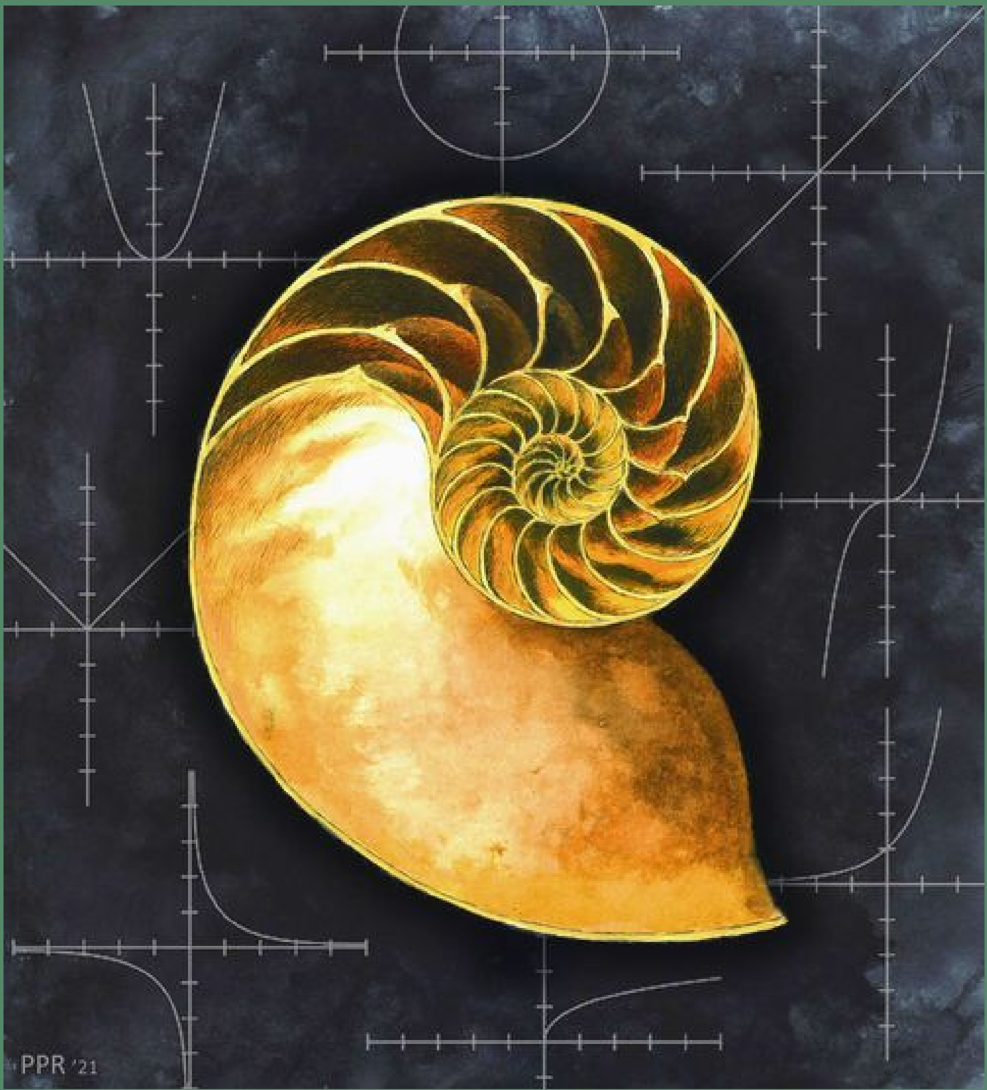
Wiskunde B

6 VWO

Katern 2



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Parameterkrommen

1.1 Periodieke beweging

Inleiding

De ‘Polyp’ is een echte kermisattractie.
Je zit dan in een bakje dat om een bepaald punt draait. Dat punt draait op zijn beurt ook weer om het centrum van de machine. De beweging die je dan maakt herhaalt zich steeds, maar is toch niet gewoon een saai rondje...
Je doorloopt een kromme waarbij je soms heel snel gaat en dan weer heel langzaam.
Dat veroorzaakt de sensatie en het gegil...

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip periodieke beweging, met name de eenparige cirkelbeweging;
- periodieke bewegingen beschrijven met functies van de tijd t;
- werken met parameterkrommen.

Voorkennis

- werken met sinusoïden en vergelijkingen van de vorm $\sin(x) = a$ of $\cos(x) = a$ oplossen;
- differentiëren met alle basisregels van alle soorten functies en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

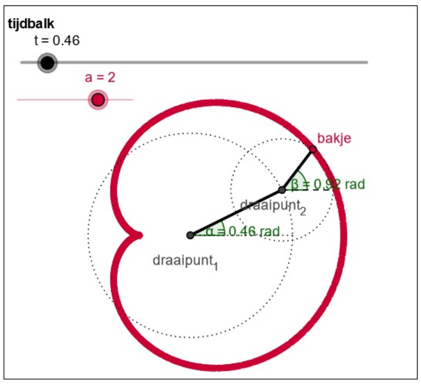
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

De ‘Polyp’ is een echte kermisattractie.
Deze applet laat de beweging van het bakje zien. Beweeg de tijd door op de punt van de zwarte schuifbalk te klikken en dan de pijltjestoetsen te gebruiken. Je kunt ook de snelheid waarmee het bakje om het tweede draaipunt draait veranderen.

Kun je de kromme die je doorloopt met een formule beschrijven?



Figuur 1.2

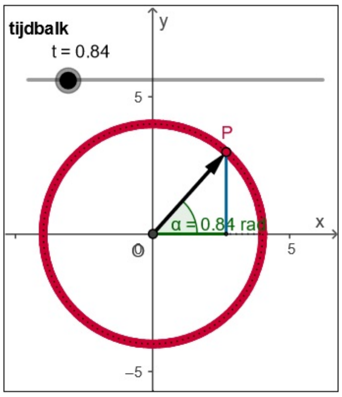
Uitleg

Bekijk de applet

De beweging van een punt P met de tijd t kun je beschrijven door elk van de coördinaten een functie van t te maken: $P(x,y) = (x(t),y(t))$.
Een goed voorbeeld is de beweging van P met een constante snelheid over een cirkel, de eenparige cirkelbeweging. Heeft de cirkel een straal van 4 cm en wordt in 2π seconden de cirkel één keer compleet doorlopen, dan geldt: $P(x,y) = (4\cos(t), 4\sin(t))$.

Deze eenparige cirkelbeweging herhaalt zich eindeloos als je de tijd laat doorlopen. Dit is het prototype van een periodieke beweging. De pijl die wijst vanuit de oorsprong O van het assenstelsel naar punt P is plaatsvector $\overrightarrow{OP}$. Het aantal radialen per seconde dat plaatsvector $\overrightarrow{OP}$ aflegt heet de hoeksnelheid van eenparige cirkelbeweging. Hier is de hoeksnelheid 1 rad/s, want in 2π seconden wordt 2π radialen afgelegd. De snelheid waarmee punt P beweegt is echter vier keer zo groot want in 2π seconden wordt een afstand van $2\pi \cdot 4$ cm afgelegd.

Punt P kan de cirkel ook in bijvoorbeeld 10 seconden doorlopen. In dat geval moet de periode van de twee sinusoïden die de baan beschrijven worden aangepast. De plaatsvector wordt
$(x,y) = \left(4\cos\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right), 4\sin\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right)\right)$.
Ook kunnen de straal van de cirkel en het middelpunt anders zijn.



Figuur 1.3

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Leg uit waarom $P(x,y) = (4\cos(t), 4\sin(t))$.

b Waar zit P als $t = \pi$?

c Leg uit wat het verschil is tussen de hoeksnelheid van punt P en de baansnelheid van ditzelfde punt.

d Hoe groot zijn de hoeksnelheid en de baansnelheid van P als dit punt de cirkel in 10 s doorloopt?

Opgave 2

P doorloopt met een vaste snelheid elke 15 seconden een cirkel met straal 6 cm en middelpunt $M(0,0)$.

a Beschrijf de beweging van punt P op dezelfde manier als in de **Uitleg**.

b Hoeveel bedragen nu de hoeksnelheid en de baansnelheid van punt P

Opgave 3

P doorloopt met een vaste snelheid elke 15 seconden een cirkel met straal 6 cm en middelpunt $M(1,2)$.

a Beschrijf de beweging van punt P op dezelfde manier als in de **Uitleg**.

De hoeksnelheid is de snelheid in radialen per seconden waarmee een vector zijn vaste beginpunt draait.

b Waarom is de hoeksnelheid van $\overrightarrow{OP}$ nu niet een constante?

c Is de baansnelheid wel een constante?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

In het algemeen kan de **eenparige cirkelbeweging** van een punt P worden beschreven door:

$P(x,y) = \left(a + r\cos\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right), b + r\sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right)\right)$

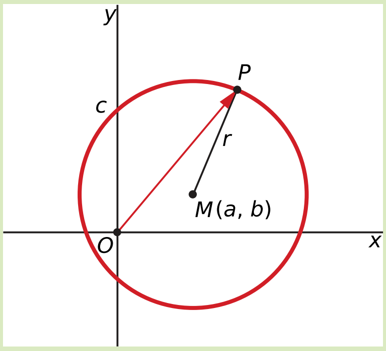
Hierin stelt de **parameter** t de tijd in seconden voor en zijn x en y de coördinaten van punt P. Het middelpunt van de cirkel die P doorloopt is $M(a,b)$. De **plaatsvector** $\overrightarrow{OP}$ begint altijd in de oorsprong van het assenstelsel.

Deze beschrijving van een bewegend punt noem je een **parametervoorstelling** van de **kromme** die het punt doorloopt. In dit geval is sprake van een kromme die herhaaldelijk wordt doorlopen, dus van een **periodieke beweging**.

Bij de eenparige cirkelbeweging is de **hoeksnelheid** het aantal radialen dat de **voerstraal** $\overrightarrow{MP}$ per seconde doorloopt. Hier dus $\frac{2\pi}{p}$ rad/s.

De snelheid waarmee het punt P zelf beweegt is r keer zo groot.

De eenparige cirkelbeweging is een voorbeeld van een **parameterkromme**, een kromme die je kunt opvatten als de baan die een bewegend punt P doorloopt en die wordt beschreven door $P(x,y) = (x(t), y(t))$. Dergelijke krommen kun je ook op de GR tekenen.



Figuur 1.4

Voorbeeld 1

Een parameterkromme is gegeven door

$(x,y) = \left(3 + 5\cos\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right), 2 + 5\sin\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right)\right)$.

Breng deze kromme in beeld op de grafische rekenmachine.

Leg uit waarom dit een eenparige cirkelbeweging betreft en bereken de snelheid waarmee een punt P van deze kromme beweegt.

Antwoord

In het **Practicum** zie je hoe je met de grafische rekenmachine parameterkrommen in beeld kunt brengen. Hiernaast zie je de kromme.

Omdat $x(t)$ een sinusoïde is met evenwichtsstand $x = 3$ en amplitude 5 geldt: $-2 \leq x \leq 8$.

Omdat $y(t)$ een sinusoïde is met evenwichtsstand $y = 2$ en amplitude 5 geldt: $-3 \leq y \leq 7$.

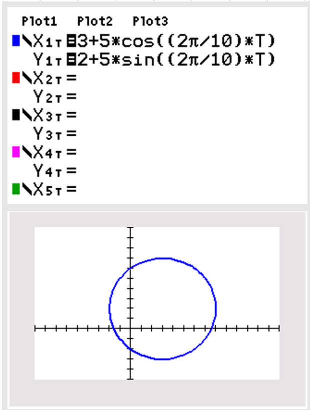
Dit bepaalt je vensterinstellingen. Je lijkt een cirkel met middelpunt $M(3,2)$ en straal 5 te krijgen.

De periode van beide functies is 10, dus de cirkel wordt in 10 seconden doorlopen.

De hoeksnelheid van $\overrightarrow{MP}$ is $\frac{2\pi}{10} = 0{,}2\pi$ rad/s.

De snelheid waarmee P beweegt is 5 keer zo groot, dus π eenheden/s.

De kromme is inderdaad een cirkel met middelpunt $M(3,2)$ en straal 5 als de afstand van elk punt P op de cirkel tot M gelijk is aan 5. Met de stelling van Pythagoras toon je aan dat dit voor elke $P(x,y)$ klopt.



Figuur 1.5

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Gegeven is nu een parameterkromme door $P(x(t),y(t)) = \left(1 + 6\cos\left(\frac{2\pi}{15} \cdot t\right), 2 + 6\sin\left(\frac{2\pi}{15} \cdot t\right)\right)$.

a Breng deze parameterkromme op je grafische rekenmachine volledig in beeld. Welk interval moet je dan voor de parameter t kiezen?

b Waarom krijg je dezelfde kromme als je voor t waarden kiest vanaf -15 tot 40?

c Wat krijg je voor figuur als je voor t waarden kiest vanaf 0 tot 8?

d Je kunt ook de stapgrootte van t instellen. Wat gebeurt er als je die op 1 instelt, te beginnen bij $t = 0$?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**. Er wordt beweerd dat P over een cirkel met middelpunt $M(3,2)$ loopt.

a Bewijs dit met behulp van de stelling van Pythagoras. Aan welke vergelijking in x en y voldoet elk punt van deze kromme?

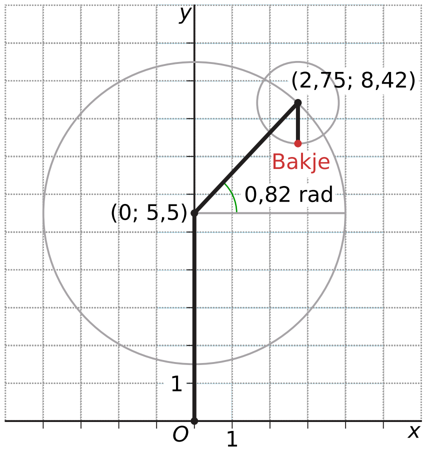
b Maak op je rekenmachine de parameterkromme waarvoor geldt $(x,y) = \left(3 + 5\sin\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right), 2 + 5\cos\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right)\right)$.

Krijg je dezelfde kromme als in het voorbeeld of zijn er verschillen? En zo ja, wat zijn die verschillen?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Hier zie je een reuzenrad op de kermis. Het bakje doorloopt een eenparige cirkelbeweging en draait in 30 seconden helemaal rond. Stel er een mogelijke parametervoorstelling voor op. Ga daarbij uit van het gegeven assenstelsel, alle afmetingen zijn in meter.



Figuur 1.6

Antwoord

Het bakje doorloopt in 30 seconden een cirkel met straal 4 m en middelpunt $M(0; 5{,}5)$. Zowel $x(t)$ als $y(t)$ zijn daarom sinusoïden met een amplitude van 4 en een periode van 30 seconden. Voor $x(t)$ is de evenwichtsstand $x = 0$, voor $y(t)$ is de evenwichtsstand $y = 5{,}5$.

Een mogelijke parametervoorstelling is daarom:

$(x, y) = \left(4\cos\left(\frac{2\pi}{30}\cdot t\right); 5{,}5 + 4\sin\left(\frac{2\pi}{30}\cdot t\right)\right)$

In dat geval zit het bakje op $t = 0$ in het punt $(4; 5{,}5)$ en dat klopt ook met de figuur.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** moet je een parametervoorstelling opstellen voor een bakje van een reuzenrad.

a Probeer eerst zelf deze parametervoorstelling op te stellen. Loop pas daarna het voorbeeld door.

b Teken de kromme met je grafische rekenmachine.

c Op welke tijdstippen is het bakje $7{,}5$ m boven de grond? Bepaal je antwoord zowel met je GR als algebraïsch.

d Met hoeveel km/h beweegt het bakje?

e Laat zien, dat de gegeven parametervoorstelling inderdaad punten P oplevert die op een vaste afstand van het middelpunt M liggen.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**. De parametervoorstelling is zo gekozen dat op $t = 0$ het bakje in $P(4; 5{,}5)$ zit.

a Laat zien, dat de parametervoorstelling

$(x, y) = \left(4\sin\left(\frac{2\pi}{30}\cdot t\right); 5{,}5 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{30}\cdot t\right)\right)$ dezelfde cirkel oplevert.

Waar zit het bakje nu als $t = 0$?

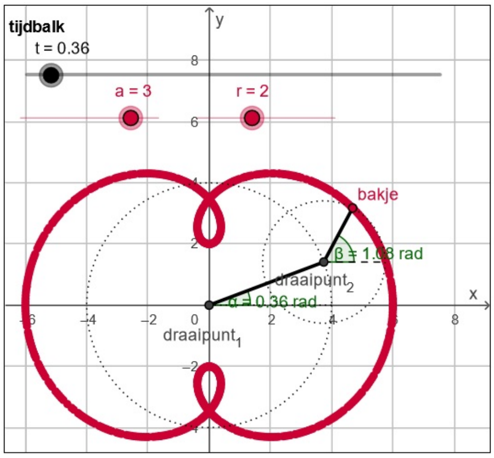
De meest logische plek voor het bakje op $t = 0$ is het punt $(0; 1{,}5)$, het instappunt.

b Pas de parametervoorstelling zo aan, dat dit het geval is.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

In de applet zie je de beweging van de ‘Polyp’ op de kermis. Stel in $r = 2$ en $a = 3$. Dan zijn de stralen van de cirkels 4 m en 2 m en is de hoeksnelheid waarmee de kleine cirkel doorlopen wordt 3 keer die waarmee de grote cirkel doorlopen wordt. Stel een mogelijke parametervoorstelling voor de kromme op.



Figuur 1.7

Antwoord

Kies het assenstelsel zoals je in de figuur ziet. Dan is draaihoek α gelijk aan t en draaihoek β gelijk aan $3t$.

Voor het tweede draaipunt geldt:
$(x(t), y(t)) = (4\cos(t), 4\sin(t))$.

Voor het bakje geldt:
$(x(t), y(t)) = (4\cos(t) + 2\cos(3t), 4\sin(t) + 2\sin(3t))$.

Dit is meteen de parametervoorstelling van de kromme die het bakje doorloopt. Met je grafische rekenmachine kun je deze kromme ook in beeld brengen.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt de ‘Polyp’ nagebootst. Neem weer $a = 3$ en $b = 2$ en bekijk de kromme die ontstaat als je de tijd t ‘laat lopen’.

a Bekijk de parametervoorstelling van deze kromme. Maak de kromme ook op je grafische rekenmachine.

b In welk punt zit het bakje als $t = \frac{1}{2}\pi$? Laat zien hoe dit uit de parametervoorstelling volgt.

c Op welke zes tijdstippen gedurende de eerste complete beweging passeert het bakje de y-as? Gebruik je GR.

d De snelheid waarmee het bakje beweegt is nu niet overal hetzelfde, dat maakt het zitten in zo'n kermisattractie nu juist leuk. Waar is je baansnelheid het hoogst?

Opgave 9

Gebruik de applet van **Voorbeeld 3**. Stel nu in $a = 2$ en $r = 2$ en bekijk de kromme die ontstaat.

a Welke parametervoorstelling hoort hier bij?

b Breng de kromme in beeld op je grafische rekenmachine. Bepaal de punten waarin de kromme de y-as snijdt.

c Laat zien, hoe je deze punten ook algebraïsch kunt vinden.

Verander nu de instelling voor r in $r = 3$.

d Wat verandert er?

Experimenteer met de applet als $a = 2$ door voor r verschillende waarden te kiezen.

e Bij welke r gaat de kromme door de oorsprong?

Opgave 10

Bekijk weer de applet in **Voorbeeld 3**. Stel nu in $a = -3$ en $r = 2$ en bekijk de kromme die ontstaat.

a Welke parametervoorstelling hoort hier bij?

b Breng deze kromme in beeld op je grafische rekenmachine en controleer daarmee je antwoord bij a.

c Op welke tijdstippen zit het bakje het verst van het centrale draaipunt O verwijderd? Laat zien, dat het bakje dan 6 m van O af zit. Hoe kun je dit vanuit de parametervoorstelling beredeneren?

d Experimenteer nog met andere waarden van zowel a als r. Probeer vooraf de aantallen lussen te beredeneren. En ook of het bakje weer door O zal gaan.

Verwerken

Opgave 11

De plaats $P(x,y)$ in een assenstelsel van een steentje dat aan een strak gespannen touw rondslingert wordt gegeven door $x(t) = 10+2\sin(4t)$ en $y(t) = 5+2\cos(4t)$. Hierin is t in seconden en zijn x en y in m.

a Breng de baan van het steentje in beeld op je grafische rekenmachine. Laat het steentje twee maal ronddraaien. Hoe moet je t dan instellen?

b Waar in het assenstelsel staat de persoon die het steentje laat ronddraaien?

c Hoe lang is het touw?

d Waarom draait het steentje volgens deze formule eenparig rond?

e Met welke snelheid draait het steentje rond? Linksom of rechtsom?

f De snelheid waarmee het steentje ronddraait lijkt constant te zijn. Toch verandert er iets aan de snelheid. Wat?

g Kun je deze baan ook beschrijven door middel van een vergelijking in x en y? Zo ja, welke vergelijking is dat dan?

Opgave 12

Een punt P beweegt in een Oxy-assenstelsel. De plaats van P wordt gegeven door $P(x,y) = (8\cos(t), 4\sin(t))$ met t in seconden.

a Breng de baan van punt P in beeld op je grafische rekenmachine.

b Waaraan zie je dat dit geen eenparige cirkelbeweging betreft?

c De hoeksnelheid van $\overrightarrow{OP}$ is wel constant, maar de baansnelheid van P niet. Licht dit toe.

d Bereken algebraïsch de punten waarvoor $y = 1$. Geef de x-coördinaten in twee decimalen nauwkeurig.

e Bereken algebraïsch de punten op de kromme die precies 6 cm van O af liggen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 13

Een punt P doorloopt eenparig een cirkel met een straal van 5 cm om middelpunt $M(3,4)$. De hoeksnelheid van MP is 2 rad/s.

a Welke parametervoorstelling kun je voor deze beweging opstellen? Schrijf minstens twee mogelijkheden op.

b De baan die het punt P doorloopt kun je ook beschrijven met een vergelijking in x en y. Welke vergelijking is dat?

Opgave 14

Je ziet hier telkens een periodieke beweging beschreven door een parametervoorstelling. In alle gevallen loopt t van 0 tot 2π. Geef elke keer aan of de beweging een eenparige cirkelbeweging is, of de bewegingsrichting positief of negatief is en welk punt het startpunt van de beweging is.

a $P_1(x,y) = (4 + 4\cos(t), 6 + 4\sin(t))$

b $P_2(x,y) = (4\cos(t), 2\sin(t))$

c $P_3(x,y) = (4\cos(t), 4\sin(2t))$

d $P_4(x,y) = (6 - 4\sin(t), 6 - 4\cos(t))$

Opgave 15

Gegeven is met t in $[0,2\pi]$ de parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \cos\left(t^2\right) \\ y(t) = \sin\left(t^2\right) \end{cases}$.

a Breng de kromme in beeld op je grafische rekenmachine. Neem voor t een stapgrootte van $0{,}1$. Is de figuur die je krijgt eigenlijk wel correct?

b Is hier sprake van een eenparige cirkelbeweging? Licht je antwoord toe.

c Licht toe waarom alle punten van deze kromme toch op een cirkel liggen. Welke straal heeft deze cirkel?

Toepassen

Opgave 16: Banen van hemellichamen

Johannes Kepler (1571—1630) was een Duits wiskundige en astronoom die aantoonde dat de banen van hemellichamen elliptisch zijn. Hiertoe ontwikkelde hij een wiskundig model om deze banen te beschrijven.

