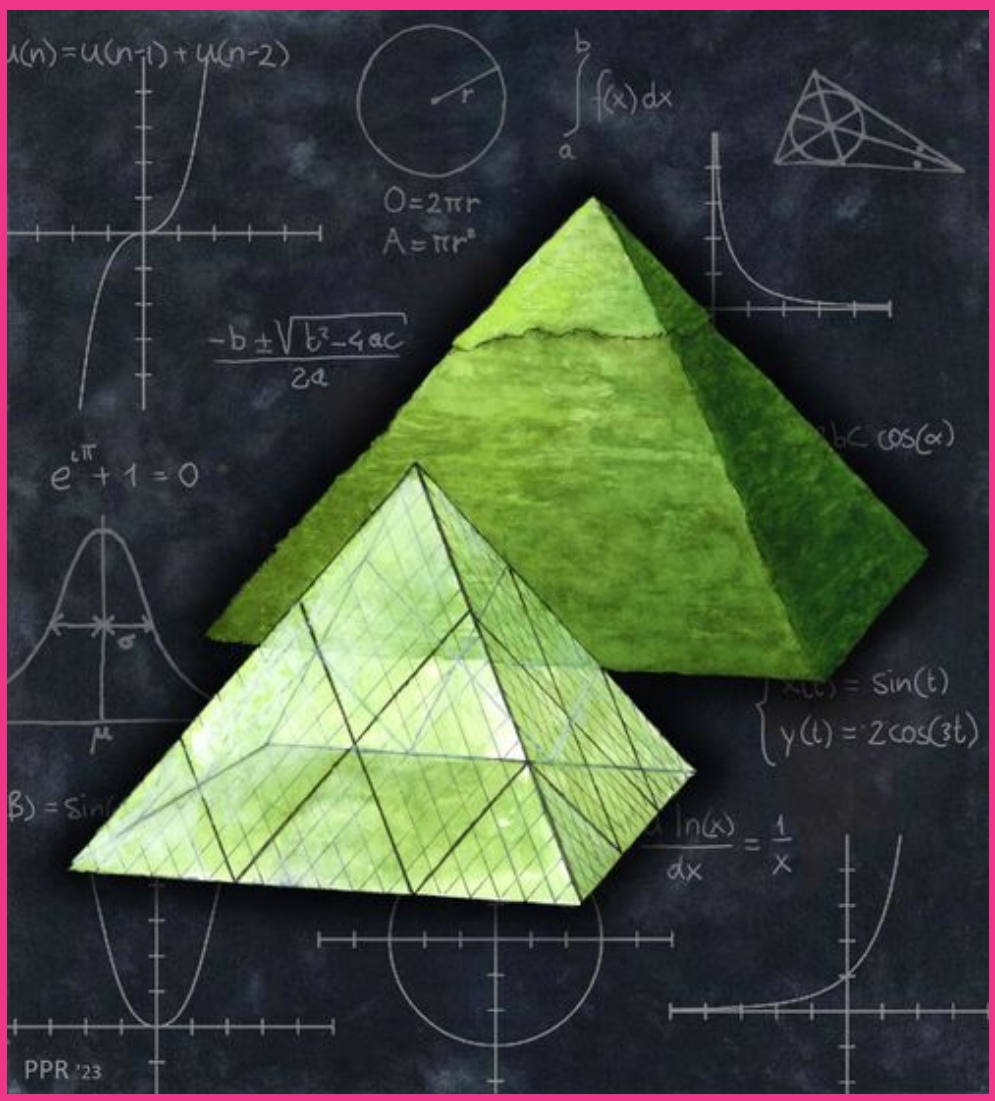
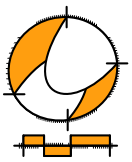
Wiskunde C

6 VWO

Katern 2





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie http://creativecommons.org/licenses/by/3.0).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Inhoud

Voorwoord 3

1 Perspectief 5
1.1 Symmetrie 6
1.2 Aanzichten 17
1.3 Perspectief 27
1.4 Eénpuntsperspectief 41
1.5 Tweepuntsperspectief 54
1.6 Totaalbeeld 63

2 Toepassen van formules 71
2.1 Rekenen met variabelen 72
2.2 Formules combineren 84
2.3 Vergelijkingen en ongelijkheden 91
2.4 Evenredigheid 101
2.5 Lineair en exponentieel 114
2.6 Veranderingen 128
2.7 Totaalbeeld 143

Register 151

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Perspectief

1.1 Symmetrie 6
1.2 Aanzichten 17
1.3 Perspectief 27
1.4 Eénpuntsperspectief 41
1.5 Tweepuntsperspectief 54
1.6 Totaalbeeld 63

1.1 Symmetrie

Inleiding

Je ziet hier een foto van een Arabisch mozaïek in het middeleeuwse paleis en fort Alhambra in Granada, Spanje. Veel van de figuren zijn symmetrisch en dat betekent dat veel afmetingen hetzelfde zijn.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- symmetrie van vlakke figuren herkennen, beschrijven en ermee rekenen;
- symmetrie van ruimtelijke figuren herkennen, beschrijven en ermee rekenen.

Voorkennis

- lijnsymmetrie, puntsymmetrie en draaisymmetrie in vlakke figuren herkennen en beschrijven;
- rekenen met verhoudingen en de stelling van Pythagoras.

Verkennen

Opgave V1

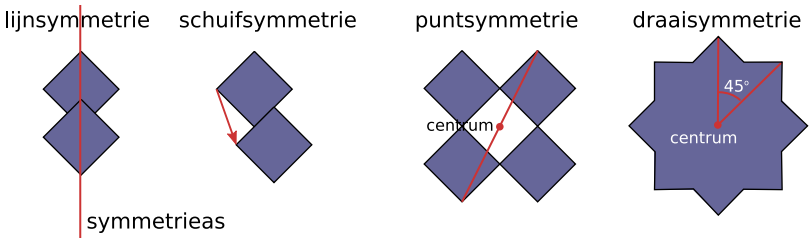
Bekijk de foto van een Arabisch mozaïek in het middeleeuwse paleis en fort Alhambra in Granada, Spanje.

Welke vormen van symmetrie komen hierin voor? Let niet op beschadigingen.

Figuur 1.2

Uitleg 1

Bekijk de symmetrische vlakke figuren (2-dimensionale of 2D figuren).



Figuur 1.3

- Bij lijnsymmetrie (ofwel spiegelsymmetrie) is er een symmetrieas:
  Alle punten van de figuur liggen door spiegelen in de symmetrieas weer op de figuur.
  De figuur wordt door de spiegellijn in twee (gespiegelde) identieke delen verdeeld.
- Bij schuifsymmetrie kan een deel van de figuur worden verschoven naar een identiek ander deel van de figuur.
- Bij rotatiesymmetrie (ofwel draaisymmetrie) zie je na roteren (draaien) om het centrum van symmetrie weer dezelfde figuur. De kleinste hoek waarover je kunt draaien, heet de kleinste draaihoek.
- Bij puntsymmetrie past bij elk punt van de figuur een punt precies aan de andere kant van het centrum van symmetrie.
  Dit komt in het platte vlak overeen met draaien over $180°$ om het centrum.

Twee figuren (of delen van een figuur) die identiek zijn hebben alle hoeken en alle zijden gelijk. Je noemt ze congruent.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

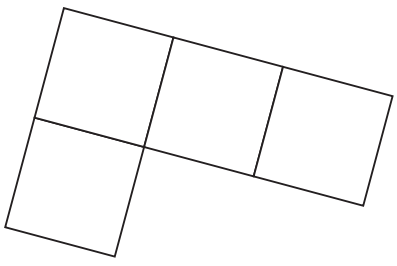
a Zijn er bij de puntsymmetrische figuur ook andere symmetrieën?

b Zijn er bij de draaisymmetrische figuur ook andere symmetrieën?

c Waarom is puntsymmetrie in het platte vlak geen afzonderlijke vorm van symmetrie?

Opgave 2

Bekijk de figuur. Deze staat ook op het **werkblad**. Door een extra vakje, kun je een figuur maken die een symmetrieas heeft. Hoeveel mogelijkheden zijn er? Teken de mogelijkheden. Geef de symmetrieassen aan.



Figuur 1.4

Opgave 3

Welke bekende vlakke figuur is draaisymmetrisch over elke hoek?

Uitleg 2

Bij de spiegelsymmetrie van ruimtelijke figuren (in 3D dus) is er niet van een spiegellijn, maar van een spiegelvlak sprake.

Je ziet dat een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ spiegelsymmetrisch is.

De éne helft van de piramide is het spiegelbeeld van de andere helft.

Deze piramide heeft vier symmetrievlakken. Een figuur met één of meer symmetrievlakken heet een spiegelsymmetrisch lichaam.

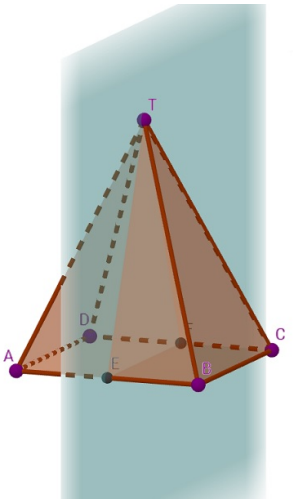
De piramide kent ook rotatiesymmetrie. Hier is echter geen centrum van rotatiesymmetrie maar een omwentelingsas, de lijn door T en het snijpunt van AC en BD (het midden van het vierkante grondvlak).

Deze piramide heeft één omwentelingsas.

Er zijn ook ruimtefiguren die een symmetriecentrum hebben, bijvoorbeeld de kubus en de bol.

Bij ruimtefiguren kan ook sprake zijn van schuifsymmetrie, denk bijvoorbeeld aan een rij identieke pilaren.

De hier genoemde symmetrieën geven altijd congruente vormen. Omdat congruente vormen dezelfde afmetingen hebben, zijn ook de lengtes, oppervlaktes, inhouden en hoeken van de twee congruente figuren gelijk.



Figuur 1.5 Figuur opent via muisklik
Dan draaibaar met rechter muisknop

Opgave 4

Bekijk de regelmatige vierzijdige piramide in **Uitleg 2**.

a Door welke punten gaat het getekende symmetrievlak?

b Welke andere symmetrievlakken zijn er?

c Waarom is deze piramide ook rotatiesymmetrisch?

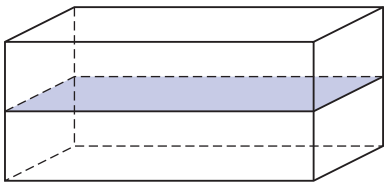
d Hoeveel symmetrieassen heeft een kubus? En welk punt is het centrum van symmetrie? En hoeveel symmetrievlakken heeft een kubus

Opgave 5

Bekijk de balk met daarin een spiegelvlak. Deze staat ook op het **werkblad**.

a De balk heeft nog twee spiegelvlakken. Teken die.

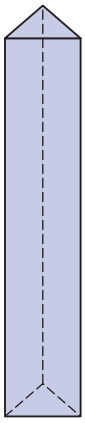
b Hoeveel draaiassen heeft de balk? Geef de kleinste hoek waarover de balk dan draaisymmetrisch is.



Figuur 1.6

Opgave 6

Bekijk de figuur.
Het grondvlak van het prisma is een gelijkzijdige driehoek met zijden van 10 cm. De hoogte van het prisma is 50 cm.



Figuur 1.7

a Hoeveel spiegelvlakken heeft het prisma?

b Geef aan op hoeveel manieren het prisma draaisymmetrisch is. Geef ook steeds de kleinste draaihoek.

c Bereken de oppervlakte van het grondvlak.

d Bereken de inhoud van het prisma.

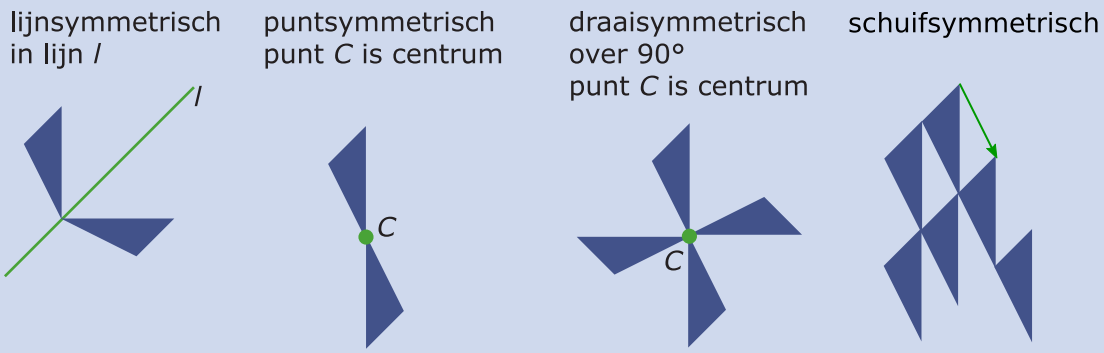
e Als de afmetingen van het prisma twee keer zo groot worden, wat gebeurt er dan met de oppervlakte van het grondvlak?

f Als de afmetingen van het prisma twee keer zo groot worden, wat gebeurt er dan met de inhoud?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Er is sprake van **symmetrie** als een figuur bestaat uit twee delen die door spiegelen, draaien of verschuiven op elkaar passen. Hier zie je de vier soorten symmetrie uitgebeeld in vlakke figuren, in 2D.



Figuur 1.8

Er is verschil tussen symmetrie in 2D-figuren en die in 3D-figuren.

- In 2D heet **spiegelsymmetrie** ook wel **lijnsymmetrie** en is sprake van een symmetrieas.
  In 3D is bij spiegelsymmetrie sprake van een **symmetrievlak**.
- In 2D heb je bij **rotatiesymmetrie** of **draaisymmetrie** een symmetriecentrum en een kleinste draaihoek.
  In 3D heb je bij rotatiesymmetrie of draaisymmetrie een symmetrieas en een kleinste draaihoek.
- In 2D is **puntsymmetrie** hetzelfde als rotatie over 180°.
  In 3D is er puntsymmetrie als bij elk punt van de figuur een ander punt van de figuur hoort dat evenver van het symmetriecentrum af ligt, maar wel op dezelfde lijn naar het symmetriepunt.
- Bij **schuifsymmetrie** zie je steeds een (deel van een) figuur die je door verschuiving naar een identiek ander (deel van de) figuur kunt verschuiven.

Bij symmetrie heb je vaak figuren (of delen van een figuur) die identiek zijn, dus alle hoeken en alle zijden gelijk hebben. Je noemt ze dan **congruent**. Vaak kent een figuur meerdere soorten symmetrie.

Voorbeeld 1

Bekijk de foto van een wandversiering in het middeleeuwse paleis en fort Alhambra in de stad Granada in Spanje.

Figuur 1.9

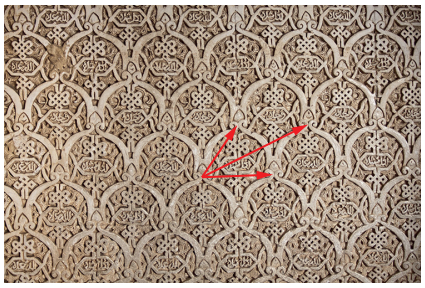
Beschrijf welke vormen van symmetrie er in deze wandversiering te herkennen zijn. Ga ervan uit dat de figuur oneindig door gaat.

Antwoord

Er is lijnsymmetrie en schuifsymmetrie te herkennen in de wandversiering.
De lijnsymmetrie is zichtbaar als je verticale lijnen trekt door de eindpunten van de boogstukken.

Er is sprake van schuifsymmetrie in verschillende richtingen. Hier zijn er drie getekend.

lijnsymmetrie



schuifsymmetrie

Figuur 1.10

Opgave 7

Bekijk de wandversiering in **Voorbeeld 1**. De kleinste horizontale afstand waarover schuifsymmetrie kan worden toegepast is in werkelijkheid ongeveer 20 cm.

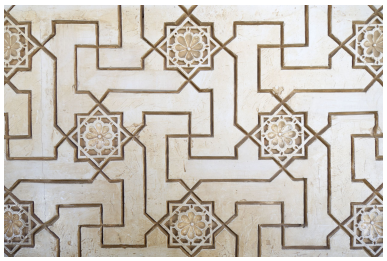
a Hoeveel bedraagt de oppervlakte van het gefotografeerde deel van de wandversiering in werkelijkheid ongeveer? Geef de oppervlakte in vierkante meters.

b Veronderstel dat de kleinste afstand niet 20 cm, maar de helft daarvan zou zijn. Hoeveel keer zo klein zou de oppervlakte van de wandversiering in het echt dan zijn?

c Bekijk het voorbeeld. Veronderstel dat de kleinste afstand waarover schuifsymmetrie kan worden toegepast niet 20 cm, maar dat deze drie keer zo groot zou zijn.
Hoeveel keer zo groot zou de oppervlakte van de wandversiering in het echt dan zijn?

Opgave 8

Bekijk de afbeelding van een gepleisterde muur in het Alhambra. Veronderstel dat het patroon doorloopt.



Figuur 1.11

a Welke symmetrieën zijn te herkennen in dit patroon?

Bekijk de figuur met een detail van de gepleisterde muur.

Figuur 1.12

b Hoeveel centra van rotatiesymmetrie zijn te herkennen in het patroon?

c Bij hoeveel van deze punten hoort geen rotatie over $90°$?

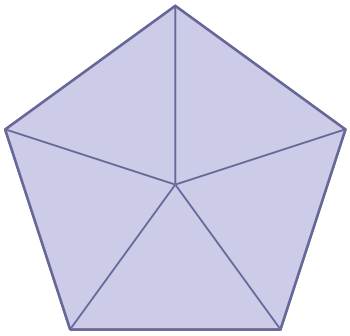
d Veronderstel dat het vierkantje waarin de bloem zich bevindt in werkelijkheid 20×20 cm is. Hoe groot is dan ongeveer de oppervlakte in werkelijkheid van het deel dat is afgebeeld? Geef je antwoord in m^2.

Voorbeeld 2

Teken een gelijkbenige driehoek met een tophoek van $72°$ waarvan de benen even lang zijn en een lengte van 3 cm hebben.
Roteer de driehoek om de top, steeds over $72°$.
Wat voor figuur ontstaat er?

Antwoord

Een gelijkzijdige vijfhoek.



Figuur 1.13

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Wat voor figuur krijg je als je een rechthoekige gelijkbenige driehoek steeds $90°$ draait om de tophoek?

b Hoe groot moet de tophoek van een gelijkbenige driehoek zijn als op deze manier een achthoek moet worden gemaakt?

c Hoe groot moet de tophoek zijn als het een zevenhoek moet worden? Geef je antwoord in één decimaal.

Opgave 10

Wat voor figuur krijg je als je een rechthoekige gelijkbenige driehoek $90°$ draait om de tophoek, en die dan vastplakt aan de oorspronkelijke driehoek?

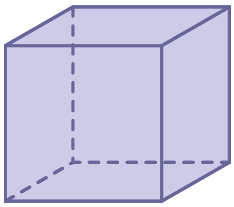
Voorbeeld 3

Welke (bekende) symmetrieën zitten er in een kubus?
Hoeveel hoeken van $90°$ worden gevormd door ribben van een kubus die in een hoekpunt samenkomen?

Antwoord

In een kubus zit spiegelsymmetrie en rotatiesymmetrie.

In elk hoekpunt maken de ribben drie rechte hoeken. Er zijn acht hoekpunten in een kubus.
In totaal maken de ribben in een kubus $8 \cdot 3 = 24$ rechte hoeken.



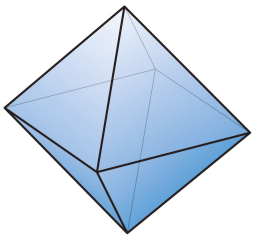
Figuur 1.14

Opgave 11

Bekijk het regelmatig achtvlak (een octaëder).

a Welke symmetrieën zitten er in het regelmatige achtvlak?

b Hoeveel hoeken van $60°$ worden er gevormd door ribben die samenkomen in een hoekpunt?



Figuur 1.15

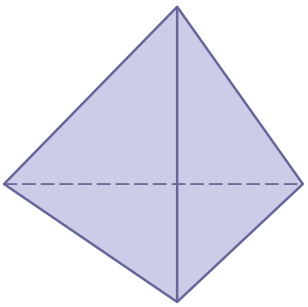
Opgave 12

Een regelmatig viervlak is een ruimtelijk figuur die bestaat uit vier gelijkzijdige driehoeken. De figuur is spiegel- en draaisymmetrisch.

a Hoeveel symmetrievlakken heeft deze figuur?

b Geef het aantal rotatieassen waarbij de figuur draaisymmetrisch is. Geef ook de kleinste draaihoek.

c Is er ook een rotatiecentrum?

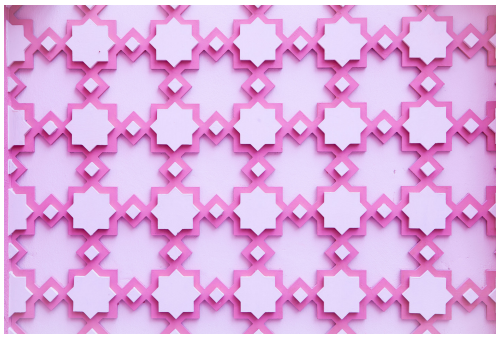


Figuur 1.16

Verwerken

Opgave 13

Bekijk de afbeelding. In de textuur van Arabische tegels zit 2D-symmetrie.



Figuur 1.17

Welke soort(en) symmetrie zie je? Je mag ervan uitgaan dat het patroon doorloopt. Met de schaduwen hoef je geen rekening te houden.

Opgave 14

Bekijk de foto van verschillend gekleurde appartementengebouwen in Zoetermeer.

a Welke vorm van symmetrie is zichtbaar als je niet op de kleur let?

De afmetingen van een gebouw zijn ongeveer $15 \times 20 \times 30$ ($h \times d \times b$) meter. De gebouwen staan los van elkaar. Een schilder wil een schatting maken van de kosten om de gebouwen te schilderen.

b Bereken de totale oppervlakte van het schilderwerk. Ga er voor het gemak van uit dat de gebouwen balkvormig zijn en geen ramen hebben.

Figuur 1.18

Opgave 15

Bekijk de afbeelding. Het glas-in-loodraam is in barokke stijl getekend.

Figuur 1.19

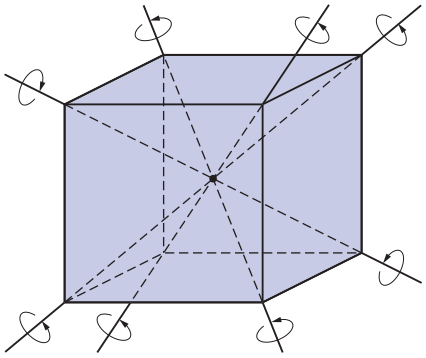
a Welke 2D-symmetrieën bevat het? Is er ook sprake van puntsymmetrie?

b Het raam bestaat uit een dik houten frame met daarin aparte glas-in-loodraampjes en dunnere loden draden. Aanvankelijk gaf de opdrachtgever maten door aan de kunstenaar, maar later bleek dat deze maten 20% groter moesten zijn. Hoeveel procent hoger zal de kunstenaar de bedragen voor glas en hout moeten maken?

c De hoogte van het raam is 160 cm, de breedte 80 cm. Hoeveel meter van het dikke houten frame heeft de kunstenaar dan nodig? Houten frame wordt alleen verkocht in veelvouden van meters.

Opgave 16

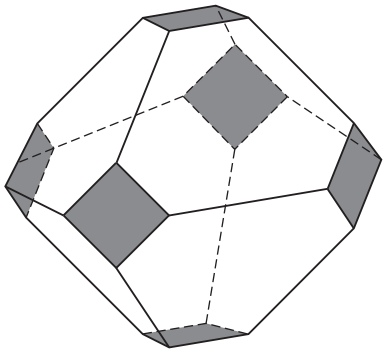
In de kubus zijn vier rotatie-assen getekend.
Hoeveel graden is de kleinste draaihoek bij deze assen?



Figuur 1.20

Opgave 17

Bekijk de afgeknotte octaëder (regelmatig achtvlak).
Hoeveel symmetrievlakken heeft de afgeknotte octaëder?



Figuur 1.21

Toepassen

Opgave 18: Torre del Mangia

Er kunnen verschillende symmetrieën gelijktijdig in een gebouw voorkomen. Bekijk de Torre del Mangia in Siena in Italië.

Figuur 1.22

a Welke soorten symmetrie herken je in de kantelen bovenop de toren? Licht je antwoord toe.

b Bekijk van deze toren alleen de vorm. In deze vorm zit onder andere rotatiesymmetrie. Hoe groot is de rotatiehoek?

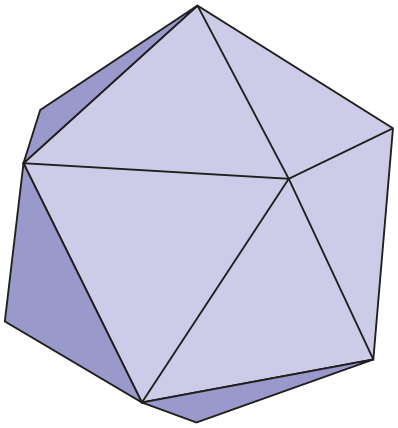
c Waar zit de omwentelingsas? Welke vorm heeft deze as? Welke richting heeft deze as?

d Veronderstel dat de toren kan worden gedraaid om de omwentelingsas en er wordt één rondje gedraaid. Hoeveel keer per rondje zie je geen verschil met de foto?

e In de toren is nog een andere vorm van symmetrie te herkennen. Welke is dit? En hoeveel mogelijkheden zijn er?

Opgave 19: Icosaëder

Bekijk het regelmatig twintigvlak. Deze ruimtelijke figuur heet een icosaëder. De figuur bestaat uit twintig gelijkzijdige driehoeken. Het is één van de vijf regelmatige veelvlakken.



Figuur 1.23

a Hoeveel hoekpunten heeft deze figuur?

b Hoeveel ribben heeft deze figuur?

c De figuur bevat verschillende soorten draaisymmetrie. Beschrijf over welke hoeken er draaisymmetrie voorkomt, en hoeveel rotatie-assen er zijn.

Testen

Opgave 20

Hier zie je een foto gemaakt in het Alhambra te Granada. Let alleen op de gekleurde (niet witte) figuurtjes.

Figuur 1.24

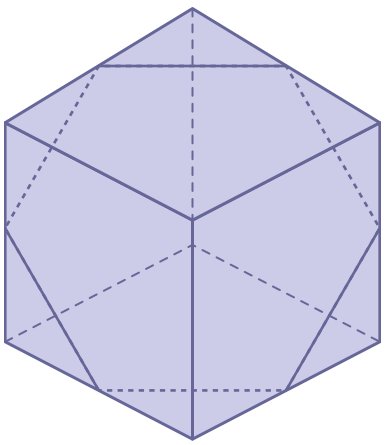
a Hoeveel van die figuurtjes hebben precies twee symmetrieassen?

b Welke van die figuurtjes hebben meer symmetrieassen? Hoeveel hebben die er?

c Zijn er ook draaisymmetrische figuren?

Opgave 21

Deze figuur stelt een kubus voor met daarin een regelmatige vlakke zeshoek.



Figuur 1.25

a Hoe groot zijn de hoeken van een regelmatige (vlakke) zeshoek?

b De ribbe van de kubus in de afbeelding wordt drie keer zo groot. Hoeveel keer zo groot worden de hoeken van de kubus?

c De ribbe van de kubus in de afbeelding wordt drie keer zo groot. Hoeveel keer zo groot de oppervlakte van de zeshoek in de kubus?

d De ribbe van de kubus in de afbeelding wordt drie keer zo groot. Hoeveel keer zo groot wordt de inhoud van de kubus?

e Hoeveel symmetrievlakken heeft deze figuur?

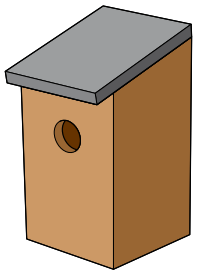
f Hoeveel rotatieassen heeft deze figuur?

1.2 Aanzichten

Inleiding

Van veel ruimtelijke figuren krijg je zo´n parallelprojectie te zien. Nadeel daarvan is, dat niet alle lijnstukken hun ware lengte krijgen in zo´n figuur. Gelukkig blijft evenwijdigheid wel behouden, vandaar de naam parallelprojectie.

Wil je een beter beeld krijgen van de figuur, dan kun je werken met aanzichten: voor-, zij- en bovenaanzicht. Dan zie je tenminste de zaken die liggen in vlakken evenwijdig aan zo'n aanzicht in het aanzicht op ware grootte en met de juiste vorm.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- aanzichten van ruimtelijke figuren tekenen en deze gebruiken bij berekeningen;
- uit aanzichten van een 3D-figuur eigenschappen en vorm van de figuur afleiden.

Voorkennis

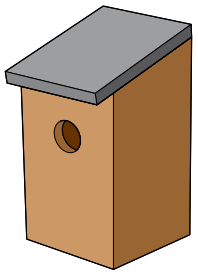
- werken met ruimtelijke figuren en hun aanzichten;
- rekenen met verhoudingen en de stelling van Pythagoras.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet een vogelhuisje met een dak tegen het inregenen. Je gaat er in het klein een drieaanzicht van tekenen. Het voorvlak (met het aanvlieggat) is een rechthoek van 12 cm bij 18 cm. Het achtervlak is een rechthoek van 12 cm bij 21 cm. Het grondvlak is een vierkant. Het dak, met een dikte van 9 mm, steekt aan de voorkant 3 cm uit.

Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht met de gegeven maten, inclusief het dak.



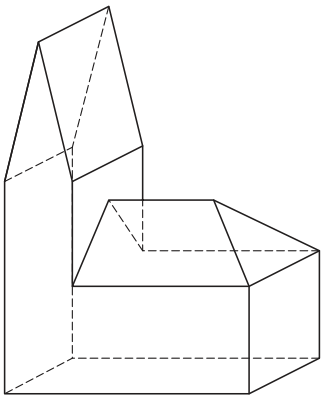
Figuur 2.2

Uitleg

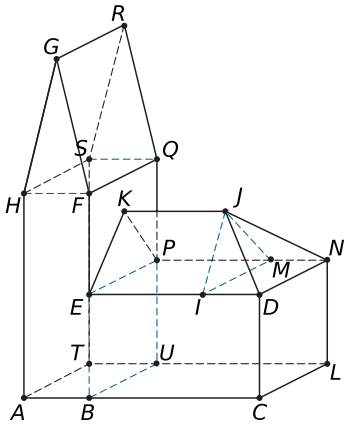
In figuur 1 zie je een tekening in parallelprojectie. Daarin wordt de driedimensionale (3D) vorm afgebeeld op een plat vlak (2D) zo, dat lijnen die in werkelijkheid parallel (evenwijdig) lopen dat ook in de tekening doen.

Alleen de ribben (overgangen tussen verschillende vlakken) van de figuur zijn getekend. Je kunt hem opdelen en twee balken, twee prisma's en een piramide (figuur 2).

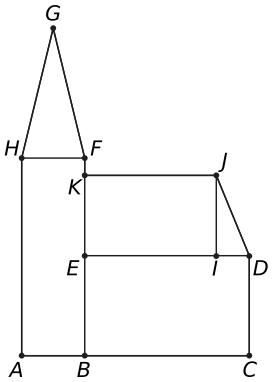
In figuur 3 zie je het vooraanzicht van de figuur.



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

Figuur 2.3

In dit vooraanzicht krijgen alle ribben die ermee evenwijdig lopen hun werkelijke afmeting, eventueel op schaal. Voor ribben die er niet mee evenwijdig lopen geldt dit niet.

Zo geldt:

- AB, BC, CD en DE zijn op schaal weergegeven, want deze lijnstukken zijn evenwijdig met het vooraanzicht, oftewel ze staan loodrecht op de kijkrichting.
- JD is niet op schaal weergegeven, want dit lijnstuk is niet evenwijdig met het vooraanzicht, oftewel het staat niet loodrecht op de kijkrichting.

Opgave 1

Bekijk het vooraanzicht van de figuur in de **Uitleg**. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

a Niet alle letters van de punten uit de 3D-afbeelding van de figuur zijn overgenomen in het vooraanzicht. Voeg alle ontbrekende punten in de tekening toe.

b Waarom is de lengte van het lijnstuk FG wel, en die van het lijnstuk FR niet op schaal weergegeven?

c Welke van de lijnstukken JD, JK en JN is/zijn op schaal? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

Gebruik de gegevens van de **Uitleg**. Omdat er geen afmetingen bij de figuur staan, hoef je daar geen rekening mee te houden.

a Teken het linker aanzicht van de figuur.

b Teken het rechter aanzicht van de figuur.

c Teken het bovenaanzicht van de figuur.

d De kerk krijgt nieuwe dakbedekking op de toren. De aannemer moet daarom weten hoe groot het oppervlak van het dak is. Leg uit waarom je een vooraanzicht en een zijaanzicht met maten nodig hebt om dit te kunnen berekenen.

Opgave 3

Bekijk het vooraanzicht van de figuur in de **Uitleg**.

a Noem nog minstens vijf ribben die in het vooraanzicht op schaal zijn getekend.

b Noem twee ribben die in het vooraanzicht niet op schaal zijn getekend.

Theorie en voorbeelden

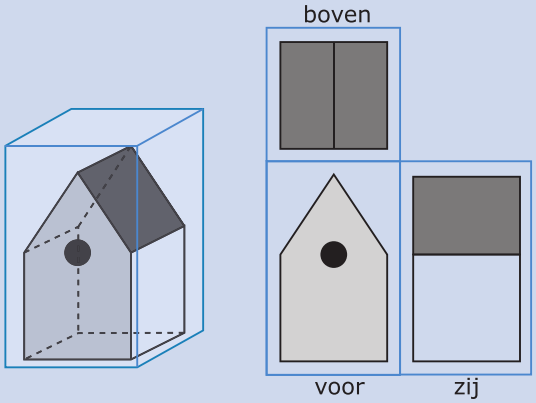
Om te onthouden

In een **aanzicht** wordt een 3D-figuur weergegeven zoals hij er van één kant bekeken uitziet. Meestal is dat recht van voren, precies van opzij, of recht van boven. Je spreekt dan van een vooraanzicht, een zijaanzicht of een bovenaanzicht. Teken je ze alle drie dan heb je een drieaanzicht. Hier zie je een drieaanzicht van een vogelhuisje.

Het vogelhuisje zelf is in **parallelprojectie** getekend. Daarin worden evenwijdige lijnen ook evenwijdig getekend.

Voor aanzichten geldt:

- Lijnstukken die evenwijdig lopen met het vlak van tekening krijgen hun ware grootte (eventueel op schaal).
- Vlakke figuren die evenwijdig lopen met het vlak van tekening krijgen hun werkelijke vorm (hun werkelijke hoeken en afmetingen).

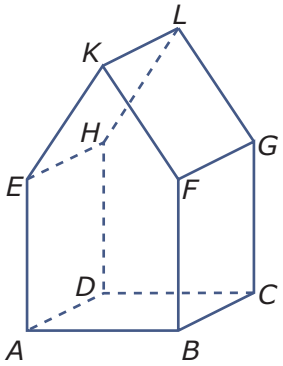


Figuur 2.4

Voorbeeld 1

Bekijk de figuur van een vogelhuisje in de vorm van een prisma.

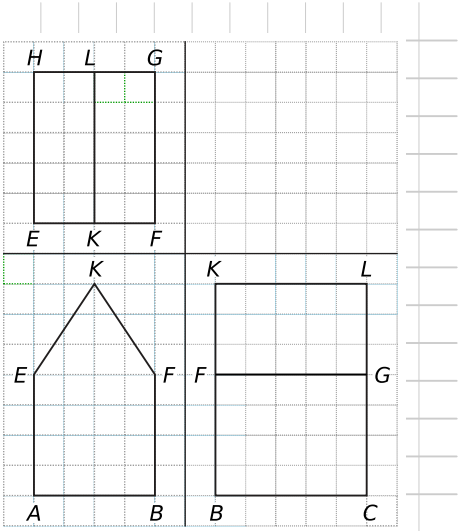
- Teken op roosterpapier drie aanzichten van dit vogelhuisje. Neem $AB = AE = 12$ cm, de hoogte is 21 cm en de diepte 15 cm.
- Bereken de lengte van ribbe FK.
- Bereken de inhoud van het vogelhuisje in cm^3.



Figuur 2.5

Antwoord

- De drie aanzichten (op schaal) zijn het bovenaanzicht, het voor-aanzicht en het rechterzijaanzicht.
- FK zie je op ware grootte (op schaal) in het vooraanzicht. Die lengte is daar de hypotenusa van een driehoek met zijden 6 en 9 cm.
  De stelling van Pythagoras geeft:
  $FK = \sqrt{6^2 + 9^2} \approx 10{,}8$ cm.
- De inhoud van het vogelhuisje is te berekenen door te bedenken dat het een prisma is. De voorkant van het vogelhuisje is het grondvlak en de diepte van het vogelhuisje is de hoogte van het prisma.
  De oppervlakte van het grondvak van het prisma is 198 cm^2.
  De hoogte van het prisma is 15 cm.
  De inhoud van het prisma en het vogelhuisje is $198 \cdot 15 = 2970$ cm^3.



Figuur 2.6

Opgave 4

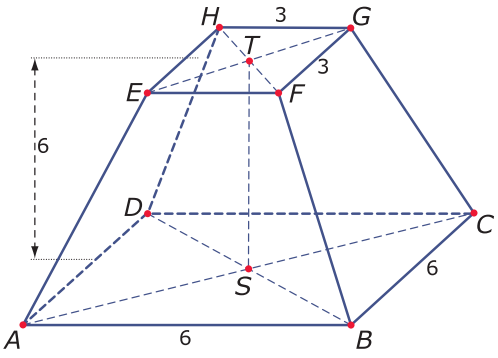
Bekijk **Voorbeeld 1**.

a De oppervlakte van het grondvlak van het prisma is precies 198 cm^2. In welke twee vormen kun je het grondvlak verdelen om dit te berekenen? Geef de berekening.

b Er komt een stokje in het huisje van het midden van AE naar het midden van CG. Hoe lang is dit stokje?

Opgave 5

Bekijk de afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. Regelmatig vierzijdig impliceert dat het grondvlak een vierkant is, evenals het bovenvlak. Bovendien staat het lijnstuk ST, dat het midden van het grondvlak verbindt met het midden van het bovenvlak, loodrecht op beide vlakken.
Gegeven is: $AB = 6$ cm, $EF = 3$ cm en $ST = 6$ cm.



Figuur 2.7

a Teken het drieaanzicht van de afgeknotte piramide.

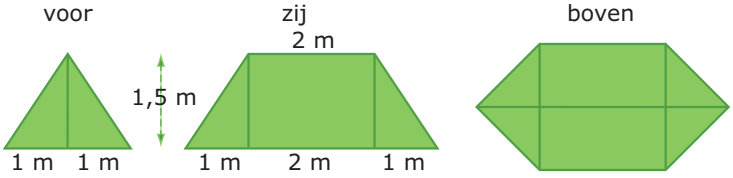
Neem vanaf nu aan dat niet $ST = 6$, maar dat alle vier de opstaande ribben 6 centimeter lang zijn. De lengte van de andere ribben is niet veranderd.

b Welk aanzicht verandert daardoor niet?

c Bereken de hoogte van de nieuwe figuur. Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

Je ziet hier drie aanzichten van een tentje.



Figuur 2.8

- Uit welke twee bekende ruimtelijke figuren bestaat deze tent?
- Bereken de inhoud van de tent.

Antwoord

Hiernaast zie je een parallelprojectie van de tent.

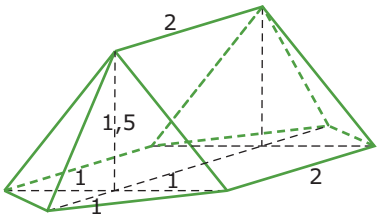
- De tent bestaat uit een driehoekig prisma (het middenstuk) en een regelmatige vierzijdige piramide (de twee eindstukken samengevoegd).
- Inhoud prisma = oppervlakte grondvlak × hoogte.
  Het grondvlak van het prisma is de driehoek met basis 2 en hoogte $1{,}5$ m.

  De inhoud van het prisma is: $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}5 \cdot 2 = 3$ m^3.

  Inhoud piramide = $\frac{1}{3}$× oppervlakte × hoogte.

  Het grondvlak is een vierkant met zijden van $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ m.

  De inhoud van de piramide is $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1{,}5 = 2$ m^3.



Figuur 2.9

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Hoe groot is de totale inhoud van de tent?

b Waarom weet je zeker dat het grondvlak van de piramide een vierkant is?

Opgave 7

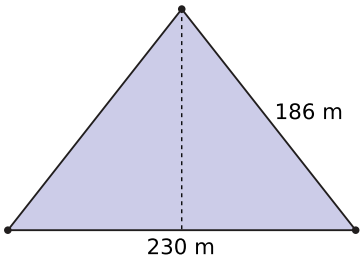
Een ruimtelijke figuur heeft gelijke driehoekige voor- en zijaanzichten. Eén ervan is getekend. De ruimtelijke figuur heeft geen gebogen zijvlakken. De afmetingen zijn gegeven in meter.

a Welke vorm heeft de ruimtelijke figuur? Welke vorm heeft het onderaanzicht?

b Bereken de oppervlakte van het grondvlak.

c Bereken de hoogte van de ruimtelijke figuur.
Rond je antwoord af op een geheel aantal meter.

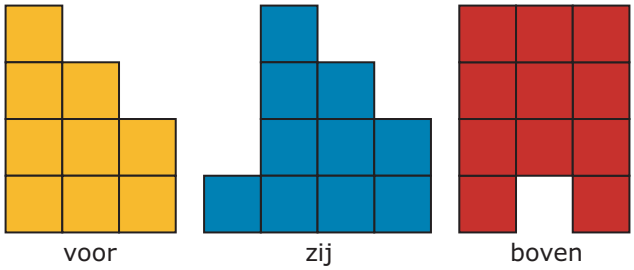
d Bereken de inhoud van de ruimtelijke figuur.
Geef je antwoord in m^3 afgerond op een duizendtal.



Figuur 2.10

Voorbeeld 3

Bekijk de drie aanzichten van een stapel kubussen.
Hoeveel kubussen zijn minimaal nodig om deze stapel te maken?



Figuur 2.11

Antwoord

Om het minimaal aantal kubussen te bepalen is het handig om de informatie uit de aanzichten schematisch weer te geven. Dit doe je door van het bovenaanzicht een tabel te maken (vier rijen en drie kolommen) en hier een extra rij (onder) en een extra kolom (rechts) aan toe te voegen.

In de extra rij en extra kolom geef je het aantal kubussen aan dat je minimaal nodig hebt om het voor- en zijaanzicht te kunnen maken.

- In de extra rij zet je de minimaal benodigde kubussen uit het vooraanzicht (van links naar rechts: 4, 3 en 2).
- In de extra kolom zet je de minimaal benodigde kubussen uit het zijaanzicht (van boven naar beneden: 2, 3, 4 en 1).

		2	2
	3		3
4			4
	×		1
4	3	2	

Tabel 2.1

Uit het bovenaanzicht blijkt dat overal minimaal één kubus moet liggen, behalve vooraan in het midden. Zet in de tabel daar een kruis. Bekijk vervolgens hoe je met zo weinig mogelijk kubussen de juiste hoogte per kolom en rij kunt maken. Die getallen zet je in de cellen van de bijbehorende rijen en kolommen.

Het minimaal aantal benodigde kubussen om de figuur te kunnen maken is 17.

1	1	2	2
1	3	1	3
4	1	1	4
1	×	1	1
4	3	2	

Tabel 2.2

Opgave 8

Gebruik de drie aanzichten van de stapel kubussen in **Voorbeeld 3**.
Hoeveel kubussen zijn er maximaal te gebruiken om de gegeven aanzicht te maken?

Opgave 9

Bekijk het bovenaanzicht van een kubusstapel. De getallen geven aan hoeveel kubussen er op elkaar liggen.
Teken een bijpassend vooraanzicht en een bijpassend zijaanzicht.

3	4	3	2
2	1	2	4

Figuur 2.12

Verwerken

Opgave 10

Voor het balkvormige blokje geldt: het is even hoog als breed (3 bij 3 cm), het is twee keer zo breed als diep. Voor het dak geldt: twee van deze blokjes zijn even groot als het balkvormige blokje. Teken het bovenaanzicht op ware grootte.

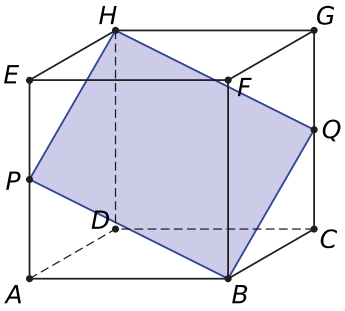
Figuur 2.13

Opgave 11

Gegeven is de kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 6 cm. Punt P is het midden van ribbe AE en punt Q is het midden van ribbe CG. Het vlak $PBQH$ verdeelt de kubus in twee lichamen, waarvan het lichaam $ABCD.PBQH$ er één is.

a Teken een bovenaanzicht, een vooraanzicht en een rechterzijaanzicht van $ABCD.PBQH$.

b $PBQH$ is een ruit, bereken hiervan de omtrek.



Figuur 2.14

Opgave 12

Gegeven is een regelmatig viervlak $ABC.T$ met ribben van 4 cm. ΔABC staat op de grond.

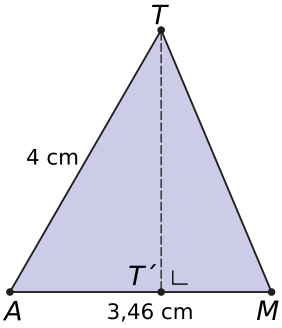
a Teken een bovenaanzicht op ware grootte.

b Bereken de afstand van een hoekpunt naar het midden van de tegenoverstaande zijde. Rond af op twee decimalen.

Bekijk de doorsnede van het regelmatige viervlak $ABC.T$.

De doorsnede gaat door de top T, het punt recht onder de top T' en één van de rechtopstaande ribben. Er geldt: lijnstukken AT' en $T'M$ hebben een verhouding $2:1$.

c Bereken de hoogte van de piramide. Rond af op één decimaal.



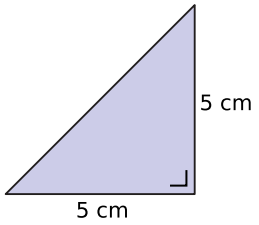
Figuur 2.15

Opgave 13

Van een bepaalde ruimtelijke figuur is het voor-, zij- en bovenaanzicht hetzelfde. Eén aanzicht is weergegeven.

a Wat voor een ruimtelijke figuur is dit?

b Bereken de inhoud van deze ruimtelijke figuur.



Figuur 2.16

Opgave 14

Bekijk het kunstwerk. Het bestaat uit even lange en dikke zijden en allemaal rechte hoeken. De hoogte is tien keer zo groot als de dikte van de zijden. De zijden zijn 50 cm lang.

a Teken een aanzicht op schaal $1:10$ waarbij de richting van het aanzicht loodrecht op het midden van één van de zijden staat.

b Teken een aanzicht op schaal $1:10$ waarbij de richting van het aanzicht loodrecht staat op het diagonaalvlak dat bestaat uit de diagonalen van de onder- en bovenkant en vier verticale ribben. Maak eerst een schets en bereken zo nodig de afmetingen.

