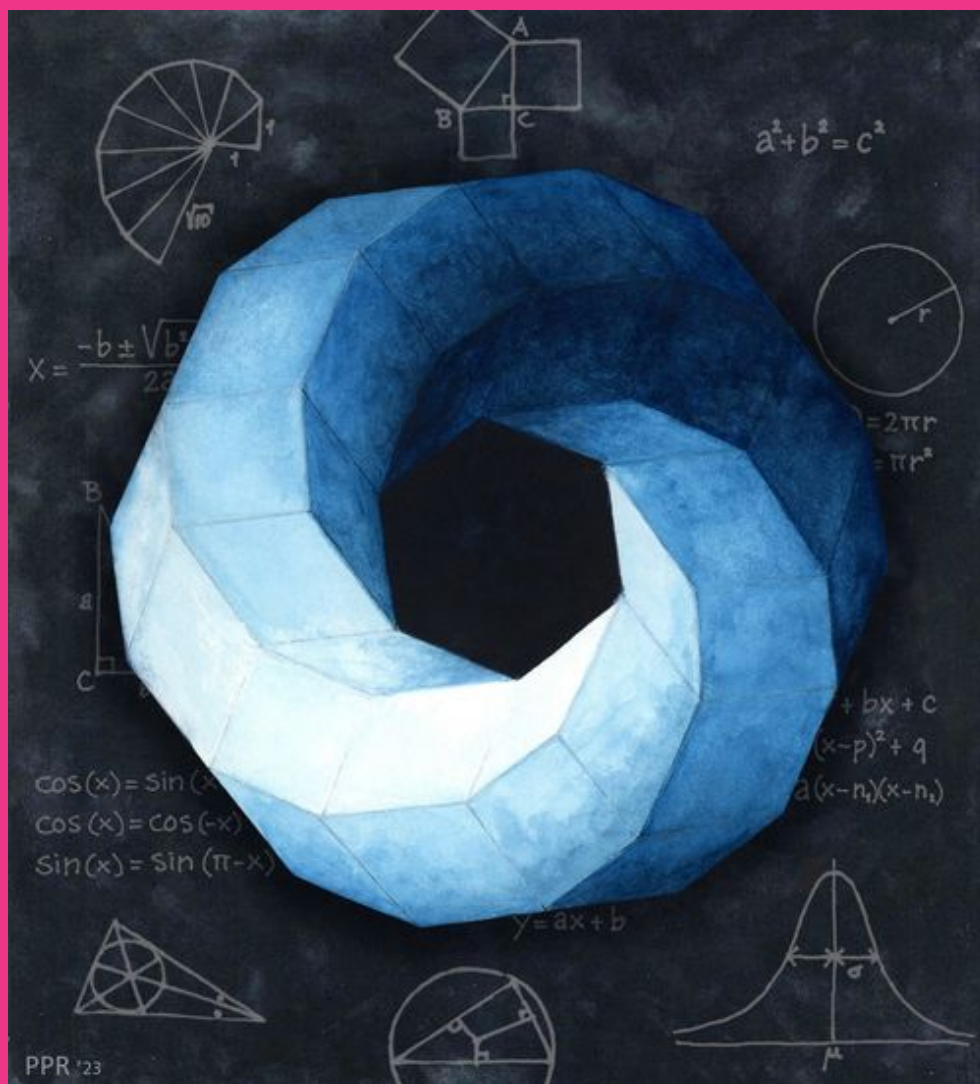
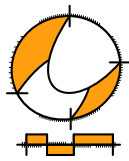


6 VWO

6 VWO

Katern 1





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Logisch redeneren 5

- 1.1 Wat is logica? 6
- 1.2 Waarheid 15
- 1.3 Als-dan-redeneringen 26
- 1.4 Hieruit-volgt-conclusies 35
- 1.5 Altijd waar of nooit waar? 47
- 1.6 Totaalbeeld 57

2 Statistisch onderzoek 63

- 2.1 De statistische cyclus 64
- 2.2 Data analyseren 71
- 2.3 Variabelen vergelijken 78
- 2.4 Samenhang tussen variabelen 85

Register 93

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Logisch redeneren

1.1	Wat is logica?	6
1.2	Waarheid	15
1.3	Als-dan-redeneringen	26
1.4	Hieruit-volgt-conclusies	35
1.5	Altijd waar of nooit waar?	47
1.6	Totaalbeeld	57

1.1 Wat is logica?

Inleiding

Onder 'logica' wordt het correct redeneren verstaan. Door middel van logica kun je vanuit bekende feiten nieuwe feiten afleiden. Je spreekt dan van 'logisch redeneren'.

In feite zijn computers niets meer dan apparaten die strikt logisch redeneren; ze zijn geprogrammeerd volgens logische regels. In dit onderwerp leer je over logica als de studie van geldige redeneringen. Een keertje geen getallen of grafieken, maar uitspraken vormen de basis van dit onderwerp. Uitspraken zijn beweringen die waar- of onwaar zijn.

Je leert in dit onderwerp

- werken met de begrippen redenering, conclusie, uitgangspunt, definitie, redeneerstap, correct en volledig;
- conclusies trekken uit een aantal uitgangspunten.

Voorkennis

- eigenlijk niets speciaals

Verkennen

Opgave V1

Bekijk deze zin: "Deze zin bevat één fout."

- Hoeveel spellingsfouten staan er in deze zin?
- Wat beweert deze zin? Welke twee typen fouten zijn er dus?
- Hoeveel fouten bevat deze zin dan in totaal?
Bekijk de zin: "Er zitten drie fouten in deze zin."
- Hoeveel spellingsfouten staan er in deze zin?.
- Wat beweert deze zin? Wat concludeer je hier uit?

Opgave V2

Uitspraak 1: "Socrates is een mens."

Uitspraak 2: "Een mens is sterfelijk."

Dus: "Socrates is sterfelijk."

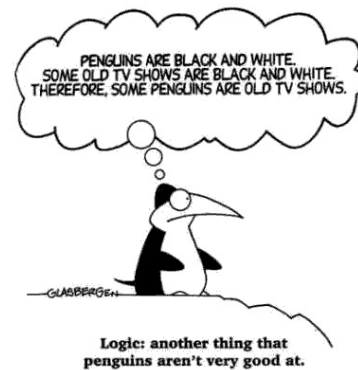
- Beoordeel beide uitspraken. Zijn deze waar?
- Leg uit dat de conclusie dan ook waar of onwaar is.

Uitspraak 1: "Een roman is een boek."

Uitspraak 2: "Een wiskundeboek is een boek."

Dus: "Romans zijn wiskundeboeken."

- Beoordeel beide uitspraken. Zijn ze waar?
- Leg uit of de conclusie dan ook waar of onwaar is.
- Welk verschil is er tussen de redeneringen bij a en c?



Figuur 1.1

Uitleg

Victor komt bij de dokter. Deze onderzoekt hem en stelt vast dat Victor roodvonk heeft. De dokter schrijft een antibioticum voor. De dokter gaat ervan uit: "Als je dit medicijn slikt, dan word je beter."

Een week later komt Victor terug bij de dokter die hem nogmaals onderzoekt.

Hij concludeert: "Je ziet er goed uit, je hebt mijn raad dus opgevolgd."

Victor antwoordt: "Integendeel, ik heb precies gedaan wat er op de bijsluiter stond: goed gesloten houden."

De redenering van de dokter begint met het uitgangspunt dat alleen het door hem voorgeschreven medicijn de ziekte roodvonk kan genezen. Als de dokter ziet dat Victor is genezen concludeert hij dat Victor de medicijnen heeft ingenomen. Deze conclusie is niet correct omdat het uitgangspunt van de dokter niet correct is. Een andere mogelijkheid om van roodvonk te genezen is door uit te zieken.

De redenering van Victor is dat hij beter werd door het potje met pillen niet te openen, zoals op de bijsluiter stond aangegeven. Maar waarschijnlijk is de roodvonk vanzelf overgegaan. Victor denkt dat er een relatie is tussen het niet openen van het medicijndoosje en zijn genezing. Ook deze conclusie is niet correct.

Alleen uitgangspunten die waar zijn, gevolgd door correcte redeneerstappen, vormen een volledige en logische redenering en leiden tot een correcte conclusie. Als er één of meer uitgangspunten onwaar zijn, of als redeneerstappen niet correct zijn of ontbreken, dan wordt de redenering onvolledig genoemd en is de conclusie onbetrouwbaar.

Opgave 1

KNVB gaat voor logica bij top zaalvoetbal

ZEIST - De hoogste divisies in het zaalvoetbal krijgen volgend seizoen een andere naam. Vanaf 1 juli 2012 zijn de eredivisie, eerste divisie en topklasse de drie hoogste klassen, vergelijkbaar met het veldvoetbal. De reden is volgens voetbalbond KNVB herkenbaarheid.

bron: de Gelderlander, 24-2-2012

Wat wordt in deze tekst bedoeld met logica?

Opgave 2

Sterre is twee en gaat voor het eerst naar de tandarts. Haar vader gaat met haar mee. In de praktijk begint ze te gillen en te huilen. Ze wil zo snel mogelijk weg. Thuis vraagt haar moeder hoe het gegaan is.

Vader: "Slecht, ze is bang voor de tandarts."

Moeder: "Sterre, wat was er zo eng aan dan?"

Sterre: "Er zat een spin!"

Benoem de verschillende onderdelen (bewering, uitgangspunt, redeneerstap en conclusie) van de redenering van de vader.

Opgave 3

Bekijk deze strip van 'Vader en Zoon' van Peter van Straaten.



Figuur 1.2

- a De zoon beschrijft in de eerste twee plaatjes een redenering van de vader.
Geef deze redenering. Gebruik daarbij "Als ..., dan ..."
- b Na de opmerking van de zoon maakt de vader een tegenstelling tussen 'dolgellukkig' en 'niet thuis'. Leg uit waarom deze redenering niet juist is.
- c Stelling 1: "Als de burenen geen geluid maken, dan zijn ze gelukkig."
Stelling 2: "Als de burenen gelukkig zijn, dan maken ze geen geluid."
Leg uit dat als stelling 1 waar is, dit niet automatisch betekent dat stelling 2 ook waar is.

(naar: voorbeeldexamen syllabus vwo C)

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een **logische redenering** volgt elke **redeneerstap** uit voorgaande stappen of uit de **uitgangspunten**. Een **definitie** (een afspraak wat iets betekent) is een voorbeeld van zo'n uitgangspunt. De **conclusie** is het resultaat van de uitgangspunten en de redeneerstappen.

Schematisch ziet een redenering er als volgt uit:

$$\left(\begin{array}{l} \text{uitgangspunt 1} \\ \text{uitgangspunt 2} \\ \dots \\ \text{uitgangspunt } n \end{array} \right) \rightarrow \text{redeneerstappen} \rightarrow \text{conclusie}$$

Het feit dat bij een logische redenering elke redeneerstap volgt uit de voorgaande stappen of de uitgangspunten, houdt niet in dat de conclusie daarom waar is. Het is mogelijk dat de redenering logisch is, en de conclusie toch onwaar. Als de uitgangspunten waar zijn en de redenering is logisch, dan leidt dit tot een ware conclusie.

Om na te gaan of een redenering logisch is, kijk je of elke redeneerstap **correct** is. Ook kan het zijn dat een redenering niet compleet is. Dit heet een **onvolledige redenering**.

Voorbeeld 1

Joost komt teleurgesteld thuis, hij heeft een onvoldoende gehaald voor zijn geschiedenistoets. Joost mag de toets herkansen.

Zijn moeder zegt: "Als je nu hard leert, dan haal je een goed cijfer voor de toets."

Een paar dagen later komt Joost na zijn herkansing blij thuis.

Zijn moeder concludeert: "De herkansing is goed gegaan, je hebt hard geleerd."

Joost antwoordt: "Nee hoor, ik kreeg precies dezelfde toets en die had ik besproken met een vriend die goed is in geschiedenis."

Benoem de verschillende onderdelen in deze redenering en geef aan of de redenering waar is.

Antwoord

De verschillende onderdelen in deze redenering zijn:

- Bewering: "Als je hard leert, dan haal je een goed cijfer voor de toets."
- Uitgangspunt 1: een herkansing kan alleen goed gaan als je er hard voor leert.
- Uitgangspunt 2: Joost komt blij thuis na de herkansing. → Redeneerstap: de herkansing is goed gegaan.
- Conclusie: Joost heeft hard geleerd.

Deze conclusie is niet correct omdat uitgangspunt 1 onwaar is. Een herkansing kan ook beter gaan omdat dezelfde toets is gegeven, of omdat je zou kunnen spieken of gokken.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- a Er ontbreekt een uitgangspunt dat de basis is voor de redeneerstap bij uitgangspunt 2.
Welk uitgangspunt is dat?
- b Waarom is dat uitgangspunt onwaar?

Opgave 5

Gegeven zijn twee uitspraken.

Uitspraak 1: "Alle dansers zijn gezellige mensen."

Uitspraak 2: "Sommige dansers zijn klein."

- a Welke van de conclusies kun je met zekerheid trekken?
 - A. Conclusie 1: Geen van de gezellige mensen is klein.
 - B. Conclusie 2: Alle gezellige mensen zijn klein.
 - C. Conclusie 3: Sommige gezellige mensen zijn klein.
 - D. Conclusie 4: Geen danser is klein.
 - E. Conclusie 5: Geen van deze conclusies is geheel zeker.
- b Is conclusie 1 volledig?
- c Kan deze redenering ook worden omgedraaid? Zijn alle gezellige mensen ook dansers?
- d Geef een verklaring waarom conclusie 1 niet kan worden getrokken.
- e Waarom is conclusie 4 onjuist?

Voorbeeld 2

Er is uit een winkel een nieuwe iPhone gestolen. Ad, Bert, Ciska en Doris zijn de vier verdachten.

Als de politie hen ondervraagt, volgen de onderstaande uitspraken.

Ad: "Ik heb het niet gedaan, geloof me!"

Bert: "Ik heb het zeker niet gedaan."

Ciska: "Doris heeft de iPhone achterover gedrukt."

Doris: "Bert heeft het gedaan."

Zeker is dat slechts één van hen liegt. Wie heeft de iPhone gestolen?

Antwoord

Redeneerstap 1: Als Ad liegt, dan liegen Ciska en Doris ook.

Redeneerstap 2: Als Bert liegt, dan liegt Ciska ook.

Redeneerstap 3: Als Ciska liegt, dan liegen Doris of Bert ook.

Redeneerstap 4: Als Doris liegt, dan kunnen de andere drie de waarheid spreken.

Hieruit volgt dat Doris de iPhone heeft gestolen.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a Verklaar redeneerstap 1.
- b Verklaar redeneerstap 3. Waarom is hier sprake van 'of'?
- c Waarom kan na het uitwerken van redeneerstap 4 de conclusie getrokken worden? Is deze conclusie volledig?

Opgave 7

Voor je staan twee schatkisten die allebei worden bewaakt door een schildwacht. Zeker is dat één van beide schildwachten altijd de waarheid spreekt en dat de andere schildwacht altijd liegt. Eén van de schatkisten is leeg en de andere bevat een geldbedrag. Je mag slechts één kist openmaken en de inhoud houden. Om goed te kunnen kiezen, mag je één vraag stellen aan één van de schildwachten.

Welke vraag stel je aan welke schildwacht?

Het probleem is dat je niet weet welke schildwacht liegt en welke de waarheid spreekt. Je moet een manier bedenken om dit effect uit te schakelen.

Noem de schildwachten A en B. Stel dat A de waarheid spreekt en B liegt.

- a Welke vragen kun je stellen?
- b Heeft het zin om aan een schildwacht te vragen of de schat in zijn kist zit?

Stel dat nu A liegt en B de waarheid spreekt.

- c Beantwoord b nogmaals.

Direct vragen aan de schildwacht heeft dus geen zin. De enige andere mogelijkheid is dan dat je aan schildwacht A vraagt wat schildwacht B zou antwoorden.

- d Bedenk hiervoor een geschikte vraag en laat zien dat je hiermee de juiste schatkist krijgt.

Verwerken

Opgave 8

Justin zit met zijn hond op een puppycursus. De trainer vraagt of de hond het woord 'zit' al kent. Justin knikt en laat het vol trots zien. Hij pakt een koekje uit zijn zak en zegt 'zit' tegen de hond, waarop de hond netjes gaat zitten. Justin zegt: "Mijn hond kent het woord zit." Waarop de trainer zegt: "En nu nog een keer, maar dan zonder koekje." Dit keer blijft de hond staan en kijkt zijn baasje vragend aan.

Benoem de verschillende onderdelen in deze redenering en geef aan of de redenering van Justin waar is.

Opgave 9

Uitspraak 1: "Een tienvoud is een getal."

Uitspraak 2: "Een priemgetal is een getal."

Conclusie: "Een tienvoud is een priemgetal."

- a Beoordeel beide uitspraken. Zijn deze waar?
- b Is de conclusie waar of onwaar? Verklaar je antwoord.

Opgave 10

Gegeven zijn twee uitspraken.

Uitspraak 1: "Geen van de timmerlieden is linkshandig."

Uitspraak 2: "Alle muzikanten zijn linkshandig."

Welke van de conclusies kun je met zekerheid trekken?

- A. Conclusie 1: "Sommige timmerlieden zijn muzikant."
- B. Conclusie 2: "Sommige timmerlieden zijn linkshandig."
- C. Conclusie 3: "Alle muzikanten zijn timmerlieden."
- D. Conclusie 4: "Muzikanten zijn geen timmerlieden."
- E. Conclusie 5: "Geen van de conclusies is juist."

Opgave 11

Arie, Bert en Corina zijn verdachten van een juwelendiefstal. Onder ede verklaren zij het volgende:

Arie: "Bert is schuldig en Corina is onschuldig."

Bert: "Als Arie schuldig is, dan is Corina het zeker ook."

Corina: "Ik ben onschuldig, maar minstens een van de anderen is schuldig."

- a Stel dat ze allemaal onschuldig zijn. Wie loog er dan?
- b Stel dat ze allemaal eerlijk waren. Wie heeft/hebben dan de juwelen gestolen?
- c Stel dat de onschuldigen eerlijk waren en dat de dief loog. Wie heeft/hebben dan de juwelen gestolen?

Opgave 12

Een agent ziet voor zich drie verdachten. Eén van hen is een spion die moet worden ontmaskerd. De agent in kwestie is op de hoogte van het feit dat:

1. Eén persoon altijd liegt.
2. Eén persoon altijd de waarheid spreekt.
3. De spion kan liegen en de waarheid spreken.

De agent vraagt aan verdachte 1: "Ben jij de spion?". Verdachte 1 antwoordt met "ja" of "nee". Dan vraagt de agent aan verdachte 2: "Sprak verdachte 1 de waarheid?". En verdachte 2 antwoordt met "ja" of "nee". Verdachte 1 zegt dan plots dat verdachte 3 de spion niet is. De agent geeft aan dat hij hiervan op de hoogte is en arresteert de spion.

Wie is de spion nu en hoe weet de agent dit?

Toepassen

Opgave 13: iPad-gebruik bij kleuters

Bekijk het gedeelte van een artikel uit dagblad *Trouw* over het iPad-gebruik bij kleuters.

iPad is voor kleuters niet slechter dan stoepkrijt of blokkendoos

Kinderen gaan thuis steeds jonger en intensiever om met digitale media. Nog voor hun eerste verjaardag gebruikt 45% van de kinderen al een tablet en vanaf 3 jaar gebruikt meer dan 77% de tablet regelmatig.

Dat blijkt uit het jaarlijkse onderzoek 'Iene Miene Media 2014' van expertisecentrum Mediawijzer.net. dat gisteren werd gepubliceerd. Ruim duizend ouders vulden een enquête in over het mediagebruik van hun kroost. Uit de gemengde reacties blijkt dat het onderwerp ouders enorm bezighoudt: "Ze worden er gemakkelijk en passief van", schrijft een ouder. "Ze willen niet meer zelf spelen en zijn niet meer creatief, doordat hun al verteld is 'hoe het moet' en ze daardoor de bewandelde paden belopen, en niet meer een tent in een tafel kunnen zien. Een groot gemis."

Andere ouders zijn juist erg positief. "Het kan mijn kind aan het leren krijgen zonder dat ze dit als leren ervaart", schrijft een andere ouder. "Ze heeft daardoor kleuren leren onderscheiden en kan al tot twintig tellen."

Toch denkt meer dan de helft van de ouders dat 'gewoon' speelgoed beter is voor hun kinderen dan digitale media. Ze zijn bang dat hun kinderen dingen zien die niet voor hun ogen zijn bestemd of dat ze computeren belangrijker vinden dan de echte wereld.

Zijn die zorgen terecht? Peter Nikken, hoogleraar mediaopvoeding aan de Erasmus Universiteit van Rotterdam, denkt van niet. "Digitale media hoeven niet slechter te zijn dan blokken of krijtjes. Zulke media kunnen ook goed zijn voor de breinontwikkeling van jonge kinderen. Maar het is wel belangrijk dat ouders de balans bewaken tussen computerspelletjes en buiten spelen."

bron: Trouw - Amber Dujardin, 19/04/14

Tabel 1.1

- a Vind je de titel van dit artikel een goede keuze? Waarom?
- b Wat vind je van de conclusie die de hoogleraar Nikken denkt te kunnen trekken? Is deze terecht?

Opgave 14: Ooggetuigeverklaringen

Na een verkeersongeluk waarbij de schuldige chauffeur is doorgereden, kan de politie vier verslagen van ooggetuigen noteren die allen een signalement van de chauffeur kunnen geven.

Ooggetuige 1: "Het was een dikke man met blond haar, een bril en een gestreepte trui."

Ooggetuige 2: "De man had donker haar, bril, gemiddeld postuur en een gestreepte trui."

Ooggetuige 3: "De man had rood haar, bril, is dun en droeg een effen trui."

Ooggetuige 4: "Hij was dik en kaal en droeg geen bril. Wel droeg hij een gestreepte trui."

Elk van de ooggetuigen heeft slechts één detail goed kunnen zien. Wat is het signalement van de chauffeur?

Testen

Opgave 15

Uitspraak 1: "De melkweg is een sterrenstelsel."

Uitspraak 2: "De aarde bevindt zich in de melkweg."

Conclusie: "De aarde is een ster."

- a Beoordeel beide uitspraken. Zijn deze waar?
- b Is de conclusie dan waar of onwaar? Leg jouw antwoord uit.

Opgave 16

Je hebt een blinddoek om en voor je staan twee kinderen. De kinderen kunnen piraat zijn of gevangene. Jongens die gevangene zijn en meisjes die piraat zijn vertellen altijd de waarheid. Meisjes die gevangene zijn en jongens die piraat zijn liegen altijd.

Kind 1 zegt: "Ik ben jongen en kind 2 is een piraat".

Kind 2 zegt: "Kind 1 is een piraat en ik ben een gevangene".

Wie is wat en waarom?

1.2 Waarheid

Inleiding

In de vorig paragraaf ging het om logische problemen op te lossen door het uiteen te zetten in redeneerstappen of gewoon je gevoel te gebruiken. In deze paragraaf ga je wat dieper in op de structuur van redeneren.

Je maakt kennis met verbindingstekens tussen beweringen (proposities) en je leert gebruik maken van waarheidstabellen. Dit is het eerste begin van de zogenaamde propositielogica.

Je leert in dit onderwerp

- een redenering opsplitsen in beweringen met verbindingstekens voor 'en', 'of' en 'niet', bijpassende venndiagrammen;
- het werken met waarheidstabellen, onder andere om logische gelijkwaardigheid aan te tonen.

Voorkennis

- de begrippen: (logische) redenering, conclusie, uitgangspunt, definitie, redeneerstap, correct en volledig, bewijs;
- conclusies trekken uit een aantal uitgangspunten.