Een (heel erg versimpeld) model van een elliptische baan van een planeet P wordt gegeven door:
$P(x(t), y(t)) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$
Hierin zijn a en b positieve constanten. Parameter t wordt de ‘excentrieke anomalie’ genoemd, en loopt van 0 tot 2π.

a Wat gebeurt er als $a = b$?

b Toon aan dat de parameterisering van de baan van P voldoet aan de standaardvergelijking voor een ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

c Stel $a \neq b$. Is de hoek van $\overrightarrow{OP}$ gelijk aan t? Toon met een schets aan waarom wel of niet.

Opgave 17: The London Eye

'The London Eye' is een reuzenrad met een diameter van 135 m en er zitten 32 gondels aan waarin je als bezoeker de rondrit kunt meemaken. Je stapt op de begane grond in. In de loop van 30 minuten draai je één keer rond. Laat $P(x,y)$ het draaipunt van de gondel zijn waar je instapt op $t=0$. Neem de tijd t in minuten en het assenstelsel zo, dat de x-as de begane grond is en de y-as een lijn loodrecht op de x-as en door het draaipunt M van dit reuzenrad.

Figuur 1.8

a Waarom is hier sprake van een eenparige cirkelbeweging?

b Stel een parametervoorstelling op van de cirkel die P doorloopt.

c Met welke hoeksnelheid draait $\overrightarrow{MP}$ en welke bewegingssnelheid in km/h heeft P?

d Bereken algebraïsch in één decimaal nauwkeurig hoeveel minuten per ronde punt P boven de 120 m zit.

Testen

Opgave 18

Punt P beweegt in het Oxy-vlak. Voor de baan die P doorloopt geldt $P(x,y)=(1+2\sin(\pi t),4+2\cos(\pi t))$ met t in seconden en x en y in m.

a In welk punt begint de beweging op $t=0$?

b Breng de volledige baan die P één keer aflegt in beeld op je GR. Welke waarden moet P daarvoor aannemen?

c Met welke hoeksnelheid draait $\overrightarrow{OP}$ en welke bewegingssnelheid heeft P?

d Leg uit waarom de snelheidsvector toch niet constant is.

e Bereken algebraïsch de punten van de baan van P die op de y-as liggen.

f Welke punten van de kromme liggen op de lijn met vergelijking $y=2x$? Bereken hun coördinaten exact.

Practicum

Met je grafische rekenmachine kun je heel goed **krommen tekenen**. In dit practicum kun je nalezen hoe dat gaat.

- **Parameterkrommen met de TI84**
- **Parameterkrommen met de TInspire**
- **Parameterkrommen met de Casio fx-CG50**
- **Parameterkrommen met de HPprime**
- **Parameterkrommen met de NumWorks**

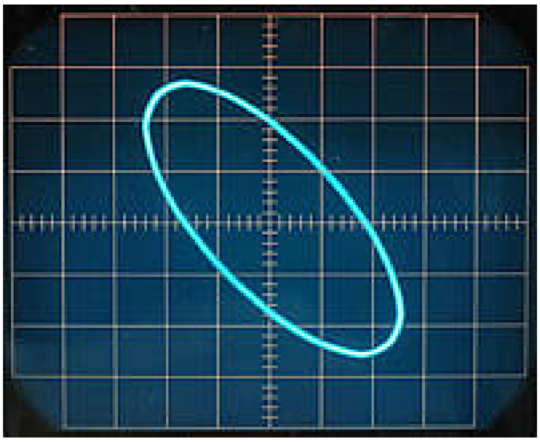
Wil je een cirkel ook echt als cirkel zien, dan moet je op beide assen dezelfde eenheid gebruiken. Dat regel je via de instellingen van deze rekenmachines.

Het is meestal mooier om met **GeoGebra** te werken als je krommen in beeld wilt brengen. Op de Math4all website kun je met GeoGebra leren werken via Extra > Practica > GeoGebra.
Een **kromme** voer je in door in de invoerbalk eerst t=0 te typen, je krijgt dan een variabele t die je (klikken met de rechter muisknop en 'Object tonen' kiezen) als schuifbalk kunt laten zien.
Vervolgens typ je op de invoerbalk bijvoorbeeld P=(sin(2*t),sin(t)) en je krijgt een punt P dat gaat bewegen zodra je t verschuift. De gewenste waarden voor t kun je instellen (rechter muisknop, 'Eigenschappen').
Wil je de kromme meteen in zijn geheel zien, dan maak je GEEN schuifbalk voor t, maar voer je in: Kromme[sin(2*t),sin(t),t,0,2*pi]. In plaats van t kun je ook een andere letter kiezen, als hij maar niet bij een schuifbalk hoort.

1.2 Lissajousfiguren

Inleiding

De Franse wiskundige **Jules Lissajous** (1822—1880) beschreef de banen van punten die zowel in de x-richting als in de y-richting in harmonische trilling worden gebracht. Deze eenvoudige ellips (afkomstig van de practicum en demonstratiedienst van de K.U. Leuven) is er een voorbeeld van. Met Lissajousfiguren kun je heel goed rekenwerk bij krommen oefenen.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met Lissajousfiguren als voorbeeld voor periodieke beweging;
- van parameterkrommen de snijpunten met de assen en de maximale waarden voor x en y berekenen.

Voorkennis

- krommen gegeven door een parametervoorstelling in beeld brengen op je grafische rekenmachine;
- werken met sinusoïden en vergelijkingen met sinus en cosinus.

Verkennen

Opgave V1

Met deze applet kun je Lissajousfiguren met een parametervoorstelling van de vorm $(x,y) = (2\cos(a \cdot t), 2\sin(b \cdot t))$ maken door de tijd t vooruit te bewegen. Experimenteer maar even. a en b kun je instellen (alleen gehele getallen).

Bekijk de applet

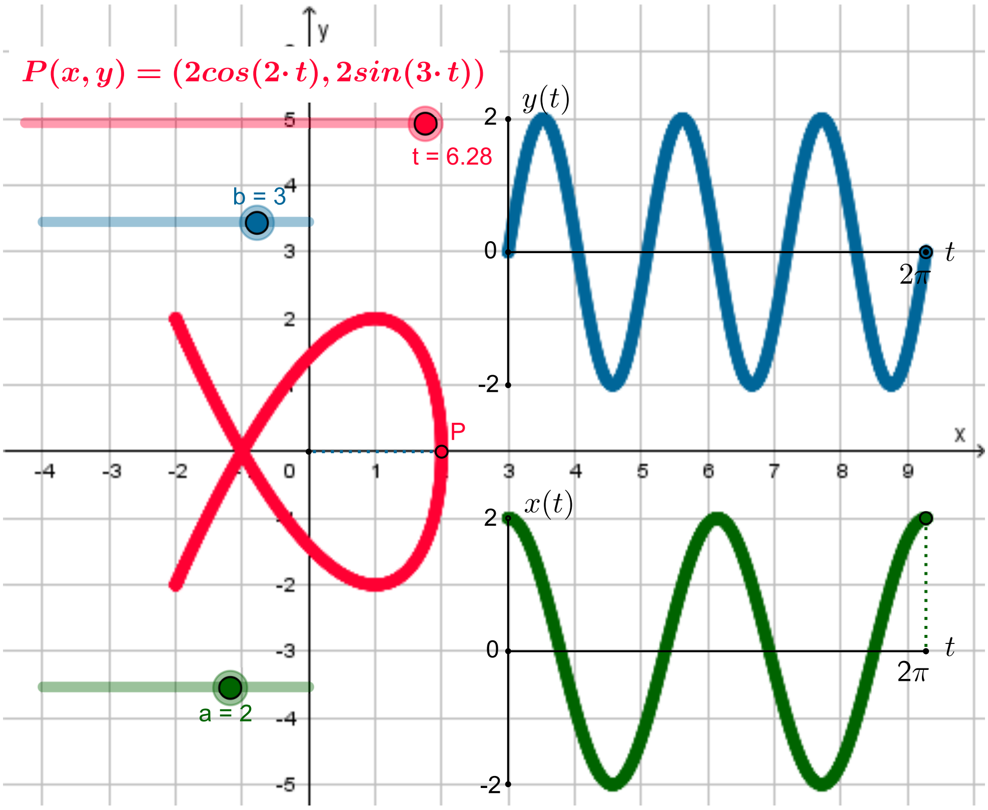
a Hoe maak je een cirkel?

Een uiterste punt of keerpunt is een punt waarvoor $x(t)$ en/of $y(t)$ maximaal of minimaal is.

b Hoe hangt het aantal keerpunten af van a en b?

Uitleg

Bekijk de applet.



Figuur 2.2

Punt P doorloopt een **Lissajousfiguur** als je t laat lopen van 0 tot 2π. Je ziet dat zowel $x(t)$ als $y(t)$ een sinusoïde is. Dat moet ook want het gaat bij een Lissajousfiguur om een punt dat zowel in de x-richting als in de y-richting in harmonische trilling wordt gebracht.
Je ziet ook $x(t)$ en $y(t)$ afzonderlijk in beeld.

Met $a = 3$ en $b = 1$ zijn er 6 uiterste punten in de x-richting en 2 in de y-richting. In de grafieken van $x(t)$ en $y(t)$ zijn ze ook te herkennen.
De coördinaten van dergelijke punten zijn net als die van de snijpunten met de assen te berekenen vanuit de bekende x-waarde of y-waarde.
Voor de uiterste punten in de x-richting geldt $x(t) = 2$ of $x(t) = -2$. Hieruit kun je bijbehorende t-waarden vinden en die vul je dan weer in $y(t)$ in om de gewenste coördinaten te bepalen.

Opgave 1

Bekijk de applet in de **Uitleg**.

a Stel in $a = 3$ en $b = 1$. Bekijk nu door de tijd t te ‘laten lopen’ de kromme (rood) die ontstaat.

b Hoe kon je vooraf zien dat de kromme binnen het venster $[-2,2] \times [-2,2]$ past?

c Bereken nu alle acht de uiterste punten van deze kromme.

Opgave 2

Werk weer met de applet in de **Uitleg**.

a Stel in $a = -2$ en $b = 3$. Bekijk nu door de tijd t te ‘laten lopen’ de kromme (rood) die ontstaat.

b Waarom past ook deze kromme binnen het venster $[-2,2] \times [-2,2]$?

c Licht toe hoe je uit de afzonderlijke grafieken van $x(t)$ en $y(t)$ het aantal uiterste punten kunt afleiden.

d Bereken nu alle vijf de uiterste punten.

Opgave 3

In de applet in de **Uitleg** kun je ook a en b gelijk maken.

a Hoe ziet de Lissajousfiguur er dan altijd uit?

b Maakt het verschil welke gelijke waarden van a en b je instelt? Zo ja, waarin zit dan dit verschil?

c En wat gebeurt er als $a = -b$?

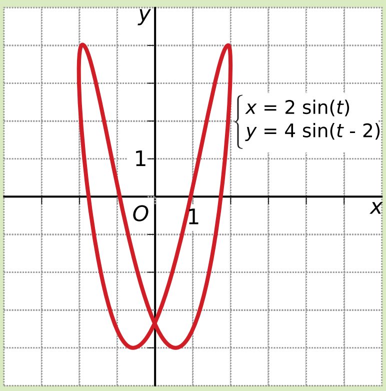
d Neem $a = b = 2$ en leid een verband af tussen x en y.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een parameterkromme in het platte vlak ontstaat doordat een punt $P(x(t), y(t))$ beweegt als de variabele t continu verschillende waarden aanneemt.
Een voorbeeld is deze **Lissajousfiguur** waarbij je t laat lopen van 0 tot 2π om de kromme precies één keer te doorlopen.
Bij een Lissajousfiguur zijn zowel $x(t)$ als $y(t)$ sinusoïden, want zo'n figuur ontstaat als een punt zowel in de x-richting als in de y-richting in harmonische trilling wordt gebracht.



Figuur 2.3

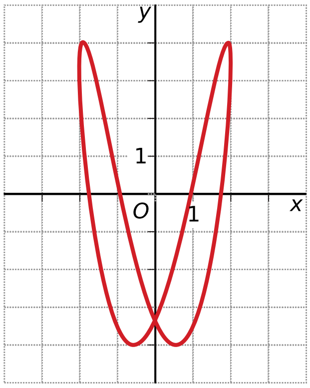
De **uiterste punten** zijn de punten waarin $x(t)$ maximaal of minimaal is, of $y(t)$ maximaal of minimaal is.
De **snijpunten met de x-as** zijn de punten waarin $y(t) = 0$.
De **snijpunten met de y-as** zijn de punten waarin $x(t) = 0$.
Je berekent dergelijke punten door uit te gaan van de bekende x-waarde of y-waarde en dan de daarbij behorende waarden van t te berekenen. Bij elke waarde van t kun je de coördinaten van het gewenste punt eenvoudig vaststellen door invullen in $x(t)$ of $y(t)$.

Vaak kun je door gebruik te maken van goniometrische formules de kromme ook beschrijven door een vergelijking in x en y. Je moet dan de parameter t **elimineren**; zie **Voorbeeld 3**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Hier zie je (als je t laat lopen) de Lissajousfiguur die ook in de **Theorie** is te vinden. Voor deze parameterkromme geldt: $(x(t), y(t)) = (2\sin(t), 4\sin(2t-2))$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.
Bereken de snijpunten met beide assen en de uiterste punten van deze kromme in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 2.4

Antwoord

Snijpunten x-as: $y(t) = 0$ geeft $4\sin(2t-2) = 0$, dus $\sin(2t-2) = 0$.
Hieruit volgt: $2t - 2 = 0 + k \cdot \pi$.
En dus: $t = 1 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.
Op $[0, 2\pi]$ vind je vier waarden voor t die na invullen in $x(t)$ de volgende vier punten opleveren:
$(-1{,}68; 0)$, $(-1{,}08; 0)$, $(1{,}08; 0)$ en $(1{,}68; 0)$.
Op vergelijkbare wijze bereken je het snijpunt met de y-as: $(0; -3{,}64)$.

Voor de uiterste punten bekijk je welke waarden $x(t)$ en $y(t)$ kunnen aannemen. Aan hun amplitudes en evenwichtsstanden zie je dat $-2 \leq x(t) \leq 2$ en $-4 \leq y(t) \leq 4$.
De uiterste punten vindt je daarom door op te lossen $x(t) = -2$ en $x(t) = 2$ en $y(t) = -4$ en $y(t) = 4$. Je vindt zo zes uiterste punten: $(-2; 3{,}64)$, $(2; 3{,}64)$, $(-1{,}95; 4)$, $(1{,}95; 4)$, $(-0{,}43; -4)$ en $(0{,}43; -4)$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je de Lissajousfiguur die ook in de **Theorie** staat.

a Bereken zelf de vier snijpunten met de x-as.

b Bereken ook het snijpunt met de y-as.

c Bereken ook alle zes uiterste punten van deze kromme.

Opgave 5

In het **Practicum** kun je Lissajousfiguren maken.

a Maak de Lissajousfiguur met parametervoorstelling $(x, y) = (\sin(3t), 2\sin(2t))$.

b Bereken de snijpunten met de beide assen van deze kromme.

c Bereken ook alle tien de uiterste punten van deze kromme.

d Experimenteer met de applet. Maak een Lissajousfiguur en beredeneer het aantal uiterste punten en bereken algebraïsch de snijpunten met de assen. Controleer of je antwoorden met de figuur overeen komen.

Voorbeeld 2

Gegeven is de parameterkromme k door $x(t) = 2 + 2\sin(0{,}5t)$ en $y(t) = 3\sin(2t)$.
Waarom is hier sprake van een Lissajousfiguur? Voor welke waarden van t wordt deze kromme precies één keer doorlopen? Hoe kun je het aantal uiterste punten herleiden uit de gegeven parametervoorstelling?

Antwoord

Er ontstaat een Lissajousfiguur omdat zowel $x(t)$ als $y(t)$ sinusoïden zijn. Je ziet dat:

- $x(t)$ een periode van 4π, een amplitude van 2 en een evenwichtsstand $x = 2$ heeft;
- $y(t)$ een periode van π, een amplitude van 3 en een evenwichtsstand $y = 0$ heeft.

Dit betekent dat de kromme binnen een venster met afmetingen $[0{,}4] \times [-3{,}3]$ ligt.
En verder dat hij geheel wordt doorlopen als t loopt vanaf bijvoorbeeld 0 t/m 4π.

Het aantal uiterste punten wordt bepaald door het aantal keren dat $x(t)$ en $y(t)$ voor verschillende waarden van t een maximum of minimum bereiken.
$x(t)$ bereikt 1 keer zijn maximum en 1 keer zijn minimum op $[0{,}4\pi]$ en $y(t)$ bereikt 4 keer zijn maximum en 4 keer zijn minimum op $[0{,}4\pi]$. Door beide functies met de GR te bekijken zie je dat dit op $[0{,}4\pi]$ telkens voor verschillende waarden van t gebeurt. Er zijn daarom 10 uiterste punten.

Opgave 6

Bekijk de vragen in **Voorbeeld 2**.

a Probeer eerst zelf die vragen te beantwoorden.

b Bereken alle uiterste punten in twee decimalen nauwkeurig waar nodig.

Voorbeeld 3

Gegeven is de parameterkromme $(x, y) = (2\sin(t), \sin(3t))$.
Deze Lissajousfiguur is ook te beschrijven door een vergelijking waarin alleen x en y voorkomen. Leid deze vergelijking af.

Antwoord

Uit $x = 2\sin(t)$ volgt: $\sin(t) = \frac{1}{2}x$.

Vervolgens is $y = \sin(3t) = \sin(2t + t) = \sin(2t)\cos(t) + \cos(2t)\sin(t)$.
In deze uitdrukking kun je de verdubbelingsformules stoppen:
$y = 2\sin(t)\cos^2(t) + \left(1 - 2\sin^2(t)\right)\sin(t)$.
Gebruik je nu ook nog dat $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$, dan vind je:
$y = 2\sin(t)\left(1 - \sin^2(t)\right) + \left(1 - 2\sin^2(t)\right)\sin(t)$.

Vervang in deze laatste uitdrukking overal $\sin(t)$ door $\frac{1}{2}x$ en je vindt een vergelijking met alleen x en y: $y = 1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^3$.

Je hebt nu door t te elimineren een vergelijking gekregen in x en y. Omdat deze vergelijking de vorm $y = ...$ heeft is er sprake van een functievoorschrift. Je kunt de kromme ook op die wijze in beeld brengen. Welk domein en bereik moet je functie dan hebben?

Opgave 7

Bekijk de kromme in **Voorbeeld 3**.

a Breng deze kromme in beeld op je grafische rekenmachine.

b Voer zelf het herleiden van de parametervoorstelling tot een vergelijking in x en y uit.

c Breng nu de grafiek van $y = 1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^3$ in beeld. Wat is het verschil met de gegeven kromme?

Opgave 8

Kromme k_1 is gegeven door $\begin{cases} x(t) = 5 + 2t \\ y(t) = 4 - t \end{cases}$.

a Dit is geen Lissajousfiguur, waarom niet?

b Toon aan dat deze kromme een rechte lijn is door hem in de vorm $y = ax + b$ te schrijven.

Kromme k_2 is gegeven door $x(t) = 5 + 2\sin(t)$ en $y(t) = 4 - \sin(t)$

c Deze kromme is wel een Lissajousfiguur. Toch kun je hierbij hetzelfde verband tussen x en y vinden als bij b. Laat dit zien.

d Beide krommen zijn niet hetzelfde. Licht dit toe.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de kromme k door $(x,y) = \left(5\sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right), 4 + 2\sin(\pi t)\right)$.

a Is k een Lissajousfiguur?

b Breng k in beeld op je grafische rekenmachine.

c Je doorloopt deze kromme vanaf $t = 0$. Voor welke waarde van t heb je de gehele kromme precies één keer doorlopen?

d Bereken algebraïsch de uiterste punten van k.

e Bij deze kromme past ook de vergelijking $25(y-4)^2 = 16x^2\left(1 - \frac{1}{25}x^2\right)$. Toon dit aan.

Opgave 10

Een punt A beweegt in het Oyx-vlak volgens de parameterkromme met $x(t) = 4\cos(2t)$ en $y(t) = 4\cos(t)$.

a Breng deze kromme in beeld op de grafische rekenmachine.

b De kromme lijkt op een deel van een parabool. Toon aan dat dit inderdaad zo is door te laten zien dat de parametervoorstelling kan worden geschreven in de vorm $x = ay^2 + by + c$.

c De lijn met vergelijking $y = x$ snijdt deze kromme. Bereken de snijpunten.

Opgave 11

De ellips e wordt gegeven door $x = 5\sin(t) + 4$ en $y = 3\cos(t) + 3$.

a Bereken algebraïsch de snijpunten van deze ellips met beide assen. Geef waar nodig benaderingen in één decimaal nauwkeurig.

b Breng de kromme in beeld op je grafische rekenmachine.

c Welke uiterste punten heeft de ellips?

d Bereken algebraïsch de afstand tussen de punten op de kromme waarvoor $x = 2$ in één decimaal nauwkeurig.

e Laat zien dat voor deze ellips geldt $9(x-4)^2 + 25(y-3)^2 = 225$.

Opgave 12

Bekijk de kromme m met parametervoorstelling $x(t) = t - 0{,}5\sin(2t)$ en $y(t) = 2 - 2\cos(2t)$ met t in het interval $[0{,}2\pi]$.

a Waarom is dit geen Lissajousfiguur?

b Bereken de snijpunten van m met de x-as.

c Welke waarden nemen x en y aan?

d Breng de kromme in beeld met je grafische rekenmachine. Verklaar waarom deze kromme m heet.

Opgave 13

Gegeven is kromme k met parametervoorstelling $(x(t), y(t)) = \left(t^2 - 4{,}2t + 2\right)$.

a Bereken de snijpunten van k met de assen.

b Toon aan dat k een parabool is door een vergelijking op te stellen met alleen x en y.

Toepassen

Opgave 14: Cirkel en lijn

Een punt P doorloopt met een snelheid van 10 m/s een cirkel met een straal van 5 m. Neem $O(0{,}0)$ als middelpunt van deze cirkel in een Oxy-assenstelsel met eenheden op de assen van 1 m. Het punt start op $t = 0$ in $(5{,}0)$.

a Stel een parametervoorstelling van de baan van P op.

Een ander punt Q beweegt met 5 m/s in een rechte lijn vanaf het punt $(-10,-4)$ (op $t = 0$) naar het punt $(6{,}8)$.

b Stel een parametervoorstelling van deze beweging op.

c Onderzoek met je grafische rekenmachine of P en Q met elkaar botsen.

d De twee krommen hebben twee snijpunten. Bereken die snijpunten algebraïsch in één decimaal nauwkeurig.

Testen

Opgave 15

Een kromme k is gegeven door de parametervoorstelling $(x,y) = (5\sin(t), 5\sin(4t))$.

a Welke waarden kunnen $x(t)$ en $y(t)$ aannemen?

b Breng de kromme k in beeld op je grafische rekenmachine. Waarom is dit een Lissajousfiguur?

c Bereken de exacte snijpunten van k met de beide assen.

d Bereken algebraïsch alle punten waarin de y-coördinaat maximaal of minimaal is in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 16

Voor elk punt $P(x,y)$ van de kromme uit de voorgaande opgave geldt $25y^2 = 16x^2(25 - x^2)\left(1 - \frac{2}{25}x^2\right)^2$.

Toon dit aan.