Figuur 2.17

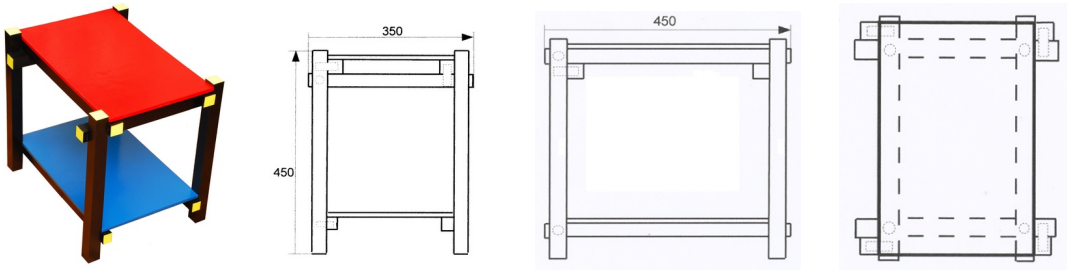
Opgave 15

Gegeven is een prisma met een regelmatige zeshoek als grondvlak. De zijden van de zeshoek zijn 10 cm. Bereken de breedte van het smalst mogelijke zijaanzicht en van het breedst mogelijke zijaanzicht.

Toepassen

Opgave 16: Rietveld tafeltje

Hier zie je een tafeltje in Rietveld-stijl. Verder zie je drie aanzichten van dit tafeltje met afmetingen in mm. Alle balkjes hebben een doorsnede van 40×40 mm en steken 10 mm uit.



Figuur 2.18

a Hoe groot is de oppervlakte van een tafelblad?

b Hoeveel cm aan balkjes is in totaal nodig om dit tafeltje mee te maken?

c Hoeveel cm^2 aan gele verf is nodig voor het schilderwerk?

Opgave 17: De Steltman-stoel

Hier zie je de Steltman-stoel, een ontwerp van Gerrit Rietveld uit 1963. De stoel is opgebouwd uit houten balken met een dikte van 44 mm en een breedte van 100 mm. De lengtes van deze balken zijn 255 mm, 350 mm, 400 mm (twee stuks), 456 mm, 556 mm en 600 mm. De zitting is $44 \times 356 \times 400$ mm.

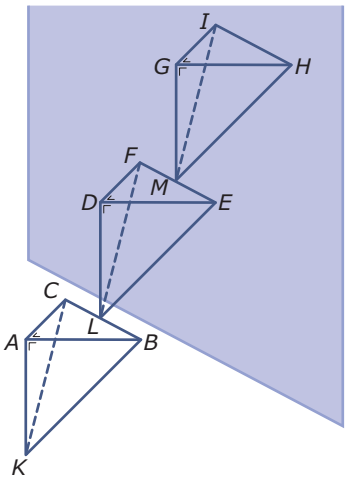
a Hoe hoog is de Steltman-stoel in totaal?

b Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van de Steltman-stoel. Gebruik schaal 1 : 10.

Figuur 2.19

Opgave 18: Etagère

In een advertentie van een tuincentrum staat een foto van een etagère. De etagère is nagetekend.



Figuur 2.20

De etagère is opgebouwd uit drie gelijke piramiden. Elke piramide is gemaakt van vier driehoeken van blik die aan elkaar zijn gelast. De etagère steunt met het punt K op de grond en met de ribbe HI tegen de muur. De bovenste piramide is aan de middelste vastgelast in het midden M van ribbe EF en de middelste piramide is aan de onderste vastgelast in het midden L van ribbe BC. Het punt K en de ribben BC, EF en HI liggen in één vlak.

De driehoeken KAB, KAC en ABC zijn zowel rechthoekig als gelijkbenig. $KA = AB = AC = 25$ cm. De plateaus ABC, DEF en GHI lopen evenwijdig aan het grondvlak.

a Teken een bovenaanzicht van de etagère op schaal $1 : 5$.

b Bereken hoeveel centimeter K van de muur af ligt.

(bron: examen havo B in 2004, tweede tijdvak)

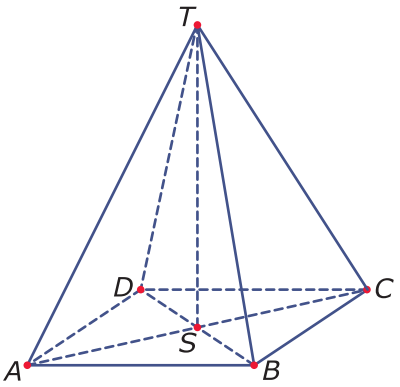
Testen

Opgave 19

Bekijk de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$. Regelmatig betekent in dit geval dat het grondvlak een vierkant is en dat het lijnstuk ST, dat het midden van het grondvlak verbindt met de top, loodrecht op het grondvlak staat.
Gegeven is: $AB = 4$ cm en $AT = 6$ cm.

a Bereken afgerond op één decimaal de hoogte van de piramide.

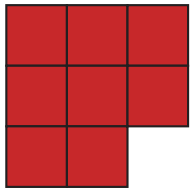
b Teken een bovenaanzicht en een vooraanzicht.



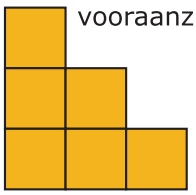
Figuur 2.21

Opgave 20

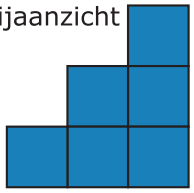
Bekijk deze aanzichten van een stapel blokken.



bovenaanzicht



vooraanzicht



zijaanzicht

Figuur 2.22

Hoeveel kubussen zijn minimaal nodig om deze stapel te maken?

1.3 Perspectief

Inleiding

Van veel ruimtelijke figuren krijg je een parallelprojectie te zien. Maar zo'n parallelprojectie geeft de werkelijkheid niet weer zoals je die met je ogen ziet. Dan lijken voorwerpen die verder van je af zijn kleiner. Dus de afstand tussen evenwijdige lijnen lijkt dan ook kleiner te worden: dergelijke lijnen lopen naar elkaar toe. Dat verschijnsel heet perspectief.
Hier zie je er een voorbeeld van.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- het verschil tussen parallelprojectie en perspectief herkennen;
- in een gegeven figuur eenpuntsperspectief herkennen en horizon, oogpunt en verdwijnpunt aanwijzen;
- in een gegeven figuur tweepuntsperspectief herkennen en horizon, oogpunt en verdwijnpunt aanwijzen.

Voorkennis

- werken met ruimtelijke figuren in parallelprojectie en hun aanzichten;
- rekenen met verhoudingen en de stelling van Pythagoras.

Verkennen

Opgave V1

In de **Inleiding** zie je een foto van de Afsluitdijk.

Leg uit waarom hier niet sprake is van een parallelprojectie. Wat gebeurt hier wel?

Uitleg 1

Een 3D-figuur kun je in 2D weergeven door parallelprojectie te gebruiken. Alle lijnen die in werkelijkheid parallel lopen, lopen in de parallelprojectie ook parallel. Alle lijnen die in het echt even lang zijn, zijn in de parallelprojectie ook even lang. Toch weet je dat voorwerpen die verder weg zijn, kleiner lijken.

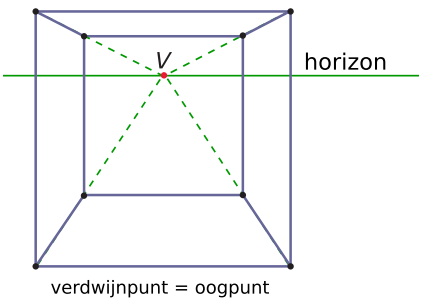
Figuur 3.2

Daarom zie je op deze foto van de Afsluitdijk dat de parallelle lijnen voor ons oog niet parallel lopen. Dit verschijnsel heet heet perspectief. Lijnen die in werkelijkheid parallel lopen, komen in perspectief bij elkaar in een verdwijnpunt op de horizon. De lijnstukken op het midden van de weg zijn in werkelijkheid even lang. In perspectief worden ze steeds korter naarmate ze verder van het oog liggen.

Deze kubus staat zo, dat er één viertal ribben niet evenwijdig loopt met het vlak van tekening, het tafereel genoemd. Dit viertal ribben heeft één verdwijnpunt en dit is een tekening in éénpuntsperspectief.

Je oog zit in dit geval recht voor het verdwijnpunt V. Daarom valt hier het verdwijnpunt samen met het oogpunt. Het oogpunt is het verdwijnpunt van alle lijnen die loodrecht op het kijkvlak staan.

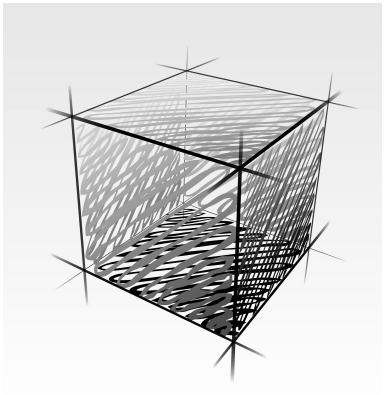
De horizon is de horizontale lijn door het oogpunt en zit dus op ooghoogte. Als het oogpunt lager ligt, ligt de horizon ook lager. In dit geval bevindt het oogpunt zich lager dan het bovenvlak van de kubus.



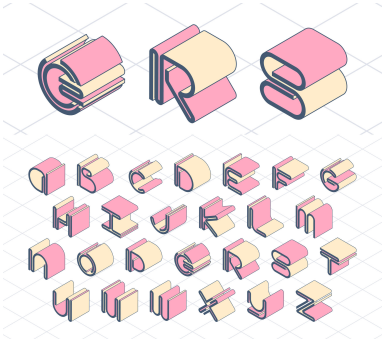
Figuur 3.3

Opgave 1

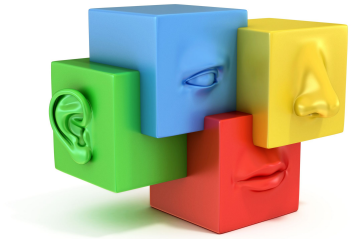
Geef van elk van deze figuren aan of het een aanzicht, een perspectieftekening/foto, een parallelprojectie of geen van deze is. Ga ervan uit dat de bijbehorende 3D-figuren uit balken, piramides en/of prisma's bestaan.



A



B



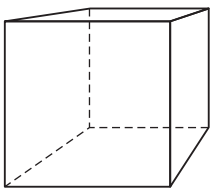
C

D

Figuur 3.4

Opgave 2

Bekijk de éénpuntsperspectieftekening van de kubus. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.



Figuur 3.5

Teken de horizon, het verdwijnpunt en het oogpunt.

Opgave 3

Bekijk de foto van een spoorrails in perspectief. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.
Teken de horizon, het verdwijnpunt en het oogpunt.

Figuur 3.6

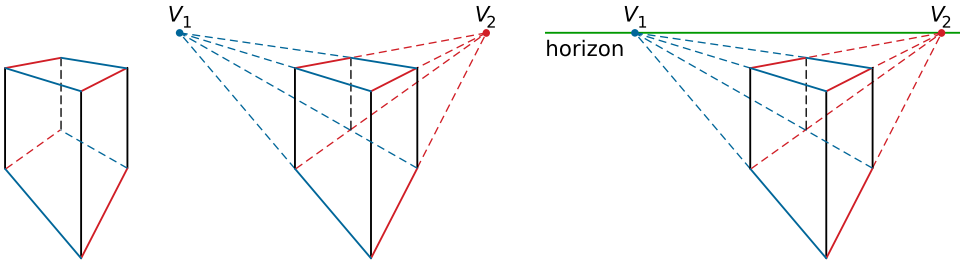
Uitleg 2

Als er meer groepjes evenwijdige lijnen zijn, zijn er in perspectief ook meer verdwijnpunten. Bekijk de foto van het kantoorpand. Op de twee gevels lopen de lijnen evenwijdig, maar de lijnen van de ene gevel lopen naar een ander verdwijnpunt dan de lijnen van de andere gevel. Beide verdwijnpunten liggen op de horizon.

Figuur 3.7

De enige lijnen die in perspectief niet naar een verdwijnpunt gaan, terwijl ze in werkelijkheid wel parallel lopen, zijn lijnen die evenwijdig lopen met het vlak van tekening. Dit heet het kijkvlak, of het tafereel. Het oogpunt bevindt zich in het tafereel, op de lijn loodrecht vanaf het oog op het tafereel.

Ook deze kubus is getekend in perspectief.



Figuur 1 Figuur 2 Figuur 3

Figuur 3.8

Alle blauwe ribben zijn in werkelijkheid evenwijdig. In de perspectieftekening snijden ze elkaar daarom in een punt op de horizon: het verdwijnpunt V_1. Hetzelfde geldt voor alle rode ribben, deze snijden elkaar in het punt V_2. Omdat er twee verdwijnpunten zijn, wordt dit een tekening in tweepuntsperspectief genoemd.

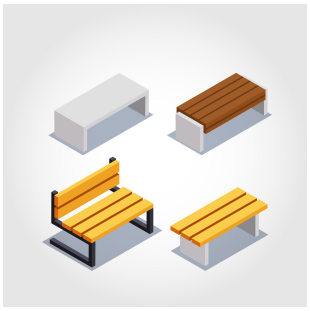
De lijn door beide verdwijnpunten is de horizon (figuur 3).

Het oogpunt valt in dit geval niet samen met V_1 of V_2. Het oogpunt is namelijk het verdwijnpunt van de lijnen die loodrecht op het kijkvlak staan.

Hier is toevallig een van de diagonalen in het grondvlak evenwijdig met de horizon. Omdat de figuur een kubus is, betekent dit dat de andere diagonaal loodrecht op de horizon staat. Het verdwijnpunt van die tweede diagonaal is het oogpunt.

Opgave 4

Geef aan of de figuren zijn getekend in parallelprojectie, éénpunts-perspectief of tweepuntsperspectief.



figuur 1

figuur 2

figuur 3

figuur 4

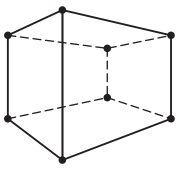
Figuur 3.9

Opgave 5

Bekijk de tweepuntsperspectieftekening van een balk met een grondvlak dat niet vierkant is. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

a Bepaal twee verdwijnpunten en teken de horizon.

b Iemand merkt op dat één van beide diagonalen van het grondvlak evenwijdig loopt met het tafereel en beweert dat het oogpunt het snijpunt is van een lijn waarop de andere diagonaal ligt en de horizon. Is dit een goede redenering? Licht je antwoord toe.

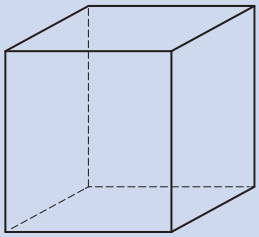


Figuur 3.10

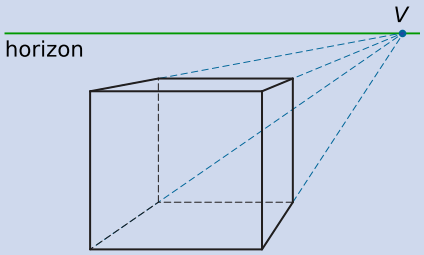
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

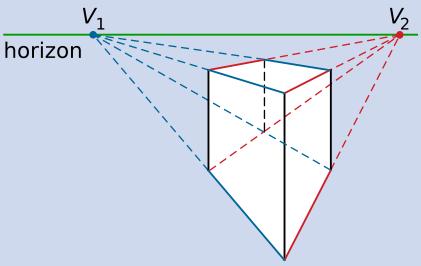
Bij een parallelprojectie zijn de evenwijdige lijnen in de aanzichten van de 3D-figuur ook evenwijdig.
In werkelijkheid is dit niet hoe je ruimtelijke figuren waarneemt.



parallelprojectie



éénpuntsperspectief



tweepuntsperspectief

Figuur 3.11

Bij waarneming met een oog of lens zijn de kijklijnen daarom niet evenwijdig: Ze lopen immers naar het oog of de lens. Evenwijdige lijnen lopen naar een verdwijnpunt toe. Objecten die verder weg zijn worden kleiner afgebeeld. Deze manier van afbeelden heet **perspectief**.

Het vlak waarin de afbeelding ontstaat heet het **tafereel**.
Het punt waar de kijklijnen bij elkaar komen heet het **oog**.
Het snijpunt van de lijn door het oog loodrecht op het tafereel met de horizon heet het **oogpunt**.

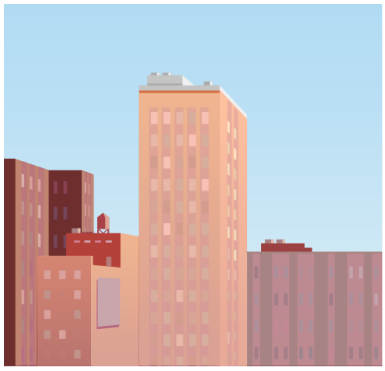
Tekeningen in perspectief hebben de volgende eigenschappen:

- Lijnen die in 3D evenwijdig zijn, snijden elkaar in 2D in één punt, hun **verdwijnpunt** of **vluchtpunt**, behalve als de in 3D evenwijdige lijnen evenwijdig zijn aan het tafereel, dan zijn ze in 2D ook evenwijdig.
- Verdwijnpunten van lijnen die horizontaal zijn in 3D, liggen in 2D op één lijn, de **horizon**, behalve als ze evenwijdig lopen met het tafereel.
- Het oogpunt ligt op de horizon.

Is er één verdwijnpunt, dan spreek je van **éénpuntsperspectief**. Zijn er twee verdwijnpunten, dan spreek je van **tweepuntsperspectief**.

Voorbeeld 1

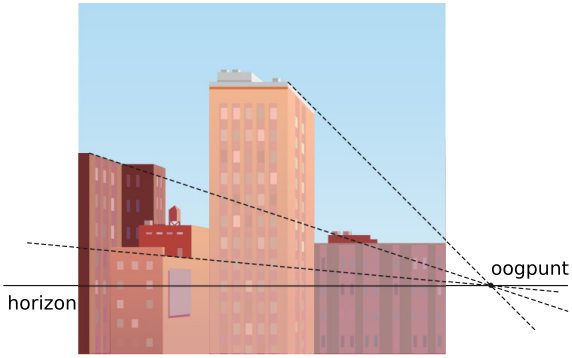
Van deze figuur is bekend dat de gebouwen op de voorgrond balkvormig zijn en dat er altijd twee gevels (voor en achter) evenwijdig met het tafereel staan. Bepaal in de perspectieftekening het oogpunt en teken de horizon.



Figuur 3.12

Antwoord

Merk eerst op dat dit een eenpuntsperspectieftekening is. Alle niet-verticale lijnen zijn evenwijdig met het tafereel óf lopen naar een verdwijnpunt. De horizontale lijn door dit verdwijnpunt is de horizon.
In een éénpuntsperspectieftekening is het verdwijnpunt ook het oogpunt.



Figuur 3.13

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**.
Waarom is in een eenpuntsperspectieftekening het verdwijnpunt ook het oogpunt?

Opgave 7

Deze foto is gemaakt in de National Portrait Gallery van het Smithsonian American Art Museum in Washington, DC. De wanden staan verticaal, zijn evenwijdig met elkaar, ofwel staan loodrecht op elkaar. De foto is recht van voren gemaakt. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

Figuur 3.14

Bepaal het oogpunt en teken de horizon.

Opgave 8

Bekijk de foto van een interieur van het Smithsonian American Art Museum in Washington, DC.

Figuur 3.15

Waarom is het hier lastiger om het oogpunt te bepalen?

Voorbeeld 2

Bekijk de foto van het Holocaustmonument in Berlijn. Ga ervan uit dat alle balken een rechthoek als grondvlak hebben en alle kleine tegels vierkant zijn. Teken de horizon en bepaal het oogpunt.

Figuur 3.16

Antwoord

Merk op dat dit een foto in tweepuntsperspectief is. Trek de lijnen van enkele ribben door en bepaal zo twee verdwijnpunten. De horizon is de lijn die door die twee punten gaat.

Het oogpunt ligt op de horizon, maar het is niet een van de twee verdwijnpunten. De lijnen daar naartoe staan immers niet loodrecht op het tafereel.

Figuur 3.17

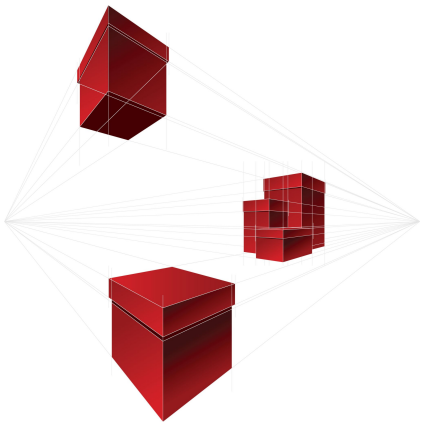
Om te bepalen welke lijnen wel loodrecht op het tafereel staan, kijk je naar de diagonalen van de vierkante tegels. Omdat de tegels erg klein zijn kun je ook een vierkant van bijvoorbeeld 10 bij 10 tegels gebruiken. Een van de diagonalen van dit vierkant is steeds evenwijdig met het tafereel en omdat de diagonalen van een vierkant loodrecht op elkaar staan, moet de andere diagonaal loodrecht op het tafereel staan. Het snijpunt van deze diagonaal en de horizon is het oogpunt.

Opgave 9

Bekijk de figuur met kubus en balkvormige dozen. Deze figuur staat ook op het **werkblad**. De onderste doos heeft een vierkant deksel.

a Maak gebruik van de eigenschappen van perspectief en teken de horizon in deze figuur.

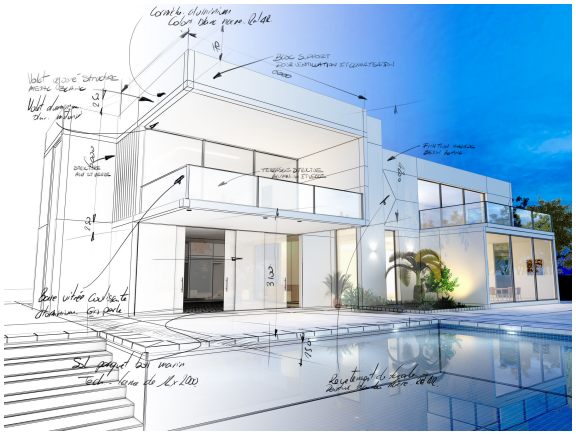
b Bepaal de plaats van het oogpunt.



Figuur 3.18

Opgave 10

De figuur met een woning is gemaakt in perspectief. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.
Maak gebruik van de eigenschappen van perspectief en teken de horizon in de figuur.



Figuur 3.19

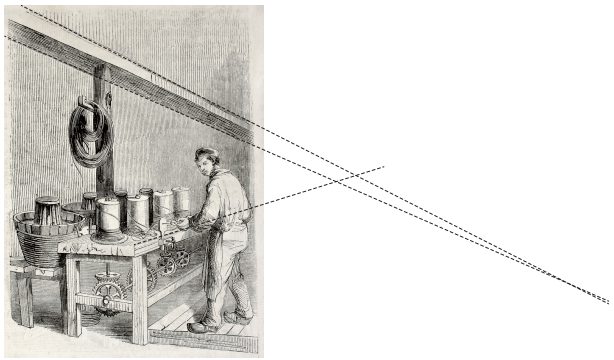
Voorbeeld 3

Bekijk de figuur met daarin een werkplaats van een fabriek van naalden. Aan de bovenkant is een watergoot te zien, aan de onderkant een werkbank. Veronderstel dat de werkbank parallel aan de goot staat. Is het perspectief in de tekening goed toegepast?

Figuur 3.20

Antwoord

Als de werkbank parallel aan de goot staat, staan ze evenwijdig. De verlengde lijnen ervan moeten dan door één (verdwijn)punt gaan.



Figuur 3.21

Uit de drie doorgetrokken zwarte lijnen blijkt dat dit niet zo is, dus ze staan niet parallel.
Merk op dat twee lijnen tekenen in dit geval niet voldoende is.

Opgave 11

In het Rijksmuseum hangt het schilderij ‘Augustinus offert aan een afgod der Manicheeërs’. Bekijk de twee beeldjes die op de pilaren staan. Waarom lijkt hier minder zorgvuldig gebruik van perspectief aan de orde te zijn?

Figuur 3.22

Verwerken

Opgave 12

Bekijk de foto van het gebouw. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

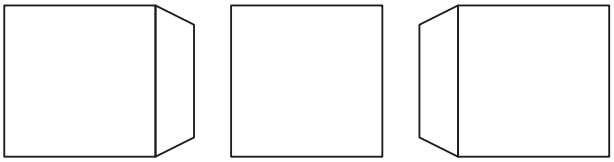
Figuur 3.23

a Wat voor soort perspectief is gebruikt in de foto?

b Bepaal de plaats van het oogpunt en teken de horizon.

Opgave 13

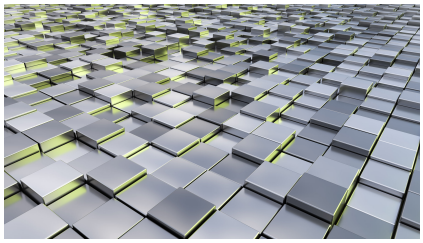
Bekijk de drie kubussen. De figuren staan ook op het **werkblad**. Het oogpunt bevindt zich loodrecht voor het midden van de middelste kubus. Teken de horizon.



Figuur 3.24

Opgave 14

De bovenkanten van deze tegels liggen horizontaal. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.



Figuur 3.25

a Wat voor soort perspectief is gebruikt in de figuur?

b Maak gebruik van de eigenschappen van perspectief en teken de horizon in de figuur.

c Wat valt op aan de plaats van de horizon?

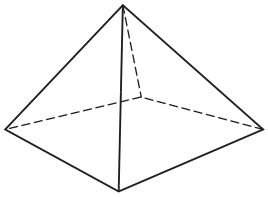
d Maak gebruik van diagonalen van de tegels en teken nog een verdwijnpunt op de horizon.

e Wat is in dit geval een voordeel van het gebruik van diagonalen?

f Waarom is het bepalen van het oogpunt in deze figuur lastig?

Opgave 15

Bekijk de in perspectief getekende piramide waarvan het grondvlak een vierkant is. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.



Figuur 3.26

a Teken de horizon.

b Bepaal het oogpunt.

Opgave 16

In het schilderij ‘Maria met kind met de heiligen Catharina, Cecilia, Barbara en Ursula’ van de *Meester van de Virgo inter Virgines*, dat in het Rijksmuseum in Amsterdam hangt, is op twee plaatsen duidelijk onzorgvuldig gebruik van perspectief te zien. Geef aan waar.

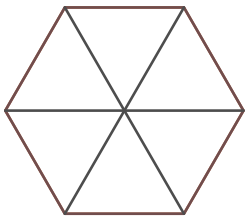
Figuur 3.27

Opgave 17

Onder een bepaalde hoek gezien, geeft een 2D-tekening van een draadkubus een zeshoek.

a Kan het aanzicht van zo'n kubus een regelmatige zeshoek zijn?

b Kan een perspectieftekening van zo'n kubus een regelmatige zeshoek zijn?



Figuur 3.28

Toepassen

Opgave 18: Agung Moskee

Op het plein bij de Agung Moskee op Java staan grote parasollen. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

a Teken de horizon in de figuur.

b Staat het tafereel verticaal? Licht je antwoord toe.

Figuur 3.29

Testen

Opgave 19

Bekijk de foto in perspectief die is gemaakt in Graffiti Alley, in het Fashion District van Toronto. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.
Teken de horizon, het verdwijnpunt en het oogpunt.

Figuur 3.30

Opgave 20

Bekijk de afgebeelde woning. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

a Teken de horizon in de figuur.

b Bepaal de plaats van het oogpunt.

Figuur 3.31

1.4 Eénpuntsperspectief

Inleiding

Je hebt gezien dat figuren in perspectief getekend beter benaderen wat je ook daadwerkelijk ziet. Eénpuntsperspectief is de simpelste manier om dit te bereiken. Alleen moeten in dat geval de zaken die je bekijkt wel recht voor je liggen.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- figuren tekenen in éénpuntsperspectief;
- met verhoudingen en gelijkvormigheid in éénpuntsperspectief werken.

Voorkennis

- werken met ruimtelijke figuren in parallelprojectie en in perspectief;
- de begrippen verdwijnpunt, horizon, oogpunt;
- rekenen met verhoudingen en de stelling van Pythagoras.

Verkennen

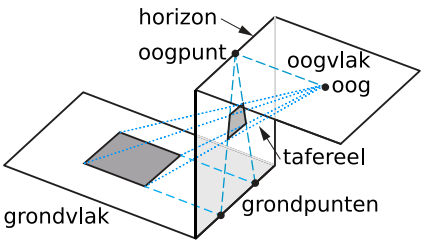
Opgave V1

Teken een kubus in éénpuntsperspectief. Bedenk een manier om er een even grote kubus achter tegenaan te tekenen.

Uitleg

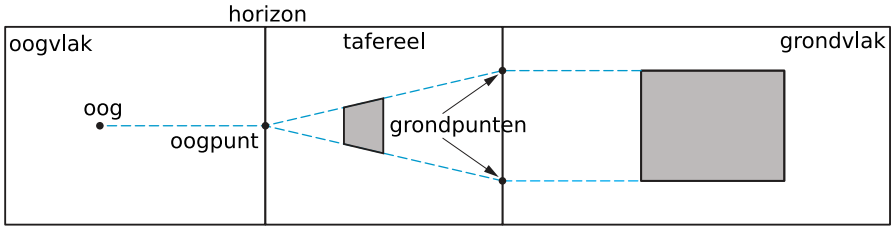
Bekijk de schematische weergave van hoe een object (in dit geval een tegel) wordt bekeken. Je ziet:

- Het oogvlak is het horizontale vlak ter hoogte van het oog. Het oog is het punt van waaruit naar een object wordt gekeken. Als je vanaf het oog vooruit kijkt, zie je de horizon, een lijn op ooghoogte in het oogvlak. Het snijpunt van de loodlijn door het oog op de horizon is het oogpunt.
- Het grondvlak is het vlak waarin of waarop objecten (in dit geval een tegel) zich bevinden. Lijnen en punten in het grondvlak worden grondlijnen en grondpunten genoemd.
- Het tafereel is het afbeeldingsvlak, omdat in het tafereel de afbeelding wordt geprojecteerd.



Figuur 4.2

Deze vlakken kunnen ‘plat’ neergelegd worden, waardoor duidelijk wordt hoe de perspectieftekening er uit komt te zien.

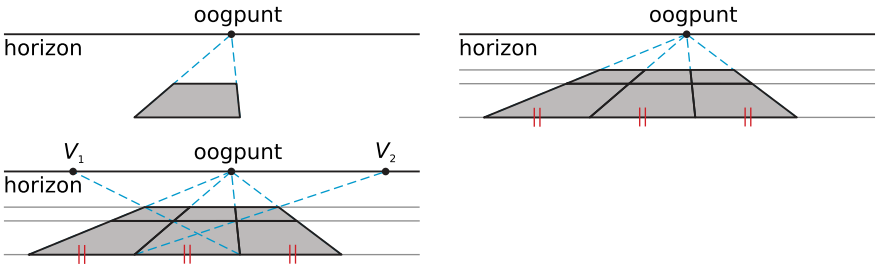


Figuur 4.3

Wil je meer dezelfde tegels aan elkaar tekenen dan kun je de diagonaalmethode gebruiken.

Tegels die op dezelfde lijn evenwijdig met de horizon liggen, hebben op de tekening dezelfde breedte. Met behulp van het oogpunt kun je dus een rij tegels tekenen.

Om de volgende rij te tekenen, maak je gebruik van de diagonalen van een vierkant. Omdat de diagonalen van alle vierkanten twee aan twee evenwijdig met elkaar zijn, gaan ze allemaal door verdwijnpunt V_1 of V_2.



Figuur 4.4

Met behulp van deze constructie kunnen tegels worden verdubbeld. Het halveren van vloertegels kun je op soortgelijke manier construeren.

Opgave 1

In het grondvlak zijn twee vierkante tegels getekend. In het oogvlak is het oog getekend. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

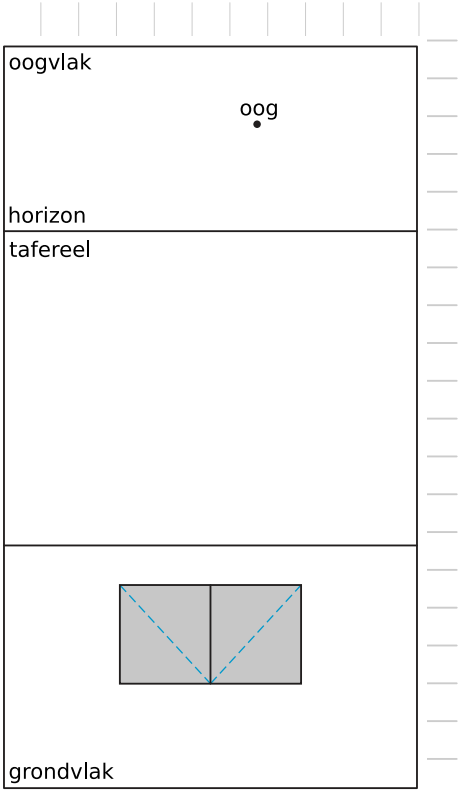
a Teken de plaats van het oogpunt met bijbehorende hulplijn.

b Teken de grondpunten met bijbehorende hulplijnen van de zijden van de vierkanten die loodrecht op het tafereel staan. Verbind deze grondpunten G_1, G_2 en G_3 met het oogpunt.

c Teken de grondpunten met bijbehorende hulplijnen van de diagonalen van de vierkanten. Noem deze grondpunten G_4 en G_5 en noem de bijbehorende hulplijnen l_4 en l_5.

d Om het verdwijnpunt te vinden dat hoort bij G_4, teken je een hulplijn l_6 evenwijdig aan l_4 en door het oog. Het snijpunt van l_6 met de horizon is verdwijnpunt V_1.
Teken op dezelfde manier het verdwijnpunt V_2 dat hoort bij grondpunt G_5.

e Verbind V_1 met G_4 en V_2 met G_5 en maak in het tafereel het perspectiefbeeld van de twee tegels af.



Figuur 4.5

Opgave 2

Gegeven is een deel van een tegelvloer met vierkante tegels. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.
Teken er aan de achterkant nog twee rijen van drie tegels bij.

Figuur 4.6

Opgave 3

Bekijk de balk $ABCD.EFGH$ die in éénpuntsperspectief is getekend.

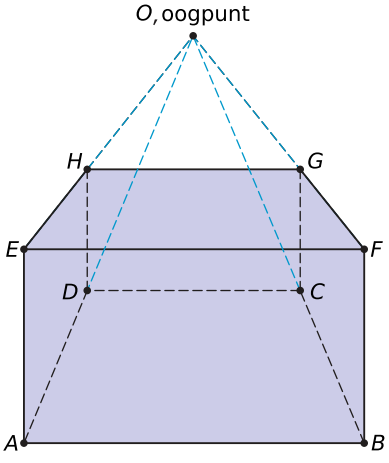
a Leg uit waarom het voorvlak van deze getekende balk gelijkvormig is met de werkelijke voorkant van de balk.

b Waarom zijn de voorkant en de achterkant van de balk in deze perspectieftekening ook gelijkvormig?

c Door welke eigenschap zijn AE en DH evenwijdig?

d Leg uit dat de driehoeken OAE en ODH in 2D gelijkvormig zijn.

e Noem nog drie paar driehoeken die gelijkvormig zijn.



Figuur 4.7

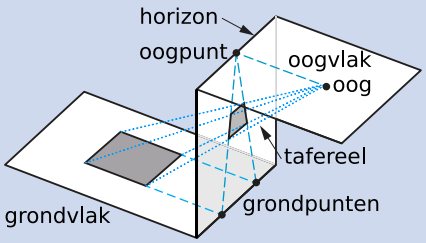
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het tekenen in perspectief maak je gebruik van een oogvlak, grondvlak en een tafereel.

Bij tekenen in perspectief zijn lijnen die evenwijdig zijn met het tafereel vaak een handig hulpmiddel.
Perspectieftekeningen hebben de volgende eigenschappen:

1. Rechte lijnen in 3D worden rechte lijnen in 2D.
2. Lijnen die in 3D evenwijdig zijn, snijden elkaar in 2D in één punt, het verdwijnpunt.
   Dit geldt niet voor evenwijdige lijnen in 3D die evenwijdig zijn met het tafereel, deze zijn ook in 2D ook evenwijdig.
3. Verdwijnpunten van lijnen die horizontaal zijn in 3D, liggen in 2D op één lijn, de horizon.
4. Het oogpunt ligt op de horizon.
5. Lijnstukken die in 3D in een vlak liggen dat evenwijdig is met het tafereel hebben dezelfde verhoudingen als die van hun beelden in 2D. Daarom zijn ook vormen die in zo'n vlak liggen gelijkvormig met hun afbeelding in 2D.



Figuur 4.8

Voorbeeld 1

Beeldende kunstenaars uit de tijd van de renaissance ontdekten losse eigenschappen van perspectief. Het idee dat evenwijdige lijnen dichter bij elkaar moesten komen ontstond in deze tijd, maar de samenhang ontbrak.

In de figuur, één van de 75 panelen over het leven van Jezus en Maria die Duccio di Buoninsegna (1255-1319) maakte voor de kathedraal van Siena, is te zien dat de kunstenaar pogingen doet om ‘diepte’ in zijn schilderij weer te geven. Als je ervan uitgaat dat de persoon rechts zich in een ruimte bevindt waarin alle wanden in werkelijkheid loodrecht op elkaar staan, dan worden de regels voor perspectief niet consequent toegepast.

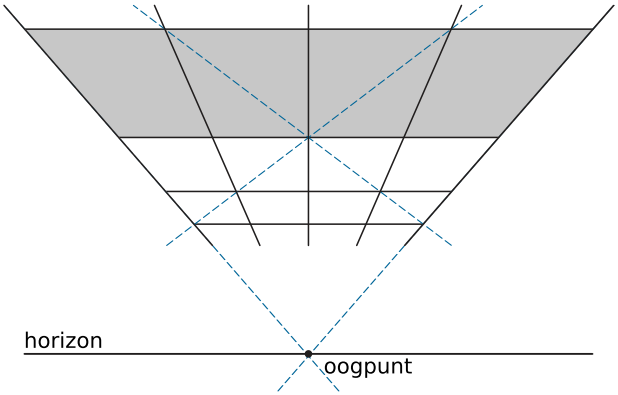
Figuur 4.9

Figuur 4.10

Ga ervan uit dat het plafond is opgebouwd uit twaalf even grote vierkante vlakken. In de figuur zie je de eerste rij vierkanten. De balken worden als lijnen weergegeven. Maak het plafond zelf compleet.

Antwoord

De lijnen van het plafond die naar achter lopen worden verlengd in de richting van het oogpunt. Verder weet je dat bij rechthoekige vlakken de diagonalen door de hoekpunten van rechthoeken in de volgende rij gaan. De snijpunten van de verlengde zijden en de diagonalen zijn de hoekpunten van de nieuwe rij vlakken.



Figuur 4.11

(naar: syllabus wiskunde vwo C)

Opgave 4

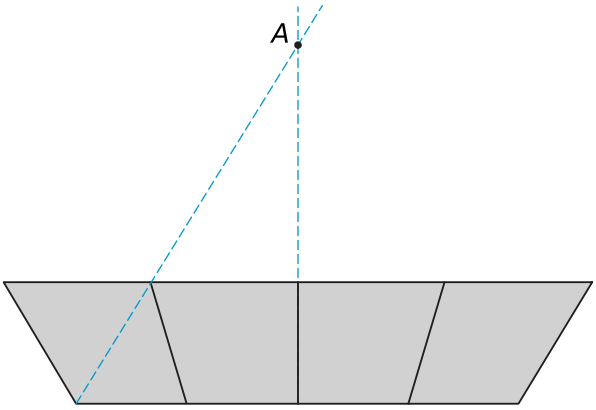
Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Leg uit dat er niet aan de perspectiefregels is voldaan door de plafondbalken met het deksel van de kist te vergelijken.

b En hoe zit het met de lessenaar en het boek dat er op ligt? Klopt daar het perspectief?

Opgave 5

Bekijk de rechthoekige tegels in éénpuntsperspectief. Er zijn hulplijnen getekend. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.



Figuur 4.12

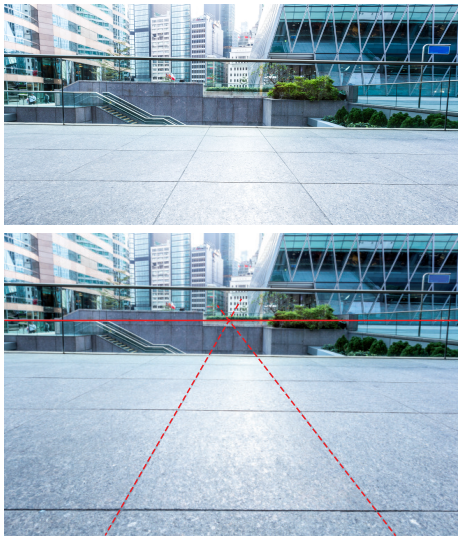
a Leg uit dat punt A een hoekpunt van de tegels van een vorige rij moet zijn.

b Maak gebruik van hulplijnen en maak het rijtje tegels af.

c Leg uit of dit vloer- of plafondtegels zijn. Gebruik het woord oogpunt.

Voorbeeld 2

Veronderstel dat de tegels in de foto in éénpuntsperspectief zijn afgebeeld. Het doorzichtige hek heeft een hoogte van 120 centimeter. Je kunt de hoogte van de camera ten opzichte van de tegels bepalen.



Antwoord

Omdat het tafereel loodrecht op de tegels staat, staat de camera op de hoogte van het oogpunt. Gebruik de tegels om het oogpunt te vinden, trek daarna een horizontale lijn door dit punt. Dit is de horizon. De horizon en het oogpunt liggen op de helft van de hoogte van het hek, dus op ongeveer 60 cm boven de tegels.

Figuur 4.14

Opgave 6

Bekijk de figuur met daarin de horizon getekend.

Figuur 4.15

Hoe hoog zal de camera hebben gestaan ten opzichte van de vloer van de kamer?

Opgave 7

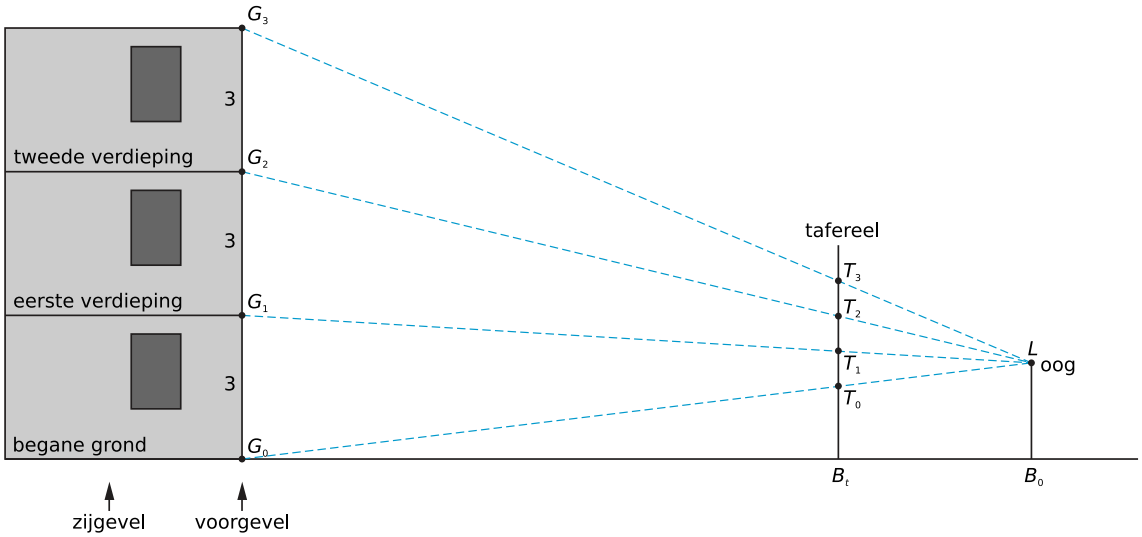
De afstand van de vloer van een verdieping tot de vloer van de volgende verdieping van dit gebouw is $2{,}75$ meter. De balkonhekken bestaan voor een deel uit halfdoorzichtig glas. De foto staat ook op het **werkblad**.

Bepaal de hoogte van dit glas.

Figuur 4.16

Voorbeeld 3

Hier zie je het zijaanzicht van een situatie waar een perspectiefafbeelding van een gebouw wordt gemaakt. Het tafereel is evenwijdig met de voorgevel. De afstand van G_0 tot B_t is drie keer zo lang als de afstand van B_t tot B_0. De verdiepingen van het gebouw zijn elk 3 meter hoog. De afstand B_tT_0 is $1{,}5$ meter.



Figuur 4.17

Bereken de afstand van het oog tot de grond.

Antwoord

Driehoek $G_0B_tT_0$ is gelijkvormig met driehoek G_0B_0L, want hoek G_0 is gemeenschappelijk en hoek B_t en B_0 zijn beide gelijk ($90°$).

De vergrotingsfactor van deze driehoeken is $\frac{4}{3}$ want de afstand van G_0 tot B_t is drie keer zo lang als de afstand van B_t tot B_0.

De ooghoogte is $\frac{4}{3} \cdot B_tT_0 = \frac{4}{3} \cdot 1{,}5 = 2$ m.

Opgave 8

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 3**.

a Bereken de afstand van T_0 tot T_1.

b Toon aan dat de lengte van T_0T_3 gelijk is aan $2{,}25$ meter.

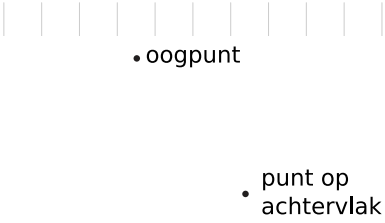
Opgave 9

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**. Bereken de ooghoogte, T_0T_1 en T_0T_3 als de afstand van G_0 tot B_t vier keer zo lang is als de afstand van B_t tot B_0.

Voorbeeld 4

De voorkant van een balk, een punt van de achterkant en de plaats van het oogpunt zijn weergegeven in de figuur.

De kijkrichting is recht op de voorkant. Maak de perspectieftekening af.



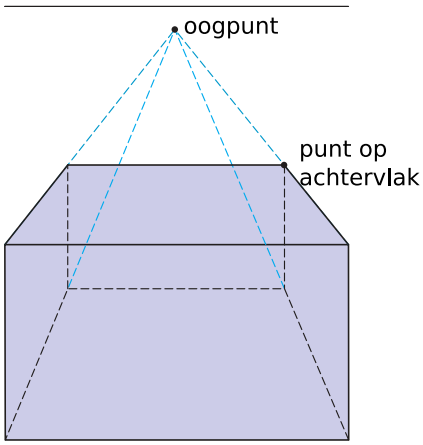
Antwoord

Teken de lijnen door de hoekpunten van de voorkant en het oogpunt.
In de 3D-figuur staan enkele ribben door de hoekpunten van de voorkant loodrecht op het tafereel. Deze ribben liggen in de perspectiefafbeelding op lijnen door het oogpunt.

Je ziet dat het punt dat op de achterkant ligt, ook op een ribbe ligt die naar het oogpunt loopt. Dat punt is een hoekpunt.

De vorm van de achterkant in 2D is een rechthoek, die gelijkvormig is met de rechthoek van de voorkant (ze zijn beide evenwijdig met het tafereel). Teken de achterkant ook als een rechthoek.

