01$. Benader met de methode van Euler de massa van het klontje na 10 minuten als de massa aan het begin 10 g is. Neem $\Delta t = 0{,}5$ minuten.

Opgave 15

De functie $f(x) = \sqrt{ax+b}$ is voor zekere waarden van a en b oplossing van de differentiaalvergelijking $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$ met $x > 0$. Gegeven is ook dat $f(2) = 3$.

Bepaal de waarden van a en b.

Opgave 16

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$.

De grafieken van de oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn cirkels.

a Onderzoek met behulp van het richtingsveld of de oplossingen van deze differentiaalvergelijking cirkels kunnen zijn.

b Teken de oplossingskromme door het punt $(0,5)$ in het richtingsveld.

Bij een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal r hoort de vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$. Hij kan derhalve worden beschreven door de functies $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

c Laat zien dat deze functies voldoen aan de gegeven differentiaalvergelijking.

Opgave 17

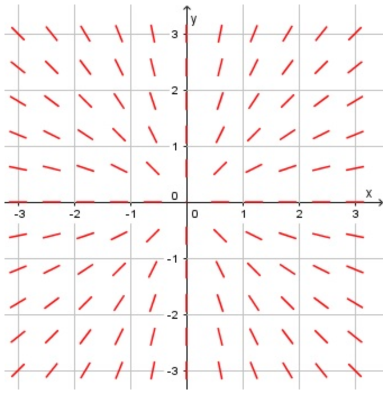
Hier zie je een richtingsveld.

a Welke van de volgende differentiaalvergelijkingen hoort bij dit veld?

- $f'(x) = \frac{-f(x)}{x}$
- $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$
- $f'(x) = \frac{x}{-f(x)}$
- $f'(x) = \frac{x}{f(x)}$

b Hoe zien de oplossingsfuncties van deze differentiaalvergelijking er uit?

c Laat zien dat deze functies voldoen aan de gegeven differentiaal-vergelijking.



Figuur 2.7

Toepassen

Opgave 18: Chemische stoffen die op elkaar reageren

Twee chemische stoffen, A en B, reageren met elkaar en vormen stof C.
De bijbehorende reactievergelijking is: $2A + B \rightarrow C$.
Deze vergelijking geeft aan dat 2 eenheden (bijvoorbeeld kilogram) van stof A samen met één eenheid van stof B omgezet worden in één eenheid van stof C. De reactie begint als men stof A met stof B samenvoegt. Op dat ogenblik is er nog geen stof C aanwezig! In het begin wordt er 'snel' stof C gemaakt. Maar omdat er steeds minder van stof A en van stof B voorradig is, wordt de snelheid waarmee stof C ontstaat steeds kleiner. De differentiaalvergelijking die de vorming van stof C beschrijft is:

$$x'(t) = k \cdot (a - u \cdot x(t)) \cdot (b - v \cdot x(t))$$

met

- t is de tijd in minuten;
- x is de hoeveelheid gevormde stof C;
- a is de beginhoeveelheid van stof A;
- b is de beginhoeveelheid van stof B;
- k is een positieve constante.

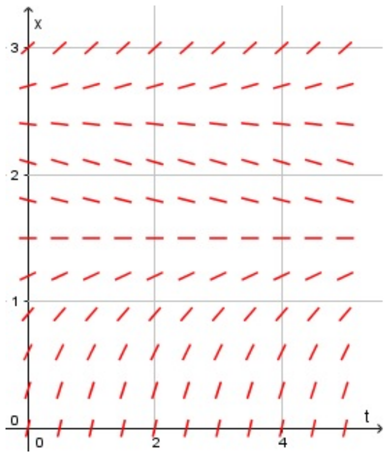
a Toon aan dat $u = 2$ en $v = 1$.

b Toon met behulp van de differentiaalvergelijking aan dat de hoe-veelheid geproduceerde stof C per tijdseenheid steeds kleiner wordt.

In de figuur zie je voor $a = 5$ en voor een zekere waarde van b het richtingsveld voor $k = 0{,}3$.

c Welke waarde van b hoort bij dit veld?

d Schat met behulp van het richtingsveld de hoeveelheid van stof C na drie minuten. Hoeveel stof A is er dan nog aanwezig?



Figuur 2.8

Testen

Opgave 19

Op tijdstip $t = 0$ doe je een hoeveelheid vaste stof in water. De vaste stof lost op: de oplossingssnelheid (de toename van de concentratie vaste stof per tijdseenheid) op tijdstip t is recht evenredig met het verschil tussen een bepaalde verzadigingsconcentratie C_v van die stof in water en de concentratie $C(t)$ van de op tijdstip t (in minuten) opgeloste stof.

a Laat zien, dat bij dit continue dynamische model de volgende differentiaalvergelijking past: $C'(t) = k \cdot (C_v - C(t))$.

Neem verder aan dat $C(0) = 0$ g/L, dat $C_v = 10$ g/L en dat $k = 0{,}02$.

b Bepaal met de methode van Euler de concentratie na 20 minuten. Werk met een stapgrootte van $\Delta t = 1$ minuut.

c Toon aan, dat de in a gegeven differentiaalvergelijking oplossingen heeft van de vorm $C(t) = A + B \cdot \text{e}^{-kt}$.
Bepaal vervolgens de oplossing die aan de voorwaarden voldoet en bereken opnieuw de concentratie na 20 minuten.

Opgave 20

Gegeven is de differentiaalvergelijking $f'(x) = 10 - 2 \cdot f(x)$.

a Maak in GeoGebra het bijbehorende lijnelementenveld.

b Welke horizontale lijn is oplossing van deze differentiaalvergelijking?

c Bepaal de oplossingsfunctie van deze differentiaalvergelijking waarvoor geldt $f(0) = 1$.

Practicum GeoGebra

Hopelijk kun je al redelijk goed werken met GeoGebra, zie anders **Werken met GeoGebra**.

In GeoGebra kun je redelijk eenvoudig **richtingsvelden** (lijnelementenvelden) maken.
Bij de differentiaalvergelijking $f'(x) = x + f(x)$ doe je dat door op de invoerbalk (onderaan het tekengebied) in te voeren:
Raakveld[f '(x), aantal, lengte, xmin, ymin, xmax, ymax]
waarbij je voor

- ‘f '(x)’ in dit geval x + y invult, want $f(x) = y$;
- ‘aantal’ het aantal lijnelementen naast elkaar invult;
- ‘lengte’ de lengte van elk lijnelement invult;
- ‘xmin’, ‘ymin’, ‘xmax’, ‘ymax’ de minimale en maximale waarden invult voor x en y.

In plaats van x + y (wat past bij de gegeven differentiaalvergelijking), kun je ook een andere differentiaalvergelijking invullen. Deze moeten dan wel de vorm $f'(x) = ...$ hebben met op de stippeltjes een uitdrukking met alleen x en $y = f(x)$. In de applet zijn ‘aantal’ en ‘lengte’ als schuifbalkjes ingevoerd, datzelfde kun je doen voor xmin, ymin, xmax, ymax.

Ook kan GeoGebra de grafiek van een **oplossing** van de differentiaalvergelijking door een gegeven punt meteen tekenen. Daarvoor voer je op de invoerbalk in:
DV[f'(x),(..,..)]
Voor de oplossing van $f'(x) = x + f(x)$ die door $(0,0)$ gaat wordt dit: DV[x+y,(0,0)].

Eigenlijk past GeoGebra daarbij de methode van Euler toe met een kleine stapgrootte.

Probeer maar even uit...

3.3 Variabelen scheiden

Inleiding

Sommige types differentiaalvergelijkingen zijn systematisch op te lossen. Daar bestaan verschillende technieken voor die wiskundigen in de loop der jaren (eeuwen) hebben bedacht. Eén van die methode is het scheiden van variabelen.

Je leert in dit onderwerp

- een differentiaalvergelijking oplossen door het scheiden van de variabelen.

Voorkennis

- het begrip continu dynamisch model en de bijbehorende differentiaalvergelijkingen, het begrip oplossing van een differentiaalvergelijking;
- oplossingen van differentiaalvergelijkingen controleren;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking benaderen met de methode van Euler;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking zoeken met behulp van een richtingsveld (lijnelementenveld).

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de differentiaalvergelijking $f'(x) = x \cdot f(x)$.

Je kunt hem schrijven als $\frac{\text{d}y}{\text{d}x} = x \cdot y$.

a Probeer uit te leggen waarom je dit kunt schrijven als $\frac{1}{y}\text{d}y = x\,\text{d}x$.

b Hoe kun je dit gebruiken om de gegeven differentiaalvergelijking op te lossen?

c Probeer deze differentiaalvergelijking op te lossen.