Verkennen

Opgave V1

Een oude boerenwijsheid is:

“Als je de muren in een huis lichtblauw verft, dan heb je geen last van vliegen”.

Dit bleek in de Achterhoek echt te werken. Op sommige boerderijen stikte het van de vliegen. Om de vliegen niet binnenshuis te hebben maakte men de binnenmuren lichtblauw.

- Voor de constructie “Als ..., dan ...” wordt wel het teken $\Rightarrow$ (daaruit volgt) gebruikt. Hoe zou je deze redenering noteren met behulp van dit teken?
- Schrijf in eigen woorden het omgekeerde van deze redenering op.
- Uitgaande van het feit dat de boerenwijsheid waar is, is de omgekeerde redenering dan ook waar?
- De boerenwijsheid valt ook te ontkennen. Formuleer deze ontkenning.
- Is deze ontkenning, wederom uitgaande van de waarheid van de boerenwijsheid, waar?

Uitleg 1

Wat voor weer is het vandaag? Het regent.

De uitspraak "Het regent" is een bewering. Deze bewering noem je P .

P : "Het regent."

Een bewering (of propositie) zoals P is altijd waar of onwaar.

Bij elke bewering hoort een ontkenning:

niet- P =: "Het regent niet."

Je noteert niet- P als $\neg P$.

Elke bewering heeft een waarheidswaarde 0 of 1.

- Als een bewering waar is, dan heeft die waarheidswaarde 1.
- Is een bewering onwaar, dan is de waarheidswaarde 0.

Je kunt die waarheidswaarden weergeven in een waarheidstabel.

Als bewering P waar is ("Het regent.") dan is de ontkenning ("Het regent niet.") uiteraard niet waar.

In een waarheidstabel worden alle mogelijkheden ondergebracht.

De waarheidstabel is verder uit te breiden met dubbele ontkenningen $\neg\neg P$.

Merk op dat de beweringen P en $\neg\neg P$ dezelfde waarden in de waarheidstabel hebben. Zulke beweringen noem je logisch gelijkwaardig.

Opgave 1

Zijn de volgende uitspraken beweringen? Geef aan of de bewering waar of onwaar is.

- "Blauw is geen kleur."
- "Willem-Alexander trad in 2010 aan als koning van Nederland."
- "Er zijn alleen oneven priemgetallen."
- "Pak de hagelslag even voor mij."
- "Is er een leuke film op de televisie vanavond?"
- "17 is een priemgetal."

Opgave 2

- Vul de waarheidstabel in.

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
1		
0		

Tabel 2.3

- Welke conclusies kun je trekken uit de ingevulde waarden in bovenstaande waarheidstabel?

P	$\neg P$
0	1
1	0

Tabel 2.1

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
0	1	0
1	0	1

Tabel 2.2

Opgave 3

Haal uit het krantenbericht vier beweringen.

De ex-neuroloog Ernst Jansen Steur is veroordeeld tot een onvoorwaardelijke gevangenisstraf van drie jaar. Nog nooit ging een Nederlandse arts de cel in voor een medische misser. Voorwaardelijke straffen waren er wel.

De kindercardioloog Paul H. uit Utrecht werd in 2004 veroordeeld tot anderhalf jaar voorwaardelijke gevangenisstraf. Hij werd schuldig bevonden aan de dood van een baby, omdat hij "grovelijk onvoorzichtig" een dotterbehandeling had uitgevoerd. De strafmaat werd hoger, omdat hij in bezit was van een grote hoeveelheid kinderporno.

Een 54-jarige basisarts uit Heemstede kreeg in juni 2013 een jaar voorwaardelijk met een proeftijd van vijf jaar, omdat hij een borstkankerpatiënte behandelde met acupunctuur en 'korreltjes'. "Roekeloos en nalatig", oordeelde de rechter. De patiënte (52) is overleden.

De geneesheer-directeur en een verpleegkundige van een Utrechtse abortuskliniek werden in 2006 veroordeeld tot enkele maanden voorwaardelijk, omdat ze twee patiënten een veel te hoge dosis verdovingsmiddel hadden gegeven. Een patiënt overleed, de ander liep trombose op.

De rechtbank in Arnhem achtte in 1998 een Utrechtse arts schuldig aan de dood van een 71-jarige patiënt in het Rijnstate-ziekenhuis in Arnhem. Hij kreeg een boete van 10 duizend gulden. Het OM had zes maanden voorwaardelijk geëist. De arts had de man, die met een klaplong was opgenomen, een twintig keer te hoge dosis verdovingsmiddel gegeven.

Het Arnhemse gerechtshof veroordeelde in 1996 een 54-jarige Arnhemse huisarts tot 2 maanden voorwaardelijk wegens dood door schuld en een boete van 5.000 gulden. Het hof achtte hem schuldig aan de dood van een jonge vrouw, die tweemaal een dagdosis methadon had ingenomen. De arts greep niet in, maar ging ervan uit dat in de methadon een braakmiddel zat. Dat bleek niet het geval. Het OM deed drie jaar strafrechtelijk onderzoek naar "medische missers" van een maagchirurg van het Scheper Ziekenhuis in Emmen. Zeventien patiënten deden aangifte tegen hem. Niet is gebleken dat de chirurg "noodzakelijkerwijs onzorgvuldig" heeft gehandeld, liet het OM een vrouw weten die haar man op de operatietafel verloor.

bron: Volkskrant, 11 februari 2014

Tabel 2.4

Uitleg 2

De uitspraak "Peter is atleet en filmliefhebber" kun je zien als een samenstelling van twee beweringen. Deze uitspraak is op te splitsen in twee enkelvoudige beweringen:

- A: "Peter is een atleet."
- B: "Peter is een filmliefhebber."

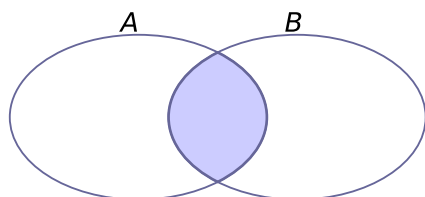
Bekijk de waarheidstabel.

Een bewering is altijd waar of onwaar, voor de samenstelling ligt dit iets genuanceerder.

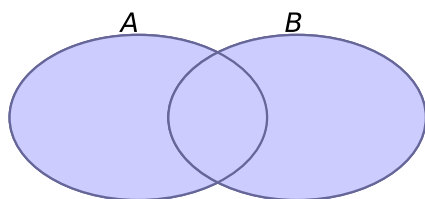
A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

Tabel 2.5

Om te bepalen of een samengestelde bewering waar of onwaar is, kun je een venndiagram gebruiken. Bekijk de twee venndiagrammen met de verzamelingen: A : alle atleten en B : alle film liefhebbers.



I: $A \wedge B$



II: $A \vee B$

Figuur 2.1

- In figuur I zijn alle mensen aangegeven die zowel atleet als film liefhebber zijn. Hier geldt: A en B zijn waar. Voor het woord 'en' wordt ook wel het symbool $\wedge$ gebruikt. $A \wedge B$ heet de conjunctie van A en B , $\wedge$ is het conjunctieteken.
- In figuur II zijn alle mensen aangegeven die atleet of film liefhebber zijn, of allebei. Hier geldt: A 'en/of' B is waar. Dit wordt disjunctie genoemd. A en/of B schrijf je als $A \vee B$, $\vee$ is het disjunctieteken.

Hierbij horen deze twee waarheidstabellen.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabel 2.6

A en B ($A \wedge B$) zijn alleen waar als zowel bewering A als bewering B waar is.

A en/of B ($A \vee B$) is waar als A en/of B waar is.

LET OP: Met het teken $\vee$ wordt altijd 'en/of' bedoeld. Soms moet je uit de context halen of 'en/of' wordt bedoeld, of 'of/of'.

Opgave 4

Splits de uitspraken in twee enkelvoudige beweringen P en Q . Verbind P en Q met het juiste teken: $\wedge$ of $\vee$.

- 'Peter is goed in aardrijkskunde en muziek.'
- 'Nadja leert goed geschiedenis terwijl ze naar K3 luistert.'

- c 'Siebe krijgt een snoepje als hij zijn kamer opruimt of zijn broertje helpt met het konijnenhok schoonmaken.'
- d 'John komt alleen vergaderen als Johan of Frits aanwezig zijn.'

Opgave 5

- a Gegeven zijn de beweringen P en Q .

P : "Peter is een atleet."

Q : "Peter is een film liefhebber."

Formuleer de ontkenningen van de beweringen P en Q .

- b Vul de waarheidstabel in.

$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$

Tabel 2.7

- c Vul de waarheidstabel in.

$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$

Tabel 2.8

Opgave 6

Gegeven is de uitspraak.

"Je mag het concert van Anouk bezoeken als je een kaartje hebt en een identiteitskaart bij je hebt."

- a Verdeel deze uitspraak in twee beweringen.
- b Maak een bijbehorende waarheidstabel.
- c Formuleer de ontkenning van beide beweringen.
- d Maak ook een waarheidstabel die bij $\neg P \wedge \neg Q$ past.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **bewering** (of propositie) is altijd waar of onwaar.

Aan een bewering die waar is, wordt **waarheidswaarde 1** gegeven, een bewering die onwaar is krijgt waarheidswaarde 0.

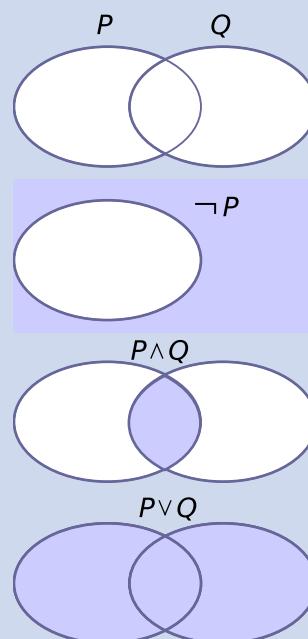
Bij elke bewering P hoort ook de **ontkenning** van deze bewering: $\neg P$ (spreek uit als niet- P). Een ander woord voor ontkenning is ook wel **negatie** en $\neg$ is het negatieteken.

Met twee beweringen P en Q kun je nieuwe beweringen samenstellen:

- P en Q , te noteren als $P \wedge Q$, is de **conjunctie** van P en Q .
- P en/of Q , te noteren als $P \vee Q$, is de **disjunctie** van P en Q .
Opgelet! Hiermee wordt 'en/of' bedoeld, tenzij er iets anders vermeld wordt. Soms moet je uit de context halen of 'en/of' wordt bedoeld, of 'of/of'.

Om te bepalen of een samengestelde bewering waar of onwaar is, kun je een **venndiagram** gebruiken.

Een **waarheidstabel** geeft een overzicht van de waarheidswaarden van (samengestelde) beweringen.



Figuur 2.2

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0

Tabel 2.9

Twee (samengestelde) beweringen heten **logisch gelijkwaardig** als de kolommen in de waarheidstabel identiek zijn.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de volgende beweringen.

- "0 is het kleinste natuurlijke getal."
- "Een dolfijn behoort tot de zoogdieren."
- "De grafiek van $f(x) = x^2 + 1$ is een dalparabool."
- "39 is een priemgetal."

Wat is de waarheidswaarde van de bewering? Formuleer de ontkenning van de bewering en de waarheidswaarde hiervan.

Antwoord

"0 is het kleinste natuurlijke getal."

- waarheidswaarde 1;
- ontkenning: "0 is niet het kleinste natuurlijke getal", waarheidswaarde 0.

Je kunt de ontkenning (of negatie) ook noteren als $\neg$ ("0 is het kleinste natuurlijke getal"), waarin $\neg$ het negatieteken is.

“Een dolfijn behoort tot de zoogdieren.”

- waarheidswaarde 1;
- ontkenning: “een dolfijn behoort niet tot de zoogdieren”, waarheidswaarde 0.

“De grafiek van $f(x) = x^2 + 1$ is een dalparabool.”

- waarheidswaarde 1;
- ontkenning: “de grafiek $f(x)$ is geen dalparabool”, waarheidswaarde 0.

“39 is een priemgetal.”

- waarheidswaarde 0;
- ontkenning: “39 is geen priemgetal”, waarheidswaarde 1.

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- Leg uit welk verband er is tussen de waarheidswaarde van een bewering en haar ontkenning.
- Waarom is de ontkenning van de tweede bewering niet “een aap behoort tot de zoogdieren”?
- Formuleer zelf een bewering en haar ontkenning.

Opgave 8

De bewering “Deze zin bevat zes woorden” is onwaar.

Maar de ontkenning hiervan “Deze zin bevat geen zes woorden” is ook onwaar.

Hoe kan dit?

Voorbeeld 2

Gegeven is de zin “Apen houden ervan in bomen te klimmen en ze houden van bananen.”

Verdeel deze zin in twee beweringen en maak er een venndiagram en een waarheidstabel bij.

Antwoord

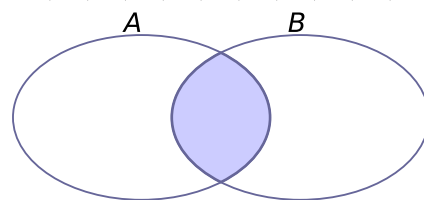
A: “Apen houden ervan in bomen te klimmen.”

B: “Apen houden van bananen.”

Waarheidstabel en venndiagram:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabel 2.10



Figuur 2.3

Opgave 9

Gegeven is de uitspraak:

“De doodsoorzaak is een misdrijf of een noodlottig ongeval.”

- Verdeel deze uitspraak in twee beweringen.
- Formuleer de ontkenning van beide beweringen.
- Maak ook een waarheidstabel die bij $\neg P \vee \neg Q$ past.

Opgave 10

Gegevens zijn de twee beweringen:

A: “Apen houden ervan in bomen te klimmen.”

B: “Apen houden van bananen.”

- Maak een venndiagram en een waarheidstabel bij de uitspraak “Apen houden ervan in bomen te klimmen of ze houden van bananen”.
- Formuleer ontkenningen van de beweringen A en B .
- Formuleer $\neg A \wedge B$ en maak er een waarheidstabel bij.
- Formuleer $A \wedge \neg B$ en maak er een waarheidstabel bij.
- Formuleer $\neg A \wedge \neg B$ en maak er een venndiagram en een waarheidstabel bij.

Opgave 11

Gegeven is de uitspraak: “De berg Chungawat is gevaarlijk en hoog.”

- Verdeel deze zin in twee beweringen A en B .
- Maak een waarheidstabel bij deze uitspraak.
- Formuleer ontkenningen van de beweringen A en B .
- Formuleer $\neg A \wedge B$ en maak er een waarheidstabel bij.
- Formuleer $A \wedge \neg B$ en maak er een waarheidstabel bij.
- Formuleer $\neg A \wedge \neg B$ en maak er een waarheidstabel bij.

Voorbeeld 3

Uitspraak: “Ik sport op dinsdag of op donderdag.”

De uitspraak is samengesteld uit twee beweringen:

P : “Ik sport op dinsdag.”

Q : “Ik sport op donderdag.”

Is $P \vee \neg Q$ logisch gelijkwaardig aan $\neg P \vee Q$?

Antwoord

Om logische gelijkwaardigheid aan te tonen, maak je een waarheidstabel.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0

Tabel 2.11

De waarheidswaarden in de vijfde en zesde kolom zijn niet gelijk. Hieruit volgt dat de uitdrukkingen niet logisch gelijkwaardig zijn.

Opgave 12

Bekijk de waarheidstabel.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$
0		1	0		1
0	0		1	0	
	1	0			0
1	0	0	1	1	

Tabel 2.12

- Vul de waarheidstabel verder in.
- Is de uitdrukking $P \wedge \neg Q$ gelijkwaardig met $\neg P \wedge Q$? Laat dit zien met een voorbeeld.

Verwerken

Opgave 13

Bekijk de volgende als..., dan... redenering:

“Als Tessa een voldoende haalt voor wiskunde, dan trakteert ze op taart.”

Formuleer de omkering van deze bewering. Welke waarheidswaarde heeft die omkering? Waarom?

Opgave 14

Ga na of de zinnen beweringen zijn.

- “Waar staat de sinaasappelsap?”
- “Een Ferrari is een dure auto.”
- “Kamperen is in de zomer een goede manier om te ontspannen.”
- “Op de middelbare school kies je uit vier soorten wiskunde.”
- “Dwergkonijnen zijn kleiner dan gewone konijnen.”
- “Er is een grootste priemgetal.”

Opgave 15

Ontleed de samengestelde zinnen in enkelvoudige beweringen P en Q .

Verbind daarna P en Q door de symbolen voor ‘en’, ‘en/of’, ‘niet’.

- “Ik wil ham en kaas op mijn brood.”
- “Ik wil brood met kaas en zonder boter.”
- “Ik wil jam of pindakaas op mijn brood.”
- “Ik wil hagelslag of pindakaas met hagelslag op mijn brood.”

Opgave 16

Gegeven zijn drie beweringen over getal x .

P : " x is een geheel getal."

Q : " x is een even getal."

R : " x is een kwadraat."

Maak een zin en een venndiagram bij ieder van de samengestelde beweringen.

- a $P \wedge Q$
- b $P \wedge R$
- c $P \wedge (Q \vee R)$
- d $\neg Q \wedge \neg R$

Opgave 17

Vul de waarheidstabel verder in.

P	Q	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \vee Q$
1	1		
0	1		
1	0	1	0
	0		

Tabel 2.13

Opgave 18

De uitspraak $2 < \pi < 5$ bevat het woord 'en'. De uitspraak kan geschreven worden als $P \wedge Q$.

- a Benoem de beweringen P en Q .
- b Wat weet je van π als geldt $(2 < \pi) \vee (\pi < 5)$?
- c Maak een bewering bij $P \vee \neg Q$ en bij $\neg P \vee Q$.
- d Zijn $P \vee \neg Q$ en $\neg P \vee Q$ logisch gelijkwaardig? Gebruik een waarheidstabel.

Toepassen**Opgave 19: Rokers en niet-rokers**

Een veelgemaakte redenering is de volgende: "90% van de longkankerpatiënten heeft gerookt." Dus "als je rookt, dan is de kans op longkanker 90%."

Laat met een venndiagram zien dat deze omdraaiing niet zomaar is toegestaan. Kies hiervoor twee groepen: patiënten en rokers. De mensen in de doorsnede van deze groepen zijn de rokende patiënten.

(naar: voorbeeldexamen syllabus vwo C)

Testen

Opgave 20

Ga na of de zinnen beweringen zijn.

- a “De appel is rood.”
- b “Een Ferrari rijdt sneller dan een Fiat.”
- c “Hoe was je vakantie?”
- d “Van de zon word je blij.”
- e “Op de middelbare school kies je uit vier profielen.”
- f “Er is een grootste kwadraat.”

Opgave 21

De uitspraak $1 < \varphi < 2$ bevat het woord ‘en’.

De uitspraak kan geschreven worden als $P \wedge Q$.

- a Benoem de beweringen P en Q .
- b Wat weet je van φ als geldt $(1 < \varphi) \vee (\varphi < 2)$?
- c Maak een zin bij $P \wedge \neg Q$ en $\neg P \wedge Q$.
- d Zijn $P \wedge \neg Q$ en $\neg P \wedge Q$ logisch gelijkwaardig? Gebruik een waarheidstabel.

1.3 Als-dan-redeneringen

Inleiding

Veel redeneringen hebben een structuur van de vorm 'Als ..., dan ...'. Op de plaats van de stippeltjes staan dan eenvoudige proposities, of zelfs zinnen die uit meerdere proposities zijn samengesteld. Ook voor deze constructie bestaat een speciaal teken, dat je het 'daaruit volgt'-teken zou kunnen noemen. En soms geldt ook het omgekeerde van zo'n als-dan-redenering.

Je leert in dit onderwerp

- als-dan-redeneringen herkennen en onderzoeken op hun waarheidsgehalte, en het teken voor 'daaruit volgt' gebruiken.
- de begrippen 'nodige voorwaarde' en 'voldoende voorwaarde' gebruiken.

Voorkennis

- de belangrijkste onderdelen van een logische redenering herkennen;
- logische redeneringen uiteen rafelen in beweringen en verbindingstekens voor 'en', 'of', 'niet';
- werken met venndiagrammen en waarheidstabellen.

Verkennen

Opgave V1

Vertel of je de onderstaande redeneringen waar of onwaar vindt. Elk van deze redeneringen bestaat uit twee proposities P en Q . Schrijf deze proposities op en ga na of ze waar of onwaar zijn.

- Als 1234 een 2-voud is, dan is 3×1234 een 2-voud.
- Als 1234 een 6-voud is, dan is 3×1234 een 6-voud.
- Als 1234 deelbaar is door 2 dan is $1234 - 1$ deelbaar door 2.

Uitleg 1

Constructies van de vorm "als ..., dan..." komen in het dagelijks taalgebruik en in de wiskunde vaak voor. Bijvoorbeeld "Als ik een 6 haal voor mijn proefwerk, dan heb ik op mijn rapport gemiddeld een voldoende." Dit is een redenering van de vorm "als ..., dan ..." met daarin twee beweringen P en Q :

- P : "Ik haal een 6 voor mijn proefwerk."
- Q : "Ik heb op mijn rapport gemiddeld een voldoende."

Als-dan-redeneringen kun je schrijven als $P \Rightarrow Q$.

Het teken $\Rightarrow$ betekent 'daaruit volgt' en je noemt zo'n zin een implicatie.

Het is duidelijk dat de implicatie waar is als P en Q beiden waar zijn.

De implicatie is niet waar als P waar is en Q niet.

Lastiger wordt het als bewering P onwaar is. Toch is er dan geen reden om de waarheid van de implicatie in twijfel te trekken. In dit geval haal je geen 6 voor je proefwerk. Dan kun je nog gemiddeld een voldoende halen, maar je kunt ook gemiddeld een onvoldoende halen.

Beide beweringen kunnen best waar zijn en deze implicatie krijgt dan ook waarheidswaarde 1 als Q waar is en als Q onwaar is.

Dit levert deze waarheidstabel van de implicatie op.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabel 3.1

Opgave 1

Bekijk de waarheidstabel in [Uitleg 1](#).

- Waarom is $P \Rightarrow Q$ gemakkelijk in te vullen in de gevallen waarin $P = 1$?
- Waarom is dit moeilijker in de gevallen waarin $P = 0$?
- Leg uit waarom $P \Rightarrow Q$ waarheidswaarde 1 heeft als $P = 0$ en $Q = 0$.
- Doe hetzelfde als $P = 0$ en $Q = 1$.

Opgave 2

Bekijk de redenering: "Als ik € 500 heb gespaard, dan ga ik op vakantie."

- Geef de beweringen A en B waaruit deze redenering is opgebouwd.
- Schrijf de redenering als implicatie.
- Leg uit of de implicatie $A \Rightarrow B$ waar of niet waar is als $A = 1$ en $B = 0$.
- Leg uit of de implicatie $A \Rightarrow B$ waar of niet waar is als $A = 0$ en $B = 0$.
- Maak een waarheidstabel met daarin A , B , en $A \Rightarrow B$.

Uitleg 2

In de dagelijkse logica kun je niet elk willekeurig tweetal beweringen koppelen tot een nieuwe bewering $P \Rightarrow Q$. Er kan dan gemakkelijk onzin ontstaan. Bijvoorbeeld: "als de stelling van Pythagoras onwaar is, dan zijn alle driehoeken vijfhoeken". Bij een implicatie wordt vereist dat er een zinvolle relatie moet zijn tussen de als-bewering en de dan-bewering.

Bekijk de uitspraak P : "Ik slaag voor mijn eindexamen".

Elk van de volgende beweringen is als voorwaarde voldoende om de uitspraak P waar te laten zijn:

V1: "Al mijn eindcijfers zijn 8 of hoger."

V2: "Mijn laagste cijfer is een 7."

V3: "Ik heb één 6 en mijn andere cijfers zijn hoger."