Maak de tekening van de balk af.

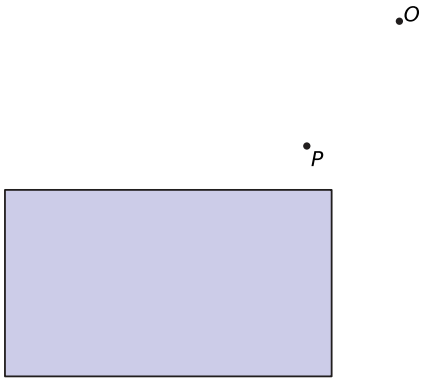


Figuur 4.19

Opgave 10

Bekijk de figuur met daarin de voorkant van een balk en een punt P op een ribbe van het achtervlak. De plaats van het oogpunt O is weergegeven. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.
De kijkrichting is recht op de voorkant. Maak de tekening af.

Let op: er zijn twee mogelijkheden: Het punt kan op de bovenste ribbe of op de onderste ribbe liggen.

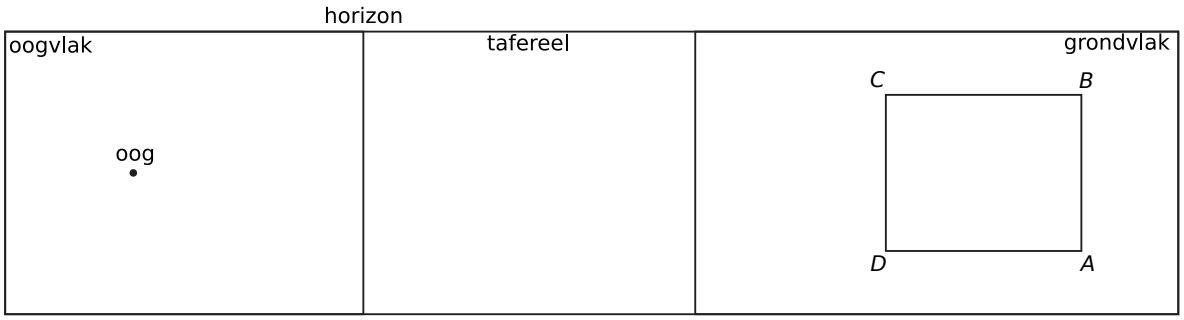


Figuur 4.20

Verwerken

Opgave 11

In het grondvlak is rechthoek $ABCD$ getekend. In het oogvlak is een oog getekend.
Deze figuur staat ook op het **werkblad**.



Figuur 4.21

a Teken de grondpunten van de zijden van de rechthoek die loodrecht op het tafereel staan. Verbind deze grondpunten G_1 en G_2 met het oogpunt.

b Teken het grondpunt G_3 van de diagonaal AC.

c Maak in het tafereel de perspectieftekening van de rechthoek af.

Opgave 12

Bekijk de figuur met rechthoekige tegels in éénpuntsperspectief. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

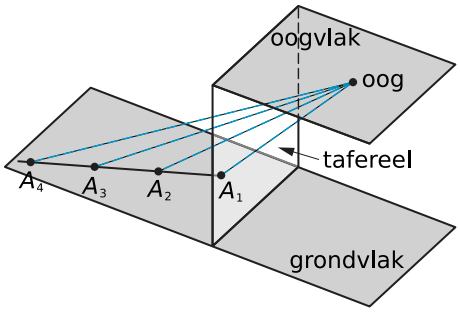
Figuur 4.22

a Leg uit of dit vloer- of plafondtegels zijn. Gebruik het woord oogpunt.

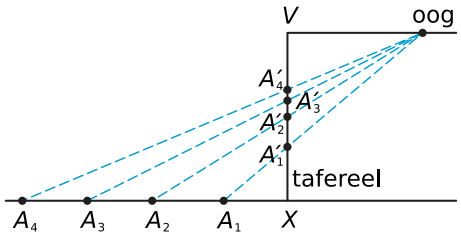
b Teken er nog een rij tegels bij, achter de al getekende tegels. Maak gebruik van hulplijnen.

Opgave 13

Door een verticale glasplaat ziet een oog een horizontale lijn met daarop vier punten: A_1, A_2, A_3 en A_4. Het horizontale vlak waarin de lijn ligt heet grondvlak, het horizontale vlak waarin het oog ligt heet het oogvlak en het vlak van de verticale glasplaat heet het tafereel. Bekijk de loodrechte parallelprojectie van de situatie.



Figuur 1



Figuur 2

Figuur 4.23

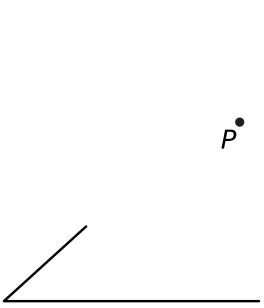
Bekijk ook het zijaanzicht. Van het verdwijnpunt V wordt een lijn loodrecht op het grondvlak getekend. Het snijpunt van deze lijn met het grondvlak is X genoemd. De afstand van het verdwijnpunt V tot het punt X is 200 millimeter en de afstand van het oog O tot het verdwijnpunt is 150 millimeter.
De afstand van A'_1 tot A'_4 is 70 millimeter.
De lengte van V tot A'_4 is gelijk aan die van X tot A'_1.

Bereken de lengte van A_4 tot A_1 in het grondvlak.

Opgave 14

Twee zijden van de onderkant van een balk, een punt P van de bovenkant en de plaats van het oogpunt O zijn weergegeven in de figuur. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.
De kijkrichting is recht op de voorkant.

Maak de tekening af. Let op: zorg dat het getekende punt P op de ribbe aan de voorkant komt te liggen.



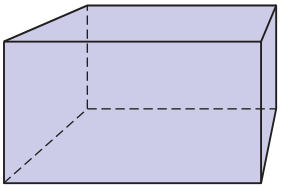
Figuur 4.24

Opgave 15

Een balk is in éénpuntsperspectief getekend. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

a Teken het oogpunt.

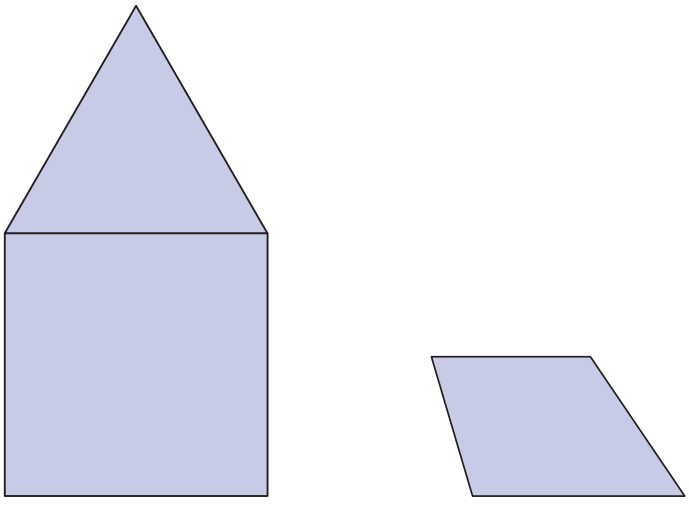
b Er wordt een balk van dezelfde afmetingen op deze balk geplaatst. Teken ook deze balk. Licht je werkwijze toe.



Figuur 4.25

Opgave 16

Een kubus en een regelmatige piramide staan op elkaar. De kubus en de piramide hebben dezelfde hoogte. In figuur 1 is het aanzicht getekend. Het zijaanzicht en het vooraanzicht zijn gelijk. In figuur 2 is een begin gemaakt met een éénpuntsperspectieftekening van de gestapelde figuren: het grondvlak van de kubus is getekend. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.



Figuur 1 Figuur 2

Figuur 4.26

a Boven welk punt van het grondvlak van de kubus ligt de top van de piramide?

b Maak de perspectieftekening van de gestapelde figuren af. Licht je werkwijze toe.

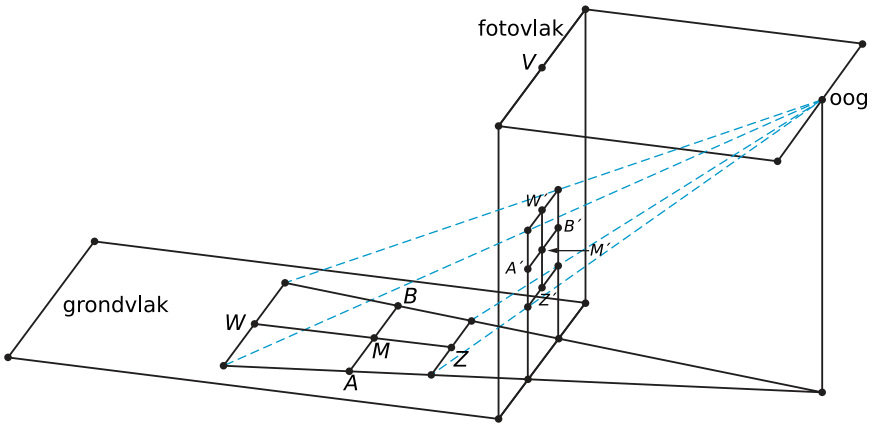
Toepassen

Jan Dibbets (Weert, 9 mei 1941) is een internationaal bekend beeldend kunstenaar. Hij is onder meer bekend geworden met zijn 'perspectivische correcties'. Daarin maakte hij met behulp van fotografie aanpassingen in de waarneming van simpele vormen, die hij tekende op vloeren, muren of uitzette in het gras of zand.

Dibbets plakte met tape een trapezium op een plankenvloer in een lege rechthoekige kamer. Van tevoren had hij bepaald welke positie hij met de camera moest innemen om het trapezium, vanwege het perspectief, waar te nemen als een vierkant.

De figuur toont een schematische weergave van deze situatie.

Figuur 4.27



Figuur 4.28

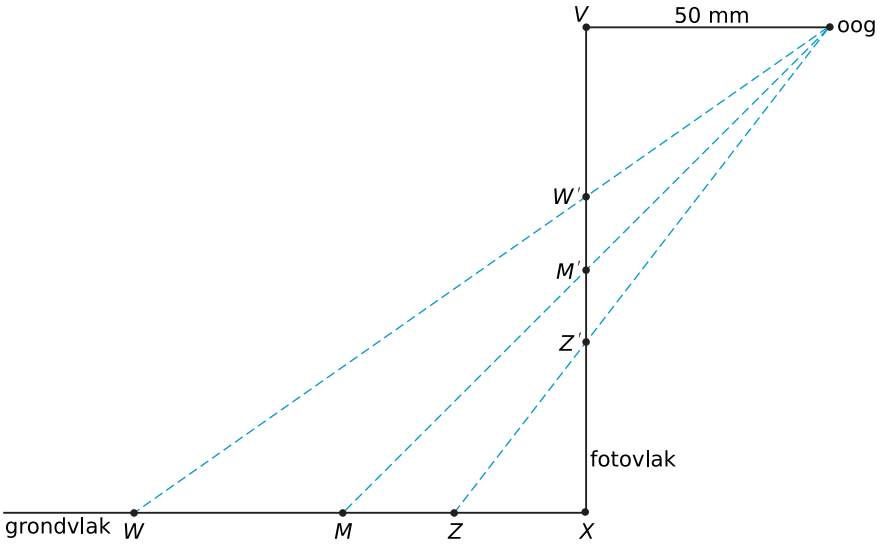
In de figuur geeft het oog het standpunt van de camera weer. Het trapezium in het grondvlak met de punten W en Z als middens van de twee evenwijdige zijden en A en B als middens van de twee andere zijden geeft een vierkant in de foto met de punten W', A', Z' en B' als middens van de zijden. V is het verdwijnpunt in het vlak van de foto.

(bron: syllabus wiskunde vwo C)

Opgave 17

Gebruik de gegevens uit **Toepassen**.

Dibbets heeft flink wat werk gehad om precies een vierkant op de foto te krijgen. Bekijk het zijaanzicht van de situatie dat op schaal is getekend.



Figuur 4.29

In de figuur is punt M' het midden van het vierkant, zoals dat op de foto is te zien. De hoogte van het vierkant op de foto, dus de lengte van $W'Z'$, is 30 millimeter. Van het verdwijnpunt V wordt een lijn loodrecht op het grondvlak getekend. Het snijpunt van deze lijn met het grondvlak is X. De afstand van het verdwijnpunt V tot het punt X is 100 millimeter en de afstand van het oog O tot het verdwijnpunt is 50 millimeter. Het vierkant ligt zodanig in het vlak van de foto dat de lengte van VW' gelijk is aan die van XZ'.

Met gelijkvormigheid en verhoudingen kun je de lengte van WZ in het grondvlak berekenen.

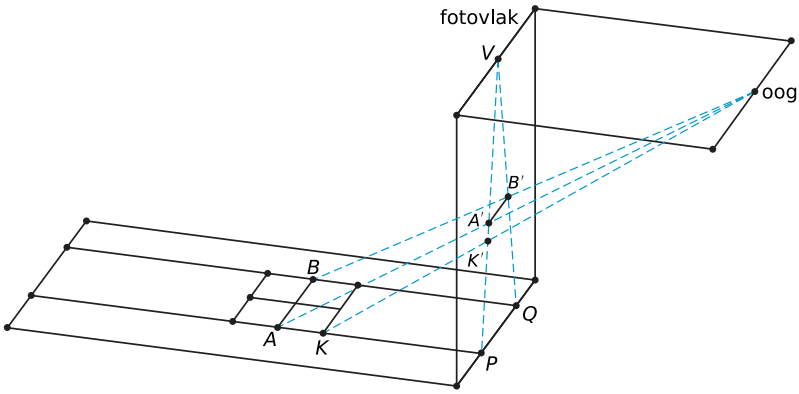
a Bereken de lengte van WZ.

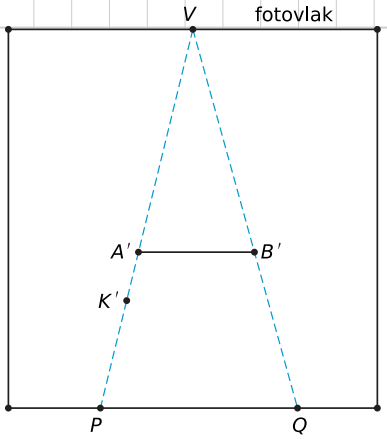
b Teken in de foto op het **werkblad** het verdwijnpunt en de horizon.

c Op welke hoogte vanaf de grond bevond zich de lens van het fototoestel ongeveer op het moment dat de foto werd gemaakt? Geef op grond van de foto uitleg hoe je aan je schatting bent gekomen.

Opgave 18

Gebruik de gegevens uit **Toepassen**.
In een voorstudie zou Dibbets geëxperimenteerd kunnen hebben met een vierkant op het grondvlak (met punten A en B op de zijden en een hoekpunt K) om te zien wat dit als resultaat op de foto geeft. Deze situatie is in de linker figuur aangegeven.





Figuur 4.30

Bekijk in de rechter figuur de punten A' en B' en K' (als beeldpunten van A, B en K) in het vlak van de foto en op de foto rechts, dit is het vlak van de foto van voren bezien. Op de foto zal het vierkant in perspectief zichtbaar zijn.

Maak de perspectieftekening van het vierkant af. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

(bron: syllabus wiskunde vwo C)

Testen

Opgave 19

Figuur 4.31

Dit erepodium staat ook op een **werkblad**.

In welk soort perspectief is dit erepodium getekend? Bepaal de horizon en het oogpunt.

Opgave 20

Bekijk de afbeelding van het erepodium in de voorgaande opgave. De kubus die de eerste plaats voorstelt is heeft ribben van 50 cm.

De bovenkant van die kubus wordt in een éénpuntsperspectieftekening afgebeeld als een symmetrisch trapezium met de onderste zijde 5 cm, de bovenste zijde 4 cm en een hoogte (de afstand tussen de onderste en de bovenste zijde) van $1{,}5$ cm.

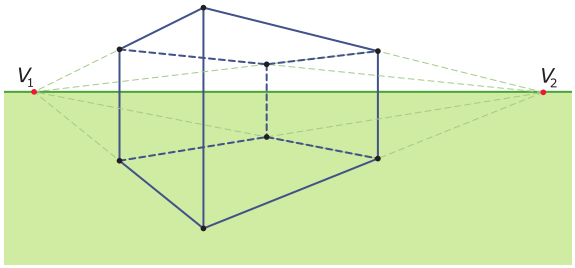
a Bereken hoe hoog het oogpunt in werkelijkheid boven het grondvlak zit.

b Leg uit waarom je met alleen deze gegevens nog niet de afstand van het tafereel tot het werkelijke erepodium kunt berekenen.

1.5 Tweepuntsperspectief

Inleiding

Je hebt gezien dat figuren in perspectief getekend beter benaderen wat je ook daadwerkelijk ziet. Tweepuntsperspectief ontstaat als je met twee ‘schuine’ richtingen te maken hebt. Dit is bijvoorbeeld het geval bij een balk waarbij lengte en breedte beide niet evenwijdig zijn met het tafereel, maar de hoogte dit wel is.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- figuren tekenen in tweepuntsperspectief en halvering en verdubbeling toepassen.

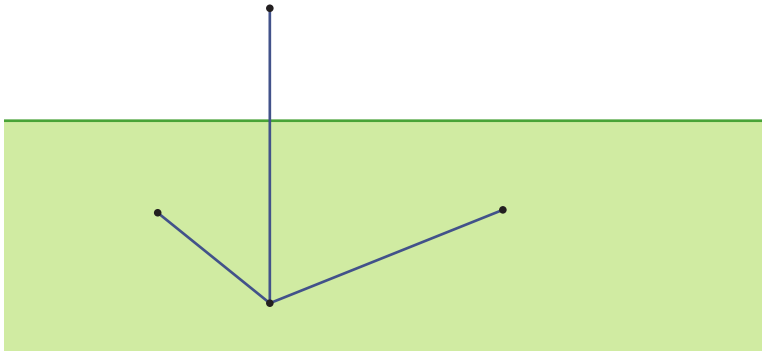
Voorkennis

- werken met ruimtelijke figuren in parallelprojectie en in perspectief;
- de begrippen verdwijnpunt, horizon, oogpunt;
- rekenen met verhoudingen en de stelling van Pythagoras.

Verkennen

Opgave V1

Deze balk heeft twee zijden die niet evenwijdig zijn met het tafereel. Teken de balk in tweepuntsperspectief.
Bedenk een manier om er een even grote balk achter tegenaan te tekenen.



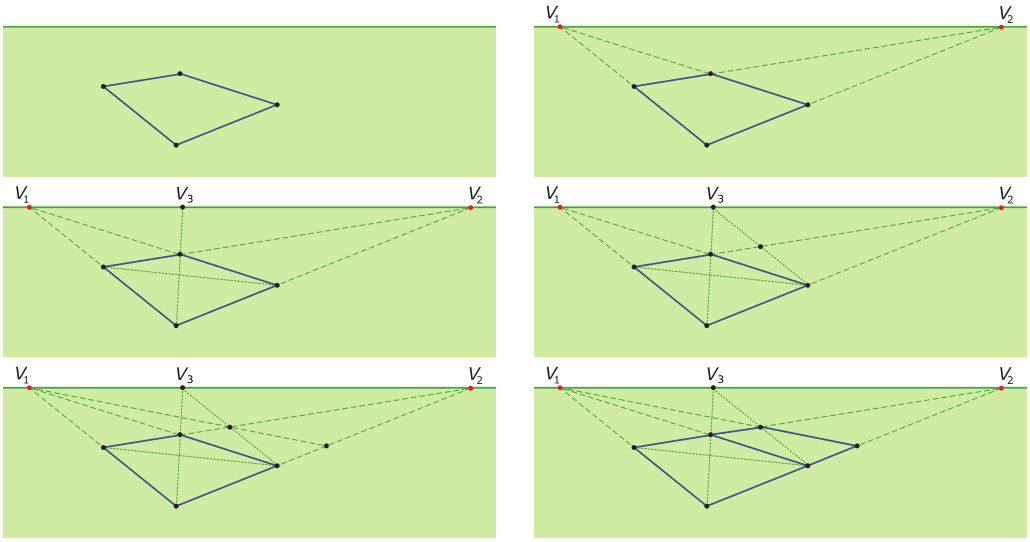
Figuur 5.2

Uitleg

Bij projecties in tweepuntsperspectief heb je in eerste instantie met twee verdwijnpunten te maken.

Bekijk het begin van een tegelvloer in tweepuntsperspectief. De eerste rechthoekige tegel en de horizon zijn gegeven. De verdwijnpunten (of vluchtpunten) ontstaan door die zijden te verlengen tot op de horizon.

Om de volgende tegels te tekenen gebruik je het gegeven dat de diagonalen van de verschillende rechthoeken ook evenwijdig zijn. Deze lijnen hebben een eigen verdwijnpunt, trek een diagonaal van de getekende tegel door tot aan de horizon. Het snijpunt is het nieuwe verdwijnpunt. Hiermee teken je nieuwe evenwijdige diagonalen. En daarmee kun je de rest van de tegelvloer construeren.



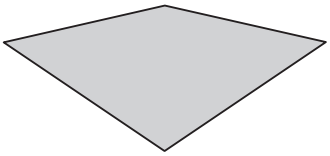
Figuur 5.3

Opgave 1

Bekijk het vierkant in tweepuntsperspectief.
De figuur staat ook op het **werkblad**.

a Verdeel dit vierkant in zestien kleinere vierkanten door gebruik te maken van diagonalen.

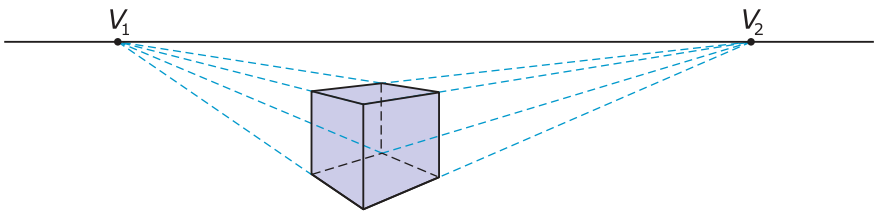
b Leg uit waarom een verdeling in negen tegels op deze manier niet mogelijk is.



Figuur 5.4

Opgave 2

Bekijk de figuur. Deze staat ook op het **werkblad**.
Verhoudingen van de lengte van lijnstukken in 3D veranderen niet als de lijnstukken evenwijdig met het tafereel liggen. Maak van deze eigenschap gebruik om boven op deze balk nog eenzelfde balk te tekenen.

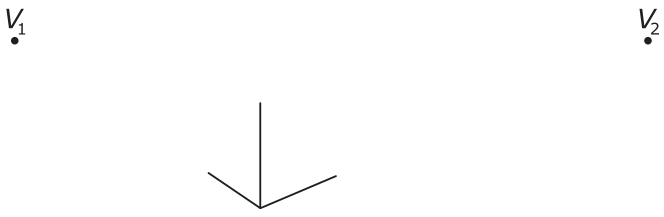


Figuur 5.5

Opgave 3

Bekijk de figuur. Deze staat ook op het **werkblad**.

Er zijn drie ribben van een balk in tweepuntsperspectief getekend. Ook zijn de bijbehorende verdwijnpunten getekend.



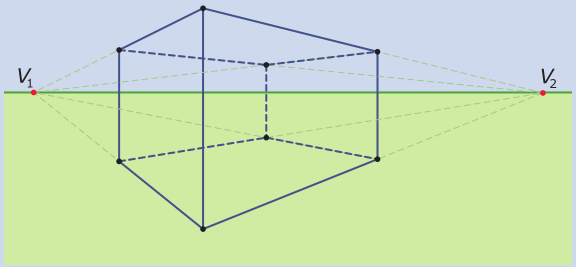
Figuur 5.6

a Maak de balk af. Maak gestreepte lijnstukjes van de ribben die niet zichtbaar zijn.

b Leg uit waarom de plaats van het oogpunt op de horizon niet gemakkelijk is te bepalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 5.7

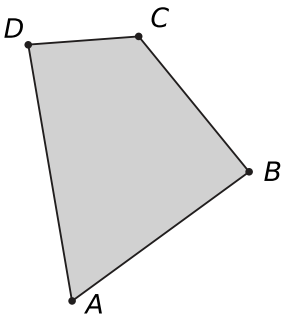
Bij **tweepuntsperspectief** ga je er van uit dat verticale lijnen loodrecht op het grondvlak staan en dus evenwijdig zijn aan het tafereel. De andere twee richtingen echter niet. Er zijn daarom in eerste instantie twee verdwijnpunten (vluchtpunten). Elke groep evenwijdige lijnen heeft in tweepuntsperspectief echter een eigen verdwijnpunt als ze niet evenwijdig zijn met het tafereel.

Bij het tekenen in tweepuntsperspectief blijven rechte lijnen ook in de tekening recht.
Evenwijdige lijnen lopen naar een gezamenlijk verdwijnpunt.
Verhoudingen van de lengte van lijnstukken in 3D veranderen niet als de lijnstukken evenwijdig aan het tafereel liggen.

In tweepuntsperspectief is het oogpunt alleen te bepalen als je een grondlijn evenwijdig aan het tafereel hebt met daarop een andere grondlijn die er in werkelijkheid loodrecht op staat. Het snijpunt van die tweede grondlijn met de horizon is het oogpunt.

Voorbeeld 1

Gegeven is een vierkante tegel $ABCD$ die in tweepuntsperspectief is getekend.
Breid de figuur uit tot een 2×2 tegelvloer.



Figuur 5.8

Antwoord

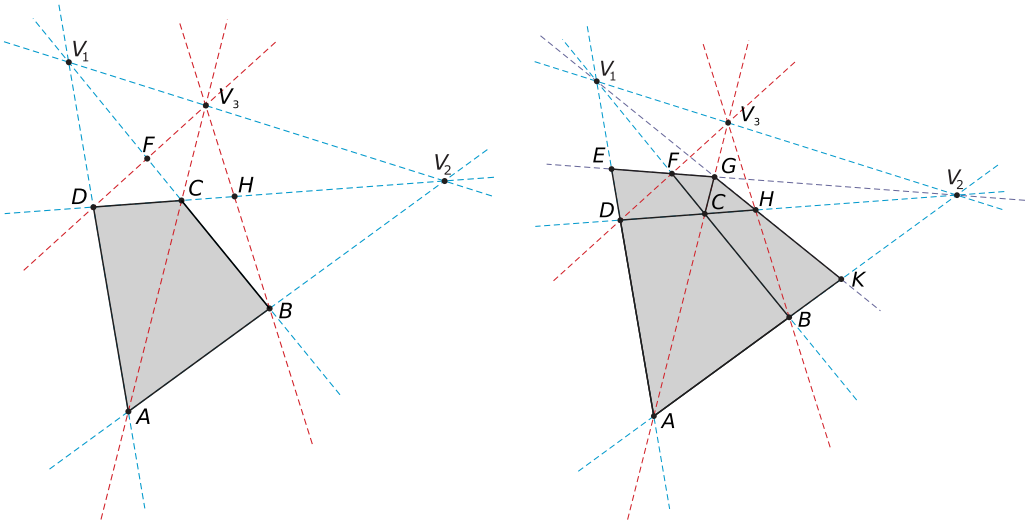
Bepaal eerst de plaats van de verdwijnpunten V_1 en V_2 door de zijden van het vierkant te verlengen.

Teken vervolgens de horizon door V_1 en V_2.

Verleng diagonaal AC, het snijpunt van deze lijn met de horizon is verdwijnpunt V_3.

De diagonalen van de andere vierkanten die evenwijdig zijn met AC gaan ook door V_3. Verbind daarom B en D met V_3, deze snijden het verlengde van DC en BC in respectievelijk H en F en dat zijn hoekpunten van de nieuwe vierkanten.

Maak vervolgens de tegelvloer af.



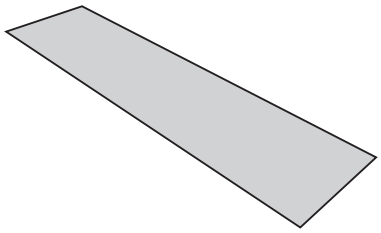
Figuur 5.9

Opgave 4

De figuur uit **Voorbeeld 1** staat ook op dit **werkblad**.
Maak de tegelvloer zelf af.

Voorbeeld 2

Bekijk de vierhoek. De figuur is een perspectieftekening van een rij van vier vierkante tegels. Geef de vier tegels binnen de vierhoek aan.



Figuur 5.10

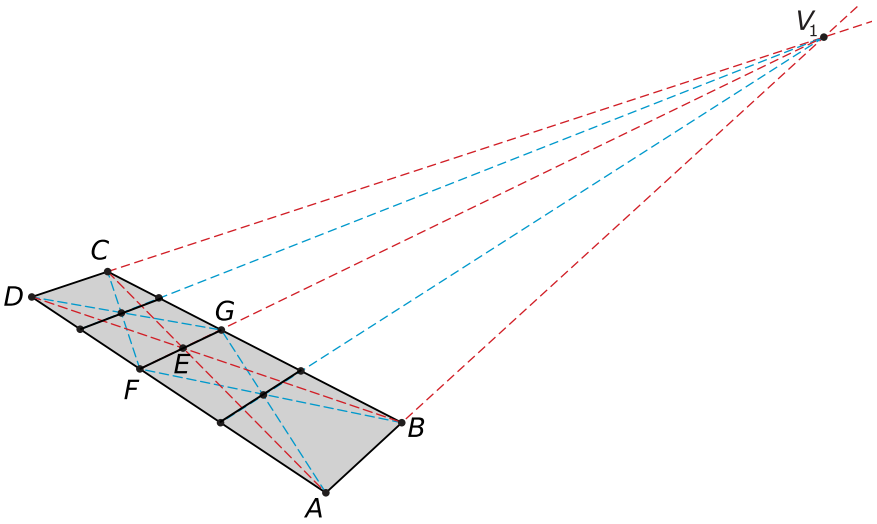
Antwoord

Bepaal eerst de plaats van verdwijnpunt V_1.

Gebruik vervolgens steeds de diagonaalmethode om de vierhoek in twee gelijke delen te verdelen.

De lijn FG gaat door het snijpunt van de diagonalen AC en BD en door V_1.

Verdeel vervolgens vierkant $FGCD$ via de diagonaalmethode waardoor weer twee vierkanten ontstaan.



Figuur 5.11

Opgave 5

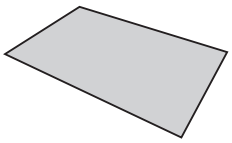
Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Is het ook mogelijk om via deze diagonaalmethode de vierhoek op te delen in twee rijen van ieder acht vierkante tegels? Licht je antwoord toe.

b Geldt dat ook bij twee rijen van ieder tien vierkante tegels? Licht je antwoord toe.

Opgave 6

Bekijk de vierhoek. Deze staat ook op het **werkblad**. De figuur is een perspectieftekening van 2×2 vierkante tegels. Geef de vier tegels binnen de vierhoek aan.

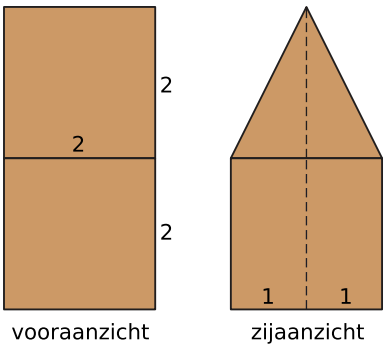


Figuur 5.12

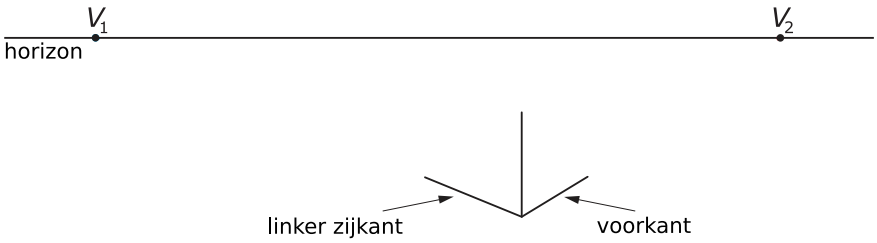
Voorbeeld 3

Bekijk de figuur van een vooraanzicht en een zijaanzicht van een blokkenhuisje.

Er is een begin gemaakt met de tekening van een tweepuntsperspectieftekening van het huisje. Maak de perspectieftekening af.



Figuur 5.13



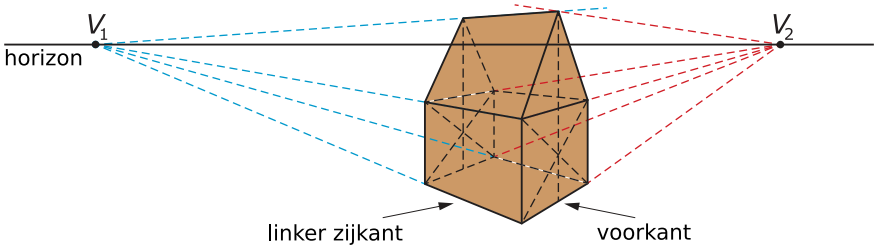
Figuur 5.14

Antwoord

Teken alle ribben van de begane grond en alle zijwanden.

Bedenk dat de nok van het dak boven het midden van de voorkant ligt en teken dat midden met behulp van diagonalen.

Teken het bovenste punt van de voorkant van het dak. Bedenk daarbij dat de verticale gestippelde lijnstukjes op de voorkant ook in deze figuur even lang zijn.



Figuur 5.15

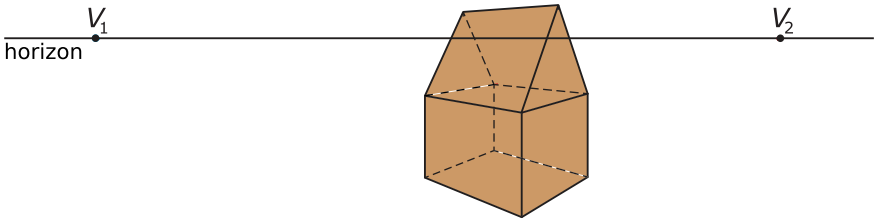
Opgave 7

Maak zelf de tekening uit **Voorbeeld 3** af. Gebruik dit **werkblad**.

Opgave 8

Bekijk de figuur. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

Er wordt aan de rechter zijkant een soortgelijk huis gebouwd. Teken het grondvlak van dat huis.

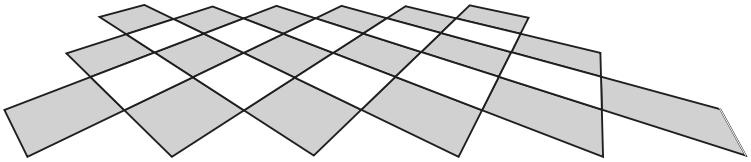


Figuur 5.16

Verwerken

Opgave 9

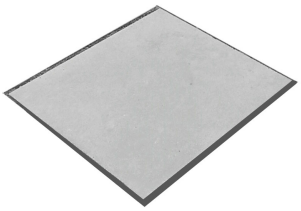
Bekijk de tegelvloer met vierkante tegels in tweepuntsperspectief.
Deze figuur staat ook op het **werkblad**.
Teken de verdwijnpunten en de horizon.



Figuur 5.17

Opgave 10

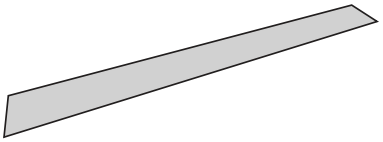
Bekijk de foto in tweepuntsperspectief van een deel van een tegelvloer met vierkante tegels. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.
Breid de tegelvloer uit tot 2×2 tegels.



Figuur 5.18

Opgave 11

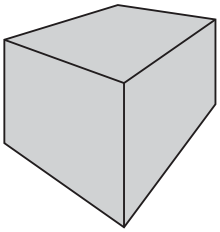
Bekijk de vierhoek. De figuur is een perspectieftekening van een rij van vier vierkante tegels, achter elkaar. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.
Geef de vier tegels binnen de vierhoek aan.



Figuur 5.19

Opgave 12

De in tweepuntsperspectief getekende balk bestaat in werkelijkheid uit acht gelijkvormige kleinere balkjes. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.
Maak de balkjes aan de buitenkant van de balk zichtbaar. Licht je werkwijze toe.



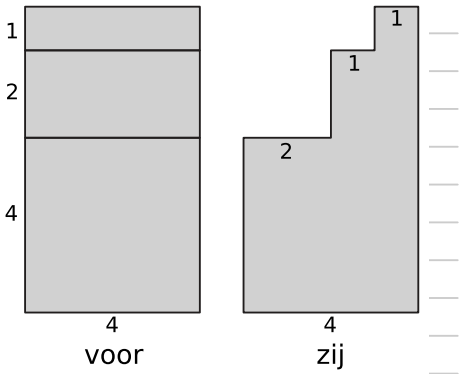
Figuur 5.20

Opgave 13

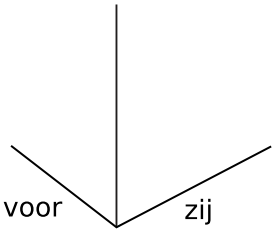
De figuur toont de voor- en zijaanzichten van een blok.

Er is een begin gemaakt met een perspectieftekening. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

Maak de figuur af. Maak de zichtbare (delen van de) ribben van het blok extra donker.



Figuur 5.21



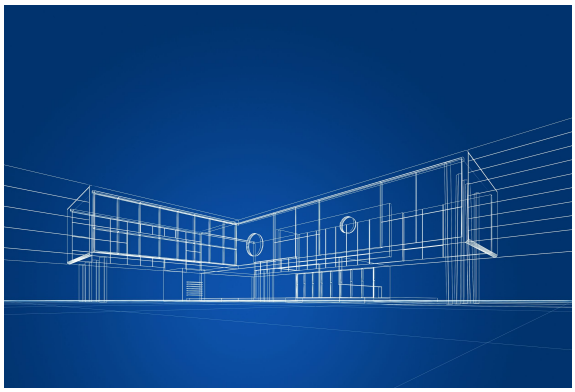
Figuur 5.22

Opgave 14

Een architect heeft een schets van een gebouw gemaakt. De schets is in tweepuntsperspectief getekend. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

Het gebouw bestaat uit twee hoofddelen die onder een rechte hoek ten opzichte van elkaar staan. Onder het gebouw kan worden gelopen. Het gebouw zelf bestaat uit twee lagen.

De opdrachtgever heeft het idee om later nog een laag op het gebouw te plaatsen.



Figuur 5.23

a Breid de figuur uit met nog een laag. Licht je werkwijze toe.

b Op welke hoogte ligt het oog(punt)?

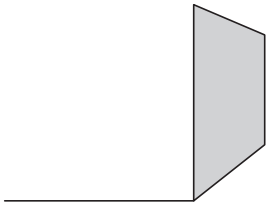
c Waarom is het hier niet zonder meer mogelijk de plaats van het oogpunt op de horizon de bepalen?

Toepassen

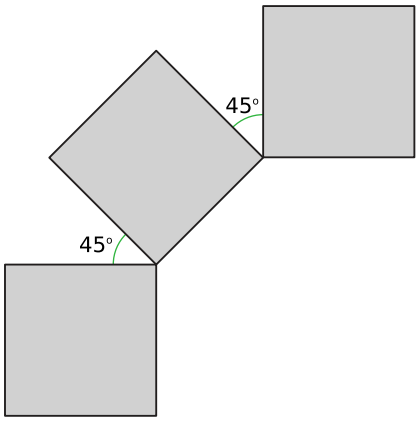
Opgave 15: Drie even grote kubussen

Het bovenaanzicht van drie even grote kubussen laat zien hoe de kubussen onder een hoek van $45°$ ten opzichte van elkaar staan. Ze staan allemaal op dezelfde hoogte.

In de figuur is een begin gemaakt met het tekenen van een eenpuntsperspectief van de drie kubussen. Van de linkerkubus zijn de onderste ribbe aan de voorkant en de ribben van de rechterzijkant getekend. Deze figuur staat ook op het **werkblad**. Maak de tekening af.



Figuur 5.25

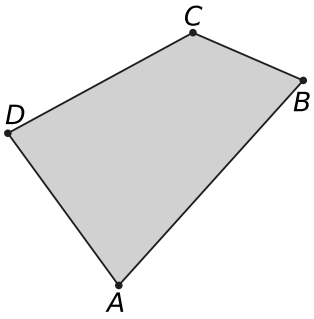


Figuur 5.24

Testen

Opgave 16

Gegeven is een vierkante tegel $ABCD$ die is getekend in tweepuntsperspectief. De figuur staat op het **werkblad**.
Breid de figuur uit tot een 3×3 tegelvloer.



Figuur 5.26

Opgave 17

Hier zie je het nieuwe OZW-gebouw van de VU Amsterdam in tweepuntsperspectief. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.

Figuur 5.27

Het gebouw bestaat uit een kubus waaruit bepaalde volumes zijn weggelaten.

a Teken de verdwijnpunten en de horizon.

b De bovenkant van het gebouw is een vierkant. Bepaal daarmee het oogpunt.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Perspectief** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

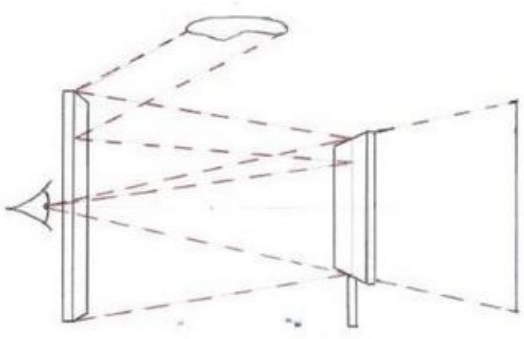
- lijnsymmetrie — puntsymmetrie — draaisymmetrie, rotatiesymmetrie — symmetriepunt, symmetrieas, symmetrievlak
- aanzicht — drieaanzicht
- perspectief — verdwijnpunt (vluchtpunt), horizon — oogvlak, oogpunt, tafereel (kijkvlak), grondvlak
- éénpuntsperspectief
- tweepuntsperspectief

Activiteitenlijst

- lijn-, punt-, draaisymmetrie herkennen — symmetriepunten, -lijnen, -vlakken herkennen — symmetrie toepassen bij berekeningen
- aanzichten tekenen van een gegeven object — uit een serie aanzichten het object herkennen
- in perspectieftekeningen verdwijnpunten, de horizon, het oogpunt herkennen — werken met verhoudingen in 3D voorstellingen van grondvlak, oogvlak en tafereel
- éénpuntsperspectieftekeningen maken — verdubbelen en halveren, werken met verhoudingen bij éénpuntsperspectief
- tweepuntsperspectieftekeningen maken — verdubbelen en halveren bij tweepuntsperspectief

Achtergronden

De Italiaanse vijftiende eeuwse beeldend kunstenaar **Filippo Brunelleschi (1377—1446)** vond het lijnperspectief uit. In Rome werden klassieke bouwwerken door hem opgemeten en vooral onderzocht op constructieve elementen en ruimtewerking. Door zijn pogingen om zijn gegevens goed op papier te krijgen ontwikkelde hij het lijnperspectief. Het werken met verdwijnpunten waar alle zichtassen samenkomen, werd door hem het eerst toegepast. Het is een goed middel om de driedimensionale ruimte op een plat oppervlak weer te geven. Deze ontdekking had een enorme uitwerking op de schilderkunst, omdat het mogelijk werd om voorwerpen en personen op een tweedimensionaal vlak af te beelden zoals ze in werkelijkheid in de driedimensionale ruimte zijn opgesteld.



Figuur 6.1 Diagram van Brunelleschi's experiment
bron: Wikipedia

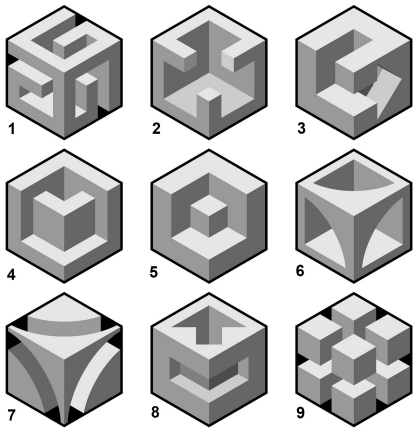
Veel kunstschilders bekwaamden zich er in en na de vijftiende eeuw in. Beroemde Hollandse schilders als **Pieter Saenredam**

(1597—1665) en ook **Johannes Vermeer (1632—1675)** waren er meesters in. André-Pierre Lamoth analyseerde enkele jaren geleden de schilderijen van Vermeer. Hij ontdekte dat Vermeer een eenvoudig lineair perspectief gebruikte, maar (als dat zo uitkwam) zich niet aan de regels voor perspectieftekenen hield.

Testen

Opgave 1

Bekijk de figuur. De vormen zijn ontstaan uit kubussen. Geef zo goed mogelijk aan of de vormen spiegelsymmetrisch, rotatiesymmetrisch en/of schuifsymmetrisch zijn.



Figuur 6.2

Opgave 2

Het glas-in-loodraam is in barokke stijl.

a Welke 2D-symmetrieën bevat het raam? Is er ook sprake van puntsymmetrie?

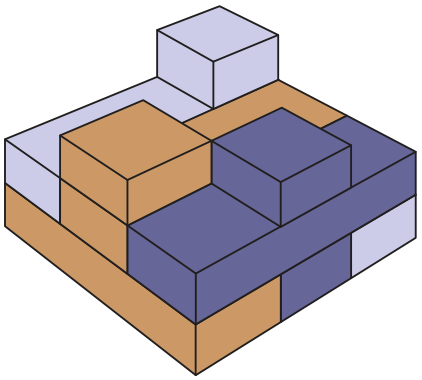
b Het raam bestaat uit een stalen frame met daarin aparte glas-in-loodramen. Aanvankelijk gaf de opdrachtgever maten door aan de kunstenaar, maar later bleek dat deze maten 30% groter moesten zijn. Bereken hoeveel procent meer de kunstenaar zal vragen voor de materiaalkosten van glas en staal.

Figuur 6.3

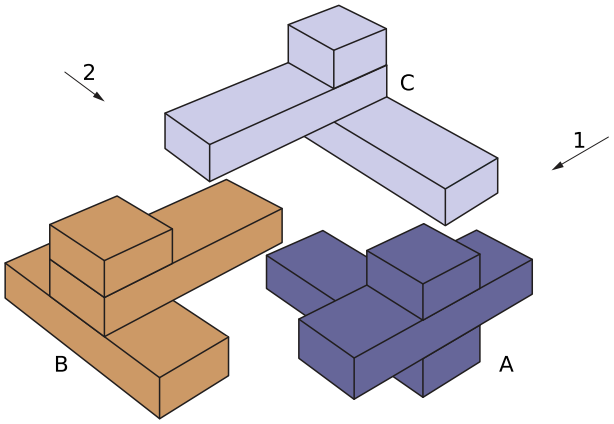
Opgave 3

De Amsterdamse architect Janjaap Ruijssenaars kwam in 2013 met een nieuw ontwerp voor in elkaar geschoven woningen. Zo'n eenheid van drie woningen ziet er in een maquette bijvoorbeeld uit zoals in de figuur is weergegeven. Elke woning heeft haar eigen kleur.

Een eenheid bevat drie woningen. Hoe ze in elkaar geschoven zijn, kun je goed zien als ze uit elkaar worden geschoven. Dat is weergegeven in de figuur.