Uitleg

Van bepaalde types differentiaalvergelijkingen kun je de oplossingen systematisch vinden. Omdat in een differentiaalvergelijking ook afgeleiden voorkomen, ligt het voor de hand om te bedenken dat je vanuit een afgeleide de functie kunt terugvinden door primitiveren. Het eerste idee is dan ook om de integraalrekening in te zetten.

Bekijk bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking $f'(x) = x \cdot f(x)$ maar eens.

Je kunt dit ook schrijven als $y' = x \cdot y$, want $f(x) = y$.

Hier kun je van maken $\frac{y'}{y} = x$

Je hebt nu de variabelen gescheiden en je kunt gaan integreren. Op een constante na zijn de primitieven links en rechts van het isgelijkteken ook gelijk:

$\int \frac{y'}{y} \, \mathrm{d}x = \int x \, \mathrm{d}x + C$, waarin C een willkeurig getal is.

Rechts van het isgelijkteken kun je primitiveren: $\int x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$.

Maar hoe zit het links van het isgelijkteken?

Daar moet je bedenken dat $y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ als $\Delta x \to 0$. En dus is $y' \Delta x = \Delta y$ als $\Delta x \to 0$.

Om aan te geven dat $\Delta x \to 0$ schrijf je niet langer meer Δx en Δy, maar $\mathrm{d}x$ en $\mathrm{d}y$.
Zo vind je $y' \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}y$.

En dus wordt de differentiaalvergelijking na integreren

$\int \frac{1}{y} \mathrm{d}y = \int x \, \mathrm{d}x + C$.

Primitiveren geeft: $\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$.

Dit kun je schrijven als $|y| = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 + C} = K \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ met $K = \mathrm{e}^C > 0$.

Zonder absoluutstrepen wordt dit $y = \pm K \, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ met $K > 0$.

Nog korter zijn de oplossingen $y = A \, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ met $A \neq 0$.

Omdat $y = 0$ een oplossing van deze differentiaalvergelijking is (ga dat na), kun je $A \neq 0$ weglaten.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe de differentiaalvergelijking $f'(x) = x \cdot f(x)$ wordt opgelost.

a Wat wordt bedoeld met 'variabelen scheiden'?

Je kunt de differentiaalvergelijking ook schrijven als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot y$.

b Laat zien dat je hier meteen $\frac{1}{y} \mathrm{d}y = x \, \mathrm{d}x$ van kunt maken als je met $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ rekent alsof het een gewone breuk is.

c Waarom wordt dit in de uitleg niet zo gedaan?

d Voer zelf de herleiding naar $y = a \, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ nog een keer uit. Let goed op hoe er met de constante wordt omgegaan.

Opgave 2

Bekijk de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 \cdot y$.

a Laat zien dat je dit kunt herleiden naar $\int \frac{1}{y} \mathrm{d}y = \int x^2 \, \mathrm{d}x + C$

b Los nu de differentiaalvergelijking op en laat zien dat de oplossingen hyperbolen zijn.

Opgave 3

Bekijk de differentiaalvergelijking $f'(x) = \frac{x+1}{f(x)}$.

a Laat zien dat je dit kunt herleiden naar $\int y \, \text{d}\, y = \int (x+1) \, \text{d}\, x + C$

b Los nu de differentiaalvergelijking op en laat zien dat de oplossingen hyperbolen zijn.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms kun je een differentiaalvergelijking waarin de variabelen x, y en y' voorkomen schrijven in een vorm waarin y en y' alleen links van het isgelijkteken voorkomen en x alleen rechts daarvan. Je noemt dat **scheiden van de variabelen**.

Daarna kun je de differentiaalvergelijking oplossen door links en rechts van het isgelijkteken te integreren, waarbij je gebruik maakt van

$y' \, \text{d}\, x = \text{d}\, y$

Na het primitiveren herleid je de oplossing naar de vorm $y = ...$ als dat mogelijk is.

Je kunt deze techniek eenvoudiger opschrijven door meteen $y' = \frac{\text{d}\, y}{\text{d}\, x}$ te schrijven en met deze uitdrukking te rekenen alsof het een gewone breuk zou zijn. (Wat natuurlijk niet zo is!)

Voorbeeld 1

Gegeven is de differentiaalvergelijking $H'(t) = 2t + 3$.

Los deze differentiaalvergelijking op.

Antwoord

Je kunt de differentiaalvergelijking schrijven als $H' = 2t + 3$.

In deze differentiaalvergelijking zijn de variabelen al gescheiden. Je kunt $H(t)$ meteen vinden door primitiveren.

$H(t) = \int 2t + 3 \, \text{d}\, t + C = t^2 + 3t + C$

Hierin is C een willekeurige constante.

Opgave 4

Bekijk de differentiaalvergelijking in **Voorbeeld 1**.

a Waarom hoef je daarbij niet meer de variabelen te scheiden?

b Welke oplossing van deze differentiaalvergelijking voldoet aan $H(2) = 15$?

Opgave 5

Een aantal van deze differentiaalvergelijkingen kun je oplossen door rechtstreeks integreren, zoals in het voorbeeld is te zien. Geef bij elk ervan aan of dit mogelijk is en bepaal dan de oplossingen ervan.

a $f'(x) = x^2 - 3x$

b $f'(x) = x^2 - 3f(x)$

c $C'(t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}3t}$

d $H'(t) = H(t) \cdot \cos(2t)$

Voorbeeld 2

Gegeven is de differentiaalvergelijking $f'(x) = 2 \cdot (f(x))^2$.

Los deze differentiaalvergelijking op door de variabelen te scheiden. Schrijf de oplossingen als functies.

Antwoord

Schrijf eerst de differentiaalvergelijking als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y^2$.

Vervolgens ga je zo te werk:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2y^2 && \text{variabelen scheiden}\\
\frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= 2\,\mathrm{d}x && \text{beide zijden integreren}\\
\int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y &= \int 2\,\mathrm{d}x + C && \text{primitiveren}\\
\frac{-1}{y} &= 2x + C && \text{herleiden}\\
y &= \frac{-1}{2x+C}
\end{aligned}
$$

Hierin is C een willekeurige constante.

Bij het delen door y^2 heb je wel moeten aannemen dat $y \neq 0$. En dus moet je even nagaan of $y = 0$ een oplossing van deze differentiaalvergelijking is. En dat blijkt inderdaad zo te zijn. De complete oplossing is daarom:

$f(x) = \frac{-1}{2x+C} \vee f(x) = 0$ met C een willekeurig getal.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe een differentiaalvergelijking wordt opgelost door de variabelen te scheiden. Bekijk nu de differentiaalvergelijking $f'(x) = (2x+3) \cdot f(x)$.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Laat zien dat je de oplossing kunt schrijven als $f(x) = A\,\mathrm{e}^{x^2+3x}$, waarin A een willkeurige constante is.

c Welke oplossing van deze differentiaalvergelijking voldoet aan de randvoorwaarde $f(0) = 15$?

Opgave 7

Ga na of van de onderstaande differentiaalvergelijkingen de variabelen te scheiden zijn. Los ze vervolgens volledig op.

a $f'(x) = x^2 \cdot f(x) + f(x)$

b $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x+y}$

c $H'(t) = 5 - H(t)$

Verwerken

Opgave 8

Gegeven de differentiaalvergelijking $C'(t) = k \cdot (C_v - C(t))$, waarin k en C_v constanten zijn.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Neem nu $k = 0{,}02$, $C_v = 10$ en $C(0) = 0$ en bereken $C(20)$.

Opgave 9

Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

a $\frac{dy}{dx} = xy^2$ met $y(0) = 2$.

b $f'(x) = f(x) \cdot \sin(x)$ met $f(0) = 1$.

c $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$ met $y(1) = 4$.

Opgave 10

Gegeven is de differentiaalvergelijking $f'(x) = \frac{-4x}{f(x)}$.

De grafieken van de oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn ellipsen.

a Maak met behulp van GeoGebra het richtingsveld bij deze differentiaalvergelijking en laat zien door de grafiek van een oplossing te tekenen dat dit inderdaad ellipsen lijken te zijn.

b Bepaal door scheiden van de variabelen de vergelijkingen van deze ellipsen.

c Welke van deze ellipsen gaat door het punt $(5{,}0)$?

