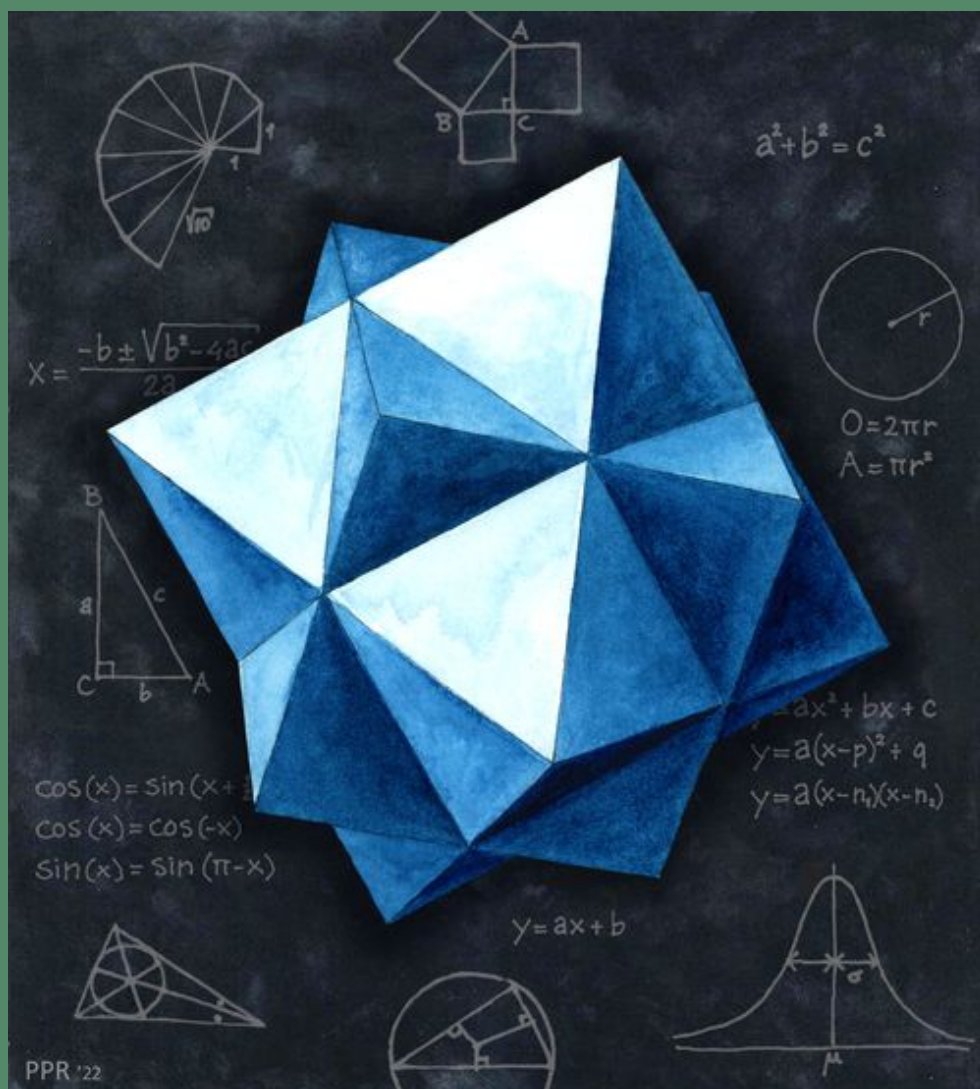
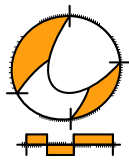


Wiskunde B

6 VWO

Katern 1





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Exponentiële en logaritmische functies 5

- 1.1 Het getal e 6
- 1.2 Exponentiële functies 17
- 1.3 Logaritmische functies 25
- 1.4 Groeimodellen 33
- 1.5 Integralen 44
- 1.6 Totaalbeeld 52

2 Goniometrische functies 63

- 2.1 Goniometrische functies 64
- 2.2 Goniometrische formules 74
- 2.3 Goniometrische functies differentiëren 84
- 2.4 Harmonische trilling 92
- 2.5 Integralen 100
- 2.6 Totaalbeeld 107

Register 115

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Exponentiële en logaritmische functies

1.1	Het getal e	6
1.2	Exponentiële functies	17
1.3	Logaritmische functies	25
1.4	Groeimodellen	33
1.5	Integralen	44
1.6	Totaalbeeld	52

1.1 Het getal e

Inleiding

Je kunt functies van de vorm $f(x) = g^x$ nog niet differentiëren. Daar ga je nu wat aan doen. Je kunt dan tenminste iets zeggen over de veranderingssnelheid van groeiprocessen. Bij het differentiëren van exponentiële functies speelt het getal e een belangrijke rol. Daarmee ga je dan ook uitgebreid kennis maken.