Deze drie voorwaarden zijn niet allemaal strikt nodig, je kunt bijvoorbeeld ook slagen met een lijst met allemaal zessen. Dan voldoe je aan geen van de voorwaarden, maar toch is P waar.

Uit de voorwaarden $V1$, $V2$ en $V3$ volgt dat de uitspraak P waar is. Een bewering V is een voldoende voorwaarde voor P als geldt $V \Rightarrow P$.

Elk van de volgende beweringen is als voorwaarde nodig:

$N1$: "Ik heb geen 4 of lager behaald."

$N2$: "Meer dan de helft van mijn cijfers is boven de 5."

$N3$: "Al mijn cijfers zijn boven de 4."

Deze drie voorwaarden zijn geen van alle voldoende, je kunt bijvoorbeeld een lijst hebben met vier vijven en vijf zessen. Dan voldoe je aan alle voorwaarden, maar toch is P onwaar.

Als de persoon slaagt, dan moet ook voldaan zijn aan de voorwaarden $N1$, $N2$ en $N3$. Deze voorwaarden zijn nodig om te kunnen slagen. Een bewering N is een nodige voorwaarde voor P als geldt $P \Rightarrow N$.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit [Uitleg 2](#).

- Leg uit waarom $V1$, $V2$, $V3$ geen van alle strikt nodig zijn opdat P waar is.
- Waarom volgt uit de waarheid van P dat $N1$, $N2$ en $N3$ waar zijn?
- Vul de waarheidstabel in.

N_1	N_2	N_3	$N \Rightarrow P$

Tabel 3.2

Opgave 4

Bekijk de bewering:

"Ik mag vandaag stemmen voor de Tweede Kamerverkiezing in Nederland."

- Bedenk enkele voldoende voorwaarden bij deze bewering.
- Bedenk enkele nodige voorwaarden bij deze bewering.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De constructie van de vorm 'als ..., dan...' komt in het dagelijks taalgebruik en in de wiskunde vaak voor.

In de logica kan een **als-dan-redenering** tussen twee beweringen worden weergegeven als $P \Rightarrow Q$. De uitdrukking $P \Rightarrow Q$ wordt een **implicatie** genoemd en het symbool $\Rightarrow$ heet het implicatieteken. De uitdrukking is logisch gelijkwaardig met $\neg P \vee Q$.

De **logische symbolen** $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ en $\neg$ zijn verbindingsymbolen.

De waarheidstabel van $P \Rightarrow Q$ zie je hier.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabel 3.3

Als P niet waar is en Q waar is, dan is dit niet in strijd met de regel $P \Rightarrow Q$ (er kan nog steeds gelden dat als P , dan Q), en dan is $P \Rightarrow Q$ in dat geval waar. Ook als P en Q beide niet waar zijn, kan $P \Rightarrow Q$ waar zijn.

Een bewering P is een **voldoende voorwaarde** voor Q als geldt $P \Rightarrow Q$.

Een bewering R is een **nodige voorwaarde** voor Q als geldt $Q \Rightarrow R$.

Voorbeeld 1

Schrijf de zin "Zodra het buiten donker wordt, neemt het aantal autodiefstallen toe" als een implicatie.

Maak er een waarheidstabel bij.

Antwoord

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabel 3.4

Twee beweringen:

P : "Het wordt donker buiten."

Q : "Het aantal autodiefstallen neemt toe."

Implicatie:

- Als het buiten donker wordt, dan neemt het aantal autodiefstallen toe.
- $P \Rightarrow Q$: "Het wordt donker buiten" $\Rightarrow$ "Het aantal autodiefstallen neemt toe."

Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- Schrijf de implicatie andersom, zodat $Q \Rightarrow P$.
- Is de betekenis dan anders? Zo ja, in welk opzicht?
- Maak een waarheidstabel bij deze implicatie.

Opgave 6

Schrijf de uitdrukkingen op als implicatie.

- "Docenten die veel onvoldoendes geven, beheersen hun vak niet."
- "Ik eet mijn hoed op als de achterkant van de maan van kaas blijkt te zijn."
- "Een rode appel is rijp."

Voorbeeld 2

Gegeven is een driehoek ABC en onderstaande beweringen over deze driehoek.

Q : " $AB = BC = AC$ "

R : "Hoek A = hoek B "

S : "Hoek A = hoek B = 60 graden"

Welke van deze beweringen zijn noodzakelijke voorwaarden en welke zijn voldoende voorwaarden voor de bewering P : " $AC = BC$ "?

Antwoord

Bewering Q :

- voldoende voorwaarde, $Q \Rightarrow P$, want in Q staat al letterlijk $AC = BC$.

Bewering R :

- voldoende voorwaarde, $R \Rightarrow P$, want als hoek A gelijk is aan hoek B , dan is driehoek ABC gelijkbenig en daaruit volgt dat $AC = BC$.
- noodzakelijke voorwaarde, $P \Rightarrow R$, want als $AC = BC$, dan volgt daaruit dat driehoek ABC gelijkbenig is en dan zijn hoek A en B gelijk.

Bewering S :

- voldoende voorwaarde, $S \Rightarrow P$, want als hoek A en hoek B beide 60° zijn, dan is hoek C ook 60° (hoekensom driehoek). Dan is driehoek ABC gelijkzijdig en daaruit volgt dat $AC = BC$.

Opgave 7

Gebruik de beweringen uit **Voorbeeld 2**.

- a Welke van de beweringen P , R , en S zijn nodige en voldoende voorwaarden voor Q ?
- b Welke van de beweringen P , Q , en S zijn nodige en voldoende voorwaarden voor R ?

Opgave 8

Geef in de beweringen aan of Q een nodige of voldoende voorwaarde is voor P .

- a P : "Driehoek ABC is precies dezelfde als driehoek KLM ."
 Q : "Driehoek ABC is gelijkvormig met driehoek KLM ."
- b P : "Een kwadratische vergelijking heeft ten minste één oplossing."
 Q : "De discriminant van deze kwadratische vergelijking is groter dan 0."
- c P : "Jan is timmerman."
 Q : "Jan kan met een hamer overweg."
- d P : "Het is mogelijk om te schaatsen op het Sneekermeer."
 Q : "Het vriest in Friesland."

Opgave 9

Gegeven is de bewering S : "Vierhoek $ABCD$ is een vlieger".
 Formuleer beweringen P , Q en R die aan deze voorwaarden voldoen.

- a P is een nodige, maar geen voldoende voorwaarde voor S .
- b Q is een voldoende, maar geen nodige voorwaarde voor S .
- c R is een nodige en voldoende voorwaarde voor S .

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de beweringen.

P : "Ik word 18 jaar."

Q : "Ik krijg een auto."

Hieruit kun je de implicatie $P \Rightarrow Q$ samenstellen: "Als ik 18 jaar word, dan krijg ik een auto". Hierbij kan een ontkenning worden gemaakt.

Laat met een waarheidstabel zien dat "Als ik geen 18 jaar word, dan krijg ik een auto" geen juiste ontkenning is.

Antwoord

De simpelste ontkenning in symbolen van $P \Rightarrow Q$ is $\neg(P \Rightarrow Q)$.

Bij de zin "Als ik geen 18 jaar word, dan krijg ik een auto", hoort de implicatie $\neg P \Rightarrow Q$.

Werk de gegevens uit in een waarheidstabel.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg P \Rightarrow Q$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Tabel 3.5

Conclusie: $\neg P \Rightarrow Q$ is niet logisch gelijkwaardig met $\neg(P \Rightarrow Q)$, dus dit is niet de ontkenning van $P \Rightarrow Q$.

Opgave 10

Gebruik de gegevens uit [Voorbeeld 3](#).

- Zoek uit of “Als ik 18 jaar word, dan krijg ik geen auto” een juiste ontkenning is.
- Is $\neg P \Rightarrow \neg Q$ een juiste ontkenning van $P \Rightarrow Q$?
- Wat is de juiste ontkenning van $P \Rightarrow Q$? Toon dit aan met een waarheidstabel.

Opgave 11

- Leg met een voorbeeld uit waarom de ontkenning “Als ik geen 8 haal, dan heb ik een onvoldoende gehaald” onjuist is.
- Is $P \Rightarrow \neg Q$ de ontkenning van $P \Rightarrow Q$? Leg je antwoord uit.

Verwerken

Opgave 12

Bekijk de advertentie van de Postcodeloterij.

Noem twee als-dan-redeneringen die deze advertentie bevat.



Figuur 3.1

Opgave 13

Bekijk de als-dan-redenering.

“Als Tessa een voldoende haalt voor wiskunde, dan trakteert ze op taart.”

Formuleer de omkering van deze bewering. Heeft deze dezelfde betekenis? Waarom?

Opgave 14

Gegeven is de bewering K : “Vierhoek $ABCD$ is een rechthoek.”

Formuleer beweringen A , B en C die aan de volgende voorwaarden voldoen.

A is een nodige, maar geen voldoende voorwaarde voor K .

B is een voldoende, maar geen nodige voorwaarde voor K .

C is een nodige en voldoende voorwaarde voor K .

Opgave 15

Gegeven zijn de beweringen:

A : “Mensen zijn moe.”

B : “Mensen beleggen hun spaargeld verkeerd.”

- a Schrijf de zin als een implicatie.
- b Maak bij deze implicatie een waarheidstabel.
- c Zoek met een waarheidstabel uit of $\neg A \Rightarrow \neg B$ een ontkenning is van $A \Rightarrow B$.

Opgave 16

Toon aan dat $P \Rightarrow Q$ en $\neg P \vee Q$ logisch gelijkwaardig zijn.

Pas dit vervolgens toe op de uitdrukking: “Je verslaapt je niet nog een keer of je gaat eerder naar bed.”

Toepassen**Opgave 17: Raadsel**

Dit raadsel ging enige tijd geleden viral op internet.

“Als Teresa’s dochter mijn dochters moeder is, wat ben ik dan van Teresa?”

Los het raadsel op.

- A. Ik ben Teresa's oma.
- B. Ik ben Teresa's moeder.
- C. Ik ben Teresa's dochter.
- D. Ik ben Teresa's kleindochter.
- E. Ik ben Teresa.

Opgave 18: Anneke

Als Anneke intelligent is en hard studeert, dan haalt zij goede cijfers. Als ze goede cijfers haalt, zal ze het diploma halen. Als Anneke hard studeert, maar niet intelligent is, dan zal men waardering hebben voor haar inzet. Als haar inzet gewaardeerd wordt, zal zij het diploma halen. Als Anneke intelligent is, dan studeert ze hard.

Gebruik de volgende afkortingen:

I = Anneke is intelligent.

S = Anneke studeert hard.

G = Anneke haalt goede cijfers.

D = Anneke haalt diploma.

W = Anneke wordt gewaardeerd.

- a** De redeneerstap in de eerste zin kan als volgt genoteerd worden:

$$I \wedge S \Rightarrow G.$$

Noteer op dezelfde wijze als hierboven de redeneerstappen in de andere zinnen.

- b** Neem aan dat Anneke intelligent is. Leg uit op basis van deze uitspraken of je kunt concluderen dat Anneke het diploma haalt.
- c** Stel dat je weet dat Anneke niet slaagt. Wat is nu op basis van de gegevens te concluderen over haar intelligentie en haar studeren?

(naar: voorbeeldexamen syllabus vwo C CE 2018)

Testen**Opgave 19**

Gegeven zijn de beweringen:

A : "Mensen spreken de taal van het vakantieland niet."

B : "Mensen komen in de problemen."

- a** Schrijf de implicatie $A \Rightarrow B$ als een zin.
- b** Maak bij deze implicatie een waarheidstabel.
- c** Zoek met een waarheidstabel uit of $\neg B \Rightarrow \neg A$ een ontkenning is van $A \Rightarrow B$.

Opgave 20

Gegeven is de bewering K : "Vierhoek $ABCD$ is een ruit."

Formuleer beweringen A , B en C die aan de volgende voorwaarden voldoen.

A is een nodige, maar geen voldoende voorwaarde voor K .

B is een voldoende, maar geen nodige voorwaarde voor K .

C is een nodige en voldoende voorwaarde voor K .

1.4 Hieruit-volgt-conclusies

Inleiding

Je hebt nu gezien hoe je proposities (beweringen) aaneen kunt schakelen tot complete zinnen met behulp van verbindingstekens. Ook heb je de waarheid van dergelijke zinnen kunnen onderzoeken met behulp van waarheidstabellen. Nu gaat het erom met behulp van dit soort zinnen een redenering op te zetten met een duidelijke conclusie. Je spreekt dan wel van een 'hieruit-volgt'-conclusie.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- logische redeneringen opzetten en hieruit-volgt-conclusies trekken;
- werken met voorbeelden en tegenvoorbeelden.

Voorkennis

- de belangrijkste onderdelen van een logische redenering herkennen;
- logische redeneringen uiteen rafelen in beweringen en verbindingstekens voor 'en', 'of', 'niet', 'daaruit volgt';
- werken met venndiagrammen en waarheidstabellen.

Verkennen

Opgave V1

Er zitten drie kinderen achter elkaar op een rij. Uit een voorraad van 5 petjes (3 zwarte en 2 rode) krijgt elk kind een petje op. De kinderen kunnen alleen de petjes zien van diegene die voor hen zit (-ten).

Aan het achterste kind wordt gevraagd "Weet jij welk kleur petje je op hebt?" Het kind kijkt naar de twee petjes voor hem, denkt even na, en zegt dan: "Nee." Dezelfde vraag wordt vervolgens aan het middelste kind gevraagd, en ook deze antwoord ontkennend. Het voorste kind is even stil en zegt "Dan weet ik de kleur van mijn petje!"

- Welke twee combinaties petjes kan het achterste kind voor zich zien? Er zijn drie mogelijkheden.
- Een van deze drie mogelijkheden valt direct af. Welke? Leg jouw antwoord uit.
- Welke twee kleuren petjes kan het middelste kind voor zich zien?
- Een van deze mogelijkheden valt af. Waarom?
- Wat is de kleur van het petje van het voorste kind?

Uitleg

Gegeven is de uitspraak: "Als de zon schijnt, dan loopt Lise naar de stad om te winkelen."

Dit is een $A \Rightarrow B$ uitspraak met:

- A : "De zon schijnt."
- B : "Lise loopt naar de stad om te winkelen."

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabel 4.1

Er zijn nu vier situaties denkbaar. Soms kun je een 'hieruit volgt' conclusie trekken. Gebruik daarbij de waarheidstabel voor $A \Rightarrow B$.

- situatie 1: Lise loopt naar de stad om te winkelen.
Uitgangspunten zijn: $A \Rightarrow B$ is waar en B is waar.
Je kunt nu niets concluderen over A , de zon kan nog steeds wel of niet schijnen.
Kortweg: Uit $A \Rightarrow B = 1$ en $B = 1$ volgt geen conclusie over A .
- situatie 2: De zon schijnt niet.
Uitgangspunten zijn: $A \Rightarrow B$ is waar en A is onwaar.
Je kunt nu niets concluderen over B , Lise kan nog steeds wel of niet naar de stad lopen.
Kortweg: Uit $A \Rightarrow B = 1$ en $A = 0$ volgt geen conclusie over B .
- situatie 3: De zon schijnt.
Uitgangspunten zijn: $A \Rightarrow B$ is waar en A is waar.
Nu kun je wel een conclusie trekken over B , Lise loopt naar de stad om te winkelen, B is waar.
Kortweg: Uit $A \Rightarrow B = 1$ en $A = 1$ volgt $B = 1$.
- situatie 4: Lise gaat met de auto naar de stad om te winkelen.
Uitgangspunten zijn: $A \Rightarrow B$ is waar en B is onwaar.
Nu kun je wel een conclusie trekken over A , Lise loopt niet naar de stad om te winkelen, dus de zon schijnt niet, A is onwaar.
Kortweg: Uit $A \Rightarrow B = 1$ en $B = 0$ volgt $A = 0$.

Opgave 1

Gegeven is de uitspraak:

"Als ik een leuke band heb, dan kom ik te laat op mijn afspraak met de tandarts".

- Splits deze $A \Rightarrow B$ uitspraak in twee beweringen A en B .
- Formuleer de uitspraak die hoort bij de situatie: $A \Rightarrow B = 1$ en $A = 1$.
Probeer een conclusie te trekken.
- Formuleer de uitspraak die hoort bij de situatie: $A \Rightarrow B = 1$ en $B = 0$.
Probeer een conclusie te trekken.

- d Formuleer de uitspraak die hoort bij de situatie: $A \Rightarrow B = 1$ en $A = 0$.

Probeer een conclusie te trekken.

Opgave 2

Een klasgenoot beweert: "Jij haalt altijd goede cijfers voor aardrijkskunde."

Hij somt op: "Voor de eerste toets dit jaar had je een tien, daarna had je een acht en nu heb je weer een negen."

Je klasgenoot probeert zijn bewering te bewijzen door een heleboel voorbeelden te noemen.

- a Is dit een waterdicht bewijs?

Jij bent het niet met je klasgenoot eens en pakt je cijferlijst voor aardrijkskunde erbij en zegt: "Ik haal helemaal niet altijd goede cijfers voor aardrijkskunde, want voor de vorige toets had ik een vier."

- b Heb je met dit éne tegenvoorbeeld zijn ongelijk bewezen?

Opgave 3

Geef van elk van de beweringen een voorbeeld als de bewering waar is of een tegenvoorbeeld als de bewering onwaar is.

- a Ik heb deze week met tien vriendinnen afgesproken, dus ik zie er minstens drie op dezelfde dag.
- b Ik heb deze week met tien vriendinnen afgesproken, dus ik zie er op een dag minimaal twee.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Er zijn twee redeneervormen die tot de juiste **hieruit-volgt-conclusies** leiden:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabel 4.2

- Uit $A \Rightarrow B$ is waar en A is waar volgt B is waar.
Uit $A \Rightarrow B = 1$ en $A = 1$ volgt $B = 1$.
Deze redeneervorm heet **modus ponens**
- Uit $A \Rightarrow B$ is waar en B is onwaar volgt A is onwaar.
Uit $A \Rightarrow B = 1$ en $B = 0$ volgt $A = 0$.
Deze redeneervorm heet **modus tollens**

Dit volgt uit de implicatietabel.

Met **voorbeelden** kun je iemand proberen te overtuigen dat iets waar is. Maar voorbeelden vormen nog geen wiskundig bewijs. **Tegenvoorbeelden** worden gebruikt om aan te tonen dat iets niet waar is. Je hebt aan één tegenvoorbeeld genoeg om de onwaarheid aan te tonen.

Voorbeeld 1

De dokter beweert: "Als je het medicijn gebruikt, dan word je beter."

Je trekt de volgende conclusies:

- Conclusie 1: Als ik beter ben, dan heb ik het medicijn gebruikt.
- Conclusie 2: Als ik het medicijn niet gebruik, dan word ik niet beter.
- Conclusie 3: Als ik niet beter ben, dan heb ik het medicijn niet gebruikt.

Welke conclusies zijn terecht? Welke niet? Verklaar je antwoord in woorden en met behulp van de waarheidstabel van de implicatie.

Antwoord

In woorden:

Conclusie 1 is niet terecht, want je kunt ook op andere manieren beter worden dan door het medicijn te gebruiken.

Conclusie 2 is ook niet terecht. Van een tijdje uitzieken kun je misschien ook wel beter worden.

Conclusie 3 is wel terecht, want op het moment dat je ziek bent is het zeker dat je het medicijn nog niet gebruikt hebt. De uitspraak is waar: als je het medicijn gebruikt, dan word je beter.

Met behulp van de waarheidstabel van de implicatie:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabel 4.3

- Benoem de uitgangspunten A , B en $A \Rightarrow B$.
 A : "Ik gebruik het medicijn."
 B : "Ik word beter."
 $A \Rightarrow B$: "Als ik het medicijn gebruik, dan word ik beter."
- Schrijf de redeneringen op die tot de conclusie 1, 2 en 3 leiden.
Conclusie 1: $A \Rightarrow B = 1$ en $B = 1$ dus $A = 1$ en dat is onjuist.
Conclusie 2: $A \Rightarrow B = 1$ en $A = 0$ dus $B = 0$ en dat is onjuist.
Conclusie 3: $A \Rightarrow B = 1$ en $B = 0$ dus $A = 0$ en dat is juist.

Opgave 4

De kapster beweert: "Als ik je haar blondeer, dan wordt je haar broos." Je trekt de volgende conclusies:

- Conclusie 1: Als mijn haar niet broos is, dan heeft de kapster het niet geblondeerd.
- Conclusie 2: Als mijn haar broos is, dan heeft de kapster het geblondeerd.
- Conclusie 3: Als de kapster mijn haar niet blondeert, dan wordt mijn haar niet broos.

- a** Benoem de uitgangspunten A , B en $A \Rightarrow B$.
- b** Schrijf de redeneringen op die tot de conclusie 1, 2 en 3 leiden en laat zien welke conclusie(s) juist is (zijn).

Opgave 5

Bekijk de advertentie over oogdruppels.

Werkt u veel achter de computer? Dan hebt u waarschijnlijk ook weleens last gehad van droge en geïrriteerde ogen. Ook oogziektes en het dragen van contactlenzen kunnen tot een brandend gevoel in de ogen leiden. Het is een vervelend probleem met gelukkig een eenvoudige oplossing. Door Dioptrie oogdruppels te gebruiken zorgt u er namelijk voor dat uw ogen weer bevochtigd worden. Hiermee verdwijnt ook al snel het droge en branderige gevoel in uw ogen.

Tabel 4.4

Een gedeelte van de redenering in deze advertentie is: "Als je Dioptrie oogdruppels gebruikt, dan worden je ogen weer bevochtigd".

- a** Zoek nog meer als-dan-redeneringen in deze advertentie.
- b** Wat vind je van deze redeneringen? Zijn ze terecht?
- c** Hoe kun je de redenering "Als je Dioptrie oogdruppels gebruikt, dan worden de ogen weer bevochtigd" aantonen?

Opgave 6

Bekijk de beweringen A en B .

A : 'Ik heb veel geld op de bank staan.'

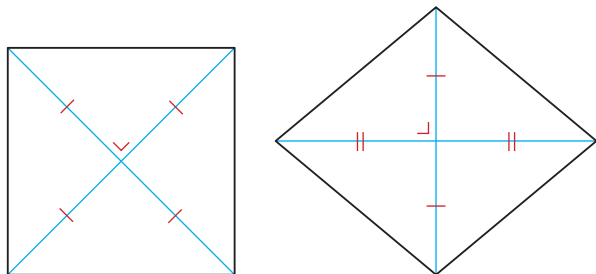
B : 'Ik kan verre reizen maken.'

- a** Geef in woorden de bijpassende redeneringen van de vorm:
- Uit $A \Rightarrow B = 1$ en $A = 1$ volgt $B = 1$.
 - Uit $A \Rightarrow B = 1$ en $B = 0$ volgt $A = 0$.
 - Uit $A \Rightarrow B = 1$ en $B = 1$ volgt $A = 0$.
- b** Is A een nodige of een voldoende voorwaarde van B ?
- c** Kun je er van uitgaan dat $A \Rightarrow B$ in deze gevallen altijd waar is?
- d** Hoe zit dit met $B \Rightarrow A$?

Voorbeeld 2

Evert beweert: "Als van een vierhoek de diagonalen loodrecht op elkaar staan, dan delen de diagonalen elkaar ook precies doormidden."

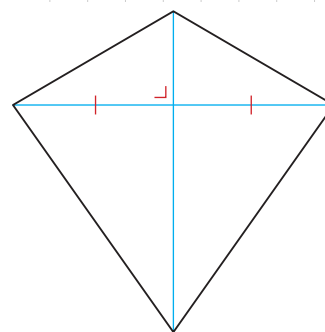
Hij tekent een vierkant en een ruit als voorbeelden om zijn bewering kracht bij te zetten.