Opgave 11

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

a Maak met behulp van GeoGebra het richtingsveld bij deze differentiaalvergelijking. Hoe zien de grafieken van de oplossingen van deze differentiaalvergelijking er uit?

b Bepaal door scheiden van de variabelen de oplossingen van deze differentiaalvergelijking.

Opgave 12

Een kegelvormige kaars is 20 cm hoog. De diameter van de grondcirkel van de kegel is 10 cm. $A(h)$ is de oppervlakte van een cirkelvormige doorsnede van de kegel op een hoogte h boven het grondvlak.

a Laat zien dat $A(h) = \frac{1}{16}\pi \cdot (20 - h)^2$.

Op tijdstip $t = 0$ wordt de kaars aangestoken. Je mag veronderstellen dat de snelheid $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ waarmee de kaars korter wordt omgekeerd evenredig is met de oppervlakte van de doorsnede van de kaars op hoogte h.

b Stel een differentiaalvergelijking op voor de hoogte h. Noem de constante daarin c.

c Los de gevonden differentiaalvergelijking op.

d De kaars is na 8 uur opgebrand, bereken c.

Toepassen

Opgave 13: Olielaag

Op het water van een rechthoekig zwembad van 3 bij 5 m drijft een laag olie. Deze olie verdampt. De snelheid waarmee de olie verdampt is van verschillende factoren afhankelijk: de omgevingstemperatuur, de oppervlakte die de olie bedekt en de dikte van de olielaag. Hoe verandert nu het volume V in de tijd t (in uren) als je de volgende aannames doet?

- De olie bedekt steeds het zwembad totdat de dikte van de olielaag kleiner dan $0{,}0001$ m is, op dat moment 'breekt' de olielaag uit elkaar.
- De omgevingstemperatuur blijft constant.
- Op tijdstip $t = 0$ heeft de olielaag een dikte van $0{,}001$ m.
- De snelheid waarmee het volume afneemt is recht evenredig met de dikte van de olielaag.

a Stel een differentiaalvergelijking voor het volume van de olie op gebaseerd op de genoemde aannames.

b Neem als evenredigheidsconstante $7{,}5$, los de differentiaalvergelijking op en bereken het tijdstip waarop de olielaag 'breekt'.

Testen

Opgave 14

Los de differentiaalvergelijking $f'(x) = 10 - 2 \cdot f(x)$ op.

Opgave 15

De differentiaalvergelijking $H'(t) = -0{,}1 \cdot H(t)$ beschrijft het vervalproces van een hoeveelheid H in de tijd t.

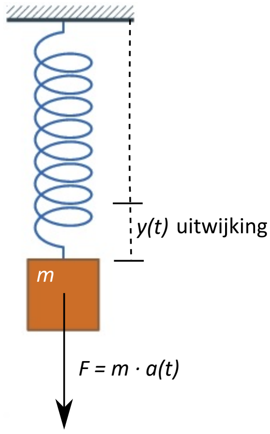
a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Bepaal de oplossing waarvoor geldt $H(0) = 10$ minuut.

3.4 Lineaire differentiaalvergelijkingen

Inleiding

Tot nu toe heb je gewerkt met differentiaalvergelijkingen waar geen hogere afgeleiden in voorkomen. Dat noem je differentiaalvergelijkingen van de eerst orde. Nu ga je ook kennis maken met differentiaalvergelijkingen van hogere orde. Vooral natuurkundige en biologische toepassingen spelen daarbij een grote rol, denk maar aan exponentiële groei, de **beweging van een gewichtje aan een veer** (bron: Wikipedia), en dergelijke.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen herkennen en oplossen;
- tweede orde lineaire differentiaalvergelijkingen herkennen en oplossen.

Voorkennis

- het begrip continu dynamisch model en de bijbehorende differentiaalvergelijkingen, het begrip oplossing van een differentiaalvergelijking;
- oplossingen van differentiaalvergelijkingen controleren;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking benaderen met de methode van Euler;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking zoeken met behulp van een richtingsveld (lijnelementenveld);
- een differentiaalvergelijking oplossen door het scheiden van de variabelen;
- rekenen met complexe getallen.

Verkennen

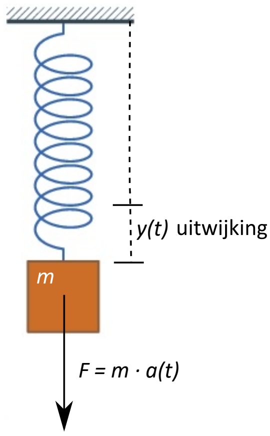
Opgave V1

Je ziet hier een plaatje van een gewichtje aan een veer. Met de luchtweerstand wordt geen rekening gehouden, dus er geldt de wet van Hooke:

$F = m \cdot a(t) = -k \cdot y(t)$

Hierin is:

- m de massa van het gewichtje in kg;
- $a(t)$ de versnelling die het gewichtje ondervindt onder invloed van de zwaartekracht en de veerkracht;
- k een constante afhankelijk van de veer (materiaal, uitrekbaarheid);
- $y(t)$ de uitwijking van het gewichtje uit de evenwichtsstand in m;
- F de kracht die op het gewichtje werkt in N (newton);



Figuur 4.2

De versnelling $a(t)$ is de verandering van de snelheid $v(t)$ en de snelheid is de verandering van de uitwijking $y(t)$ op een bepaald tijdstip t. Die versnelling is daarom de tweede afgeleide van de uitwijking.

a Welke differentiaalvergelijking beschrijft het heen en weer bewegen van het gewichtje?

b Hoe kun je deze differentiaalvergelijking oplossen?

c Laat zien dat functies van de vorm $y(t) = A\sin(bt + c)$ oplossingen zijn van deze differentiaalvergelijking.

Uitleg 1

Bij exponentiële groei is de groeisnelheid recht evenredig met de hoeveelheid $H(t)$ op een bepaald tijdstip t.

Zo'n zin kun je vertalen in een differentiaalvergelijking: $H'(t) = k \cdot H(t)$.

Soms is de exponentiële groei begrensd, bijvoorbeeld als je heet water in een kamer plaatst met een lagere temperatuur. Dan is de snelheid waarmee de temperatuur $T(t)$ afneemt met de tijd t recht evenredig met het temperatuurverschil met de kamertemperatuur T_k.

Zo'n zin kun je vertalen in een differentiaalvergelijking: $T'(t) = k \cdot (T(t) - T_k)$.

Deze twee differentiaalvergelijkingen zijn voorbeelden van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde: er komen geen hogere afgeleiden in voor, alleen de eerste afgeleide. Verder zijn ze lineair omdat ze beide zijn te schrijven als $a \cdot y' + b \cdot y + c = 0$. Er komen dus geen vermenigvuldigingen, delingen of machten van y en y' voor.

Als a, b en c constanten zijn, kun je dergelijke lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde oplossen door het scheiden van de variabelen.

Opgave 1

Welke van de volgende differentiaalvergelijkingen is een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde? Los in dat geval de differentiaalvergelijking op.

a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2$ met $y(0) = 2$.

b $f'(x) - 3 \cdot f(x) = 2$ met $f(0) = 1$.

c $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 5y$ met $y(0) = 4$.

Opgave 2

Een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde ziet er in het algemeen uit als $ay' + by + c = 0$ met $a \neq 0$.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Hoe zien de grafieken van de oplossingsfuncties van deze differentiaalvergelijking er uit?

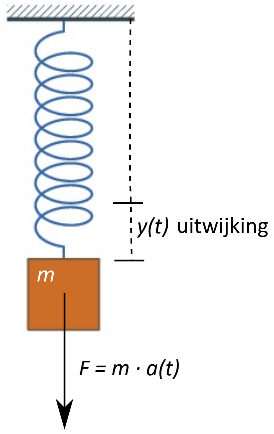
Uitleg 2

Je ziet hier een plaatje van een gewichtje aan een veer. Met de luchtweerstand wordt geen rekening gehouden, dus er geldt de wet van Hooke:

$F = m \cdot a(t) = -k \cdot y(t)$

Hierin is:

- m de massa van het gewichtje in kg;
- $a(t)$ de versnelling die het gewichtje ondervindt onder invloed van de zwaartekracht en de veerkracht;
- k een positieve constante afhankelijk van de veer (materiaal, uitrekbaarheid);
- $y(t)$ de uitwijking van het gewichtje uit de evenwichtsstand in m;
- F de kracht die op het gewichtje werkt in N (newton);



Figuur 4.3

De versnelling $a(t)$ is de verandering van de snelheid $v(t)$ en de snelheid is de verandering van de uitwijking $y(t)$ op een bepaald tijdstip t. De versnelling is daarom de tweede afgeleide van de uitwijking.