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van exponentiële functies bepalen;
- het getal e gebruiken, ook bij het bepalen van zo'n afgeleide.

Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Met je grafische rekenmachine kun je een functie $f(x)$ en een benadering voor de afgeleide van deze functie vergelijken. Daarbij maak je gebruik van het feit dat $f'(x)$ kan worden benaderd door de veranderingssnelheid bij een hele kleine toename van x .

Voer in je grafische rekenmachine in:

$$y_1 = 2^x$$

$$y_2 = (y_1(x + 0.001) - y_1(x))/0.001$$

$$y_3 = y_2/y_1$$

Gebruik de standaardinstellingen van het venster.

- Leg uit dat y_2 een benadering is van de afgeleide van y_1 .
- Wat valt op als je de grafiek van y_2 vergelijkt met die van y_1 ?
- Hoe kun je nu de grafiek van y_3 verklaren?
- Welke conclusie trek je? Geldt dit ook voor $f(x) = 3^x$? En voor andere exponentiële functies?
- Geldt dit ook voor $f(x) = x^2$? En voor $f(x) = x^3$?

```
2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966
967627724076630353547594571382178525166427427466391932003059
9218174135966290435729003347277107539077744992
233829880753195251019011
24476146066808226480
069551702761838606
20070932870912744
6574637721112523
987931636889230
193668033182528
11730123819706
32878250981945
35159888851934
61048419844436
23530436994184
016768396424376
704171898610687
3210681701210056
50366041699732972
787134195124665201
40975459185695638023
1824423529486363721417
9980161254922785092577825620
164019105900491644998289315056604725802778631864155195653244
258698294695930801915298721172556347546396447910145904090586
298496791287406870504895858671747985466775757320568128845920
541334053922000113786300945560688166740016984205580403363795
```

Figuur 1.1

Uitleg

Bekijk de applet.

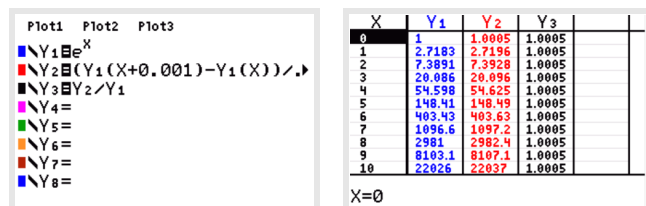
Bij exponentiële groei gaat het om functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Neem je $b = f(0) = 1$, dan hebben deze functies de vorm $f(x) = g^x$. Ga na dat de helling van de grafiek, de groeisnelheid per eenheid, af hangt van de grootte van g . Neem je bijvoorbeeld $x = 1$, dan zie je de helling groter worden als g groter wordt.

Neem je bijvoorbeeld $g = 2$ dan zie je dat de helling voor elke x recht evenredig is met $f(x)$: $f'(x) = c \cdot g^x$.

- Voor $g = 2$ geldt: $c \approx 0,69$.
Dus als $f(x) = 2^x$ dan is $f'(x) \approx 0,69 \cdot 2^x$.
- Voor $g = 3$ geldt: $c \approx 1,10$.
Dus als $f(x) = 3^x$ dan is $f'(x) \approx 1,10 \cdot 3^x$.

Er lijkt een waarde van g te bestaan (tussen 2 en 3) waarvoor geldt dat $c = 1$. Ga na, dat dit bij $g \approx 2,7$ het geval is. Het getal waarbij dit PRECIES het geval is, is net zo'n bijzonder getal als π . Dit getal heeft de letter e gekregen: $e = 2,71828...$

Voor dit getal geldt: als $f(x) = e^x$, dan is $f'(x) = e^x$.