Practicum: Lissajousfiguren

Met deze applet maak je een **Lissajousfiguur** met een parametervoorstelling van de vorm
$(x,y) = (a_1 + b_1\sin(c_1(t - d_1)), a_2 + b_2\sin(c_2(t - d_2)))$.

Bekijk de applet

1.3 Snelheid en versnelling

Inleiding

Hier zie je de kermisattractie ‘Polyp’ nog eens.
Je zit in een bakje dat een kromme doorloopt die ontstaat door twee draaiingen tegelijkertijd te laten plaatsvinden.
Je gaat soms heel snel en dan weer heel langzaam.
Maar hoe bereken je snelheden bij parameterkrommen?

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met richtingsvectoren bij periodieke beweging en daarmee de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan een kromme berekenen;
- de snelheid en de versnelling waarmee een punt een parameterkromme doorloopt berekenen.

Voorkennis

- werken met sinusoïden;
- werken met parameterkrommen;
- snijpunten met de assen en uiterste punten van krommen berekenen.

Verkennen

Opgave V1

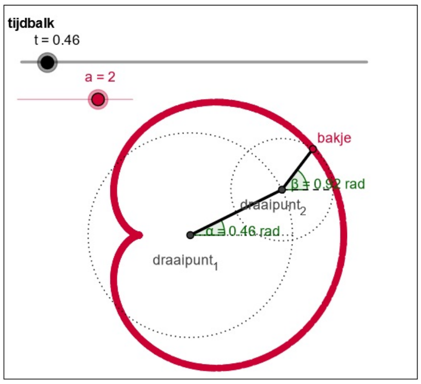
Bekijk de applet

In de applet zie je de kermisattractie ‘Polyp’ nog eens.
Je zit in een bakje dat een kromme doorloopt die ontstaat door twee draaiingen tegelijkertijd te laten plaatsvinden.
Je gaat soms heel snel en dan weer heel langzaam.
Ga er eens van uit dat deze beweging eindeloos door gaat.

a Voor welke waarden van t beweeg je het snelst?

b Voor welke waarden van t beweeg je het langzaamst?

c Kun je de grootste en de kleinste snelheid (in m/s) schatten?



Figuur 3.2

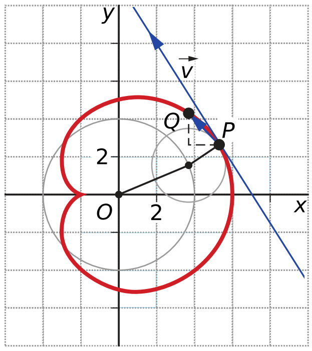
Uitleg

Bekijk de applet

Als je de tijd t (in seconden) laat lopen dan zie je de kromme die punt P doorloopt. Om iets over de snelheid van P op een bepaald tijdstip te kunnen zeggen is er een punt Q getekend dat h seconden voor loopt op punt P. Nu is $P = (x(t), y(t))$ en dus is $Q = (x(t+h), y(t+h))$.
Dit betekent dat in h seconden punt P ongeveer de vector

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x(t+h) - x(t) \\ y(t+h) - y(t) \end{pmatrix}$$

doorloopt.



Figuur 3.3

Per seconde doorloopt P de vector

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \\ \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \end{pmatrix}$$

En deze benadering wordt beter naarmate h naar 0 nadert.

Daarom zeg je dat punt P beweegt volgens de **snelheidsvector**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Deze snelheidsvector ligt op de raaklijn in punt P aan de kromme.
De richtingscoëfficiënt van deze raaklijn is $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.
De snelheid waarmee het punt beweegt is de lengte van de snelheidsvector.

Dus de baansnelheid is $v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

De afgeleide van de snelheidsvector $\vec{v}$ is de versnellingsvector

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

De baanversnelling is de afgeleide van de baansnelheid.

Opgave 1

Bestudeer in de **Uitleg** wat de snelheidsvector van een bewegend punt is en hoe je daarmee de snelheid van die beweging in een bepaald punt kunt uitrekenen.
Bij de getekende kromme hoort de parametervoorstelling $(x(t), y(t)) = (4\cos(t) + 2\cos(2t), 4\sin(t) + 2\sin(2t))$ met t in s en de lengte-eenheden in m.

a Waarom is hier geen sprake van een Lissajousfiguur?

b Welke snelheidsvector hoort er bij deze kromme?

c Bereken de snelheidsvector voor $t = 0$ en laat m.b.v. de applet zien dat die snelheidsvector inderdaad klopt.

d Met welke snelheid beweegt punt P op $t = 0$?

e Neem nu $t = \frac{1}{2}\pi$ en bereken zowel de snelheidsvector als de snelheid waarmee P op dit tijdstip beweegt.

f Doe hetzelfde als bij e voor nog een paar andere tijdstippen. Controleer steeds je antwoorden met de applet.

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je ook hoe je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan een kromme opstelt.

a Hoe kun je uit de snelheidsvector die richtingscoëfficiënt afleiden?

Bij de getekende kromme hoort de parametervoorstelling $(x(t), y(t)) = (4\cos(t) + 2\cos(2t), 4\sin(t) + 2\sin(2t))$.

b Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan deze kromme voor $t = \frac{1}{2}\pi$.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan deze kromme voor $t = \frac{1}{2}\pi$.

d In welke punten zijn de raaklijnen horizontaal, dus evenwijdig aan de x-as? Welke vergelijkingen hebben ze dan?

e In welke punten zijn de raaklijnen verticaal, dus evenwijdig aan de y-as? Welke vergelijkingen hebben ze dan?

Opgave 3

Bij **Opgave V1** heb je dezelfde kromme bekeken als in de **Uitleg**. De parametervoorstelling vind je bij de voorgaande opgaven.

a In welk punt beweegt P het snelst? En hoeveel bedraagt die snelheid?

b Er is een punt van de kromme waar de beweging omkeert en snelheid even 0 is. Welk punt is dat? En welk tijdstip hoort er bij?

c Wat kun je in dat punt over de helling van de kromme zeggen?

Opgave 4

Bekijk de kromme in de **Uitleg**.

a Welke versnellingsvector hoort er bij deze kromme?

b Bereken de versnellingsvector voor $t = 0$.

c Hoe groot is de baanversnelling van punt P op $t = 0$?

d Bereken zowel de versnellingsvector als de baanversnelling voor $t = \frac{1}{2}\pi$.

Geef je antwoord in m/s op twee decimalen nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een parameterkromme wordt gegeven door de parametervoorstelling van een punt P dat de kromme doorloopt: $P(x,y) = (x(t),y(t))$.

$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ is de **plaatsvector** van punt P. Punt P beweegt met

snelheidsvector $\vec{v}=\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Deze snelheidsvector ligt op de raaklijn in punt P aan de kromme.
De **richtingscoëfficiënt van deze raaklijn** is $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.
De **snelheid** waarmee het punt beweegt is de lengte van de snelheidsvector.

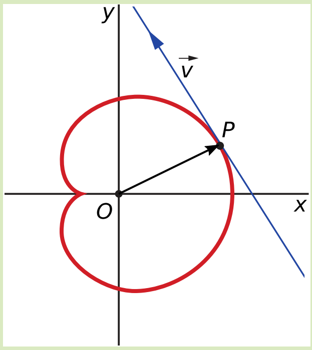
Dus $v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

In uiterste punten van een kromme is vaak $x'(t) = 0$ of $y'(t) = 0$.
Punten waarin zowel $x'(t) = 0$ als $y'(t) = 0$ noem je **keerpunten** van de kromme.

De **versnellingsvector** van P op tijdstip t is: $\vec{a}=\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

De **baanversnelling** zelf is de afgeleide van de baansnelheid.

De hoek tussen een parameterkromme en een lijn is gelijk aan de hoek tussen de lijn en de raaklijn aan de kromme in het snijpunt.

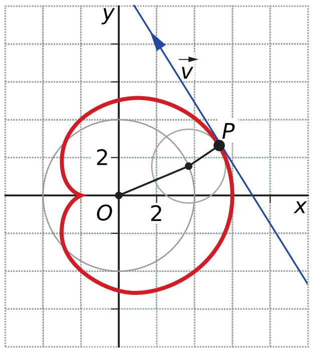


Figuur 3.4

Voorbeeld 1

De parameterkromme in de **Theorie** wordt gegeven door de parametervoorstelling
$(x(t), y(t)) = (4\cos(t) + 2\cos(2t), 4\sin(t) + 2\sin(2t))$.

Bereken de snelheid waarmee het punt P de kromme doorloopt op $t = 1$. Stel ook een vergelijking op van de raaklijn in $t = 1$ aan de kromme. (Benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.)



Figuur 3.5

Antwoord

De snelheidsvector is: $\overrightarrow{v(t)}=\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sin(t) - 4\sin(2t) \\ 4\cos(t) + 4\cos(2t) \end{pmatrix}$.

Op $t = 1$ geldt: $\overrightarrow{v(t)}=\begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7{,}003 \\ 0{,}497 \end{pmatrix}$.

De snelheid op $t = 1$ is de lengte van deze vector:
$v = \sqrt{(-7{,}003)^2 + 0{,}497^2} \approx 7{,}02$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $t = 1$ is:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \approx \frac{0{,}497}{-7{,}003} \approx -0{,}07$.

De raaklijn gaat door $P(x(1), y(1)) \approx (1{,}33; 5{,}18)$.

De vergelijking van de raaklijn is daarom ongeveer: $y = -0{,}07x + 5{,}28$.

Opgave 5

Bekijk hoe in **Voorbeeld 1** zowel de snelheid van het bewegende punt als de vergelijking van de raaklijn aan de kromme voor $t = 1$ wordt opgesteld.

Doe dit zelf voor $t = 2$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Een kromme k wordt gegeven door $x(t) = 5\cos(2t)$ en $y(t) = 5\sin(3t)$.

a Welke waarden kunnen x en y aannemen? Breng vervolgens kromme k in beeld met je grafische rekenmachine.

b Stel de snelheidsvector van deze kromme op. Bereken daarmee de snelheid op $t = 0$ en op $t = \frac{1}{4}\pi$.

c Stel de vergelijkingen op van de raaklijnen aan deze kromme voor $t = 0$ en op $t = \frac{1}{4}\pi$.

Opgave 7

Een rechte lijn heeft als vergelijking $y = ax + b$.

a Laat zien dat een mogelijke parametervoorstelling van deze rechte lijn is: $x(t) = t$ en $y(t) = at + b$.

b Kun je een andere parametervoorstelling van deze rechte lijn verzinnen?

c Laat zien dat een rechte lijn met deze parametervoorstelling een constante snelheidsvector heeft.

Een cirkel heeft als parametervoorstelling $x(t) = a + r\sin(t)$ en $y = b + r\cos(t)$.

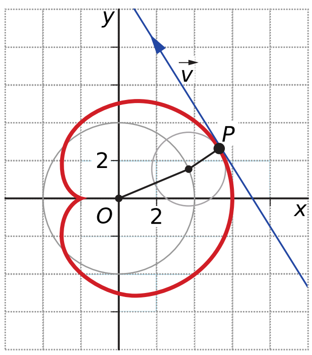
d Laat zien dat een cirkel niet een constante snelheidsvector, maar wel een constante snelheid heeft.

Voorbeeld 2

De parameterkromme in de **Theorie** wordt gegeven door de parametervoorstelling $(x(t), y(t)) = (4\cos(t) + 2\cos(2t), 4\sin(t) + 2\sin(2t))$.

In de uiterste punten van deze kromme is de raaklijn evenwijdig aan de x-as of de y-as. Bereken deze punten in twee decimalen nauwkeurig.

Deze kromme heeft ook een **keerpunt**. Bereken dit keerpunt.



Figuur 3.6

Antwoord

De helling van de raaklijn wordt gegeven door: $\frac{\text{d}y}{\text{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

- De raaklijn is evenwijdig aan de x-as als: $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.
  $y'(t) = 4\cos(t) + 4\cos(2t) = 0$ geeft: $\cos(t) + \cos(2t) = 0$ en dus
  $2\cos^2(t) + \cos(t) - 1 = 0$, zodat $\cos(t) = \text{-}1 \vee \cos(t) = 0{,}5$.
  Hieruit volgt: $t = \pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \text{-}\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.
  Ga na, dat dit als uiterste punten oplevert: $\left(2{,}3\sqrt{3}\right)$ en $\left(2{,}\text{-}3\sqrt{3}\right)$.
  (Denk er om dat $x'(t) \neq 0$, dus (-2,0) vervalt.)
- De raaklijn is evenwijdig aan de y-as als: $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$.
  $x'(t) = \text{-}4\sin(t) - 4\sin(2t) = 0$ geeft: $\sin(t) - \sin(2t) = 0$ en dus
  $\sin(t) - 2\sin(t)\cos(t) = 0$, zodat $\sin(t) = 0 \vee \cos(t) = \text{-}0{,}5$.
  Hieruit volgt: $t = k \cdot \pi \vee t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \text{-}\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.
  Ga na, dat dit als uiterste punten oplevert: (6,0), $\left(\text{-}3{,}\sqrt{3}\right)$ en $\left(\text{-}2{,}\text{-}\sqrt{3}\right)$. (Denk er weer om dat $x'(t) \neq 0$, dus (-2,0) vervalt.)
- Voor het keerpunt geldt $x'(t) = 0 \wedge y'(t) = 0$ en dat levert juist het punt (-2,0) op. In de figuur is duidelijk te zien waarom dit punt een keerpunt heet: de bewegingsrichting keert er om.

Opgave 8

Bekijk hoe in **Voorbeeld 2** zowel de uiterste punten als de keerpunten van een kromme worden berekend.

Voer zelf deze berekeningen uit zonder naar het antwoord in het voorbeeld te kijken.

Opgave 9

Een kromme k wordt gegeven door $x(t) = 5\cos(2t)$ en $y(t) = 5\sin(3t)$.

a Bereken algebraïsch de punten van deze kromme waarin de raaklijn evenwijdig is met de x-as of de y-as op de manier zoals in **Voorbeeld 2**.

b Bereken de twee keerpunten van deze kromme.

Voorbeeld 3

Neem nogmaals de baan van punt P beschreven door de parametervoorstelling
$P(x(t),y(t)) = (4\cos(t) + 2\cos(2t), 4\sin(t) + 2\sin(2t))$. Bereken algebraïsch de maximale baansnelheid van punt P.

Antwoord

De baansnelheid wordt bepaald door de snelheidsvector $\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Hier geldt: $x'(t) = \text{-}4\sin(t) - 4\sin(4t)$ en $y'(t) = 4\cos(t) + 4\cos(2t)$.

De baansnelheid v (ook wel vectoriële snelheid) op tijdstip t is de lengte van de snelheidsvector: $v = |\vec{v}|$.

Hiervoor geldt:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \\ &= \sqrt{(-4\sin(t) - 4\sin(2t))^2 + (4\cos(t) + 4\cos(2t))^2} \\ &= \sqrt{16 + 16 + 32\sin(t)\sin(2t) + 32\cos(t)\cos(2t)} \\ &= \sqrt{32 + 32\cos(t)} \end{aligned}$$

$x'(t)$ en $y'(t)$ invullen

haakjes wegwerken

formules voor $\sin(2t)$ en $\cos(2t)$ gebruiken

Omdat $-1 \leq \cos(t) \leq 1$ weet je dat de maxima van v liggen op $\cos(t) = 1$, ofwel $t = k \cdot 2\pi$.
Hiermee vind je de maximale snelheid en de coördinaten waarop de snelheid maximaal is:
$v(k \cdot \pi) = 4\sqrt{4} = 8$.

Opgave 10

Bestudeer **Voorbeeld 3**.

a Welke coördinaten heeft P wanneer de snelheid maximaal is?

b Omdat de baan van P een keerpunt heeft, weet je dat de minimale snelheid 0 is.

Toon aan dat dit ook volgt uit de formule voor v uit het voorbeeld.

c Welke coördinaten heeft P wanneer de snelheid minimaal is?

Opgave 11

Neem de baan van punt P beschreven door de parametervoorstelling $(x(t), y(t)) = \left(2t^2 - 1, t^3 - 2t + 2\right)$.

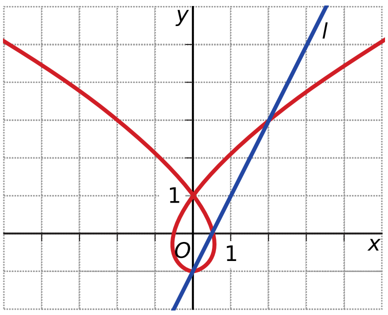
a Bereken de minimale baansnelheid van punt P.

b Welke coördinaten heeft P als de snelheid minimaal is?

c Beredeneer of er een maximale snelheid is.

Voorbeeld 4

Bekijk de figuur met daarin de baan K beschreven door $(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{2}t^3 - t, t^2 - 1\right)$ en ook de lijn $l: y = 2x - 1$.



Figuur 3.7

Uit de figuur blijkt dat l en K elkaar drie keer snijden. Bereken in twee decimalen de coördinaten van de snijpunten en de hoeken waaronder de lijn de kromme snijdt.

Antwoord

Om te berekenen voor welke waarden van t de kromme de lijn snijdt substitueer je de uitdrukkingen voor $x(t)$ en $y(t)$ in de vergelijking van l en los je deze op.

De coördinaten van de snijpunten zijn $(0, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ en $(2, 3)$.

De hoek met lijn l die de kromme maakt in een snijpunt wordt bepaald door de helling van de raaklijn aan de kromme in dat punt. Bekijk bijvoorbeeld het snijpunt $(0, -1)$.

De helling van de raaklijn wordt bepaald door de snelheidsvector:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t^2 - 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

De helling van de raaklijn in het snijpunt is:

$\frac{y'(0)}{x'(0)} = 0$

De raaklijn heeft richtingsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en de lijn heeft richtingsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Met behulp van het inproduct vind je voor de gevraagde hoek ongeveer $63{,}4°$.

Op dezelfde manier vind je dat de hoek in $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ongeveer $40{,}60°$ en de hoek in $(2,3)$ ongeveer $24{,}76°$ is.

Opgave 12

Bestudeer **Voorbeeld 4**. Naast $t = 0$ snijdt de kromme de lijn l op nog twee andere waarden van t.

a Reken de coördinaten van de snijpunten na.

b Voor één snijpunt is de hoek waaronder lijn l de kromme snijdt berekend. Bereken zelf de hoeken die bij de andere twee snijpunten horen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 13

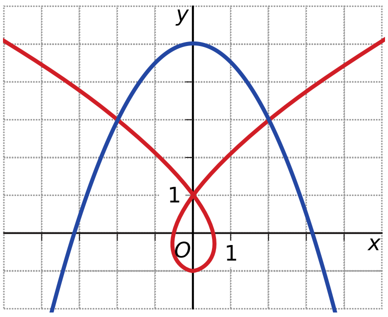
Bekijk de figuur met daarin de baan van een punt P beschreven door $(x(t),y(t)) = \left(\frac{1}{2}t^3 - t, t^2 - 1\right)$ en de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$. De baan van P wordt twee keer gesneden door de parabool.

a Bepaal voor welke waarden van t dit gebeurt.

b Bepaal de coördinaten van de snijpunten.

c Wat kun je zeggen over de hoeken tussen de grafieken in beide snijpunten?

d Bereken de hoeken tussen de grafieken in de snijpunten. Rond af op twee decimalen.



Figuur 3.8

Verwerken

Opgave 14

Een kromme wordt gegeven door $(x(t),y(t)) = (2 - \cos(t), 2t + 4)$ waarbij t loopt van 0 tot π. Bereken de maximale baansnelheid.

Opgave 15

Bepaal van de parameterkrommen de snelheid en versnelling op het gegeven tijdstip.

a $(x(t),y(t)) = \left(2t - 3, -t^2 + 5\right)$ op $t = 2$

b $(x(t),y(t)) = \left(t^3 - 2t, t^2 + 4t\right)$ op $t = 1$

c $(x(t),y(t)) = (2\sin(2t), 3\cos(t) + t)$ op $t = 0$

Opgave 16

Een punt P doorloopt in het Oxy-vlak een kromme k. De plaats van P op een bepaald tijdstip t wordt gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos(2t)\cos(t) \\ y(t) = 4\cos(2t)\sin(t) \end{cases}$$

Hierin is t in seconden en zijn de eenheden op beide assen in m.

a Breng deze kromme in beeld. Welke waarden moet je voor x, y en t instellen om deze kromme precies één keer geheel te laten doorlopen?

b Op welke tijdstippen beweegt P het snelst? Hoe snel?

c Het punt P gaat meerdere keren door de oorsprong. De bewegingsrichtingen in dat punt staan loodrecht op elkaar. Toon dit aan.

Opgave 17

Een punt A beweegt in het Oxy-vlak volgens de parameterkromme met $x(t) = 3\sin(2t)$ en $y(t) = 3\sin(t)$.

a Deze kromme heeft precies vier punten waarin de raaklijn evenwijdig is aan de y-as. Bereken algebraïsch de coördinaten van deze punten.

b Toon aan dat de kromme geen keerpunten heeft.

Opgave 18

Bekijk de kromme m met parametervoorstelling $x(t) = t - 0{,}5\sin(2t)$ en $y(t) = 2 - 2\cos(2t)$ met t in het interval $[0, 2\pi]$. Je hebt al eerder gezien dat de figuur lijkt op de M van een bekende fastfoodketen.

a Bereken de exacte keerpunten van deze kromme.

b Bereken algebraïsch de punten van deze kromme waarin de raaklijn evenwijdig is met de x-as.

Figuur 3.9

Opgave 19

De kromme k is gegeven door
$(x(t), y(t)) = (6\sin(t) + \cos(2t), 4\sin(t) + \sin(2t))$ met
$0 \le t \le 2\pi$.

a Bereken algebraïsch de punten van deze kromme waarin de raaklijn evenwijdig is met één van de assen. Geef de coördinaten van die punten in één decimaal.

b Plot de kromme.

c Er is een punt dat twee keer wordt doorlopen door een bewegend punt op de kromme. Stel in dat punt de twee raaklijnen aan k op.

d De lijn $l : y = x$ snijdt de kromme in twee punten. Bereken in twee decimalen voor welke waarden van t dit gebeurt.

e Bereken in één decimaal de hoeken die k en l in de snijpunten maken.

Toepassen

Opgave 20: Cirkel of niet?

Gegeven zijn de krommen k_a met parametervoorstelling $(x(t), y(t)) = ((a + 2\sin(t)) \cdot \cos(t), (a + 2\sin(t)) \cdot \sin(t))$.
Hierin is $a \geq 0$.

a Voor $a = 0$ lijkt deze kromme een cirkel te zijn met middelpunt $M(0,1)$ en straal 1. Onderzoek of dit inderdaad het geval is.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van k_1 met de y-as voor $a = 1$.

c Als $a = 1$ heeft k_a vier punten waarin de raaklijn horizontaal is. Voor $a = 2$ zijn dat er nog drie omdat dan $O(0,0)$ een keerpunt van de kromme is.

Toon aan dat k_2 inderdaad $O(0,0)$ als keerpunt heeft.

d Toon aan dat voor $a > 4$ de kromme k_a precies twee punten heeft met een horizontale raaklijn.

Testen

Opgave 21

Een kromme k is gegeven door de parametervoorstelling $(x, y) = (5\sin(t), 5\sin(3t))$.

a Welke waarden kunnen $x(t)$ en $y(t)$ aannemen?

b Breng de kromme k in beeld op je grafische rekenmachine. Waarom is dit een Lissajousfiguur?

c Bereken de punten van k waarin de raaklijn evenwijdig is aan één van beide assen.

d Bereken algebraïsch de keerpunten van deze kromme.

e Stel een vergelijking op van de raaklijn in $(0,0)$ aan deze kromme.