**Figuur 4.2**

Heeft Evert gelijk? Zo ja, leg uit. Zo nee, geef dan een tegenvoorbeeld om zijn conclusie te ontkrachten.

Antwoord

Evert heeft geen gelijk. Tegenvoorbeeld: een vlieger is ook een vierhoek waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan, maar de diagonalen delen elkaar niet doormidden.

**Figuur 4.3****Opgave 7**

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

- Evert gebruikt voorbeelden om zijn bewering kracht bij te zetten. Waarom kunnen voorbeelden nooit als bewijs voor een bewering dienen?
- Waarom kan een tegenvoorbeeld wel als bewijs dienen dat een conclusie niet klopt?

Opgave 8

Geef van elk van de beweringen aan of deze waar of onwaar is en geef een tegenvoorbeeld als de bewering onwaar is.

- "Een zoogdier heeft altijd twee of vier poten."
- "Een spin is geen insect."
- "Een gelijkbenige driehoek heeft altijd drie scherpe hoeken."
- "Een rechthoekige driehoek heeft altijd twee scherpe hoeken."

Verwerken

Opgave 9

Bekijk de volgende uitspraak:

“Ik heb goed geleerd voor mijn proefwerk dus ik haal een goed cijfer.”

Wat kun je zeggen over het leren van het proefwerk of het cijfer in de volgende situaties:

- a Ik heb een goed cijfer gehaald.
- b Ik heb niet goed geleerd.
- c Ik heb wel vier uur geleerd voor mijn proefwerk.
- d Ik heb een onvoldoende gehaald.

Opgave 10

Geef van elk van de beweringen aan of deze waar of onwaar is en geef een tegenvoorbeeld als de bewering onwaar is.

- a “Alle vogels kunnen vliegen.”
- b “Een vogelspin is geen vogel.”
- c “Een vijfhoek kan geen scherpe hoek hebben.”
- d “De hoeken van een vijfhoek zijn samen 540 graden.”

Opgave 11

Sara, Gido en Iris spelen samen een spelletje darts. Nog voordat ze gaan beginnen doet Sara volgende uitspraak: “Als ik dit spelletje darts win, trakteer ik jullie allebei op een avondje uit.”

De belofte die Sara hier maakt is een samenstelling van twee beweringen, namelijk:

P: “Ik win.”

Q: “Ik trakteer.”

Na afloop van het spel kunnen er vier situaties ontstaan:

- Sarah wint niet en ze trakteert ook niet.
- Sarah wint niet, maar trakteert wel.
- Sarah wint, maar trakteert niet.
- Sarah wint en ze trakteert.

In welk van de vier gevallen is Sarah een leugenaar?

Opgave 12

Een rechtse politicus leest in een interview de stelling: “Als je van kunst houdt, dan moet je wel links zijn”. Hij weerspreekt deze uitspraak, immers hij is zelf kunstliefhebber en noemt zichzelf niet links. Hij herformuleert de stelling tot: “Kunstliefhebbers zijn niet links”.

Leg uit waarom deze laatste bewering niet correct hoeft te zijn.

(naar: voorbeeldexamen syllabus vwo C)

Opgave 13

Vier vriendinnen, Julia, Lotte, Roos en Sofie, gaan een middag shoppen. Aan het eind van de middag hebben ze alle vier twee verschillende aankopen gedaan. Sommige meisjes kochten een paar schoenen.

Op basis van het bovenstaande bleek de volgende uitspraak waar te zijn: "Als een meisje geen schoenen kocht, dan had ze bruin haar."

Deze uitspraak kun je met symbolen als volgt weergeven: $(\neg P) \Rightarrow Q$.

- Beschrijf in woorden de uitspraak $(\neg Q) \Rightarrow P$ en geef aan of deze uitspraak waar of onwaar is.
- Er zijn meer ware uitspraken over het middagje shoppen.
 - Drie van hen hebben een paar schoenen gekocht.
 - Er is precies één meisje met bruin haar en zij kocht geen schoenen.
 - Slechts één meisje kocht een jas.
 - Twee meisjes kochten een rokje, één van hen had rood haar.
 - De zwartharige Lotte en het blonde meisje kochten allebei een broek.
 - Julia kocht niets wat Roos of het zwartharige meisje kocht.

Je kunt nu concluderen dat het meisje met het bruine haar Julia moet zijn.

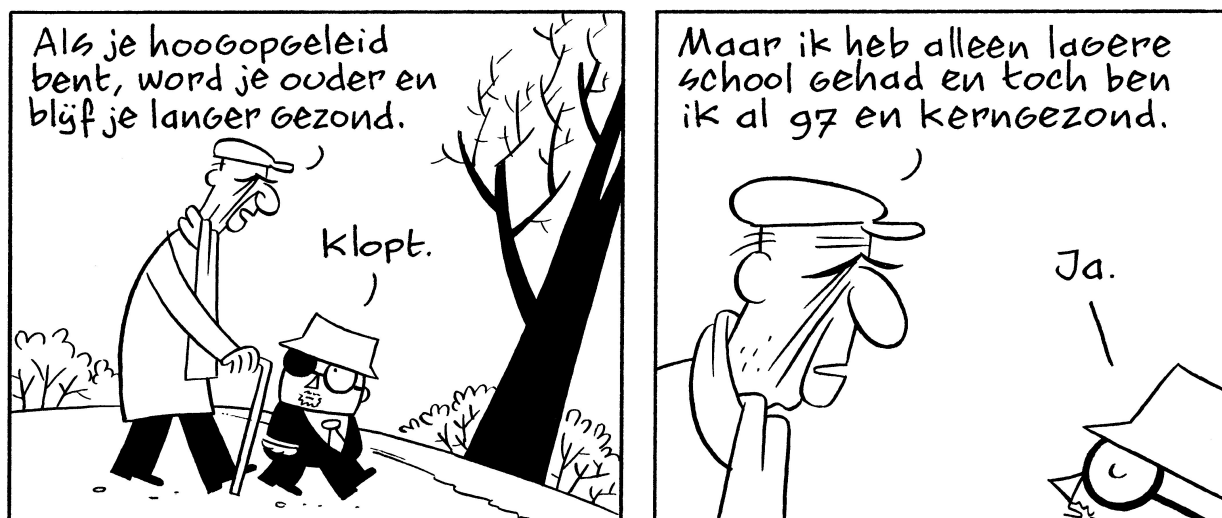
Leg uit dat het meisje met het bruine haar Julia moet zijn.

(naar: pilotexamen wiskunde C in 2014, tweede tijdvak)

Toepassen

Opgave 14: Hoog opgeleid?

Bekijk de eerste twee plaatjes van een cartoon die enige tijd geleden in de Volkskrant stond.



Figuur 4.4

Om de discussie in deze twee plaatjes te modelleren, gebruik je de volgende afkortingen:

H : iemand is hoogopgeleid;

O : iemand wordt oud en blijft lang gezond.

Ga ervan uit dat er in beide gevallen maar twee mogelijkheden zijn:

- iemand is hoogopgeleid of niet;
- iemand wordt 'oud en blijft lang gezond' of dat gebeurt niet.

Modelleer nu de beweringen in de twee plaatjes als volgt. De oude man zegt in het eerste plaatje: "Als iemand hoogopgeleid is, dan wordt hij oud en blijft hij lang gezond." Met behulp van bovenstaande afkortingen en met logische symbolen kun je dit vertalen als: $H \Rightarrow O$.

In het tweede plaatje zegt de oude man: "Ik ben niet hoogopgeleid en toch oud geworden en lang gezond gebleven."

- a** Onderzoek of de uitspraak van de oude man in het tweede plaatje in tegenspraak is met de bewering $H \Rightarrow O$. Licht je antwoord toe.

In het tweede plaatje gebruikt de oude man het woordje 'toch'. Daaruit blijkt dat hij vindt dat er een tegenspraak is. De oude man onderscheidt kennelijk twee soorten mensen: hoogopgeleiden, die worden oud en blijven lang gezond en niet-hoogopgeleiden, waarvoor niet geldt dat ze 'oud worden en lang gezond blijven'. Dit laatste kun je vertalen in: $\neg H \Rightarrow \neg O$.

- b** Leg uit dat deze laatste bewering in tegenspraak is met de uitspraak van de oude man in het tweede plaatje.

Bekijk de complete cartoon.



Figuur 4.5

Sigmund trekt in het derde plaatje de volgende conclusie: de man is oud geworden en lang gezond gebleven, dus hij moet wel hoogopgeleid zijn, ofwel: $O \Rightarrow H$.

- c** Onderzoek of de bewering $O \Rightarrow H$ in overeenstemming is met $H \Rightarrow O$ of met $\neg H \Rightarrow \neg O$. Geef een toelichting bij je antwoord.

De werkelijkheid is ingewikkelder dan bovenstaande logische beweringen.

Er is onderzoek gedaan naar het verband tussen opleiding, levensduur en gezondheid. Uit een dergelijk onderzoek blijkt bijvoorbeeld het volgende:

- van alle hoogopgeleiden wordt 70% oud en blijft lang gezond;
- van alle niet-hoogopgeleiden wordt 50% oud en blijft lang gezond.

Ga er in deze vereenvoudigde situatie weer van uit dat er steeds maar twee mogelijkheden zijn: iemand is hoogopgeleid of niet en iemand 'wordt oud en blijft lang gezond' of dat gebeurt niet.

Bekijk de vier mogelijke conclusies:

A: Als iemand hoogopgeleid is, wordt hij oud en blijft hij lang gezond.

B: Voor niet-hoogopgeleiden geldt dat ze minder vaak oud worden en lang gezond blijven dan hoogopgeleiden.

C: De meeste mensen die oud worden en lang gezond blijven, zijn hoogopgeleid.

D: Een deel van de niet-hoogopgeleiden wordt oud en blijft lang gezond.

- d Geef van elk van de vier bovenstaande conclusies aan of deze uit het genoemde onderzoek volgen. Licht je antwoord toe.

(naar: pilotexamen wiskunde C in 2014, eerste tijdvak)

Opgave 15: Dalende functie?

Onderzoek of de grafiek van $y = \frac{1200}{5+2 \cdot 3^{-x}} + 0,0009x^4 - 30x^2$ dalend is. Dit betekent dat bij grotere x -waarden altijd kleinere y -waarden horen.

Een leerling geeft het volgende antwoord: 'Ik bereken de y -waarden bij $x = 3$, $x = 13$ en $x = 23$ en zie dat de y -waarden steeds kleiner worden; dus de grafiek is dalend.'

- a Leg uit waarom dit antwoord fout gerekend moet worden.
b Geef een tegenvoorbeeld waaruit blijkt dat de grafiek niet overal dalend is.

(naar: voorbeeldexamen syllabus vwo C)

Testen

Opgave 16

In 2014 is de campagne NIX18 van start gegaan. Dit betekent dat je voor de leeftijd van 18 jaar geen alcohol mag nuttigen.

De regel is dus: "Als je jonger bent dan 18 jaar, dan mag je geen alcoholhoudende drank nuttigen".

Hij heeft de vorm $P \Rightarrow Q$.

- a Omschrijf P en Q .
b Je ziet een onbekende jongere alcohol drinken.
Kun je een conclusie trekken? Licht je antwoord toe.
c Voor je liggen nu vier kaarten met op elke kant een leeftijd en op de andere kant een bijbehorend drankje.
Op de vier kaarten die voor je liggen staat het volgende:
Kaart 1: 16
Kaart 2: 20
Kaart 3: wijn
Kaart 4: cola
Welke kaart draai je om als je de regel wilt controleren?

Opgave 17

Lees de discussie tussen twee oude mannen.

Jan: "Als je zwaar bent bij je geboorte, word je later een lang persoon."

Maarten: "Klopt."

Jan: "Maar ik woog maar 6 pond als baby, en toch ben ik 1,95 m lang."

Maarten: "Ja."

Om de discussie te modelleren gebruik je de volgende afkortingen:

Z : iemand is zwaar bij de geboorte;

L : iemand wordt een lange volwassene.

Ga er verder van uit dat er in beide gevallen maar twee mogelijkheden zijn:

- iemand is een zware baby of niet;
- iemand wordt een lange volwassene of dat gebeurt niet.

Modelleer nu de beweringen als volgt:

Jan zegt: "Als iemand zwaar is bij zijn geboorte, dan wordt hij een lange volwassene." Met behulp van bovenstaande afkortingen en met logische symbolen kun je dat vertalen als: $Z \Rightarrow L$.

Daarna zegt Jan: "Ik was geen zware baby en toch een lange volwassene geworden."

- a** Onderzoek of de tweede uitspraak van Jan in tegenspraak is met de bewering $Z \Rightarrow L$. Licht je antwoord toe.
- b** In zijn tweede uitspraak gebruikt Jan het woordje 'toch'. Daaruit blijkt dat hij vindt dat er een tegenspraak is. Jan onderscheidt kennelijk twee soorten mensen: zware baby's, die worden lange volwassenen en niet-zware baby's, waarvoor niet geldt dat ze een lange volwassene worden. Dit laatste kun je vertalen in: $\neg Z \Rightarrow \neg L$. Leg uit dat deze laatste bewering in tegenspraak is met de tweede uitspraak van Jan.

Lees de complete discussie.

Jan: "Als je zwaar bent bij je geboorte, word je later een lang persoon."

Maarten: "Klopt."

Jan: "Maar ik woog maar 6 pond als baby, en toch ben ik 1,95 m lang."

Maarten: "Ja."

Maarten: "Kun je nagaan hoe licht baby's vroeger waren."

Maarten trekt de volgende conclusie: Jan is een lange volwassene, dus hij moet wel een zware baby geweest zijn, oftewel: $L \Rightarrow Z$.

- c** Onderzoek of de bewering $L \Rightarrow Z$ in overeenstemming is met $Z \Rightarrow L$ of met $\neg Z \Rightarrow \neg L$. Geef een toelichting bij je antwoord.

De werkelijkheid is ingewikkelder dan bovenstaande logische beweringen.

Er is onderzoek gedaan naar het verband tussen geboortegewicht en lengte van volwassenen. Uit een dergelijk onderzoek blijkt bijvoorbeeld het volgende:

- van alle zware baby's wordt 75% een lange volwassene;
- van alle niet-zware baby's wordt 55% een lange volwassene.

Bekijk de vier mogelijke conclusies.

B: Voor niet-zware baby's geldt dat ze minder vaak een lange volwassenen worden dan zware baby's.

D: Een deel van de niet-zware baby's wordt een lange volwassene.

- d** Geef van elk van de vier bovenstaande conclusies aan of deze uit het genoemde onderzoek volgen. Licht je antwoord toe.

1.5 Altijd waar of nooit waar?

Inleiding

Sommige uitspraken zijn altijd waar en andere uitspraken zijn dan weer nooit waar. Je gaat nu bekijken hoe je er achter komt of je met één van beide te maken hebt. En dan zijn er ook nog paradoxen...

Je leert in dit onderwerp

- onderzoeken wanneer een samengestelde bewering altijd waar (tautologie) of nooit waar (contradictie) is;
- een paradox herkennen en beschrijven.

Voorkennis

- de belangrijkste onderdelen van een logische redenering herkennen;
- logische redeneringen uiteen rafelen in beweringen en verbindestekens voor 'en', 'of', 'niet', 'daaruit volgt';
- werken met venndiagrammen en waarheidstabellen.

Verkennen

Opgave V1

Κρήτες ἀεὶ ψεύονται

Maar voor wie het Grieks niet beheerst er staat: "Kretenzers liegen altijd."

Dit is een uitspraak van de Kretenzische (inwoner van Kreta) filosoof **Epimenides**. Want vind je van deze uitspraak?

Opgave V2

Pinokkio's neus wordt langer als hij liegt.

Als Pinokkio zegt: "Mijn neus gaat nu groeien".

Wat is er dan aan de hand in de volgende situaties:

- Pinokkio's neus gaat na zijn uitspraak daadwerkelijk groeien.
- Pinokkio's neus gaat na zijn uitspraak niet groeien.

Uitleg 1

Gegeven zijn de beweringen:

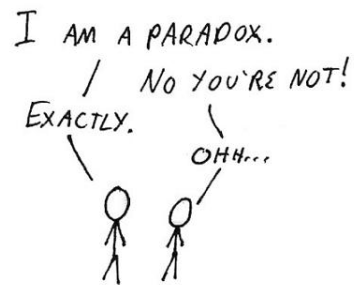
A: '12345 is een vijfvoud.'

B: '3 × 12345 is een vijfvoud.'

Ga de waarheidstabel nauwkeurig na.

De bewering $A \Rightarrow (A \vee B)$ heeft altijd waarheidswaarde 1.

Een bewering die altijd waar is, heet een tautologie.



Figuur 5.1



Figuur 5.2

A	B	$A \vee B$	$A \Rightarrow (A \vee B)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Tabel 5.1

Ga ook de volgende waarheidstabel nauwkeurig na.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$	$(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Tabel 5.2

De bewering $(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ heeft altijd waarheidswaarde 0 en is dan in alle gevallen onwaar. Een bewering die altijd onwaar is, heet een contradictie (tegenstrijdigheid).

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.

- Geef de betekenis van de beweringen $A \vee B$ en $A \Rightarrow (A \vee B)$ uit de eerste waarheidstabel.
- Geef een verklaring dat deze bewering altijd waar is. Doe dit in je eigen woorden.

Opgave 2

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg 1**.

- Geef de betekenis van $A \wedge B$ en $\neg A \vee \neg B$ uit de tweede waarheidstabel.
- Wat kun je zeggen over de relatie tussen $A \wedge B$ en $\neg A \vee \neg B$?
- De bewering $(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ heeft in alle gevallen waarheidswaarde 0. Geef in eigen woorden een voorbeeld van deze contradictie.

Opgave 3

Gegeven is bewering A : "The Voice Kids is de moeite waard om naar te kijken."

Ga na of onderstaande uitdrukkingen een contradictie of een tautologie betreffen.

- $A \wedge \neg A$
- $A \Rightarrow A$
- $\neg A \Rightarrow \neg A$

Uitleg 2

Uitspraak 1: "Als twee dingen aan elkaar vastzitten en de één staat stil, dan staat de ander ook stil."

Uitspraak 2: "Als een voorwerp eerst naar rechts beweegt en daarna naar links, dan is er een moment geweest waarop de snelheid gelijk was aan nul."

Beide uitspraken lijken te kloppen.

Een vlieg vliegt naar rechts in de richting van de voorruit van een naar links rijdende trein. De vlieg knalt tegen de voorruit van de trein en blijft daarop vast zitten. Op dat moment zitten de vlieg

en de trein aan elkaar vast. De vlieg had eerst een snelheid naar rechts en na de botsing naar links, dus hij heeft even stilgestaan. De trein heeft dan ook stilgestaan.

Dit verhaal is de bekende paradox van de vlieg en de trein. De uitgangspunten en de redenering lijken te kloppen, maar de conclusie niet.

Een paradox is een bewering die ondanks ogenschijnlijk juiste uitgangspunten leidt tot een tegenstrijdigheid of een logisch onacceptabele conclusie.

Opgave 4

De Rotterdammer Dennis zegt: "Alle Rotterdammers liegen altijd."

- a Beantwoord de vraag: "Spreekt Dennis de waarheid?"
- b Waarom is dit een paradox?

Opgave 5

"Hilberts hotel heeft altijd plaats", staat op het uithangbord.

Ik vraag of ze een kamer voor me vrij hebben. "U heeft geluk! We hebben iedereen een kamer op kunnen schuiven. Kamer 1 is daarvoor vrij."

Vlak nadat ik mijn kamer betreden heb, klinkt een mededeling door de luidspreker. "Beste gasten, er is een bus met gasten gearriveerd en we hebben twintig kamers nodig. Iedereen wordt verzocht twintig kamers op te schuiven."

Ik doe mijn beklag bij de receptie. De receptionist antwoordt: "We mogen niemand een kamer weigeren. Zolang iedereen onze aanwijzingen opvolgt, is er altijd plaats voor nieuwe gasten."

Er komt een bus aan met oneindig veel passagiers. Er klinkt weer een mededeling: "We hebben oneindig veel nieuwe kamers nodig. Vermenigvuldig uw kamernummer met twee, dit wordt uw nieuwe kamernummer."

Inmiddels is de bus gearriveerd en stromen oneindig veel mensen de hal in. Waar moeten die naartoe? "Ze kunnen de oneven kamers nemen", legt de receptionist uit. "Er zijn immers oneindig veel oneven getallen. Door de verdubbeling van de kamernummers komen alle oneven getallen vrij."

- a 'Hilberts hotel' werd bedacht door de Duitse wiskundige David Hilbert. Wat wilde hij met dit hotel illustreren?
- b Waarom is dit een paradox?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **tautologie** is een samengestelde bewering die altijd waar is. Een **contradictie** (of tegenspraak) is een situatie waarbij twee beweringen of waarnemingen die elkaar uitsluiten, tegelijkertijd waar moeten zijn. Het is dus een samengestelde bewering die nooit waar is.

Een **paradox** is een bewering die ondanks ogenschijnlijk juiste uitgangspunten leidt tot een tegenstrijdigheid of een logisch onacceptabele conclusie.

Een redenering is logisch correct als alle elementaire beweringen waarheidswaarde 1 hebben en de conclusie ook waarheidswaarde 1 heeft.

In de logica kunnen ook redeneringen die beweringen bevatten die waarheidswaarde 0 of 1 hebben, altijd waarheidswaarde 1 hebben. De redenering is dan een tautologie.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn twee uitspraken:

1. Het regent of het regent niet.
2. Het regent en het regent niet.

Onderzoek de waarheid van beide uitspraken met waarheidstabellen.

Antwoord

Beide uitspraken zijn samengesteld uit twee beweringen:

A : Het regent.

$\neg A$: Het regent niet.

Maak een waarheidstabel voor uitspraak 1.

De bewering $A \vee \neg A$ is altijd waar, uitspraak 1 is een tautologie.

Maak een waarheidstabel voor uitspraak 2.

De bewering $A \wedge \neg A$ is nooit waar, uitspraak 2 is een contradictie.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
0	1	1
1	0	1

Tabel 5.3

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
0	1	0
1	0	0

Tabel 5.4

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit [Voorbeeld 1](#).

- a Geef de bewering $A \vee \neg A$ in woorden.
- b Geef de bewering $A \wedge \neg A$ in woorden.

Opgave 7

Gegeven is bewering P : "Ik rijd graag paard."

Ga na of de beweringen een contradictie of een tautologie betreffen.

- a $P \wedge \neg P$
- b $P \Rightarrow P$
- c $\neg P \Rightarrow \neg P$

Opgave 8

Ga na of de beweringen een contradictie of een tautologie betreffen.

- a Voor eeuwig en altijd.
- b Hij is bont en blauw.
- c Het is koud vuur.
- d Dat is keurig netjes.
- e Het regent en het is droog.
- f Hoe je het ook wendt of keert.

Voorbeeld 2

Bekijk driehoek ABC op een cirkel met AB door het middelpunt M van de cirkel.

Beredeneer dat $\angle C = 90^\circ$ en laat zien dat als de uitgangspunten waar zijn en de redenering logisch is, de conclusie een tautologie is.

Antwoord

Uitgangspunt A_1 : A , B , en C liggen op een cirkel (waar).

Uitgangspunt A_2 : AB gaat door M (waar)

$\Rightarrow CM = AM$ (waar) en $BM = CM$ (waar)

$\Rightarrow \angle B = \angle C_2$ (waar) en $\angle A = \angle C_1$ (waar).

Uitgangspunt A_3 : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (hoekensomdriehoek) (waar).

Conclusie: $\angle C_1 + \angle C_2 + \angle C = 180^\circ$, dus $\angle C = 90^\circ$ (waar).