Figuur 1.3

Met $f(x) = e^x$ reken je net als met alle exponentiële functies. Er hoort dus ook een logaritme met grondtal e bij...

Opgave 1

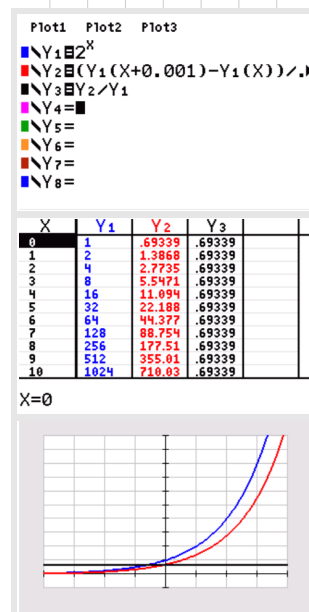
Lees eerst de **Uitleg** goed door. In het algemeen geldt: Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = c \cdot g^x$.

- Bekijk de grafiek van $f(x) = 3^x$ en (een benadering van) zijn afgeleide. Laat zien dat $f'(x) \approx 1,10 \cdot 3^x$, dus $c \approx 1,10$.
- Bekijk de grafiek van $f(x) = 2,5^x$ en (een benadering van) zijn afgeleide. Bepaal nu zelf de bijpassende waarde van c .
- Doe hetzelfde ook voor $f(x) = 2,7^x$ en $f(x) = 2,8^x$.
- Is er een getal g waarvoor $c = 1$? Hoe groot is dit getal ongeveer?

Opgave 2

Gegeven de functie $f(x) = g^x$. De verandering van f op een klein interval $[x, x + h]$ is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g^{x+h} - g^x}{h}$.

- Leg dat met behulp van een figuur uit. (Maak eventueel een eigen applet in GeoGebra!)
- Laat zien, dat $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g^h - 1}{h} \cdot g^x$.



Figuur 1.2

- c Waarom kun je hieruit afgeleiden dat $f'(x) = c \cdot g^x$?
- d Neem $g = e$ en bepaal met behulp van het antwoord van b de waarde van e.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = e^x$.

- a Hoe voer je die grafiek in je grafische rekenmachine in? Welke asymptoot heeft die grafiek?
- b Waar in de grafiek vind je het getal e?
- c Los met je grafische rekenmachine op $e^x = 10$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De exacte oplossing van $e^x = 10$ is gelijk aan $x = {}^e\log(10)$.

- d Laat zien dat je zo dezelfde waarde voor x vindt als bij c.
In plaats van $x = {}^e\log(\dots)$ wordt in de wiskunde $\ln(\dots)$ gebruikt. Je rekenmachine heeft een speciale toets voor $\ln(\dots)$.
- e Los nu zowel exact als in drie decimalen nauwkeurig op: $e^x = 20$.
- f Los op: $\frac{1}{50} \leq e^x \leq 50$. Geef benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.
- g Welk hellingsgetal heeft de grafiek van $f(x) = e^x$ in het punt (1, e)?
Stel een vergelijking op van de raaklijn in dat punt.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

De afgeleide van de exponentiële functie $f(x) = g^x$ vind je door de functie met een factor afhankelijk van g te vermenigvuldigen.

Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = c_g \cdot g^x$.

Bewijs 1

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{x+h} - g^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(g^x \cdot \frac{g^h - 1}{h} \right).$$

$$\text{Dus is } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(g^x \cdot \frac{g^h - 1}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^h - 1}{h} \cdot g^x = c_g \cdot g^x.$$

Hierin is c_g een constante die van g afhangt.

Deze constante neemt voor $g = e$ de waarde 1 aan als

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

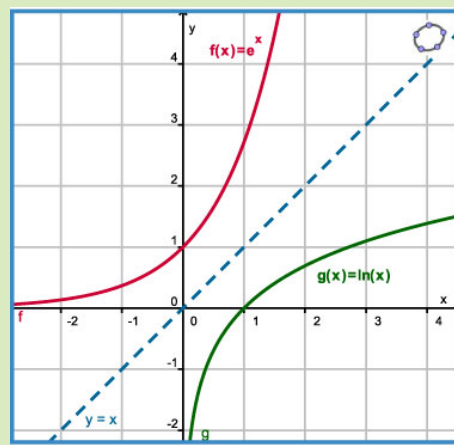
Door deze limiet wordt het getal e vastgelegd. Je zou benaderingen voor e kunnen vinden door hele kleine getallen voor h te kiezen. Probeer maar...