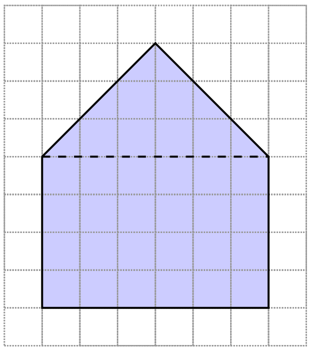
Opgave 22

Een kromme k heeft parametervoorstelling $(x(t), y(t)) = \left(t^2 - 3, 3t\right)$ en lijn l heeft parametervoorstelling $(x(t), y(t)) = (1 + t, 3 + 2t)$. Bereken algebraïsch de hoeken die k en l maken in de snijpunten. Rond af op twee decimalen.

1.4 Toepassingen

Inleiding

Je hebt in de analytische meetkunde en de vlakke krommen al met allerlei technieken kennis gemaakt. Maar er is nog veel meer. Je zult nu bijvoorbeeld het zwaartepunt berekenen van een vlakke figuur zoals die hiernaast. Ook zul je zien hoe een bepaald punt een rechte of een kromme doorloopt afhankelijk van een ander bewegend punt. En tenslotte bereken je de afstand van een punt tot een kromme.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- het zwaartepunt van een roosterfiguur berekenen;
- de afstand van een punt tot een kromme berekenen.
- wat er gebeurt met een afhankelijk punt als een gegeven punt over een rechte lijn beweegt;

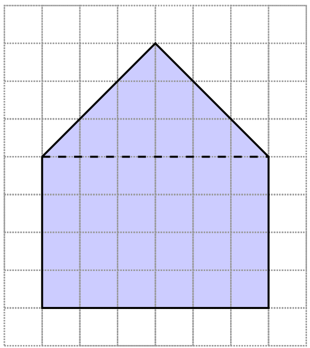
Voorkennis

- werken met vectoren in 2D;
- werken met parameterkrommen in 2D.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een vlakke figuur die is samengesteld uit een rechthoek en een driehoek.



Figuur 4.2

a Welk punt kun je als het zwaartepunt van de rechthoek opvatten?

Je kunt een assenstelsel maken waarvan de x-as langs de onderkant van de rechthoek en de y-as langs de linkerzijde van de rechthoek ligt. Een roostervierkantje is de eenheid.

b Welke coördinaten heeft dan het zwaartepunt van de driehoek?

c Welk punt is het zwaartepunt van de gehele figuur?

Uitleg 1

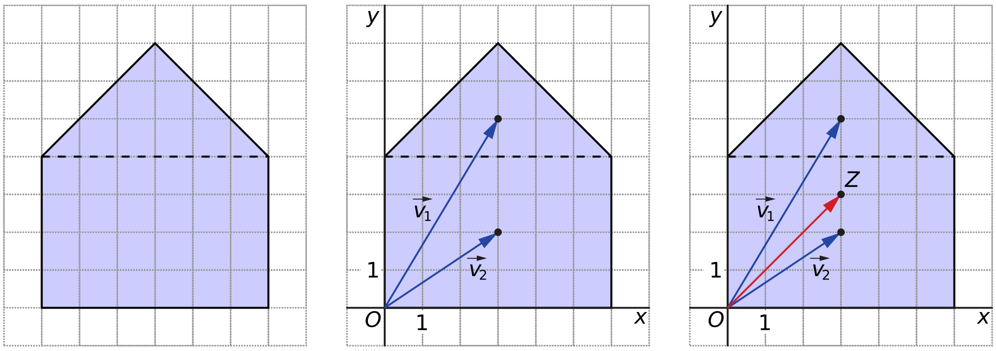
Een zwaartepunt is het ‘midden’ van de massa van een object. Als je het object alleen op deze plaats zou ondersteunen met een heel dun voorwerp blijft het in evenwicht. Bij meetkundige figuren in het platte vlak is er geen sprake van echte massa, maar die kun je voorstellen door de oppervlakte ervan.

Het zwaartepunt van eenvoudige meetkundige figuren kun je in veel gevallen met behulp van symmetrie bepalen:

- Het zwaartepunt van een cirkel is het middelpunt van de cirkel.
- Het zwaartepunt van een rechthoek is het snijpunt van de diagonalen.
- Het zwaartepunt van een driehoek is het snijpunt van de zwaartelijnen.

Het zwaartepunt van samengestelde vlakke figuren bereken je met behulp van vectoren.
Bekijk figuur a die uit een driehoek en een rechthoek bestaat.

Breng een assenstelsel aan. Je kunt elk willekeurig punt als oorsprong nemen. Teken de vectoren naar de afzonderlijke zwaartepunten (figuur b).



figuur a figuur b figuur c

Figuur 4.3

Voor de berekening van het zwaartepunt Z van deze samengestelde figuur heeft de vector naar het zwaartepunt van de driehoek een ander gewicht dan de vector naar het zwaartepunt van de rechthoek. De gewichten van deze vectoren verhouden zich tot de oppervlaktes van de geometrische figuren, dat wil zeggen als $9:24$ (figuur c).

De vector naar het zwaartepunt van deze samengestelde geometrische figuur is daarom gelijk aan

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{9}{33}\vec{v}_1 + \frac{24}{33}\vec{v}_2 = \frac{9}{33}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + \frac{24}{33}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\frac{9}{11}\end{pmatrix}.$$

Opgave 1

Bij een driehoek ligt het zwaartepunt op het snijpunt van de zwaartelijnen.

a Wat is een zwaartelijn?

b Geef een vectorvoorstelling van de drie zwaartelijnen van de driehoek in **Uitleg 1** en bereken de coördinaten van het snijpunt van deze lijnen.

Het zwaartepunt van elke ΔABC met $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ en $C(x_C, y_C)$ is gelijk aan $Z = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

c Toon dit aan.

d Laat zien, hoe je hiermee het zwaartepunt van de driehoek in de uitleg berekent.

Opgave 2

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.
Voor het bepalen van het zwaartepunt van deze samengestelde figuur kun je elk willekeurig punt als oorsprong nemen. De keuze voor de oorsprong heeft invloed op de hoeveelheid rekenwerk.

a Welke punten als oorsprong zou je minder rekenwerk geven?

b Bereken de coördinaten van het zwaartepunt door één van deze punten als oorsprong te nemen.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Gegeven is de rechte lijn $l: y = 2$. Op deze lijn ligt punt P.

$\overrightarrow{PQ}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{OP}$ en heeft dezelfde lengte. Bekijk de figuur.

Als P over lijn l beweegt, zal Q ook over een rechte lijn bewegen.

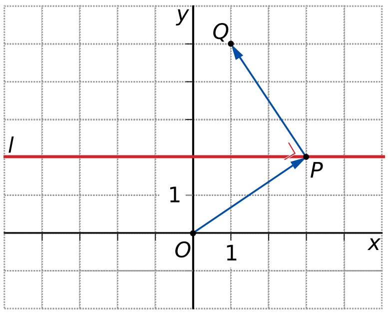
Dat kun je als volgt algebraïsch laten zien.

Stel dat $P(t,2)$ dan is $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-2 \\ 2+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dit betekent dat punt Q met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

beweegt.
Dit is een rechte lijn met vergelijking $y = x + 4$.



Figuur 4.4

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

a Leg uit waarom $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix}$

b Toon aan dat $y = x + 4$ een vergelijking is van de lijn waar Q op ligt.

Opgave 4

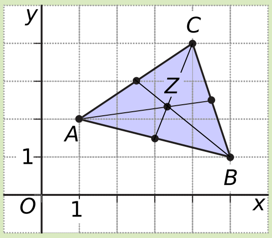
Bekijk **Uitleg 2**. Stel dat $l: y = 5$.
Over welke lijn beweegt Q dan, als P over l beweegt?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het **zwaartepunt** van een object is het punt ten opzichte waarvan de massa van dat object in evenwicht is.

- Het zwaartepunt van een cirkel ligt in het middelpunt van de cirkel.
- Het zwaartepunt van een rechthoek ligt op het snijpunt van de diagonalen van de rechthoek.
- Het zwaartepunt van een driehoek ligt op het snijpunt van de zwaartelijnen van de driehoek.
  Als $A(x_A,y_A), B(x_B,y_B)$ en $C(x_C,y_C)$ de hoekpunten van de driehoek zijn, dan is het zwaartepunt
  $Z = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.



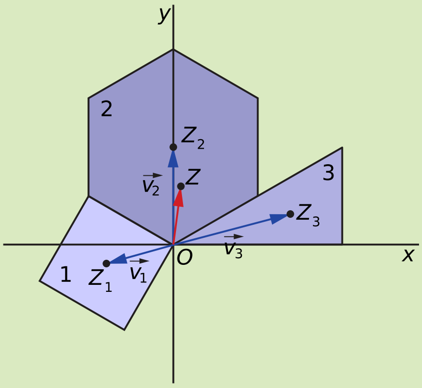
Figuur 4.5

Bij het berekenen van het zwaartepunt van samengestelde vlakke figuren moet je rekening houden met hun oppervlaktes.

Bekijk de figuren 1, 2 en 3, hun afzonderlijke zwaartepunten Z_1, Z_2 en Z_3 en de vectoren vanuit een gezamenlijk punt O naar die zwaartepunten $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$.

Bereken de oppervlakte A_1, A_2 en A_3 van de afzonderlijke figuren en de totale oppervlakte A_t van die figuren samen.
De vector naar het gezamenlijke zwaartepunt Z_p vind je met:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{A_1}{A_t} \cdot \vec{v}_1 + \frac{A_2}{A_t} \cdot \vec{v}_2 + \frac{A_3}{A_t} \cdot \vec{v}_3$$

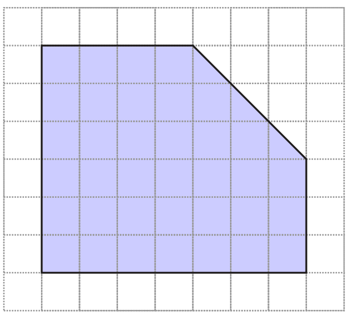


Figuur 4.6

Behalve het berekenen van het zwaartepunt van een samengestelde vlakke figuur zijn er meer toepassingen van analytische meetkunde en parameterkrommen. Bekijk de voorbeelden.

Voorbeeld 1

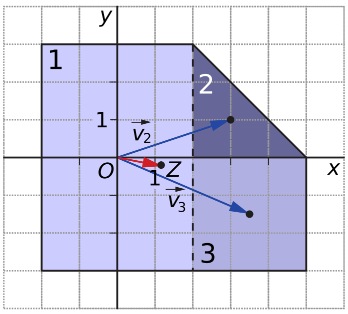
Bepaal de exacte plaats van het zwaartepunt van deze figuur.



Figuur 4.7

Antwoord

Verdeel de figuur in figuur 1, 2 en 3 en breng een assenstelsel aan.



Figuur 4.8

En:

- De coördinaten van de zwaartepunten zijn: $Z_1 = (0,0)$, $Z_2 = (3,1)$ en $Z_3 = \left(3\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right)$.
- De oppervlaktes zijn: $A_1 = 24$, $A_2 = 4\frac{1}{2}$ en $A_3 = 9$.

De oppervlakte van de hele figuur is:

$A_t = A_1 + A_2 + A_3 = 24 + 4\frac{1}{2} + 9 = 37\frac{1}{2}$.

$\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ en $\vec{v_3}$ zijn de vectoren naar de afzonderlijke zwaartepunten.

De vector naar het zwaartepunt Z van de hele figuur vind je met:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{24}{37\frac{1}{2}} \vec{v_1} + \frac{4\frac{1}{2}}{37\frac{1}{2}} \vec{v_2} + \frac{9}{37\frac{1}{2}} \vec{v_3} = \frac{16}{25}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{25}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \frac{6}{25}\begin{pmatrix}3\frac{1}{2}\\-1\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\frac{1}{5}\\-\frac{6}{25}\end{pmatrix}.$$

De coördinaten van het zwaartepunt van deze figuur zijn:

$\left(1\frac{1}{5}, -\frac{6}{25}\right)$.

Opgave 5

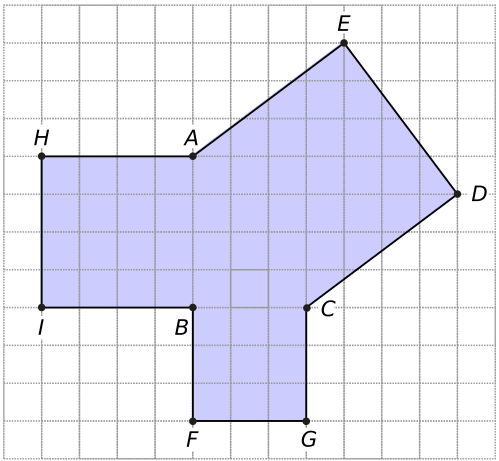
Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Waarom is de keuze voor de oorsprong van het assenstelsel handig?

b Voer zelf de berekening van het zwaartepunt uit.

Opgave 6

Bepaal de plaats van het zwaartepunt van deze samengestelde figuur.



Figuur 4.9

Voorbeeld 2

Punt P ligt op de lijn $l : y = 3$.

Vector $\overrightarrow{PQ}$ heeft dezelfde lengte als $\overrightarrow{OP}$ en staat loodrecht op lijn l.

Als P over lijn l beweegt, zal Q over een kromme bewegen.

Stel een parametervoorstelling van deze kromme op.

Antwoord

Stel dat $P(t,3)$, dan is $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{t^2 + 9}$.

Dit betekent dat $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{t^2 + 9} \end{pmatrix}$.

En $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} t \\ 3 + \sqrt{t^2 + 9} \end{pmatrix}$.

Een parametervoorstelling van de kromme is

$(x(t), y(t)) = \left(t, 3 + \sqrt{t^2 + 9}\right)$.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Geef een vergelijking van de kromme waarin je y uitdrukt in x.

b Stel dat $l : y = -1$. Geef een vergelijking van de kromme die je nu krijgt.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**. Stel dat lijn l de vergelijking $y = x$ heeft.

a Bepaal de coördinaten van Q als $P(3,3)$.

b Welke coördinaten heeft Q als $P(-3,-3)$?

c Welke figuur doorloopt Q nu als P over lijn l beweegt?

Voorbeeld 3

Gegeven is de parabool $p : (x(t), y(t)) = \left(2t, 4 - t^2\right)$ en het punt $A(1,2)$.
Bereken $\text{d}(A,p)$ in twee decimalen.

Antwoord

Neem aan dat punt P de parabool p doorloopt, dan is $P\left(2t, 4 - t^2\right)$.

En $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(2t - 1)^2 + \left(2 - t^2\right)^2}$.

De gevraagde afstand is de kleinste waarde van deze uitdrukking en dus het minimum van $f(t) = (2t - 1)^2 + \left(2 - t^2\right)^2$.

Ga zelf na dat het minimum optreedt bij $t = 1$. De waarde ervan is $\text{d}(A,p) = \sqrt{2}$.

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 3**. Laat met behulp van differentiëren zien hoe je de gevraagde afstand berekent.

Opgave 10

Bereken de afstand van $A(1,1)$ tot de ellips $e : x^2 + 4y^2 = 16$ in twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 11

Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van driehoek ABC met $A(-2,2)$, $B(2,-2)$ en $C(5,3)$.

Opgave 12

Bereken de afstand tussen de kromme $k : (x(t), y(t)) = \left(t^2, 4 - t\right)$ en punt $A(0,6)$.

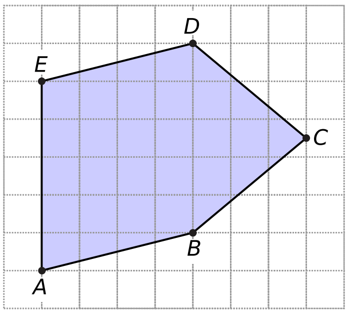
Opgave 13

a Druk de coördinaten van het zwaartepunt van de driehoek met $A(0,a)$, $B(b,0)$ en $C(a,b)$ uit in a en b.

b Toon aan dat het zwaartepunt van de driehoek met $A(0,a)$, $B(b,0)$ en $C(-a,-b)$ op de lijn $y = -x$ ligt.

Opgave 14

Bepaal de plaats van het zwaartepunt van deze samengestelde figuur.



Figuur 4.10

Opgave 15

Gegeven zijn de lijnen $l : 2x - 8y = -1$ en $m : -x + 4y = 10$.

a Toon met behulp van normaalvectoren van l en m aan dat de lijnen evenwijdig zijn.

b Bereken de afstand tussen l en m. Rond af op één decimaal.

c Punt A heeft een x-coördinaat van 4 en $\text{d}(A,l) = 5$.
Bereken exact de mogelijke y-coördinaten van A.

Opgave 16

Van ΔPQR is het zwaartepunt $Z(4,1)$ en punt $P(2,5)$ gegeven.
De oppervlakte van driehoek PQR is 15. Noem het punt links van punt P punt Q.
Geef de coördinaten van hoekpunt Q in de beschreven gevallen.
(Bedenk dat het zwaartepunt elke zwaartelijn verdeelt in twee delen die zich verhouden als $2 : 1$. Dus als S het midden van QR is, dan is $|PZ| : |ZS| = 2 : 1$.)

a De punten Q en R liggen op één horizontale lijn.

b De lengte van zijde PQ is minimaal.

Toepassen

Opgave 17: Zwaartepunt in de astronomie

Het zwaartepunt is een begrip dat erg belangrijk is in de astronomie. Het zwaartepunt heeft invloed op de omloopbaan van hemellichamen. Bekijk de tabel met daarin de massa's van de verschillende planeten in ons zonnestelsel en de zon, relatief aan die van de aarde, en de gemiddelde afstand ten opzichte van de zon in AE (astronomische eenheid, de gemiddelde afstand van het middelpunt van de aarde tot het middelpunt van de zon).

object	Zon	Mercurius	Venus	Aarde	Mars	Jupiter	Saturnus	Uranus	Neptunus
massa (aardemassa)	333000	0,055	0,815	1	0,107	317,8	95,159	14,536	17,147
afstand (AE)	0	0,4	0,7	1	1,5	5,2	9,5	19,2	30,1

Tabel 4.1

Veronderstel dat de planeten op een bepaald moment op één lijn aan dezelfde kant van de zon staan. Bereken in dat geval hoe ver het zwaartepunt van het zonnestelsel is verwijderd van het massamiddelpunt van de zon.

Opgave 18: Bewegen over een lijn

Gegeven is de lijn k met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Op deze lijn ligt het punt P.

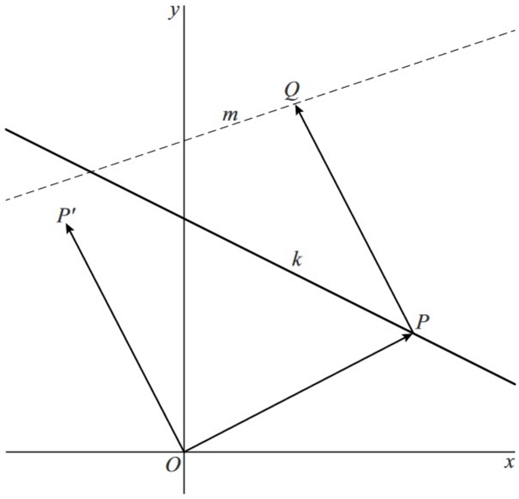
Vector $\overrightarrow{OP}$ wordt om de oorsprong 90° linksom gedraaid. Zo ontstaat vector $\overrightarrow{OP'}$.

Vector $\overrightarrow{PQ}$ heeft dezelfde richting en dezelfde lengte als $\overrightarrow{OP'}$.
Zie de figuur.

Wanneer het punt P over lijn k beweegt, zal het punt Q over een lijn m bewegen. In de figuur is m gestippeld weergegeven.

Stel een vergelijking van m op.

(bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2017, eerste tijdvak)



Figuur 4.11

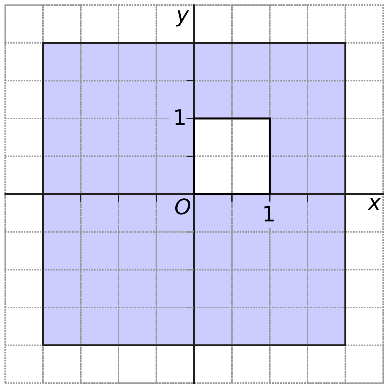
Testen

Opgave 19

Bekijk de figuur. Het is een vierkant met een vierkant eruit.

a Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van deze figuur.

b Je kunt het zwaartepunt sneller berekenen door twee vectoren met hun gewicht van elkaar af te trekken. Laat dit zien.



Figuur 4.12

Opgave 20

Het zwaartepunt van ΔABC is punt $Z(3,5)$.
De coördinaten van A en B zijn $A(-1,3)$ en $B(6,2)$.

a Geef de vectorvoorstelling van de zwaartelijn door hoekpunt C.

b Geef de coördinaten van hoekpunt C.

c Bereken de oppervlakte van ΔABC.

Opgave 21

Bereken de afstand van punt $A(0,4)$ tot de parabool $p: y = x^2$.

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Parameterkrommen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- parametervoorstelling van een kromme — periodieke beweging — eenparige cirkelbeweging, voerstraal, hoeksnelheid
- Lissajousfiguur — uiterste punten — snijpunten met de assen
- keerpunten — snelheidsvector, snelheid in een punt — versnellingsvector, versnelling in een punt — r.c. raaklijn
- zwaartelijnen en zwaartepunten

Activiteitenlijst

- werken met de parametervoorstelling van een kromme
- snijpunten met de assen berekenen — uitersten berekenen — parameter elimineren
- snelheidsvector en snelheid in een punt berekenen — versnellingsvector en versnelling in een punt berekenen — vergelijking raaklijn aan een kromme opstellen
- zwaartepunten van vlakke figuren berekenen — parametervoorstellingen opstellen — afstand punt tot kromme berekenen

Achtergronden

Het bestuderen van krommen gaat al terug tot de Oudheid. **Apollonius van Perga (262—190 v.Chr.)** was één der eersten die een systematische studie van krommen maakte. Vooral zijn boek ‘Kegelsneden’ waarin de begrippen parabool, hyperbool en ellips werden geïntroduceerd, is heel erg beroemd geworden. Hij beschreef er de cirkel, de ellips, de parabool en de hyperbool in als doorsnijdingen van een vlak met een (dubbele) kegel en leidde de belangrijkste eigenschappen van deze vlakke krommen af. Later paste hij deze kennis toe op de bewegingen van hemellichamen. **Johannes Kepler (1571—1630)** liet zien dat planetenbanen ellipsen zijn met de zon in één van de brandpunten.

Figuur 5.1 Jules Antoine Lissajous

Lissajousfiguren zijn genoemd naar **Jules Antoine Lissajous (1822—1880)**. Lissajous was een Frans wis- en natuurkundige die zich vooral bezighield met akoustiek en optica. Hij verkreeg de figuren door licht achtereenvolgens te laten reflecteren door twee spiegels die bevestigd waren aan twee stemvorken die haaks op elkaar stonden.

Testen

Opgave 1

Gegeven is de baan met parametervoorstelling

$(x(t), y(t)) = \left(2^{\frac{1}{t}}, t^2 - 4t\right)$ met $t > 0$.

a Bereken de tijdstippen waarop $x(t) = 16$ en geef de bijbehorende coördinaten.

b Bereken de tijdstippen waarop $y(t) = 0$ en geef de bijbehorende coördinaten.