Daarom levert de wet van Hooke deze differentiaalvergelijking op:

$m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t)$

Hierin komt de tweede afgeleide van $y(t)$ voor en geen hogere afgeleiden. Verder is de uitdrukking weer lineair. Dit is een voorbeeld van een lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde. In het algemeen hebben die de gedaante

$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = d$

Vaak is in de praktijk $d = 0$ en dan spreek je van een homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde. Als a, b en c constanten zijn is zo'n differentiaalvergelijking systematisch op te lossen, in de opgaven ga je dat nader bekijken. Je begint meestal met in

$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$

de functie $y = A \cdot \mathrm{e}^{kt}$ met zijn afgeleide $y' = Ak \cdot \mathrm{e}^{kt}$ en tweede afgeleide $y'' = Ak^2 \cdot \mathrm{e}^{kt}$ in te vullen:

$A\,\mathrm{e}^{kt}\left(ak^2 + bk + c\right) = 0$

De vergelijking $ak^2 + bk + c = 0$ heet de bijbehorende karakteristieke vergelijking en heeft twee (eventueel gelijke) oplossingen voor k, die je k_1 en k_2 kunt noemen. De algemene oplossing is dan $y = A_1\,\mathrm{e}^{k_1 t} + A_2\,\mathrm{e}^{k_2 t}$.

Omdat k_1 en k_2 complexe getallen kunnen zijn wordt in dat geval een beroep gedaan op je kennis daarvan.

Opgave 3

Bekijk de differentiaalvergelijking $m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t)$ uit **Uitleg 2**.

a Laat zien dat dit een homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde is.

b Waarom is zo'n differentiaalvergelijking van de tweede orde niet op te lossen door variabelen scheiden?

Je weet, dat het gewichtje heen en weer blijft bewegen, dat er een sinusoïde als grafiek van $y(t)$ ontstaat.

c Laat zien dat $y = a \sin(bt + c)$ aan de differentiaalvergelijking voldoet en bepaal b.

d Hoe bepaal je de waarden van k, a en c in de praktijk van het massa-veer-systeem?

Opgave 4

Bekijk de homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde $y''(t) - 2y' = 3y$.

a Vul in $y = A \cdot e^{kt}$ en bepaal de karakteristieke vergelijking bij deze differentiaalvergelijking.

b Welke twee getallen k_1 en k_2 vind je?

De algemene oplossing wordt $y(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}$.

c Laat zien dat deze algemene oplossing met de gevonden waarden voor k_1 en k_2 inderdaad aan de differentiaalvergelijking voldoet.

d Hoe kun je waarden voor A_1 en A_2 bepalen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde** kun je schrijven als:

$a \cdot y' + b \cdot y = c$

Alleen as a, b en c constanten zijn, kun je dergelijke differentiaalvergelijkingen oplossen door de variabelen te scheiden.

Een **lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde** kun je schrijven als:

$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = d$

Als $d = 0$ heet de differentiaalvergelijking **homogeen**.
Alleen als a, b en c constanten zijn, kun je een homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde oplossen door in te vullen $y = A \cdot e^{kt}$ en zijn eerste en tweede afgeleide. Je krijgt dan de **karakteristieke vergelijking** $ak^2 + bk + c = 0$, die meestal twee oplossingen k_1 en k_2 heeft. De algemene oplossing heeft dan de vorm $y = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}$. Omdat k_1 en k_2 complexe getallen kunnen zijn heb je hierbij kennis nodig van het rekenen met dergelijke getallen, met name gebruik je de formule van Euler. Het geval dat $k_1 = k_2$ blijft voor nu buiten beschouwing.

Voorbeeld 1

Gegeven is de lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde
$\frac{dy}{dx} + 2y = 5$.

Los deze differentiaalvergelijking op.

Antwoord

Je kunt de differentiaalvergelijking schrijven als $\frac{dy}{dx} = -2y + 5$.

Je kunt daarom de variabelen scheiden:

$\frac{1}{-2y+5} dy = dx$

Door integreren vind je: $-\frac{1}{2}\ln|-2y + 5| = x + C$, waarin C een willekeurige constante is.

Dit kun je herleiden naar: $y = A e^{-2x} + 2{,}5$.

Je moet nog wel even nagaan hoe het zit met $A = 0$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe een lineaire diferentiaalvergelijking van de eerste orde wordt opgelost.

a Maak het bijbehorende lijnelementenveld met behulp van GeoGebra. Ga na, dat de gevonden oplossingsfuncties inderdaad in dat richtingsveld passen.

b Voer zelf de herleiding uit en let daarbij goed op de waarden die de constanten mogen aannemen.

c Laat zien, dat ook $A = 0$ een oplossing van de diferentiaalvergelijking oplevert.

Opgave 6

Als je een glas melk vanuit de koelkast (temperatuur 6 °C) in een kamer zet waarin de temperatuur hoger is (kamertemperatuur bijvoorbeeld 20 °C), dan wordt de melk warmer. Uit de natuurkunde is bekend dat de temperatuurtoename recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving. Daarom kun je een continu dynamisch model maken voor het opwarmen van de melk dat er zo uitziet:

$T'(t) = c \cdot (20 - T(t))$.

Neem aan dat $c = 0{,}15$, dat t in uren is en dat $T(0) = 6$ °C.

a Laat zien, dat dit een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde is.

b Los deze differentiaalvergelijking op.

c Bereken de temperatuur van de opwarmende melk na 2 uur.

Voorbeeld 2

Gegeven is de lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde $y'' + 2y' - 8y = 0$.

Verder is $y'(0) = 5$ en $y(0) = 0$.

Los deze differentiaalvergelijking op.

Antwoord

Bij een homogene differentiaalvergelijking van de tweede orde begin je met de substitutie $y = A\,\mathrm{e}^{kt}$.

Als je deze functie samen met zijn eerste en tweede afgeleide in de differentiaalvergelijking invult, krijg je de karakteristieke vergelijking: $k^2 + 2k - 8 = 0$.

Dit geeft: $k_1 = 2$ en $k_2 = -4$.

De algemene oplossing is dan $y = A\,\mathrm{e}^{2x} + B\,\mathrm{e}^{-4x}$.

Uit de twee gegeven randvoorwaarden bereken je A en B.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe een lineaire diferentiaalvergelijking van de tweede orde wordt opgelost.

a Waarom is deze lineaire diferentiaalvergelijking van de tweede orde homogeen?

b Waarom zijn er nu twee randvoorwaarden nodig?

c Bereken de waarden van A en B.

Opgave 8

Gegeven is de homogene lineaire diferentiaalvergelijking van de tweede orde $2y'' + y' = 3y$.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Neem aan dat $y(0) = 4$ en $y'(0) = 9$. Bepaal de oplossingsfunctie die aan deze twee randvoorwaarden voldoet.

Voorbeeld 3

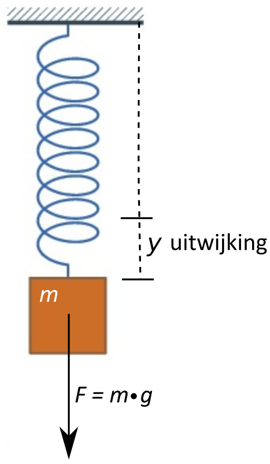
Voor een massa aan een veer die zonder wrijving heen en weer trilt, geldt de differentiaalvergelijking:

$m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t)$

Hierin is:

- m de massa van het gewichtje in kg;
- k een positieve constante afhankelijk van de veer (materiaal, uitrekbaarheid);
- $y(t)$ de uitwijking van het gewichtje uit de evenwichtsstand in m;

Laat zien hoe je deze differentiaalvergelijking kunt oplossen.



Figuur 4.4

Antwoord

Dit is een homogene differentiaalvergelijking van de tweede orde, dus je begint met de substitutie $y = A\,\mathrm{e}^{pt}$. (k is hier de veerconstante, vandaar de p.)

Als je deze functie samen met zijn eerste en tweede afgeleide in de differentiaalvergelijking invult, krijg je de karakteristieke vergelijking: $mp^2 = -k$.

Hieruit vind je twee waarden p_1 en p_2.

Dit zijn complexe getallen omdat $k > 0$ en $m > 0$ en je dus de wortel uit een negatief getal moet trekken.

De algemene oplossing is dan $y = A\,\mathrm{e}^{p_1 t} + B\,\mathrm{e}^{p_2 t}$.