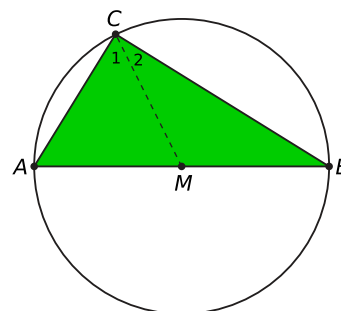
Samengevat: Uit de uitgangspunten A_1 , A_2 , en A_3 volgt de conclusie.

Een bewijs uit de wiskunde is een tautologie.

Opgave 9

De stelling van Thales luidt: een driehoek ingeschreven in een cirkel en waarvan één zijde een middellijn van de cirkel vormt, is een rechthoekige driehoek.

Noem nog minimaal twee van zulke tautologiën die je kent uit de wiskunde.



Figuur 5.3

Opgave 10

Bekijk de redenering waaruit volgt dat $1 = 2$.

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2$$

$$x(x - x) = (x + x)(x - x)$$

$$x = x + x$$

$$x = 2x$$

$$1 = 2$$

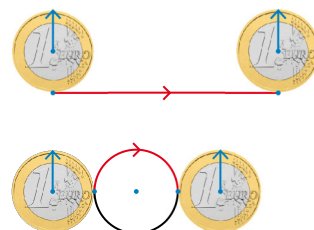
Wat gaat er mis in deze redenering?

Voorbeeld 3

Rol een muntstuk over een rechte lijn. De munt moet dan een afstand afleggen die gelijk is aan zijn omtrek om precies één rondje gedraaid te hebben.

Rol het muntstuk nu over een andere munt met dezelfde afmetingen. De munt moet nu een afstand afleggen die gelijk is aan de helft van zijn omtrek om precies één rondje gedraaid te hebben.

Dit is de bekende 'muntparadox'.



Figuur 5.4

Opgave 11

Bekijk de paradox in **Voorbeeld 3**.

- a Waarom lijkt dit een paradox?
- b Waarom is het geen paradox?

Verwerken**Opgave 12**

Ga na of de uitdrukkingen een contradictie, een tautologie of geen van beide betreffen.

- a Hij staat te roepen en te tieren.
- b Het ijs is vloeibaar geworden.
- c In voor- en tegenspoed.
- d Het is schots en scheef.

Opgave 13

Toon bij elke bewering met een waarheidstabel aan of ze een tautologie, een contradictie of geen van beide is.

- a $\neg(\neg P) \Rightarrow P$
- b $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
- c $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow (P \vee Q)$
- d $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Opgave 14

Een paradox uit de oudheid is die van de krokodil.

Een krokodil rukt een moeder haar baby uit handen, en zegt: 'Als je zult raden wat ik ga doen, krijg je je kind terug, anders eet ik het op.' Radeloos roept de moeder 'O, je zult hem opeten!' 'Tja', zegt de krokodil, 'nu kan ik hem helaas niet teruggeven, want dan zou je verkeerd geraden hebben en moet ik hem dus wel opeten.' 'Nee', zegt de moeder, die nu weer tot bezinning komt, 'want als je mijn kind opeet, heb ik juist geraden, en moet je het dus teruggeven!' 'Kijk', zegt de krokodil, 'ik begrijp dat je een beetje van slag bent, maar dit is wel zo'n beetje het stomste antwoord dat je had kunnen geven. Ik ben namelijk een man van eer, en hecht er erg aan me te allen tijde aan mijn woord te houden.'

Tabel 5.5

Leg uit waarom in dit verhaal sprake is van een paradox.

(naar: voorbeeldexamen syllabus vwo C)

Opgave 15

De paradox van Russell luidt: "De barbier scheert iedereen die zichzelf niet scheert."

De vraag is: "Scheert de barbier zichzelf?"

Opgave 16

Lees het artikel van de NOS van 16-10-2014.

Hushovd spreekt zichzelf tegen

In Noorwegen verschijnt vandaag de biografie van ex-wielrenner Thor Hushovd. Het is een aaneenschakeling van anekdotes uit zijn lange en succesvolle carrière. Het Noorse krachtmens droeg meerdere dagen de gele trui in de Tour de France, won diverse Tour-etappes en werd in 2010 wereldkampioen op de weg. Misschien is de meest opmerkelijke quote uit zijn biografie die over Lance Armstrong. In 2011 spraken de twee wielrenners over doping. Armstrong zei toen tegen Hushovd: 'We deden het allemaal'. De Noor zegt daar nu over: 'Ik wist niet wat ik hoorde. Hij vertelde daar gewoon dat hij doping gebruikte.'

Interview uit 2013

En die uitspraken van Hushovd in zijn biografie zorgen enigszins voor verwarring. Want daarmee spreekt hij zichzelf tegen. In een interview uit februari 2013, enkele weken nadat Armstrong op de bank bij Oprah dopinggebruik toegaf, zei Hushovd dat hij 'Lance nu heel erg anders ziet.' 'En dat hij het wielrennen voor gek heeft gezet.'

Hushovd liet in 2013 optekenen dat je op basis van geruchten over Armstrong niet kon zeggen of iemand doping had gebruikt. En toen de verslaggever hem vroeg of hij naïef was geweest als het om het dopinggebruik van Armstrong ging, antwoordde Hushovd: 'Ja, ik was zeker naïef. Je weet dat hij ziek is geweest en bijna dood was. Wie gaat dan zo met zijn lichaam om? Daarom koos ik ervoor om hem te geloven.'

Nu nog niet strafbaar

Volgens de huidige WADA-code kun je niet gestraft worden als je je mond houdt over dopinggebruik van anderen. Het actief wegmoffelen van bewijs is wel strafbaar. Dat verandert op 1 januari 2015. Dan wordt namelijk de nieuwe WADA-code van kracht. En dan wordt het verzwijgen van een dopingovertreding eveneens strafbaar.

Tabel 5.6

Leg uit waarom de uitspraken van Hushovd een contradictie opleveren.

Opgave 17

Vraag: "Wat gebeurt er als een tijdreiziger terug in de tijd gaat en zijn grootvader vermoordt, voordat deze de vader of moeder van de tijdreiziger heeft kunnen verwekken?"

- a** Het antwoord op deze vraag is een cyclus die zich eindeloos blijft herhalen. Omschrijf deze cyclus.
- b** Is dit een paradox of een contradictie?
- c** In de film 'Back to the Future' reist Marty McFly terug in de tijd en verstoort de ontmoeting van zijn ouders.
Wat moet hij doen om zichzelf in de toekomst heel te houden?

Toepassen

Opgave 18: Archimedes en de schildpad

Lees de paradox van Achilles en de schildpad die bedacht is door **Zeno van Elea**.

De schildpad daagde Achilles uit voor een hardloopwedstrijd. Hij beweerde dat hij zou winnen als Achilles hem een kleine voorsprong gaf. Achilles moest lachen, want hij was natuurlijk een machtige strijder, snel van voet, terwijl de schildpad zwaar en langzaam was.

‘Hoeveel voorsprong?’ vroeg hij de schildpad met een glimlach. ‘Tien meter’, antwoordde deze. Achilles lachte harder dan ooit. ‘Dan ga jij zeker verliezen, vriend’ vertelde hij de schildpad, ‘maar laten we vooral rennen, als je dat graag wilt’. ‘Integendeel’, zei de schildpad, ‘ik zal winnen, en ik kan het je met een eenvoudige redenering bewijzen.’ ‘Kom op dan’, antwoordde Achilles, die al iets minder vertrouwen voelde dan eerst. Hij wist dat hij de superieure atleet was, maar hij wist ook dat de schildpad een scherper verstand had, en dat hij al vaak een discussie met het dier had verloren.

‘Veronderstel’, begon de schildpad, ‘dat u me een voorsprong van 10 meter geeft. Zou u zeggen dat u die 10 meter tussen ons snel kunt afleggen?’ ‘Zeer snel’, bevestigde Achilles. ‘En hoeveel meter heb ik in die tijd afgelegd, denkt u?’ ‘Mischien een meter - niet meer’, zei Achilles na even nagedacht te hebben. ‘Zeer goed’, antwoordde de schildpad, ‘dus nu is er een meter afstand tussen ons. En zou u die achterstand snel inlopen?’ ‘Zeer snel inderdaad!’ ‘En toch zal ik in die tijd verder gegaan zijn, zodat u die afstand moet inhalen, ja?’ ‘Eh, ja’ zei Achilles langzaam. ‘En terwijl u dat doet, zal ik een stukje verder gegaan zijn, zodat u steeds een nieuwe achterstand moet inlopen’ ging de schildpad stug door. Achilles zei niets.

‘En zo ziet u, elke periode dat u bezig bent uw achterstand in te halen zal ik gebruiken om een nieuwe afstand, hoe klein ook, aan die achterstand toe te voegen.’ ‘Inderdaad, daar valt geen speld tussen te krijgen’, antwoordde Achilles, nu al vermoeid. ‘En zo kunt u nooit de achterstand inlopen’, besloot de schildpad met een sympathieke glimlach.

‘U heeft gelijk, zoals altijd’, besloot Achilles droevig - en gaf de race gewonnen.

Tabel 5.7

Leg uit waarom er in dit verhaal sprake is van een paradox.

Testen

Opgave 19

Toon bij elke bewering met een waarheidstabel aan of ze een tautologie, een contradictie of geen van beide is.

- a $\neg(\neg(\neg P)) \Rightarrow P$
- b $\neg(\neg(\neg P)) \wedge P$
- c $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Opgave 20

Lees het artikel van nu.nl van 20-04-2007.

Van Basten: Van Bommel spreekt zichzelf tegen

RIJSWIJK - Mark van Bommel spreekt zichzelf tegen en houdt zich vast aan zijn eigen waarheid. Dat zei bondscoach Marco van Basten vrijdagavond in het VARA/NPS-televisieprogramma Pauw & Witteman. 'Ik zou daarover liever persoonlijk met hem praten, maar dat heeft nu geen enkele zin meer.'

Interview

De voormalige sterspeler reageerde op een interview van Van Bommel in het weekblad *Voetbal International* waarin de middenvelder van Bayern München hard uithaalde naar de voorman van Oranje. Van Bommel wil niet meer onder Van Basten spelen. 'Hij komt steeds met argumenten die niet kloppen. Ik heb nooit bedankt voor Oranje, maar ik weiger in een ploeg te spelen waarvan hij trainer is', stelde Van Bommel onder meer.

Wrang

Van Basten: 'Ik vind dat wrang. We hebben juist heel veel met hem gesproken, zowel tijdens trainingen als in wedstrijdbesprekingen. We hebben veel energie in hem gestoken. Hij ontkent dat. Daar kan ik niets mee. Dan houdt het op voor mij.'

Beleving

Van Basten wilde Van Bommel geen leugenaar noemen. 'Hij heeft zijn beleving en ik heb mijn beleving. Ik vind dat wij heel veel discussies met hem hebben gevoerd over zijn rol en zijn taken bij Oranje. Hij zegt aan het einde van het verhaal in *VI* dat hij niet meer vrijuit kon voetballen door alle opdrachten die hij van ons zou hebben gekregen. Daarmee geeft hij aan dat wij wel degelijk met hem over bepaalde zaken hebben gesproken, lijkt mij. Dus hij spreekt zichzelf tegen, ja.'

Belang

Van Basten benadrukte nog wel dat hij er persoonlijk geen problemen mee zou hebben om Van Bommel 'in het belang van Oranje' ooit nog eens op te roepen. 'Maar de situatie is natuurlijk nu wel heel erg vervelend geworden. Hij heeft zich in dat interview heel erg tegen mij gekeerd. Dat werkt niet echt prettig, nee.'

Emoties

Desgevraagd liet Van Basten weten dat hij wel degelijk een warme kant heeft. Hij wordt namelijk nogal eens omschreven als een koele kikker. 'Ik ben misschien wat zakelijk en zal niet snel om de nek van iemand gaan hangen. Maar ik heb zeker emoties en gevoel. Ik ben niet koud. Maar ik vind dat je emoties niet altijd hoeft te tonen. Ik probeer altijd mezelf te blijven.'

Tabel 5.8

Leg uit waarom van Basten vindt dat de uitspraken van van Bommel een contradictie opleveren. Heeft van Basten daarin gelijk?

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Logisch redeneren** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- logische redenering — bewering — conclusie — uitgangspunt — definitie — redeneerstap — correct en (on)volledig
- bewering — logische verbindingstekens: conjunctie, disjunctie, negatie — venndiagram — waarheidstabel — logisch gelijkwaardig
- als-dan-redenering, implicatie — nodige voorwaarde, voldoende voorwaarde
- redenering, uitgangspunten, hieruit-volgt-conclusie — modus ponens — modus tollens — voorbeeld, tegenvoorbeeld
- tautologie (altijd ware bewering) — contradictie (nooit ware bewering) — paradox

Activiteitenlijst

- een logische redenering herkennen — een logische redenering houden
- een waarheidstabel opzetten — onderzoeken of proposities logisch gelijkwaardig zijn
- bij proposities de logische operatoren herkennen en er waarheidstabellen bij opstellen
- in een logische redenering de uitgangspunten en de conclusie herkennen — redeneervormen modus ponens en modus tollens gebruiken
- tautologie, contradictie herkennen en aantonen — paradox herkennen

Achtergronden

De Griekse filosoof **Aristoteles (384—322 voor Christus)** wordt wel de grondlegger van de logica genoemd. Hij dacht onder andere na over geldige manieren van redeneren. Hij vroeg zich af wanneer een uitspraak (zin) waar was. Volgens hem is een zin waar als hij overeenkomt met de werkelijkheid.

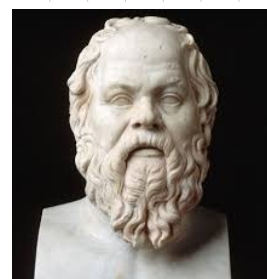
Hij stelde dat een zin waar is als hij is af te leiden uit ware zinnen. Zo'n afleiding noemde hij een 'syllogisme'. Aristoteles bedacht geldige en ongeldige syllogismen.

Een voorbeeld van een geldig syllogisme is:

- "Alle mensen zijn sterfelijk."
- "Socrates is een mens."

dus

- "Socrates is sterfelijk."



Figuur 6.1

De eerste twee zinnen heten de ‘premissen’, de derde zin is de ‘conclusie’. Alle syllogismen met deze zelfde structuur zijn ook geldige redeneringen. Dat hoeft echter niet te betekenen dat de conclusie ook zonder meer waar is, kijk maar:

- “Alle leerlingen houden van logica.”
- “Helène is een leerling.”

dus

- “Helène houdt van logica.”

De Stoïcijnen waren volgelingen van **Zeno (335–265 v.Chr.)**, een Griekse wijsgeer. De Stoïcijnen kenden vijf fundamentele redeneerschema’s. Elk van die redeneerschema’s heeft een bepaalde structuur. Met behulp van deze redeneerschema’s beredeneerden ze of iets waar is.

Testen

Opgave 1

In gebouwen, bijvoorbeeld ziekenhuizen of bibliotheken, wordt bij de ingang weleens gebruikgemaakt van een luchtsluis om tocht te voorkomen. Er zijn dan twee deuren: een buitendeur en een binnendeur.

Gebruik de afkortingen:

- A betekent dat de buitendeur open is
- B betekent dat de binnendeur open is.

- Beschrijf in eigen woorden wat $\neg A \vee \neg B$ betekent.
- Laat met behulp van een waarheidstabel zien dat $\neg(A \wedge B)$ en $\neg A \vee \neg B$ gelijkwaardig zijn.

Opgave 2

Gegeven is de uitspraak:

“Als Roxy een bloedsinaasappel eet, dan heeft ze de volgende morgen pukkeltjes op haar gezicht.”

Formuleer de omkering van deze als-dan-bewering en ga na of deze waar is.

Opgave 3

Op een muzikavond op school heeft een van de leerlingen het snoer van de microfoon doorgeknipt. Milou, Frederiek en Lotte zijn de verdachten en leggen onder ede de volgende verklaringen af:

Milou: “Frederiek is schuldig en Lotte is onschuldig.”

Frederiek: “Als Milou schuldig is, dan is Lotte ook schuldig.”

Lotte: “Ik ben onschuldig, maar minstens een van de anderen is schuldig.”

- Stel dat alle drie de leerlingen onschuldig zijn. Wie heeft (hebben) er dan gelogen?
- Stel dat alle drie de leerlingen de waarheid spreken. Wie heeft (hebben) er dan het snoer doorgeknipt?
- Stel dat de onschuldigen de waarheid spreken en dat de schuldige(n) loog (logen). Wie van deze drie is (zijn) er dan zeker schuldig?

Opgave 4

Bekijk de bewering P : "Vierhoek $ABCD$ is een parallellogram."

Formuleer beweringen Q , R en S die aan de voorwaarden voldoen:

Q is een nodige voorwaarde voor P .

R is een voldoende voorwaarde voor P .

S is een nodige en voldoende voorwaarde voor P .

Opgave 5

Uitspraak: "Als een koe meer dan 20 dagen geleden een kalfje heeft gekregen, dan is de melkproductie van deze koe per dag minder dan 8 kilogram."

Neem aan dat deze uitspraak waar is, zolang je met deze opgave bezig bent.

Hieronder staat telkens een gegeven. Probeer iets te concluderen met behulp van bovenstaande uitspraak. Laat zien, hoe je de waarheidstabel van de implicatie gebruikt.

- a Een koe heeft een maand geleden een kalfje gekregen.
- b Een koe heeft 30 dagen geleden een kalfje gekregen.
- c De melkproductie is precies 8 kilogram per dag.
- d De koe heeft twee weken geleden twee kalfjes gekregen.
- e De melkproductie is meer dan 8 kilogram per dag.
- f De koe heeft minder dan 20 dagen geleden een kalfje gekregen.

Opgave 6

Welke van de volgende zinnen in de propositielogica zijn altijd waar (tautologie) en/of welke zijn altijd onwaar (contradictie)? Toon de (on)waarheid aan met behulp van een waarheidstabel.

- a $\neg(A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- b $A \wedge B \wedge \neg A$
- c $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

Opgave 7

Een vraag uit de Nationale Wetenschaapsquiz 2001.

Wie liegen er als

- "Jantje zegt dat Pietje liegt."
- "Pietje zegt dat Klaasje liegt."
- "Klaasje zegt dat Jantje en Pietje liegen."

Gebruik een waarheidstabel of een redenering met:

J : Jantje spreekt de waarheid.

P : Pietje spreekt de waarheid.

K : Klaasje spreekt de waarheid.

Examen

Opgave 8: Zoek de dader

De politie heeft drie verdachten van de poging tot moord op buschauffeur Robert gearresteerd: Stolberg, Jones en Visser. Alle drie ontkennen ze de dader te zijn.

Tijdens het verhoor beweert Stolberg dat Robert een vriend van Jones was en dat Visser Robert haatte. Jones beweert dat hij Robert helemaal niet kent en dat hij bovendien helemaal niet in de stad was toen Robert daar neergestoken werd.

Visser beweert dat hij zowel Stolberg als Jones samen met Robert in de stad gezien heeft toen Robert neergestoken werd en dat één van beiden Robert neergestoken moet hebben.

Neem aan dat slechts één van de drie schuldig is en dat de twee onschuldigen de waarheid spreken.

Bekijk om uit te zoeken wie de dader is, de volgende twee beweringen:

A: Jones spreekt de waarheid.

B: Visser spreekt de waarheid.

- a Uit de gegevens volgt dat geldt: $A \Rightarrow \neg B$.
Toon aan dat geldt: $A \Rightarrow \neg B$.
- b Uit $A \Rightarrow \neg B$ volgt dat óf Jones óf Visser de dader is.
Leg uit wie de dader is.

(naar: pilotexamen wiskunde C in 2013, eerste tijdvak)

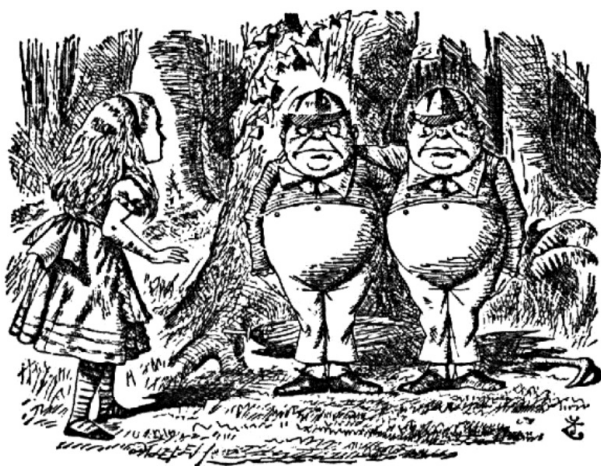
Opgave 9: Tweedledee en Tweedledum

De tweelingbroers Tweedledee en Tweedledum zijn uiterlijk niet van elkaar te onderscheiden. Om de verwarring te vergroten, hebben ze de volgende afspraken met elkaar gemaakt.

1. Op maandag, dinsdag en woensdag liegt Tweedledee bij elke vraag die hem gesteld wordt en op alle andere dagen spreekt hij de waarheid.
2. Op donderdag, vrijdag en zaterdag liegt Tweedledum bij elke vraag die hem gesteld wordt en op alle andere dagen spreekt hij de waarheid.

Ga ervan uit dat deze afspraken in deze gehele opgave gelden.

- a Op zekere dag ontmoet Alice de tweeling en vraagt elk van hen: "Hoe heet jij?"
De ene tweelingbroer heeft een groene jas aan en zegt: "Tweedledee."
De andere tweelingbroer heeft een rode jas aan en zegt: "Tweedledum."
Onderzoek hoe de broer met de groene jas heet.
Elke tweelingbroer heeft altijd een zakdoek in zijn broekzak: als de ene tweelingbroer een rode zakdoek heeft, heeft de ander een zwarte en omgekeerd.



Figuur 6.2

Op zekere dag komt Alice de tweelingbroers tegen. Ze vraagt aan een van beiden: “Welke kleur zakdoek heb je?” Het antwoord van deze tweelingbroer luidt: “Zwart”. Op verzoek van Alice laat hij de zakdoek zien. Deze blijkt rood te zijn.

Daarop vraagt Alice aan de andere tweelingbroer: “Welke kleur zakdoek heb jij?”

- b** Welke kleur zal hij noemen? Leg duidelijk uit hoe je tot die conclusie komt.

(naar: pilotexamen wiskunde C in 2015, tweede tijdvak)

Opgave 10: Cruijffiaanse logica

De oud-voetballer en trainer Johan Cruijff staat bekend om zijn onnavolgbare logica. In een interview met Johan Cruijff door Johan Derksen in 2013 zei Cruijff het volgende: “Als ik jou vraag ‘Laat eens zien wat je kan’, zal jij laten zien wat je kan. Maar dan weet ik meteen wat je niet kan, want dat zal je niet laten zien.”

In deze opgave bekijk je de logica in deze uitspraak van Cruijff nader. Beperk je daarvoor eerst tot één vaardigheid, die je vaardigheid X noemt. Onderscheid hiervoor de volgende uitgangspunten:

A : iemand beheerst vaardigheid X .

B : iemand laat vaardigheid X zien.

Maak een model van Cruijffs uitspraak. Het eerste deel kun je met logische symbolen opschrijven als $A \Rightarrow B$. Het tweede deel van Cruijffs uitspraak kun je modelleren als: “Als iemand vaardigheid X niet laat zien, dan beheerst hij vaardigheid X niet.”

- a** Noteer het tweede deel van het model van Cruijffs uitspraak met behulp van logische symbolen en onderzoek of in het model het tweede deel logisch volgt uit het eerste deel. Licht je antwoord toe.
- b** Ga terug van het model naar de uitspraak van Cruijff. Leg uit waarom je kritiek kunt hebben op de uitspraak van Cruijff.