Opgave 2

Een punt P beweegt met een cirkelvormige baan met straal 2 rondom middelpunt $(-4,5)$. De baan wordt met constante snelheid met de klok mee afgelopen en heeft periode 2. Op $t = 0$ is $P(-4,7)$.

Geef een parametervoorstelling van de baan van P.

Opgave 3

Gegeven is de kromme k door
$(x(t), y(t)) = (1 + 5\cos(\pi t), 3\sin(2\pi t))$.

a Is k een lissajousfiguur? Zo ja, wat is de periode?

b Plot de kromme.

c Bereken algebraïsch de uiterste punten van k.

d Bereken exact de baansnelheid op $t = \frac{1}{4}$.

e Bereken de baanversnelling op $t = \frac{1}{4}$. Rond af op één decimaal.

f Bereken de maximale baansnelheid. Rond af op één decimaal.

Opgave 4

De plaats van een bewegend punt $P(x(t), y(t))$ in een assenstelsel wordt gegeven door $x(t) = \cos(2t)$ en $y(t) = \cos(3t)$, waarbij t de tijd voorstelt. De beweging begint op $t = 0$.

a Toon aan dat P zich even lang links als rechts van de y-as bevindt.

De baan van punt P heeft twee keerpunten.

b Bereken deze keerpunten algebraïsch.

Tijdens de beweging verandert de afstand van het punt P op de baan tot het punt $O(0,0)$.

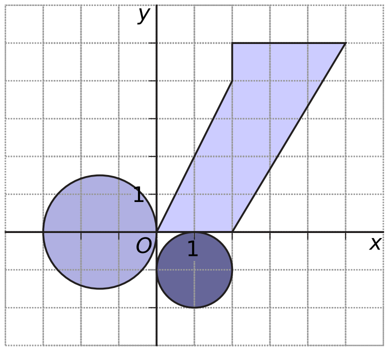
c Bereken de minimale waarde van de afstand OP in twee decimalen.

Tijdens de beweging verandert de snelheid van het punt P.

d In welke punten is die snelheid het grootst? Geef benaderingen in één decimaal.

Opgave 5

Bepaal het zwaartepunt in de figuur. Rond af op drie decimalen.



Figuur 5.2

Opgave 6

Gegeven is lijn $l : 4x - 2y = 3$ en punt $A(-1,5)$.

a Bereken d(A,l). Rond af op twee decimalen.

b Lijn m is evenwijdig met lijn l en de afstand tussen deze twee lijnen is 4.

Verder is gegeven dat m boven l ligt.

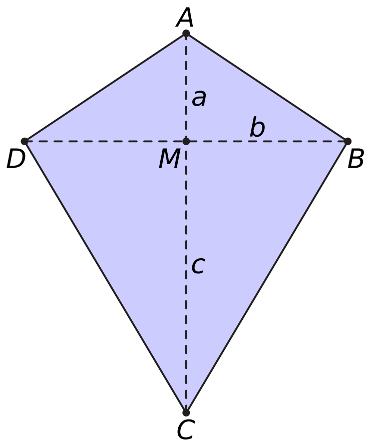
Stel een vergelijking op van lijn m.

Opgave 7

Bekijk de figuur. Gegeven is de vlieger $ABCD$. De diagonalen snijden elkaar in het punt M. Er geldt $|AM| = a$, $|BM| = b$ en $|CM| = c$.

a Toon aan dat de afstand tussen het zwaartepunt van de vlieger en het punt M gelijk is aan: $|MZ| = \left|\frac{a^2b-bc^2}{3ab+3bc}\right|$.

b Van een vlieger $ABCD$ zijn de punten $A(3,5)$ en $B(6,3)$ gegeven. Bovendien is gegeven dat het zwaartepunt van deze vlieger ligt bij $Z(3,2)$ en dat punten B, D en het zwaartepunt op dezelfde lijn liggen. Bereken de coördinaten van de punten C en D.



Figuur 5.3

Opgave 8

Gegeven is de kromme k door
$(x(t),y(t)) = (2\sin(t) + 2\cos(2t), 2\sin(2t))$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

a Bereken algebraïsch de punten van deze kromme waarin de raaklijn evenwijdig is met één van de assen. Geef de coördinaten van die punten waar het kan exact, of anders in één decimaal.

b Plot de kromme.

c De x-as wordt in drie punten gesneden door de kromme. Stel in die punten alle raaklijnen aan k op. Rond af op één decimaal.

d De lijn $l : y = \frac{1}{2}x + 2$ snijdt de kromme in twee punten. Bereken in twee decimalen voor welke waarden van t dit gebeurt.

e Bereken in één decimaal de hoeken die k en l in de snijpunten maken.

Toepassen

Opgave 9: Cycloïde

De **cycloïde** is de kromme die het ventiel van je fietsband doorloopt als je met een constante snelheid fietst. Het is dus de beweging van een punt op een constant rollende cirkel...

Bekijk de applet: Cycloïde

Hier zie je een cycloïde ontstaan vanuit een punt dat op een draaiende cirkel met straal 1 ligt, waarvan de as beweegt langs de lijn $y = 1$.
De bijbehorende parametervoorstelling is: $x(t) = t - \sin(t)$ en $y(t) = 1 - \cos(t)$.

a Leid zelf deze parametervoorstelling af.

b Laat door een berekening zien dat de keerpunten van deze kromme $(k \cdot 2\pi, 0)$ zijn.

c Hoeveel procent van elke omwenteling van het wiel zit het ventiel hoger dan 1 m? Beredeneer dit, maar laat ook zien hoe het uit de bewegingsvergelijkingen volgt.

Opgave 10: De gravitatiewet van Newton

Een hele mooie toepassing van krommen zijn de banen van de planeten om de zon. Die worden bepaald door de drie wetten van Kepler waaruit de gravitatiewet van Newton is af te leiden.
Volgens Kepler beschrijven de planeten een ellipsvormige, bijna cirkelvormige, baan om de zon waarbij T^2 / R^3 voor alle planeten gelijk is. T is de omlooptijd in jaren en R de (gemiddelde) afstand tot de zon in AE (1 AE = 1 astronomische eenheid = de straal van de Aardbaan).

Om een model voor de planetenbanen op te stellen neem je de Zon als oorsprong van een xy-assenstelsel waarin alle planeten bewegen (in werkelijkheid liggen niet alle banen precies in één vlak). Uitgaande van zuivere cirkelbanen, geldt dan voor de baan van elke planeet $(x(t), y(t)) = \left(R\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right), R\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right)$.

a Door differentiëren bepaal je de snelheidsvector en de versnellingsvector. Leid uit de baanvergelijkingen af, dat voor de snelheid geldt $v = \frac{2\pi R}{T}$ en dat voor de versnelling geldt $a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$.

b Laat zien dat $a = \frac{v^2}{R}$.

Volgens Newton geldt voor elke massa m dat er een kracht $F = m \cdot a$ nodig is om hem een versnelling van a te geven en volgens Kepler is $T^2 / R^3 = k$ een constante.

c Laat zien dat hieruit volgt $F = 4\pi^2 k \cdot \frac{m}{R^2}$.

Newton bedacht dat in een algemene gravitatiewet die de aantrekkingskracht van de planeten en de zon van ons planetenstelsel zou kunnen beschrijven in ieder geval ook de massa M van de Zon zou moeten bevatten.

d Leg uit waarom op grond van het voorgaande zo'n gravitatiewet de vorm $F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$ heeft.

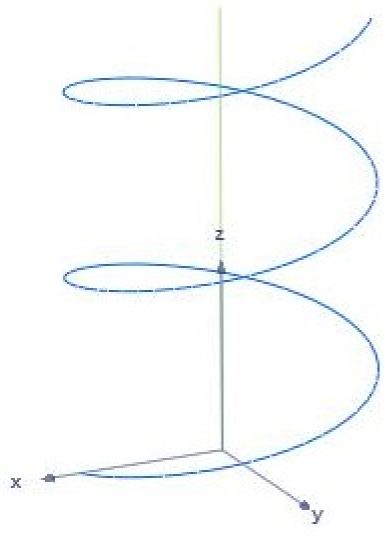
Opgave 11: Krommen in 3D

Met $P(x(t), y(t))$ beschrijf je hoe de coördinaten van een punt in een Oxy-vlak veranderen met de tijd t. Je krijgt dan een kromme in twee dimensies.

Door het Oxy-vlak als grondvlak op te vatten en tegelijkertijd het punt omhoog en/of omlaag bewegen, heb je behalve $x(t)$ en $y(t)$ ook een functie $z(t)$ nodig. Die laatste functie legt dan vast hoe hoog het punt boven het Oxy-vlak zit. Je krijgt nu een kromme in drie dimensies.

Hier zie je in een $Oxyz$-assenstelsel een voorbeeld van zo'n 3D-kromme: (een stukje van) een Archimedische schroeflijn. Er geldt: $(x,y,z) = (\cos(t), \sin(t), 0{,}2t)$ met t in seconden.

Wanneer je de 3D-kromme recht van boven (in de z-richting) bekijkt zie je de 2D-kromme $(x,y) = (\cos(t), \sin(t))$, een cirkel met straal 1. Dus elke 2π seconden vind er één omwenteling plaats. Bekijk je de 3D-kromme precies vanuit de y-richting, zie je $(x,z) = (\cos(t); 0{,}2t)$, een sinusoïde om de z-as.



Figuur 5.4

a Teken met je grafische rekenmachine bovenaanzicht, zijaanzicht (in de y-richting) en vooraanzicht (in de x-richting) van deze kromme. Neem $0 \leq t \leq 4\pi$.

b Hoe lang is elke omwenteling van deze schroeflijn? En hoe groot is de afstand tussen twee punten die recht boven elkaar liggen op twee opeenvolgende omwentelingen (dit noem je de 'spoed' van de schroeflijn)?

De snelheidsvector wordt in 3D gegeven door $\vec{v} = (x'(t), y'(t), z'(t))$. De snelheid in een punt is de lengte van die snelheidsvector.

c Hoe groot is de snelheid waarmee een punt deze schroeflijn doorloopt op $t = 0$? En op andere tijdstippen?

d Hoe ziet de parametervoorstelling er uit van een schroeflijn die op $t = 0$ begint in het punt $(0,4,0)$, ligt op een cilinder met straal 4 met als as de z-as en op $t = 2\pi$ het punt $(0,-4,2)$ passeert?

Een geheel ander soort ruimtekromme wordt beschreven door $x(t) = 8\sin(t)$, $y(t) = 8\sin(2t)$ en $z(t) = 10 + 8\sin(2t)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$. Het Oxy-vlak is het grondvlak, z is de hoogte boven dit grondvlak.

e Leg uit waarom deze kromme een soort van achtbaan voorstelt.

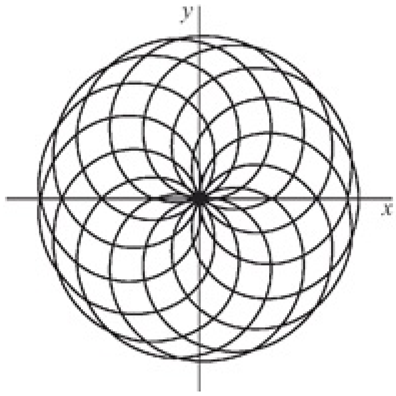
Examen

Opgave 12: Een beweging door $(0,0)$

De beweging van een punt in het Oxy-vlak wordt voor $0 \leq t \leq 2\pi$ gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(15t) + \cos(2t) \\ y(t) = \sin(15t) + \sin(2t) \end{cases}$$

In de figuur is de baan van het punt getekend.



Figuur 5.5

a Bereken de exacte snelheid van het punt op tijdstip $t = 0$.

De bewegingsvergelijkingen kunnen herleid worden tot:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos\left(8\frac{1}{2}t\right) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin\left(8\frac{1}{2}t\right) \end{cases}$$

met $r(t) = 2\cos\left(6\frac{1}{2}t\right)$.

b Toon dit aan.

Bij het doorlopen van zijn baan passeert het punt een aantal keren $(0,0)$.

c Bereken dit aantal langs algebraïsche weg.

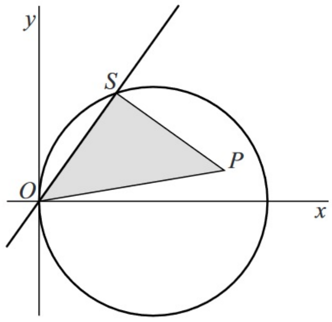
(bron: examen wiskunde B vwo 2002, eerste tijdvak)

Opgave 13: Een driehoek draaiend over een cirkel

Gegeven is de cirkel met vergelijking $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Voor elke waarde van a is gegeven de lijn met vergelijking $y = ax$. Elk van deze lijnen snijdt de cirkel in twee punten, namelijk in O en S. De coördinaten van S zijn afhankelijk van a.

De vector $\overrightarrow{SP}$ is het beeld van $\overrightarrow{SO}$ bij een rotatie om S over $90°$. Zie de figuur hiernaast, waarin ook driehoek OPS is weergegeven. Voor de coördinaten van P geldt:

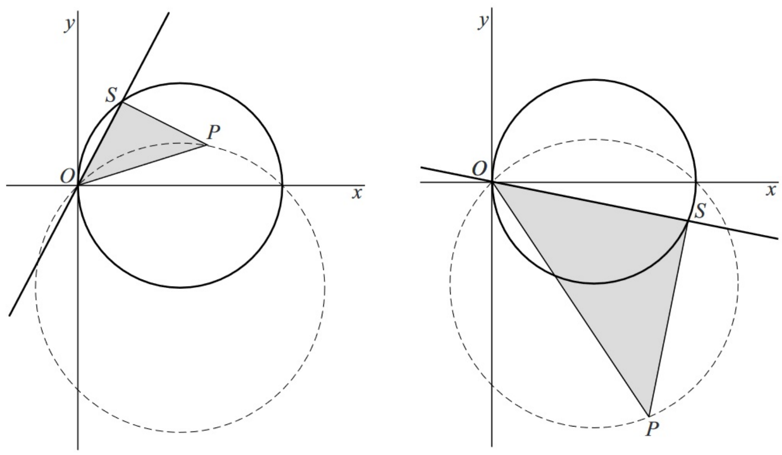
$x_P = \frac{2a+2}{a^2+1}$ en $y_P = \frac{2a-2}{a^2+1}$



Figuur 5.6

a Bewijs dat de formules voor x_P en y_P correct zijn.

Bij elke waarde van a hoort een positie van P. In de twee figuren hieronder is voor twee waarden van a deze positie getekend. Als a varieert, beweegt P over een cirkel door O. Deze cirkel is gestippeld getekend.



Figuur 5.7

b Stel van de gestippelde cirkel een vergelijking op.

c Er is een waarde van a waarvoor x_P maximaal is.

Bereken exact deze waarde van a.

(bron: pilotexamen vwo B in 2016, eerste tijdvak)

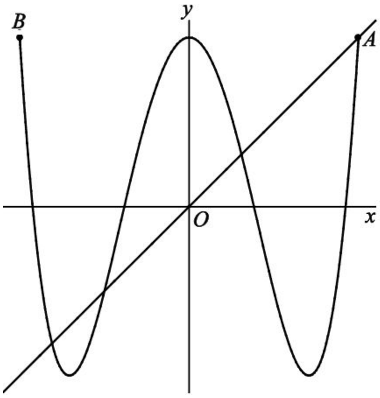
Opgave 14: Een W

Een punt P beweegt in het Oxy-vlak volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{15}t\right) \\ y(t) = \cos\left(\frac{4\pi}{15}t\right) \end{cases}$$

Hierbij zijn x en y in meters, t in seconden en $t \geq 0$.
De baan die P doorloopt heeft de vorm van een W. Op tijdstip $t = 0$ start P in punt $A(1,1)$ en op tijdstip $t = 15$ bevindt P zich voor het eerst in punt $B(-1,1)$.

In de figuur zijn de baan die P doorloopt, de punten A en B en de lijn met vergelijking $y = x$ getekend. Gedurende het tijdsinterval $[0,15]$ bevindt P zich een aantal seconden onder de lijn met vergelijking $y = x$.



Figuur 5.8

a Bereken dit aantal seconden.

Op zeker moment tijdens de beweging van A naar B passeert P de y-as. Daarbij neemt de x-coördinaat van P af.

b Bereken exact de snelheid van de x-coördinaat van P op dat moment.

(bron: examen wiskunde B vwo 2012, eerste tijdvak)

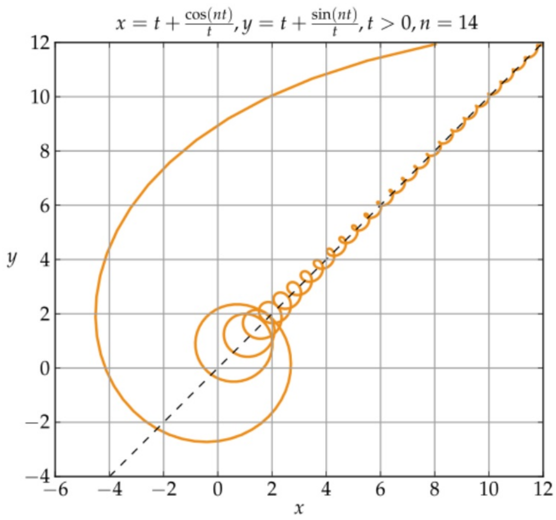
2

Functieonderzoek

2.1 Asymptotisch gedrag

Inleiding

Je hebt leren werken met functies en hun karakteristieken. De asymptoten horen bij de karakteristieken van een functie. Je hebt er al eerder kennis mee gemaakt en je kent de asymptoten van de verschillende standaardfuncties. Zelfs krommen kunnen asymptoten hebben, wat vind je van deze?



Figuur 1.1 **Bron: Wikipedia**

Je leert in dit onderwerp

- horizontale en verticale asymptoten en perforaties bepalen;
- de vergelijking van schuine asymptoten bepalen.

Voorkennis

- de karakteristieken van alle soorten functies;
- werken met limieten.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

a Plot de grafiek van f. Zorg ervoor dat alle karakteristieken in beeld zijn.

b Laat met behulp van limieten zien, dat $x = -3$ een verticale asymptoot is.

c Waarom is $x = 3$ geen verticale asymptoot van deze functie? Wat is hier aan de hand?

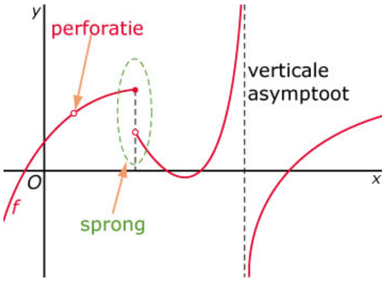
d Welke horizontale asymptoot heeft deze functie? Geef ook de bijbehorende limieten.

Uitleg 1

De asymptoten van een functie bepaal je door limieten te berekenen:

- De functie f heeft een horizontale asymptoot $y = a$ als: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$ en/of $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$
- De functie f heeft een verticale asymptoot $x = a$ als: $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \pm\infty$ en/of $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \pm\infty$

Soms lijkt een functie een verticale asymptoot te hebben (bijvoorbeeld voor $x = a$ is de noemer 0), maar leveren de bijbehorende limieten toch een waarde op. In dat geval spreek je van een perforatie als die waarden hetzelfde zijn. Zijn ze verschillend dan heeft de grafiek een sprong.



Figuur 1.2

Je kent de volgende standaardlimieten al:

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

  $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$ en $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$ voor n oneven

  $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$ voor n even
- $\lim_{x \to \infty} g^x = 0$ voor $0 < g < 1$ en $\lim_{x \to -\infty} g^x = 0$ voor $g > 1$
- $\lim_{x \downarrow 0} {}^g\log(x) = \infty$ voor $0 < g < 1$ en $\lim_{x \downarrow 0} {}^g\log(x) = -\infty$ voor $g > 1$
- $\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi} \tan(x) = \infty$ en $\lim_{x \downarrow \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi} \tan(x) = -\infty$

Om te bedenken waar precies de asymptoten zouden kunnen zitten, moet je de grafieken van de standaardfuncties goed kennen. En verder bij samengestelde functies bedenken of ze zijn ontstaan door transformatie van een standaardfunctie, of anderszins op bepaalde standaardfuncties lijken.

Opgave 1

Geef van de functies aan hoe ze uit de standaardgrafiek zijn ontstaan en waar de asymptoten liggen. Geef ook de limieten van deze functies als ze de asymptoten naderen.

a $f(x) = -3\ln(x+2)$

b $g(x) = \frac{2}{(x-5)^2} + 1$

c $h(x) = 3^{2-x}$

d $j(x) = 1 - \tan(2x)$

Opgave 2

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

Deze functie is niet door transformaties uit een standaardfunctie af te leiden.

a Deze functie heeft twee verticale asymptoten. Welke lijnen zijn dat en hoe kun je die vinden?

b Toon de verticale asymptoten van functie f met behulp van limieten aan.

Gegeven is de functie: $g(x) = \frac{x}{x^2-x}$.

c Waarom is functie g niet gelijk aan $h(x) = \frac{1}{x-1}$?

d Welke limieten horen bij functie g? Wat betekent dit voor de grafiek van f?

Opgave 3

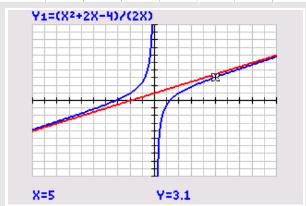
Gegeven is de functie: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

a Beargumenteer of f wel of geen horizontale asymptoot heeft. Zo ja, geef deze.

b Heeft functie f een verticale asymptoot op $x = 0$? Leg uit waarom wel of niet.

Uitleg 2

Bekijk de grafiek van de functie: $f(x) = \frac{x^2+2x-4}{2x}$.



Figuur 1.3

Je kunt het functievoorschrift schrijven als: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{2}{x}$.

De verticale asymptoot is gelijk aan $x = 0$ wat je met limieten kunt nagaan.

Hoe verder de x-waarden van de verticale as af liggen, hoe dichter de grafiek bij een rechte schuine lijn komt.

Deze lijn heet de scheve (of schuine) asymptoot van f.

Aan het functievoorschrift kun je zien dat deze asymptoot de vergelijking $y = \frac{1}{2}x + 1$ heeft, want

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x}\right) = 0$$

Dus voor x-waarden ver van 0 is $f(x) \approx \frac{1}{2}x + 1$. Hetzelfde geldt voor $x \to -\infty$.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

a Laat zien dat $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{2}{x}$.

b Toon aan dat de scheve asymptoot van f de functie nergens snijdt.

Opgave 5

De volgende functies hebben een scheve asymptoot. Toon dit aan en bepaal de vergelijking van deze asymptoot.

a $f(x) = -\frac{1}{3}x + 25 - \frac{1}{x^2}$

b $g(x) = \frac{3x^2+1}{x}$

c $h(x) = \frac{x^2+5x+4}{x+5}$

Theorie en voorbeelden

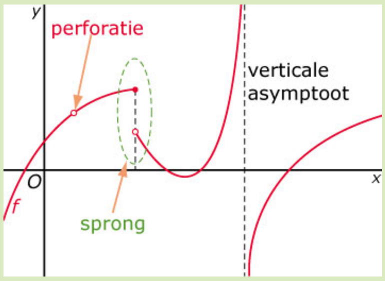
Om te onthouden

Veel functies hebben asymptoten. Er zijn verschillende soorten:

- **horizontale asymptoten**:
  Een functie f heeft een horizontale asymptoot $y = c$ als er een constante waarde c bestaat waarvoor
  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ en/of $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$.
  Gebroken functies (standaardvorm $y = \frac{1}{x^n}$ met $n > 0$ en geheel) en exponentiële functies (standaardvorm $y = g^x$) hebben een horizontale asymptoot.
- **verticale asymptoten**:
  Een functie f heeft een verticale asymptoot $x = a$ als er een constante waarde a bestaat waarvoor
  $\lim_{x \uparrow a} f(x) \to -\infty$ of $\lim_{x \uparrow a} f(x) \to \infty$ en/of $\lim_{x \downarrow a} f(x) \to -\infty$ of $\lim_{x \downarrow a} f(x) \to \infty$.
  Gebroken functies, logaritmische functies (standaardvorm $y = {}^g\log(x)$) en de tangensfunctie hebben verticale asymptoten.
- **scheve asymptoten**:
  Een functie f heeft een scheve asymptoot $y = ax + b$ als
  $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ en/of $\lim_{x \to \infty} f(x) - (ax + b) = 0$.
  Bij gebroken functies kun je vaak de schuine asymptoot vinden door het functievoorschrift te herleiden.