Maar hieraan valt nog flink te rekenen met behulp van de formule van Euler: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$.

Opgave 9

Bekijk de differentiaalvergelijking $m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t)$ uit **Voorbeeld 3**. Denk om het werken met complexe getallen.

a Vul in $y = A \cdot \mathrm{e}^{pt}$ en bepaal de karakteristieke vergelijking bij deze differentiaalvergelijking. (k is hier de veerconstante, vandaar de p.)

b Welke twee complexe getallen p_1 en p_2 vind je?

Gebruik de formule van Euler om de algemene oplossing te herleiden.

c Laat zien dat je het reële deel van de algemene oplossing kunt schrijven als sinusoïde.

Opgave 10

Bij een massa-veer-systeem is ook sprake van luchtweerstand. De bijbehorende differentiaalvergelijking wordt daardoor:

$m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0$

waarin $c > 0$ de dempingsconstante (in kg/s) is.

a Vul in $y = A \cdot \mathrm{e}^{pt}$ en bepaal de karakteristieke vergelijking bij deze differentiaalvergelijking. (k is hier de veerconstante, vandaar de p.)

b Welke twee getallen p_1 en p_2 vind je? En wanneer zijn dit complexe getallen?

Neem aan dat de veerconstante $k = 25$ N/m, $m = 0{,}5$ kg en $c = 1$ kg/s.

c Laat zien dat je het reële deel van de algemene oplossing kunt schrijven als ‘sinusoïde met een afnemende amplitude’.

Verwerken

Opgave 11

Bepaal bij de volgende lineaire differentiaalvergelijkingen eerst of ze van de eerste of de tweede orde zijn. Los ze vervolgens op op.

a $y' - 0{,}25y = 0$ met $y(0) = 2$.

b $y'' - 0{,}25y = 0$ met $y(0) = 2$ en $y'(0) = 5$.

c $2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} + \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = 0$ met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 6$.

Opgave 12

Als je pas gezette kop koffie (temperatuur 70 °C) in een kamer zet met een temperatuur van 20 °C), dan koelt de koffie af. De temperatuurafname is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving. Je krijgt zo de differentiaalvergelijking:

$T'(t) = c \cdot (T(t) - 20)$.

Neem aan dat $c = -0{,}3$, dat t in uren is en dat $T(0) = 70$ °C.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Bereken na hoeveel uur de temperatuur van de koffie is gehalveerd.

Opgave 13

Als een voorwerp alleen onder invloed van de zwaartekracht valt, dan geldt: $F = m \cdot a = -m \cdot g$.

Hierin is m de massa in kg, $a(t) = y''(t)$ de versnelling en g de gravitatieconstante, die op aarde ongeveer 9,8 m/s bedraagt.

Neem aan dat $y(0) = 100$ en $y'(0) = 0$.

a Welke lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde krijg je dus?

b Waarom is deze differentiaalvergelijking niet homogeen?

c Je kunt de differentiaalvergelijking oplossen door direct te integreren. Laat zien dat je vindt: $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + a \cdot t + b$.

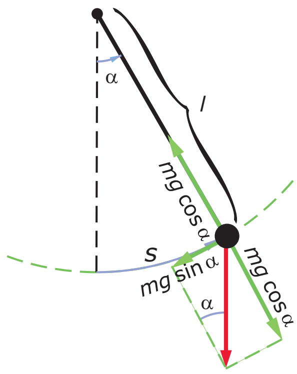
d Bereken a en b met behulp van de randvoorwaarden. Leg uit wat het resultaat natuurkundig betekent.

Opgave 14

Een **mathematische slinger** is een (niet bestaanbare) ideale slinger. Hij is het best te benaderen door een naar verhouding kleine loden kogel aan een lange, sterke maar ragdunne draad te hangen. Als je de kogel uit zijn evenwichtsstand brengt en loslaat gaat hij slingeren. Bij de ideale slinger neem je dan aan, dat de draad geen massa heeft en geen luchtweerstand ondervindt.
De kogel wordt voortbewogen door een component van de zwaartekracht, waarvoor volgens de tweede wet van Newton geldt: $F = m \cdot a \cdot - mg\sin(\alpha)$.

- a is de versnelling (in m/s^2), de afgeleide van de snelheid v (in m/s), die de afgeleide van de afgelegde weg s (in m) is;
- m is de massa in g;
- g is de zwaartekrachtversnelling;
- α is de hoek van de draad met de evenwichtsstand (in rad).

α hangt af van de tijd t (in s). Verder is $s = l\sin(\alpha)$ met l in m. $\sin(\alpha) \approx \alpha$ voor kleine hoeken. Voor $\alpha(t)$ geldt: $l \cdot \alpha''(t) = -g \cdot \alpha(t)$. Deze differentiaalvergelijking is op te lossen met behulp van complexe getallen. Het reële deel van de oplossingsfunctie is de sinusoïde die de beweging van de kogel beschrijft.



Figuur 4.5

a Welke homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde krijg je dus?

b Los de differentiaalvergelijking op met behulp van complexe getallen.

c Laat zien dat het reële deel van de oplossingsfunctie een sinusoïde is.

Opgave 15

Gegeven is de homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde $y'' - 2y' + y = 0$.

Neem aan dat $y(0) = 10$ en $y'(0) = 5$.

a Welke karakteristieke vergelijking heeft deze differentiaalvergelijking? Welk probleem doet zich dan voor?

b Ga na, dat nu zowel $y = A \cdot \mathrm{e}^x$ als $y = Bx \cdot \mathrm{e}^x$ oplossingen zijn van deze differentiaalvergelijking.

De functie $y = A \cdot \mathrm{e}^x + Bx \cdot \mathrm{e}^x$ is de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking.

c Licht toe hoe dit uit b volgt.

d Bereken A en B vanuit de gegeven randvoorwaarden.

Testen

Opgave 16

Los de volgende lineaire differentiaalvergelijkingen op.

a $y' = 4y - 2$ met $y(0) = 10$.

b $y'' - 6y' + 8y = 0$ met $y(0) = 10$ en $y'(0) = 5$.

Opgave 17

Bij een massa-veer-systeem met demping hoort de differentiaalvergelijking:

$2 \cdot y''(t) + 2 \cdot y'(t) + 5 \cdot y(t) = 0$

a Vul in $y = A \cdot \mathrm{e}^{kt}$ en bepaal de karakteristieke vergelijking bij deze differentiaalvergelijking.

b Welke twee getallen k_1 en k_2 vind je?

c Bepaal het reële deel van de algemene oplossing met behulp van de formule van Euler voor complexe getallen.

d Hoe zie je aan het reële deel van de algemene oplossing dat er van een gedempte trilling sprake is?

3.5 Toepassingen

Inleiding

Je hebt met diverse soorten differentiaalvergelijkingen kennis gemaakt. Sommige daarvan kun je systematisch oplossen. Je hebt ook al wat toepassingen van differentiaalvergelijkingen leren kennen. En daar zijn er nog veel meer van. In dit onderdeel maak je nog kennis met enkele andere toepassingen uit de natuurkunde en de biologie.

Je leert in dit onderwerp

- differentiaalvergelijkingen in de praktijk toepassen.

Voorkennis

- het begrip continu dynamisch model en de bijbehorende differentiaalvergelijkingen, het begrip oplossing van een differentiaalvergelijking;
- oplossingen van differentiaalvergelijkingen controleren;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking benaderen met de methode van Euler;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking zoeken met behulp van een richtingsveld (lijnelementenveld);
- een (lineaire) differentiaalvergelijking oplossen door het scheiden van de variabelen of een geschikte substitutie.

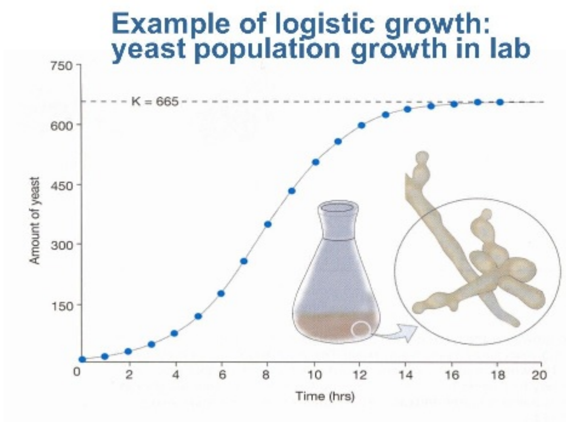
Verkennen

Opgave V1

Bij het standaard exponentiële groeimodel past een differentiaalvergelijking van de vorm:

$N'(t) = k \cdot N(t)$

Deze differentiaalvergelijking is gewoon een vertaling van 'de snelheid waarmee de hoeveelheid $N(t)$ met de tijd t toeneemt is recht evenredig met die hoeveelheid zelf'.