Figuur 6.4



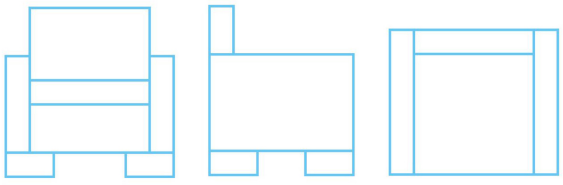
Figuur 6.5

a Teken het aanzicht van de in de figuur getekende eenheid van drie woningen als je in de richting van pijl 1 kijkt. Gebruik de letters A, B en C om de verschillende woningen aan te geven.

b Teken ook het aanzicht als je in de richting van pijl 2 kijkt.

Opgave 4

Maak uit de drie aanzichten van dit voorwerp een 3D-schets van het voorwerp.



Figuur 6.6

Opgave 5

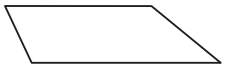
Op de foto van het wandelpad met lantaarnpalen die op gelijke afstand van elkaar staan, ontbreekt één lantaarnpaal. Hij staat namelijk rechts van de voorste lantaarnpaal op de foto.

Deze figuur staat ook op het **werkblad**. Teken een lijnstuk op de plaats van de eerste lantaarnpaal.

Figuur 6.7

Opgave 6

Een balk die twee keer zo breed als hoog is, staat op een grondvlak. Er staat een piramide op, waarvan het grondvlak dezelfde vorm heeft als de bovenkant van de balk. De top van de piramide bevindt zich boven het midden van de balk. De piramide is even hoog als de balk.



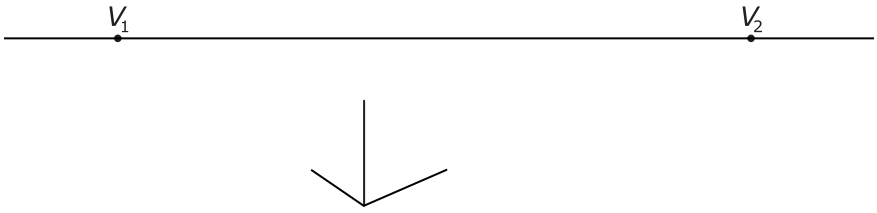
Figuur 6.8

a Het grondvlak van de balk is getekend. Deze figuur staat ook op het **werkblad**. Maak de tekening van de balk en de piramide in éénpuntsperspectief af.

b De balk heeft een breedte van 5 centimeter. Hoe hoog ligt het oog boven het grondvlak?

Opgave 7

Hier zie je het begin van een perspectieftekening van een kubus met een diagonaal evenwijdig aan de horizon. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.



Figuur 6.9

a Teken de volledige kubus.

b Teken het oogpunt.

c Teken eenzelfde kubus naast deze kubus en teken ook eenzelfde kubus er bovenop.

Opgave 8

Een fotograaf heeft een foto gemaakt toen hij precies tussen twee van de paaltjes van de afrastering stond. Deze figuur staat ook op het **werkblad**.
De camera bevond zich 180 centimeter boven de brug. De afstand tussen de paaltjes is even groot als de breedte van de brug.

Figuur 6.10

a Bepaal de breedte van de brug. Geef je antwoord afgerond op een geheel aantal decimeter.

b Bepaal de hoogte van de paaltjes van de afrastering.

c Bepaal de afstand die de fotograaf nog kon lopen voor hij in het water zou vallen. Geef je antwoord afgerond op een geheel aantal meter.

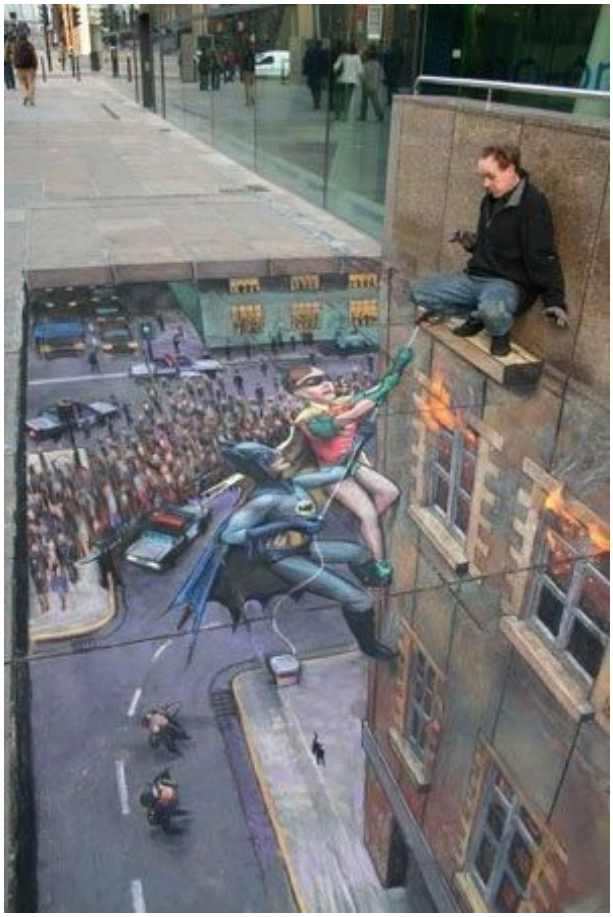
Toepassen

Opgave 9: Anamorfosen

Een **anamorfose** is een vertekende afbeelding, die er slechts gezien vanuit een bepaalde hoek of onder bepaalde optische voorwaarden realistisch uitziet. (Bron: Wikipedia)

Diverse kunstenaars hebben anamorfosen gemaakt. Bekend zijn de stoepkrijttekeningen van **Julian Beever**. Je ziet er hiernaast eentje. Soms herken je nauwelijks wat er wordt afgebeeld, tot je onder de goede hoek kijkt, of het spiegelbeeld op een metalen cilinder ziet, of...

Met enige inspanning kun je zelf wel anamorfosen maken door eerst een figuur op een rechthoekig rooster te tekenen en dan het rooster te vervormen. Een leuke bezigheid...



Figuur 6.11

a Leg uit waarom de afgebeelde figuur die is gemaakt door Julian Beever een anamorfose is.

b Zoek zelf nog een paar leuke voorbeelden van anamorfosen. Zoek ook echt verschillende technieken.

c Met behulp van de vervormde roosters op het **werkblad** kun je zelf eenvoudige anamorfosen maken. Laat dat zien.

Opgave 10: Driepuntsperspectief

Als je naar een gebouw kijkt dat veel groter is dan jezelf bent, heb je natuurlijk in alle drie de hoofdrichtingen te maken met verdwijnpunten. Want ook naar boven toe worden de afstanden die verder van je af liggen op het oog kleiner. Deze foto laat dat goed zien. Hij staat ook op het **werkblad**. Je spreekt dan wel van driepuntsperspectief. In dit geval van 'kikvorsperspectief'.

Figuur 6.12

a Teken de drie verdwijnpunten van de hoofdrichtingen in deze figuur.

b Teken twee even grote kubussen op elkaar in kikvorsperspectief.

c Waarom liggen nu niet alle verdwijnpunten op één horizon? Hoe staat het tafereel?

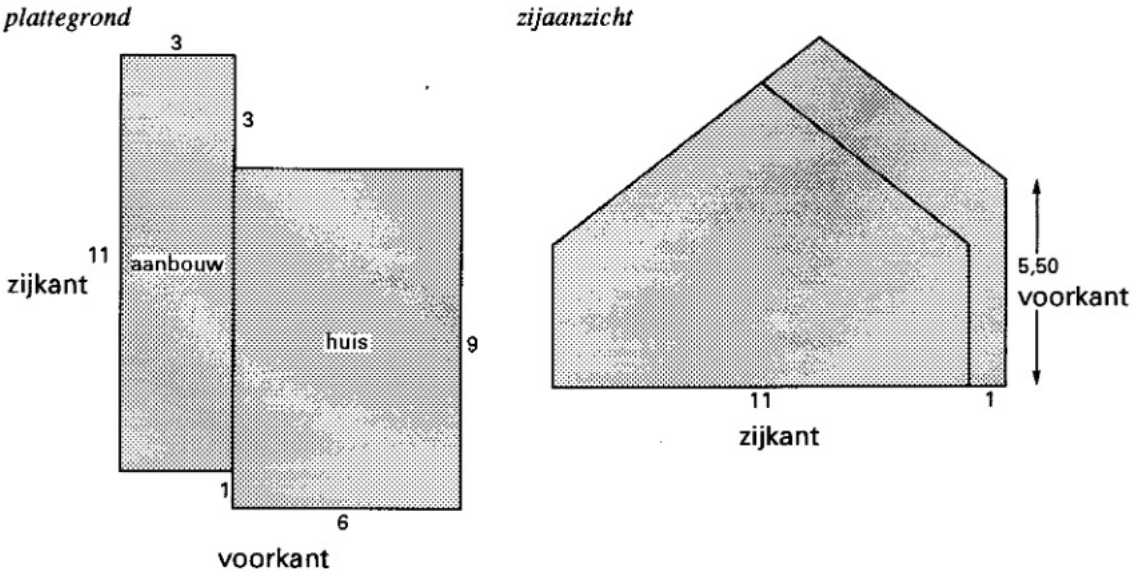
Je kunt natuurlijk ook veel groter zijn dan de voorwerpen waar je naar kijkt. In dat geval is er sprake van 'vogelvluchtperspectief'.

d Teken twee kubussen op elkaar in vogelvluchtperspectief.

Examen

Opgave 11: Huis met aanbouw

Men wil een huis uitbreiden met een aanbouw aan één van de zijkanten van dat huis. In de figuur zie je links een plattegrond van het huis met de aanbouw, waarin de maten van de muren zijn vermeld in meters. De hoogte van de voorkant van het huis is evenals de hoogte van de achterkant $5{,}50$ m.
Aan de voorkant van het huis springt de aanbouw 1 meter in en aan de achterkant steekt de aanbouw 3 m uit.
Aan de achterkant liggen het dak van het huis en het dak van de aanbouw in één vlak. De hoogte van de voorkant van de aanbouw is gelijk aan de hoogte van de achterkant van de aanbouw. De helling van alle daken bedraagt $36{,}9°$. In de rechter figuur is niet op schaal een zijaanzicht getekend.



Figuur 6.13

a Uit welke gegevens volgt dat het hoogste punt van het dak van het huis (de nok) zich midden boven het huis zonder aanbouw bevindt?

Op het **werkblad** is een gedeelte van een perspectieftekening van het huis met aanbouw getekend.

b Maak deze perspectieftekening af.

(naar: examen havo wiskunde B in 1992, eerste tijdvak)

2

Toepassen van formules

2.1 Rekenen met variabelen 72
2.2 Formules combineren 84
2.3 Vergelijkingen en ongelijkheden 91
2.4 Evenredigheid 101
2.5 Lineair en exponentieel 114
2.6 Veranderingen 128
2.7 Totaalbeeld 143

2.1 Rekenen met variabelen

Inleiding

Dit is niet voor niks het laatste onderwerp in het domein ‘Functies en grafieken’. Het is de bedoeling om nog even het werken met variabelen en formules op een rijtje te zetten en alle losse eindjes voorbij te laten komen. De kennis van alle voorgaande onderwerpen in dit domein wordt bekend verondersteld en voornamelijk herhaald. Eerst maar even een leuk probleempje over fietsen.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- niks nieuws, zoek de benodigde kennis waar nodig op in voorgaande onderwerpen.

Voorkennis

- rekenen met breuken en variabelen;
- rekenen met machten, wortels en variabelen.

Verkennen

Opgave V1

Iemand fietst met de wind mee met een snelheid van 20 km/h. Op de terugweg heeft ze wind tegen. Ze fietst dezelfde afstand terug met een snelheid van slechts 12 km/h.

a Waarom hangt haar gemiddelde snelheid niet af van de afstand die ze fietst?

b Hoe groot is haar gemiddelde snelheid over de hele route (heen en terug)?

Uitleg 1

Iemand fietst met de wind mee met een snelheid van 20 km/h. Op de terugweg heeft ze wind tegen. Ze fietst dezelfde afstand terug met een snelheid van slechts 12 km/h.
Hoe groot is haar gemiddelde snelheid over de hele route (heen en terug)?

Figuur 1.2

Noem de afstand van een enkele reis a.
De afstand voor de heen- en terugweg is dan $2a$.

De gemiddelde snelheid over de hele route is dan $\frac{2a}{\frac{a}{20}+\frac{a}{12}}$.

Deze uitdrukking kun je zo herleiden:

$$\frac{2a}{\frac{a}{20}+\frac{a}{12}} = \frac{2a}{\frac{3a}{60}+\frac{5a}{60}} = \frac{2a}{\frac{8a}{60}} = \frac{120a}{60} \Big/ \frac{8a}{60} = \frac{120a}{8a} = \frac{120}{8} = 15$$

De gemiddelde snelheid is 15 km/h.

Je gebruikt hierbij de bekende rekenregels voor breuken.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.

a Waarom is de totale reistijd gelijk aan $\frac{a}{20}+\frac{a}{12}$?

b Waarom is het fout om de gemiddelde snelheid te berekenen met: $\frac{20+12}{2}=16$ km/h?

Opgave 2

Iemand rijdt met de auto naar zijn werk met een snelheid van 100 km/h.
Terug rijdt hij dezelfde route met een snelheid van 80 km/h.
Hoeveel bedraagt de gemiddelde snelheid over deze route heen en terug?

Uitleg 2

Voor het berekenen van de lichaamsoppervlakte bij kinderen worden vooral de volgende twee formules gebruikt:

$S_{\text{Mosteller}}=\sqrt{\frac{1}{3600}\cdot L\cdot M}$

$S_{\text{Haycock}}=0{,}024265\cdot L^{0{,}3964}\cdot M^{0{,}5378}$

In deze formules is S de lichaamsoppervlakte in m^2, L de lichaamslengte in centimeter en M het lichaamsgewicht in kilogram.

Voor een kind met een lengte van 1 meter ($L=100$) blijken de grafieken van de formules van Mosteller en Haycock bijna samen te vallen. Behalve bij $M=0$ kilogram is er voor $L=100$ nóg een lichaamsgewicht waarbij de formule van Mosteller en de formule van Haycock precies dezelfde lichaamsoppervlakte geven. Dit lichaamsgewicht kun je algebraïsch berekenen.

Om de formules goed met elkaar te kunnen vergelijken, is het handig om de formule van Mosteller in dezelfde vorm te schrijven als de formule van Haycock:

$S_{\text{Mosteller}}=\sqrt{\frac{1}{3600}\cdot L\cdot M}=\sqrt{\frac{1}{3600}}\cdot\sqrt{L}\cdot\sqrt{M}=\frac{1}{60}\cdot L^{0{,}5}\cdot M^{0{,}5}$

$L=100$ invullen in beide formules geeft:

$S_{\text{Mosteller}}=\frac{1}{60}\cdot 100^{0{,}5}\cdot M^{0{,}5}=\frac{1}{6}\cdot M^{0{,}5}$

$S_{\text{Haycock}}=0{,}024265\cdot 100^{0{,}3964}\cdot M^{0{,}5378}\approx 0{,}15058$

Hieruit volgt de vergelijking: $\frac{1}{6}\cdot M^{0{,}5}=0{,}15058\cdot M^{0{,}5378}$.

Met de rekenregels voor machten vind je het gevraagde lichaamsgewicht van ongeveer 14,7 kilogram.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

a Los zelf de vergelijking $\frac{1}{6}\cdot M^{0{,}5}=0{,}15058\cdot M^{0{,}5378}$ op met behulp van de rekenregels voor machten.

b Welke rekenregel voor wortels wordt gebruikt bij het herleiden van de formule van Mosteller naar $S_{\text{Mosteller}} = \frac{1}{60} \cdot L^{0,5} \cdot M^{0,5}$?

c Noem nog minimaal één andere rekenregel voor wortels.

Opgave 4

Los algebraïsch op: $\sqrt{\frac{1}{20} \cdot 4 \cdot M} = 0{,}0341 \cdot 4^{0,272} \cdot M^{0,613}$.
Rond af op één decimaal.

Opgave 5

Schrijf de formule $y = \sqrt{\frac{1}{20}} \cdot \sqrt{12{,}8L} \cdot \sqrt{100M}$ in de vorm: $y = c \cdot L^{0,5} \cdot M^{0,5}$.
Bereken de waarde van c.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het rekenen met variabelen noem je **algebra**.
Je gebruikt dezelfde regels als bij het rekenen met getallen, bijvoorbeeld:
$2a + 5a = 7a$ (net zoals $2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 7 \cdot 3$)
$a \cdot a = a^2$ (net zoals $3 \cdot 3 = 3^2$)

Gelijksoortige termen kun je optellen en aftrekken. Daarmee kun je uitdrukkingen 'korter' schrijven: $2a+3a = a+a+a+a+a = 5a$.

Maar $3a + 6b$ kan niet korter.

Bij het **rekenen met breuken** gebruik je

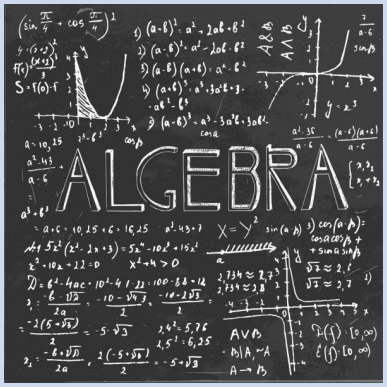
- bij optellen en aftrekken (de breuken eerst gelijknamig maken):
  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
- bij vermenigvuldigen:
  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$
- bij delen (de breuken eerst gelijknamig maken):
  $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \Big/ \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad}{bc}$

Breuken kun je vereenvoudigen door de teller en noemer door hetzelfde te delen.
Er is één maar: door nul delen heeft geen betekenis.

Bij het herleiden van vormen met wortels gebruik je

eigenschappen van wortels	
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Tabel 1.1



Figuur 1.3

Bij het herleiden van vormen met machten gebruik je

eigenschappen van machten		
$x^0 = 1$	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ mits $x \neq 0$	$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$ mits $x \geq 0$ en $a > 0$
$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$	$x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$ mits $x \neq 0$	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Tabel 1.2

Voorbeeld 1

Gebruik de rekenregels voor breuken, machten en wortels en herleid.

- $\frac{5}{x} - \frac{3}{2x}$
- $\frac{4b}{20} \Big/ \frac{b}{12}$
- $\left(x^3\right)^5 + 3x^2 \cdot x^6$
- $\frac{x^{20}}{x^6}$
- $\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$
- $\frac{\sqrt{3a} \cdot \sqrt{4b}}{\sqrt{6}}$

Antwoord

- $\frac{5}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{10}{2x} - \frac{3}{2x} = \frac{7}{2x}$
- $\frac{4b}{20} \Big/ \frac{b}{12} = \frac{12b}{60} \Big/ \frac{5b}{60} = \frac{12b}{5b} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$
- $\left(x^3\right)^5 + 3x^5 \cdot x^{10} = x^{3 \cdot 5} + 3x^{5+10} = x^{15} + 3x^{15} = 4x^{15}$
- $\frac{x^{20}}{x^6} = x^{20-6} = x^{14}$
- $\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 3\sqrt{x}$
- $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{4b} = \sqrt{3a \cdot 4b} = \sqrt{12ab}$
- $\frac{\sqrt{3a} \cdot \sqrt{4b}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3a \cdot 4b}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12ab}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2ab}$

Opgave 6

Herleid.

a $\frac{6}{x} + \frac{7}{3x}$

b $\frac{3a}{6} \cdot \frac{a}{3}$

c $\frac{x}{4} - \frac{4x}{3}$

d $\frac{2b}{10} \Big/ \frac{b}{6}$

Opgave 7

Herleid.

a $x^{10} \cdot x^3$

b $x^3 \cdot y^3$

c $(a^2)^7$

d $\frac{x^{25}}{x^9}$

e x^0

f $\frac{1}{a^6}$

Opgave 8

Herleid.

a $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{2c}$

b $3\sqrt{a} + 5\sqrt{a}$

c $\frac{\sqrt{12b}}{\sqrt{2b}}$

d $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{5b} \cdot \sqrt{10}$

Voorbeeld 2

Justitie onderscheidt drie soorten wegen, elk met een eigen boetesysteem voor snelheidsovertredingen: buiten de bebouwde kom, autosnelwegen en binnen de bebouwde kom.
Buiten de bebouwde kom geldt voor auto's een maximumsnelheid van 80 km/h. Voor de boetebedragen bij snelheidsovertredingen buiten de bebouwde kom geldt (bij benadering) de formule:
$B_{\text{buiten}} = 16{,}527 \cdot 1{,}092^s$
Hierin is s de overschrijding van de maximumsnelheid in km/h en B_{buiten} het (onafgeronde) boetebedrag in euro. Het uiteindelijke boetebedrag wordt afgerond op een geheel aantal euro.

Figuur 1.4

Bijvoorbeeld: bij een snelheid $v = 90$ km/h hoort een snelheidsoverschrijding $s = 10$ km/h. Het bijbehorende boetebedrag in euro is $16{,}527 \cdot 1{,}092^{10} \approx 39{,}83$ en dit wordt afgerond op € 40,00.

Verkeersonderzoekers gebruiken liever een formule waarin niet de snelheidsoverschrijding s voorkomt, maar de werkelijke snelheid v in km/h.
Zo'n formule is van de vorm: $B_{\text{buiten}} = a \cdot 1{,}092^v$.

- Bereken de constante a afgerond op vier decimalen.

Op autosnelwegen geldt voor auto's een maximumsnelheid van 120 km/h. Voor de boetebedragen bij snelheidsoverschrijdingen op autosnelwegen geldt (bij benadering) de formule:

$B_{\text{autosnelweg}} = 11{,}75 + 0{,}6874 \cdot s^{1{,}616}$
Hierin is s de overschrijding van de maximumsnelheid in km/h en $B_{\text{autosnelweg}}$ het onafgeronde boetebedrag in euro. Het uiteindelijke boetebedrag wordt afgerond op een geheel aantal euro.

- Bereken algebraïsch met welke snelheid je moet zijn aangehouden als de boete € 198,00 bedraagt.

Antwoord

- $s = v - 80$ geeft:
  $B_{\text{buiten}} = 16{,}527 \cdot 1{,}092^{v-80} = 16{,}527 \cdot 1{,}092^{-80} \cdot 1{,}092^{v} \approx 0{,}0145 \cdot 1{,}092^{v}$
  Dus $a \approx 0{,}0145$.
- Los op: $11{,}75 + 0{,}6874 \cdot s^{1{,}616} = 198$.

$$
\begin{aligned}
11{,}75 + 0{,}6874 \cdot s^{1{,}616} &= 198 && \text{beide zijden } -11{,}75 \\
0{,}6874 \cdot s^{1{,}616} &= 186{,}25 && \text{beide zijden } /0{,}6874 \\
s^{1{,}616} &= \frac{186{,}25}{0{,}6874} && \text{beide zijden tot de macht } \tfrac{1}{1{,}616} \\
s &= \left(\frac{186{,}25}{0{,}6874}\right)^{\frac{1}{1{,}616}} && \text{oplossing benaderen} \\
s &\approx 32
\end{aligned}
$$

De gevraagde snelheid is $120 + 32 = 152$ km/h.

Opgave 9

Binnen de bebouwde kom geldt voor auto's een maximumsnelheid van 50 km/h.
Voor de boetebedragen bij snelheidsovertredingen binnen de bebouwde kom geldt (bij benadering) de formule:
$B_{\text{binnen}} = 3{,}018 \cdot s^{1{,}212}$
Hierin is s de overschrijding van de maximumsnelheid in km/h en B_{binnen} het onafgeronde boetebedrag in euro. Het uiteindelijke boetebedrag wordt afgerond op een geheel aantal euro.

Bereken algebraïsch met welke snelheid je moet zijn aangehouden, als de boete € 94,00 bedraagt.

(naar: examen wiskunde C vwo in 2011, tweede tijdvak)

Opgave 10

Het boetebedrag op de autosnelweg (€) hangt ook af van de grootte van de overschrijding van de maximumsnelheid (km/h). Bekijk de tabel.

snelheidsoverschrijding(km/h)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
boetebedrag (€)	16	20	24	27	32	37	40	45	51	56	62

Tabel 1.3

Omdat bij hogere snelheden het risico van een ongeval steeds meer toeneemt, vertonen de boetebedragen in de tabel een toenemende stijging. Althans, zo lijkt het op het eerste gezicht, maar de stijging van de boetebedragen is soms afnemend.
Een voorbeeld: als de overschrijding toeneemt van 5 km/h naar 6 km/h, neemt het boetebedrag met € 4,00 toe, terwijl van 6 km/h naar 7 km/h de toename € 3,00 is. Dat komt doordat de boetebedragen eerst met een formule zijn berekend en vervolgens zijn afgerond op een geheel aantal euro.
Voor de boetebedragen bij snelheidsovertredingen binnen de bebouwde kom geldt (bij benadering) de formule:
$B_{\text{binnen}} = 3{,}018 \cdot s^{1{,}212}$

Hierin is s de overschrijding van de maximumsnelheid in km/h en B_{binnen} het onafgeronde boetebedrag in euro. Het uiteindelijke boetebedrag wordt afgerond op een geheel aantal euro.

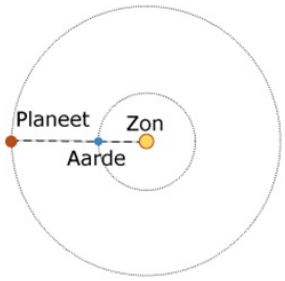
Toon aan dat zich bij deze formule ook het verschijnsel voordoet dat de stijging van de afgeronde boetebedragen soms afnemend is.

(naar: examen wiskunde C vwo in 2011, tweede tijdvak)

Voorbeeld 3

Wanneer een planeet vanuit de zon gezien op één lijn met de aarde ligt, dan staat deze planeet in oppositie. Oppositie komt bij elke planeet met vaste tussenpozen voor. De tijd T (dag) tussen twee opposities hangt af van de omlooptijd van de aarde T_A (dag) om de zon en de omlooptijd van de planeet T_P (dag) om de zon.

Er geldt: $\frac{1}{T_P} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T}$.



Figuur 1.5

- Hoe verder een planeet van de zon af staat, hoe groter T_P. Betekent dit dat dan ook T groter wordt?
- Tussen twee opposities van Jupiter zitten $398{,}6$ dagen. De omlooptijd van de aarde is $365{,}25$ dagen. Bereken de omlooptijd van Jupiter in dagen.
- De omlooptijd van Mars is $1{,}88$ jaar. Bereken de tijd tussen twee opposities in dagen.

Antwoord

- Nee, als T_P groter wordt, dan wordt $\frac{1}{T_P}$ kleiner. Er moet een groter getal van $\frac{1}{T_A}$ worden afgetrokken, zodat $\frac{1}{T}$ groter moet worden en T juist kleiner.
- $T_A = 365{,}25$ dagen.
  $\frac{1}{T_P} = \frac{1}{365{,}25} - \frac{1}{398{,}6} \approx 0{,}000229$ geeft $T_P \approx \frac{1}{0{,}000229} \approx 4365$ dagen.
- $1{,}88$ jaar is $686{,}2$ dagen.
  $\frac{1}{T} = \frac{1}{365{,}25} - \frac{1}{686{,}2} \approx 0{,}00128$ geeft $T \approx \frac{1}{0{,}00128} \approx 781$ dagen.

Opgave 11

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.

a Hoe dichter een planeet bij de zon staat, hoe kleiner T_P. Betekent dit dat dan ook T kleiner wordt?

b Tussen twee opposities van Uranus zitten $369{,}65$ dagen. De omlooptijd van de aarde is $365{,}25$ dagen. Bereken de omlooptijd van Uranus in dagen.

c De omlooptijd van Neptunus is 164 jaar. Bereken de tijd tussen twee opposities in dagen.

Opgave 12

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.
Alle planeten van ons zonnestelsel voldoen aan de wet van Kepler die zegt dat $T_P^2 = 3{,}95 \cdot 10^{-20} \cdot r^3$ waarin r de gemiddelde afstand van de planeet tot de zon in kilometer is. Voor Saturnus geldt $r \approx 1{,}43 \cdot 10^9$ kilometer.
Bereken de tijd tussen twee opposities van Saturnus in dagen.

Verwerken

Opgave 13

Herleid.

a $\frac{2x}{y} + \frac{x}{3y}$

b $\frac{2x}{y} \cdot \frac{x}{3y}$

c $\frac{2x}{y} - \frac{x}{3y}$

d $\frac{2x}{y} \Big/ \frac{x}{3y}$

Opgave 14

Herleid.

a $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

b $2x^3 \cdot 5x^4$

c $(2a^3)^5$

d $\frac{6b^8}{3b^3}$

e $a^5 \cdot 3ab^5$

f $\frac{3x}{x^2}$

Opgave 15

Herleid.

a $4\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$

b $4\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - \sqrt{a} - 2\sqrt{a}$

c $2\sqrt{a} + 8\sqrt{b} - \sqrt{a} + 6\sqrt{b}$

d $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{3b}$

e $2\sqrt{x} \cdot 3\sqrt{x}$

f $\frac{\sqrt{50x}}{\sqrt{5x}}$

Opgave 16

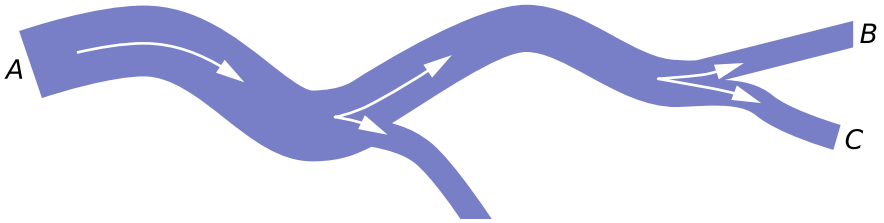
Gegeven zijn de functies: $f(x) = 5(3x^2)^4 \cdot \frac{6}{x^{18}}$ en $g(x) = \sqrt{500x}$.

a Schrijf $f(x)$ in de vorm: $f(x) = ax^n$.

b Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 17

Een rivier begint in A en stroomt naar rechts. Bij de eerste splitsing gaat $\frac{1}{3a}$ deel van het water naar D. Bij de tweede splitsing gaat $\frac{3}{4a}$ deel van het water naar C. De rest van het water stroomt naar B.



Figuur 1.6

Welk deel van het water gaat naar B?

A. $\frac{6a^2-5a+2}{6a^2}$

B. $\frac{12a^2-13a+3}{12a^2}$

C. $\frac{22a^2-20a+6}{22a^2}$

Toepassen

Opgave 18: Restzetels

Op 2 maart 1994 vonden er in Nederland gemeenteraadsverkiezingen plaats. In de gemeente Enschede werden 67787 stemmen uitgebracht. De verkiezingsuitslag is weergegeven in de tabel. In de tweede kolom is af te lezen hoeveel stemmen elke partij heeft behaald. In de laatste kolom van deze tabel staat aangegeven hoe de zetelverdeling in de gemeenteraad van Enschede op basis van de verkiezingsuitslag uiteindelijk is geworden.
Het proces om stemmen om te rekenen naar aantallen zetels is ingewikkeld. Daar wordt verderop in deze opgave nader op ingegaan. Eerst komt het resultaat van de zetelverdeling aan de orde.

partij	aantal stemmen	aantal volle zetels	aantal zetels in de gemeenteraad
1. PvdA	15329	8	10
2. CDA	12584	7	8
3. VVD	9080	5	5
4. D66	8751	5	5
5. GroenLinks	5150	2	3
6. GPV	3399	1	2
7. CD	2730	1	1
8. SP	1549	0	1
9. NCPN	589	0	0
10. Van Loenen	2955	1	1
11. Enschede Nu	5671	3	3
totaal aantal stemmen:	67787	totaal aantal zetels:	39

Tabel 1.4

Uit de tabel volgt dat PvdA, VVD en D66 samen een meerderheid van de zetels in de gemeenteraad kregen. Toch hadden deze drie partijen samen geen meerderheid van de stemmen.

a Laat met behulp van de gegevens in de tabel zien dat PvdA, VVD en D66 samen inderdaad een meerderheid aan zetels, maar niet een meerderheid aan stemmen hebben behaald.

Om te bepalen op hoeveel zetels partijen recht hebben, wordt eerst de kiesdeler bepaald. De kiesdeler wordt berekend door het totaal aantal uitgebrachte stemmen te delen door het aantal beschikbare zetels in de gemeenteraad.

b Bereken de kiesdeler voor de verkiezingsuitslag van Enschede in 1994.
Rond het antwoord af op drie decimalen.

Om het aantal zetels te bepalen waar een partij recht op heeft, wordt vervolgens bij elke partij het aantal op die partij uitgebrachte stemmen gedeeld door de kiesdeler. Voor bijvoorbeeld de PvdA is de uitkomst hiervan ongeveer $8{,}82$; daarom heeft de PvdA 8 volle zetels. In de derde kolom van de tabel staat het aantal volle zetels van elke partij.
De beschikbare zetels in de gemeenteraad die nog niet zijn verdeeld met de volle zetels heten de restzetels. Voor de verdeling van de restzetels moet volgens de kieswet het systeem van de grootste gemiddelden worden gehanteerd. In de kieswet staat dit systeem als volgt beschreven:

> Bij de verdeling van de restzetels volgens het systeem van de grootste gemiddelden wordt voor elke partij in gedachten één zetel opgeteld bij het behaalde aantal volle zetels. Vervolgens wordt het aantal op de partij uitgebrachte stemmen gedeeld door dit denkbeeldige aantal zetels. Op deze wijze wordt voor elke partij het gemiddelde aantal stemmen per zetel bepaald. De partij met het grootste gemiddelde krijgt een restzetel toebedeeld. Aldus ontstaat een nieuwe tussenstand bij de zetelverdeling. Zolang er nog restzetels te verdelen zijn, wordt de hierboven beschreven procedure herhaald. Uitgaande van de nieuwe tussenstand wordt dan wederom in gedachten bij elke partij één zetel opgeteld bij het (in de tussenstand) behaalde aantal zetels. Wederom wordt de volgende restzetel toebedeeld aan de partij met het grootste gemiddelde aantal stemmen per zetel. De systematiek voor de restzetelverdeling kan ertoe leiden dat een partij meer dan één restzetel behaalt.

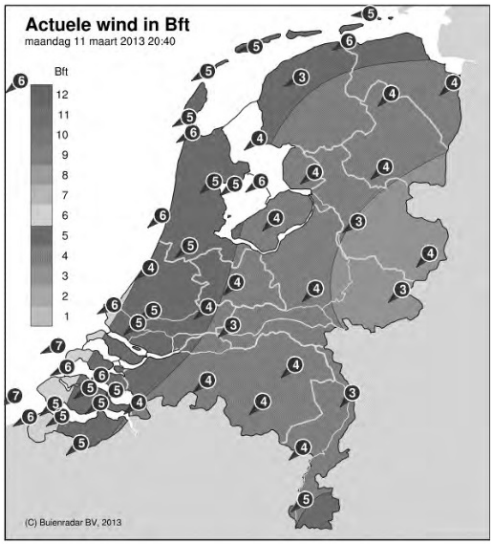
Tabel 1.5

c Laat met berekeningen zien dat de eerste restzetel werd toegewezen aan GroenLinks.

(naar: examen vwo wiskunde C in 2007, eerste tijdvak)

Opgave 19: Wind mee, wind tegen

Op de site buienradar.nl kun je verschillende weerkaarten bekijken. De kaarten bevatten actuele weergegevens zoals temperatuur, windkracht en windrichting. Bekijk de windkaart van Nederland op maandag 11 maart 2013 om 20:40 uur. Deze kaart is gebaseerd op gegevens van KNMI-meetstations die over Nederland zijn verspreid. Deze meetstations geven elke tien minuten een nieuwe waarneming af.



Figuur 1.7

In Nederland zijn er 53 officiële KNMI-meetstations.

a Bereken hoeveel waarnemingen er elke dag in totaal door de officiële meetstations aan het KNMI worden doorgegeven.

Als je in de ochtend van huis naar school fietst en in de middag terugfietst, kan de wind invloed hebben op je totale reistijd.
Sylvia woont 10 kilometer van school. Ze fietst elke schooldag. Ga ervan uit dat als er geen wind is, haar snelheid constant 20 km/h is. Haar totale reistijd is op zo'n schooldag 1 uur.
Meestal waait het echter. Veronderstel dat Sylvia altijd wind mee heeft op de heenweg en wind tegen op de terugweg en dat de wind de hele dag constant is. Dan is Sylvia's snelheid op de heenweg $20 + w$ km/h en op de terugweg $20 - w$ km/h. Hierbij geldt: $0 \leq w < 20$.
Op een dag geldt $w = 5$. Sylvia's totale reistijd is die dag langer dan 1 uur.

b Bereken hoeveel minuten haar totale reistijd die dag langer is dan 1 uur.

Sylvia's totale reistijd T in uur wordt gegeven door de formule:

$T = \frac{400}{400 - w^2}$

c Op een dag is Sylvia's totale reistijd 1 uur en 20 minuten.
Bereken algebraïsch de waarde van w op die dag.

d Met de formule voor Sylvia's totale reistijd kun je zonder te rekenen beredeneren dat haar totale reistijd op een dag met wind groter is dan op een dag zonder wind.
Geef zo'n redenering.

Als Sylvia onderweg pech heeft en de reparatie 1 uur kost, wordt haar totale reistijd 1 uur langer.
Haar totale reistijd wordt dan:

$T = \frac{400}{400 - w^2} + 1$

e Herleid deze formule tot één breuk.

(naar: examen vwo wiskunde C in 2014, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 20

Herleid:

a $3x^4 \cdot 6x^5 + (2x^3)^3$

b $\frac{x}{2y} + \frac{2x}{3y}$

c $\frac{x}{2y} \Big/ \frac{2x}{3y}$

d $\frac{15b^{10}}{3b^4}$

e $3\sqrt{x} \cdot 4\sqrt{x}$

f $\frac{\sqrt{125a}}{\sqrt{5a}}$

Opgave 21

a Laat zien dat de formule $P = 120 \cdot \sqrt{3T} \cdot \frac{0{,}03}{2T^{0{,}2}}$ te schrijven is in de vorm $P = a \cdot t^b$.
Bereken de waarden van a en b in twee decimalen nauwkeurig.

b Laat zien dat de formule $G = 1{,}05k \cdot \frac{1-0{,}03k}{0{,}1k}$ te schrijven is in de vorm $G = a \cdot k + b$.
Bereken a en b.

Practicum

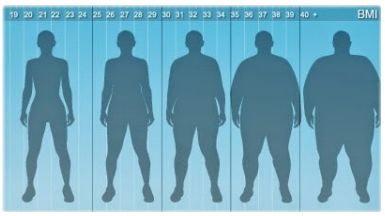
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met variabelen en getallen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.2 Formules combineren

Inleiding

Formules, je komt ze overal tegen. Vaak zijn mensen er nogal van onder de indruk, maar dat is natuurlijk onzinnig. Een formule is ook maar een zinnetje...
Neem het zinnetje: “De BMI (body-mass-index) is een maat voor je gezondheid die je berekent door je gewicht in kilogram te delen door het kwadraat van je lengte in m.”. Niks moeilijks aan toch?



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- niks nieuws, zoek de benodigde kennis waar nodig op in voorgaande onderwerpen.

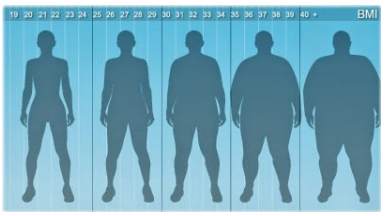
Voorkennis

- formules met elkaar combineren en haakjes wegwerken.

Verkennen

Opgave V1

Neem de zin “De BMI (body-mass-index) is een maat voor je gezondheid die je berekent door je gewicht in kilogram te delen door het kwadraat van je lengte in m.”
Neem G het gewicht in kilogram en L de lengte in meter. De BMI wordt naar de Belgische wiskundige Adolphe Quetelet ook wel de queteletindex QI genoemd.



Figuur 2.2

a Welke formule kun je voor de QI opschrijven?

b Laat zien dat voor iemand van $1{,}80$ m lengte geldt $QI \approx 0{,}31G$.

Uitleg

Een bekende maat voor iemands gezondheid is de queteletindex (QI) of ook wel body mass index (BMI) genoemd. De QI is een maat voor het al dan niet hebben van overgewicht.

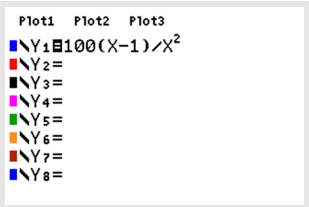
De bijbehorende formule is: $QI = \frac{G}{L^2}$.

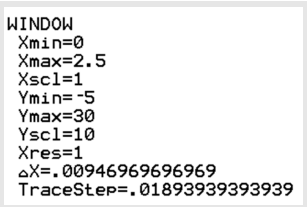
Hierin is G het gewicht in kilogram en L de lengte in meter.

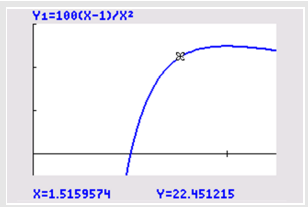
Bij een QI vanaf 20 tot 25 heeft iemand een normaal gewicht.
Een vuistregel voor een gezond gewicht is: “Een gezond gewicht in kg is gelijk aan je lengte in cm min 100.”
In formulevorm $G = 100L - 100$. Door beide formules te combineren kun je een formule opstellen waarin QI wordt uitgedrukt in L.

Dit geeft: $QI = \frac{100L-100}{L^2}$.

Van deze formule kun je met de grafische rekenmachine een grafiek maken. Daarin is te zien dat voor lengtes tussen $1{,}50$ meter en $2{,}20$ meter de QI inderdaad tussen de 20 en de 25 ligt.







Figuur 2.3

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**.

a Bereken de queteletindex van een persoon die $1{,}75$ meter lang is en een gewicht van 70 kilogram heeft. Heeft deze persoon een gezond gewicht?

b Leg uit waarom bij de vuistregel voor een gezond gewicht de formule $G = 100L - 100$ hoort.

c In de uitleg zijn twee formules gecombineerd en zo is een formule ontstaan waarin QI is uitgedrukt in L. Bereken met die formule de queteletindex van een persoon die $1{,}83$ meter lang is.

d Stel een formule op waarin QI wordt uitgedrukt in G. Werk de haakjes weg.

e Plot de grafiek bij de formule van d. Bij welke gewichten ligt de QI tussen 20 en 25? Leg je antwoord uit.

Opgave 2

a Gegeven zijn de formules: $R = 2p + 3q + 20$ en $q = 3p - 2$.
Combineer en herleid beide formules en druk R uit in p.

b Gegeven zijn de formules: $K = -2t - 5v$ en $t = v - 3$.
Combineer en herleid beide formules en druk K uit in v.

c Gegeven zijn de formule: $2z = 3x - 4y$ en $z = 2x + 1$.
Deze twee formules kunnen worden gecombineerd tot de vorm $y = ax + b$.
Welke getallen zijn a en b?

d Gegeven is de formule $Z = \frac{7x}{5y}$. Neem $Z = 2$ en druk y uit in x.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

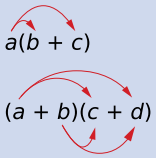
Een formule zoals $K = 2a + 3b + 20$ beschrijft een verband tussen drie variabelen.

Soms heb je te maken met meerdere formules met meerdere variabelen. Om dan het aantal variabelen en het aantal formules terug te brengen kun je formules met elkaar combineren.

Het combineren van twee formules kan als de formules ten minste één variabele gemeenschappelijk hebben. Een manier om twee formules te combineren is vrijmaken van de gemeenschappelijke variabele in de éne formule en de gevonden uitdrukking vervolgens in de andere formule invullen.
Dat heet **substitueren**.

Vaak moet je na substitueren nog **haakjes wegwerken** om de formule te herleiden.

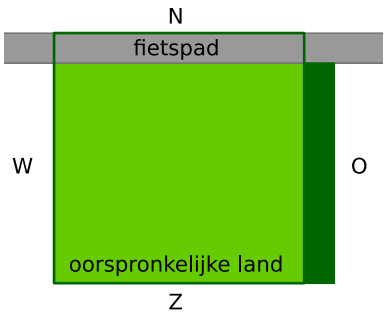
- Enkele haakjes: $a(b+c) = ab + ac$.
- Dubbele haakjes: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.



Figuur 2.4

Voorbeeld 1

Een boer heeft een vierkant stuk land. De gemeente wil langs de noordrand een fietspad van 3 meter breed aanleggen. Ze wil daarom een strook van die breedte aankopen. In plaats van het stuk land dat hij kwijtraakt, mag de boer aan de oostkant zijn land uitbreiden met een strook van dezelfde breedte.
Heeft de boer nu een even groot stuk land als voorheen?



Figuur 2.5

Antwoord

De afmetingen van het oorspronkelijke vierkante stuk land zijn onbekend.
Kies daarom voor de lengte en de breedte de variabele x.
De oppervlakte van het oorspronkelijke stuk land bedraagt dan x^2 m^2.
Er gaat aan de noordkant een strook van 3 meter af, die er aan de oostkant weer bij komt. Het landje wordt nu rechthoekig. De breedte wordt $x-3$ m en de lengte wordt $x+3$ m.
Na aanleg van het fietspad wordt de oppervlakte:
$(x+3)(x-3) = x^2 - 3x + 3x - 9 = x^2 - 9$

De boer raakt 9 m^2 land kwijt.

Opgave 3

Werk de haakjes weg en herleid.

a $3(a+4b)$

b $3a(a-4b)$

c $(x+3)(x+5)$

d $(2x-4)(x-5)$

e $4(3p+2)+5(4-p)$

f $3(2p+4)-(4-p)$

Opgave 4

Een boer heeft een rechthoekig stuk land waarvan de lengte twee keer zo groot is als de breedte. Uit oogpunt van landschapsbeheer haalt hij aan beide lange zijden een strook van 3 meter breed af en maakt daar een smalle boswal. Verder maakt hij een bredere boswal van 10 meter breed aan één van beide korte zijden. Zijn land wordt daarmee 2690 m^2 kleiner.

a Breng eerst de situatie in kaart. Noem de oorspronkelijke breedte van het land x (meter). Hoe groot was de oppervlakte van het oorspronkelijke stuk land?

b Hoe groot is de oppervlakte van het land na de aanleg van de boswal?
Werk de haakjes weg en herleid.

c Bereken hoe groot de breedte van het oorspronkelijke rechthoekige stuk land was.

Voorbeeld 2

De ANWB adviseert om bij autorijden een afstand d (meter) te bewaren ten opzichte van de auto voor je, die de helft is van je eigen snelheid v in km/h.
Daarbij hoort de formule: $d = 0{,}5v$.

Gemiddeld is een auto 4 meter lang. De afstand s in meter tussen de voorbumpers van twee auto's is: $s = 4 + d$.

Neem aan dat alle auto's zich aan het advies van de ANWB houden, 4 meter lang zijn en dezelfde snelheid v hebben.

- De tijd t in seconden tussen twee auto's is te berekenen met de formule: $t = \frac{3{,}6s}{v}$.
  Toon dit aan.
- Stel een formule op voor t uitgedrukt in v door formules te combineren.
  Herleid zo ver mogelijk.

Antwoord

- De $3{,}6$ komt van het omrekenen van v in km/h naar m/s.
  Er geldt $s = v \cdot t$. Omdat de snelheid in km/h is (dus 1000 m / 3600 s) geldt:
  $s = \frac{1000}{3600} \cdot v \cdot t$

  Dit geeft: $t = \frac{\frac{3600}{1000} \cdot s}{v} = \frac{3{,}6s}{v}$.
- Er geldt $t = \frac{3{,}6s}{v}$, $s = 4 + d$ en $d = 0{,}5v$.