Sommige functies hebben een **perforatie**.

Een functie f heeft een perforatie met coördinaten (a,c) als $f(a)$ niet gedefinieerd is en er een constante waarde c bestaat waarvoor $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = c$.



Figuur 1.4

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de functies:

- $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$
- $g(x) = \mathrm{e}^{-3x+6} + 15$
- $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Bepaal van deze functies met behulp van transformaties en limieten alle asymptoten en perforaties.

Antwoord

- $f(x) = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$ mits $x \neq -1$.
  Functie f ontstaat uit de standaardgrafiek $y = \frac{1}{x}$ na een horizontale translatie van 1.
  Er geldt: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 0$

en $\lim\limits_{x\uparrow 1} \frac{1}{x-1} = -\infty$ en $\lim\limits_{x\downarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

en $\lim\limits_{x\uparrow -1} \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\downarrow -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$

De functie f heeft dus een horizontale asymptoot $y = 0$, een verticale asymptoot $x = 1$, en een perforatie op $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

- $g(x) = \text{e}^{-3(x-2)} + 15$

  Functie g ontstaat uit de standaardgrafiek $y = \text{e}^x$ na een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $-\frac{1}{3}$, waarbij de grafiek verticaal gespiegeld is, een horizontale translatie van 2 en een verticale translatie van 15.

  Er geldt: $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 15$

  De functie g heeft dus een horizontale asymptoot $y = 15$.

- $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x^{-1}\right) = -\ln(x)$

  Functie h ontstaat uit de standaardgrafiek $y = \ln(x)$ na een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met -1, waarbij de grafiek gespiegeld is.

  Er geldt: $\lim\limits_{x\uparrow 0} h(x) = -\infty$

  De functie h heeft dus een verticale asymptoot $x = 0$.

Opgave 6

Onderzoek met behulp van limieten of de functies asymptoten of perforaties hebben.

a $f(x) = \frac{\text{e}^{3x}+5}{\text{e}^{3x}}$

b $g(x) = \ln(1 - 4x)$

c $h(x) = \tan\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}x\right)$

d $k(x) = \frac{2x}{x^2+3x}$

Voorbeeld 2

Gegeven is: $f(x) = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+1}$

Plot de grafiek en geef de vergelijkingen van de asymptoten.

Antwoord

Venster bijvoorbeeld: $[0, 2\pi] \times [-10, 2]$.
f is een gebroken goniometrische functie.

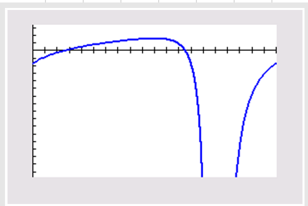
De functie is ongedefinieerd als $\sin(x) + 1 = 0$.

Hieruit volgt: $\sin(x) = -1$ en dit geeft $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ en

$$\lim_{x\uparrow 1\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi} f(x) = \lim_{x\downarrow 1\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi} f(x) = -\infty.$$

De functie f heeft dus een verticale asymptoten $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Deze functie heeft geen horizontale of schuine asymptoot omdat de waarden van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ tussen -1 en 1 blijven schommelen.



Figuur 1.5

Opgave 7

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$ en $g(x) = \frac{\sin(x)+1}{1-\sin(x)}$.

a Bepaal de asymptoten van f.

b Bepaal de asymptoten van g.

c Verklaar de verschillen tussen je antwoorden bij a en b.

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

a Plot de grafiek van f.

b Geef de vergelijkingen van de asymptoten.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{-x^3+12x^2+4}{4x^2}$.

Toon aan dat deze functie een schuine asymptoot heeft en bepaal de vergelijking hiervan.

Antwoord

$f(x) = \frac{-x^3+12x^2+4}{4x^2} = -\frac{1}{4}x + 3 + \frac{1}{x^2}$

Het lijkt er op dat $y = -\frac{1}{4}x+3$ de vergelijking van de scheve asymptoot is.

Ter controle:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - \left(-\frac{1}{4}x + 3\right)\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - \left(-\frac{1}{4}x + 3\right)\right) = 0$

Je kunt ook naar de afgeleide kijken.

Omdat $f'(x) = -\frac{1}{4} - \frac{2}{x^3}$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = -\frac{1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$ heeft de functie f een scheve asymptoot. Immers de helling van de grafiek benadert $-\frac{1}{4}$ als $x \to \pm\infty$.

Opgave 9

Toon de scheve asymptoot van de functie aan met een limiet en bepaal de vergelijking van de asymptoot.

a $f(x) = \frac{5}{x-2} + 4(x-5)$

b $g(x) = \frac{-2x^2+4}{x}$

c $h(x) = \frac{3x^2-4x-2}{x-2}$

d $k(x) = 5 - 2x + \mathrm{e}^{1-x}$

Opgave 10

De grafiek van $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ heeft twee scheve asymptoten.

a Er geldt: $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 4} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2}$.

Leg dit uit.

b Welke scheve asymptoot heeft f voor $x \to \infty$?

c Welke scheve asymptoot heeft f voor $x \to -\infty$?

Verwerken

Opgave 11

Bepaal met behulp van limieten de asymptoten en perforaties van de functies.

a $f(x) = \frac{5x}{x(x-4)}$

b $g(x) = \frac{3x(x+2)}{x}$

c $h(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{1-x}$

Opgave 12

Bepaal met de limieten de asymptoten van de functies.

a $f(x) = \frac{1}{2\cos^2(x)-1}$

b $g(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$

c $h(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

d $k(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

Opgave 13

Toon de scheve asymptoot van de functie aan met een limiet en bepaal de vergelijking van de asymptoot.

a $f(x) = \frac{5}{x-2} + 4(x-5)$

b $g(x) = \frac{-2x^2+4}{x}$

c $h(x) = 5 - 2x + \mathrm{e}^{1-x}$

Opgave 14

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} + x$.

a Plot de grafiek van de functie.

b Functie f heeft een scheve asymptoot. Gebruik een limiet om hiervan de vergelijking te bepalen.

Opgave 15

Toon aan dat de asymptoten van de functie $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1) - x + 1$ de lijnen $y = 1$ en $y = 1 - x$ zijn.

Opgave 16

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x^3+2x^2-5x+4}{x}$.

a Plot de functie.

b De functie heeft een grafiek met een zogenaamde parabolische asymptoot. Bepaal de vergelijking van de parabool waar f naartoe loopt, en plot deze bij de grafiek van a.

Toepassen

Opgave 17: Condensatorspanning

Een condensator is een elektrische component waarin je elektrische lading kunt opslaan.
Iemand heeft een elektrisch circuit met één condensator gemaakt waarin geldt: als de lege condensator wordt opgeladen, neemt de condensatorspanning toe van 0 tot een limietspanning volgens de formule:

$$U = 12 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2000C}}\right)$$

Hierin is U de condensatorspanning in volt, t de oplaadtijd in seconden en C de capaciteit van de condensator in farad.

a Een condensator met een capaciteit van $0{,}01$ farad wordt in dit circuit opgeladen. Na verloop van tijd benadert de condensatorspanning een limietspanning. Bepaal deze limietspanning.

b Bereken algebraïsch hoelang het duurt voordat de condensatorspanning 90% van de limietspanning is. Rond je antwoord af op hele seconden.

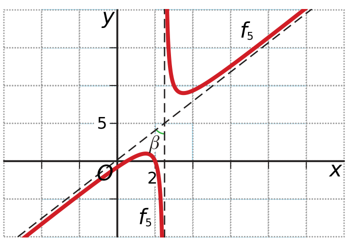
(bron: examen vwo wiskunde B in 2010, eerste tijdvak)

Opgave 18: Asymptoten en perforatie

Voor elke waarde van a wordt de functie gegeven door:

$$f_a(x) = \frac{4x^2-10x+4}{2x-a} \text{ met } x \neq \tfrac{1}{2}a$$

De grafiek van f_5 heeft een verticale asymptoot en een scheve asymptoot. De twee asymptoten snijden elkaar onder een hoek β met β in graden. In de figuur is de grafiek van f_5 met de asymptoten en hoek β weergegeven.



Figuur 1.6

a Bereken algebraïsch de waarde van β.

Er zijn waarden van a, zoals $a = 5$ (zie figuur), waarvoor de grafiek van f_a twee toppen heeft. De top met de kleinste x-coördinaat heet de linkertop.
Er is een waarde van a waarvoor de linkertop op de y-as ligt.

b Bereken exact voor welke waarde van a de linkertop op de y-as ligt.

c Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een lijn met een perforatie is.

Bereken exact, voor de grootste van die twee waarden van a, de coördinaten van de perforatie.

Testen

Opgave 19

Bepaal met behulp van limieten de asymptoten en de perforaties van de functies.

a $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x} + 5$

b $g(x) = \mathrm{e}^{3x-5}$

c $h(x) = \ln(2x) + 1$

Opgave 20

Bepaal de vergelijking van de scheve asymptoot van de functie.

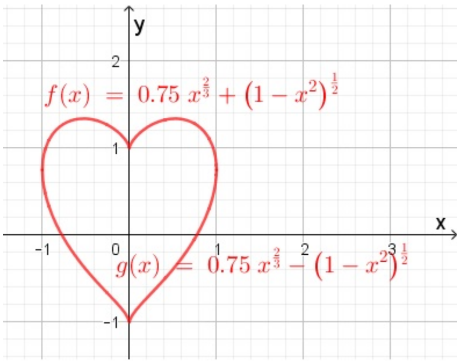
a $f(x) = \frac{2x^2+x+3}{x-1}$

b $g(x) = 4x + \frac{2}{3^x}$

2.2 Symmetrie

Inleiding

Soms zijn grafieken van functies mooi symmetrisch. Maar hoe weet je zeker dat een grafiek symmetrisch is? Welnu, dan moet er bij elk punt van de grafiek een symmetriepunt horen dat ook op de grafiek ligt. Hoe je bij een punt op de grafiek zo'n symmetriepunt vindt, hangt af van de soort symmetrie.
Hier zie je twee symmetrische functies die toch mooi één geheel vormen. Kun je zelf van die mooie symmetrische grafieken bedenken?



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- symmetrie in de grafiek van een functie herkennen;
- door berekening de symmetrie in de grafiek van een functie aantonen.

Voorkennis

- lijnsymmetrie en puntsymmetrie herkennen in een figuur;
- de karakteristieken van een functie berekenen, ook met behulp van differentiëren en limieten.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x)$.

a Breng de grafiek van f in beeld.

b Toon aan dat de grafiek van f symmetrisch is ten opzichte van de lijn $x = 0$.

c Is de grafiek van f ook puntsymmetrisch?

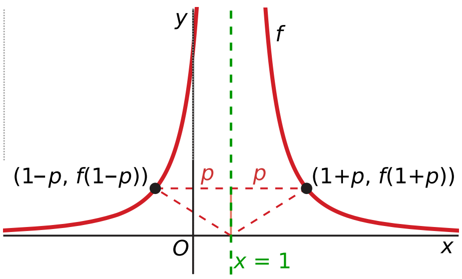
Uitleg 1

Bekijk de applet.

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

De grafiek van functie f is symmetrisch in de lijn $x = 1$.

De grafiek van een functie is symmetrisch in een lijn als er voor elk punt aan de ene kant van de lijn, op willekeurige afstand p, een punt aan de andere kant van de lijn ligt, dat op dezelfde afstand p en op dezelfde hoogte ligt.



Figuur 2.2

De symmetrie kun je bij de functie f met behulp van het functievoorschrift aantonen door te bewijzen dat: $f(1-p) = f(1+p)$.

$$f(1-p) = \frac{1}{((1-p)-1)^2} = \frac{1}{(-p)^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$f(1+p) = \frac{1}{((1+p)-1)^2} = \frac{1}{p^2}$$

Omdat p willekeurig is gekozen, is hiermee aangetoond dat de grafiek van functie f lijnsymmetrisch is in de lijn $x = 1$.

Opgave 1

In **Uitleg 1** zie je hoe je bij een grafiek lijnsymmetrie kunt aantonen.

Gegeven is de functie f door $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
Toon aan dat de grafiek van deze functie symmetrisch is ten opzichte van de lijn $x = 1$.

Opgave 2

Onderzoek met behulp van het functievoorschrift of de grafiek van de functie lijnsymmetrisch is ten opzichte van de y-as.

a $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}+1}{\mathrm{e}}$

b $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$

c $h(x) = x^3 - x$

Uitleg 2

Bekijk de applet.

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} - 2$.

De grafiek van een functie is puntsymmetrisch in een punt P als de y-coördinaat van het symmetriepunt in het midden ligt van de y-coördinaten van twee punten aan weerszijden en even ver verwijderd van het symmetriepunt.

$f(1+p) = \frac{1}{((1+p)-1)^3} - 2 = \frac{1}{p^3} - 2$

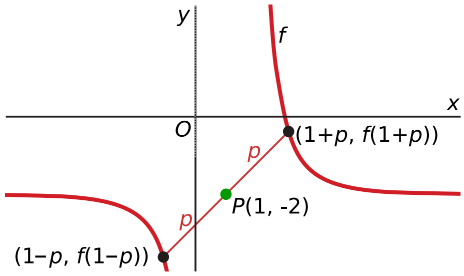
$f(1-p) = \frac{1}{((1-p)-1)^3} - 2 = \frac{1}{(\text{-}p)^3} - 2$

$= \text{-}\frac{1}{p^3} - 2$

Het gemiddelde van deze functiewaarden is:

$\frac{f(1-p)+f(1+p)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\text{-}\frac{1}{p^3} - 2 + \frac{1}{p^3} - 2\right) = \frac{\text{-}4}{2} = \text{-}2$

Omdat $y_P = \text{-}2$ en p willekeurig is gekozen, is hiermee aangetoond dat de grafiek van functie f puntsymmetrisch is in het punt $(1, \text{-}2)$.



Figuur 2.3

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

a Bereken het verticale verschil tussen punt $P(1, \text{-}2)$ en het punt met coördinaten $(1-p, f(1-p))$. Bereken ook het verticale verschil tussen punt P en het punt met coördinaten $(1+p, f(1+p))$.

b Hoe kun je aan de hand van het antwoord bij a concluderen dat functie f puntsymmetrisch is ten opzichte van P?

Opgave 4

Laat zien, dat de functies puntsymmetrisch zijn ten opzichte van het gegeven punt.

a $f(x) = \frac{1}{(x-3)^5} + 4$ ten opzichte van $(3{,}4)$.

b $g(x) = \frac{x-3}{2-x}$ ten opzichte van $(2, \text{-}1)$.

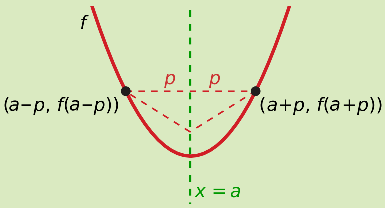
c $h(x) = \sin(x)$ ten opzichte van $(2\pi{,}0)$.

Theorie en voorbeelden

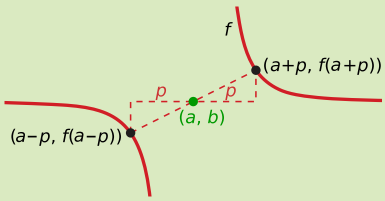
Om te onthouden

Er zijn bij grafieken van functies twee soorten symmetrie te onderscheiden: lijnsymmetrie en puntsymmetrie. Beide soorten symmetrie kunnen aangetoond worden met behulp van het functievoorschrift.

- De grafiek van een functie f is **lijnsymmetrisch** ten opzichte van de lijn $x = a$ als voor iedere willekeurige p geldt: $f(a-p) = f(a+p)$
- De grafiek van een functie f is **puntsymmetrisch** ten opzichte van punt (a,b) als voor iedere willekeurige p geldt: $\frac{f(a-p)+f(a-p)}{2} = b$



Figuur 2.4



Figuur 2.5

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{3\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$.

Toon aan dat de grafiek van $f(x)$ symmetrisch is ten opzichte van de lijn $x = \pi$.

Antwoord

De grafiek is lijnsymmetrisch ten opzichte van $x = \pi$ als voor willekeurige p geldt: $f(\pi - p) = f(\pi + p)$.

Er geldt:

$$f(\pi - p) = \frac{3\cos(\pi-p)}{1+\sin^2(\pi-p)} = \frac{\text{-}3\cos(p)}{1+\sin^2(p)}$$

$$f(\pi + p) = \frac{3\cos(\pi+p)}{1+\sin^2(\pi+p)} = \frac{\text{-}3\cos(p)}{1+\sin^2(p)}$$

$f(\pi - p) = f(\pi + p)$ voor een willekeurige p, dus f is lijnsymmetrisch ten opzichte van $x = \pi$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Waarom geldt $\sin^2(\pi - p) = \sin^2(p)$ en $\cos(\pi - p) = -\cos(p)$?

b In welke lijnen is de grafiek van f ook symmetrisch?

c Bewijs ook in deze lijnen lijnsymmetrie in de grafiek van f.

Opgave 6

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{3}{x^2 - 2x}$.

a Plot de grafiek.
Ten opzichte van welke lijn lijkt de grafiek van $f(x)$ lijnsymmetrisch te zijn?

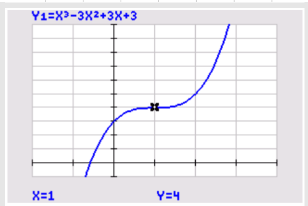
b Bewijs dat de grafiek van $f(x)$ lijnsymmetrisch is.

Voorbeeld 2

Gegeven is: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$.
Toon aan dat de grafiek van deze functie puntsymmetrisch is in $P(1,4)$.

Antwoord

De grafiek is puntsymmetrisch in $P(1,4)$ als voor willekeurige p geldt:
$\frac{f(1+p)+f(1-p)}{2} = 4$
Dat wil zeggen, het gemiddelde van de functiewaarden van twee punten die op gelijke afstand p van het symmetriepunt op de grafiek liggen moet gelijk zijn aan de y-coördinaat van P.



Figuur 2.6

Er geldt:

$$\begin{aligned} f(1-p) &= (1-p)^3 - 3(1-p)^2 + 3(1-p) + 3 \\ &= -p^3 + 3p^2 - 3p + 1 - 3 + 6p - 3p^2 + 3 - 3p + 3 \\ &= -p^3 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1+p) &= (1+p)^3 - 3(1+p)^2 + 3(1+p) + 3 \\ &= p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - 3 - 6p - 3p^2 + 3 + 3p + 3 \\ &= p^3 + 4 \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $\frac{f(1-p)+f(1+p)}{2} = \frac{-p^3+4+p^3+4}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Dit is gelijk aan de y-coördinaat van P, dus f is puntsymmetrisch in $P(1,4)$.

Opgave 7

Gegeven is de functie: $f(x) = 6 - \frac{1}{2}(2x + 6)^3$.

a Bepaal het punt van symmetrie.

b Bewijs dat de grafiek van f puntsymmetrisch is.

c Bewijs dat de grafiek van f' ook punt- of lijnsymmetrisch is.

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{x+3} - 2x$.

a Toon aan dat $P(-3,6)$ het snijpunt is van de asymptoten van f.

b Toon aan dat P een symmetriepunt is van f.

Opgave 9

Gegeven is de functie: $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

a Toon aan dat de grafiek van de functie f lijnsymmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$.

b Toon aan dat de grafiek van de functie f puntsymmetrisch is in het punt $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is: $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$.

a Toon aan dat de grafiek van f lijnsymmetrisch is in $x = 0$.

b Toon aan dat de grafiek van $f'(x)$ puntsymmetrisch is in $(0,0)$.

Opgave 11

Gegeven is de functie: $f(x) = (x-2)^4 + x^2 - 4x + 7$.
Toon aan dat de grafiek van f symmetrisch is ten opzichte van de lijn $x = 2$.

Opgave 12

Gegeven is de functie: $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x}$.

a Plot de grafiek van $f(x)$.

b In welke lijn is de grafiek van $f(x)$ symmetrisch?

c Bewijs deze symmetrie.

Opgave 13

Toon aan dat de grafiek van de functie $f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 1$ puntsymmetrisch is.

Opgave 14

Bewijs dat de grafiek van $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ een vorm van symmetrie heeft.

Opgave 15

Een functie f wordt voor $x < 2$ gegeven door: $f(x) = x^2 - 2$.
De grafiek van f is puntsymmetrisch in $P(2,2)$.
Geef het functievoorschrift van f voor $x \geq 2$, en controleer dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in P.

Toepassen

Opgave 16: Kansdichtheidsfunctie

Een normaal verdeelde stochast met gemiddelde μ en standaardafwijking σ heeft een zogeheten kansdichtheidsfunctie, gegeven door:

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

De grafiek van deze functie heet de normaalkromme. De oppervlakte van het gebied onder deze normaalkromme begrensd door twee waarden van x is het percentage van de totale oppervlakte onder de normaalkromme dat dit gebied beslaat.

Op een middelbare school wordt de reistijd naar school in minuten onder de leerlingen onderzocht.
Deze reistijd blijkt normaal verdeeld te zijn met $\mu = 30$ en $\sigma = 12$.
Toon aan dat de bijbehorende kansdichtheidsfunctie symmetrisch is.

Opgave 17: Symmetrie functie en afgeleide

Toon aan dat als de grafiek van een functie f puntsymmetrisch is in (a,b), de grafiek van de afgeleide f' lijnsymmetrisch is in $x = a$.

Testen

Opgave 18

Gegeven is de functie: $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$.

a Plot de grafiek van $f(x)$.

b Bepaal of de grafiek van f lijn- of puntsymmetrisch is.

c Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is.

Opgave 19

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{3\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$.

Toon aan dat de grafiek van $f(x)$ puntsymmetrisch is ten opzichte van het punt $\left(\frac{1}{2}\pi,0\right)$.

2.3 Raakproblemen

Inleiding

Je weet wel hoe je de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek van een gegeven functie opstelt als het raakpunt bekend is. Maar hoe stel je ook weer de raaklijnvergelijking op als het punt niet op de grafiek ligt? En kunnen twee grafieken elkaar ook raken? En hoe bepaal je of dit het geval is?
Kortom: er bestaan allerlei raakproblemen.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- onderzoeken wanneer grafieken elkaar raken, dan wel loodrecht snijden;
- de hoek berekenen waaronder grafieken elkaar in een cartesisch assenstelsel snijden;
- een vergelijking van een raaklijn aan de grafiek van een gegeven functie opstellen ook als het gegeven punt van die raaklijn niet op de grafiek ligt.