Een andere bekende uitspraak van Cruijff is zelfs de titel geworden van een boek over hem: "Je moet schieten, anders kun je niet scoren."

Om deze uitspraak te ontleden begin je met:

P : iemand schiet op doel.

Q : iemand scoort.

De uitspraak van Cruijff kun je herformuleren met de volgende logische bewering: "Als er gescoord wordt, dan is er op doel geschoten."

- c In een bepaalde wedstrijd wordt niet gescoord.

Schrijf eerst de bewering "Als er gescoord wordt, dan is er op doel geschoten" met logische symbolen op en onderzoek vervolgens daarmee wat je volgens zijn logica kunt zeggen over het schieten op doel in deze wedstrijd.

(naar: pilotexamen wiskunde C in 2015, eerste tijdvak)

2

Statistisch onderzoek

- 2.1 De statistische cyclus 64
- 2.2 Data analyseren 71
- 2.3 Variabelen vergelijken 78
- 2.4 Samenhang tussen variabelen 85

2.1 De statistische cyclus

Inleiding

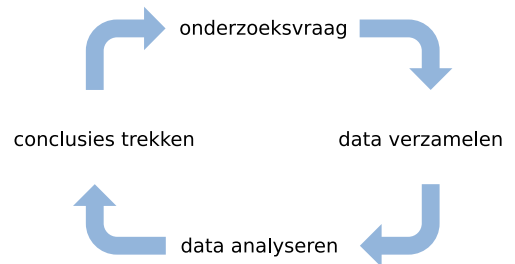
Bij statistisch onderzoek gaat het om het vinden van verklaringen voor bepaalde verschijnselen met behulp van statistiek en grote datasets. Een voorbeeld is de set met gegevens van de Chicago Marathon in 2016. Er deden meer dan 40000 mensen aan mee en je kunt vragen stellen als: 'Is er bij de lopers een verband tussen de tijd halverwege en de eindtijd?', of 'Lopen mensen jonger dan 30 jaar sneller dan mensen boven de 30?', of 'Zijn de looptijden normaal verdeeld en kun je de verdeling ervan verklaren?'. Allemaal vragen die je met behulp van statistische methoden kunt aanpakken. Daarbij hanteer je een vaste onderzoekscyclus.

Je leert in dit onderwerp

- de opzet van een statistisch onderzoek herkennen in bestaande onderzoeken;
- zelf een statistisch onderzoek opzetten.

Voorkennis

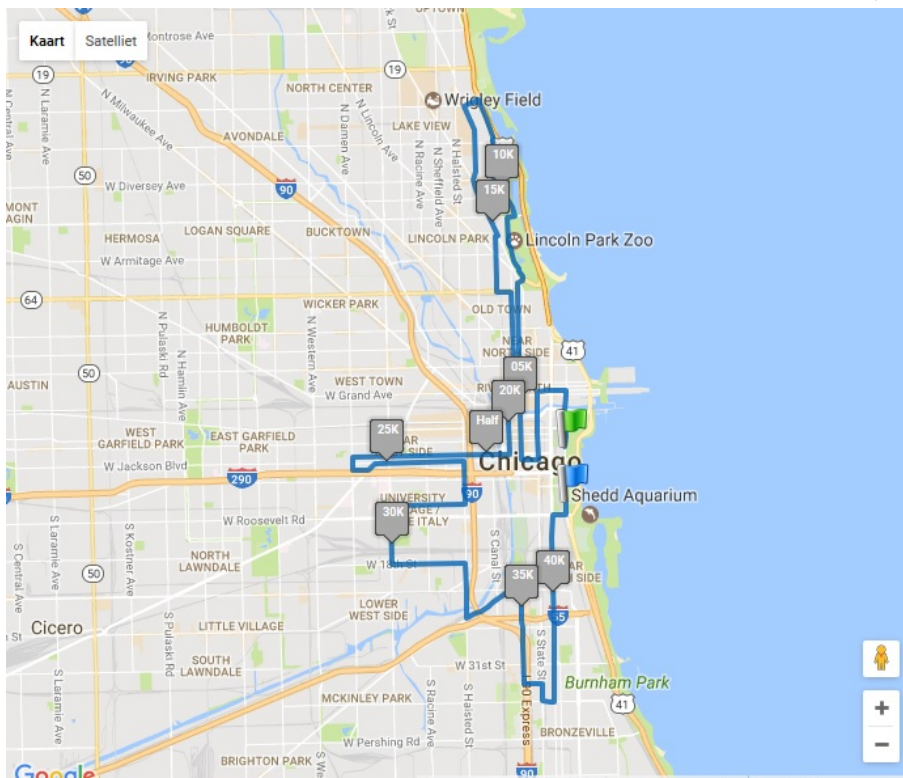
- de beschrijvende statistiek: het maken van (som)frequentietabellen, diagrammen en het berekenen van centrummaten en spreidingsmaten;
- werken met de normale verdeling, met normaal waarschijnlijkheidspapier en met de wortel-n-wet.



Figuur 1.1

Verkennen

Opgave V1



Figuur 1.2

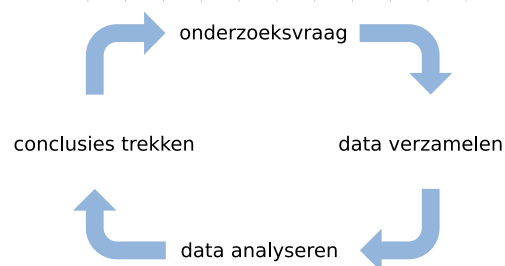
Bekijk de [gegevens van de Chicago Marathon 2016](#).

- Hoe heette de vrouwelijke deelnemer die het eerst is gefinisht? De hoeveelste eindtijd had zij?
- Hoe heette de vrouwelijke deelnemer die het laatst is gefinisht?
- Bekijk de gegevens en formuleer er een onderzoeksvraag bij. Bedenk hoe je dit onderzoek zou willen uitvoeren en hoe je de antwoorden zou willen formuleren.

Uitleg 1

Bij statistisch onderzoek zoek je antwoorden op een vraag die een grote groep betreft en die je alleen kunt krijgen door gegevens (data) te verzamelen van een deel van die groep. Door die data te analyseren, te ordenen in tabellen, centrum- en spreidingsmaten en diagrammen probeer je die antwoorden te vinden en te onderbouwen. Je doorloopt de statistische onderzoekscyclus die je hiernaast aantreft.

De grote groep noem je 'populatie' en de kleinere groep waarvan je de data verzamelt heet de 'steekproef'. De moeilijkheid is nu vooral dat je niet zeker weet of wat voor de steekproef geldt, ook automatisch voor de hele populatie geldt. Geeft de steekproef wel voldoende de verschillen in de populatie weer, is hij wel representatief genoeg?



Figuur 1.3

Bij zo'n statistisch onderzoek kun je verschillende stappen onderscheiden:

1. de onderzoeksvraag formuleren
2. de steekproef kiezen en data verzamelen
3. de data analyseren, dus ordenen middels tabellen, diagrammen en centrum- en spreidingsmaten
4. conclusies trekken

Stel je voor dat je wilt onderzoeken op welke leeftijd je het snelst bent op een marathon (42,195 km hardlopen) en of het verschil maakt of je man bent of vrouw. Je gebruikt hiervoor de gegevens van de marathon van Chicago uit 2016, daaraan deden ruim 40000 mannen en vrouwen van over de hele wereld mee. Dat lijkt toch een voldoende grote steekproef, maar is hij ook representatief?

Deze vraag gaat over verschillen tussen deelgroepen.

Je kunt ook vragen naar percentages (proporties) binnen de populatie: "Hoeveel procent van de marathonlopers is ouder dan 50 jaar?"

Of naar verbanden: "Is er een verband tussen de tussentijd halwege en de behaalde eindtijd?"

Elk van deze vragen vereist een andere onderzoeksopzet.

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** het verhaal van de Chicago Marathon in 2016. Open de **gegevens van de Chicago Marathon 2016** in Excel.

- a Hoeveel deelnemers waren er? Hoeveel vrouwen waren daarbij?
- b Is de steekproef van ruim 40000 marathonlopers die deelnamen aan de Chicago Marthon 2016 groot genoeg om iets te kunnen zeggen over alle marathonlopers? Of zelfs over mensen in het algemeen?
- c Is de steekproef van ruim 40000 marathonlopers die deelnamen aan de Chicago Marthon 2016 representatief voor alle marathonlopers?

Opgave 2

Je wilt een onderzoek opzetten rond de **gegevens van de Chicago Marathon 2016**.

- a Welke stap in de onderzoekscyclus is al voor je gedaan?
- b Probeer de daar als eerste gestelde onderzoeksvraag wat preciezer te formuleren.
- c Beschrijf nu hoe je het onderzoek zou gaan opzetten, maak een plan van aanpak. (In de volgende onderdelen ga je hiermee verder.)
- d Er wordt in de uitleg ook een onderzoeksvraag geformuleerd waarbij het verband tussen twee variabelen wordt gezocht. Welke variabelen zijn dit en voor welke stappen in het onderzoek betekent dit iets?

Uitleg 2

Rond het thema ‘verkiezingen’ vinden ook veel interessante statistische onderzoeken plaats.

Zo is door **KiesKompas** een groot onderzoek gehouden voor de Tweede Kamer verkiezingen van september 2012 in Nederland. In het bestand **TK-Verkiezingen-NL-2012** vind je de gegevens van een aselechte steekproef van 1550 personen uit hun enorme databestand. Het gaat hierbij vooral om kwalitatieve variabelen.

De basisgegevens zijn verzameld via internet, zie **tk2012.kieskompas.nl**.

Ook bij dit onderzoek is de statistische onderzoekscyclus gehanteerd. Je kunt er allerlei vragen bij stellen, zoals:

“Vinden mannen veiligheid belangrijker dan vrouwen?”

“Hoe zit het per partij met de zekerheid van de mensen die van plan zijn erop te stemmen?”

“Hoe sterk zal per partij de uitslag van 2012 anders zijn dan die in 2010?”

“Hoe sterk is het verband tussen jezelf links of rechts vinden en jezelf conservatief of progressief vinden?”

Maar je kunt zelf natuurlijk ook nog wel wat vragen bedenken.

Opgave 3

Bekijk het Excel-bestand met de gegevens van een steekproef uit het KiesKompas onderzoek voor de verkiezingen in 2012. Om de betekenis van deze getallen te begrijpen heeft KiesKompas dit **codeboek TK-Verkiezingen-NL-2012** gemaakt.

- Welke partij heeft nummer 100?
- Hoeveel mensen hebben deze lijst ingevuld en mochten in 2010 nog niet stemmen?
- Hoe zou je er achter kunnen komen in hoeverre mensen tussen 18 jaar en 30 jaar anders gaan stemmen dan mensen boven de 60 jaar?

Opgave 4

In **Uitleg 2** kun je lezen dat de dataset die je kunt gebruiken een aselechte steekproef is uit een veel grotere groep mensen die toen via internet de enquête via **tk2012.kieskompas.nl** hebben ingevuld.

- Betekent het woord ‘aselect’ automatisch dat de steekproef representatief is?
- Is een enquête via internet niet bij voorbaat een niet representatieve steekproef?
- Hoe kun je er voor zorgen dat die representativiteit zo goed mogelijk wordt?

Tweede Kamerverkiezingen 2012



Figuur 1.4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Er is sprake van **statistisch onderzoek** als je probeert om een onderzoeksvraag die een grote groep betreft (de populatie) te beantwoorden door het verzamelen van gegevens van een deel van die groep (de steekproef). Die steekproef moet dan representatief zijn voor de populatie.

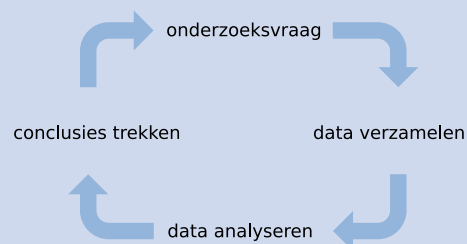
Bij statistisch onderzoek doorloop je de stappen die in de figuur zijn weergegeven.

Het is in dit onderdeel de bedoeling dat je deze **statistische onderzoeks**cyclus vertaalt in een plan van aanpak voor een eigen onderzoek.

Er bestaan in grote lijnen drie soorten vragen die elk een eigen aanpak vereisen:

- vragen naar percentages (proporties);
- vragen naar verschillen tussen deelgroepen met betrekking tot dezelfde statistische variabele;
- vragen naar verbanden tussen twee statistische variabelen.

Je hebt kennis nodig betreffende het werken met Excel en grotere datasets. Zie daarvoor het practicum **Data presenteren en vergelijken**.



Figuur 1.5

Voorbeeld 1

Bij vakken als l.o. en b.s.m. worden vaak sportgegevens bijgehouden, bijvoorbeeld over de Coopertest, de shuttle-run-test, hoogspringen, discuswerpen, en dergelijke. Bij een vak als n.l.t. worden bij diverse modules ook gegevens bijgehouden waarmee je statistisch onderzoek zou kunnen doen. En wellicht kun je op je eigen school ook aan examenresultaten komen in de loop van de jaren. Met dergelijke gegevens van de eigen school kun je heel goed een statistisch onderzoekje opzetten.

Hoe zou je bijvoorbeeld onderzoeken of de jongens beter in de exacte vakken zijn dan meisjes?

Antwoord

Eerst ga je natuurlijk even nadenken over wat ook weer precies exacte vakken zijn, wat doe je bijvoorbeeld met biologie en n.l.t.? Of ga je liever per vak kijken? En welke gegevens gebruik je erbij: rapportcijfers, cijfers van het schoolexamen of die van het centraal examen, of werk je liever met het gemiddelde van die laatste twee? En wat doe je dan met vakken die geen centraal examen kennen, zoals wiskunde D?

Tijd voor een statistisch onderzoekje. In een goed plan van aanpak horen:

1. Inleiding:

Hierin zeg je iets over waarom je dit onderzoekje wilt gaan uitvoeren. Formuleer een vermoeden, een uitspraak die je wilt testen.

Verder beschrijf je wat je onder 'exacte vakken' verstaat en hoe je in grote lijnen gaat werken.

2. De onderzoeksvraag formuleren:

Bijvoorbeeld: "Zijn jongens beter in de exacte vakken dan meisjes?".

Wellicht maak je ook deelvragen bijvoorbeeld over afzonderlijke vakken.

3. De steekproef kiezen en data verzamelen:

Kies een jaargang en een schooltype waarvan je gegevens kunt krijgen, bijvoorbeeld de eindexamenresultaten van verleden jaar. En kies je dan voor tijdvak 1 of voor de gegevens na tijdvak 2? Je plaatst enkele kanttekeningen bij de representativiteit van die steekproef voor alle jongeren van dat schooltype. Bedenk welke gegevens je allemaal wilt hebben, nu in ieder geval: m/v, profiel, cijfers SE, CE1.

Je zoekt uit hoe je aan de gegevens kunt komen en beschrijft hoe je die dan gaat verwerken. Bekijk bijvoorbeeld het Excel-practicum: **Data presenteren en vergelijken** als je dit nog nooit eerder in Excel hebt gedaan.

4. De data analyseren:

Dat betekent ordenen middels tabellen, diagrammen en centrum- en spreidingsmaten. Denk er wel om dat je relatieve frequenties gebruikt. In het vervolg van dit onderwerp leer je diverse diagrammen gebruiken.

5. Conclusies trekken:

Hier ga je mee verder in het vervolg van dit onderwerp.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1** van het onderzoek naar de resultaten van de exacte vakken.

- a Welke vakken zou jij als exacte vakken nemen? Wat is een nadeel van het vragen naar de resultaten van de exacte vakken tegenover een afzonderlijk vak?
- b Hoe zit het met de representativiteit van de steekproef als je leerlingen van jouw school hiervoor gebruikt?
- c Waarom wordt er met relatieve frequenties gewerkt?

Opgave 6

Bedenk de opzet van een statistisch onderzoek dat je op je eigen school kunt uitvoeren (met gegevens van je eigen school). Stel een plan van aanpak op en verzamel de data. Denk eerst goed na over welke gegevens je wilt hebben. In het vervolg van dit onderwerp zul je dit onderzoek gaan uitwerken.

Voorbeeld 2

Bekijk het bestand **TK-Verkiezingen-NL-2012**.

Hoe zou je op je eigen school een vergelijkbaar onderzoek kunnen opzetten?

Antwoord

Er zijn verschillende mogelijkheden:

- Je kunt een enquête opzetten met vragen zoals je die in het onderzoek van KiesKompas aantreft en de leerlingen van je school die vragenlijst laten invullen. Je moet er dan wel flink reclame voor maken, want niet alle leerlingen nemen dit serieus. Verstandig is om ook docenten (bijvoorbeeld van geschiedenis, maatschappijleer, wiskunde) in te schakelen. Wellicht kunnen zij er in hun lessen wat mee. Een mooi schoolbreed project?
- Je kunt in een jaar dat er verkiezingen zijn (zoals 2023) scholierenverkiezingen organiseren op je eigen school. Daarbij kun je dan ook enquêtes laten invullen.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**. Stel dat je een schoolbrede enquête wilt opzetten. Bekijk het practicum **Data verzamelen met een enquête** hoe dit bijvoorbeeld via Google Drive kan.

- Bedenk een geschikte set enquêtevragen, vergelijkbaar met die van de dataset die je in het voorbeeld aantreft.
- Bedenk of je de hele school wilt laten meedoen, of een steekproef wilt trekken. Aan welke voorwaarden moet zo'n steekproef dan voldoen om iets te kunnen zeggen over de leerlingen van jouw school?
- Verzamel je data in een Excel-bestand.

Opgave 8

Een andere manier om aan data over verkiezingen te komen is door ze te organiseren op de eigen school.

- Bekijk de website <https://www.scholierenverkiezingen.nl>.
- Organiseer scholierenverkiezingen en houd een enquête om de gewenste gegevens te verzamelen.
- Bedenk een manier om de vooraf gepeilde uitslag te vergelijken met de daadwerkelijke uitslag op jullie school na de verkiezingen.

Verwerken

Opgave 9

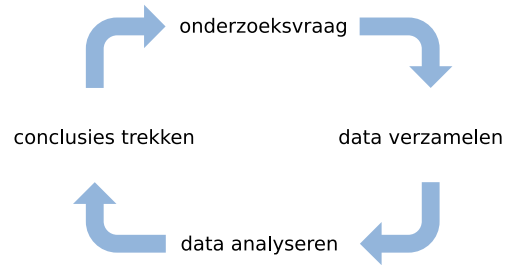
Je wilt een eigen onderzoek opzetten. Kijk naar de statistische cyclus.

- Bedenk een onderzoeksvraag bij een statistisch probleem dat jou interesseert.
- Maak een plan van aanpak en laat dit door je docent controleren.
- Verzamel je gegevens in een Excel-bestand.

2.2 Data analyseren

Inleiding

Afhankelijk van de gestelde vraag, het te onderzoeken probleem, voer je een data-analyse uit. Daarbij gebruik je vaak centrummaten, spreidingsmaten en diagrammen. Welke maten en welke diagrammen dat zijn, hangt sterk af van de aard van de variabelen die je bekijkt. Bij kwalitatieve variabelen werk je anders dan bij kwantitatieve variabelen.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- data leren ordenen in verband met de gestelde onderzoeksvraag en de aard van de gekozen variabelen.

Voorkennis

- de beschrijvende statistiek: het maken van (som)frequentietabellen, diagrammen en het berekenen van centrummaten en spreidingsmaten;
- werken met de normale verdeling, met normaal waarschijnlijkheidspapier en met de wortel-n-wet.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt de data die je hebt natuurlijk analyseren. Tabellen en diagrammen helpen daarbij.

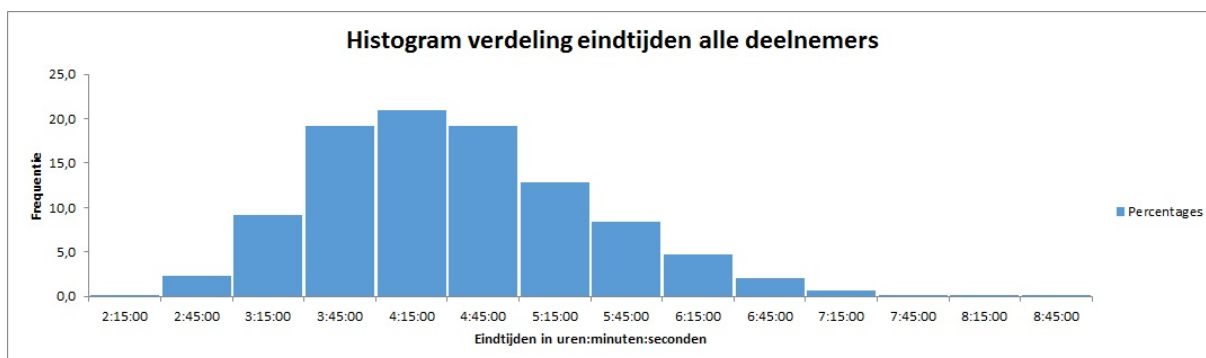
- Welke soorten tabellen gebruik je bij data-analyse? En waar dienen ze voor?
- Welke soorten diagrammen ken je en wanneer gebruik je ze?

Uitleg 1

Bij de **gegevens van de Chicago Marathon 2016** heb je voor wat betreft de eindtijden te maken met een continue kwantitatieve variabele. Dergelijke variabelen vat je samen met behulp van een frequentietabel met aaneengesloten klassen en een bijbehorend histogram of frequentiepolygoon.

Wil je daarmee twee deelgroepen (zoals mannen en vrouwen, of leeftijdscategorieën) vergelijken, dan gebruik je altijd relatieve frequenties (percentages).

Vaak worden gemiddelde als centrummaat en standaardafwijking als spreidingsmaat gebruikt.



Figuur 2.2

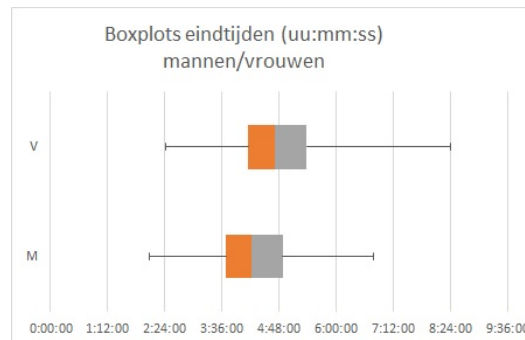
Wil je twee deelgroepen vergelijken, dan kun je hun histogrammen vergelijken. Maar om dan goede uitspraken te doen is dan nogal lastig: je hebt niet alleen met verschillende gemiddeldes te maken, maar ook met verschillende standaardafwijkingen. En hoe interpreteer je dat? Dat zou bijvoorbeeld kunnen als ze zijn te benaderen door normale verdelingen. Hoe je die kunt vergelijken zie je in het volgende onderdeel.

Een manier om kwantitatieve variabelen te vergelijken is met behulp van boxplots.

Een boxplot is een diagram waarbij je de gegevens in vier kwarten verdeelt, je hebt er minimum, eerste kwartiel, mediaan, derde kwartiel en maximum voor nodig.

Wil je daarmee twee deelgroepen (zoals mannen en vrouwen, of leeftijdscategorieën) vergelijken, dan gebruik je voor beide boxplots dezelfde schaalverdeling.

Wil je de samenhang tussen twee kwantitatieve variabelen vergelijken, dan maak je een puntenwolk. Daarover meer in het laatste onderdeel.