  $s = 4 + d$ en $d = 0{,}5v$ geeft samen: $s = 4 + 0{,}5v$

  $t = \frac{3{,}6s}{v}$ en $s = 4{+}0{,}5v$ geeft samen: $t = \frac{3{,}6(4+0{,}5v)}{v} = \frac{14{,}4+1{,}8v}{v}$.

Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Het aantal auto's N dat per minuut een bepaald punt passeert is: $N = \frac{60}{t}$.
Noteer de formule met N uitgedrukt in v.

b Er passeren dertig auto's per minuut. Bereken algebraïsch hoe hoog de snelheid v van deze autostroom in kilometer per uur is.

Opgave 6

Een boer heeft een rechthoekig stuk land. De lengte is l meter en de breedte is b meter.

a Stel een formule op voor de omtrek O in meter.

b Stel een formule op voor de oppervlakte A in m^2.

c De oppervlakte van het land is 100 m^2.
Gebruik dit en de formules uit a en b om O uit te drukken in b.

Verwerken

Opgave 7

Combineer de twee formules met elkaar, druk K uit in p en herleid.

a $K = 5p + 7b + 20$ en $b = 3p$.

b $K = -4p + 3a - 8$ en $a = 8p - 2$

c $p = \frac{K}{2b}$ en $b = 5p$

d $K = p \cdot a$ en $p = 2a - 8$

Opgave 8

Op een camping zijn de prijzen € 10,00 voor een volwassene, € 5,00 per kind en € 3,00 per standplaats. De bedragen zijn per dag.

a Hoeveel betaalt een gezin dat bestaat uit twee volwassenen en drie kinderen per dag voor één standplaats?

b Geef een formule waarmee de prijs per dag P (in €) kan worden berekend. Neem v voor het aantal volwassenen en k voor het aantal kinderen.

c Een oom en tante zonder kinderen gaan naar de camping. Ze weten nog niet hoeveel neefjes en nichtjes ze zullen uitnodigen, maar ze willen niet meer dan € 50,00 per dag betalen.
Bereken algebraïsch hoeveel kinderen ze kunnen uitnodigen.

d Stel dat $k = 2v + 1$. Druk P uit in v en herleid die formule.

Opgave 9

De voeding van een melkkoe bestaat vooral uit ruwvoer, zoals gras en hooi. Om een melkkoe meer melk te laten geven, wordt ze bijgevoerd met krachtvoer. Onderzoekers hebben een verband geformuleerd tussen de hoeveelheid krachtvoer die een koe krijgt en de hoeveelheid melk die ze produceert. Er geldt: $M = -0{,}04 \cdot V^2 + 1{,}05 \cdot V + 27{,}2$.
Hierin is V de hoeveelheid krachtvoer in kilogram per dag en M de melkproductie in kilogram per dag.

a Voor de melkveehouder is vooral de winst W in euro per koe per dag belangrijk. De winstformule bij een melkprijs van € 0,29 per kilogram en een krachtvoerprijs van € 0,20 per kilogram is: $W = 0{,}29 \cdot M - 0{,}20 \cdot V$.
Bereken de winst W wanneer een koe 4 kilogram krachtvoer per dag krijgt.

b Als je de formule van M invult in de formule van W, ontstaat een formule die je kunt herleiden tot de vorm: $W = a \cdot V^2 + b \cdot V + c$.
Laat dit zien.

(naar: examen wiskunde A havo in 2014, eerste tijdvak)

Opgave 10

De opbrengst R (in €) bij de verkoop van een bepaald artikel hangt af van het aantal stuks q dat je verkoopt en prijs p (€) per stuk. In bepaalde economische omstandigheden hangt de verkochte hoeveelheid q af van de prijs p volgens de formule: $q = 4000 - 200p$.

a Er is een verband tussen R en q. Stel een formule op die dat verband aangeeft.

Voor de kosten K geldt: $K = 5000 + 15q$.
Voor de winst W geldt: $W = R - K$.

b Stel een formule op voor de winst afhankelijk van q en bereken bij welke verkochte hoeveelheid de winst maximaal wordt. Geef commentaar.

Opgave 11

Gegeven zijn de formules:

- $-7p + 5q = 12 - r + 4s$
- $p = r - 3q$
- $q = p - s$

Combineer deze formules tot de vorm: $p = aq + b$

Toepassen

Opgave 12: Grove den

Een deel van de bossen in Nederland is bestemd voor de houtindustrie. Voor het kappen van een bos wordt meestal eerst onderzocht hoeveel m^3 hout het bos op zal leveren. Dit gebeurt aan de hand van de diameter en de hoogte van bomen. De diameter van een boom wordt op een vaste hoogte gemeten.
Voor het bepalen van de hoeveelheid hout in één boom wordt gebruikgemaakt van de formule:
$V = f \cdot d^2 \cdot h$ met diameter d en hoogte h beide in meter.

In deze formule is V het volume aan hout in de boom in m^3. De factor f heet de vormfactor. De vormfactor is een getal dat afhangt van de soort boom en de diameter d van de boom.
Een voorbeeld van een boom die wordt gebruikt in de houtindustrie is de grove den (Pinus sylvestris).

Figuur 2.6

Voor de grove den wordt het verband tussen de vormfactor f en de diameter d (meter) bij benadering gegeven door de formule:
$f = 0{,}30 \cdot d^2 - 0{,}36 \cdot d + 0{,}46$

a In een bos staat een grove den met een diameter van $0{,}16$ meter. Bereken hoeveel procent de vormfactor van deze boom afneemt als de diameter van deze boom met 100% toeneemt.

Naarmate de diameter van een grove den groter is, is de hoogte ook groter. Voor de grove den geldt bij benadering tussen de hoogte h en de diameter d het verband:
$h = 44 \cdot d^{0{,}65}$
Ook hier zijn de diameter en de hoogte in meter.

b Een grove den van 40 meter hoog wordt gekapt.
Bereken hoeveel hout deze grove den volgens de formules bevat.

Op basis van de formule $f = 0{,}30 \cdot d^2 - 0{,}36 \cdot d + 0{,}46$ en de formule $h = 44 \cdot d^{0{,}65}$ kan $V = f \cdot d^2 \cdot h$ geschreven worden als: $V = \left(0{,}30 \cdot d^2 - 0{,}36 \cdot d + 0{,}46\right) \cdot d^2 \cdot 44 \cdot d^{0{,}65}$.
Dit kan weer worden geschreven als: $V = a \cdot d^{4{,}65} + b \cdot d^{3{,}65} + c \cdot d^{2{,}65}$.

Hierin zijn a, b, en c constanten.

c Bereken a, b en c in twee decimalen.

(naar: examen vwo wiskunde C in 2011, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 13

Werk de haakjes weg en herleid.

a $5(2q + 7) - (5 + 3q)$

b $(2a + 8)(3a + 3)$

c $3r(3r + 4)$

Opgave 14

Op een braderie zie je weleens een glazen pot staan, gevuld met even grote knikkers. Tegen betaling van een bepaald bedrag mag je raden hoeveel knikkers er in de pot zitten. Degene die het aantal precies raadt of er het dichtstbij zit, wint een prijs. Uit onderzoek blijkt dat de knikkers ongeveer 64% van de beschikbare ruimte innemen. Dit gegeven maakt het mogelijk een redelijke schatting te geven van het aantal knikkers in de pot:

- Bepaal de diameter van een knikker en bereken daarmee de inhoud van een knikker.
- Bereken 64% van de inhoud van de glazen pot en deel dit door de inhoud van één knikker. Het afgeronde antwoord is een redelijke schatting van het aantal knikkers in de pot.

De inhoud van een knikker is te berekenen met de formule: $I_{\text{knikker}} = 0{,}5236 \cdot d^3$.
Hierin is d de diameter van de knikker in centimeter en I_{knikker} de inhoud van een knikker in cm^3.
Een glazen pot met een inhoud van 800 cm^3 is helemaal gevuld met knikkers, die elk een diameter van $1{,}3$ centimeter hebben. Hieruit volgt dat: $K = 0{,}64 \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{I_{\text{knikker}}}$.

De afgeronde waarde van K is het aantal knikkers in de pot en I_{pot} is de inhoud van de glazen pot in cm^3. Je kunt uit de combinatie van beide formules een formule afleiden voor K, uitgedrukt in I_{pot} en d. Deze formule is van de vorm: $K = a \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3}$.

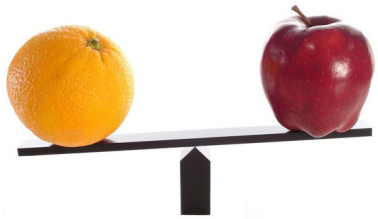
Laat zien hoe je deze formule afleidt uit de combinatie van beide formules en rond de waarde van a af op drie decimalen.

(naar: examen havo wiskunde A in 2016, tweede tijdvak)

2.3 Vergelijkingen en ongelijkheden

Inleiding

In deze figuur is duidelijk sprake van een ongelijkheid: de sinaasappel is zwaarder dan de appel, het gewicht van de sinaasappel is groter dan dan van de appel. Maar ja, wat zegt dat nou nog? In de wiskunde wil je vaak een vergelijking of een ongelijkheid gebruiken om ook echt iets te berekenen...



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- niks nieuws, zoek de benodigde kennis waar nodig op in voorgaande onderwerpen.

Voorkennis

- vergelijkingen en ongelijkheden grafisch oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt wat geld om opzij te zetten. Sparen is een optie. Je stort dan het geld op een spaarrekening en komt daar verder niet meer aan.

Een andere mogelijkheid is het geld (laten) beleggen. Je stort het dan op een beleggingsrekening.

Sparen is veilig, maar de rente is niet hoog. Beleggen is risicovol (je kunt alles kwijt raken), maar een goede belegger zorgt voor een behoorlijk rendement op een beleggingsrekening.

a Stel je hebt € 1500,00 om iets mee te doen. Zoek op hoe hoog de spaarrente op dit moment is en hoe hoog de beleggingsrendementen zijn die worden aangeboden. Bedenk hoeveel je gaat sparen en hoeveel je gaat beleggen.

b Hoeveel heb je over 10 jaar verdiend als je verwachtingen uitkomen? Welke van beide rekeningen heeft meer opgeleverd?

Uitleg

Stel je hebt op 1 januari 2017 € 1250,00 op een spaarrekening gezet tegen een vaste rente van $0{,}4\%$ per jaar. Daarna stort je geen geld meer op deze rekening en neem je geen geld op. Voor het saldo geldt dan:

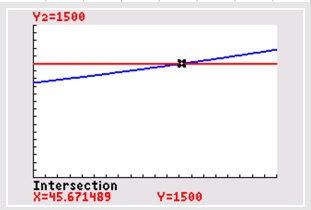
$S = 1250 \cdot 1{,}004^t$

Hierin is S het bedrag op de spaarrekening (€) en t de tijd in jaar na 1 januari 2017.

Wanneer heb je € 1500,00 op deze spaarrekening staan?
Hierbij hoort de vergelijking:
$1250 \cdot 1{,}004^t = 1500$
Deze vergelijking kun je algebraïsch oplossen. Dan gebruik je de balansmethode en logaritmen.

Maar je kunt een vergelijking ook met de grafische rekenmachine oplossen.
Voer in: $y_1 = 1250 \cdot 1{,}004^x$ en $y_2 = 1500$.
Kies als venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 75$ en $0 \leq y \leq 2000$.

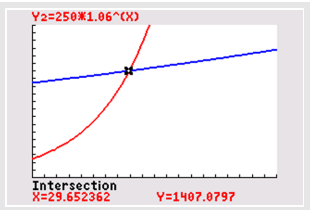
Bepaal het snijpunt van de twee grafieken. Dit geeft $x \approx 45{,}7$. Omdat de rente alleen op 1 januari wordt uitbetaald, heb je pas op 1 januari 2063 een bedrag van € 1500,00 (of meer) op je rekening staan.



Figuur 3.2

Je vond dit lang duren en hebt ook wat geld op een beleggingsrekening gezet. Beleggen biedt geen garanties, je kunt hiermee ook al je geld kwijtraken. Een vriend van je heeft met eenzelfde beleggingsrekening al jaren een rendement van 6%. Je gaat ervan uit dat dit ook voor jou geldt. Je hebt op 1 januari 2017 € 250,00 op de beleggersrekening gezet. De formule hierbij is: $B = 250 \cdot 1{,}06^t$
Hierin is B het te verwachten bedrag op de beleggingsrekening (€) en t de tijd in jaar na 1 januari 2017.

Wanneer verwacht je voor het eerst meer geld op de beleggingsrekening te hebben dan op de spaarrekening?
Hierbij hoort de ongelijkheid: $250 \cdot 1{,}06^t > 1250 \cdot 1{,}004^t$.



Figuur 3.3

Los de ongelijkheid grafisch op.
Voer in: $y_1 = 1250 \cdot 1{,}004^x$ en $y_2 = 250 \cdot 1{,}06^x$.
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 75$ en $0 \leq y \leq 2000$.

Bepaal het snijpunt van de twee grafieken. Dit geeft $x \approx 29{,}7$. Op 1 januari 2047 verwacht je meer geld op de beleggingsrekening te hebben dan op de spaarrekening.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**.

a Wanneer heb je € 1400,00 op de spaarrekening?

Het rendement van de beleggingsrekening blijkt geen 6%, maar 7% te zijn.

b Wanneer heb je dan voor het eerst meer geld op de beleggingsrekening dan op de spaarrekening?

Opgave 2

Los grafisch op. Rond af op één decimaal.

a $x^5 + 2x = -6500$

b $\frac{2x^2-3x}{4x} > x^2 - 20$

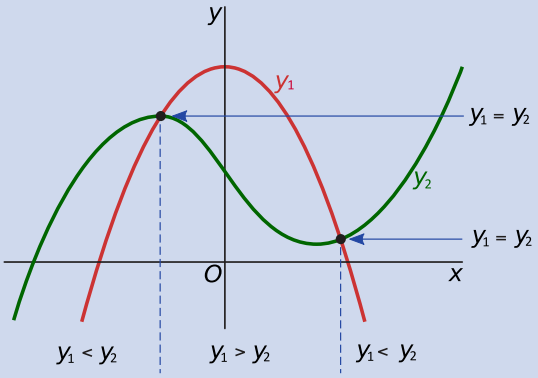
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor een snijpunt van twee grafieken $y_1 = f(x)$ en $y_2 = g(x)$ geldt: $f(x) = g(x)$.
Dit is een **vergelijking**.

Een vergelijking kan in sommige gevallen met de balansmethode exact of algebraïsch worden opgelost voor x. Deze waarde van x bepaalt het punt waarin beide lijnen dezelfde y-waarde hebben. Het punt (x, y) is dan het snijpunt.

Een vergelijking kan ook met de grafische rekenmachine grafisch worden opgelost. Hierbij plot je de grafieken en laat je de rekenmachine snijpunten bepalen.



Figuur 3.4

Een **ongelijkheid** kent de vormen:
$f(x) < g(x)$ of $f(x) \leq g(x)$ of $f(x) > g(x)$ of $f(x) \geq g(x)$

Het oplossen van een ongelijkheid:

- Voer beide functies op de grafische rekenmachine in en breng ze zo in beeld dat alle snijpunten zichtbaar zijn.
- Bepaal de snijpunten. Dat kan met de grafische rekenmachine of door de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch op te lossen.
- Lees de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.

Voorbeeld 1

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij warmteverlies van het dier. Diersoorten met een relatief grote huidoppervlakte in verhouding tot hun inhoud zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten.

Meeh heeft onder andere een formule opgesteld voor Schotse hooglanders:

$H = 8{,}9 \cdot G^{\frac{2}{3}}$

Hierin is G het gewicht (kg) van een Schotse hooglander en H de bijbehorende huidoppervlakte (dm^2).

Vanaf welk gewicht is de huidoppervlakte van een Schotse Hooglander meer dan 500 dm^2?

Antwoord

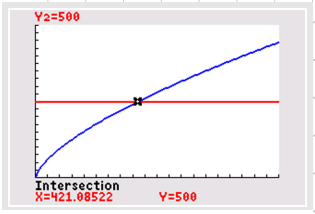
Hierbij hoort de ongelijkheid:

$8{,}9 \cdot G^{\frac{2}{3}} > 500$

Deze ongelijkheid kun je algebraïsch oplossen, je maakt dan gebruik van de balansmethode en de rekenregels voor machten. Je kunt een ongelijkheid ook grafisch oplossen, je maakt dan gebruik van grafieken op de grafische rekenmachine.

Voer in: $y_1 = 8{,}9 \cdot x^{\frac{2}{3}}$ en $y_2 = 500$.
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 1000$ en $0 \leq y \leq 1000$.

Bepaal het snijpunt van de twee grafieken. Dit geeft $x \approx 421$.
Bij een gewicht van meer dan 421 kg is de huidoppervlakte van een Schotse hooglander meer dan 500 dm^2.



Figuur 3.5

Opgave 3

Meeh heeft ook een formule opgesteld voor mensen:

$H = 11{,}2 \cdot G^{\frac{2}{3}}$

Hierin is G het gewicht (kg) van een mens en H de bijbehorende huidoppervlakte (dm^2).
Vanaf welk gewicht is de huidoppervlakte van een mens meer dan 200 dm^2?

Opgave 4

Los grafisch op. Rond af op twee decimalen.

a $15{,}6x^5 < 3000000$

b $3{,}75x^{0{,}5} + 18 \geq 25$

Voorbeeld 2

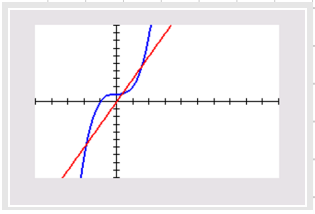
Gegeven zijn de functies: $f(x) = x^3 + 1$ en $g(x) = 2x$.
Bereken met de grafische rekenmachine de snijpunten en los op: $f(x) < g(x)$.

Antwoord

Voer in: $y_1 = x^3 + 1$ en $y_2 = 3x$.
Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 10$.

De snijpunten zijn: $(-1{,}88; -5{,}64)$, $(0{,}35; 1{,}04)$ en $(1{,}53; 4{,}60)$.

Je kunt uit de grafiek aflezen: $x < -1{,}88 \vee 0{,}35 < x < 1{,}53$.


Figuur 3.6

Opgave 5

Gegeven zijn de functies: $f(x) = x(x-3)^2$ en $g(x) = x^2 - 2x + 4$.

a Bereken met de grafische rekenmachine de snijpunten van de grafieken van f en g. Rond af op twee decimalen.

b Had je de snijpunten van de grafieken van f en g ook algebraïsch kunnen berekenen?

c Los op: $f(x) > g(x)$.

Verwerken

Opgave 6

Bij een autodealer kun je vier jaar lang in een Smart ForTwo rijden voor € 5,00 per dag. Daarnaast heb je onderhoudskosten: voor 1,5 eurocent per gereden kilometer sluit je een abonnement af waarmee alle onderhoudskosten worden afgedekt. Je hebt verder alleen nog benzinekosten. Met 1 liter benzine rijd je 16 kilometer. 1 liter benzine kost € 1,60.

Figuur 3.7

a Hoeveel eurocent per kilometer ben je kwijt aan benzine en onderhoud samen?

b Hoeveel kost je deze Smart per jaar als je er 16000 km/jaar mee rijdt?

c Stel een ongelijkheid op bij de vraag: hoeveel kilometer per jaar mag je maximaal met deze Smart rijden als je dat jaar minder dan € 4000 wilt besteden? Los daarna de ongelijkheid grafisch op.

Opgave 7

Los de ongelijkheden met de grafische rekenmachine op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $x^3 + 3x^2 - 3 > 0$

b $2(x-4)^2 - 5 < 5x$

c $(x+3)^2 < 5x$

d $x^4 - 3x > -x^2 + 3$

Opgave 8

Gegeven zijn de functies: $f(x) = 2 - x^3$ en $g(x) = (x-1)^2$.

a Bereken met de grafische rekenmachine de snijpunten van de grafieken van f en g. Rond af op twee decimalen.

b Had je de snijpunten van de grafieken van f en g ook algebraïsch kunnen berekenen?

c Los op: $f(x) > g(x)$.

Opgave 9

Een man met een gewicht van 91 kilogram krijgt van een diëtiste het advies om af te vallen tot een gewicht van 75 kilogram. Ze adviseert hem om iedere dag slechts 2520 kilocalorieën aan energie te consumeren.

De diëtiste geeft hem een tabel mee die is gebaseerd op het rekenmodel. In de tabel is t de tijd in maanden vanaf het moment dat de man dagelijks 2520 kilocalorieën aan energie consumeert, G het gewicht van de man in kilogram en A het aantal kilogram dat hij nog moet afvallen.

t	0	1	2	3	4	5	6
G	91,0	89,1	87,4	85,9	84,6	83,4	82,4
A	16,0	14,1	12,4	10,9	9,6	8,4	7,4

Tabel 3.1

Uit de tabel blijkt bijvoorbeeld dat de man, wanneer hij zich aan het dieetadvies houdt, na drie maanden een gewicht G heeft van $85{,}9$ kilogram. Dat is $10{,}9$ kilogram boven het gewenste gewicht van 75 kilogram, dus het aantal nog af te vallen kilogram A is $10{,}9$.
Uit de tabel blijkt dat A bij benadering exponentieel afneemt. Hierbij hoort de formule:
$A = 16 \cdot 0{,}88^t$ (met t in maanden)

De man houdt zich nauwgezet aan het dieetadvies.

a Bereken na hoeveel maanden de man 12 kilogram is afgevallen.

b Bereken voor welke t de man minder dan 80 kilogram weegt.

(bron: examen havo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak)

Opgave 10

In China zijn tegenwoordig veel schoonheidssalons. Begin 2005 waren dat er $1{,}6$ miljoen, terwijl het land toen ongeveer 1300 miljoen inwoners telde. Om Nederland en China goed met elkaar te kunnen vergelijken kijk je naar het aantal schoonheidssalons per 25000 inwoners. In Nederland neemt het aantal schoonheidssalons per 25000 inwoners ongeveer lineair toe. Ga ervan uit dat deze lineaire groei na 2005 op dezelfde wijze doorgaat. Geef het aantal schoonheidssalons in Nederland per 25000 inwoners aan met V_N. Dan geldt bij benadering: $V_N = 17 + 0{,}6t$.
In deze formule is t de tijd in jaar met $t = 0$ voor het begin van 2005.
Geef met V_C het aantal schoonheidssalons in China per 25000 inwoners aan. Dat aantal blijkt in China niet lineair, maar bij benadering exponentieel toe te nemen. Iemand heeft vastgesteld dat dit proces goed wordt beschreven met als formule voor V_C: $V_C = 30{,}8 \cdot 1{,}06^t$.
Hierbij is t de tijd in jaar met $t = 0$ voor het begin van 2005.
Volgens deze formules zullen beide landen nog deze eeuw één schoonheidssalon op de 500 inwoners hebben. Hoeveel jaar later dan in China zal dit in Nederland het geval zijn? Licht je antwoord toe.

(naar: examen vwo wiskunde C in 2010, eerste tijdvak)

Opgave 11

Een oude weegschaal werkt niet goed meer. Een gewicht dat minder dan 1000 gram weegt, wordt goed gewogen. Maar is het 1000 gram of meer, dan geeft de weegschaal een of ander getal groter dan 1000. Vijf gewichten, A, B, C, D en E wegen elk minder dan 1000 gram. Als ze in paren worden gewogen, dan geeft de weegschaal het volgende:

$B + D = 1200$
$C + E = 2100$
$B + E = 800$
$B + C = 900$
$A + E = 700$

Welk gewicht is het zwaarst?

Toepassen

Opgave 12: JAG/TI-methode

Als het in de winter door de wind bijzonder koud aanvoelt, vermeldt het KNMI behalve de werkelijke temperatuur ook de gevoelstemperatuur. Sinds de winter van 2009/2010 hanteert het KNMI een nieuwe methode om de gevoelstemperatuur weer te geven. Deze methode is door de Joint Action Group on Temperature Indices (JAG/TI) ontwikkeld. De formule voor de gevoelstemperatuur G in °C op basis van de JAG/TI-methode luidt:

$G = 13{,}12 + 0{,}6215 \cdot T - 11{,}37 \cdot W^{0{,}16} + 0{,}3965 \cdot T \cdot W^{0{,}16}$

Hierin is T de werkelijke temperatuur in °C en W de gemiddelde windsnelheid in km/h.

In Nederland begonnen de eerste dagen van 2010 met erg lage temperaturen. In de journaaluitzending van 7 januari 2010 werd gezegd dat het de dag erna -2 °C zou worden, maar dat het door de snijdende wind veel kouder zou aanvoelen en dat de gevoelstemperatuur -9 °C zou zijn.

a Bereken met behulp van de formule welke gemiddelde windsnelheid op 8 januari werd verwacht.

Neem aan dat het bij toenemende windsnelheid kouder gaat aanvoelen; de formule van de JAG/TI-methode is ook zo opgesteld. De formule is ontwikkeld voor temperaturen tussen -46 °C en $+10$ °C en voor een gemiddelde windsnelheid tussen 5 km/h en 175 km/h.

b Bereken met deze gegevens de laagste en de hoogste gevoelstemperatuur die de formule kan geven.

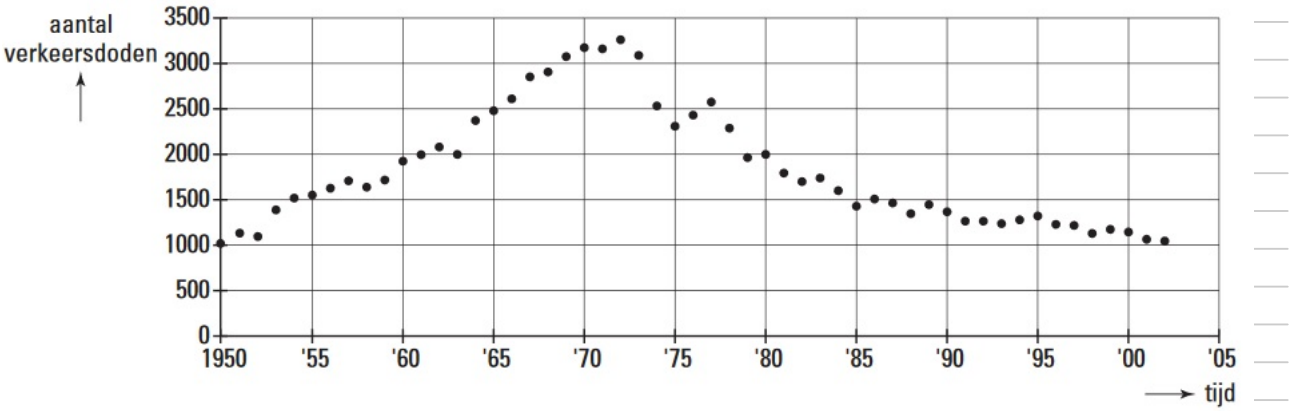
TNO heeft onderzoek gedaan naar de handvaardigheid (het kunnen werken met blote vingers) bij afnemende gevoelstemperatuur. Uit het onderzoek blijkt dat de handvaardigheid afneemt bij een lagere gevoelstemperatuur en langere blootstelling. Om nog met blote vingers te kunnen werken moet de maximale blootstellingsduur beperkt blijven, zodanig dat geldt:
$G \cdot d^{0{,}48} = -113{,}07$
Hierin is G de gevoelstemperatuur in °C met $G < 0$ en d de maximale blootstellingsduur in minuten.
Met behulp van de formule $G \cdot d^{0{,}48} = -113{,}07$ kun je onderzoeken hoe de maximale blootstellingsduur verandert als de gevoelstemperatuur afneemt.

c Bereken met hoeveel minuten de maximale blootstellingsduur afneemt als de gevoelstemperatuur van -20 °C afneemt tot -30 °C.

(naar: examen vwo wiskunde C in 2012, tweede tijdvak)

Opgave 13: Verkeersslachtoffers in Nederland

Bekijk de figuur waarin een grafiek is weergegeven van het aantal verkeersdoden voor de jaren 1950 tot en met 2002.



Figuur 3.8

Uit de figuur blijkt dat het aantal verkeersdoden het grootst was in 1972. Toen waren er 3264 verkeersdoden. Door een actief beleid op het gebied van verkeersveiligheid is sinds die tijd het aantal verkeersdoden afgenomen tot 1066 in het jaar 2002. Weliswaar steeg het aantal verkeersdoden in sommige jaren, maar toch is er een duidelijke dalende trend waarneembaar in de periode 1972-2002. Je kunt deze trend beschrijven met een model waarbij het aantal verkeersdoden exponentieel afneemt van 3264 in 1972 tot 1066 in 2002.

a Volgens dit model zou het aantal verkeersdoden tussen 1972 en 2002 jaarlijks met een vast percentage dalen. Bereken dit percentage.

Het verloop van het aantal verkeersdoden, zoals blijkt uit de figuur, kan bij benadering worden beschreven met de formule:

$$N = 0{,}8 + \frac{t+2}{10+(0{,}04t)^{6{,}8}}$$

In deze formule is N het aantal verkeersdoden per jaar in duizendtallen en t de tijd in jaar vanaf 1950. $t = 0$ in 1950.
Deze formule is slechts een model dat hoort bij de figuur. Daarom komt de grafiek die hoort bij de formule niet precies overeen met de grafiek uit de figuur. Een belangrijk verschil is bijvoorbeeld dat volgens de formule de piek in het aantal verkeersdoden niet in 1972 plaatsvond, maar in een ander jaar.

b Onderzoek in welk jaar volgens deze formule de piek plaatsvond.

Uiteraard is ieder verkeersslachtoffer er een te veel. De overheid wil het aantal verkeersslachtoffers dan ook verminderen. Wanneer de overheid de reeds bestaande maatregelen voortzet, dan wordt verwacht dat het aantal verkeersdoden zich in de toekomst ontwikkelt volgens de formule. Alleen als de overheid nog extra maatregelen neemt om de verkeersveiligheid te bevorderen, zal het aantal verkeersdoden in de toekomst lager kunnen worden dan volgens de formule. De doelstelling is dat het aantal verkeersdoden minder dan 750 wordt.

c Onderzoek, uitgaande van de gegeven formule, of er inderdaad extra maatregelen nodig zijn om deze doelstelling te halen.

(naar: examen vwo wiskunde C in 2006, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 14

Los grafisch op. Rond af op één decimaal.

a $2x^4 + 2x^2 = 7800$

b $\frac{x^2-5x}{8x} > x + 30$

Opgave 15

Los grafisch op. Rond af op twee decimalen.

a $7{,}5x^7 + 8{,}3 < -120$

b $5x^{0{,}25} - 11 \geq 2{,}5$

Opgave 16

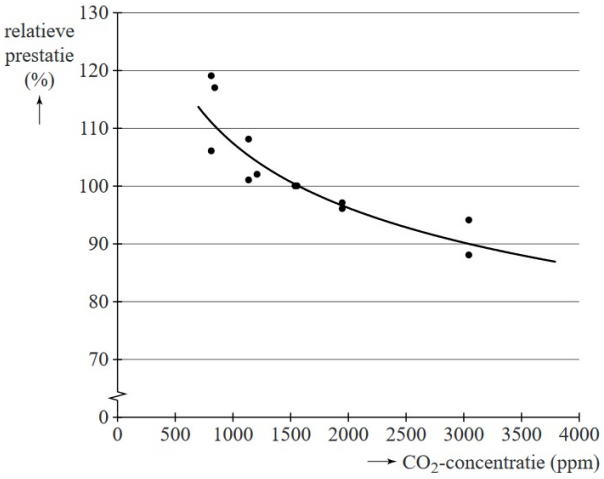
Uit CO_2-metingen blijkt dat in 80% van de klaslokalen van basisscholen de CO_2-concentratie te hoog is. De CO_2-concentratie wordt gemeten met een CO_2-meter. Als de CO_2-concentratie te hoog is, kunnen gezondheidsklachten als hoofdpijn, vermoeidheid en concentratieproblemen ontstaan. Het ministerie van OCW heeft 'Het Frisse Scholenproject' in het leven geroepen met als doel scholen te stimuleren minder energie te verbruiken en het binnenmilieu te verbeteren.
De CO_2-concentratie wordt gemeten in ppm. De afkorting ppm staat voor parts per million, oftewel het aantal deeltjes per miljoen.

Uit verschillende onderzoeken is duidelijk geworden dat een verhoogde CO_2-concentratie de leerprestatie van leerlingen negatief beïnvloedt. In de figuur zijn de gegevens uit een aantal onderzoeken weergegeven. De gemiddelde CO_2-concentratie in deze onderzoeken is 1500 ppm. Hoewel dit boven de norm is, stellen de onderzoekers bij deze waarde de prestatie-index op 100%. Dit betekent dat in klaslokalen waarbij wel aan de norm is voldaan, de relatieve prestatie groter is dan 100%. Uit de figuur blijkt dat bij een hogere CO_2-concentratie de relatieve prestatie afneemt.

In de figuur is de grafiek van $y = c \cdot x^{-0,159}$ getekend, waarbij c een constante is. Deze grafiek past redelijk bij de meetgegevens van de verschillende onderzoeken.
Door de waarde van c te bepalen is het mogelijk om met de formule te onderzoeken vanaf welke CO_2-concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.

Toon aan dat c ongeveer gelijk is aan 320 en bereken met de formule vanaf welke CO_2-concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.

(naar: examen vwo wiskunde C in 2013, tweede tijdvak)



Figuur 3.9

2.4 Evenredigheid

Inleiding

Als je met een vaste snelheid fietst is de afstand die je aflegt recht evenredig met de tijd die je fietst: twee keer zo lang fietsen betekent een twee keer zo lange afstand.

Als je een vaste afstand fietst is de tijd die je fietst omgekeerd evenredig met je snelheid: twee keer zo hard fietsen betekent de helft van de tijd nodig.

Je leert in dit onderwerp

- evenredigheid herkennen en beschrijven met grafieken en formules;
- Werken met dubbellogaritmisch grafiekenpapier.

Voorkennis

- recht evenredige en omgekeerd evenredige verbanden met hun karakteristieke grafieken en formules;
- machtsverbanden met hun karakteristieke grafieken en formules;
- werken met logaritmische schalen.

Verkennen

Opgave V1

Je fietst met een snelheid van 15 km/h.

a Laat met een getallenvoorbeeld zien dat de afgelegde afstand recht evenredig is met de tijd die je fietst.

b Hoe ziet de grafiek bij zo'n recht evenredig verband er uit? En welke formule past er bij?

Je fietst een afstand van 15 km.

c Laat met een getallenvoorbeeld zien dat de daarvoor benodigde tijd omgekeerd evenredig is met de snelheid waarmee je fietst.

d Hoe ziet de grafiek bij zo'n omgekeerd evenredig verband er uit? En welke formule past er bij?

e Uit de rekenregels voor machten volgt dat bij de formule bij d ook sprake is van evenredigheid met een macht. Laat dat zien.

Figuur 4.1

Uitleg 1

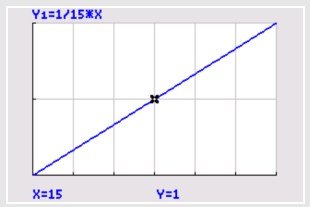
Je fietst met een snelheid van 15 km/h. De afstand die je aflegt is recht evenredig met de gefietste tijd. Bekijk de tabel. Als je twee keer zo ver fietst, dan doe je daar ook twee keer zo lang over.

afstand x (km)	0	3	6	9	12	15	18	21
tijd y (h)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4

Tabel 4.1

De formule die hierbij hoort is: $y = \frac{1}{15} \cdot x$.

Hierin is x de afstand en y de tijd. $\frac{1}{15}$ is de richtingscoëfficiënt.



Figuur 4.2

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn die door de oorsprong gaat met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{15}$.

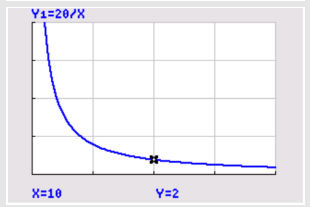
Je fietst een afstand van 20 kilometer. Hoelang je erover doet is omgekeerd evenredig met je snelheid. Bekijk de tabel. Verdubbelt je snelheid, dan halveert de tijd die je erover doet.

snelheid x (km/h)	0	4	8	12	16	20
tijd y (h)	-	5	2,5	$1\frac{2}{3}$	1,25	1

Tabel 4.2

Een formule die hierbij past is: $x \cdot y = 20$.
Hierin is x de snelheid (km/h) en y de tijd (h).

De formule is te herleiden tot: $y = \frac{20}{x}$.



Figuur 4.3

Ook is $y = \frac{20}{x} = 20 \cdot x^{-1}$, dus hier is y evenredig met een macht van x.

De bijbehorende grafiek is een hyperbool met asymptoten $y = 0$ (als x groot wordt, gaat y naar 0) en $x = 0$ (omdat je niet mag delen door 0).

Opgave 1

Evelien heeft een eigen auto en stelt haar autokosten per jaar K alleen afhankelijk van het aantal gereden kilometers g. Ze gaat daarbij uit van een gemiddeld verbruik van 1 liter brandstof op 18 kilometer en een gemiddelde brandstofprijs van € 1,620 per liter.

a Als Evelien het ene jaar drie keer zo veel kilometer rijdt als het andere jaar, wat gebeurt er dan met haar autokosten per jaar?

b Wat voor soort verband is er tussen K en g?

c Stel een formule op bij het verband tussen K en g.

d Hoe ziet de grafiek bij dit verband eruit?

e De jaarlijkse autokosten waren in 2016 voor Evelien € 2105,45. Bereken hoeveel kilometer ze in 2016 heeft gereden.

f Evelien wil in 2017 niet meer dan € 1800,00 aan autokosten hebben.
Hoeveel kilometer kan ze in 2017 maximaal rijden?

Opgave 2

Het verbruik van een auto is het aantal kilometer dat een auto kan rijden op 1 liter brandstof. Het verbruik is afhankelijk van onder andere de snelheid waarmee de auto rijdt en de weersomstandigheden. Er is een verband tussen het (gemiddelde) verbruik v en de autokosten voor het aantal gereden km per jaar K.

a Als v twee keer zo klein wordt, wat gebeurt er dan met K?

b Wat voor soort verband is er tussen K en v?

Jens heeft een eigen auto en stelt de autokosten per jaar K alleen afhankelijk van het gemiddelde verbruik v. Hij gaat daarbij uit van een gemiddeld aantal van 20000 gereden kilometers per jaar en een gemiddelde brandstofprijs van € 1,620 per liter. Als de auto van Jens een gemiddeld verbruik heeft van 1 liter op 18 kilometer, dan zijn de autokosten per jaar € 1800.

c Stel een formule op bij het verband tussen K en v.

d Hoe ziet de grafiek bij dit verband eruit?

e Bereken de jaarlijkse autokosten van Jens als zijn auto een gemiddeld verbruik heeft van 1 liter op 20 kilometer.

f Bereken het gemiddelde verbruik van de auto van Jens als de jaarlijkse autokosten € 1705 zijn.

Uitleg 2

Bekijk de tabel met meetresultaten van een onderzoek naar het verband tussen de massa m van een dier en de energie E die het dier nodig heeft om zich over één kilometer te verplaatsen.

dier	m (gram)	E (calorieën)
muis	21	270
eekhoorn	236	870
witte rat	384	1700
hond (klein)	2600	4400
hond (groot)	18000	17000
schaap	39000	23000

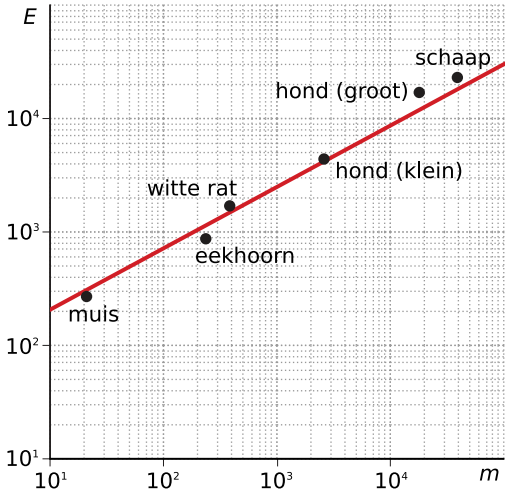
Tabel 4.3

De gegevens uit de tabel kun je uitzetten op **dubbellogaritmisch papier**. Dat is papier met op beide assen een logaritmische schaal. Als op dubbellogaritmisch papier de grafiek (bij benadering) een rechte lijn wordt, dan is E recht evenredig met een macht van m.

- Muis: $m = 21 = 2{,}1 \cdot 10^1$ en $E = 270 = 2{,}7 \cdot 10^2$.
- Eekhoorn: $m = 236 \approx 2{,}4 \cdot 10^2$ en $E = 870 = 8{,}7 \cdot 10^2$.
- Enzovoort.

De getekende punten liggen bij benadering op een rechte lijn. Daarom is E recht evenredig met m^b, dus $E = a \cdot m^b$.

De rechte lijn die het beste bij de meetpunten past, is getekend. De formule die bij deze lijn past is: $E = 58 \cdot m^{0,54}$.
Met deze formule kan bijvoorbeeld het energieverbruik per kilometer van een kat met een massa van $3{,}2$ kilogram worden berekend.



Figuur 4.4

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

a Teken zelf de grafiek bij de tabel op dubbellogaritmisch paper.

Ga na, dat de grafiek (ongeveer) door $(10{,}200)$ en $(10^5{,}3 \cdot 10^4)$ gaat.

b Laat zien, hoe je hiermee de formule kunt opstellen.

c Bereken het energieverbruik van een kat met een massa van $3{,}2$ kilogram.

d Een middelgrote hond heeft een energieverbruik van 10500 calorieën per kilometer. Bereken de massa van deze hond in kilogram. Rond af op één decimaal.

Opgave 4

Teken de punten uit de tabel op dubbellogaritmisch papier en ga na of er sprake is van een machtsverband tussen x en y. Stel een bijpassende formule op en bepaal de waarde van y bij $x = 1000$.

x	1	5	17	55	250	880
y	35	78	144	260	553	1038

Tabel 4.4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Twee variabelen x en y zijn **recht evenredig** wanneer geldt: als x k keer zo groot wordt, wordt y ook k keer zo groot.

De formule heeft de vorm $y = ax$.
De grafiek van een recht evenredig verband is een lineaire grafiek die door de oorsprong gaat en richtingscoëfficiënt a heeft.

Twee variabelen x en y zijn **omgekeerd evenredig** wanneer geldt: als x k keer zo groot wordt, wordt y k keer zo klein. Bijvoorbeeld: wordt x twee keer zo groot, dan wordt y een half keer zo groot (ofwel twee keer zo klein).

Bij een omgekeerd evenredig verband hoort een formule van de vorm $x \cdot y = a$ of $y = \frac{a}{x}$.

De grafiek van een omgekeerd evenredig verband heet een hyperbool.
Hij heeft een horizontale asymptoot $y = 0$ en een verticale asymptoot bij $x = 0$.

Beide gevallen zijn voorbeelden van **recht evenredig met een macht**, waarbij een formule hoort van de vorm $y = a \cdot x^b$.

De grafieken van machtsverbanden vormen op **dubbellogaritmisch papier** rechte lijnen.
En als op dubbellogaritmisch papier het verband tussen twee variabelen een rechte lijn als grafiek oplevert, mag je uitgaan van een machtsverband tussen beide variabelen.

Voorbeeld 1

Iemand uit Eindhoven rijdt naar Maastricht. De afstand tussen Eindhoven en Maastricht is ongeveer 90 kilometer. Neem aan dat zijn snelheid in km/h en de reistijd in h (uur) wordt gemeten.

- Hij is een kwartier onderweg. Leg uit, dat de afstand vanaf Eindhoven recht evenredig is met de gemiddelde snelheid waarmee hij rijdt. Geef een bijpassende formule.
- Hij is een kwartier onderweg. Leg uit, dat de afstand tot Maastricht niet recht evenredig is met de gemiddelde snelheid waarmee hij rijdt. Welke formule past daar bij?
- Waarom is de reistijd over dit traject omgekeerd evenredig met de gemiddelde snelheid? Geef een bijpassende formule.

Antwoord

Noem de afgelegde afstand vanaf Eindhoven s km en de gemiddelde snelheid v km/h.

- 1 kwartier $= 0{,}25$ h en de afgelegde afstand is $s = 0{,}25 \cdot v$.
  Als v twee keer zo groot wordt, wordt s ook twee keer zo groot.
  De s,v-grafiek is een rechte lijn door de oorsprong van het assenstelsel.
- De afstand tot Maastricht is $a = 90 - s = 90 - 0{,}25 \cdot v$.
  Als v twee keer zo groot wordt, wordt a niet twee keer zo groot.
  De a,v-grafiek is een rechte lijn door $(0{,}90)$.
- De totale afstand is 90 km, dus de reistijd wordt $t = \frac{90}{v}$.
  Als v twee keer zo groot wordt, wordt t gehalveerd.

Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Hoelang duurt de rit als er gemiddeld 100 kilometer per uur wordt gereden?

b Bereken de gemiddelde snelheid als de rit $1{,}5$ uur duurt.

c Met welke formule kan de gemiddelde snelheid worden berekend als de reistijd bekend is? Gebruik de reistijd t in uur en de gemiddelde snelheid v in kilometer per uur.

d Voor welke waarden van t is deze formule bruikbaar?

Opgave 6

Stel bij de volgende verbanden tussen x en y een passende formule op.

a y is recht evenredig met x en de grafiek gaat door het punt $(8{,}24)$.

b De grafiek gaat door het punt $(2{,}9)$. Het verband dat bij de grafiek hoort is omgekeerd evenredig.

Voorbeeld 2

Johannes Kepler beschreef als eerste het verband tussen de omlooptijd T (jaar) van een planeet en zijn gemiddelde afstand tot de zon R.
Voor de aarde geldt $T = 1$ jaar en wordt $R = 1$ AE (astronomische eenheid) genomen.
De gegevens van de aarde en de andere planeten zijn weergegeven in een tabel.

planeet	Mercurius	Venus	Aarde	Mars	Jupiter	Saturnus	Uranus	Neptunus
R (AE)	0,40	0,70	1	1,50	5	9,5	20	30
T (jaar)	0,25	0,60	1	1,90	12	25	80	160

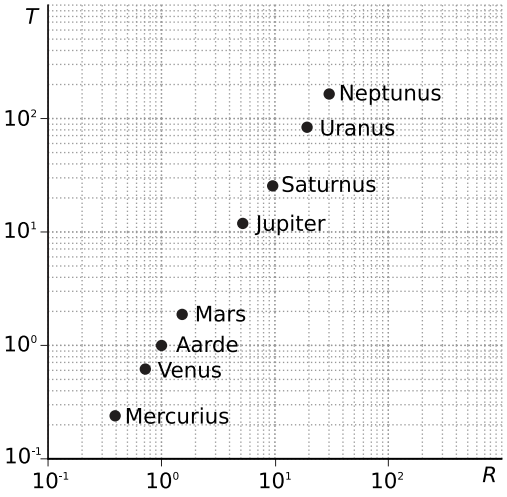
Tabel 4.5

De rechte lijn die het beste bij deze punten past kan bijvoorbeeld door Excel worden berekend.
Teken een bijpassende grafiek op **dubbellogaritmisch papier** en stel een formule op bij deze grafiek.

Antwoord

De punten op de grafiek liggen ongeveer op een rechte lijn door $(1,1)$ en $(20,80)$ (Uranus). Hiermee kun je de formule $T \approx 1 \cdot R^{1,5}$ afleiden.
Met die formule kun je de waarden in de tabel narekenen.