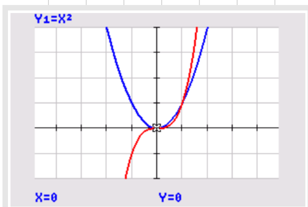
Voorkennis

- een vergelijking van een raaklijn aan de grafiek van een gegeven functie opstellen als het gegeven punt van die raaklijn op de grafiek ligt;
- in een cartesisch assenstelsel van twee (raak)lijnen bepalen of ze loodrecht op elkaar staan, dan wel de hoek tussen beide uitrekenen;
- de karakteristieken van een functie berekenen, ook met behulp van differentiëren en limieten.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de grafieken van de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$ met op beide assen dezelfde schaalverdeling. Als je beide grafieken bekijkt, zie je dat ze twee gemeenschappelijke punten hebben. In $(0,0)$ raken beide grafieken elkaar.



Figuur 3.2

a Wat wordt bedoeld met de uitspraak ‘beide grafieken raken elkaar’?

b Aan welke voorwaarden moet worden voldaan als de grafieken van twee functies elkaar raken? Bewijs dat de twee gegeven functies elkaar raken.

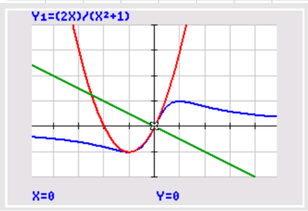
c De grafieken van beide functies snijden elkaar ook nog in een ander punt dan in het gemeenschappelijke raakpunt. Bereken de coördinaten van dit andere snijpunt.

d Onder welke hoek snijden f en g elkaar in dat punt?
Waarom zie je die hoek alleen in een cartesisch assenstelsel?

Uitleg 1

Hier zie je de grafieken van de functies: $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$,

$g(x) = x^2 + 2x$ en $h(x) = -\frac{1}{2}x$.



Figuur 3.3

De grafieken van f en g lijken elkaar te raken, want beide hebben punten gemeenschappelijk waarin ze dezelfde richting lijken te hebben.
Als dit het geval is dan moet in dit punt gelden: $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$.
Uit $f(x) = g(x)$ volgt $x = 0 \vee x = -1$ en dus zijn $(0,0)$ en $(-1,-1)$ de gemeenschappelijke punten van de grafieken van f en g.

Je hoeft nu alleen nog maar de controleren of in deze punten ook $f'(x) = g'(x)$.

De grafieken van f en h lijken elkaar loodrecht te snijden. Dat kun je natuurlijk alleen echt zien in een cartesisch assenstelsel. Als dit het geval is dan moeten hun raaklijnen in hun gemeenschappelijke punt loodrecht zijn.

In dit punt moet gelden: $f(x) = h(x)$ en $f'(x) \cdot h'(x) = -1$.
$f(x) = h(x)$ geeft $x = 0$, dus de grafieken van f en h snijden elkaar in $(0,0)$.
Nu nog controleren of $f'(x) \cdot h'(x) = -1$ in dit punt.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

a Laat zelf door berekening zien dat de grafieken van f en g elkaar raken.

b Toon aan dat de grafieken van f en h elkaar in $(0,0)$ loodrecht snijden.

c Waarom snijden de grafieken van g en h elkaar in $(0,0)$ ook loodrecht?

Opgave 2

Bekijk de functies g en h uit **Uitleg 1**.

a Beide functies hebben behalve $(0,0)$ nog een snijpunt.
Bereken de exacte coördinaten daarvan.

In de figuur in de uitleg zie je dat beide functies elkaar in dit tweede snijpunt niet loodrecht snijden. De raaklijn aan de grafiek van g maakt een andere hoek met de grafiek van h.

b Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van g en bereken daarmee de hoek die deze raaklijn met de grafiek van h maakt.

De hoek die je bij b hebt berekend is de hoek tussen beide grafieken van g en h in het punt $(-2{,}5; 1{,}25)$.

c Waarom kun je die hoek alleen goed zien in een cartesisch assenstelsel?

Uitleg 2

Bekijk de applet.

Bekijk de grafiek van functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ en het punt $P(2,1)$.

Je ziet dat er twee raaklijnen aan de grafiek f door P gaan.
Maar hoe stel je de vergelijkingen van deze raaklijnen op?

Een raaklijn k heeft de vorm $k : y = ax + b$ en heeft raakpunt $M(p, f(p))$. Dan geldt:

- richtingscoëfficiënt $a = f'(p)$
- lijn k gaat door $P(2,1)$, dus $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p)-1}{p-2}$

Dus $f'(p) = \frac{f(p)-1}{p-2}$.

Omdat $f'(x) = x$ wordt dit: $p = \frac{\frac{1}{2}p^2+2-1}{p-2}$, zodat $p^2 - 2p = \frac{1}{2}p^2 + 1$ en $\frac{1}{2}p^2 - 2p - 1 = 0$.

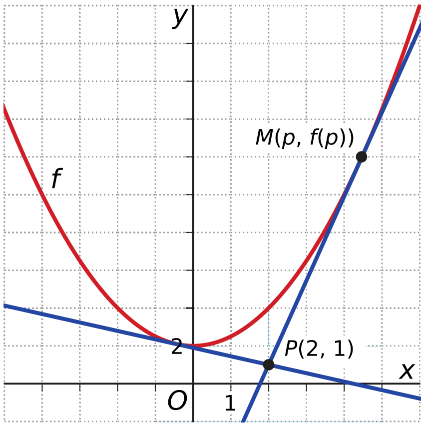
Eén van beide raaklijnen heeft een positieve helling. Met de abc-formule vind je: $p = \frac{4+\sqrt{24}}{2} = 2 + \sqrt{6}$.

Omdat $a = f'(p) = p$ is dit ook de richtingscoëfficiënt die raaklijn.

De vergelijking wordt daarom $y = \left(2 + \sqrt{6}\right)x + b$.

Invullen van $P(2,1)$ geeft: $b = -3 - 2\sqrt{6}$.

De vergelijking van deze raaklijn wordt: $y = \left(2 + \sqrt{6}\right)x - 3 - 2\sqrt{6}$.



Figuur 3.4

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

a Stel de vergelijking van de andere raaklijn op.

b Gegeven is het punt $Q(1,4)$. Zijn er raaklijnen aan f door dit punt? Licht je antwoord toe.

Opgave 4

Gegeven is de parabool $f(x) = -(x-4)^2 + 7$ en het punt $P(0,0)$.
Door punt P gaan twee raaklijnen k en l aan de grafiek van f.

Stel de vergelijkingen op van deze raaklijnen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Gegeven zijn de functies f en g. De grafieken van f en g hebben een gemeenschappelijk punt $A(x_A, f(x_A))$. Dan geldt het volgende:

- als $f'(x_A) = g'(x_A)$ dan is A een **raakpunt** en raken beide grafieken elkaar;
- als $f'(x_A) \cdot g'(x_A) = -1$ dan zijn grafieken van f en g **loodrecht snijdend** in A.

Gegeven is functie f en punt $B(x_B, y_B)$ buiten de grafiek van f.

Om de **vergelijking van een raaklijn aan de grafiek van f door een punt B buiten de grafiek** op te kunnen stellen, noem je het raakpunt op de grafiek van f punt $P(p, f(p))$.

Voor de richtingscoëfficiënt van een raaklijn $l: y = ax + b$ geldt

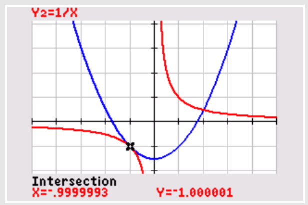
$a = f'(p) \wedge a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p) - y_B}{p - x_B}$

Uit $f'(p) = \frac{f(p) - y_B}{p - x_B}$ volgen één of meer waarden voor p, waarmee je de coördinaten van alle raakpunten P kunt berekenen en de vergelijking(en) van de raaklijn(en) kunt opstellen.

Voorbeeld 1

Bekijk de figuur met de grafieken van: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}$ en $g(x) = \frac{1}{x}$.

De grafieken hebben twee snijpunten. In het linker snijpunt lijken ze elkaar te raken, in het rechter snijpunt lijken ze elkaar loodrecht te snijden. Ga algebraïsch na of beide beweringen juist zijn.



Figuur 3.5

Antwoord

De grafieken snijden elkaar wanneer $f(x) = g(x)$.

Met de grafische rekenmachine vind je $x = -1$ en $x = 2$ voor de snijpunten.

Dus de grafieken snijden elkaar in $(-1, -1)$ en $(2, -1)$.

Wanneer twee grafieken van de functies f en g elkaar raken moet in dat punt ook gelden: $f'(x) = g'(x)$.

Er geldt: $f'(x) = x$ en $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Je vindt: $f'(-1) = -1$ en $g'(-1) = -1$.
Dus $(-1, -1)$ is een raakpunt.

Wanneer de twee grafieken elkaar loodrecht snijden moet in dat punt gelden: $f'(x) \cdot g'(x) = -1$.

Hierin is $f'(2) = 2$ en $g'(2) = -\frac{1}{4}$.

Omdat $2 \cdot -\frac{1}{4} \neq -1$ snijden de grafieken elkaar niet loodrecht.

Opgave 5

Bekijk de functies in **Voorbeeld 1**.

a Bereken de snijpunten van f en g algebraïsch.

b Bereken algebraïsch de grootte van de hoek bij het rechter snijpunt.
Rond je antwoord af op één decimaal.

Opgave 6

Onderzoek algebraïsch of de grafieken van de functies $f(x) = \text{e}^x$ en $g(x) = \text{e}^{\frac{1}{x}}$ elkaar raken of loodrecht snijden.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$.
Stel vergelijkingen op van de raaklijnen door $P(0,2)$ aan de grafiek van f.
Rond af op twee decimalen.

Antwoord

De raaklijnen zijn van de vorm $y = ax + b$.
Ze raken de grafiek in punten van de vorm $M(p,f(p))$.
Er geldt:

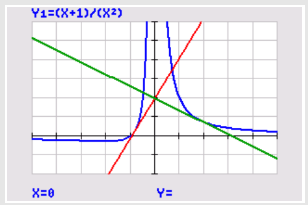
- de richtingscoëfficiënt van de raaklijnen is: $a = f'(p)$ dus $a = -\frac{p+2}{p^3}$
- omdat de raaklijnen door $P(0,2)$ gaan geldt: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p)-2}{p-0}$

Stel deze uitdrukkingen voor a aan elkaar gelijk en herleid:

$$\begin{aligned} -\frac{p+2}{p^3} &= \frac{f(p)-2}{p} \\ -\frac{p+2}{p^2} &= \frac{p+1}{p^2} - 2 \\ -(p+2) &= p+1-2p^2 \\ 2p^2-2p-3 &= 0 \end{aligned}$$

De abc-formule geeft: $p = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}$ en $p = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Invullen in $f'(p) = a$ geeft: $a \approx 2{,}11 \vee a \approx -0{,}63$.
De vergelijkingen van de raaklijnen (in de figuur weergegeven) zijn: $y \approx 2{,}11x + 2$ en $y \approx -0{,}63x + 2$.



Figuur 3.6

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.
Stel de vergelijkingen van de raaklijnen v en w op door $Q(2,0)$.
Rond af op twee decimalen.

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{2x+7}{x+4}$.

Er zijn twee raaklijnen aan f die door het punt $(0,4)$ gaan.
Stel de vergelijkingen op van deze raaklijnen.

Verwerken

Opgave 9

Bewijs dat de grafieken van $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $g(x) = \sqrt{x}$ elkaar loodrecht snijden.

Opgave 10

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$.

Er is een lijn l door $P(0,\text{-}1)$ die de grafiek van f raakt.
Stel daarvan de vergelijking op.

Opgave 11

De grafiek van $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{x}$ snijdt de x-as in twee punten.

a Bereken algebraïsch of de raaklijnen aan f in de twee snijpunten met de x-as loodrecht op elkaar staan.

b Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot.

c Onderzoek of de grafiek van f een raaklijn heeft die de scheve asymptoot loodrecht snijdt.

Opgave 12

Onder welke hoek snijden de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ elkaar in een cartesisch assenstelsel?

Opgave 13

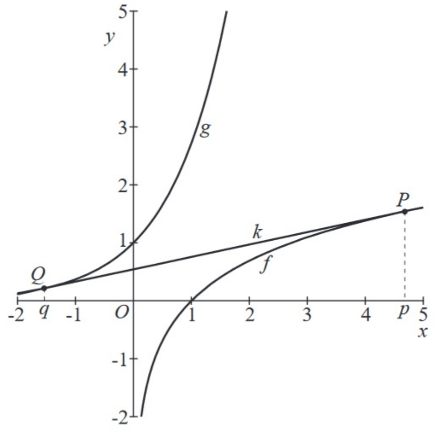
Gegeven is de functie: $f(x) = \text{-}\frac{1}{2}x^2 + x\sqrt{x}$.

Er zijn twee lijnen l en m door punt $Q(2,\text{-}2)$ die de grafiek van f loodrecht snijden en een positieve helling hebben.
Stel de vergelijkingen op van die lijnen. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Toepassen

Opgave 14: Een gemeenschappelijke raaklijn

Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = \mathrm{e}^x$. Bekijk de figuur met de grafieken van beide functies. De lijn k is een gemeenschappelijke raaklijn aan de grafieken van f en g. Het punt waarin k de grafiek van f raakt, heet $P(p, \ln(p))$, met $p > 0$. Het punt waarin k de grafiek van g raakt, heet $Q(q, \mathrm{e}^q)$, met $q < 0$.



Figuur 3.7

a Omdat k een raaklijn is in punt P aan de grafiek van f, is $y = \frac{1}{p}x + \ln(p) - 1$ een formule voor k. Toon dit aan.

Omdat k een raaklijn is in punt Q aan de grafiek van g, is ook $y = \mathrm{e}^q\, x + \mathrm{e}^q\,(1-q)$ een formule voor k. Met de formules kan er een verband tussen p en q gelegd worden:

$\frac{1}{p} = \mathrm{e}^q = \frac{\ln(p) - \mathrm{e}^q}{p-q}$

b Toon dit aan.

c Toon aan dat er moet gelden: $p^{1-p}\,\mathrm{e}^{p+1} = 1$.

d Bereken in twee decimalen de richtingscoëfficiënt van de gemeenschappelijke raaklijn k.

(bron: examen wiskunde B1,2 in 2009, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

De raaklijn l aan f gaat door $O(0,0)$. Stel de vergelijking op van l.

Opgave 16

Gegeven is $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x\sqrt{x}$ met $x \geq 0$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten en de extremen van f.

b Bereken algebraïsch de hoeken waaronder de grafiek van f de x-as snijdt.

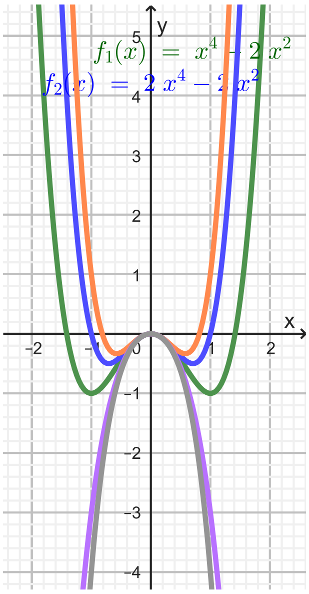
c Er is een lijn door $(8,0)$ die de grafiek van f loodrecht snijdt en een positieve richtingscoëfficiënt heeft. Bereken de coördinaten van het snijpunt van deze lijn met de grafiek van f.

2.4 Families van functies

Inleiding

Bekijk de applet.

Je ziet hier een familie van functies. Met welke functie je te maken hebt, hangt af van de waarde van de parameter p. Je kunt nu kijken naar de eigenschappen van deze familie van functies. Bijvoorbeeld hoeveel toppen hun grafieken hebben, hoeveel snijpunten met de assen, of er een functie in deze familie waarvan de grafiek raakt aan de x-as, ...
Maar je kunt ook een waarde van p kiezen en dan vragen naar oppervlakte en omtrek van ingesloten vlakdelen, raaklijnen, e.d.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met families van functies, met parameters dus;
- alle bekende technieken gebruiken bij situaties waarin parameters voorkomen.

Voorkennis

- de karakteristieken van een functie berekenen, ook met behulp van differentiëren en limieten;
- vergelijkingen van raaklijnen aan een grafiek opstellen, onderzoeken of grafieken elkaar raken of loodrecht snijden;
- met behulp van primitiveren en de grafische rekenmachine booglengtes, oppervlaktes begrensd door grafieken van functies en inhouden van omwentelingslichamen berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = px^4 - 2x^2$.

a Toon aan dat f_p voor elke p minstens één uiterste waarde heeft.

b Voor welke waarde van p gaat de grafiek van f_p door het punt $A(3,0)$?

c Op welke kromme liggen alle toppen van de grafiek van f_p? Geef van deze kromme het functievoorschrift.

Uitleg

Bekijk de applet.

Bekijk vijf grafieken van de familie van functies $f_p(x) = px^4 - 2x^2$ voor $p = 1, 2, 3, -1$ en -2.

De grafiek is afhankelijk van de waarde van de parameter p. Soms heeft die grafiek meerdere toppen, soms maar één. Maar altijd liggen de toppen van de grafiek van f_p op dezelfde kromme. Om van deze kromme een vergelijking op te stellen ga je de toppen van de grafiek bepalen.

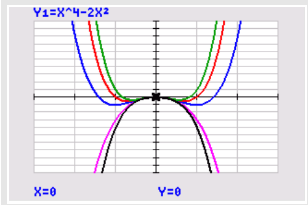
De afgeleide van f_p is $f'_p(x) = 4px^3 - 4x$.

$f'_p(x) = 0$ geeft $x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{p}$

Bij $x = 0$ hoort $y = 0$ en dit levert $(0,0)$ als top op.

Bij $x^2 = \frac{1}{p}$ hoort $p = \frac{1}{x^2}$ en dus $y = \frac{1}{x^2} \cdot x^4 - 2x^2 = -x^2$.

Dit levert voor $x \neq 0$ de toppen $(x, -x^2)$ op.
Deze toppen liggen met $(0,0)$ op de kromme met vergelijking $y = -x^2$.



Figuur 4.2

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Voor welke waarde van p gaat de grafiek van f_p door het punt $A(2,3)$?

b Voor welke waarde van p hebben twee toppen van de grafiek van f_p de y-waarde -2?

c Uiteindelijk liggen alle toppen van de grafiek van f_p op de kromme $y = -x^2$.
Laat zelf zien hoe je dit kunt afleiden door alle toppen uit te drukken in p.

Opgave 2

Gegeven is de parabool met functievoorschrift $g_b(x) = 3x^2 + bx - 2$.

a De parabool gaat door het punt $A(-2,-3)$. Bereken b.

b Op welke kromme liggen alle toppen van de parabool? Laat alle tussenstappen zien in jouw afleiding.

Opgave 3

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$ met domein $[0,1]$.

a De lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van g in A_p en de grafiek van f in B_p. Druk de lengte van lijnstuk A_pB_p uit in p.

b Bereken voor welke waarde van p de lengte van A_pB_p maximaal is.

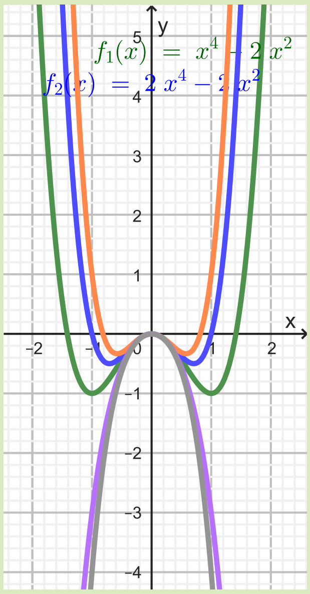
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Een **familie van functies** ontstaat als in het functievoorschrift behalve de variabele x die hoort bij de horizontale as, nog een extra variabele voor komt. Die extra variabele heet een **parameter**. Hiernaast kun je de grafieken van de familie functies met voorschrift $f_p(x) = px^4 - 2x^2$ bekijken.

Bij dergelijke families van functies kun je met de bekende differentieer- en primitiveertechnieken allerlei berekeningen uitvoeren op het gebied van extremen en buigpunten berekenen, raaklijnen opstellen, onderzoeken of er van raken sprake is, oppervlakte en omtrek van ingesloten vlakdelen berekenen, inhouden van omwentelingslichamen berekenen, en nog veel meer.



Figuur 4.3

Voorbeeld 1

Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = 0{,}1x^5 - 1{,}5x^3 + a$ en $g(x) = 1{,}6x$.

Bereken de oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van f_0 en g.

Voor welke a heeft f_a twee toppen die op de grafiek van g liggen?

Antwoord

Bekijk eerst de grafieken van f_0 en g. Je ziet dan dat er twee congruente vlakdelen door beide grafieken worden ingesloten. De totale oppervlakte van het ingesloten deel is daarom 2 keer de oppervlakte van (bijvoorbeeld) het rechter deel.

$0{,}1x^5 - 1{,}5x^3 = 1{,}6x$ geeft
$x = 0 \vee x^4 - 15x^2 - 16 = \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 - 16\right) = 0$.
Dus $x = 0 \vee x = \pm 4$.

De gevraagde oppervlakte is

$$2 \cdot \int_0^4 1{,}6x - \left(0{,}1x^5 - 1{,}5x^3\right) \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \left[0{,}8x^2 - \frac{1}{60}x^6 + \frac{3}{8}x^4\right]_0^4 = \frac{1216}{15}$$

$f'_a(x) = 0$ geeft $0{,}5x^4 - 4{,}5x^2 = 0$ dus $x = 0 \vee x = \pm 3$. De toppen zijn $(3; 16{,}2 + a)$ en $(-3; -16{,}2 + a)$. (Het punt $(0, a)$ is een buigpunt.) De juiste waarden van a vind je door invullen in $g(x)$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken zelf met behulp van primitiveren de gevraagde oppervlakte.

b Laat zien hoe de coördinaten van de toppen op de kromme worden berekend. Bereken zelf de waarden van a waarvoor die toppen op de grafiek van g liggen.

c Voor welke waarde van a is de raaklijn aan f_a evenwijdig aan de grafiek van g?

Opgave 5

Gegeven is de functie $f_p(x) = \text{e}^{px^2}$ met $p \neq 0$.

a Bewijs dat elke functie f_p precies één extreme waarde heeft.

b Voor welke p heeft f_p precies twee buigpunten?

c Bereken op algebraïsche wijze de vergelijking van de raaklijn aan f_p in het punt met x-coördinaat 1.

d Deze raaklijn gaat door het punt $P\left(1,\frac{1}{\text{e}}\right)$. Bereken p.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ getekend op het domein $[0,\pi]$. $ABCD$ is een rechthoek met $A(0,0)$, B op de x-as, C op de grafiek van f en D op de y-as.

Bereken de maximale oppervlakte van de rechthoek $ABCD$.

Antwoord

De gevraagde oppervlakte is $A(x) = x \cdot \sin(x)$. (Maak eventueel een schets.)

$A'(x) = \sin(x) + x\cos(x) = 0$ oplossen geeft
$x = 0 \vee x \approx 2{,}03 \vee x \approx 4{,}91$.

Dit invullen in $A(x)$ geeft de maximale oppervlakte van $\approx 1{,}82$ bij $x \approx 2{,}03$.

Opgave 6

Bekijk nog eens **Voorbeeld 2**.

a Laat zien hoe het functievoorschrift van $A(x)$ wordt gevonden.

b Bereken zelf de maximale oppervlakte.

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = 2 - \ln(x)$. Bereken de maximale oppervlakte van een rechthoek $OABC$ met A op de positieve x-as, C op de positieve y-as en B op de grafiek van f.