Figuur 5.1

a Welke oplossingen heeft zo'n differentiaalvergelijking? En hoe bepaal je die?

De Belgische wiskundige P. F. Verhulst (1804—1849) constateerde dat het standaard exponentiële groeimodel uiteindelijk nooit kan voldoen. Op zeker moment wordt de hoeveelheid zo groot, dat de zaken die nodig zijn om de groeisnelheid recht evenredig te laten blijven met de hoeveelheid, gewoon op raken. Hij bedacht dat ook de constante k moest afhangen van $N(t)$: hoe dichter $N(t)$ bij de maximaal mogelijke hoeveelheid M komt, hoe kleiner k.

b Leg uit dat $k = c \cdot (M - N(t))$ hieraan voldoet.

c De differentiaalvergelijking die Verhulst bedacht is dus $N'(t) = c \cdot (M - N(t)) \cdot N(t)$. Probeer om deze differentiaalvergelijking op te lossen.

Uitleg

Bekijk de applet.

Differentiaalvergelijkingen kennen veel toepassingen, vooral in de natuurkunde en de biologie.

Bijvoorbeeld bij een exponentieel groeiende populatie is de groeisnelheid recht evenredig met de hoeveelheid $N(t)$ op een bepaald tijdstip t.

Zo'n zin kun je vertalen in een differentiaalvergelijking:
$N'(t) = k \cdot N(t)$.

Maar al vroeg in de negentiende eeuw bedacht Pierre François Verhulst (1804—1849), een Belgische wiskundige, dat dit nooit het complete verhaal zou kunnen zijn in de praktijk. Op zeker moment raken gewoon de voorwaarden voor de ongebreidelde groei uitgeput: onvoldoende voedsel, bijvoorbeeld. Hij bedacht dat de evenredigheidsconstante kleiner zou moeten worden naarmate $N(t)$ dichter in de buurt van een maximaal mogelijke populatieomvang M komt. Hij vertaalde dit in $k = c \cdot (M - N(t))$. Daarmee wordt de differentiaalvergelijking die deze geremde groei beschrijft

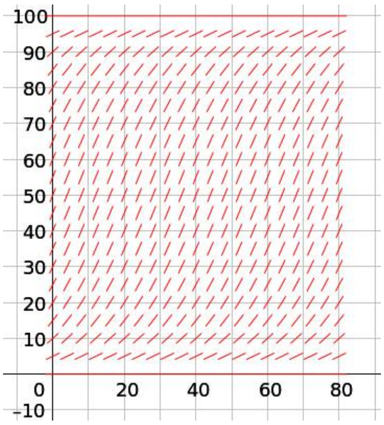
$$N'(t) = c \cdot (M - N(t)) \cdot N(t)$$

Het groeimodel van Verhulst heet het logistisch groeimodel.

De bijbehorende differentiaalvergelijking is op te lossen door scheiden van de variabelen. Ga na dat je hem zo kunt schrijven:

$$\frac{1}{(M-N) \cdot N} \,\mathrm{d}N = c \,\mathrm{d}t$$

Het probleem is nu dat de primitieve van $\frac{1}{(M-N) \cdot N}$ niet eenvoudig is te vinden. Dat lukt alleen door deze breuk te splitsen in twee eenvoudiger breuken. In de opgaven ga je dat zelf doen. Het richtingsveld met $M = 100$ en $c = 0{,}001$ geeft al vast een beeld van de grafieken van de oplossingsfuncties.



Figuur 5.2

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt het logistisch groeimodel besproken. De bijbehorende differentiaalvergelijking is $N'(t) = c \cdot (M - N(t)) \cdot N(t)$, waarin c een constante is.
Neem $M = 100$ en $c = 0{,}001$.

a Schrijf de differentiaalvergelijking in een vorm waarin de variabelen gescheiden zijn.

Je kunt $\frac{1}{(100-N)N}$ splitsen in een optelling van twee breuken:

$$\frac{1}{(100-N)N} = \frac{a}{100-N} + \frac{b}{N}$$

b Hoe kun je laten zien dat dit waar is en tegelijk de twee juiste waarden van a en b berekenen?

c Bereken de juiste waarden van a en b.

d Gebruik de breuksplitsing die je zojuist hebt uitgevoerd om de differentiaalvergelijking op te lossen. Druk N uit in t.

e Laat zien dat je $N(t)$ kunt schrijven als $N(t) = \frac{100}{1+C\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}}$.

f Laat zien dat je de bij e gevonden functies $N(t)$ passen in het lijnelementenveld.

Opgave 2

Bij het logistisch groeimodel hoort de differentiaalvergelijking $N'(t) = c \cdot (M - N(t)) \cdot N(t)$, waarin c een constante is.

a Laat zien dat de oplossingsfuncties hiervan de vorm $N(t) = \frac{M}{1+A\,\mathrm{e}^{-cMt}}$ hebben.

b Laat zien dat $A = \frac{M-N(0)}{N(0)}$.

c Laat zien dat de functie die je in de voorgaande opgave hebt gevonden overeenkomt met die in a.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Differentiaalvergelijkingen kennen heel veel toepassingen, je hebt er al een aantal voorbij zien komen. Ze treden op in situaties waarin naast een grootheid zelf ook de verandering van die grootheid, of de verandering van de verandering van die grootheid een rol speelt.

Bekende situaties zijn:

- Exponentiële groei waarin de groeisnelheid van een hoeveelheid recht evenredig is met die hoeveelheid zelf.
  Differentiaalvergelijking: $N'(t) = k \cdot N(t)$.
  Oplossing te vinden door variabelen scheiden: $N(t) = A\,\mathrm{e}^{kt}$.
- Logistische (geremde exponentiële) groei waarin de groeisnelheid van een hoeveelheid recht evenredig is met die hoeveelheid zelf, maar de evenredigheidsfactor kleiner wordt naarmate de hoeveelheid dichter bij een zeker maximum komt.
  Differentiaalvergelijking: $N'(t) = c \cdot (M - N(t)) \cdot N(t)$.
  Oplossing te vinden door variabelen scheiden en breuksplitsen: $N(t) = \frac{M}{1+A\,\mathrm{e}^{-kt}}$.
- Beweging in een zwaartekrachtsveld, zoals vrije val met en zonder luchtweerstand, zie **Voorbeeld 2**.

Voorbeeld 1

Het aantal dieren in een kolonie pinguïns op een afgelegen eiland schommelt al jaren rond de 3600. Na een grote milieuramp (een gecrashte olietanker) sterft tweederde deel van de populatie uit. De populatie lijkt zich weer snel te gaan herstellen, na een jaar zijn er alweer 1540 pinguïns. Onderzoekers gaan uit van een logistisch groeimodel voor het aantal pinguïns $P(t)$, met t in jaren na de milieuramp en met een maximum aantal pinguïns van 3600. De bijbehorende differentiaalvergelijking is $P'(t) = c \cdot (3600 - P(t)) \cdot P(t)$.

Los deze differentiaalvergelijking op en bereken de juiste waarde van c in vijf decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Je kunt de differentiaalvergelijking schrijven als $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = c(3600 - P)P$.

Je kunt daarom de variabelen scheiden: $\frac{1}{(3600-P)P}\,\mathrm{d}P = c\,\mathrm{d}t$.

Door breuksplitsen en integreren vind je: $\frac{1}{3600}\ln\left|\frac{P}{3600-P}\right| = ct + C$, waarin C een willekeurige constante is.

Dit kun je herleiden naar: $y = \frac{3600}{1+A\cdot \mathrm{e}^{-3600t}}$.

Uit het gegeven dat $P(0) = 1200$ bepaal je $A = 2$.

Uit het gegeven dat $P(1) = 1540$ bepaal je $c \approx 0{,}00011$.

Opgave 3

Bekijk het logistisch groeimodel in **Voorbeeld 1**.

a Laat zien hoe je de differentiaalvergelijking door breuksplitsen kunt oplossen.

b Laat zien dat $A = 2$.

c Laat zien dat $c \approx 0{,}00011$.