De gevonden waarden komen redelijk goed overeen met de gegeven waarden. De formule past dus vrij goed bij het verband tussen T en R.



Figuur 4.5

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Waarom moet de rechte lijn die past bij de grafiek in ieder geval door $(1,1)$ gaan? Teken zelf de gegeven waarden en de bijpassende rechte lijn op dubbellogaritmisch papier.

b Leid zelf de formule af voor het verband tussen T en R.

c Reken met behulp van de formule de tabel voor ons zonnestelsel na.

In 1930 ontdekte astronoom Clyde Tombaugh een nieuw hemellichaam dat op een (gemiddelde) afstand van $38{,}4851$ AE om de zon draait. Dit hemellichaam werd Pluto genoemd en wordt nu niet langer als planeet geclassificeerd.

d Welke omlooptijd heeft Pluto?

e Stel dat er een nieuwe planeet wordt ontdekt met een omlooptijd van 200 jaar, wat zal dan vermoedelijk zijn gemiddelde afstand tot de zon zijn?

Verwerken

Opgave 8

Geef aan van welk verband er sprake is.

a Door twee keer zo hard te rijden, wordt de reistijd gehalveerd.

A. recht evenredig verband
B. omgekeerd evenredig verband

b Door twee keer zo hard te rijden, wordt de afgelegde afstand binnen dezelfde tijd twee keer zo groot.

A. recht evenredig verband
B. omgekeerd evenredig verband

c $y = 5x$

A. recht evenredig verband
B. omgekeerd evenredig verband

d $y = \frac{8}{x}$

A. recht evenredig verband
B. omgekeerd evenredig verband

Opgave 9

In een groot winkelbedrijf wordt onderzocht hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat als formule geldt: $a = \frac{500}{p}$.
Hierin is a de verkoop per dag in kilogram en p de prijs per kilogram in euro.

a Plot een grafiek waaruit je de verkoop kunt aflezen voor prijzen tussen € 1,00 en € 5,00 per kilogram.

b Iemand zegt: “Een verdubbeling van de prijs zorgt voor een halvering van de verkoop.” Klopt dat?

A. De bewering is waar.
B. De bewering is niet waar.

c Klopt deze bewering met de formule: “Als de prijs vijf keer zo hoog wordt, wordt de verkoop vijf keer zo klein”?

A. De bewering is waar.
B. De bewering is niet waar.

d Geef twee andere formules voor hetzelfde verband tussen a en p.

e Het bedrijf heeft een voorraad van 300 kilogram tomaten. Deze tomaten zijn niet lang meer houdbaar en men wil er binnen een dag vanaf.
Bereken de maximale prijs volgens de formule.

f Een formule zoals $a = \frac{500}{p}$ is meestal slechts op een beperkt gebied bruikbaar. Dat kun je zien als je voor p extreme gevallen neemt.
Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij een prijs van € 100,00? Zal dit in werkelijkheid ook zo zijn?

Opgave 10

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij het warmteverlies van het dier. Diersoorten met een relatief grote huidoppervlakte in verhouding tot hun inhoud zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten.

Bekijk de tabel met gewichten G (kg) van een Schotse Hooglander met de bijbehorende huidoppervlakte H (dm^2).

G	95	150	250	350	420	460	500	550
H	185	251	353	442	500	530	560	600

Tabel 4.6

a Teken de punten uit de tabel op dubbellogaritmisch papier.

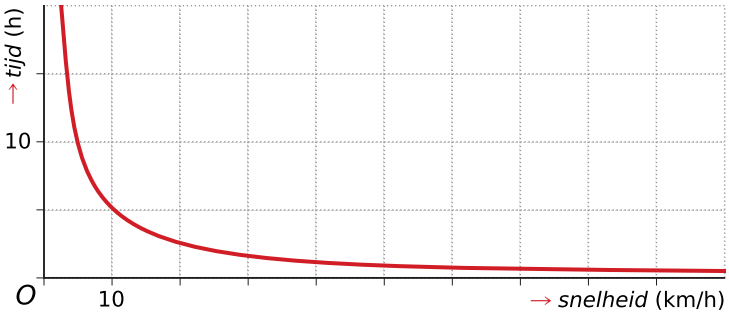
b Wat voor soort groeimodel hoort bij het verband tussen het gewicht en de huidoppervlakte? Hoe zie je dat aan de grafiek?

c Meeh heeft een formule opgesteld die het beste paste bij de punten in de grafiek.

Deze formule is: $H = 8{,}9 \cdot G^{\frac{2}{3}}$.
Bereken hoe zwaar een Schotse Hooglander met een huidoppervlakte van 450 dm^2 is.

Opgave 11

Bekijk de grafiek die het verband tussen de snelheid en de tijd weergeeft voor iemand die van Utrecht naar Den Bosch reist. De (gemiddelde) snelheid v (km/h) is omgekeerd evenredig met de tijd t (h).



Figuur 4.6

a Stel een formule op die bij de grafiek past.

b De trein van Utrecht naar Den Bosch doet er ongeveer 25 minuten over.
Hoeveel kilometer per uur rijdt de trein?

Opgave 12

De overheid besteedt veel geld aan campagnes die waarschuwen voor de gevolgen van roken en drinken. Als deze campagnes effect hebben, dan zou binnen redelijke grenzen moeten gelden: hoe meer geld de overheid besteedt, hoe minder mensen er roken. Stel dat de volgende formule geldt voor het percentage rokers van de Nederlandse bevolking:

$p = \frac{50}{b} + 15$

Hierin is p het percentage rokers en b het bedrag dat de overheid aan antirookcampagnes besteedt in miljoenen euro.

a Geldt voor deze formule inderdaad dat het percentage rokers afneemt naarmate de overheid meer geld aan campagnes besteedt?

A. ja
B. nee

b Bereken het percentage rokers als de overheid 200 miljoen euro aan campagnes besteedt.

c Er is een percentage van de bevolking dat ondanks alle campagnes hardnekkig blijft roken. Hoe groot is dat percentage?

d Het percentage rokers is nooit meer dan 90 geweest en zal dat waarschijnlijk ook nooit worden. Bereken welke waarde van b bij $p = 90$ hoort. Denk je dat de formule voor deze waarde van b nog geldig is?

Opgave 13

De gymnastiekdocenten van een school organiseren een prestatieloop voor de vierde klassen. Er moet een afstand van vijftien kilometer worden afgelegd. De gemiddelde snelheid voor een loper in kilometer per uur is v, de totale tijd t.

a Wat voor soort verband bestaat er tussen de snelheid en de tijd?

b Geef een formule die de looptijd t uitdrukt in de gemiddelde snelheid v.

c Hoe groot is de snelheid bij een looptijd van 100 minuten?

d Alle lopers zijn onderweg ongeveer vijf minuten tijd kwijt met het wachten bij een aantal stempelposten.

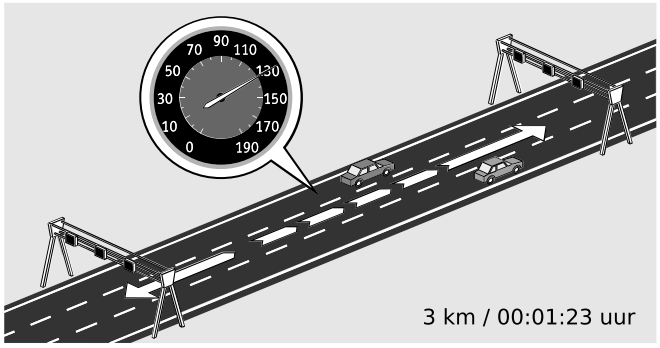
Maak met dit gegeven een formule voor t van de vorm: $t = \frac{a}{v} + c$.

e Bereken met de tweede formule de gemiddelde snelheid van een loper die in totaal een uur en twintig minuten nodig heeft.

f Plot de grafiek van de tweede formule. Welke asymptoten heeft deze grafiek?

Toepassen

Opgave 14: Snelheidscontroles en boetes



Figuur 4.7

De politie controleert de snelheden van auto's op snelwegen op verschillende manieren. Een betrekkelijk nieuwe manier is de zogeheten trajectcontrole. Met een camera wordt een auto aan het begin en aan het eind van een traject gefotografeerd. Met een simpel rekensommetje (lengte van het traject gedeeld door de tijd) berekent een computer hoe snel de auto gemiddeld over het traject heeft gereden.
Op een voorlichtingssite van het Openbaar Ministerie wordt dit toegelicht met een voorbeeld. Bekijk de figuur.

In dit voorbeeld legt een auto een traject van 3 kilometer af in 00:01:23 uur (1 minuut en 23 seconden).

a In de figuur kun je aflezen dat de gemiddelde snelheid van de auto op het traject dan 130 km/h is. Toon dit met behulp van een berekening aan.

b Bij een vaste trajectlengte van 3 kilometer is de tijd t (h) omgekeerd evenredig met de gemiddelde snelheid s (km/h). Stel hierbij een formule op.

c Als de gemiddelde snelheid drie keer zo groot wordt, wat gebeurt er dan met de tijd?

Bij dergelijke metingen zijn altijd kleine meetfouten mogelijk. Daarom krijgen automobilisten pas bij een overschrijding van 4 km/h of meer een boete. Op sommige trajecten vindt de controle met meer dan twee cameraposten plaats; voor ieder deeltraject wordt dan apart de gemiddelde snelheid berekend. De hoogte van deze gemiddelde snelheden bepaalt dan of er een boete volgt.

Op de N256 geldt een maximumsnelheid van 80 km/h. Op deze weg is een traject van 9 kilometer opgedeeld in deeltraject A van 4 kilometer en deeltraject B van 5 kilometer.
Een automobilist rijdt met hoge snelheid en remt in de loop van het traject flink af. Hij legt deeltraject A af met een gemiddelde snelheid van 120 km/h en deeltraject B met een gemiddelde snelheid van 60 km/h. Voor het eerste deeltraject wordt hij beboet.

d Onderzoek door een berekening of deze automobilist een boete zou krijgen als het traject van 9 kilometer niet zou zijn opgedeeld in deeltrajecten.

e De automobilist legt deeltraject A af met een snelheid van 120 km/h. Hoeveel afstand a (km) hij aflegt is recht evenredig met de gereden tijd t (h). Stel hierbij een formule op.

f Als de afstand vier keer zo groot wordt, wat gebeurt er dan met de tijd?

(bron: examen vwo wiskunde C in 2011, tweede tijdvak)

Opgave 15: Leesbaarheid

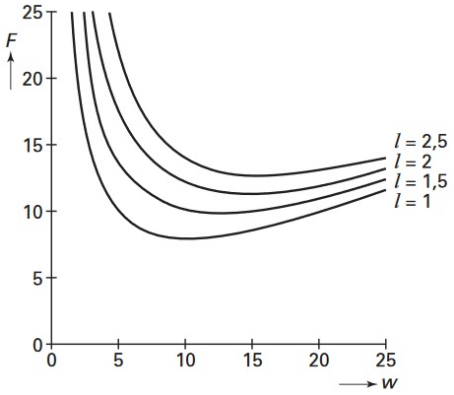
Overheidsinstellingen geven vaak schriftelijk informatiemateriaal uit, zoals folders en brochures. Het is van belang dat mensen die dit materiaal lezen, goed begrijpen wat er staat. Er zijn verschillende formules ontwikkeld om te bepalen hoe moeilijk een tekst te begrijpen is.
In 1952 introduceerde Robert Gunning de Fog-index. Deze index wordt nog steeds veel gebruikt. De Fog-index F is een maat voor de moeilijkheid van een tekst. Naarmate een tekst moeilijker is, is de Fog-index F groter. De waarde van F wordt bepaald door:
w: het gemiddelde aantal woorden per zin, en
l: het gemiddelde aantal lange woorden per zin (lange woorden zijn woorden van drie of meer lettergrepen).

De bijbehorende formule is: $F = 0{,}4 \cdot w + 40 \cdot \frac{l}{w}$.

Bij een onderzoek worden twee teksten, tekst A en tekst B, met elkaar vergeleken. Beide teksten hebben gemiddeld twee lange woorden per zin: $l = 2$.
Tekst A heeft korte zinnen met gemiddeld weinig woorden, $w = 10$, terwijl tekst B lange zinnen heeft. Toch hebben beide teksten dezelfde Fog-index.

a Bereken de waarde van w voor tekst B.

Vaak kun je in een tekst veel korte woorden toevoegen of juist weglaten, zonder dat de betekenis van de tekst ingrijpend wordt gewijzigd. Dan verandert w, terwijl l gelijk blijft. Anders gezegd: voor elke vaste waarde van l is F een functie van w. Bekijk de figuur waarin voor enkele waarden van l de bijbehorende grafiek van F is getekend. De grafiek van F daalt eerst en stijgt vervolgens. De grafiek van F heeft dus steeds een minimum.



Figuur 4.8

b Een tekstschrijver weet uit ervaring dat zijn teksten gemiddeld $2{,}6$ lange woorden per zin hebben. Hij wil graag dat zijn teksten zo eenvoudig mogelijk zijn.
Bereken wat het gemiddeld aantal woorden per zin in zijn tekst in dat geval moet zijn. Rond je antwoord af op één decimaal.

c Een tekst bestaat uit 95 zinnen met in totaal 1178 woorden, waarvan 159 lange woorden.
Bereken de Fog-index van deze tekst. Rond je antwoord af op één decimaal.

Een andere manier om de Fog-index van een tekst te berekenen is als volgt:

$F = 0{,}4\left(k + l + 100 \cdot \frac{l}{k+l}\right)$

Hierbij is k het gemiddeld aantal korte woorden per zin, met andere woorden: $k + l = w$.

Uit deze formule is de oorspronkelijke formule $F = 0{,}4 \cdot w + 40 \cdot \frac{l}{w}$ af te leiden.

d Geef deze afleiding.

(naar: examen vwo wiskunde A1 in 2005, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 16

Stel in de volgende gevallen een passende formule op voor y afhankelijk van x.

a y is recht evenredig met x en de grafiek gaat door het punt $(10{,}50)$.

b De grafiek gaat door het punt $(5{,}10)$ en y is omgekeerd evenredig met x.

c De grafiek gaat door het punt $(4{,}120)$ en y is evenredig met $x^{1{,}5}$.

Opgave 17

De lengte l en breedte b van een rechthoek met een oppervlakte van 1 m^2 zijn omgekeerd evenredig.

a Welke drie formules passen bij het verband tussen l en b als beide in centimeter zijn?

b Plot de grafiek met l uitgedrukt in b. Welke asymptoten heeft de grafiek?

c Laat met de formule uit b zien dat l wordt gehalveerd als b wordt verdubbeld.

d Schrijf de formule van l uitgedrukt in b als machtsfunctie.

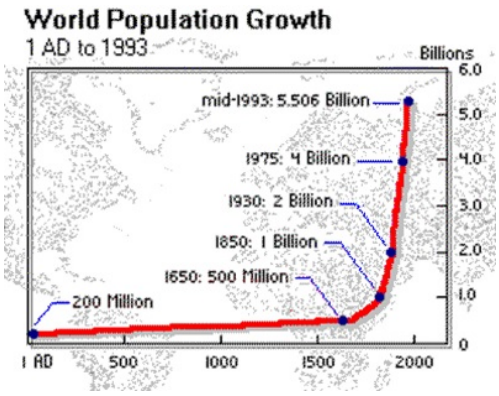
e Laat zien, dat de grafiek van de machtsfunctie bedoeld bij d een rechte lijn oplevert op dubbellogaritmisch papier.

2.5 Lineair en exponentieel

Inleiding

Stadsbesturen willen graag weten hoe het zit met hun bevolking, neemt het aantal inwoners toe of neemt het af? En hoe neemt het aantal inwoners toe (af), lineair of exponentieel? Dergelijke kennis is van belang om beslissingen te nemen betreffende bijvoorbeeld huizenbouw.

Bekijk dit huiveringwekkende plaatje over de wereldbevolking maar eens...



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met lineaire en exponentiële verbanden;
- lineair interpoleren en extrapoleren.

Voorkennis

- lineaire verbanden met hun karakteristieke grafieken en formules;
- exponentiële verbanden met hun karakteristieke grafieken en formules;
- rekenkundige en meetkundige rijen.

Verkennen

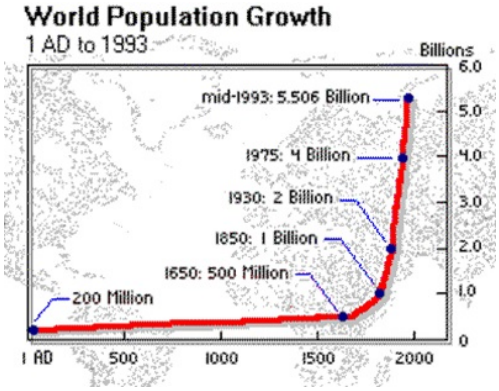
Opgave V1

Vlak voor het jaar 2000 werd dit plaatje gemaakt om de groei van de wereldbevolking in kaart te brengen. Inmiddels is ergens in 2011 de 7 miljard overschreden.

a Tot welk jaar kun je spreken van lineaire groei? Stel een bijpassende formule op en voorspel daarmee het aantal mensen op Aarde in 2050.

b Neem aan dat na die tijd de groei exponentieel is geworden. Welke formule kun je daarbij opstellen? Voorspel ook daarmee het aantal mensen op aarde in 2050.

c Waarom kun je eigenlijk niet precies van exponentiële groei spreken?



Figuur 5.2

Uitleg 1

Vlak voor het jaar 2000 werd het plaatje in **Opgave V1** gemaakt om de groei van de wereldbevolking in kaart te brengen. Inmiddels is ergens in 2011 de 7 miljard overschreden.

Vanaf het jaar 1 tot het jaar 1650 lijkt de grafiek een rechte lijn.

Daarbij past de formule $N \approx 0{,}18t + 200$.

Hierin is t het aantal jaren na het jaar 0 en N het aantal miljoenen mensen.

Wanneer de groei ook na 1650 op die manier was doorgegaan, dan waren er in het jaar 2000 ongeveer 560 miljoen mensen op Aarde geweest. Dit heet lineair extrapoleren. Daarbij gebruik je twee punten van een grafiek en neem je aan dat de grafiek een rechte lijn is die je doortrekt naar 'de toekomst'.

Alleen liep het een beetje anders...

Neem aan dat de groei vanaf 1650 tot 1975 zuiver exponentieel was. Dat lijkt ook wel redelijk te passen bij de hele grafiek.

Dan past bij dat stuk van de grafiek de formule $N \approx 500 \cdot 1{,}006^{t-1650}$.

Hierbij is nog steeds $t = 0$ in het jaar 0 en N in miljoenen.

Nu is de voorspelling voor het jaar 2000 ongeveer 4058 miljoen.

Opgave 1

Bekijk de gegevens in **Uitleg 1**. Er is sprake van een lineair verband vanaf het jaar 0 tot het jaar 1650.

a Laat zien, hoe je aan de formule bij dit verband kunt komen.

b Voorspel door lineair extrapoleren het aantal mensen in 2000 en in 2050.

Het berekenen van tussenwaarden (in dit geval de aantal mensen in een jaartal tussen 0 en 1650) heet lineair interpoleren.

c Voorspel door lineair interpoleren het aantal mensen in het jaar 1000.

Opgave 2

Bekijk de gegevens in **Uitleg 1**. Er is sprake van een exponentieel verband vanaf het jaar 1650 tot het jaar 1975.

a Laat zien, hoe je aan de formule bij dit verband kunt komen.

b Voorspel met behulp van deze formule het aantal mensen in 2000 en in 2050.

In werkelijkheid is de groei nog sneller gegaan.

c Waaraan zie je dit?

Opgave 3

Gebruik opnieuw de gegevens uit **Uitleg 1**.
Om na te gaan of er van een exponentieel verband sprake is, wordt **enkellogaritmisch papier** gebruikt. Op dit soort papier is de horizontale as gewoon lineair, maar de verticale as kent een logaritmische schaal.

a Teken de punten in de gegeven grafiek op dit papier. Laat zien dat je door de punten niet precies een rechte lijn kunt trekken.

b Je kunt wel een lijn tekenen waar al deze punten redelijk bij in de buurt liggen. Welke formule hoort bij deze lijn?

c Voorspel met deze laatste formule het aantal mensen in 2000 en 2050.

Uitleg 2

Bij bevolkingsgroei verandert het aantal mensen voortdurend. Maar er zijn veel situaties met lineaire en exponentiële functies waarin alleen in vaste (tijd)stappen wordt gewerkt. Je spreekt dan niet van een functie, maar van een rij. En je kunt het verloop van zo'n rij op twee manieren beschrijven.

Bij een lineaire rij zoals $a: 5,8,11,14,17,20,...$:

- door recursie met recursieformule $a_n = a_{n-1} + 3$ en begingetal $a_0 = 5$.
- door een directe formule: $a_n = 3 \cdot n + 5$.

Bij een exponentiële rij zoals $b: 5,15,45,135,405,1215,...$:

- door recursie met recursieformule $b_n = b_{n-1} \cdot 3$ en begingetal $b_0 = 5$.
- door een directe formule: $b_n = 5 \cdot 3^n$.

Je kunt overigens het nummer n in plaats van bij 0 ook bij 1 beginnen. Dat heeft gevolgen voor de directe formules.

Opgave 4

Bekijk de twee rijen in **Uitleg 2**.

a Hoe zien de directe formules eruit als je begint bij $n = 1$ in plaats van $n = 0$?

b Als je de 100-ste term wilt berekenen, gebruik je dan liever de directe formule of de recursieformule?

c Bereken de 100-ste term bij beide rijen.

Opgave 5

Bekijk de rij getallen u: $1020,1080,1140,1200,1260,1320,...$

a Welke regelmaat zit er in rij u?

b Is rij u een rij met een lineair of een exponentieel verband?

c Stel een recursieformule op voor rij u.
Begin de nummering van de termen bij 0.

d Bereken u_7 met de recursieformule.

e Stel een directe formule op bij rij u.

f Bereken de honderdste term van rij u.

Opgave 6

Je hebt op 1 januari 2017 € 1200,00 op een spaarrekening gezet tegen $1{,}5\%$ rente per jaar. De bank geeft je maandelijks een overzicht van het saldo van deze rekening en berekent ook maandelijks de rentebijschrijving afgerond op centen. Je neemt dat jaar geen geld op en stort ook niets bij.

a Hoeveel bedraagt het saldo op 1 februari 2017?

b S_n is het saldo na n maanden. Welke recursieformule geldt voor S_n?

c Hoeveel bedraagt het saldo na 1 jaar, dus op 1 januari 2018?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Als er een **lineair verband** bestaat tussen y en x heeft de bijbehorende formule de vorm $y = ax + b$, waarin:

- a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt is: de toe- of afname van y per toename van x met 1;
- b het begingetal is, de waarde van y bij het snijpunt met de y-as.

De grafiek bij een lineair verband is een rechte lijn door $(0,b)$.

Gaat een grafiek door de punten $A(x_A,y_A)$ en $B(x_B,y_B)$ en mag je uitgaan van een lineair verband, dan is:

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Uitkomsten bij punten tussen A en B kun je schatten:

- **lineair interpoleren** is het schatten van tussenliggende waarden, uitgaande van een lineaire toename of afname tussen A en B.
- **lineair extrapoleren** is het schatten van waarden die niet tussen A en B liggen, uitgaande van een lineaire toename of afname tussen A en B.

Bij een **exponentieel verband** hoort een formule van de vorm: $y = b \cdot g^x$, waarin:

- g de groeifactor is: het getal waarmee de waarde van y wordt vermenigvuldigd als x met 1 toeneemt;
- b het begingetal is, de waarde van y bij het snijpunt met de y-as.

Gaat een grafiek door de punten $A(x_A,y_A)$ en $B(x_B,y_B)$ en mag je uitgaan van een exponentieel verband, dan is:

$g = \left(\frac{y_B}{y_A}\right)^{\frac{1}{x_B - x_A}}$

Als bij dergelijke verbanden x alleen de waarden $0,1,2,3,4,...$ kan aannemen, dan spreek je van een **rij**. In plaats van x wordt dan meestal n gebruikt. Rijen kun je beschrijven door:

- een recursieformule zoals: $u_n = u_{n-1} + a$ met $u_0 = b$ voor lineaire rijen en $u_n = u_{n-1} \cdot g$ met $u_0 = b$ voor exponentiële rijen;
- een directe formule zoals: $u_n = a \cdot n + b$ voor lineaire rijen en $u_n = b \cdot g^n$ voor exponentiële rijen.

Je kunt in plaats van met $n = 0$ ook met $n = 1$ beginnen. De formules moeten dan iets worden aangepast. Voor het rekenen met recursieformules bestaat op de grafische rekenmachine een speciale 'mode' of een speciaal 'menu'.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Van een bepaald verband gaat de grafiek door $A(1,3)$ en $B(5,4)$.

- Stel een bijpassende formule op als het verband lineair is.
- Stel een bijpassende formule op als het verband exponentieel is.

Antwoord

- Bij een lineair verband hoort een formule van de vorm $y = a \cdot x + b$.
  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{5-1} = 0,25$
  In $y = 0,25x + b$ vul je nog de coördinaten van A (of B) in: $3 = 0,25 + b$ geeft $b = 2,75$.
  Dus wordt de formule $y = 0,25x + 2,75$.
- Bij een exponentieel verband hoort een formule van de vorm $y = b \cdot g^x$.
  $g = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5-1}} \approx 1,075$
  In $y = b \cdot 1,075^x$ vul je nog de coördinaten van A (of B) in: $3 = b \cdot 1,075^1$ geeft $b \approx 2,79$.
  Dus wordt de formule $y \approx 2,79 \cdot 1,075^x$.

Opgave 7

Een lineaire functie heeft een grafiek die door $P(10,200)$ en $Q(22,128)$ gaat.

a Stel een bijpassende formule op.

b Bereken door lineair interpoleren de y-waarde bij $x = 20$.

c Bereken door lineair extrapoleren de y-waarde bij $x = 30$.

Opgave 8

Een exponentiële functie heeft een grafiek die door $P(10,200)$ en $Q(22,128)$ gaat.

a Stel een bijpassende formule op.

b Bereken de y-waarde bij $x = 30$.

Opgave 9

In een bepaalde regio zijn de jaarlijkse kosten K_j voor het verbruik van water € 1,20 per m^3 en de vaste kosten K_v, het vastrecht, € 70,00 per jaar.

a Welke formule geldt voor de kosten van het verbruik K_j als functie van a, als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?

b Welke formule geldt voor de totale kosten K als functie van a, als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?

c Met hoeveel neemt K toe als a met 1 m^3 toeneemt?

d Hoeveel betaal je in deze regio als je geen water verbruikt?

e Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 195 m^3 water. Hoeveel moet dit huishouden dat jaar betalen?

f Welke formule, die van K_j of die van K, geeft een recht evenredig verband en waarom?

Voorbeeld 2

Plutonium-238 wordt gebruikt als brandstof in kernreactoren. Het wordt ook toegepast als brandstof voor ruimtesondes, zoals de sonde New Horizons. Plutonium-238 heeft als eigenschap dat het 'vervalt', er verdwijnt steeds een beetje van de stof.

Bekijk de vervaltabel van plutonium-238.

tijd t (jaar)	0	50	100	150	200	250	300	350	400
hoeveelheid H (µg)	1000	650	455	300	200	130	95	55	45

Tabel 5.1

Zet de gegevens uit de tabel uit op **enkellogaritmisch papier**. Stel een bij dit verval passende formule voor $H(t)$ op.

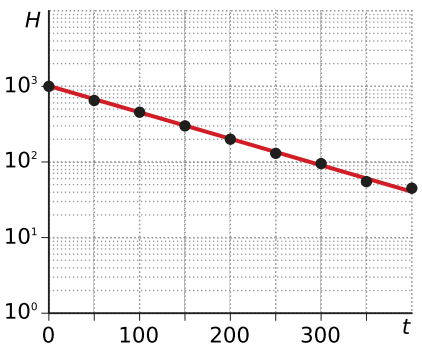
Antwoord

Voor de grafiek:

- $1000 = 10^3$: het eerste punt komt bij 10^3.
- $650 = 6{,}5 \cdot 10^2$: het tweede punt komt tussen het vijfde en zesde streepje boven 10^2.
- $455 = 4{,}55 \cdot 10^2$: het derde punt komt tussen het derde en vierde streepje boven 10^2.
- Enzovoort.

De getekende punten liggen bij benadering op een rechte lijn. Daarom mag je aannemen dat er tussen t en H een exponentieel verband van de vorm $H = b \cdot g^t$ bestaat. Je gaat dus uit van een exponentieel groeimodel.

De bijpassende formule is: $H = 1000 \cdot 0{,}992^t$.
Met deze formule kan bijvoorbeeld worden berekend hoeveel plutonium-238 er na 75 jaar nog over is en hoe groot de halveringstijd van plutonium-238 is.



Figuur 5.3

Opgave 10

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Leg uit waar je het laatste punt uit de tabel op enkellogaritmisch papier moet zetten.

b Bereken hoeveel plutonium-238 er na 75 jaar nog over is.

c Bereken de halveringstijd van plutonium-238.

d De VS en de Russische Federatie zijn onderling overeengekomen om elk 34 ton van hun overtollig geworden kernwapenplutonium te vernietigen.
Stel dat deze 34 ton allemaal plutonium-238 is en dat deze afspraak niet was gemaakt.
Bereken hoelang het dan zou duren voordat er nog minder dan 5% van deze 68 ton plutonium-238 over is.

Opgave 11

Gegeven is een rechte lijn op enkellogaritmisch papier door de punten $(3{,}54)$ en $(5{,}486)$. Stel een bijpassende formule op.

Opgave 12

Wanneer een zalmkwekerij een aantal zalmen in een vijver uitzet en de condities zijn in orde, dan zullen de vissen zich gaan vermenigvuldigen.
Het verband tussen de tijd t in maanden nadat de eerste zalmen in de vijver zijn uitgezet en het aantal zalmen A dat in de vijver leeft, wordt weergegeven met de formule:

$A(t) = \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t}$

a Teken de grafiek bij deze formule op enkellogaritmisch papier.

b Wat voor soort groeimodel hoort bij het begin van de grafiek?

c Na hoeveel maanden zullen er voor het eerst meer dan 1500 zalmen zijn?

d Bereken met de grafische rekenmachine na hoeveel maanden de helling het steilst is. Hoeveel zalmen komen er die maand bij?

e Welke asymptoot heeft de grafiek? Wat is de praktische betekenis daarvan?

Voorbeeld 3

Bekijk de tabel en grafiek van het Centraal Bureau voor de Statistiek over het aantal daklozen in Nederland op 1 januari van elk jaar tussen 2009 en 2015.

Daklozen absoluut							
Perioden	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
Persoonskenmerken	x 1000						
totaal personen	17,8	23,3	24,4	27,3	24,8	26,9	31,0
geslacht: mannen	14,2	17,6	19,7	22,5	19,9	21,4	25,3
geslacht: vrouwen	3,6	5,7	4,7	4,8	4,8	5,5	5,7
leeftijd: 18 tot 30 jaar	4,0	6,1	6,4	6,4	7,2	6,8	8,3
leeftijd: 30 tot 50 jaar	10,1	12,7	13,2	15,0	12,8	14,3	16,4
leeftijd: 50 tot 65 jaar	3,7	4,6	4,7	5,9	4,7	5,8	6,2

Figuur 5.4

- Schat door middel van lineair interpoleren het aantal mannelijke daklozen op 1 april 2012.
- Schat door middel van lineair extrapoleren het aantal daklozen met een leeftijd tussen de 30 en 50 jaar op 1 oktober 2016.

Antwoord

Ga uit van een lineair model.

- Op 1 januari 2012 waren er 22500 mannelijke daklozen en op 1 januari 2013 waren er 19900.
  In een jaar tijd is het aantal daklozen met $22500-19900=2600$ afgenomen.

  Dat is een afname van $\frac{2600}{4}=650$ per kwartaal.

  Op 1 april is het eerste kwartaal net voorbij.
  Op 1 april 2012 waren er naar schatting $22500-650=21850$ mannelijke daklozen.
- Op 1 januari 2014 waren er 14300 daklozen tussen de 30 en 50 jaar.
  Op 1 januari 2015 waren er 16400.
  In een jaar tijd is het aantal daklozen tussen de 30 en 50 jaar met $16400-14300=2100$ toegenomen.

  Dat is een toename van $\frac{2100}{4}=525$ per kwartaal.

  Op 1 oktober is het derde kwartaal net voorbij.
  Tussen 1 januari 2015 en 1 oktober 2016 zitten zeven kwartalen.
  Op 1 oktober 2016 waren er naar schatting $16400+7\cdot525=20075$ daklozen van 30 tot 50 jaar.

Opgave 13

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.

a Schat door middel van lineair interpoleren het aantal vrouwelijke daklozen op 1 april 2013.

b Schat door middel van lineair extrapoleren het aantal daklozen tussen de 18 en 30 jaar op 1 oktober 2016.

Voorbeeld 4

Een bioloog houdt de populatiegroei van kikkers in een natuurgebied in de gaten. Als er te veel kikkers zijn, is er sprake van een plaag en moet er worden ingegrepen. Er wordt gesproken over een plaag wanneer het aantal kikkers meer dan 400.000 bedraagt.

Bekijk de tabel met meetgegevens van 1990 t/m 2015.

- De aantallen kikkers in de tabel vormen een exponentiële rij u.
- Stel een recursieformule op bij rij u. Neem $n = 0$ in 1990.
- Stel een directe formule op bij rij u.
- Bereken in welk jaar er een kikkerplaag zal zijn als de groei op deze manier doorgaat.

jaar	aantal kikkers (×1000)
1990	212
1995	230
2000	250
2005	272
2010	295
2015	320

Tabel 5.2

Antwoord

- De groeifactor is ongeveer $1{,}018 \approx 1{,}02$, dus de recursieformule is $u_n = u_{n-1} \cdot 1{,}02$ met $u_0 = 212$.
- $u_n = 212 \cdot 1{,}02^n$
- Los de vergelijking $212 \cdot 1{,}02^n = 400$ op.
  Je vindt $n \approx 32$.
  In 2022 zal er een kikkerplaag zijn.

Opgave 14

Bekijk **Voorbeeld 4**.

a Laat zien dat rij u (bij benadering) geen lineaire rij maar een exponentiële rij is.

b Bereken met de recursieformule het aantal kikkers in 1992.

c Laat zien hoe je met behulp van logaritmen de vergelijking $212 \cdot 1{,}02^n = 400$ oplost.

Opgave 15

Bekijk de tabel met het aantal inschrijvingen voor een congres. Er is ruimte voor 500 inschrijvingen.

tijdstip (uur)	00:00	04:00	08:00	12:00	16:00	20:00
aantal	25	61	97	132	168	205

Tabel 5.3

a De aantallen inschrijvingen in de tabel vormen rij u.
Zoek uit of rij u (bij benadering) een rij met een lineair of een exponentieel verband is.

b Stel een recursieformule op bij rij u. Neem $n = 0$ om 00:00 uur.

c Bereken met de recursieformule het aantal inschrijvingen om 02:00 uur.

d Stel een directe formule op bij rij u. Is dit een lineaire of een exponentiële formule?

e Bereken na hoeveel uur de inschrijving voor het congres wordt gesloten als de groei op deze manier doorgaat.

Verwerken

Opgave 16

Harm heeft een huis gekocht waar veel aan verbouwd moet worden. Hij is nog op zoek naar een loodgieter.

Loodgieter De Graaf rekent € 42,50 per uur inclusief voorrijkosten.
Loodgieter Willemsen rekent € 39,00 per uur exclusief voorrijkosten van € 20,00 per dag.

a Wat voor soort verband bestaat er tussen het aantal uur per dag a dat loodgieter De Graaf werkt en de kosten K (€) die hij in rekening brengt?
Stel hierbij een formule op.

b Wat voor soort verband bestaat er tussen het aantal uur per dag a dat loodgieter Willemsen werkt en de kosten K (€) die hij in rekening brengt?
Stel hierbij een formule op.

c Harm kan niet precies inschatten hoeveel tijd de klus zal kosten, maar hij verwacht dat de klus door de loodgieter binnen een werkdag geklaard zal zijn.
Vanaf hoeveel uur is het voor Harm voordeliger om loodgieter Willemsen in te huren?

Opgave 17

Bekijk de tabel met een overzicht van het aantal personenauto's in Nederland.

tijd (jaar)	1999	2005	2007	2008	2009	2010
aantal personenauto's	4100000	4300000	4350000	4410000	4500000	4660000

Tabel 5.4

a Bepaal door lineair interpoleren de aantallen personenauto's voor het jaar 2000 en het jaar 2006.

b Bepaal door lineair extrapoleren de aantallen voor 2014 en 2016.

c In 1990 telde Nederland $14{,}89$ miljoen inwoners.

Hoeveel auto's waren er per Nederlander in 1990? Geef je antwoord in twee decimalen.

d Hoeveel Nederlanders waren er per auto in 1990?
Geef je antwoord in twee decimalen.

Opgave 18

Onderzoekers zijn erachter gekomen dat bonobo's net als mensen vanaf ongeveer hun veertigste last krijgen van verziendheid. Aanleiding voor het onderzoek was de constatering dat oudere apen tijdens het vlooien hun armen verder strekken en hun hoofd verder van hun vlooipartner vandaan houden dan jongere apen.

Bekijk de tabel met enkele meetgegevens. Hierin is A het aantal millimeter dat de apen hun hoofd van hun vlooipartner vandaan houden, de vlooiafstand, en t de leeftijd van de aap in jaar.

t (jaar)	40	42	44	46	48	50
A (millimeter)	29	42	61	89	131	192

Tabel 5.5

a Teken de punten uit de tabel op enkellogaritmisch papier.

b Wat voor soort groeimodel hoort bij het verband tussen de leeftijd van een bonobo en de vlooiafstand? Hoe zie je dat aan de grafiek?

De onderzoekers hebben een formule opgesteld die het beste bij de punten in de grafiek past. Deze formule is: $A = 28{,}5 \cdot 1{,}21^t$. Hierin is $t = 0$ bij een leeftijd van 40 jaar.

c Bereken vanaf welke leeftijd de vlooiafstand voor het eerst meer dan 250 millimeter is.

Opgave 19

Gegeven is de rij u_n waarin elke term 6 meer is dan de vorige term.

De vierde term in de rij is 55.

a Maak een tabel bij de rij met een nummering die begint bij 0.

b Bepaal u_8.

c Stel de directe formule en de recursieformule op. Begin de nummering bij $n = 0$.

Gegeven is de rij v_n waarin elke term $0{,}6$ keer de vorige term is.

De vierde term in de rij is 55. Elke term wordt afgerond op een geheel getal.

d Stel de directe formule en de recursieformule op. Begin de nummering bij $n = 0$.

Opgave 20

Wilde zwijnen komen in Nederland onder andere op de Veluwe voor. Over het gewenste aantal wilde zwijnen op de Veluwe bestaat al geruime tijd verschil van mening. Als er veel wilde zwijnen zijn, veroorzaken ze overlast en schade aan gewassen. Als er weinig wilde zwijnen zijn, komt het voortbestaan van deze diersoort in gevaar.

Volgens de faunabeheereenheid Veluwe is er op de Veluwe plaats en voedsel voor 835 wilde zwijnen. Dit streefgetal is door de minister van Landbouw overgenomen. Jagers krijgen daarom jaarlijks toestemming om een bepaald aantal wilde zwijnen af te schieten.

a In 2008 was dit aantal af te schieten wilde zwijnen 1915.
Bereken hoeveel procent wilde zwijnen er toen te veel waren.

Tot de niet-natuurlijke vijanden van het wilde zwijn behoren naast jagers ook auto's. In de tabel is het aantal aangereden wilde zwijnen op de Veluwe in de periode 2005-2007 weergegeven. Dit aantal groeit bij benadering exponentieel.

tijd (jaar)	2005	2006	2007
aangereden wilde zwijnen	131	275	578

Tabel 5.6

Als je veronderstelt dat de groei zich na 2007 op deze wijze blijft voortzetten, kun je een formule opstellen die het aantal aangereden wilde zwijnen Z uitdrukt in de tijd t met t in jaar en $t = 0$ in 2005.

b Stel deze formule op en bereken met deze formule in welk jaar er voor het eerst meer dan 1700 wilde zwijnen worden aangereden.

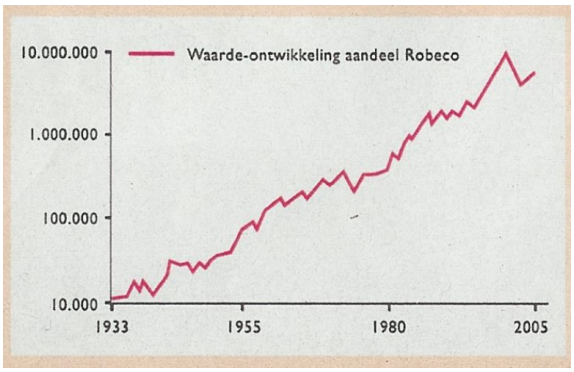
(bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2012, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 21: Aandeel

Bekijk deze grafiek uit een advertentie. Het gaat om de waarde van het aandeel Robeco in de periode 1933-2005. Je kunt in de grafiek bijvoorbeeld aflezen dat in 2000 de waarde van het aandeel Robeco gelijk was aan € 10.000.000,00.

Let op de schaalverdeling langs de verticale as. Er geldt: in 1980 ligt de waarde tussen € 100.000,00 en € 1.000.000,00. Bij deze schaalverdeling kun je zo'n tussenliggende waarde vrij nauwkeurig bepalen.



Figuur 5.5

a Schrijf in maximaal vijf regels een uitleg waarin je demonstreert hoe je de waarde van het aandeel in 1980 bepaalt.

De waardeontwikkeling van het aandeel tussen 1933 en 2000 kan worden benaderd door een rechte lijn. Dit houdt in dat de waarde in deze periode (bijna) exponentieel groeide. Neem aan dat de waarde in 2000 precies € 10.000.000,00 was.

b Bereken (uitgaande van de exponentiële groei) met hoeveel procent de waarde van het aandeel Robeco in de periode 1933-2000 per jaar groeide.

c Bij exponentiële groei wordt vaak de verdubbelingstijd gebruikt. Met het antwoord op b kun je ook de verdubbelingstijd berekenen. Bereken de verdubbelingstijd.
Heb je bij b geen antwoord, gebruik dan 9%.

(bron: voorbeeldexamen vwo wiskunde C in 2018)

Opgave 22: Vierkanten

Een groot vierkant wordt onderverdeeld in 625 kleine vierkantjes (25 in de breedte en 25 in de lengte). In ieder vierkantje komt een getal te staan. Alle getallen van 0 tot en met 624 komen precies één keer voor. Deze getallen zijn zó gerangschikt dat als je alle getallen in een rij bij elkaar optelt, dit steeds hetzelfde getal oplevert: het magische getal. Ook als je alle getallen in een kolom bij elkaar optelt, komt ditzelfde magische getal eruit.

Bekijk de figuur met een voorbeeld voor een vierkant van 3 bij 3 getallen:
het magische getal is hier 12.

5	0	7
6	4	2
1	8	3

Tabel 5.7

Het magische getal van het vierkant kun je berekenen door alle getallen van 0 tot en met 624 bij elkaar op te tellen en de uitkomst vervolgens te delen door het aantal rijen: elke rij moet immers bij optellen hetzelfde getal opleveren.

Voor een rij getallen zoals in dit kunstwerk geldt de volgende formule:
som $= 0{,}5 \cdot$ aantal termen $\cdot$ (eerste term + laatste term)

a Bereken met behulp van deze formule het magische getal van het vierkant met 625 kleine vierkantjes.

In het algemeen geldt voor een vierkant van p bij p getallen waarin elk getal van 0 tot en met $p^2 - 1$ precies één keer voorkomt de volgende formule voor het magische getal:
magisch getal $= 0{,}5 \cdot p \cdot \left(p^2 - 1\right)$
Deze formule voor het magische getal is af te leiden door gebruik te maken van het volgende:

- Voor de som van alle getallen in het vierkant geldt de formule: som $= 0{,}5 \cdot$ aantal termen $\cdot$ (eerste term + laatste term)
- Het aantal termen is p^2 (dit is namelijk gelijk aan het aantal getallen in een vierkant van p bij p getallen).
- De eerste term is 0, de laatste term is $p^2 - 1$.
- Het magische getal is gelijk aan de som van alle getallen in het vierkant gedeeld door het aantal rijen.

b Laat zien hoe met behulp hiervan de formule magisch getal $= 0{,}5 \cdot p \cdot \left(p^2 - 1\right)$ is af te leiden.

c Bereken voor welke waarden van p het magische getal van zo'n vierkant ligt tussen 500 en 1000.

(bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2013, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 23

Het aantal inwoners van België bedroeg in 1900 omstreeks $6{,}694$ miljoen en in 2016 omstreeks $11{,}268$ miljoen.

Noem het aantal inwoners van België in miljoenen N en de tijd in jaren na 1900 t.

a Ga uit van een lineaire groei van het Belgische inwoneraantal en stel een bijpassende formule voor N afhankelijk van t op.

b Schat door lineair extrapoleren het aantal inwoners van België in 2050.

c Ga uit van een exponentiële groei van het Belgische inwoneraantal en stel een bijpassende formule voor N afhankelijk van t op.

d Schat uitgaande van de exponentiële groei het aantal inwoners van België in 2050.

e In hoeveel jaar tijd verdubbelt bij exponentiële groei het aantal inwoners van België?.

Opgave 24

Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) houdt bij hoeveel studenten er zijn in het wetenschappelijk onderwijs in Nederland. De tabel geeft daar informatie over.

studiejaar	mannen	vrouwen
1991 - 1992	98272	75281
1992 - 1993	97784	76739
1993 - 1994	97270	78052
1994 - 1995	95256	78372
1995 - 1996	91310	75959
1996 - 1997	83850	70226
1997 - 1998	80472	68014
1998 - 1999	79347	68524
1999 - 2000	80113	70631

Tabel 5.8

Iemand trekt uit de tabel de volgende twee conclusies:

1. Het aantal vrouwelijke studenten was in het studiejaar 1999-2000 ruim 6 procent lager dan in het studiejaar 1991-1992.
2. Het aandeel van de vrouwelijke studenten was in het studiejaar 1999-2000 groter dan in het studiejaar 1991-1992.

a Onderzoek voor elk van deze conclusies of deze juist is of niet.

Lenneke was een van die studenten. Zij heeft haar studie psychologie in september 2002 succesvol afgerond. Tijdens haar studie heeft zij geld geleend van de IBG (Informatie Beheer Groep). In de loop van 2004 kreeg zij van de IBG het zogenoemde Bericht Terugbetalen. Daaruit komt het volgende citaat.

"Geachte mevrouw,

Volgens onze gegevens moet u per 1 januari 2005 beginnen met de terugbetaling van uw studieschuld. Op 1 januari 2005 bedraagt deze schuld 3011 euro.
U kunt uw schuld ineens betalen, maar u mag dit ook in maandelijkse termijnen doen.
In uw situatie is deze maandelijkse termijn vastgesteld op 45,41 euro en dit bedrag zal op de laatste dag van iedere maand van uw rekening worden afgeschreven. Bij het terugbetalen berekent de IBG een rente van 3,73% op jaarbasis over de schuld die overblijft."

Een rente van $3{,}73\%$ per jaar betekent een rente van (ongeveer) $0{,}3\%$ per maand.

b Laat met behulp van een berekening zien dat dit klopt.