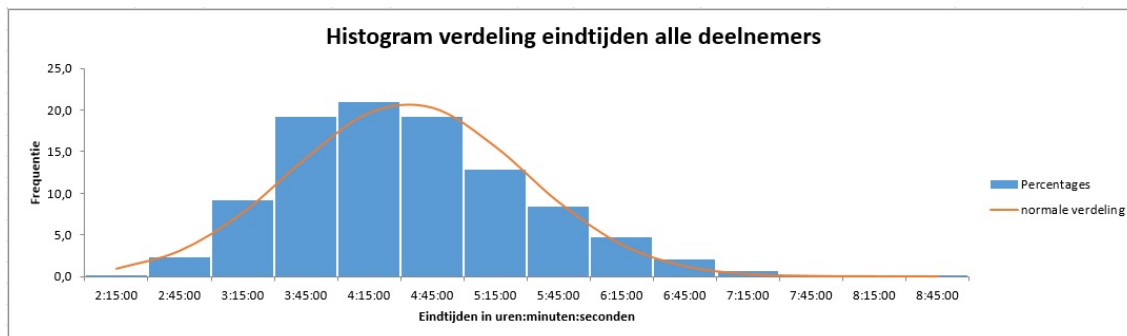
Figuur 2.3

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** het verhaal van de Chicago Marathon in 2016. Je ziet een histogram van de relatieve frequenties van alle eindtijden met een klassenindeling $2 : 00 - \leq 2 : 30$, $2 : 30 - \leq 3 : 00$, etc. De tijden hebben de indeling u:mm:ss (uren/minuten/seconden).

- Wat is het verschil tussen een histogram en een staafdiagram?
- Open het databestand en maak zelf zo'n histogram voor de mannelijke en de vrouwelijke hardlopers afzonderlijk.
- Waarom is het nu echt noodzakelijk om met relatieve frequenties (procenten) te werken?

Hier zie je het histogram van de eindtijden nog een keer. Er is een normale verdeling in getekend die hetzelfde gemiddelde en dezelfde standaardafwijking heeft.



Figuur 2.4

- d Zijn de eindtijden normaal verdeeld? Hoe zou je dit nauwkeuriger kunnen onderzoeken?

Opgave 2

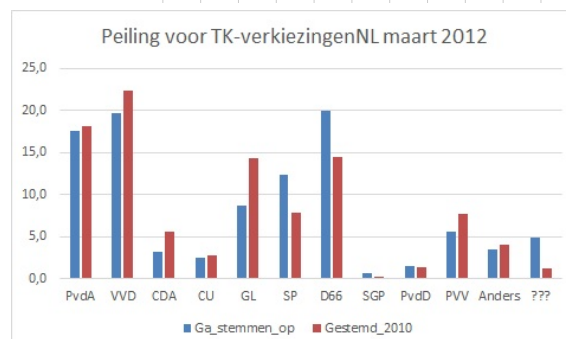
Bekijk in **Uitleg 1** de boxplots van de eindtijden van de Chicago Marathon 2016.

- a Maak zelf dergelijke boxplots in Excel.
b Kun je zonder meer zeggen dat de mannen sneller zijn dan de vrouwen?

Uitleg 2

In het bestand **TK-Verkiezingen-NL-2012** vind je de gegevens van een aselechte steekproef van 1550 personen uit het enorme databestand van KiesKompas. Het gaat hierbij vooral om kwalitatieve variabelen. Daarom werk je voor het vergelijken van twee variabelen met staafdiagrammen, of kruistabellen.

Het staafdiagram hiernaast laat per partij zien wat de verschillen zijn tussen wat mensen in 2010 hebben gestemd en wat ze in 2012 van plan waren om te gaan stemmen op 12 september. Maar je zou hierbij ook een kruistabel kunnen maken.



Figuur 2.5

Zo'n kruistabel zie je hieronder voor de twee variabelen 'Ga_stemmen_op' en 'Zekerheid_keuze'.

Aantal van Ga_stemmen_op	Kol																
Rijlabels	PvdA	VVD	CDA	CU	GL	SP	D66	SGP	PvdD	PVV	50P	PP	Anders	???	Eindtotaal		
Zeker op welke partij	94	159	16	17	50	83	111	6	11	33	2	6	5	2	595		
Twijfel	152	125	28	18	75	90	167	3	11	39	11	8	1	39	767		
Weet niet	27	21	6	3	8	17	30	1	2	14	8	5	4	33	179		
Ik ga niet stemmen					1	2	1					1	3	1	9		
Eindtotaal	273	305	50	38	134	192	309	10	24	86	21	20	13	75	1550		

Figuur 2.6

Je kunt hierin bijvoorbeeld aflezen dat het aantal twijfelaars bij de PvdA groter is dan bij de VVD, ook naar verhouding. Kun je dan een duidelijke conclusie trekken? Daarover gaat het volgende onderdeel.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** het verhaal van de NL verkiezingen in 2012. Om statistische variabelen goed in beeld te krijgen is het verstandig om een afzonderlijk werkblad te maken voor de variabele(n) die je wilt bekijken.

- Maak een werkblad waarop de variabelen 'Ga_stemmen_op' en 'Gestemd_2010' voorkomen. Maak daarop twee frequentietabellen en het staafdiagram dat je in de uitleg ziet.
- Maak een werkblad voor de variabelen 'Ga_stemmen_op' en 'Zekerheid_keuze'. Maak de kruistabel die je in de uitleg ziet.

Opgave 4

Bij de verkiezingen 2012 dataset van KiesKompas kun je verschillende onderzoeksvragen stellen. Bijvoorbeeld:

- "Vinden mannen veiligheid belangrijker dan vrouwen?"
 - "Is er verschil in stemgedrag tussen mannen en vrouwen?"
 - "Is er verband tussen jezelf plaatsen op de 1 - 10 schaal Links/Rechts en jezelf plaatsen op de 1 - 10 schaal Conservatief/Progressief?"
 - "Stemmen mensen die 'Zorg' een belangrijk onderwerp vinden anders dan mensen die dit niet doen?"
- Schrijf bij elk van deze vragen op hoe je het onderzoek op basis van de beschikbare gegevens aan zou pakken.
 - Kies twee van deze vragen uit en begin een bijbehorende data-analyse.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Hoe je gegevens samenvat is sterk afhankelijk van de soort gegevens:

Bij **kwantitatieve variabelen** werk je meestal met:

- Frequentietabellen, staafdiagrammen en lijndiagrammen bij discrete kwantitatieve variabelen, zoals cijfers, leeftijden, e.d. Hierbij horen centrummaten als modus, gemiddelde en spreidingsmaten als spreidingsbreedte.
- Frequentietabellen met aaneengesloten even brede klassen, histogrammen en frequentiepolygonen bij continue kwantitatieve variabelen, zoals lengte, gewicht, tijdsduur, e.d. Hierbij horen centrummaten als gemiddelde en spreidingsmaten als standaardafwijking.
- Boxplots waarvoor je minimum, eerste kwartiel, mediaan, derde kwartiel en maximum nodig hebt.
- Puntenwolken (spreidingsdiagrammen) als je een verband tussen twee kwalitatieve variabelen wilt zoeken.

Bij **kwalitatieve variabelen** werk je meestal met:

- Frequentietabellen, staafdiagrammen, lijndiagrammen, beeld-diagrammen, cirkeldiagrammen bij kwalitatieve variabelen, zoals vakkenprofiel, aantal per maand, e.d.
Hierbij horen centrummaten zoals modus en mediaan.
- Kruistabellen als je twee kwalitatieve variabelen wilt vergelijken.

Voorbeeld 1

Stel je wilt onderzoek doen naar de examenresultaten van je eigen school. De gegevens betreffende de examenresultaten moeten in ieder geval per individu het geslacht, het profiel, de gevolgde vakken en de eindcijfers SE en CE1 bevatten.

Je onderzoeksvraag is bijvoorbeeld "Zijn jongens beter in de exacte vakken dan meisjes?".

Hoe ga je die vraag nu beantwoorden met de examenresultaten die je van je eigen school hebt verzameld? Of, als je nog niets hebt, gebruik bijvoorbeeld deze **resultaten van het VWO op CE1 in 2013**.

Antwoord

Hopelijk heb je wel ingezien dat het weinig zinvol is vakken als wiskunde, natuurkunde, scheikunde, biologie, e.d., op één hoop te gooien. Er zijn immers maar weinig leerlingen die die vakken allemaal hebben, en dan heb je nog wiskunde A, B en D, hoe weeg je dat mee?

Je kunt beter naar afzonderlijke vakken kijken en dan bijvoorbeeld de CE1-cijfers vergelijken, want die worden door iedereen in dezelfde omstandigheden gemaakt (geen herkansingen nog meegeteld, geen werkstukken).

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** de examenresultaten ofwel van je eigen school ofwel die in het daar aangeboden databestand.

- Maak een werkblad met daarop de CE-resultaten van (bijvoorbeeld) natuurkunde. Maak afzonderlijke frequentietabellen voor de jongens en de meisjes. Welke klassenindeling gebruik je?
- Stel je gebruikt de klassenindeling $1,0- < 1,5$, $1,5- < 2,5$, $2,5- < 3,5$, etc. Je wilt een histogram maken. Welke moeilijkheid doet zich dan voor? En hoe los je dat op?
- Maak nu twee afzonderlijke histogrammen voor de jongens en voor de meisjes en bereken de bijpassende centrummaten.
- Je zou ook naar de eindcijfers voor natuurkunde kunnen kijken en daar boxplots voor de jongens en de meisjes kunnen maken. Doe dat en beschrijf de voor- en nadelen daarvan.

Opgave 6

In de vorige opgave heb je het vak natuurkunde bekeken om iets te kunnen zeggen over de vraag “Zijn jongens beter in de exacte vakken dan meisjes?”

- a Hoe zou je nu het onderzoek naar die vraag voortzetten?

Je zou natuurlijk ook heel andere vragen kunnen stellen, zoals: “Wordt bij engels het SE net zo goed gemaakt als het CE?”

- b Hoe zou je zo'n onderzoeksvraag aanpakken?
- c Probeer zelf een andere onderzoeksvraag te bedenken bij de gegeven dataset en beschrijf welke vorm van data-analyse je erbij zou gaan uitvoeren.

Voorbeeld 2

Bekijk het bestand **TK-Verkiezingen-NL-2012**.

Je wilt onderzoeken of ‘Veiligheid’ bij mannen een belangrijker onderwerp is dan bij vrouwen. Je maakt daarbij deze kruistabel. Hoe zou je deze vergelijking kunnen maken?

Aantal van Veiligheid_belangrijk	Kolomlabel		
Rijlabels	0	1	Eindtotaal
M	504	706	1210
V	148	182	330
(leeg)	3	7	10
Eindtotaal	655	895	1550

Figuur 2.7

Antwoord

Hier valt niets te vergelijken omdat het over absolute aantallen gaat.

Je moet in ieder geval de gegevens omrekenen naar percentages. Maar ja, percentages waarvan?

Omdat je het percentage van de mannen dat veiligheid een belangrijk thema vindt wilt vergelijken met het percentage van de vrouwen dat dit vindt, is het totaal aantal mannen 100% en is ook het totaal aantal vrouwen 100%. Reken nu de getallen om naar de juiste percentages en probeer een uitspraak te doen.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** het verhaal van de NL verkiezingen in 2012 en de daar gestelde onderzoeksvraag.

- a Zijn er nog een andere manieren denkbaar om een data-analyse uit te voeren?
- b Laat zien dat het percentage mannen dat veiligheid belangrijk vindt ongeveer 58,3 is en bereken dit percentage ook voor de vrouwen. Is er veel verschil?

Opgave 8

Bekijk de dataset van **Voorbeeld 2** nog eens.

- a Maak zelf zo'n kruistabel bij de vraag of ‘Zorg’ bij mannen een belangrijker onderwerp is dan bij vrouwen.
- b Reken je getallen om naar percentages. Is er nu een groot verschil?

2.3 Variabelen vergelijken

Inleiding

Nu ga je statistische variabelen vergelijken. Er bestaan veel manieren om dat te doen, veel hangt af van de soort variabelen waar je mee te maken hebt.

Je leert in dit onderwerp

- het verschil tussen twee kwantitatieve variabelen beschrijven en interpreteren door boxplots vergelijken of normale verdelingen te gebruiken;
- het verschil tussen twee kwalitatieve variabelen beschrijven en interpreteren met kruistabellen en phi, of met de max.Vcp.

Voorkennis

- de beschrijvende statistiek: het maken van (som)frequentietabellen, diagrammen en het berekenen van centrummaten en spreidingsmaten;
- werken met de normale verdeling, met normaal waarschijnlijkheidspapier en met de wortel-n-wet.
- data leren ordenen in verband met de gestelde onderzoeksvraag en de aard van de gekozen variabelen.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt de data geanalyseerd, tabellen en diagrammen gemaakt afhankelijk van de soort variabele.

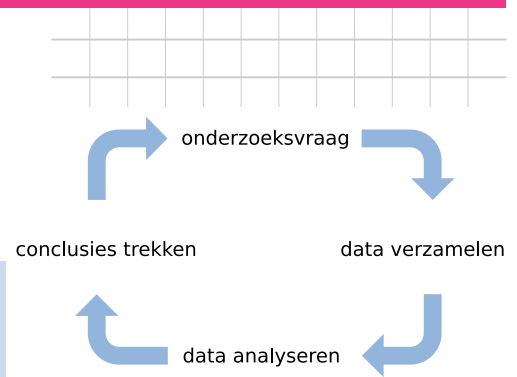
- a** Hoe kun je frequentietabellen vergelijken?
- b** Kun je iets bedenken om boxplots te vergelijken?
- c** Kun je iets bedenken om histogrammen te vergelijken?
- d** En hoe vergelijk je kwalitatieve variabelen?

Uitleg 1

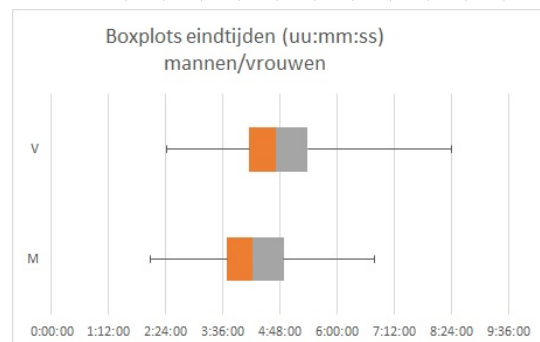
Bij de **gegevens van de Chicago Marathon 2016** heb je voor wat betreft de eindtijden te maken met een continue kwantitatieve variabele.

Een manier om dergelijke variabelen te vergelijken is met behulp van boxplots. Hier zie je de boxplots van de eindtijden van de mannen en de vrouwen. Er is enig verschil, maar ook veel overlap van deze boxplots. Om een uitspraak te kunnen doen hanteer je de volgende afspraken:

- Als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeg je “Het verschil is groot”.
- Als de boxen elkaar wel overlappen en minstens één mediaan buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeg je “Het verschil is middelmatig”.
- In alle andere gevallen zeg je “Het verschil is gering”.



Figuur 3.1

**Figur 3.2**

Bij het vergelijken van de boxplots van de eindtijden van de mannen en de vrouwen moet je op grond daarvan concluderen dat het verschil gering is.

Een andere manier om kwantitatieve variabelen te vergelijken is met behulp van de normale verdeling.

Je gaat dan eerst na of beide variabelen bij benadering normaal zijn verdeeld. In dit geval klopt dat wel ongeveer (vooral als je de erg langzame lopers buiten beschouwing laat). Je zou dus kunnen zeggen:

- De eindtijden van de mannen zijn normaal verdeeld met $\mu(M) \approx 4,32$ en $\sigma(M) \approx 0,87$
- De eindtijden van de vrouwen zijn normaal verdeeld met $\mu(V) \approx 4,80$ en $\sigma(V) \approx 0,89$

Je ziet dat de gemiddelden verschillen, de standaardafwijking nauwelijks. Nu kun je twee normale verdelingen vergelijken door naar hun verschilverdeling te kijken.

Als twee normaal verdeelde variabelen X en Y hetzelfde gemiddelde hebben, heeft hun verschilverdeling een gemiddelde van $\mu = \mu(X) - \mu(Y) = 0$ en een standaardafwijking van $\sigma = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$. Als echter $\mu(X) \neq \mu(Y)$ dan zal het gemiddelde van de verschilverdeling ook ongelijk aan 0 zijn. Hoe meer μ van 0 afwijkt, hoe groter het verschil.

Voor de verschilverdeling van de eindtijden van de mannen en de vrouwen geldt $\mu(E) = \mu(V) - \mu(M) \approx 0,48$ en $\sigma(E) \approx \sqrt{0,87^2 + 0,89^2} \approx 1,3$.

$\mu(E)$ wijkt af van $\mu = 0$, maar niet veel.

Je kunt dat zien aan de kans dat $\mu(E)$ nog verder van 0 zit: $P(\mu(E) \geq 0,48 | \mu = 0 \text{ en } \sigma = 1,3) \approx 0,356$.

In de normale verdeling met $\mu = 0$ en $\sigma = 1,3$ is deze overschrijdingskans zo groot dat $\mu(E)$ naar verhouding dicht bij 0 zit. Meestal spreek je vooraf af hoe groot die overschrijdingskans maximaal mag zijn, dat is vaak 5%, dus 0,05. Dit heet het significantieniveau.

Omdat in dit geval de overschrijdingskans veel groter is dan het significantieniveau, zeg je dat het verschil niet significant is.

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe de eindtijden van de mannen en de vrouwen van de Chicago Marathon 2016 worden vergeleken met behulp van boxplots.

- Leg uit waarom hier de conclusie moet worden getrokken dat het verschil gering is.
- Kies zelf twee andere deelgroepen (bijvoorbeeld twee leeftijdscategorieën) waarvan je de eindtijden wilt vergelijken. Gebruik weer boxplots.

Opgave 2

Bekijk in **Uitleg 1** hoe de eindtijden van de mannen en de vrouwen van de Chicago Marathon 2016 worden vergeleken met behulp van normale verdelingen.

- Bereken zowel voor eindtijden van de mannen als die van de vrouwen zowel het gemiddelde als de standaarddeviatie.
- Hoe kun je nagaan of van beide deelgroepen de eindtijden bij benadering normaal zijn verdeeld? Voer dit ook zelf uit.
- Je maakt een verschilverdeling van de eindtijden van de mannen en de vrouwen. Daarna bereken je een overschrijdingskans. Geef in een schets van die normale verschilverdeling deze overschrijdingskans door arceren aan en bereken hem ook zelf.
- Licht met behulp van je figuur toe dat als die overschrijdingskans veel kleiner zou zijn geweest, het verschil tussen $\mu(E)$ en $\mu = 0$ behoorlijk groter zou zijn geweest.
- Het significantieniveau is de maximale overschrijdingskans. Als het significantieniveau 0,05 is, hoe groot zou $\mu(E)$ dan minimaal moeten zijn als het verschil significant is?
- Kies zelf twee andere deelgroepen (bijvoorbeeld twee leeftijdscategorieën) waarvan je de eindtijden wilt vergelijken. Gebruik nu bijbehorende normale verdelingen.

Uitleg 2

In het bestand **TK-Verkiezingen-NL-2012** vind je de gegevens van een aselechte steekproef van 1550 personen uit het enorme databestand van KiesKompas. Het gaat hierbij vooral om kwalitatieve variabelen. Daarom werk je voor het vergelijken van twee variabelen met staafdiagrammen, of kruistabellen.

Hier zie je een kruistabel voor de twee variabelen 'Ga_stemmen_op' en 'Zekerheid_keuze'.

Aantal van Ga_stemmen_op	Kol																
Rijlabels	PvdA	VVD	CDA	CU	GL	SP	D66	SGP	PvdD	PVV	50P	PP	Anders	???	Eindtotaal		
Zeker op welke partij	94	159	16	17	50	83	111	6	11	33	2	6	5	2	595		
Twijfel	152	125	28	18	75	90	167	3	11	39	11	8	1	39	767		
Weet niet	27	21	6	3	8	17	30	1	2	14	8	5	4	33	179		
Ik ga niet stemmen					1	2	1					1	3	1	9		
Eindtotaal	273	305	50	38	134	192	309	10	24	86	21	20	13	75	1550		

Figuur 3.3

	PvdA		VVD		
	p	cp	p	cp	Vcp
Zeker op welke partij	34,4	34,4	52,1	52,1	17,7
Twijfel	55,7	90,1	41,0	93,1	3,0
Weet niet	9,9	100,0	6,9	100,0	0,0
Ik ga niet stemmen	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0

Figuur 3.4

Je kunt hierin bijvoorbeeld aflezen dat het aantal twijfelaars bij de PvdA groter is dan bij de VVD, ook naar verhouding. Je kunt de variabele 'Zekerheid_keuze' voor deze twee partijen vergelijken met behulp van cumulatieve percentages. Je ziet dat in de tweede tabel. In de laatste kolom vind je het verschil van de cumulatieve percentages V_{cp} .

Het maximum hiervan is $\max V_{cp} = 17,7\%$ en daarvoor kun je de volgende vuistregels gebruiken:

- Als $\max V_{cp} > 40\%$, dan zeg je “Het verschil is groot”.
- Als $20\% < \max V_{cp} \leq 40\%$, dan zeg je “Het verschil is middelmatig”.
- Als $\max V_{cp} \leq 20\%$, zeg je “Het verschil is gering”.

Het verschil tussen de keuzezekerheid bij deze twee partijen is dus gering.

Geslacht	Zorg_belangrijk		
	nee	ja	
M	104	1106	1210
V	20	310	330
	124	1416	1540

Figuur 3.5

Een speciaal geval is nog de twee bij twee kruistabel die je kunt maken als je bijvoorbeeld kijkt naar het verschil tussen mannen en vrouwen bij de variabele ‘Zorg_belangrijk’.

Hierbij kun je mannen en vrouwen vergelijken met behulp van het getal ϕ :

$$\phi = \frac{104 \cdot 310 - 1106 \cdot 20}{\sqrt{1210 \cdot 330 \cdot 124 \cdot 1416}} \approx 0,0382.$$

Ook hierbij horen vuistregels:

- Als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeg je “Het verschil is groot”.
- Als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeg je “Het verschil is middelmatig”.
- Als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, zeg je “Het verschil is gering”.

Ook hier is het verschil gering.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** het vergelijken van twee partijen bij de variabele ‘Zekerheid_keuze’ bij het bestand NL verkiezingen in 2012.

- ‘Zekerheid_keuze’ heet wel een ordinale kwalitatieve variabele. Hierbij geeft ordinaal aan dat er sprake is van een ordening, een duidelijke volgorde. Licht dit toe.
- Maak zelf de vergelijkingstabel voor de PVV en GL van ‘Zekerheid_keuze’. Probeer een conclusie te trekken met behulp van de $\max V_{cp}$.
- Bedenk nog twee andere variabelen uit de dataset TK-Verkiezingen-NL-2012 die je met behulp van $\max V_{cp}$ kunt vergelijken.

Opgave 4

Bekijk in **Uitleg 2** hoe je bij een twee keer twee kruistabel het getal ϕ kunt gebruiken om te vergelijken of er verschil is tussen de antwoorden van mannen en vrouwen betreffende de variabele ‘Zorg_belangrijk’.

- Maakt het verschil welke variabele horizontaal en welke verticaal staat?
- Reken zelf de waarde van ϕ na.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Overzicht van manieren om variabelen te vergelijken. Leer dit niet uit het hoofd, maar zoek het steeds op als je het nodig hebt.

Kwantitatieve variabelen vergelijken kan

- met behulp van boxplots. Daarbij hoort de afspraak:
 - Als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeg je “Het verschil is groot”.
 - Als de boxen elkaar wel overlappen en minstens één mediaan buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeg je “Het verschil is middelmatig”.
 - In alle andere gevallen zeg je “Het verschil is gering”.
- met behulp van de (normale) verschilverdeling van hun normale verdelingen. Daarbij ga je uit van het feit dat als de gemiddelden van de verdelingen van X en Y niet verschillen, voor de verschilverdeling geldt $\mu = \mu(X) - \mu(Y) = 0$ met $\sigma = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$. Als $\mu(X - Y) \neq 0$ bereken je de overschrijdingskans hierbij. Is die overschrijdingskans groter dan het significantieniveau (de maximaal afgesproken overschrijdingskans) dan is het verschil niet significant (niet betekenisvol). Meestal neem je een significantieniveau van 5% ofwel 0,05.