Voorbeeld 2

Een parachutist met een massa van $m = 60$ kg springt met een beginsnelheid van 2 m/s uit een vliegtuig. Hij ondervindt dan de zwaartekracht $F_Z = m \cdot g$ richting de aarde en een wrijvingskracht $F_W = k \cdot v(t)$.

Volgens de tweede wet van Newton werkt op hem een kracht van $F = F_Z - F_W = m \cdot g - k \cdot v(t) = m \cdot a(t)$.

Hierin is:

- F de kracht in Newton;
- m de massa in kg;
- $g \approx 9{,}8$ de gravitatieconstante in m/s^2;
- v de snelheid in m/s;
- k de wrijvingsconstante;
- a de versnelling in m/s^2;

Neem aan dat $k = 20$ en stel een differentiaalvergelijking op voor de snelheid $v(t)$ van deze parachutist zolang hij zijn parachute nog niet heeft uitgeklapt. Bereken welke snelheid deze parachutist maximaal zal halen zonder zijn valscherm te openen.

Antwoord

Omdat $a(t) = v'(t)$ wordt de differentiaalvergelijking $m \cdot v'(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$.

Met de gegevens ingevuld: $60v'(t) = 588 - 20v(t)$ ofwel

$v'(t) = 9{,}8 - \frac{1}{3}v(t)$.

Je kunt de variabelen scheiden: $\frac{1}{9{,}8-\frac{1}{3}v}\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}t$.

Door integreren vind je: $-3\ln\left|9{,}8 - \frac{1}{3}v\right| = t + C$, waarin C een willekeurige constante is.

Dit kun je herleiden naar: $v = 29{,}4 - A \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$.

Uit het gegeven dat $v(0) = 2$ bepaal je $A = 27{,}4$.

De volledig oplossing wordt $v(t) = 29{,}4 - 27{,}4\, e^{-\frac{1}{3}t}$.

De parachutist zal een snelheid van $29{,}4$ m/s benaderen.

Opgave 4

Bekijk het model van de vrije val in **Voorbeeld 2**.

a Laat zien hoe je de gevonden differentiaalvergelijking oplost en de oplossing herleid naar de juiste vorm.

b Laat zien dat $A = 27{,}4$.

c Na hoeveel seconden heeft de parachutist de snelheid van $29{,}4$ s tot op één decimaal nauwkeurig bereikt?

Opgave 5

Bij het algemene model voor de vrije valbeweging hoort de differentiaalvergelijking $m \cdot v'(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$

a Los ook deze differentiaalvergelijking op.

b Laat zien dat $A = mg - v(0)$.

c Welke grenswaarde heeft de snelheid die het vallende voorwerp bereikt?

d Welke invloed heeft de luchtweerstand op deze grenswaarde?

Verwerken

Opgave 6

Een steen met een massa van 1 kg wordt van een hoge toren naar beneden gegooid met een beginsnelheid van 8 m/s. De wrijvingskracht die de steen tijdens de val ondervindt is recht evenredig met de snelheid $v(t)$.

Volgens de tweede wet van Newton geldt: $m \cdot v'(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$, waarin m de massa in kg, $g \approx 9{,}8$ de gravitatieconstante in m/s^2 en k de wrijvingsconstante is.

a Aan welke differentiaalvergelijking moet $v(t)$ in deze situatie voldoen?

b Los deze differentiaalvergelijking op.

c Na 6 s is de snelheid van de steen 15 m/s. Bereken k.

Opgave 7

Je schiet een voorwerp loodrecht omhoog af met een beginsnelheid van 20 m/s. Nu zijn zowel de wrijvingskracht als de zwaartekracht naar beneden (naar de aarde) gericht.

Volgens de tweede wet van Newton geldt nu: $m \cdot v'(t) = -m \cdot g - k \cdot v(t)$, waarin m de massa in kg, $g \approx 9{,}8$ de gravitatieconstante in m/s^2 en k de wrijvingsconstante is. Neem $k = 2$ en $m = 1$ kg.

a Aan welke differentiaalvergelijking moet $v(t)$ in deze situatie voldoen?

b Los deze differentiaalvergelijking op.

c Na hoeveel seconden bereikt dit voorwerp zijn hoogste punt.

Opgave 8

Een voorwerp valt van een toren van een hoogte van 110 m. Neem aan dat de wrijvingskracht te verwaarlozen is.

Volgens de tweede wet van Newton geldt dan: $m \cdot v'(t) = m \cdot g$, waarin m de massa in kg en $g \approx 9{,}8$ de gravitatieconstante in m/s^2 is.

a Aan welke differentiaalvergelijking moet $v(t)$ in deze situatie voldoen?

b Los deze differentiaalvergelijking op.

c Welke formule geldt voor de hoogte $h(t)$ van dit voorwerp boven de grond?

d Na hoeveel seconden komt dit voorwerp op de grond?

Opgave 9

Bij een logistisch groeimodel geldt de differentiaalvergelijking $H'(t) = 0{,}0015 \cdot (400 - H(t)) \cdot H(t)$.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Bepaal de oplossingsfunctie waarvoor $H(0) = 50$.

c Voor welke waarde van t is de maximale waarde van $H(t)$ tot op 1% benaderd?

Opgave 10

In een land met een bevolkingsgrootte van 10 miljoen breekt een besmettelijke ziekte uit. Op zeker moment is $0{,}1$% van de bevolking besmet. Laat $B(t)$ (in miljoenen) het aantal besmette personen zijn afhankelijk van de tijd t in jaren na dit moment. Onderzoekers stellen een model op waarin wordt aangenomen dat het aantal besmette personen toeneemt met een snelheid die op elk moment recht evenredig is met het product van het aantal besmette en het aantal niet besmette personen.

a Leg uit waarom hier sprake is van een logistisch groeimodel en stel een bijpassende differentiaalvergelijking op.

b Uit tellingen blijkt dat de evenredigheidsconstante bij benadering 1 is. Op welk tijdstip is volgens dit model 10% van de bevolking besmet?

Testen

Opgave 11

In een tuindersbedrijf wil men weten hoe een bepaalde bodembedekker in de lente groeit. Aan het begin van de lente wordt er 1 m^2 van een braakliggend terrein met deze bodembedekker bedekt. Na zes weken is er $1{,}4$ m^2 bodem met de plant bedekt. In eerste instantie lijkt de bodembedekker exponentieel te groeien. Neem als tijdseenheid een week met $t = 0$ als de bedekte oppervlakte 1 m^2 bedraagt.

a Schat de groeifactor g in dat model.

b Hoeveel m^2 zou er in dit model bedekt moeten zijn na 9 weken? En na 12 weken?

In werkelijkheid neemt de groeisnelheid na verloop van tijd af. Aan het einde van de twaalfde week is ongeveer $1{,}6$ m^2 bedekt en in de week die daarop volgt groeit de bodembedekker bijna niet meer. Men neemt daarom aan dat de groei logistisch is en dat de bedekte oppervlakte niet boven de $1{,}6$ m^2 komt.

c Stel de bijbehorende differentiaalvergelijking op en los hem op.

d Bereken hoeveel bodem er na 9 weken is bedekt.

Opgave 12

Uit een vliegtuig laat men voedselpakketten vallen. De voedselpakketten ondervinden tijdens de val een wrijvingskracht die evenredig is met de snelheid.

a Laat zien dat de snelheid $v(t)$ van zo’n pakket beschreven kan worden door de volgende differentiaalvergelijking $m \cdot v'(t) = mg - k \cdot v(t)$, als m de massa van zo'n pakket in kg, g de gravitatieconstante en k de evenredigheidsconstante is.

Nu is $m = 40$ kg, $g \approx 9{,}8$ m/s^2 en $k = 20$.

b Los de differentiaalvergelijking op.

c In hoeveel seconden neemt de snelheid van het pakket toe van 0 m/s naar 15 m/s?

d Bepaal de maximale snelheid die het pakket kan bereiken in één decimaal nauwkeurig.

3.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Differentiaalvergelijkingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- continu dynamisch model — differentiaalvergelijking — oplossingen van een differentiaalvergelijking — randvoorwaarden
- methode van Euler — lijnelementenveld of richtingsveld
- variabelen scheiden
- lineaire differentiaalvergelijking — eerste orde, tweede orde

Activiteitenlijst

- een continu dynamisch model beschrijven met een differentiaalvergelijking — oplossingen van een differentiaalvergelijking controleren door invullen — een specifieke oplossingsfunctie bepalen met de randvoorwaarde(n)
- oplossingen van een differentiaalvergelijking benaderen met de methode van Euler — lijnelementenvelden maken om oplossingen in beeld te brengen
- differentiaalvergelijkingen oplossen door scheiden van de variabelen
- lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste en de tweede orde oplossen
- toepassingen van differentiaalvergelijkingen

Achtergronden

Eén van de productiefste wiskundigen ooit is wel **Leonhard Euler (1707—1783)**, een naam die je ongetwijfeld al eerder bent tegengekomen.