Lenneke besloot destijds om vanaf januari 2005 elke maand $45{,}41$ euro af te lossen. De hoogte van haar schuld S_n na n maanden voldoet dus aan de volgende recurrente betrekking (recursieformule):

$S_{n+1} = 1{,}003 \cdot S_n - 45{,}41$ met $S_0 = 3011$.

Bij de Oudejaarsloterij van december 2005 wint Lenneke 2500 euro. Zij besluit dit bedrag op 1 januari 2006 voor haar aflossing te gebruiken.

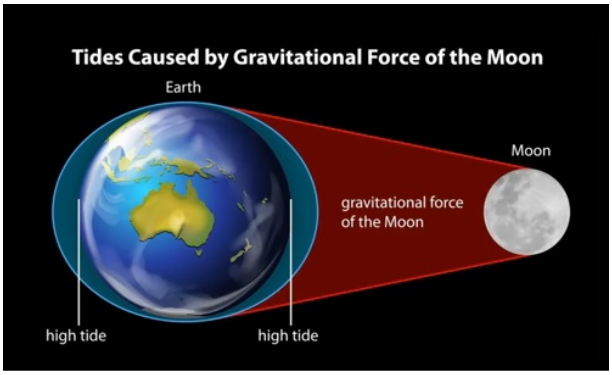
c Heeft Lenneke op 2 januari 2006 nog schulden bij de IBG? Licht je antwoord met een berekening toe.

(bron: examen wiskunde A1 in 2009, tweede tijdvak)

2.6 Veranderingen

Inleiding

Bekende, voortdurende veranderingen betreffen de waterstand. Je kent het eb-en-vloed-verschijnsel natuurlijk wel. In dit geval heb je met een periodieke verandering te maken. Maar je kunt ook kijken naar veranderingen in grafieken die niet periodiek zijn. Dan werk je met hellingsgetallen.



Figuur 6.1

Je leert in dit onderwerp

- niks nieuws, dit zou je al moeten weten, maar misschien is het werken met periodieke verbanden even geleden.

Voorkennis

- allerlei verbanden met hun karakteristieke grafieken en formules;
- logaritmische schalen gebruiken;
- werken met periodiciteit, met de periode van een periodiek verschijnsel;
- werken met veranderingen, hellingsgetal en differentiaalquotiënt.

Verkennen

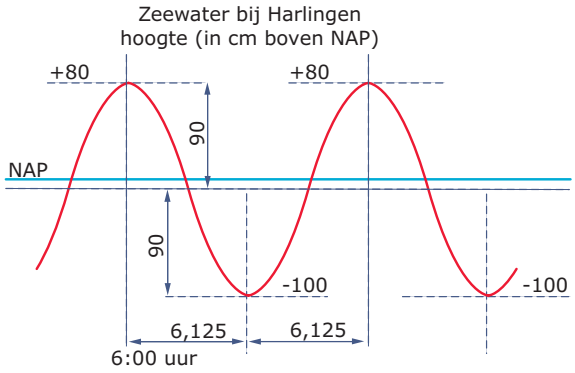
Opgave V1

In de getijdeninformatie van Harlingen kun je aflezen dat bij hoogwater de waterstand h ongeveer 80 cm boven NAP (Normaal Amsterdams Peil) zit en dat bij laagwater de waterstand ongeveer 100 cm onder NAP zit. Verder liggen de opeenvolgende tijdstippen van hoogwater (net als die van laagwater) ongeveer 12 uur en 15 minuten uit elkaar. Op een zekere dag is het hoogwater om 6:00 uur.

De bijbehorende grafiek verandert periodiek. De periode is de tijd die tussen twee tijdstippen van hoogwater (of laag water) zit.

a Hoeveel uur is de periode?

b Op welke tijdstippen stijgt de waterhoogte het snelst?



Figuur 6.2

Uitleg 1

Een fabrikant van spelcomputers heeft ontdekt dat er een verband bestaat tussen de verkoopprijs p van een spelcomputer (€) en het aantal spelcomputers q dat per dag wordt verkocht.
Dit verband is: $q = 300 - 0{,}5p$.

De opbrengst R (€) per dag bereken je door het aantal verkochte spelcomputers te vermenigvuldigen met de verkoopprijs. De formule voor de opbrengst is: $R = q \cdot p$.

Door deze twee formules met elkaar te combineren kun je een formule opstellen voor de opbrengst afhankelijk van de verkoopprijs.

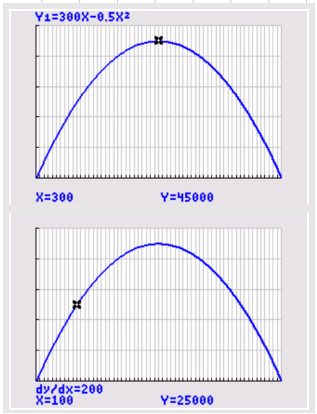
Vul deze uitdrukking voor q nu in de formule $R = q \cdot p$ in:

$R = p \cdot q = p \cdot (300 - 0{,}5p) = 300p - 0{,}5p^2$

Er ontstaat een kwadratische formule.

De bijbehorende grafiek is een bergparabool. De top van deze parabool geeft aan voor welk aantal verkochte spelcomputers per dag de opbrengst maximaal is.
Voer in je grafische rekenmachine in: $y_1 = 300x - 0{,}5x^2$ met als venster bijvoorbeeld $0 \leq x \leq 600$ en $0 \leq y \leq 50000$. Bepaal het maximum van de grafiek, dit geeft: $x = 300$ en $y = 45000$.
Bij een verkoopprijs van € 300,00 per spelcomputer is de opbrengst per dag maximaal, de opbrengst is dan € 45000,00.

Het hellingsgetal van een punt x op de grafiek kun je vinden met de grafische rekenmachine. Je schrijft het als $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$. Het hellingsgetal voor $x = 100$ is gelijk aan 200. Uit de grafiek blijk dat het hellingsgetal in een punt links van de top positief is. Het hellingsgetal in een punt in een top is meestal 0.



Figuur 6.3

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.

a Door de twee formules $R = q \cdot p$ en $q = 300 - 0{,}5p$ met elkaar te combineren kun je een formule opstellen voor de opbrengst afhankelijk van het aantal verkochte spelcomputers.
Stel deze formule op.

b Wat voor soort verband bestaat er tussen R en q?

c Plot zelf de grafiek van het verband tussen R en q en bepaal het maximum van de grafiek. Wat is de praktische betekenis hiervan?

d Hoe groot is de helling van deze grafiek voor $q = 50$? Wat is de praktische betekenis hiervan?

Opgave 2

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.
De fabrikant heeft iedere dag € 1200,00 aan vaste kosten. Daarbovenop komen de kosten voor het maken van iedere spelcomputer, deze kosten bedragen € 30,00 per stuk.

a Stel een formule op voor de totale kosten per dag K (€) afhankelijk van q.

b De fabrikant wil een formule hebben waarmee hij de totale kosten per dag K kan berekenen als de verkoopprijs p bekend is.
Stel deze formule op.

c Wat voor soort verband bestaat er tussen K en p?

De fabrikant wil ook een formule hebben waarmee hij de winst per dag kan berekenen als de verkoopprijs bekend is.
De winst W per dag krijg je door de totale kosten van de totale opbrengst af te halen: $W = R - K$.

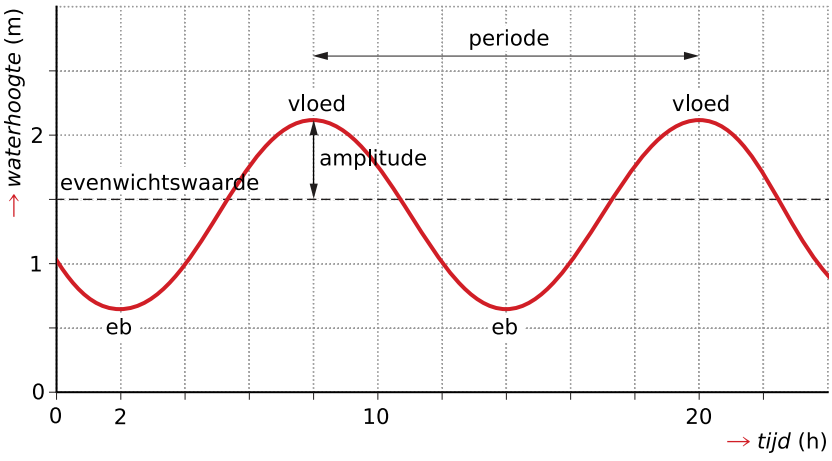
d Druk W uit in p.

e Bij welke verkoopprijs is de winst per dag maximaal? Hoe hoog is die maximale winst?

f Bepaal de helling bij $p = 200$. Wat is de praktische betekenis hiervan?

Uitleg 2

Bekijk de grafiek van de waterstand van een bepaalde plek in de Waddenzee gedurende een dag. Het is een voorbeeld van een periodiek model.



Figuur 6.4

Een periodieke grafiek herhaalt zich steeds. De minimale tijd waarin de grafiek zich herhaalt heet de periode. De periode van deze grafiek is ongeveer 12 uur en 5 minuten.
De grafiek herhaalt zich met een frequentie van iets minder dan twee keer per dag.
De evenwichtswaarde is het gemiddelde van het hoogste punt en het laagste punt van de grafiek.

De evenwichtswaarde van deze grafiek is ongeveer $\frac{2{,}1+0{,}6}{2} = 1{,}35$ meter.
De amplitude is de afstand tussen de evenwichtswaarde en het hoogste of het laagste punt van de grafiek.
De amplitude van deze grafiek is ongeveer $2{,}1-1{,}35 = 0{,}75$ meter.

Met de periode kun je berekenen wat de waterstand twee dagen later om 16:20 uur zal zijn. Je haalt dan net zo vaak de periode van het gevraagde tijdstip af, totdat je een tijdstip overhoudt dat hoort bij de dag van de grafiek. Bij dat tijdstip lees je de waterstand af.

De grafiek is elke dag (afhankelijk van de omstandigheden) anders, zodat de waterstand niet zuiver periodiek is.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

a Gedurende hoeveel tijd is de waterhoogte deze dag 1 meter of hoger?

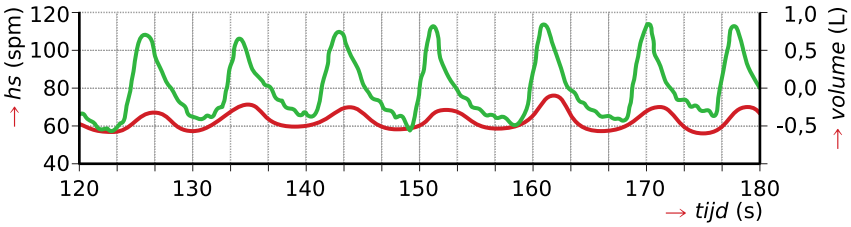
b Hoe hoog is de waterstand twee dagen later om 16:20 uur?

Opgave 4

Er zijn ook periodieke verschijnselen die met het menselijk lichaam hebben te maken. Denk aan:

- de longinhoud bij de ademhaling;
- de bloeddruk in je aderen als gevolg van het kloppen van je hart.

Bekijk de figuur met daarin een ademhalingsgrafiek (groen) en een hartslaggrafiek (rood). Voor de groene grafiek zijn de toename en de afname van het longvolume gemeten. Door inademen ontstaan waarden boven nul en door uitademen ontstaan waarden onder nul. Op de horizontale as staat de tijd in seconden. Op de verticale as staat voor de rode grafiek 'hs' (spm), ofwel de hartslag in slagen per minuut. De toe- en afname voor het longvolume is uitgedrukt in volume in liter.



Figuur 6.5

a Geef de maximale en minimale toename van het longvolume.

b Hoelang is de periode van een ademhaling?

c Hoeveel ademhalingen per minuut zijn bij deze persoon zichtbaar?

d Hoe groot is de evenwichtswaarde voor het aantal hartslagen per minuut?

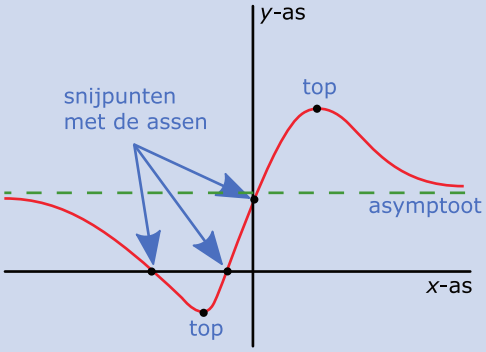
e Hoe groot is de amplitude voor het aantal hartslagen per minuut?

f Kun je verklaren waarom de periode van de hartslaggrafiek en die van de ademhalingsgrafiek ongeveer gelijklopen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

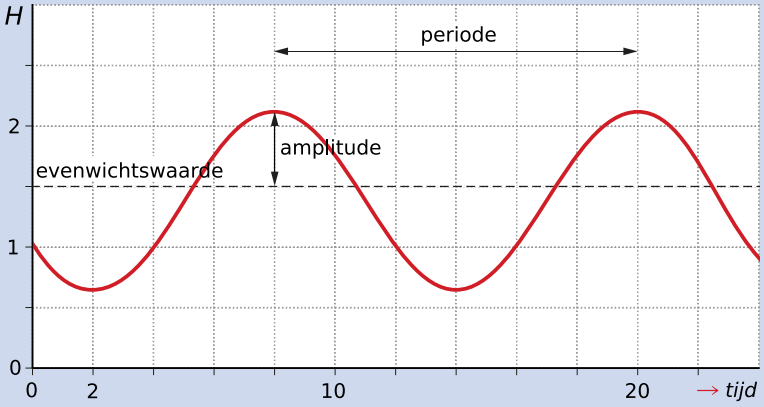
De ene grafiek onderscheidt zich van een andere grafiek door haar karakteristieken. Dat kunnen zijn: de snijpunten met de assen, de asymptoten (denk hierbij ook aan de grenswaarde) of de toppen. Het is handig deze karakteristieken goed in beeld te krijgen. Bedenk of er waarden zijn die niet in de formule mogen worden ingevuld. Kijk ook wat er gebeurt met de formule als voor de variabele een heel groot (positief en/of negatief) getal wordt ingevuld.



Figuur 6.6

Het differentiaalquotiënt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = a$ is het hellingsgetal in een punt op de grafiek. Dit is een maat voor de snelheid waarmee de grafiek verandert.

- Als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$, dan stijgt de grafiek en als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} < 0$, dan daalt de grafiek.
- Als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, dan kan er sprake zijn van een top, maar dat hoeft niet.



Figuur 6.7

Periodieke verbanden hebben grafieken die zich in een vast tijdsbestek, de **periode**, herhalen.
Het aantal herhalingen per tijdseenheid heet de **frequentie**.
Vaak is er sprake van een **evenwichtsstand** en een **amplitude** (maximale uitwijking uit de evenwichtsstand).

Voorbeeld 1

Een kaasboer houdt bij hoeveel kilogram geraspte kaas hij per week verkoopt. Er blijkt een verband te zijn tussen de hoeveelheid k (kg) die hij verkoopt en de prijs p per kilogram. Hierbij hoort de formule:

$k = \frac{195}{p} + 15$

- Plot de grafiek bij de formule van de kaasboer en bepaal bij welke prijs per kilogram de verkoop per week 50 kilogram is.
- Welke asymptoten heeft de grafiek?
- Bepaal de helling van de grafiek bij $p = 10$. Wat is de praktische betekenis daarvan?

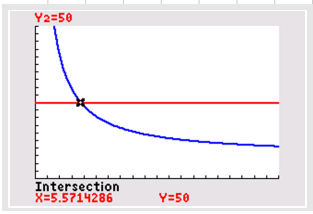
Antwoord

- Voer in op de GR: $y_1 = \frac{195}{x} + 15$ en $y_2 = 50$.

  Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 30$ en $0 \leq y \leq 100$.
  Snijpunt bij $x \approx 5{,}57$. De prijs is $5{,}57$ euro/kg.
- Omdat je niet door 0 mag delen, heeft de grafiek een verticale asymptoot: $p = 0$.

  Wanneer je voor p een heel groot getal invult, nadert $\frac{195}{p}$ naar 0. Dan nadert $\frac{195}{p} + 15$ naar 15. De grafiek heeft een horizontale asymptoot: $k = 15$.
- Het differentiaalquotiënt voor $x = 10$ is: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx -1{,}95$.

  Als de prijs per kilo € 10,00 is, dan neemt de verkochte hoeveelheid per week met $1{,}95$ kg af als de prijs per kilo met € 1,00 toeneemt.



Figuur 6.8

Opgave 5

Een visboer houdt bij hoeveel kilogram kibbeling hij per week verkoopt. Er blijkt een verband te zijn tussen de hoeveelheid k (kg) die hij verkoopt en de prijs p per kilogram. Hierbij hoort de formule:

$k = \frac{960}{p} + 20$

a Plot de grafiek bij de formule van de visboer en bepaal bij welke prijs per kilogram de verkoop per week 55 kilogram is.

b Bereken ook algebraïsch bij welke prijs de verkoop per week 55 kilogram is.

c Welke asymptoten heeft de grafiek?

d Bepaal de helling van de grafiek bij $p = 15$. Wat is de praktische betekenis daarvan?

Opgave 6

Een fabrikant heeft een formule opgesteld die het verband weergeeft tussen de opbrengst R per dag (€) en het aantal verkochte artikelen q. De formule is:
$R = 500q - 1{,}5q^2$

a Wat voor soort verband bestaat er tussen R en q?

b Plot de bijbehorende grafiek.

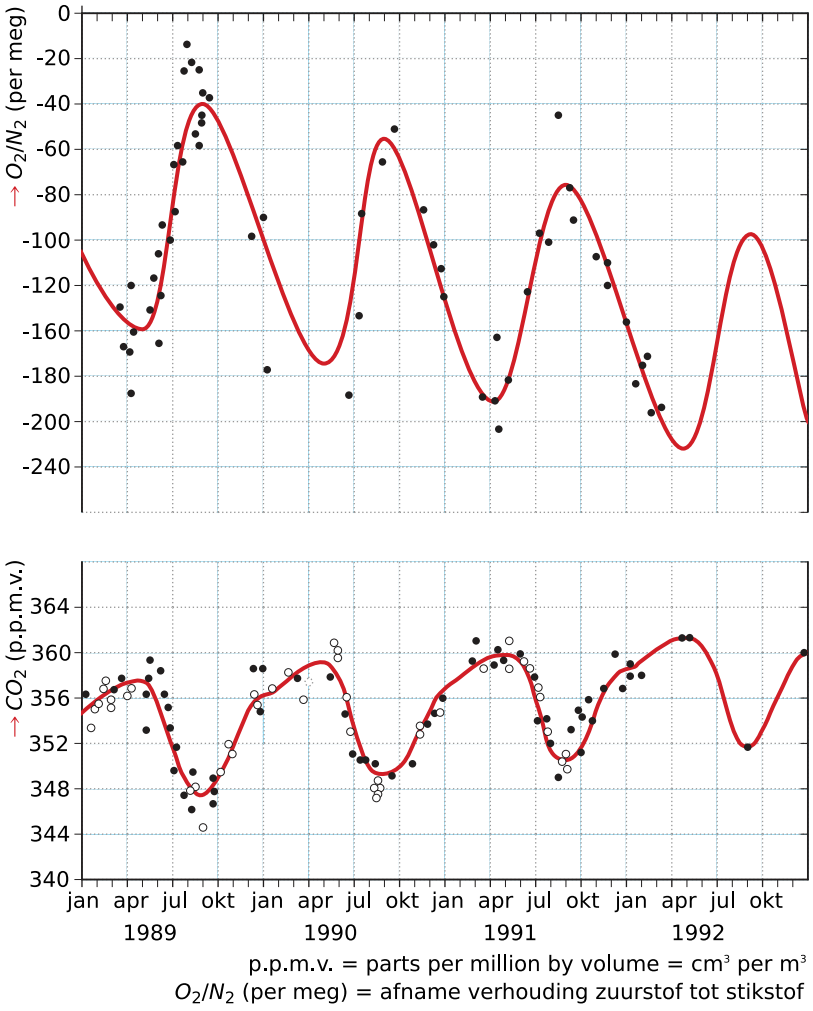
c Bepaal het maximum van de grafiek. Wat is de praktische betekenis hiervan?

d Bepaal de helling als $q = 150$. Wat is de praktische betekenis hiervan?

e Hoeveel artikelen moet de fabrikant verkopen om een opbrengst te hebben die hoger is dan € 30000?

Voorbeeld 2

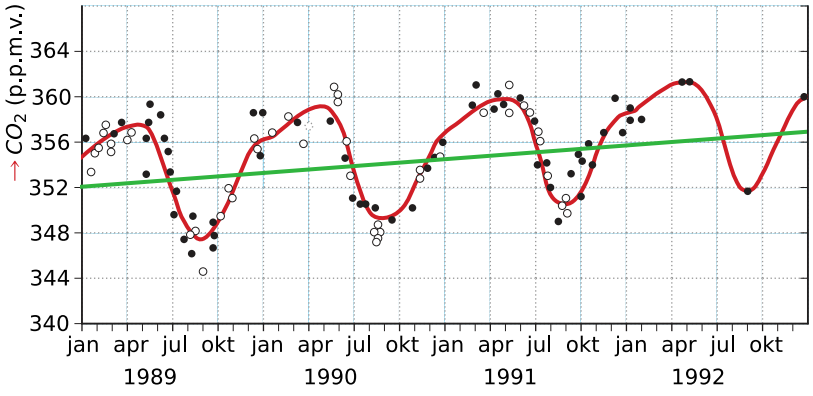
De hoeveelheid kooldioxide (CO_2) en de hoeveelheid zuurstof (O_2) in de lucht worden onder andere in balans gehouden doordat planten op aarde kooldioxide omzetten in zuurstof. De grafieken laten dat zien.



p.p.m.v. = parts per million by volume = cm^3 per m^3
O_2/N_2 (per meg) = afname verhouding zuurstof tot stikstof

Figuur 6.9

Bij periodieke modellen kan een trendlijn worden getekend. Een trendlijn is een rechte lijn die zo goed mogelijk het geschatte verloop van een bepaalde ontwikkeling weergeeft. De groene lijn is de trendlijn van de kooldioxidegrafiek, deze liet al in de jaren '90 van de vorige eeuw een stijgende trend zien.



Figuur 6.10

Bij de trendlijn kan een formule worden opgesteld met twee punten op de trendlijn. Vervolgens kan daarmee het gehalte kooldioxide voor de jaren erna worden voorspeld als aangenomen wordt dat deze trend zich voortzet.

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Hoe groot is de periode van de grafiek van CO_2?

b Waarom daalt de hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer in de periode mei tot en met augustus?

c Hoeveel cm^3 CO_2 zat er in 1990 per m^3 minimaal in de atmosfeer en hoeveel maximaal?

d De maxima van de bovenste grafiek komen overeen met de minima van de onderste grafiek en andersom. Verklaar dit.

e Stel een formule op voor de trendlijn van de kooldioxidegrafiek.

f Voorspel het gehalte kooldioxide in januari 2010 als deze trend zich voortzet.

Opgave 8

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Is er bij de zuurstof/stikstofgrafiek sprake van een dalende of een stijgende trend?

b Teken zo precies mogelijk de trendlijn van de zuurstof/stikstofgrafiek.

c Stel een formule op voor de trendlijn van de zuurstof/stikstofgrafiek.

d Voorspel de waarde van de zuurstof/stikstofgrafiek in januari 2012 als deze trend zich voortzet.

Voorbeeld 3

Een populatie fruitvliegjes leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. Iedere vier dagen is het aantal fruitvliegjes geteld. Bekijk de tabel met de groei van het aantal fruitvliegjes. N is het aantal fruitvliegjes en t de tijd in dagen.

t (dag)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
$N(t)$	2	5	10	22	47	91	156	226	282	317	335	343	347

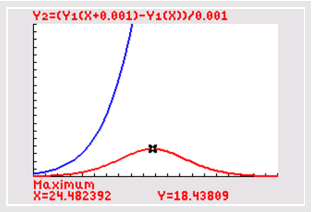
Tabel 6.1

Een passende formule voor de groei van het aantal fruitvliegjes is:
$N(t) = \frac{350}{1+174 \cdot 0{,}81^t}$

- Na hoeveel dagen is de helling het steilst? Hoeveel fruitvliegjes komen er die dag bij?
- Welke asymptoot heeft de grafiek van $N(t)$? Wat is de praktische betekenis daarvan?

Antwoord

- Plot met de grafische rekenmachine de hellingsgrafiek $N'(t)$.
  Voer in: $y_1 = \frac{350}{1+174 \cdot 0{,}81^x}$ en $y_2 = \frac{y_1(x+0{,}001)-y_1(x)}{0{,}001}$.
  Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 50$ bij $0 \leq y \leq 100$.



Figuur 6.11

  Bepaal met het maximum van de hellingsgrafiek, dit geeft $x \approx 24$ en $y \approx 18$. De helling is het steilst na 24 dagen, er komen dan 18 fruitvliegjes per dag bij.
- Wanneer je voor t een heel groot getal invult in de formule, dan nadert $0{,}81^t$ naar 0. $1 + 174 \cdot 0{,}81^t$ nadert dan naar 1 en $\frac{350}{1+174 \cdot 0{,}81^t}$ nadert naar 350.
  De grafiek heeft een horizontale asymptoot $N = 350$. Dit betekent dat de grenswaarde voor het aantal fruitvliegjes 350 is. Het aantal fruitvliegjes zal nooit boven die grenswaarde uitkomen.

Opgave 9

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.

a Teken de grafiek bij de tabel uit het voorbeeld op enkellogaritmisch papier.

b Wat voor soort groeimodel hoort bij het begin van de grafiek?

c Hoe komt het dat dit groeimodel later niet meer past bij de groei van het aantal fruitvliegjes?

Opgave 10

Bij een ander soort fruitvliegjes past de formule: $N(t) = \frac{425}{1+162 \cdot 0{,}78^t}$.

Hierin is N het aantal fruitvliegjes en t de tijd in dagen.

a Na hoeveel dagen komen er van dit soort de meeste fruitvliegjes bij?

b Hoeveel fruitvliegjes komen er die dag bij?

c Welke grenswaarde bereikt het aantal fruitvliegjes?

Verwerken

Opgave 11

Een softwareontwikkelaar verkoopt softwarepakketten aan kleinere bedrijven. Deze softwareproducent rekent met de formule $p = 1200 - 3q$ om zijn prijs p (€) te bepalen afhankelijk van het aantal pakketten q dat hij verkoopt. De kosten voor het versturen van een pakket naar een klant bedragen € 10,00 per stuk.

a Voor de opbrengst R (€) geldt de formule: $R = q \cdot p$.
Welke formule geldt voor de opbrengst R uitgedrukt in q?

b Welke formule geldt voor de kosten K uitgedrukt in q?

c Voor de winst W (€) geldt de formule: $W = R - K$.
Stel een formule op voor de winst W afhankelijk van q. Schrijf de formule zonder haakjes.

d Breng de formule voor W volledig in beeld op de grafische rekenmachine en bereken de maximaal haalbare winst.

Opgave 12

Bekijk de tabel waarin het aantal werklozen in een bepaalde stad is weergegeven. De aantallen werklozen zijn afgerond op tientallen.

tijd	mrt '14	mei '14	jul '14	sep '14	nov '14	jan '15	mrt '15	mei '15	jul '15
aantal	2140	2280	2220	2060	2000	2140	2380	2520	2300

Tabel 6.2

a Maak een grafiek van deze werkloosheidscijfers. Teken daarin ook de trendlijn.

b Stel een formule op bij de trendlijn. Rond indien nodig af op twee decimalen.

c Ga ervan uit dat deze trend zich voortzet. Voorspel nu het aantal werklozen in deze stad in mei 2016.

Opgave 13

Dieren overleven een aanrijding meestal niet; automobilisten komen er vaak met alleen materiële schade vanaf. Deze materiële schade varieert van geval tot geval en is afhankelijk van een aantal factoren, waarvan het gewicht van het dier de voornaamste is. Op grond hiervan heeft een econoom de volgende formule opgesteld:

$S = \frac{500+G^2}{3,9}$

Hierin is G het gewicht van het dier in kilogram en S de materiële schade in euro.

Volwassen mannelijke wilde zwijnen zijn veel zwaarder dan volwassen vrouwtjes. Ga ervan uit dat een volwassen mannelijk wild zwijn 100 kilogram weegt en dat een volwassen vrouwtje 70 kilogram weegt. Neem aan dat er tweemaal zo veel mannetjes als vrouwtjes worden aangereden.

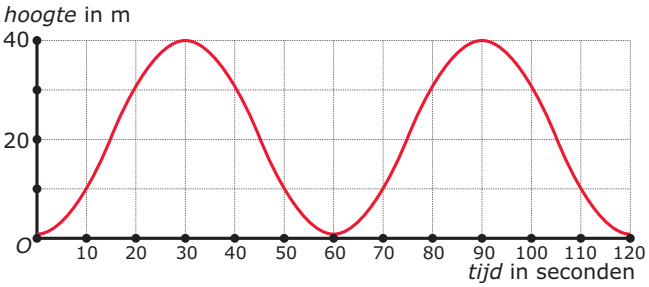
a Bereken de gemiddelde materiële schade van een aanrijding van een volwassen wild zwijn. Rond je antwoord af op tientallen euro.

b De formule $S = \frac{500+G^2}{3,9}$ kan worden herschreven tot een formule van de vorm: $S = a + b \cdot G^2$.
Bereken a en b afgerond op twee decimalen.

(bron: pilotexamen wiskunde C in 2012, eerste tijdvak)

Opgave 14

Deze grafiek geeft de hoogte (in meter boven de grond) weer afhankelijk van de tijd van een bak in een draaiend reuzenrad. Klanten stappen op één meter boven de grond in het bakje van het reuzenrad. De tijd loopt vanaf het moment dat het rad begint te bewegen.



Figuur 6.12

a Hoe groot is de periode van de grafiek?

b Hoe groot is de amplitude van de grafiek?

c Hoe hoog zit je na 260 seconden?

Opgave 15

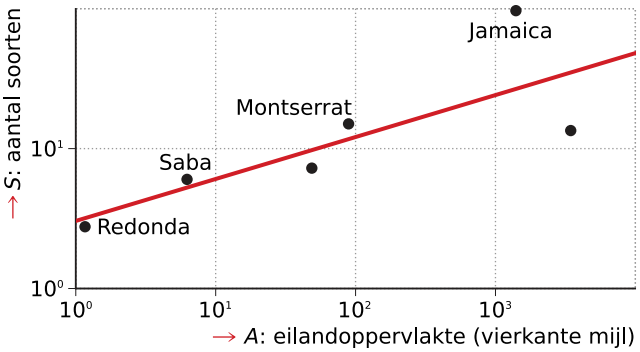
Over het aantal soorten dieren (bijvoorbeeld vissen, of reptielen) bestaan veel theorieën. In een bepaalde theorie wordt gesproken dat op een eiland in een specifieke klimaatzone het aantal soorten reptielen alleen afhankelijk is van de oppervlakte van het eiland.

Het theoretisch verband tussen het aantal soorten reptielen S en de oppervlakte A van een Caraïbisch eiland wordt gegeven door de formule: $S = 3 \cdot A^{0,30}$
Hierin is A de oppervlakte van het eiland in vierkante mijl en S het aantal soorten reptielen dat op het eiland voorkomt.

a Steeds als A 100 keer zo groot wordt zal S ook met een vast getal worden vermenigvuldigd. Bereken dit vaste getal.

b Stel een mijl gelijk aan 1600 meter. Bereken bij welke oppervlakte in km^2 je volgens de formule 100 soorten reptielen op het eiland mag verwachten.

c De grafiek van $S = 3 \cdot A^{0,30}$ kan ook in een rooster met logaritmische schalen worden weergegeven. Bekijk de figuur.



Figuur 6.13

Bereken hoeveel soorten je op Jamaica volgens de figuur meer zult vinden dan volgens de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$. Licht je antwoord toe.

Op een groot eiland worden verschillende soorten reptielen met uitsterven bedreigd. Het eilandbestuur wil dit proberen te voorkomen door natuurreservaten te maken. Er zijn twee opties:

- oprichting van één groot natuurreservaat met een oppervlakte van 400 vierkante mijl;
- oprichting van twee kleinere natuurreservaten, elk met een oppervlakte van 200 vierkante mijl.

Dergelijke natuurreservaten liggen geïsoleerd van de bewoonde wereld en kunnen als 'eilanden' worden beschouwd, zodat de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$ kan worden gebruikt.

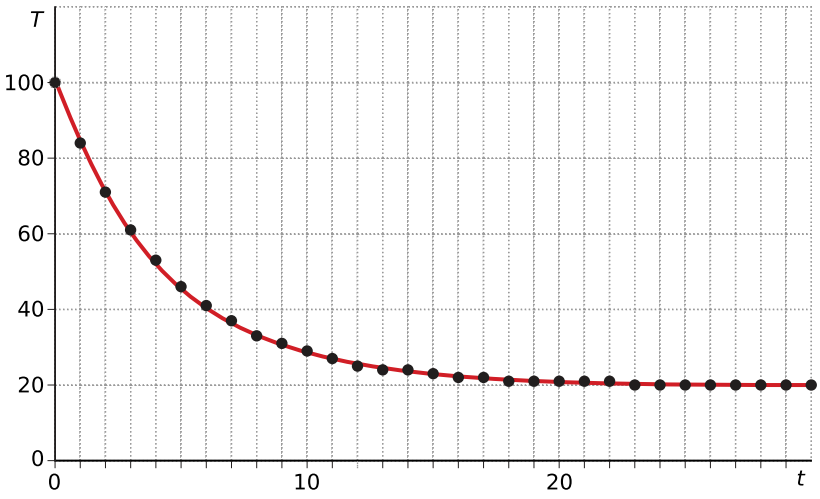
Voor welke van de twee opties wordt gekozen, is mede afhankelijk van het aantal soorten reptielen dat de twee kleinere natuurreservaten gemeen zullen hebben. Aangenomen wordt dat er acht soorten reptielen zijn die zowel in het ene als in het andere kleine reservaat zullen voorkomen. Het eilandbestuur kiest de optie waarbij in totaal zo veel mogelijk verschillende soorten reptielen zullen voorkomen.

d Welke van de twee opties wordt gekozen?

(bron: voorbeeldexamen wiskunde C in 2018)

Opgave 16

Een kop thee heeft een temperatuur van 100 °C. Als de thee rustig afkoelt in een omgevingstemperatuur van 20 °C, dan neemt volgens de warmtewet van Newton het temperatuurverschil met de omgeving exponentieel af: $T(t) - 20 = b \cdot g^t$.
Bekijk de grafiek waarin de temperatuur van de kop thee T (°C) is uitgezet tegen de tijd t (min).



Figuur 6.14

a Ga uit van het beschreven groeimodel en stel een bijpassende formule op.

b Bereken de snelheid van afkoelen na twaalf minuten.

c Waarom is er geen sprake van zuiver exponentieel verval?

Toepassen

Opgave 17: Al doende leert men

In de Amerikaanse industrie is ooit onderzocht hoe snel werknemers leren wanneer ze een handeling vaker verrichten. Bij een groot aantal werknemers is bijgehouden hoeveel tijd ze nodig hadden om een bepaalde handeling voor de eerste keer te verrichten, hoeveel tijd voor de tweede keer, enzovoort. Zo bleken werknemers 16 minuten nodig te hebben om handeling A voor de eerste keer te verrichten. Bij de tweede keer was die handelingstijd $12{,}8$ minuten. Wanneer een werknemer handeling A twee keer heeft uitgevoerd, is zijn gemiddelde handelingstijd $\frac{16+12{,}8}{2} = 14{,}4$ minuten. Deze waarde is weergegeven in de tabel. De andere waarden in de tabel zijn op een vergelijkbare manier berekend.

aantal keren dat handeling A is verricht (n)	1	2	3	4	5	6
gemiddelde handelingstijd in minuten	16	14,4	13,1	12,1	11,3	10,7

Tabel 6.3

a Met de tabel kun je berekenen dat een werknemer $8{,}1$ minuten nodig heeft om handeling A voor de vijfde keer te verrichten. Geef zo'n berekening.

Wanneer je de gemiddelde handelingstijd H_n wilt uitrekenen voor meer dan zes handelingen is het handig te beschikken over een formule voor H_n.
Hiertoe zijn verschillende pogingen ondernomen. Eén zo'n poging resulteerde in de formule:
$H_n = 0{,}14n^2 - 2n + 17{,}8$
Deze formule komt redelijk overeen met de gegevens van de tabel voor $n = 1$ tot en met $n = 6$.

b Bereken het grootste verschil tussen de uitkomsten uit de tabel en de bijbehorende waarden van H_n.

c Voor grote waarden van n is de formule voor H_n niet geschikt om de gemiddelde handelingstijd te beschrijven. Leg uit waarom de formule voor H_n niet geschikt is.

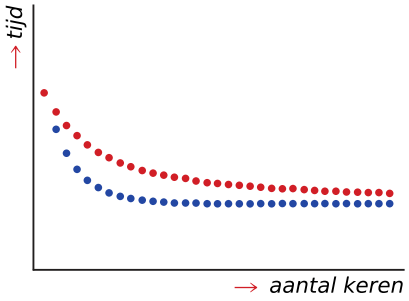
Het is niet zo eenvoudig een formule voor H_n te vinden die wel voldoet. Toch kun je bijvoorbeeld de gemiddelde handelingstijd na tien handelingen uitrekenen. Daarbij maak je gebruik van T_n, de tijd die een werknemer nodig heeft om handeling A voor de n-de keer te verrichten. T_n kan goed worden benaderd met de formule:
$T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$.
In deze formule is T_n in minuten.
Deze formule levert $T_1 \approx 16$ en $T_2 \approx 12{,}8$.
Met deze formule kun je ook andere handelingstijden uitrekenen en ook gemiddelde handelingstijden berekenen.

d Bereken hoe groot de gemiddelde handelingstijd is wanneer een werknemer tien keer handeling A heeft uitgevoerd.

e Als je kijkt naar de formule $T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$, dan kun je constateren dat T_n steeds kleiner wordt als n groter wordt. Op de lange duur komt T_n echter niet onder een bepaalde grens.
Hoe groot is die grens? Licht je antwoord toe.

Bekijk de figuur met in één assenstelsel schetsen van de grafieken van de handelingstijd en de gemiddelde handelingstijd. Over deze figuur maakt iemand de volgende twee opmerkingen:

1. Een van beide grafieken zal altijd boven de andere grafiek liggen.
2. De twee grafieken komen steeds dichter bij elkaar en er zal op den duur geen verschil meer te zien zijn.



Figuur 6.15

f Door redeneren zonder rekenen kun je onderzoeken of deze opmerkingen waar zijn of niet.
Onderzoek op deze wijze of deze beweringen waar zijn.

(bron: examen vwo wiskunde A1 in 2004, tweede tijdvak)

Opgave 18: Mobiel

In de jaren negentig van de twintigste eeuw hebben steeds meer mensen een mobiele telefoon aangeschaft. Om de ontwikkelingen te volgen kijken telefoonbedrijven vooral naar het deelnamepercentage. Dat is het aantal abonnees met een mobiele telefoon in een land, uitgedrukt als percentage van het aantal inwoners van dat land. Een benadering voor het deelnamepercentage van Nederland is de formule:

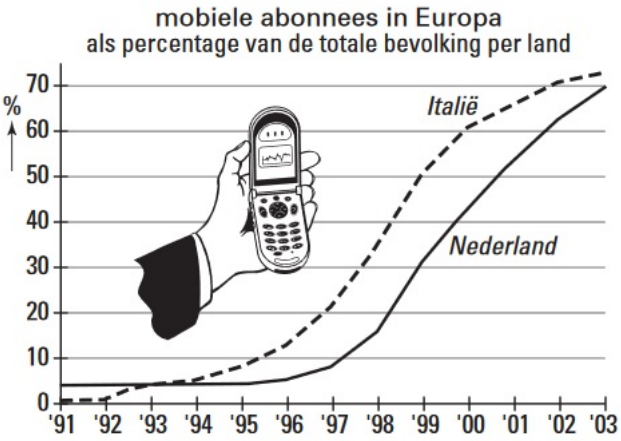
$$P_{\text{Nederland}} = \frac{81}{1+30 \cdot 0{,}49^t}$$

Hierin is $P_{\text{Nederland}}$ het deelnamepercentage van Nederland en t de tijd in jaar. Hierbij komt $t = 0$ overeen met 1 januari 1995.

De formule van Italië is:

$$P_{\text{Italië}} = \frac{81}{1+10 \cdot 0{,}49^t}$$

Hierin is t weer de tijd in jaar. Ook hier komt $t = 0$ overeen met 1 januari 1995.
Bekijk de figuur met de grafieken van beide formules.



Figuur 6.16

a Bepaal de hellingen van de grafieken van Nederland en Italië op 1 januari 1996.

Uit de figuur blijkt dat het deelnamepercentage van Italië vanaf 1994 voortdurend groter is dan het deelnamepercentage van Nederland. Het verschil in het deelnamepercentage van Italië en dat van Nederland wordt in het begin alleen maar groter. Vanaf een zeker moment gaat Nederland zijn achterstand op Italië weer inlopen.

b Op welk moment is dit het geval? Geef een toelichting.

(bron: examen vwo wiskunde A1 in 2006, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 19

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die zaden nodig hebben om voor 50% te ontkiemen. Proefondervindelijk is er een verband tussen de temperatuur T in °C en de kiemtijd K in dagen gebleken. Dit verband wordt gegeven door: $K = \frac{89}{T-2}$.

a Boven welke temperatuur is de helft van de zaden al binnen 10 dagen ontkiemd?

b Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?

c Bepaal de helling van de grafiek bij $T = 8$. Wat is de praktische betekenis daarvan?

Opgave 20

De grafiek van een periodiek verschijnsel heeft twee opeenvolgende maximale hoogtes van $h = 4$ op $t = 1$ en $t = 5$ en een minimale hoogte van $h = -1$.

Geef van deze grafiek de periode, de evenwichtswaarde en de amplitude.

2.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Toepassen van formules**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- variabelen — breuken — machten en wortels
- formules combineren, onder andere door substitueren — haakjes wegwerken
- vergelijking — ongelijkheid
- recht evenredig (met een macht) — omgekeerd evenredig — dubbellogaritmisch papier
- lineair verband — exponentieel verband — logaritme, logaritmische schaal — lineair interpoleren en extrapoleren
- periodiek verband, periode, evenwichtswaarde, amplitude en frequentie — verandering in een punt

Activiteitenlijst

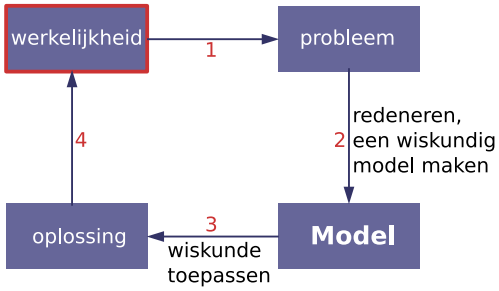
- rekenen met variabelen — rekenen met breuken — rekenen met machten en wortels
- formules combineren, onder andere door substitueren — haakjes wegwerken
- vergelijkingen en ongelijkheden (grafisch) oplossen
- recht evenredige en omgekeerd evenredige verbanden herkennen en de karakteristieken van hun grafieken benoemen en gebruiken — werken met dubbellogaritmisch papier
- lineaire evenredige en exponentiële verbanden herkennen en de karakteristieken van hun grafieken benoemen en gebruiken — werken met enkellogaritmisch papier
- karakteristieken van allerlei verbanden benoemen en gebruiken — werken met veranderingen, hellingswaarde, maximum, minimum bepalen met de grafische rekenmachine — periodiciteit herkennen, periode, evenwichtswaarde en amplitude aflezen

Achtergronden

Tegenwoordig heeft in veel vakgebieden de wiskunde zijn intrede gedaan. Vaak gaat het dan om het opstellen van een **wiskundig model** aan de hand waarvan voorspellingen gedaan kunnen worden. Zo'n model bestaat uit variabelen en bijbehorende formules.

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van het verschijnsel dat je wilt verklaren. Het bewust opstellen van zo'n model heet **modelleren**.
Bij het modelleren volg je een viertal vaste stappen.

1. Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een vraag: de probleemstelling. Je bedenkt welke grootheden en variabelen een rol spelen.
2. Je vereenvoudigt de werkelijkheid door aannames te doen en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de probleemstelling past. Je geeft duidelijke definities van de grootheden waartussen je verbanden gaat zoeken. Je moet ook goed bijhouden waarom je bepaalde dingen weglaat.
3. Je zoekt het antwoord op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen. Het antwoord kan de oplossing van het probleem zijn, maar ook een beschrijving van de bepaalde situatie.
4. Je kijkt of je antwoord wel bij de werkelijkheid past. Je moet je antwoord 'terugvertalen'. Als dat kan, ontwerp je ook een test. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld en doorloop je de cyclus opnieuw.



Figuur 7.1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de functies: $f(x) = 4\left(6x^3\right)^2 \cdot \frac{4}{x^{18}}$ en $g(x) = \sqrt{1000x}$.

a Schrijf $f(x)$ in de vorm: $f(x) = ax^n$.

b Los op: $f(x) = g(x)$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 2

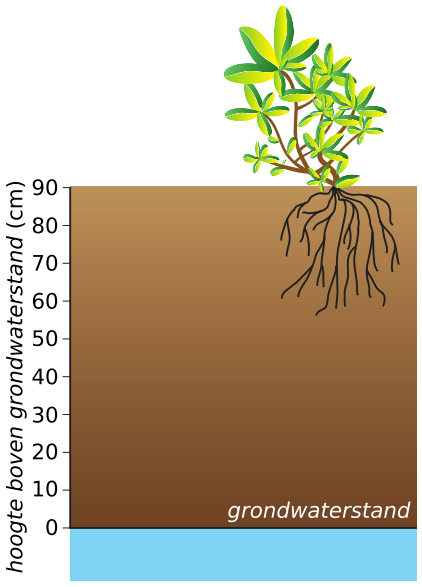
In een natuurgebied staat het grondwater op een diepte van 90 centimeter.

Op een hoogte van 10 centimeter boven de grondwaterstand is het vochtgehalte van de grond ongeveer 32%. Hoe groter de hoogte boven de grondwaterstand, hoe kleiner het vochtgehalte van de grond wordt. Zo is op een hoogte van 80 centimeter boven de grondwaterstand het vochtgehalte afgenomen tot 4%.

a Wat voor soort verband bestaat er tussen de hoogte boven de grondwaterstand H (cm) en het vochtgehalte p (%)? Stel een formule op met H uitgedrukt in p.

b Er wordt een beplanting aangebracht waarvan de wortels op hun maximale diepte een vochtgehalte tussen de 5% en 10% nodig hebben.
Bereken welke hoogtes boven de grondwaterstand in aanmerking komen.

c De formule uit a is bruikbaar voor $10 \leq H \leq 80$. Welke vochtpercentages horen daarbij?



Figuur 7.2

d De grondwaterstand in het natuurgebied wordt 30 centimeter omhooggebracht. Het verband tussen de hoogte en het vochtgehalte blijft hetzelfde als in de oude situatie.
Bereken het nieuwe vochtgehalte van de grond op een diepte van 40 centimeter.