Kwalitatieve variabelen vergelijken kan

- bij een twee bij twee kruistabel met behulp van phi:

$$\varphi = \frac{ad-bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$$

Daarbij hoort de afspraak:

- Als $\varphi < -0,4$ of $\varphi > 0,4$, dan zeg je “Het verschil is groot”.
- Als $-0,4 \leq \varphi < -0,2$ of $0,2 < \varphi \leq 0,4$, dan zeg je “Het verschil is middelmatig”.
- Als $-0,2 \leq \varphi \leq 0,2$, zeg je “Het verschil is gering”.
- bij een kruistabel waarin per categorie uitkomsten zijn die een duidelijke volgorde hebben (ordinale variabele) met behulp van $\max V_{cp}$, het maximale cumulatieve percentage.

Daarbij hoort de afspraak:

- Als $\max V_{cp} > 40\%$, dan zeg je “Het verschil is groot”.
- Als $20\% < \max V_{cp} \leq 40\%$, dan zeg je “Het verschil is middelmatig”.
- Als $\max V_{cp} \leq 20\%$, zeg je “Het verschil is gering”.

	wel	niet	
groep A	a	b	a+b
groep B	c	d	c+d
	a+c	b+d	totaal

Figuur 3.6

Voorbeeld 1

Stel je wilt onderzoek doen naar de examenresultaten van je eigen school. De gegevens betreffende de examenresultaten moeten in ieder geval per individu het geslacht, het profiel, de gevolgde vakken en de eindcijfers SE en CE1 bevatten.

Je onderzoeksvraag is bijvoorbeeld “Zijn jongens beter in de exacte vakken dan meisjes?”.

Hoe ga je die vraag nu beantwoorden met de examenresultaten die je van je eigen school hebt verzameld? Of, als je nog niets hebt, gebruik bijvoorbeeld deze [resultaten van het VWO op CE1 in 2013](#).

Antwoord

Je gaat liever naar afzonderlijke vakken kijken en de CE1-cijfers vergelijken, want die worden door iedereen in dezelfde omstandigheden gemaakt (geen herkansingen nog meegeteld, geen werkstukken).

Neem bijvoorbeeld het vak natuurkunde en bekijk de cijfers van de meisjes en de jongens afzonderlijk.

Je hebt dan te maken met een continue kwantitatieve variabele, dus je kunt bijvoorbeeld boxplots gaan vergelijken. En dan kun je met behulp van de vuistregels een conclusie trekken.

Opgave 5

Bekijk in [Voorbeeld 1](#) de examenresultaten ofwel van je eigen school ofwel die in het daar aangeboden databestand.

- a Maak boxplots van de resultaten van de meisjes en de jongens bij het CE1-cijfer voor het vak natuurkunde.
- b Trek conclusies met behulp van de vuistregels voor het vergelijken van boxplots.
- c Op deze wijze kun je ook andere exacte vakken vergelijken. Probeer iets zinnigs te zeggen over de onderzoeksvraag.

Opgave 6

Neem weer de cijfers voor natuurkunde uit het databestand uit [Voorbeeld 1](#). Of werk met andere geschikte gegevens van je eigen school.

- a Bereken zowel van de jongens als van de meisjes het gemiddelde en de standaardafwijking.
Ga er van uit, dat de CE1-cijfers van de jongens en de meisjes normaal zijn verdeeld. (In werkelijkheid zou je dit natuurlijk zelf eerst onderzoeken!) Je gaat beide normale verdelingen vergelijken met behulp van hun verschilverdeling.
- b Welk gemiddelde en welke standaardafwijking heeft die verschilverdeling?
- c Als beide deelgroepen het examen natuurkunde even goed hebben gemaakt, verwacht je voor de verschilverdeling $\mu = 0$. Onderzoek met een significantieniveau van 10% of het gevonden gemiddelde daar significant van afwijkt.

Voorbeeld 2

Bekijk het bestand **TK-Verkiezingen-NL-2012**.

Je wilt onderzoeken of 'Veiligheid' bij mannen een belangrijker onderwerp is dan bij vrouwen. Je maakt daarbij deze kruistabel. Hoe kun je een conclusie trekken?

Aantal van Veiligheid_belangrijk	Kolomlabel		
Rijlabels	0	1	Eindtotaal
M	504	706	1210
V	148	182	330
(leeg)	3	7	10
Eindtotaal	655	895	1550

Figuur 3.7

Antwoord

Omdat het hier kwalitatieve variabelen betreft moet je ofwel naar de $\max V_{cp}$ kijken, ofwel werken met ϕ .

Op het eerste gezicht lijkt dat laatste niet mogelijk, maar je kunt natuurlijk beslissen om de 10 mensen die deze vragen niet hebben beantwoord, weg te laten.

Je hebt dan een twee bij twee kruistabel en daarvan kun je ϕ berekenen.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** het verhaal van de NL verkiezingen in 2012 en de gestelde onderzoeksvraag.

- Laat uit de tabel de rij '(Geen)' weg en bereken ϕ .
- Welke conclusie hoort hier bij?

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2** het verhaal van de NL verkiezingen in 2012. Let op de variabelen 'Gehoor_bij_politiek' en 'Ga_stemmen_op'.

- Maak hierbij een kruistabel.
- Vergelijk de twee partijen PvdA en PVV op dit gebied met behulp van $\max V_{cp}$.

Verwerken

Opgave 9

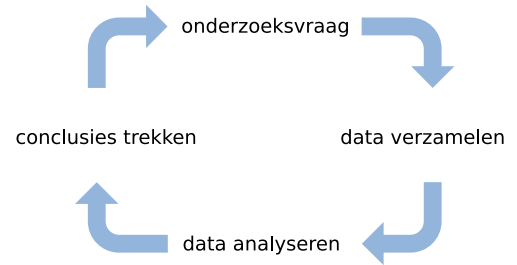
Je bent bezig met een eigen onderzoek opzetten. Je hebt je data geanalyseerd, tijd voor conclusies.

- Ga na wat voor soort statistische variabelen je hebt en wat dit betekent voor de manier waarop je conclusies kunt trekken.
- Trek conclusies.
- Keer met je conclusies nog een keer terug naar je oorspronkelijke statistische probleem. Zijn je onderzoeksvragen beantwoord? En zijn die antwoorden enigszins realistisch en/of te verklaren?
- Schrijf een onderzoeksrapport waarin je de statistische cyclus duidelijk herkent.

2.4 Samenhang tussen variabelen

Inleiding

Tussen statistische variabelen bestaat soms een statistisch verband. Dat wil nog niet zeggen dat de éne variabele dan automatisch de andere veroorzaakt.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

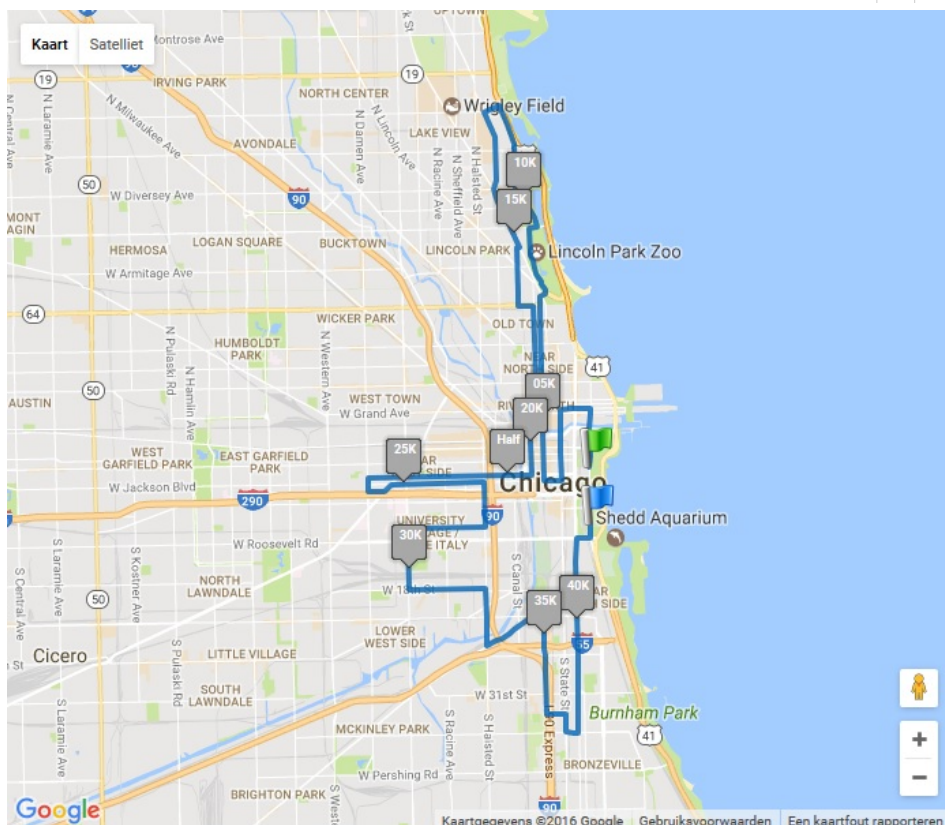
- de (statistische) samenhang tussen twee variabelen te beschrijven en te interpreteren met behulp van correlatiecoëfficiënt en trendlijn.

Voorkennis

- de beschrijvende statistiek: het maken van (som)frequentietabellen, diagrammen en het berekenen van centrummaten en spreidingsmaten;
- werken met de normale verdeling, met normaal waarschijnlijkheidspapier en met de wortel-n-wet.
- data leren ordenen in verband met de gestelde onderzoeksvraag en de aard van de gekozen variabelen.

Verkennen

Opgave V1



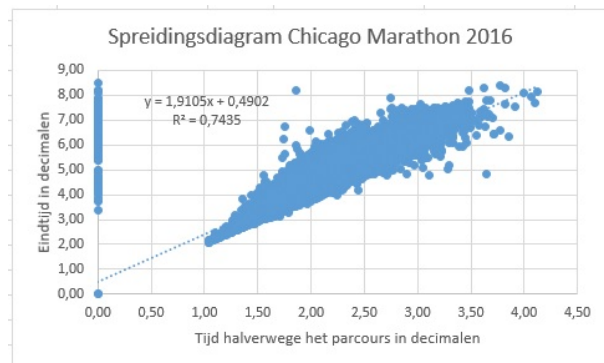
Figuur 4.2

Bij de Chicago Marathon 2016 kun je je afvragen of er een verband is tussen de tijd die iemand halverwege het parcours (H) klokt en de eindtijd (E).

- Wat voor soort diagram stel je je dan voor?
Gebruik deze [gegevens van de Chicago Marathon 2016](#).
- Zoek uit hoe je in Excel het gewenste diagram kunt maken.
- Is er een verband tussen H en E ? En is dit alleen een statistisch verband of is het een oorzakelijk verband?
- Als je een verband tussen twee statistische variabelen zoekt, moeten dit dan kwantitatieve variabelen zijn?

Uitleg

Bij de **gegevens van de Chicago Marathon 2016** heb je voor wat betreft de tijden halverwege en de eindtijden te maken met continue kwantitatieve variabelen. Je zou verwachten dat er een zeker verband tussen beide bestaat, maar zeker is dit niet. Of een dergelijk verband bestaat kun je onderzoeken met behulp van een puntenwolk of spreidingsdiagram. Daarin zet je de éne variabele - in dit geval de tijd halverwege het parcours - op de horizontale as en de andere - hier de eindtijd - op de verticale as. Merk op dat beide variabelen in decimalen zijn omgerekend.



Figuur 4.3

Je kunt Excel in het spreidingsdiagram een zogenaamde trendlijn laten tekenen. Die trendlijn beschrijft de samenhang tussen beide variabelen.

Hier is y de eindtijd en x de halverwege tijd.

De formule van de trendlijn wordt dan $y = 1,9105x + 0,4902$.

Dit zou betekenen dat iemand die na 2,5 uur halverwege is, een eindtijd zou moeten halen van $1,9105 \cdot 2 + 0,4902 = 4,3112$ uur.

Maar hoe betrouwbaar is dit verband? De punten in het diagram liggen echt niet allemaal op de rechte lijn.

Daarom staat in de figuur ook $R^2 = 0,7453$.

Dit getal is het kwadraat van de correlatiecoëfficiënt R . En R is een maat voor de kwaliteit van de samenhang.

Als $R = 0$ is er geen samenhang, een vrijwel ronde puntenwolk en er is geen trendlijn te maken.

Als $R = 1$ is er een perfecte correlatie, alle punten liggen op één lijn met een positieve helling.

Als $R = -1$ is er ook een perfecte correlatie, alle punten liggen op één lijn met een negatieve helling.

Hier is $R \approx 0,8633$. En dat is veel dichterbij 1 dan bij 0. De correlatie er daarom redelijk en de trendlijn geeft redelijk goed het verloop van de puntenwolk weer.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe wordt onderzocht of er een verband bestaat tussen de tijd die halverwege het parcours wordt gemeten en de eindtijd van de Chicago Marathon in 2016.

- Maak zelf zo'n puntenwolk. Het omrekenen van de tijd in uu:mm:ss naar decimalen gaat met de formule $=([celnummer]-INTEGER([celnummer]))*24$.
- Zet vervolgens de trendlijn in je figuur, evenals de correlatiecoëfficiënt R .
- Welke betekenis hebben de stippen op de verticale as?

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** het spreidingsdiagram bij de Chicago Marathon in 2016.

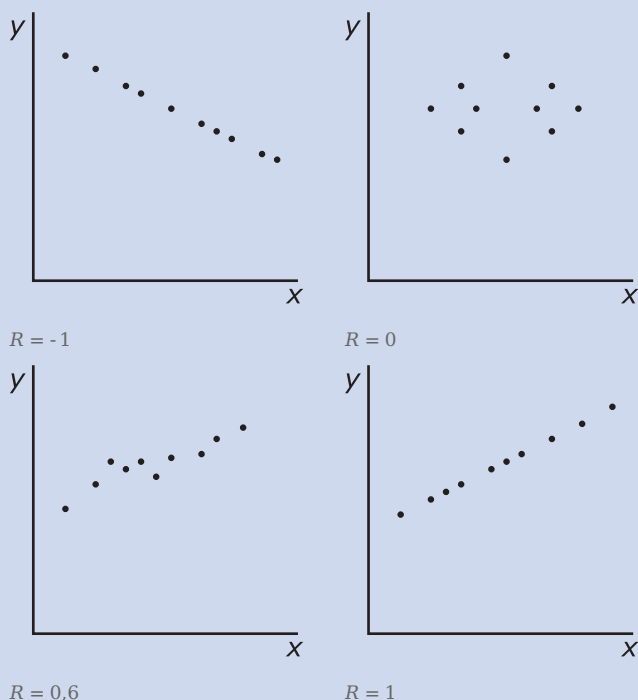
- Ga na, dat het punt $(\bar{x}, \bar{y})$ op de trendlijn ligt.
- Uit de waarde voor R blijkt een redelijk goed statistisch verband tussen beide variabelen. Licht dit toe en leg ook uit waarom het alleen een statistisch verband is en geen oorzakelijk verband.
- Maak nu zelf een puntenwolk met een trendlijn en met R^2 voor een deelgroep van deelnemers. Neem bijvoorbeeld de vrouwen, of de mannen, of de vrouwen van 25 - 29 jaar, of nog iets anders.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij twee statistische (meestal verschillende) variabelen kan naar een **statistisch verband** worden gezocht. Om dit verband zichtbaar te maken wordt een **puntenwolk** of (andere naam) **spreidingsdiagram** gebruikt.

Puntenwolken kunnen verschillende vormen hebben. Bekijk de afbeeldingen.



Figuur 4.4

Als de punten van de puntenwolk ongeveer op een rechte (of kromme) lijn liggen, is er een statistisch verband. De **correlatiecoëfficiënt** R bepaalt in hoeverre dit het geval is. In een spreidingsdiagram met statistische samenhang kan met een **trendlijn** de (lineaire) samenhang worden weergegeven. Er geldt:

- Als $R = 0$ is er geen samenhang, een vrijwel ronde puntenwolk en er is geen trendlijn te maken.
- Als $R = 1$ is er een perfecte samenhang, alle punten liggen op een lijn met een positieve helling.

- Als $R = -1$ is er een perfecte samenhang, alle punten liggen op een lijn met een negatieve helling.
- Als $0,5 \leq R < 0,7$ of $-0,7 < R \leq -0,5$ is er een middelmatige correlatie.
- Als $0,7 \leq R < 0,9$ of $-0,9 < R \leq -0,7$ is er een hoge correlatie.
- Als $0,9 \leq R < 1,0$ of $-1,0 < R \leq -0,9$ is er een zeer hoge correlatie.
- In alle andere gevallen is de correlatie mager en is er geen trendlijn te maken.

Alleen als het veranderen van een van de variabelen de oorzaak ervan is dat de andere variabele verandert, is er een **oorzakelijk verband**.

Voorbeeld 1

Je doet onderzoek naar bijvoorbeeld de examenresultaten van je eigen school. De gegevens betreffende de examenresultaten bevatten per individu het geslacht, het profiel, de gevolgde vakken en de eindcijfers SE en CE1.

Je onderzoeksvraag is nu "Is er een verband tussen het SE-cijfer en het CE1-cijfer?"

Hoe ga je die vraag nu beantwoorden met de examenresultaten die je van je eigen school hebt verzameld? Of, als je nog niets hebt, gebruik bijvoorbeeld deze [resultaten van het VWO op CE1 in 2013](#).

Antwoord

Natuurlijk kies je één of meer vakken om afzonderlijk te bekijken, misschien doe je dit wel voor alle vakken.

Neem bijvoorbeeld het vak natuurkunde en maak een puntenwolk (spreidingsdiagram) van de SE-cijfers tegen de CE1-cijfers.

Zorg er voor dat in je diagram zowel de vergelijking van de trendlijn als (het kwadraat van) de correlatiecoëfficiënt R komen te staan.

Trek vervolgens een conclusie gebaseerd op de vuistregels in de [Theorie](#).

Opgave 3

Bekijk [Voorbeeld 1](#).

- Gebruik de dataset die je daar vindt of je eigen dataset en maak de puntenwolk.
- Voeg de trendlijn met bijbehorende formule en R^2 toe.
- Welke conclusie trek je? Welk cijfer verwacht je als je op het SE een 6,5 staat?
- Is hier sprake van een statistisch verband of een oorzakelijk verband? En is dat voor alle vakken zo?

Opgave 4

Je kunt ook kijken of er verband is tussen de CE1-cijfers van twee verschillende vakken, bijvoorbeeld Frans en wiskunde A, of wiskunde B en natuurkunde.

- Kies zo'n combinatie van twee vakken uit en voer het onderzoek naar een verband tussen beide uit.
- Waarom zal hier waarschijnlijk sprake zijn van een statistisch verband? Of zijn er ook combinaties van vakken te bedenken waarbij sprake kan zijn van een oorzakelijk verband?

Voorbeeld 2

Bekijk het bestand [TK-Verkiezingen-NL-2012](#).

Je ziet hier een kruistabel waarin de variabelen 'Links_rechts_zelfplaatsing' en 'Conservatief_progressief_zelfplaatsing' zijn weergegeven.

Cons_prog_zelfplaatsing: 1 = Conservatief, 10 = Progressief		Links_rechts_zelfplaatsing: 1 = Links, 10 = Rechts										Eindtotaal
Aantal van Conservatief_progressief_zelfplaatsing		Links_rechts_zelfplaatsing										
Rijlabels	Colomn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	4	1	1			1			4	2	6	19
2	1	2	1	1	1	1			9	9	2	27
3	3			11	4	4	2	14	12	3		53
4	2	1	9	12	12	19	27	20	6			108
5	5	4	17	23	50	29	34	28	7	4		201
6	8	6	20	36	29	33	40	28	4	4		208
7	8	16	62	81	38	35	70	43	6	5		364
8	22	24	94	75	48	35	33	30	7	1		369
9	5	13	28	26	12	6	7	2	3	1		103
10	32	12	16	12	10	6	4	2		4		98
Eindtotaal		90	79	259	270	205	166	229	178	47	27	1550

Figuur 4.5

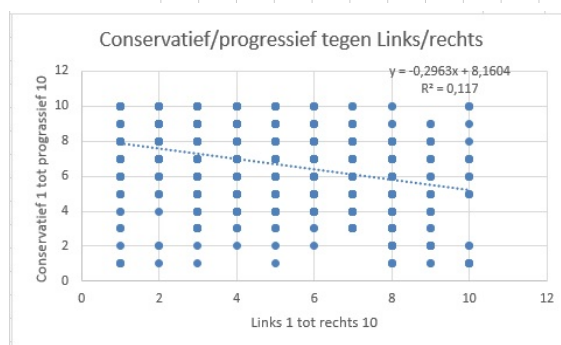
Dit zijn twee kwalitatieve variabelen die echter wel in getallen zijn uitgedrukt. Daarom kun je beide variabelen ook in een puntenwolk tegen elkaar uitzetten.

Wat gaat er dan fout?

Antwoord

Je krijgt wel een plaatje met punten, maar geen inzicht hoeveel mensen er bij elk punt horen. Dit komt vooral omdat het aantal mogelijke waarden klein is (1 t/m 10) en de steekproef behoorlijk groot (1550 mensen).

In de kruistabel zie je bijvoorbeeld dat de combinatie (7,4) wel 81 keer voorkomt en de combinatie (2,4) maar 1 keer. De gegeven trendlijn en correlatiecoëfficiënt zijn echter wel gebaseerd op alle combinaties, ook al zie je die niet terug in je puntenwolk.



Figuur 4.6

Opgave 5

Bekijk in [Voorbeeld 2](#) de vergelijking van 'Links_rechts_zelfplaatsing' en 'Conservatief_progressief_zelfplaatsing'.

- Waarom geeft de kruistabel dit beter weer dan het spreidingsdiagram?
- Laat zien dat je een correlatie krijgt die nogal klein is. Is dat in overeenstemming met je kruistabel?

- a**
 - als-dan-redenering 29
- b**
 - bewering 20
- c**
 - causaal verband 89
 - conclusie 9
 - conjunctie 20
 - contradictie 50
 - correct 9
 - correlatiecoëfficiënt 88
- d**
 - definitie 9
 - disjunctie 20
- h**
 - hieruit-volgt-conclusie 37
- i**
 - implicatie 29
- k**
 - kwalitatieve variabelen verge-
lijken 82
 - kwantitatieve variabelen ver-
gelijken 82
 - kwalitatieve variabelen 75
 - kwantitatieve variabelen 74
- l**
 - logisch gelijkwaardig 20
 - logische redenering, redene-
ring 9
 - logische symbolen 29
- m**
 - modus ponens 37
 - modus tollens 37
- n**
 - negatie 20
 - nodige voorwaarde 29
- o**
 - ontkenning 20
 - onvolledige redenering 9
- p**
 - paradox 50
 - puntenwolk 88
- r**
 - redeneerstap 9
- s**
 - spreidingsdiagram 88
 - statistisch onderzoek 68
 - statistische onderzoekscyclus
68
 - statistische samenhang 88
- t**
 - tautologie 50
 - tegenvoorbeeld 38
 - trendlijn 88
- u**
 - uitgangspunt 9
- v**
 - venndiagram 20
 - voldoende voorwaarde 29
 - voorbeeld 38
- w**
 - waarheidstabel 20
 - waarheidswaarde 20

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

13. Logisch redeneren

14. Statistisch onderzoek



www.math4all.nl