Figuur 6.1

In 1755 verscheen Euler's boek ‘Institutiones calculi differentialis’ en in de jaren 1768—1774 werd dit gevolgd door drie dikke delen ‘ Institutiones calculi integralis’ . Daarin wordt niet alleen de elementaire differentiaal- en integraalrekening systematisch behandeld, maar er is ook een eerste fundamentele behandeling van differentiaalvergelijkingen in te vinden.

Euler onderscheid daarin lineaire, exacte en homogene differentiaalvergelijkingen. En ook de methode van het scheiden der variabelen wordt erin besproken.

Het oplossen van differentiaalvergelijkingen is bijna altijd een behoorlijke uitdaging. In dit onderwerp heb je alleen de meest eenvoudige gevallen voorbij zien komen. Ook over lineaire d.v.'s is veel meer te zeggen als in $ay' + by = c$ of $ay'' + by' + c = d$ de parameters a, b, c en d geen constanten, maar zelf ook weer functies zijn.

Testen

Opgave 1

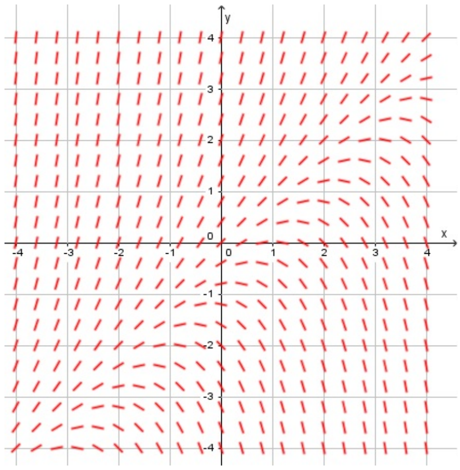
Los deze differentiaalvergelijkingen op:

a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{y}$ met $y(1) = 3$

b $H''(t) = 6H'(t) - 8H(t)$ met $H(0) = 40$ en $H'(0) = 0$

Opgave 2

Hier zie je een richtingsveld (lijnelementenveld) bij een differentiaalvergelijking.



Figuur 6.2

a Een bepaalde oplossing van deze differentiaalvergelijking heeft een rechte lijn als grafiek. Geef het bijbehorende functievoorschrift.

b Welke van de volgende differentiaalvergelijkingen past bij dit richtingsveld?

- $y' = -1 + x$
- $y' + y = -1 + x$
- $f'(x) \cdot f(x) = x$
- $f'(x) = f(x) + 1 - x$

c Laat zien dat de functies $f(x) = x - c \cdot \mathrm{e}^x$ oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking.

Opgave 3

Op een bolvormig kogeltje met straal r, dat in een vloeistof zinkt, werken drie krachten:

- de zwaartekracht $F_Z = m \cdot g$ waarin m de massa (in kg) en $g \approx 9{,}8$ de gravitatieconstante is;
- de opwaartse kracht F_{op}, een kracht die volgens de wet van Archimedes gelijk is aan het gewicht van de verplaatste vloeistof, in formulevorm: $F_{op} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ waarin ρ de dichtheid van de vloeistof voorstelt;
- de wrijvingskracht F_W, een kracht die volgens de wet van Stokes recht evenredig met de snelheid v is en wordt gegeven door de formule: $F_W = 6\pi\eta r$, waarin η een constante is die bepaald wordt door de 'stroperigheid' van de vloeistof (η heet de viscositeit).

r is de straal van de bolvormige kogel in m.

a Stel een differentiaalvergelijking voor de snelheid $v(t)$ van het zinkende kogeltje.

b Ga uit van de volgende gegevens en bereken de viscositeit η van de vloeistof.

- $\rho = 1{,}26 \cdot 10^3$ kg/m^3;
- $r = 0{,}02$ m;
- $m = 0{,}05$ kg;
- de kogel benadert een eindsnelheid van $0{,}2$ m/s.

Opgave 4

Stel je een winter voor met een constante buitentemperatuur van 0 °C. De binnentemperatuur T in een gebouw wil je toch op 20 °C brengen. Je mag daarbij aannemen dat de mate waarmee de binnentemperatuur afneemt evenredig is met het verschil tussen binnen- en buitentemperatuur (noem de evenredigheidsconstante c). Door het stoken zal de binnentemperatuur stijgen. Veronderstel dat de mate van deze stijging evenredig is met de binnentemperatuur zelf en ook evenredig met het verschil tussen de binnentemperatuur en de streeftemperatuur van 20 °C (noem de evenredigheidsconstante k).

a Laat zien dat uit deze gegevens de volgende differentiaalvergelijking is af te leiden: $T'(t) = (c + 20k) \cdot T(t) - k \cdot (T(t))^2$.

Neem $c = -10$ en $k = 2$.

b Is er sprake van een logistisch groeimodel?

Op $t = 0$ is de binnentemperatuur 10 °C.

c Geef een functievoorschrift van $T(t)$ door de differentiaalvergelijking uit b op te lossen.

d Welke temperatuur zal er op den duur in het gebouw heersen? Wordt de streeftemperatuur bereikt?

Opgave 5

Na een langdurige vergadering is het zuurstofgehalte in een vergaderlokaal met een inhoud van 80 m^3 gedaald. In 1 m^3 zit nog maar 14% zuurstof terwijl daar normaal gesproken ongeveer 21% zuurstof in zit. Na de vergadering zet de beheerder snel de ventilator aan. Deze ventilator vervangt per seconde 0,01 m^3 lucht door buitenlucht met een zuurstofgehalte van 22%. Noem H de hoeveelheid zuurstof (in dm^3) in het lokaal.

a Bereken $H(0)$.

b Laat zien dat je $H(t)$ bij benadering kunt beschrijven door: $H'(t) = 2{,}2 - 1{,}25 \cdot 10^{-4} \cdot H(t)$ met t in seconden.

c Los deze differentiaalvergelijking op.

d Na hoeveel uren is het zuurstofpercentage boven de 20%?

Toepassen

Opgave 6: Oplossingskrommen en isoclinen

Onderzoek de differentiaalvergelijkingen van de vorm $\frac{dy}{dx} = \frac{ax}{y}$.

a Hoe zien de lijnelementenvelden van deze differentiaalvergelijkingen er uit voor verschillende waarden van a? Geef enkele karakteristieke voorbeelden. Probeer ook regelmaat te beschrijven.

b Hoe zien de oplossingskrommen er uit voor verschillende waarden van a? Geef vergelijkingen en parametervoorstellingen.

Isoclinen zijn krommen in het richtingsveld waarvan elk punt dezelfde richtingscoëfficiënt (van de raaklijn aan die isocline) heeft.

c Hoe zien deze isoclinen er bij deze d.v. uit? Geef vergelijkingen.

Examen

Opgave 7

Gegeven is de differentiaalvergelijking D door $4\,\mathrm{e}^{y}\,(\mathrm{e}^{y}-1)\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=1-x$.

a Geef door arcering het gedeelte van het Oxy-vlak aan, waar de richtingscoëfficiënten van de door D bepaalde lijnelementen positief zijn.

b Toon aan dat de kromme K gegeven door de parametervoorstelling $x=1+2\sin(t)$ en $y=\ln(1+\cos(t))$ een oplossingskromme van D is.

L is een oplossingskromme van D die door het punt $(-2,\ln(3))$ gaat.

c Stel een vergelijking van L op.

(bron: examen wiskunde B1,2 in 1991, eerste tijdvak)

Opgave 8

Gegeven is de differentiaalvergelijking D: $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=(x-1)(x-3)(y-1)$.

a Geef in een tekening de delen van het Oxy-vlak aan, waar de lijnelementen die aan D voldoen een positieve richtingscoëfficiënt hebben en de delen waar de lijnelementen een negatieve richtingscoëfficiënt hebben.

Een functie f is een oplossing van D.
De grafiek van f gaat door het punt $(0,2)$.

b Bereken in hele graden nauwkeurig de hoek waaronder de raaklijn aan de grafiek van f de y-as snijdt.

c Stel een functievoorschrift van f op.

(bron: examen wiskunde B in 1994, eerste tijdvak)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

www.math4all.nl