(naar: examen havo wiskunde A in 1990, eerste tijdvak)

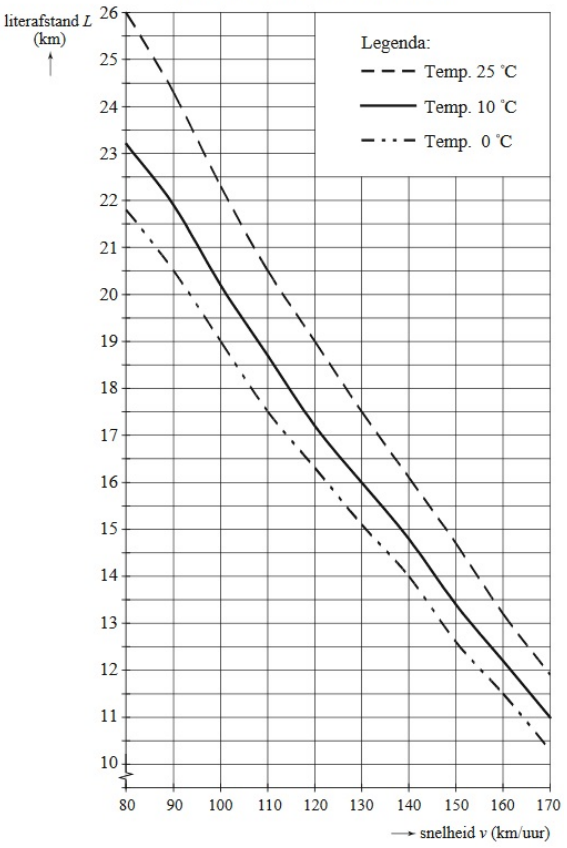
Opgave 3

Het benzineverbruik van een automotor is afhankelijk van verschillende factoren. Een van die factoren is de buitentemperatuur. Bekijk de figuur waarin voor een aantal verschillende buitentemperaturen de 'literafstand' L (km) is uitgezet tegen de 'snelheid' v (km/h). De literafstand is het aantal kilometer dat met 1 liter benzine kan worden gereden. Hoe groter de literafstand, des te lager het verbruik.

In de figuur is te zien dat bij een snelheid van 90 km/h en een temperatuur van 10 °C de literafstand $21{,}9$ kilometer is, en dat deze bij 25 °C $24{,}3$ kilometer is.
Bereken met lineair interpoleren de literafstand bij deze snelheid en een temperatuur van 13 °C.

(bron: examen havo wiskunde A in 2012, tweede tijdvak)

Verband tussen literafstand en snelheid bij verschillende buitentemperaturen



Figuur 7.3

Opgave 4

Voor het laten drukken van luxe folders moet een vast bedrag van € 25,00 en daar bovenop € 0,12 per folder betaald worden. De totale kosten per folder zijn hoog als er maar weinig afgedrukt moeten worden. De totale kosten per folder TKF (in euro) hangen af van het aantal folders a dat gedrukt moet worden.

a Stel een formule op voor de totale kosten per folder TKF.

b Waarom is TKF niet omgekeerd evenredig met a?

c Teken de grafiek met TKF uitgedrukt in a op de grafische rekenmachine.

d Bereken met behulp van de formule bij welk aantal folders de drukkosten niet hoger zijn dan € 0,15 per folder.

Opgave 5

Bekijk de tabel met het aantal inschrijvingen voor een hardloopwedstrijd. Er is ruimte voor 2000 inschrijvingen.

tijdstip (uur)	00:00	04:00	08:00	12:00	16:00	20:00
aantal	31	68	150	330	726	1598

Tabel 7.1

a Het aantal inschrijvingen in de tabel vormt rij u.
Zoek uit of rij u bij benadering een rekenkundige of meetkundige rij is.

b Stel een recursieformule op bij rij u. Neem $n = 0$ om 00:00 uur en n het aantal uur na dit tijdstip.

c Bereken met de recursieformule het aantal inschrijvingen om 02:00 uur.

d Stel een directe formule op bij rij u. Is er sprake van een lineaire rij of een exponentiële rij?

e Bereken na hoeveel uur de inschrijving voor de hardloopwedstrijd wordt gesloten als de groei op deze manier doorgaat.

Opgave 6

Bekijk de tabel waarin het verband wordt weergegeven tussen het hersengewicht H (gram) en het lichaamsgewicht G (gram) van enkele kleine zoogdieren.

	wezel	muis	eekhoorn	egel	kat	haas
G	95	200	320	820	3600	4000
H	2,54	4,18	5,72	10,75	28,97	31,09

Tabel 7.2

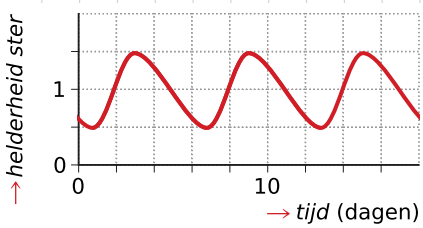
a Onderzoek met behulp van logaritmisch grafiekenpapier van welk soort verband er sprake is.

Onderzoekers hebben een formule opgesteld die het verband weergeeft tussen G en H.
Deze formule is: $H = 0{,}12 \cdot G^{0{,}67}$.

b Hoeveel bedraagt het lichaamsgewicht van een zoogdier met een hersengewicht van meer dan 150 gram?

Opgave 7

Een astronoom heeft gedurende een aantal dagen de helderheid van een ster gemeten. De resultaten zijn weergegeven in de grafiek. De helderheid is uitgedrukt in een getal tussen 0 en $1{,}5$, waarbij 0 betekent dat de ster niet zichtbaar is en $1{,}5$ betekent dat de ster zeer helder is. Er is duidelijk een periodiek verband zichtbaar tussen de tijd in dagen en de helderheid van de ster.



Figuur 7.4

a Geef de periode.

b Geef de evenwichtsstand.

c Geef de amplitude.

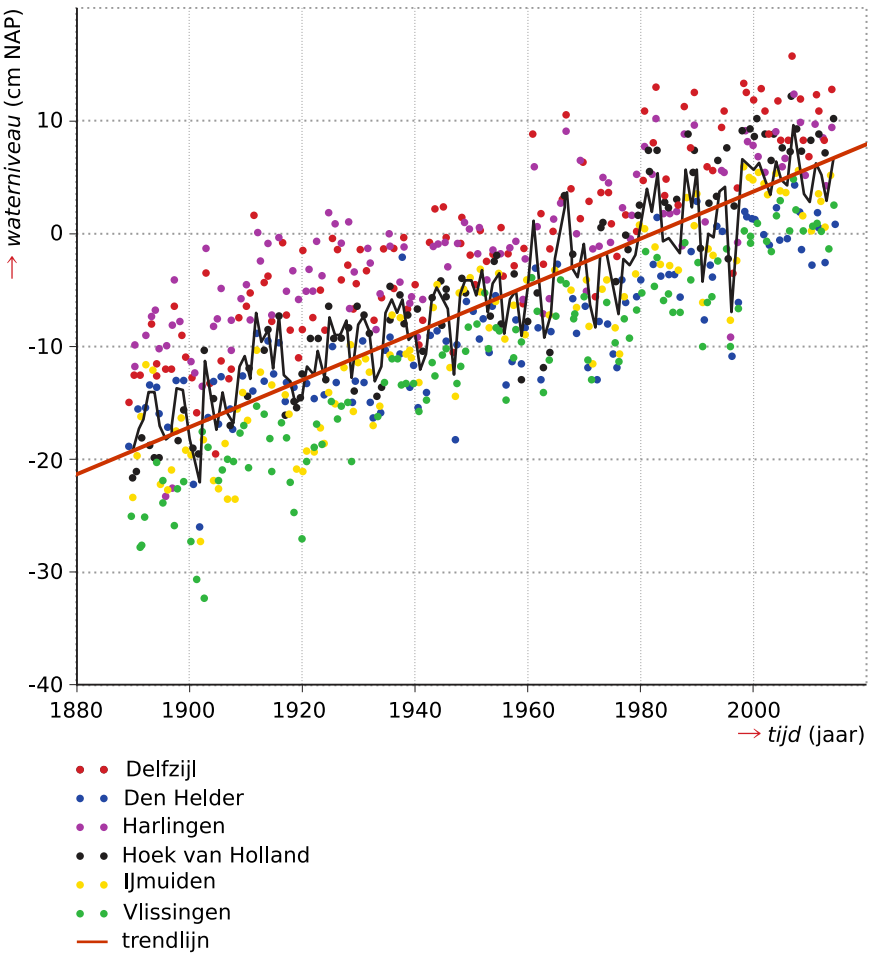
d De astronoom is 1 mei begonnen met het meten van de helderheid van de ster. De maand mei heeft 31 dagen. Wanneer is de helderheid van de ster in juni voor het eerst maximaal?

e Hoe groot zal de helderheid van de ster ongeveer zijn op 15 juni?

Toepassen

Opgave 8: Stijgend waterniveau

Vanaf 1890 is op zes plaatsen in Nederland het waterniveau gemeten. De gemiddelde waarden per jaar per plaats zijn weergegeven in een grafiek. Ook is de grafieklijn getekend met het gemiddelde waterniveau van de zes plaatsen. Er is een duidelijke positieve trend te zien, de bijbehorende trendlijn is ook getekend.



Figuur 7.5

a Stel een formule op bij de trendlijn met t de tijd in jaar na 1890 en W het waterniveau (cm NAP).

b Ga ervan uit dat deze trend zich voortzet. In welk jaar zal het gemiddelde waterniveau dan voor het eerst boven 10 centimeter NAP uitkomen?

Examen

Opgave 9: Supersize Me

In de film 'Supersize Me' besluit de hoofdpersoon, Morgan Spurlock, dertig dagen lang uitsluitend fastfood te eten. Op deze manier krijgt hij elke dag 5000 kilocalorieën aan energie binnen.
Eerst wordt Morgan, die aan het begin van het experiment 85 kilogram weegt, nog misselijk van het eten. In het vervolg van de film went hij aan het type voedsel en ten slotte gaat hij het zelfs lekker vinden.
Diëtisten kunnen gewichtstoename voorspellen met een rekenmodel. Voor actieve volwassen mannen, zoals Morgan, is er een formule om de energiebehoefte te bepalen om op gewicht te blijven:
$E_b = 33{,}6 \cdot G$
Hierin is E_b de dagelijkse energiebehoefte in kilocalorieën en G het gewicht in kilogram.

a Wat voor soort verband bestaat er tussen E_b en G?

Veronderstel dat Morgan een dagelijkse energiebehoefte zou hebben van 5000 kilocalorieën om op gewicht te blijven. Dan zou hij volgens de formule veel meer wegen dan de 85 kilogram die hij aan het begin van het experiment woog.

b Bereken hoeveel kilogram hij dan meer zou wegen.

In het rekenmodel wordt verder gebruikgemaakt van het gegeven dat elke 7800 kilocalorieën te veel een gewichtstoename van 1 kilogram veroorzaakt.

c Bereken met behulp van de gegevens hoeveel gram Morgan al na één dag volgens het rekenmodel zwaarder wordt.

De gewichtstoename T van Morgan op een bepaalde dag hangt af van zijn energiebehoefte E_b op die dag. Er geldt: $T = 0{,}000128 \cdot (5000 - E_b)$.
Hierin is T de gewichtstoename in kilogram per dag.

Wanneer deze formule wordt gecombineerd met de formule $E_b = 33{,}6 \cdot G$, ontstaat een formule van T uitgedrukt in G.
Deze nieuwe formule is te herleiden tot de vorm: $T = a \cdot G + b$.

d Bereken a en b.

(naar: examen havo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak)

Opgave 10: Snelheden

In september 2003 won de Keniaan Rono een hardloopwedstrijd over een afstand van 2000 meter. Hij liep deze afstand in 4 minuten en $57{,}76$ seconden. Dat betekent dat Rono die afstand liep met een gemiddelde snelheid van ongeveer $24{,}18$ km/h. Het is gebruikelijk om tijden als 4 minuten en $57{,}76$ seconden te noteren als 4:57.76.

Met deze prestatie behaalde Rono geen wereldrecord. Dat stond op dat moment op naam van de Marokkaan El Guerrouj. Zijn recordtijd op de 2000 meter was 4:44.79.

a Bereken de gemiddelde snelheid in km/h waarmee El Guerrouj dit wereldrecord liep. Rond het antwoord af op twee decimalen.

Bekijk de tabel waarin de wereldrecords hardlopen bij de mannen tot en met september 2003 op een aantal afstanden zijn weergegeven.

afstand (meter)	*tijd*	*gemiddelde snelheid* (km/h)
100	9.78	36,8
200	19.32	37,3
400	43.18	33,3
800	1:41.11	28,5
1000	2:11.96	27,3
1500	3:26.00	26,2
2000	4:44.79	25,3
3000	7:20.67	24,5
5000	12:39.36	23,7
10000	26:22.75	22,7

Tabel 7.3

Uit de tabel blijkt bijvoorbeeld dat het wereldrecord op de 1000 meter 2:11.96 was. Afgerond op één decimaal was daarbij de gemiddelde snelheid $27{,}3$ km/h.
Het verband tussen de afstanden en de gemiddelde snelheden uit de tabel kun je benaderen met de formule:

$$v = \frac{200 \cdot a}{44 \cdot a^2 + 1} - 0{,}07 \cdot a + 23$$

In deze formule is v de gemiddelde snelheid in km/h en a de afstand in kilometer.

b De gemiddelde snelheden volgens deze formule komen niet precies overeen met de uitkomsten uit de tabel.
Bereken voor de 3000 meter (dus voor $a = 3$) hoeveel de gemiddelde snelheid volgens de formule afwijkt van de uitkomst uit de tabel.

Met de formule kun je bij elke afstand boven de 100 meter de gemiddelde snelheid berekenen die hoort bij het denkbeeldig gelopen wereldrecord. Voor bijvoorbeeld een afstand van 2283 meter zou het wereldrecord met een gemiddelde snelheid van $24{,}82$ km/h zijn gelopen.

c Bereken op welke afstand het denkbeeldige wereldrecord een gemiddelde snelheid van precies 30 km/h op zou leveren.

In de tabel is de gemiddelde snelheid het hoogst bij de 200 meter. De formule van v is niet maximaal bij 200 meter, maar bij een afstand tussen 100 en 200 meter.

d Bereken afgerond op meter bij welke afstand de gemiddelde snelheid volgens de formule van v zo groot mogelijk is.

(naar: examen vwo wiskunde A1 in 2006, tweede tijdvak)

Register

a
aanzichten **19**
amplitude **132**

b
breuken, rekenen met **74**

c
congruent **10**

d
draaisymmetrie **9**

e
éénpuntsperspectief **32**
eigenschappen van machten **75**
eigenschappen van wortels **74**
evenwichtslijn **132**
exponentiële verbanden **117**

f
frequentie **132**

g
gelijksoortige termen **74**

h
haakjes wegwerken **86**
horizon **32**

i
interpoleren **117**

l
lijnsymmetrisch **9**
lineaire verbanden **117**

m
modelleren **144**

o
omgekeerd evenredig **105**
ongelijkheid **93**
oog **32**
oogpunt **32**

p
parallelprojectie **19**
periode **132**
periodieke verbanden **132**
perspectief **32**
puntsymmetrie **9**

r
recht evenredig **104**
recht evenredig met een macht **105**
rekenen met variabelen **74**
rijen **118**
rotatiesymmetrie **9**

s
schuifsymmetrie **9**
spiegelsymmetrie **9**
substitueren **85**
symmetrie **9**
symmetrievlak **9**

t
tafereel **32**
tweepuntsperspectief **32**, **56**

v
verdwijnpunt **32**
vergelijking **93**
vluchtpunt **32**

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

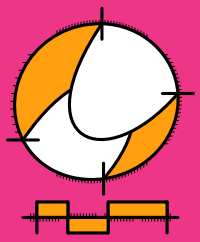
Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

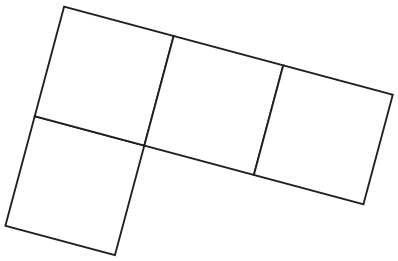
15. Perspectief

16. Toepassen van formules

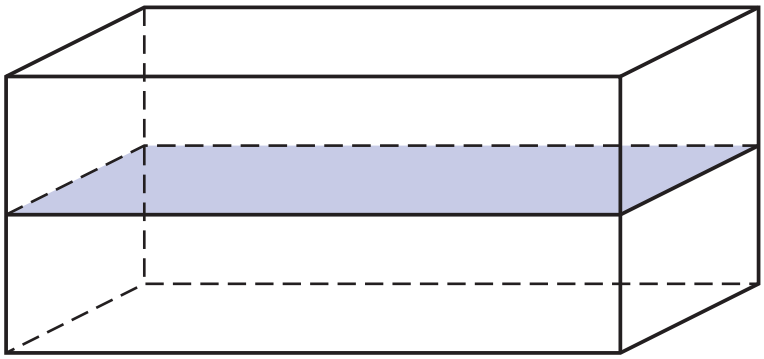
www.math4all.nl



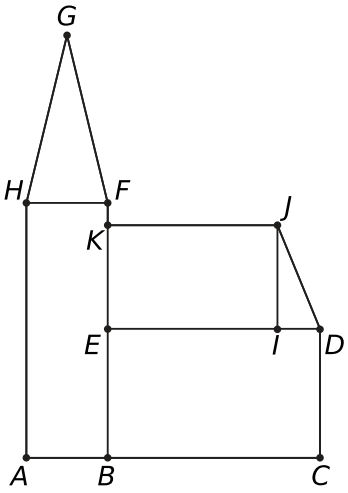
Werkblad bij Opgave 2 op pagina 7.



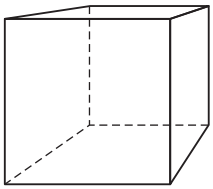
Werkblad bij Opgave 5 op pagina 8.



Werkblad bij Opgave 1 op pagina 18.

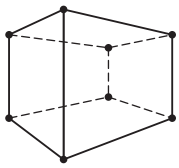


Werkblad bij Opgave 2 op pagina 29.



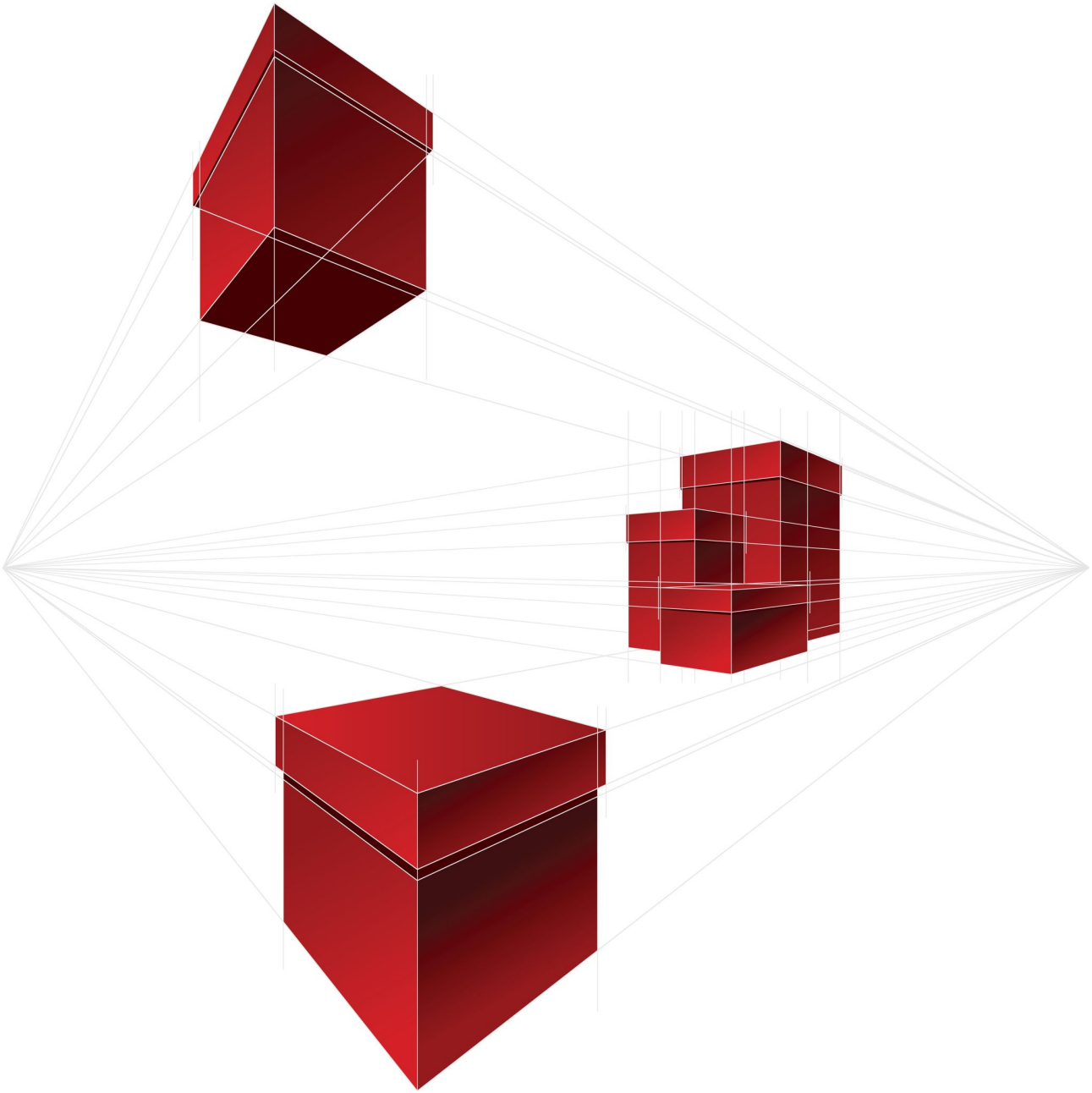
Werkblad bij Opgave 3 op pagina 30.

Werkblad bij Opgave 5 op pagina 31.

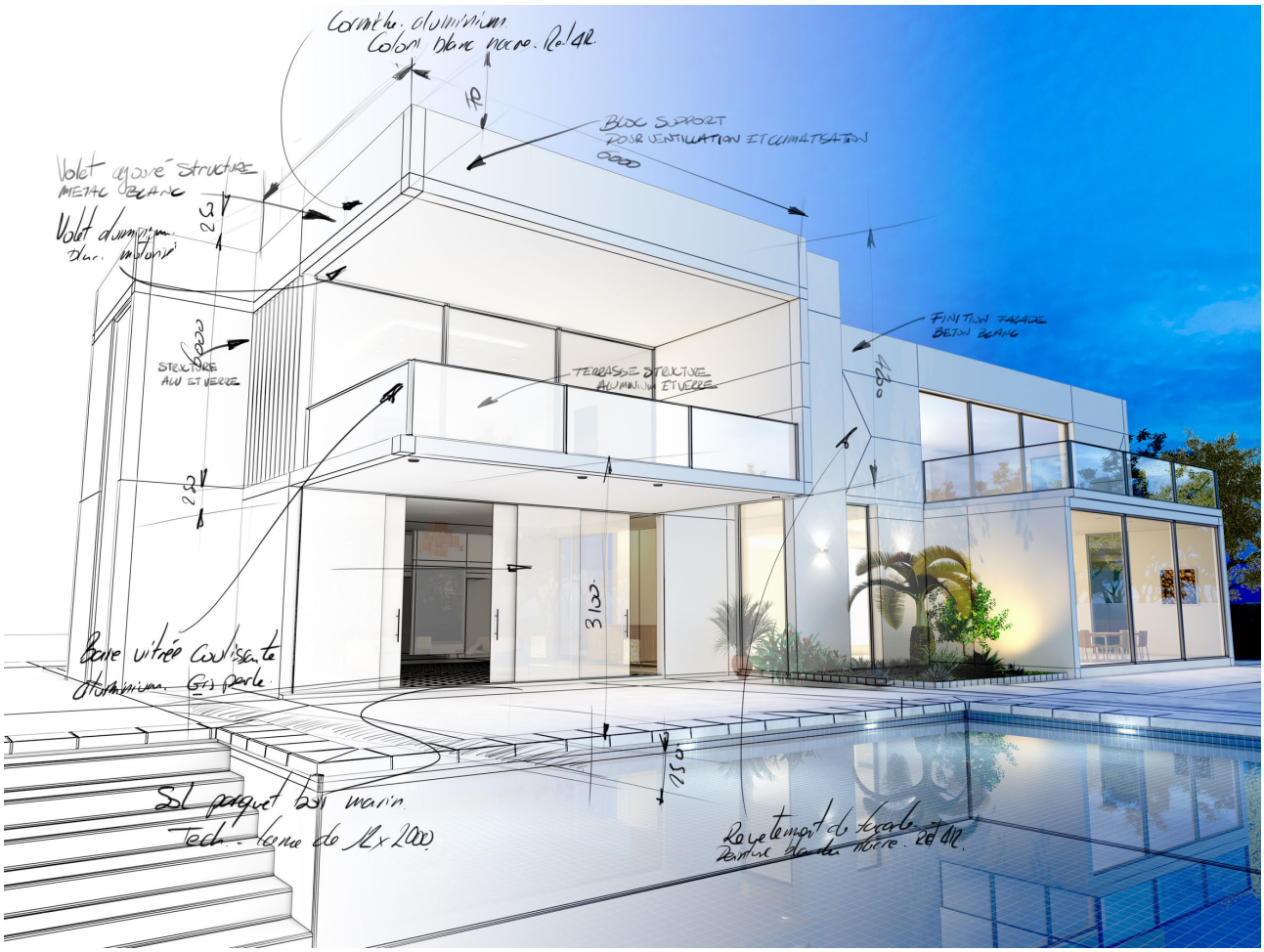


Werkblad bij Opgave 7 op pagina 33.

Werkblad bij Opgave 9 op pagina 35.

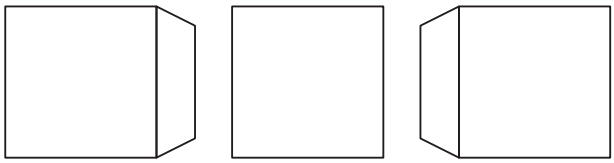


Werkblad bij Opgave 10 op pagina 36.

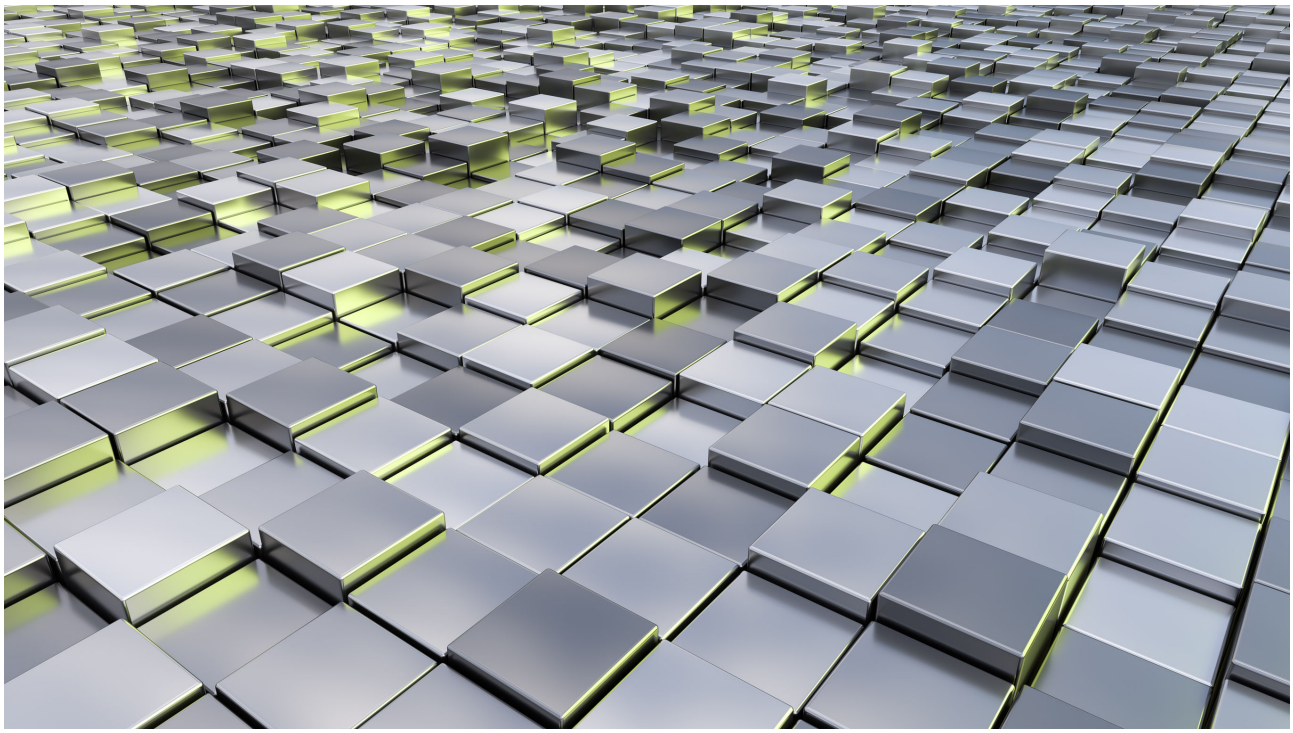


Werkblad bij Opgave 12 op pagina 38.

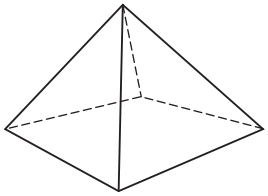
Werkblad bij Opgave 13 op pagina 38.



Werkblad bij Opgave 14 op pagina 38.



Werkblad bij Opgave 15 op pagina 38.

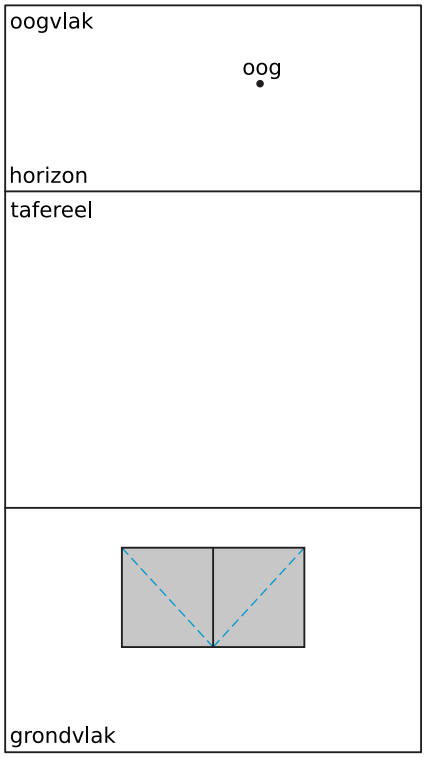


Werkblad bij Opgave 18 op pagina 39.

Werkblad bij Opgave 19 op pagina 40.

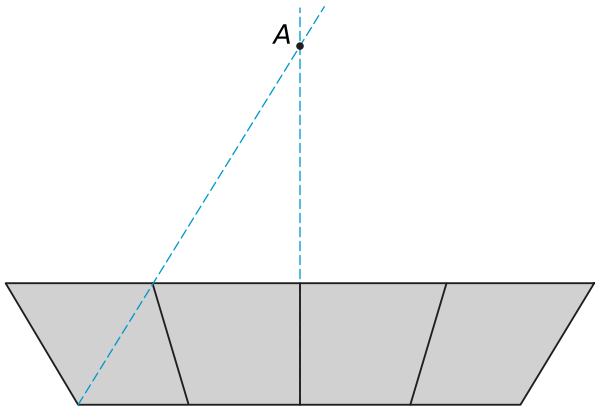
Werkblad bij Opgave 20 op pagina 40.

Werkblad bij Opgave 1 op pagina 43.



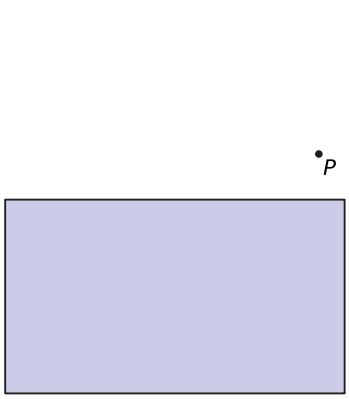
Werkblad bij Opgave 2 op pagina 43.

Werkblad bij Opgave 5 op pagina 45.

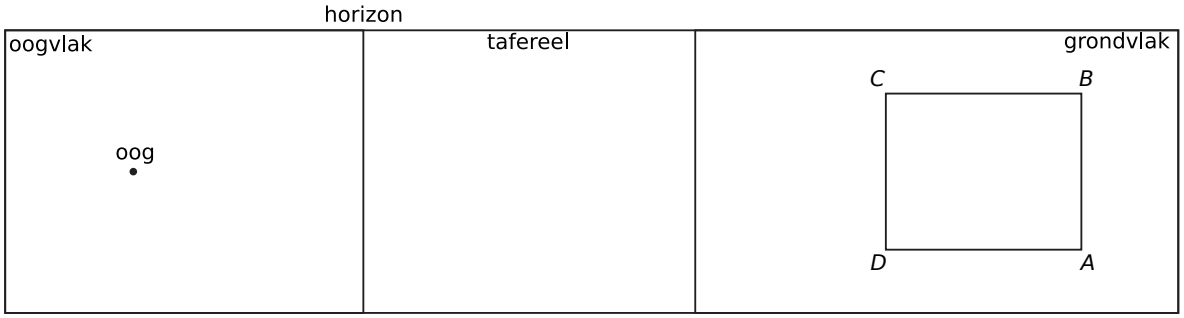


Werkblad bij Opgave 7 op pagina 46.

Werkblad bij Opgave 10 op pagina 48.

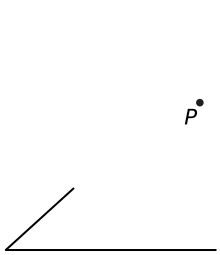


Werkblad bij Opgave 11 op pagina 48.

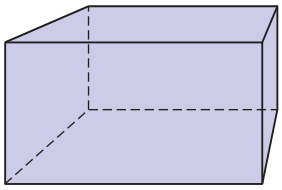


Werkblad bij Opgave 12 op pagina 49.

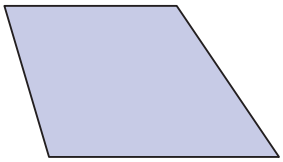
Werkblad bij Opgave 14 op pagina 50.



Werkblad bij Opgave 15 op pagina 50.

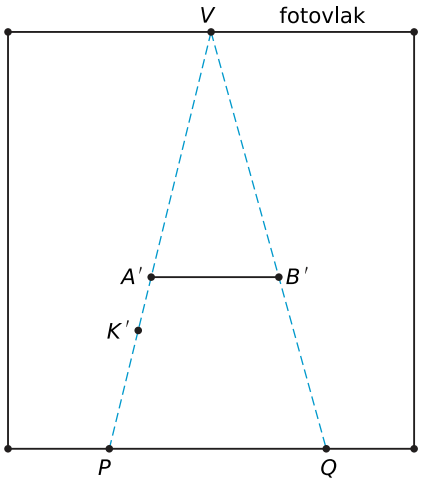


Werkblad bij Opgave 16 op pagina 50.



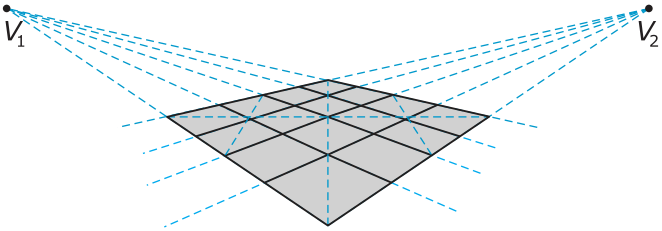
Werkblad bij Opgave 17 op pagina 52.

Werkblad bij Opgave 18 op pagina 53.

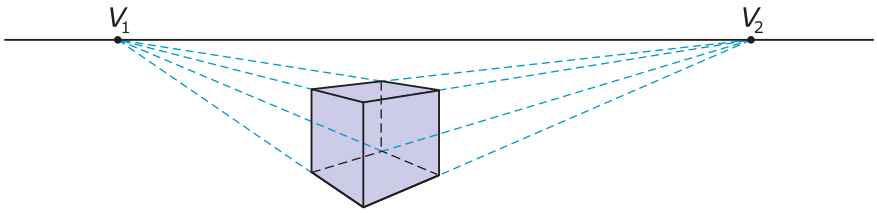


Werkblad bij Opgave 19 op pagina 53.

Werkblad bij Opgave 1 op pagina 55.

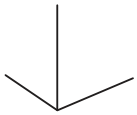


Werkblad bij Opgave 2 op pagina 55.

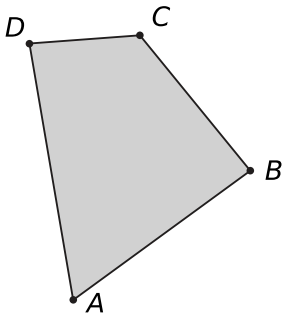


Werkblad bij Opgave 3 op pagina 56.

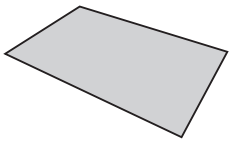
V_1 V_2



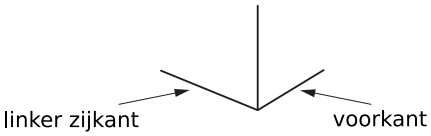
Werkblad bij Opgave 4 op pagina 57.



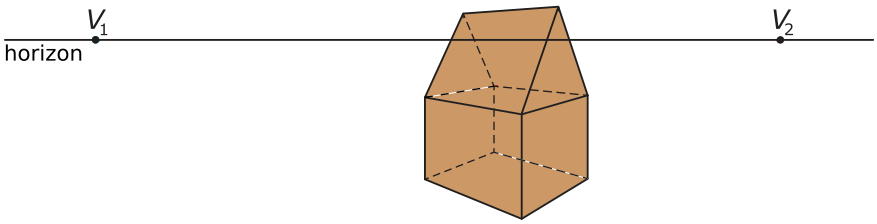
Werkblad bij Opgave 6 op pagina 58.



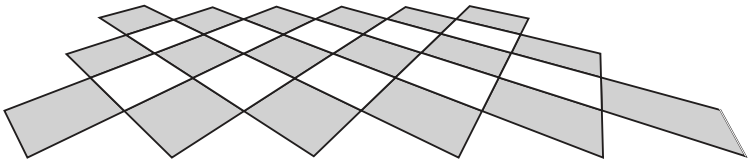
Werkblad bij Opgave 7 op pagina 59.



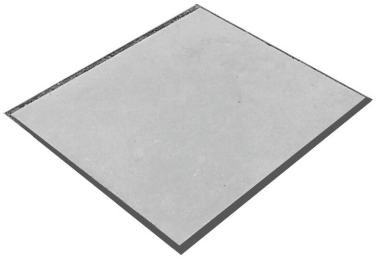
Werkblad bij Opgave 8 op pagina 59.



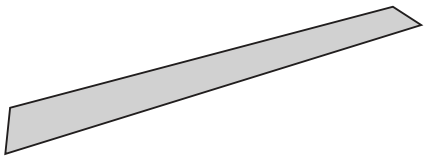
Werkblad bij Opgave 9 op pagina 60.



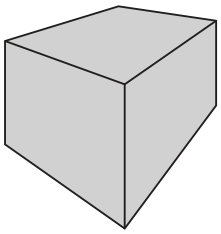
Werkblad bij Opgave 10 op pagina 60.



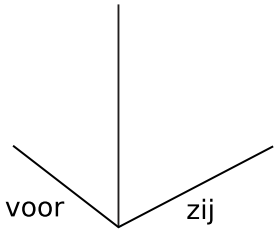
Werkblad bij Opgave 11 op pagina 60.



Werkblad bij Opgave 12 op pagina 60.

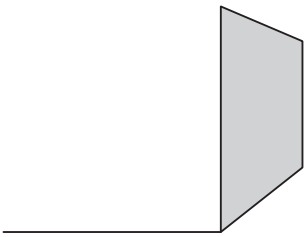


Werkblad bij Opgave 13 op pagina 61.

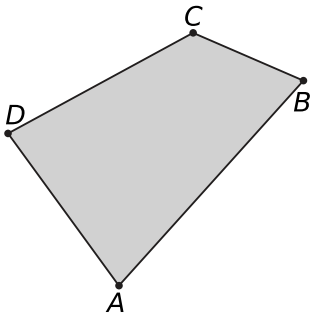


Werkblad bij Opgave 14 op pagina 61.

Werkblad bij Opgave 15 op pagina 62.



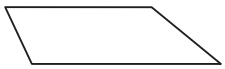
Werkblad bij Opgave 16 op pagina 62.



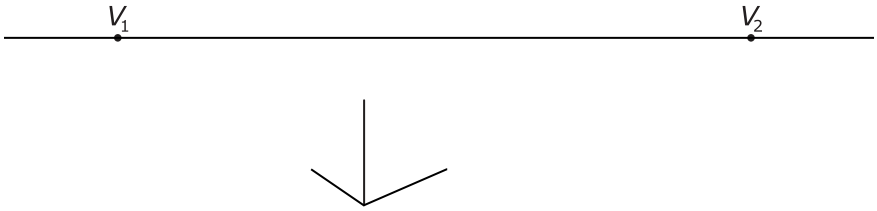
Werkblad bij Opgave 17 op pagina 62.

Werkblad bij Opgave 5 op pagina 66.

Werkblad bij Opgave 6 op pagina 66.

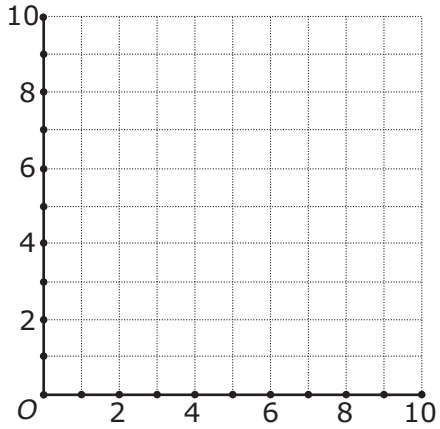


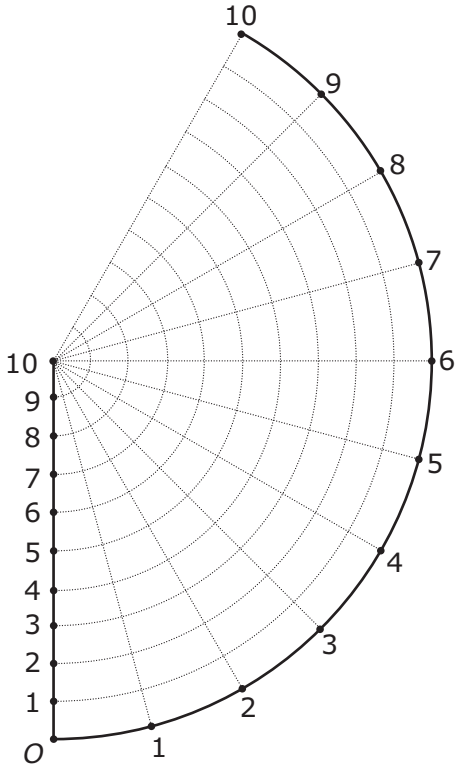
Werkblad bij Opgave 7 op pagina 66.

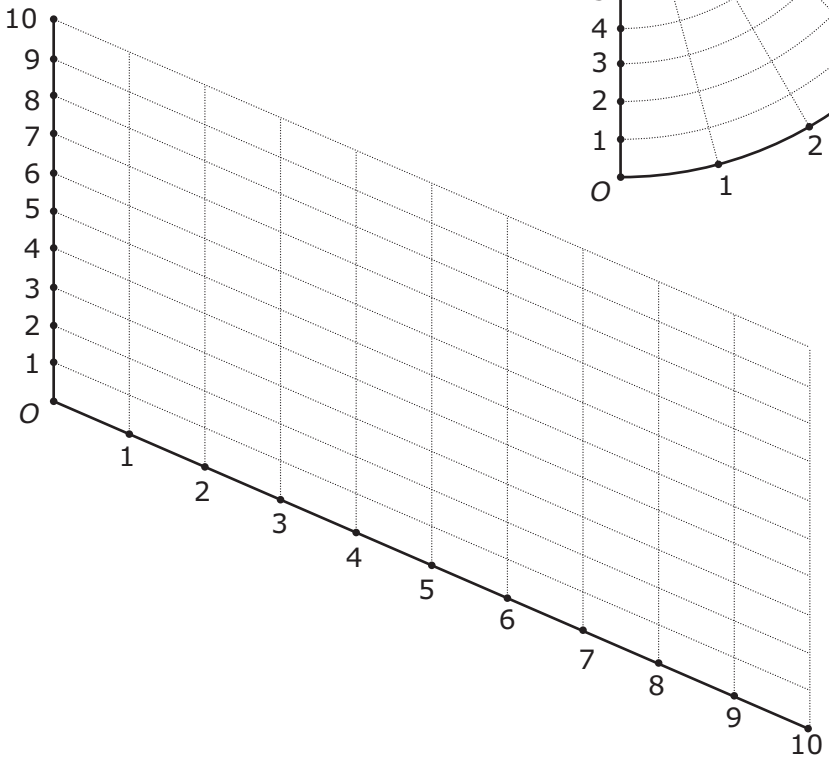


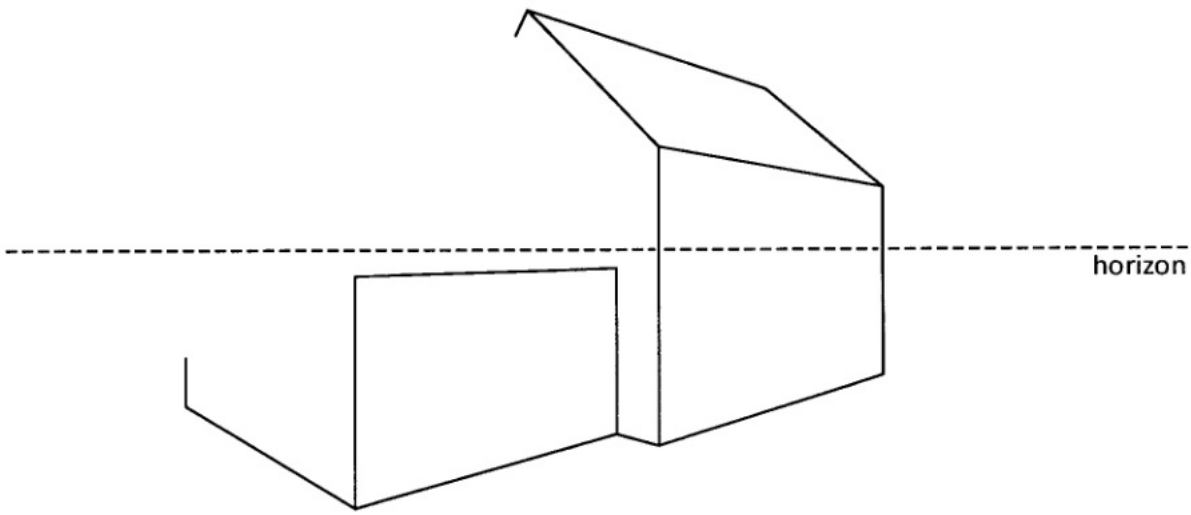
Werkblad bij Opgave 8 op pagina 67.

Werkblad bij Opgave 9 op pagina 67.







Werkblad bij Opgave 10 op pagina 68.

Werkblad bij Opgave 11 op pagina 68.