Voorbeeld 3

Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = p \cdot \sin^3(x)$ met $0 \leq x \leq 2\pi$.

A is het punt op de grafiek van f_p met $x = \frac{1}{4}\pi$. De raaklijn in A aan de grafiek van f_p gaat door $P(0,1)$. Bereken algebraïsch de waarde van p.

Antwoord

$f'_p(x) = 3p \cdot \sin^2(x)\cos(x)$ levert voor $x = \frac{1}{4}\pi$ de richtingscoëfficiënt: $a = 3p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{4}p\sqrt{2}$.

Een punt op de raaklijn is $A\left(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}p\sqrt{2}\right)$.

Omdat de raaklijn ook door $P(0,1)$ moet, is $p \approx -2{,}09$.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**.

- **a** Laat zien hoe het functievoorschrift voor $f'_p(x)$ wordt gevonden.
- **b** Laat zien, hoe je nu de waarde van p berekent.
- **c** Bepaal algebraïsch het bereik van f_1.
- **d** Toon aan dat de grafiek van f_p binnen één periode voor elke p vijf buigpunten heeft.

Opgave 9

Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 - x + 2\sqrt{x}$ en $g_p(x) = 2x + p$.

- **a** Breng de grafieken van f en g_1 in beeld.
- **b** Bereken op algebraïsche wijze de extremen van f.
- **c** Bereken de hoek waaronder de grafiek van f in een cartesisch assenstelsel de x-as snijdt in graden nauwkeurig.
- **d** Bereken voor welke waarde van p beide grafieken elkaar raken.
- **e** Bereken voor welke waarde van p beide grafieken elkaar loodrecht snijden.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven zijn $f_p(x) = \frac{x^2+px-2}{x+3}$ en $g(x) = x + 2$.

- **a** Bereken exact de nulpunten en de extremen van $f_1(x)$.
- **b** Voor welke waarde(n) van p heeft de grafiek van $f_p(x)$ géén extremen?
- **c** Voor welke p is de grafiek van $g(x)$ een asymptoot van de grafiek van $f_p(x)$?

Opgave 11

Gegeven zijn de functies $f(x) = 8 - 2x^2$ en $g(x) = 2^x$.

De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.

Bereken in twee decimalen nauwkeurig de maximale lengte van lijnstuk AB als $-2 < p < 2$.

Opgave 12

Op het domein $[0,2\pi]$ is gegeven $f_p(x) = \sin^3(x) + p \cdot \sin(x)$.

a Bereken langs algebraïsche weg het bereik van $f_{-1}(x)$ in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken voor welke waarde(n) van p geldt: f_p heeft een maximum van $0{,}25$.

Opgave 13

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2+4\sin(x)}{3+2\sin(x)}$ en $g_p(x) = p - 1 + p \cdot \sin(x)$.

a Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) < g_1(x)$.

b Bereken algebraïsch de extremen van $f(x)$.

c Bereken p in het geval dat beide grafieken elkaar raken.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f_p(x) = \mathrm{e}^{-px}$.

Bereken op algebraïsche wijze de waarden van p als de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f_p, de x-as, de y-as en de lijn $x = p$ gelijk is aan $0{,}5$.

Toepassen

Opgave 15: Twee gelijke omwentelingslichamen

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Op de grafiek van f ligt het punt $P(p,q)$. A is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, de lijn $x = p$ en de x-as. B is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, de y-as en de lijn $y = q$. De inhoud van het lichaam dat ontstaat door A om de x-as te wentelen is gelijk aan de inhoud van het lichaam dat ontstaat door B om de y-as te wentelen.

Bereken de waarden van p en q.

Testen

Opgave 16

Gegeven zijn de functievoorschriften $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ en $g_p(x) = px$.

a Bereken exact de snijpunten van de grafieken van f en g_1.

b Bepaal algebraïsch het domein en bereik van f.

c Voor welke waarde van p raken beide grafieken elkaar?

Opgave 17

Gegeven is de functie $f(x) = x + 2\cos(x)$. Het vlakdeel V wordt begrensd door de grafiek van f, beide coördinaatassen en de lijn $x = 2\pi$.

a Bereken de exacte oppervlakte van V.

b Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V wordt gewenteld om de x-as.

c De lijn $y = px$ snijdt de grafiek van f in twee punten. Bereken de waarde van p waarvoor de afstand tussen beide punten maximaal is.

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Functieonderzoek** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- asymptoten en limieten — scheve asymptoot
- puntsymmetrie van een grafiek — lijnsymmetrie van een grafiek
- raaklijn aan een grafiek door een punt buiten die grafiek — raken van grafieken — loodrecht snijden van grafieken — hoek tussen twee grafieken
- parameter — familie van functies

Activiteitenlijst

- de karakteristieken van een functie systematisch berekenen — met behulp van limieten asymptoten en perforaties berekenen
- bewijzen dat een grafiek puntsymmetrisch en/of lijnsymmetrisch is
- raaklijn aan een grafiek door een punt buiten die grafiek opstellen — onderzoeken of grafieken elkaar raken — onderzoeken of grafieken elkaar loodrecht snijden — hoeken berekenen waaronder twee grafieken elkaar snijden in een cartesisch assenstelsel
- werken met functies waarin een parameter voorkomt

Achtergronden

Het begrip **parameter** is al oud: “Een parameter is in de exacte wetenschappen een onbekende of variabele die de uiteindelijke toestand van een systeem, dan wel de uiteindelijke waarde van een uitdrukking bepaalt wanneer deze een waarde toegekend krijgt. De stand van de lichtknop is bijvoorbeeld een parameter van het lichtsysteem in de kamer. De temperatuur en de stand van de thermostaat zijn parameters van het verwarmingssysteem.” (bron: Wikipedia, 2017)

In de wiskunde wordt een parameter vooral gebruikt om algemene formules aan te duiden.

Zo is de algemene formule van een lineair of eerstegraads verband $y = ax + b$.
Hierin zijn a en b de parameters van het lineaire functievoorschrift met een bijpassende grafiek (in dit geval een rechte lijn) in een Oxy-assenstelsel.

Zo is een algemene formule van een kwadratisch of tweedegraads verband $y = ax^2 + bx + c$.

Hierin zijn a, b en c de parameters van het kwadratische functievoorschrift met een bijpassende grafiek (in dit geval een parabool) in een Oxy-assenstelsel.

En er bestaan nog veel meer algemene formules bij de verschillende standaardfuncties...

In computerprogramma's zoals GeoGebra, maar ook bijvoorbeeld in Excel, kunnen parameters door schuifbalkjes worden weergegeven. Je ziet dan hoe bij functies met parameters de grafiek verandert.

Testen

Opgave 1

Bepaal de asymptoten en perforaties van de functies. Schrijf de bijbehorende limieten op.

a $f(x) = \frac{5x}{x^2+5x}$

b $g(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)$

c $h(x) = \frac{\cos(x)+5}{\sin^2(x)}$

d $k(x) = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}$

Opgave 2

Toon de symmetrie van de functies aan.

a $f(x) = \text{e}^{-(1-x)^2}$

b $g(x) = \frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x-1} + 2$

c $h(x) = \frac{\sin(x)+1}{\cos^2(x)}$

Opgave 3

De functie $f(x) = \text{e}^{\frac{1}{x}} + x$ heeft een raaklijn l die door $(0{,}2\,\text{e})$ gaat. Bepaal de vergelijking van de raaklijn.

Opgave 4

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{x-2}$.

a Toon aan dat de grafiek van f een scheve asymptoot heeft en geef hiervan de vergelijking.

b Toon aan dat de grafiek van de functie puntsymmetrisch is en geef het symmetriepunt.

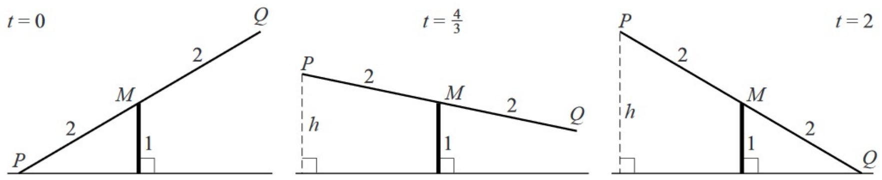
c Een functie $g_k(x) = (x-k)^2$ snijdt de grafiek van f loodrecht. Bepaal de mogelijke waarden van k afgerond op twee decimalen.

Opgave 5

Gegeven is een wiskundig model voor de beweging van het uiteinde van een wip.

Lijnstuk PQ met midden M en lengte 4 draait om M. De hoogte van M is 1.
Je kijkt naar het verloop van de hoogte h van P.
Op tijdstip $t = 0$ is de hoogte van P gelijk aan 0.
Van $t = 0$ tot $t = 2$ beweegt P omhoog.

In de figuur is het lijnstuk getekend op de tijdstippen: $t = 0$, $t = \frac{4}{3}$ en $t = 2$.



Figuur 5.1

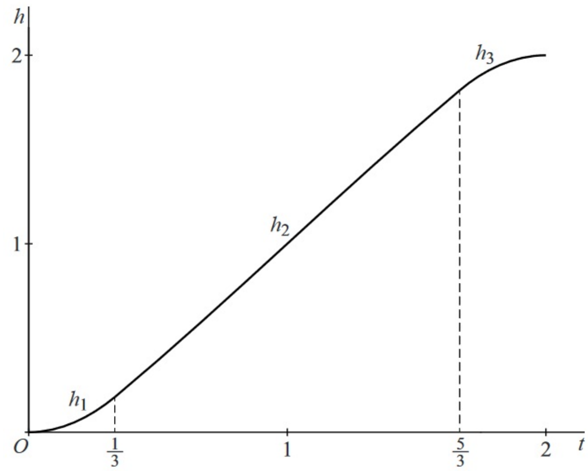
De hoogte h van P tijdens de omhooggaande beweging wordt beschreven door het volgende model:

- fase 1: $h_1(t) = 1 + 2\sin\left(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6}\right)$ voor $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$
- fase 2: $h_2(t) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5}\right)$ voor $\frac{1}{3} < t < \frac{5}{3}$
- fase 3: $h_3(t) = 1 + 2\sin\left(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30}\right)$ voor $\frac{5}{3} \leq t \leq 2$

Hierin is h de hoogte, onderverdeeld in h_1, h_2 en h_3: de hoogtes van P in de verschillende fasen. Voor elke waarde van a met $0 \leq a \leq 1$ geldt:

$\frac{h(1-a)+h(1+a)}{2} = 1$

Bewijs deze gelijkheid.



Figuur 5.2

(naar: examen vwo wiskunde B in 2014, tweede tijdvak)

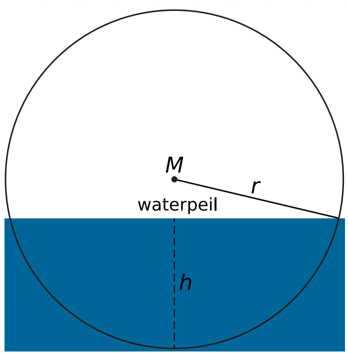
Toepassen

Opgave 6: Ondergedompelde bol

Een bol wordt in water gedompeld. De inhoud van het gedeelte van de bol onder het wateroppervlak wordt gegeven door:

$I = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

Hierin is r de straal van de bol en h de hoogte van het waterpeil ten opzichte van de onderkant van de bol. In de figuur zie je een diagram van het zijaanzicht.



Figuur 5.3

a Een bol heeft een straal van 5 cm en wordt 3 cm ondergedompeld. Wat is de inhoud van het gedeelte van de bol boven het wateroppervlak? Geef een exact antwoord.

b Dezelfde bol wordt ondergedompeld zo, dat de inhoud van het gedeelte onder water 400 cm^3 is. Bereken in twee decimalen hoe ver de bol is ondergedompeld.

c Bepaal uit de gegeven vergelijking de formule voor de inhoud van een bol afhankelijk van r.

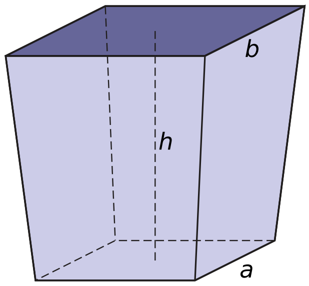
d Een bal wordt onder water gedompeld en vervolgens weer losgelaten. De bal schiet daarbij weer naar boven en blijft op het water drijven. Daarbij blijft $\frac{1}{32}$ deel van de inhoud van de bal onder water. Bereken wat de hoogte van het waterpeil ten opzichte van de onderkant van de bal is, uitgedrukt in r.

Opgave 7: Prullenbak

Een fabrikant maakt blikken prullenbakken met een inhoud van 30 L. De bakken hebben de vorm van een ondersteboven afgeknotte vierkante piramide.

Voor de fabrikant is het belangrijk dat er zo weinig mogelijk blik wordt gebruikt bij het maken van deze prullenbakken. Dat drukt de kosten. Hiertoe moeten er specifieke afmetingen gebruikt worden voor de bakken.

Stel dat het grondvlak van de prullenbak een vierkant is met ribbe a, en de rand van de prullenbak een vierkant met ribbe b, met a en b in cm. De bovenkant is open. In de figuur zie je een schematisch voorbeeld.



Figuur 5.4

a Stel dat $a = \frac{3}{4}b$. Druk de oppervlakte van een prullenbak A uit in a en h.

b De inhoud van de afgeknotte piramide is:

$I = \frac{1}{6}h\left(a^2 + (a+b)^2 + b^2\right)$.

Gebruik deze formule om de formule voor A uit te drukken in a.

c Bij welke waarde voor a is de hoeveelheid gebruikt materiaal het laagst? Rond af op millimeters.

Opgave 8: Massa-veer-systeem

Een gewicht hangt aan een veer en wordt uitgerekt. Wanneer deze wordt losgelaten beweegt de veer op en neer in wat een harmonische trilling wordt genoemd. De afwijking x die het gewicht heeft vanaf het evenwichtspunt wordt gegeven door:

$x(t) = u \cdot e^{-\lambda t} \cos(\omega t)$ met $\lambda = \frac{k}{2m}$ en $\omega = \sqrt{\frac{c}{m} - \lambda^2}$

Hierin is:

- x in meter;
- t in seconden;
- u is de beginafwijking (dus hoever de veer wordt uitgerekt) in meter;
- k is de dempingscoëfficiënt in kg/s;
- m is de massa van het gewicht in kg;
- c is de veerconstante in N/m.

a Geef een uitdrukking voor de snelheid en versnelling waarmee de massa beweegt.

b In een massa-veersysteem hangt een massa van 4 kg aan een veer met veerconstante 20 N/m en dempingscoëfficiënt 3 kg/s. De veer wordt een halve meter uitgerekt. Plot het verloop van de trilling over de eerste 10 seconden nadat de veer wordt losgelaten.

c Bereken in de situatie bij b ook de snelheid en versnelling waarmee de massa beweegt op tijdstip $t = 0$.

d Neem hetzelfde massa-veersysteem als bij b, maar dan met de dempingscoëfficiënt 15 kg/s. Plot de bijbehorende grafiek en verklaar wat er gebeurt.

Examen

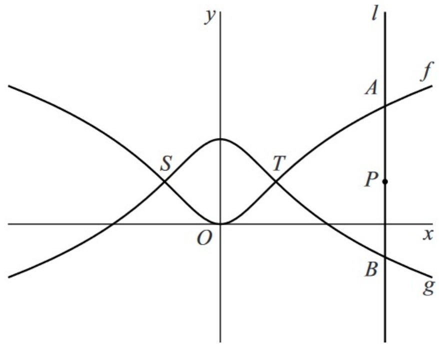
Opgave 9: Getransformeerde grafiek

De functies f en g worden gegeven door:

$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$ en $g(x) = \ln\left(\frac{e^2}{x^2+1}\right)$

De grafieken van f en g staan in de figuur. Ze snijden elkaar in punten S en T.

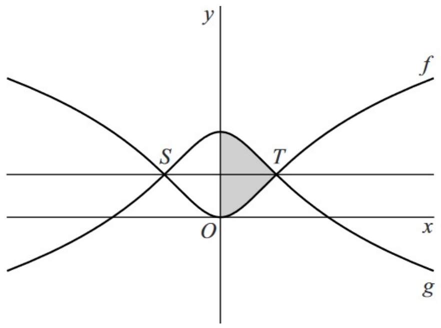
Lijn l met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in punt A en de grafiek van g in punt B. Het punt op lijn l met y-coördinaat 1 noemen we P. In figuur I is de situatie weergegeven waarbij l rechts van T ligt.



Figuur 5.5 figuur I

a Bewijs dat in deze situatie $AP = BP$.

Ook voor waarden van p waarvoor l niet rechts van T ligt, geldt dat $AP = BP$. Hieruit volgt dat de grafieken van f en g elkaars gespiegelde zijn in de lijn met vergelijking $y = 1$. Deze lijn is getekend in figuur II.



Figuur 5.6 figuur II

In figuur II is het gebied rechts van de y-as dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de y-as, grijsgemaakt. Dit gebied wordt gewenteld om de y-as.

b Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

De grafiek van f wordt 2 naar rechts verschoven.

c Bewijs dat de grafiek van f en de verschoven grafiek elkaar loodrecht snijden.

(bron: examen vwo wiskunde B in 2016, tweede tijdvak)

Opgave 10: Het menselijk oog

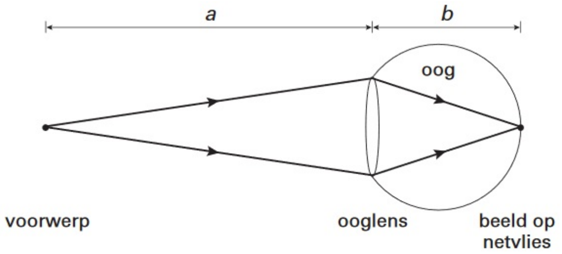
Om een voorwerp op verschillende afstanden scherp te kunnen zien heeft de mens de mogelijkheid om te accommoderen, dat wil zeggen de sterkte van zijn ogen aan te passen, zodat er een scherp beeld op zijn netvlies komt. Om een voorwerp op een afstand a van het oog scherp te kunnen zien is een bepaalde sterkte S van het oog nodig. Voor deze sterkte S gebruiken we het volgende model:

$S = \frac{a+b}{a \cdot b}$

Hierbij is:

- a de afstand in meters tussen het voorwerp en de ooglens;
- b de afstand in meters tussen het netvlies en de ooglens;
- S de sterkte in dioptrieën (dpt).

Zie figuur.



Figuur 5.7

De afstand b hoeft niet voor beide ogen gelijk te zijn.
Iemand heeft een rechteroog met $b = 0{,}018$ m. Hij kan de sterkte van zijn rechteroog variëren van 58 tot en met 63 dpt.

a Bereken op welke afstanden dit rechteroog voorwerpen scherp kan zien. Rond de grenswaarden in je antwoord af op twee decimalen.

b Voor zijn linkeroog geldt: $b = 0{,}017$ m.
Hiermee kan hij voorwerpen op afstanden van 15 cm en verder scherp zien.
Bereken welke waarden S kan aannemen. Geef je antwoord in gehele dioptrieën.

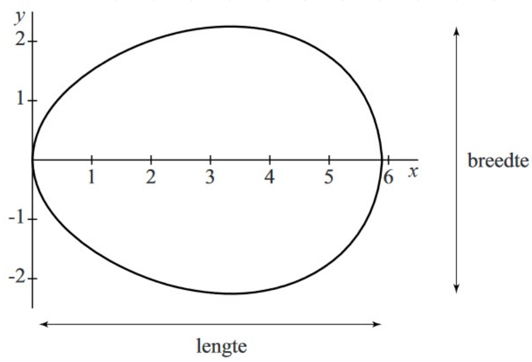
(bron: examen vwo wiskunde B1 in 2004, eerste tijdvak)

Opgave 11: Een eivorm

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{87x - 3x^2 - 2x^3}$

In figuur I is de grafiek van f getekend en ook het spiegelbeeld hiervan in de x-as. De twee grafieken vormen samen een figuur die lijkt op een doorsnede van een ei.

Op de x-as en de y-as is de eenheid 1 cm. In figuur I is aangegeven wat bedoeld wordt met de lengte en de breedte van het ei.
De lengte van het ei is ongeveer $5{,}9$ cm.



Figuur 5.8 figuur I

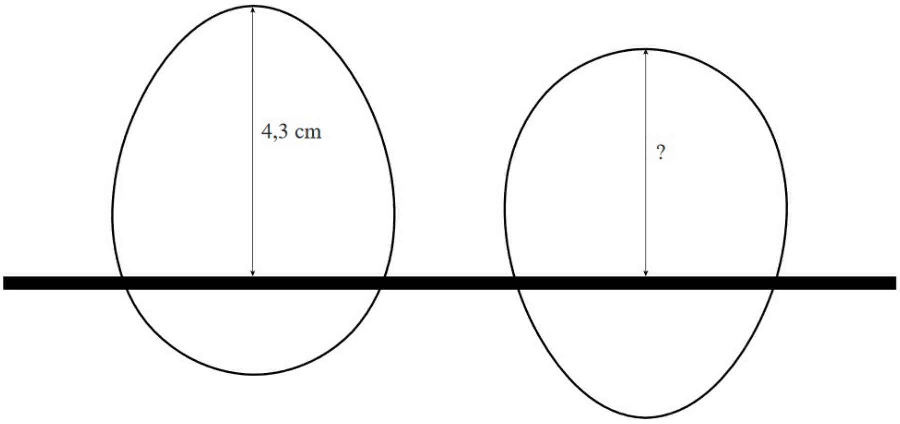
a Bereken op algebraïsche wijze de lengte van het ei in cm. Rond je antwoord af op twee decimalen.

b Bereken met behulp van primitiveren de inhoud van het ei. Geef je antwoord in een geheel aantal cm^3.

Een eierrekje bevat een aantal even grote ronde openingen. Zie de foto.

5.9

Wanneer we het ei van figuur I in een opening van het eierrekje plaatsen met de brede kant onder, steekt het $4{,}3$ cm boven het rekje uit. Zie figuur II links.



Figuur 5.10 figuur II

c We kunnen het ei van figuur I ook met de smalle kant onder in een opening van het rekje plaatsen. Zie figuur II rechts.
Bereken hoeveel cm het ei dan boven het rekje uitsteekt. Rond je antwoord af op één decimaal.

(bron: examen vwo wiskunde B in 2013, eerste tijdvak)

Opgave 12: Sinusoïde met perforaties

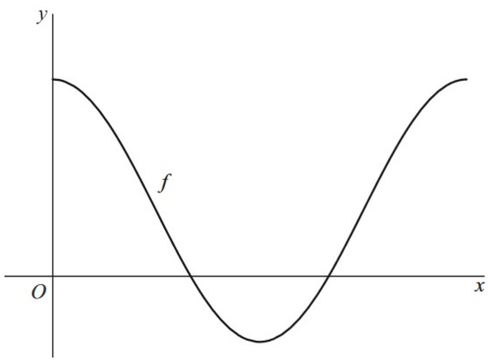
De functie f wordt gegeven door:

$f(x) = \frac{1+\cos(2x)}{\cos(x)} + 1$

We bekijken in deze opgave alleen het deel van de grafiek van f waarvoor $x \geq 0$ en $x \leq 2\pi$.

De grafiek van f is een sinusoïde met perforaties. In de figuur is de grafiek van f weergegeven. De perforaties van de grafiek zijn in de figuur niet aangegeven.

Bereken exact de coördinaten van de perforaties van de grafiek van f.



Figuur 5.11

(bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2016, tweede tijdvak)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het .

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

www.math4all.nl