Voor $h = 0,0001$ vind je $e \approx 2,718145927$.

Er bestaat een waarde van g waarvoor geldt dat $c_g = 1$.

Deze **natuurlijke groeifactor** is het **getal e**.

Een benadering voor e is: $e \approx 2,71828\dots$



Figuur 1.4

Als $f(x) = e^x$, dan is $f'(x) = e^x$.

Met $f(x) = e^x$ reken je net als met alle exponentiële functies. Op je rekenmachine zit er een speciale toets voor. En er hoort ook een logaritme met grondtal e bij...

Ook nu is $e^x = a$ gelijkwaardig met $x = {}^e\log(a)$.

In plaats van ${}^e\log(a)$ schrijf je $\ln(a)$.

$\ln(a)$ is de **natuurlijke logaritme** van a .

De functies $y = e^x$ en $y = \ln(x)$ zijn elkaars inverse functies. De grafieken daarvan zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

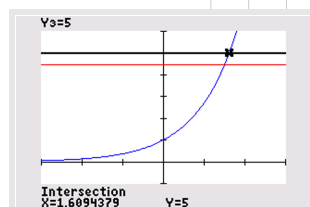
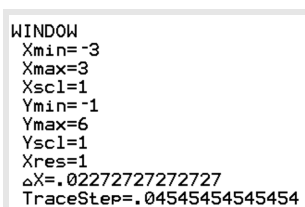
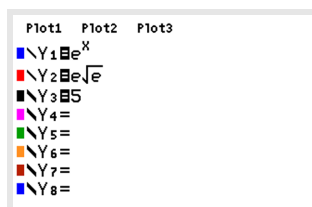
Voorbeeld 1

Maak met je grafische rekenmachine de grafiek van $f(x) = e^x$.

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Los op: $e\sqrt{e} \leq f(x) \leq 5$.

Antwoord



Figuur 1.5

$f'(x) = e^x$, dus $f'(2) = e^2$.

Verder is $f(2) = e^2$.

De vergelijking van de raaklijn is daarom $y = e^2 x - e^2$.

Om de ongelijkheid op te lossen, moet je de waarden van x bepalen waarvoor

- $e^x = e\sqrt{e} = e^{1,5}$, dit geeft: $x = 1,5$.
- $e^x = 5$, dit geeft: $x = \ln(5)$.

De oplossing van de gegeven ongelijkheid is $1,5 \leq x \leq \ln(5)$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Stel de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$ op.
- Bekijk de oplossing van de gegeven ongelijkheid. Ga met behulp van de grafiek van f na dat deze juist is.
- Los op: $e^{-20} < f(x) \leq 20$.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $2^x = \frac{1}{8\sqrt{2}}$

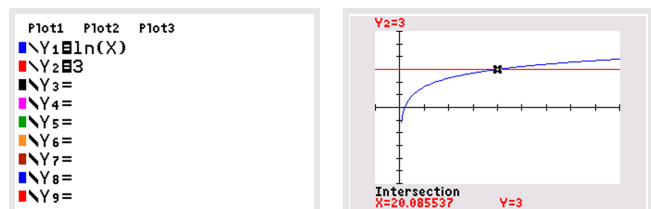
b $e^x = \frac{1}{e^3\sqrt{e}}$

- c $5e^x = 125$
 d $8e^x = (2e\sqrt{e})^3$

Voorbeeld 2

Bekijk met je grafische rekenmachine de grafiek van $f(x) = \ln(x)$.
 Bepaal de karakteristieken van f en los op: $f(x) \leq 3$.

Antwoord



Figuur 1.6

Omdat $\ln(x) = {}^e\log(x)$ moet ook nu $x > 0$.

$D_f = (0 \rightarrow)$ en $B_f = \mathbb{R}$.

De verticale asymptoot is $x = 0$ en $\lim_{x \downarrow 0} \ln(x) = -\infty$.

$f(x) \leq 3$ geeft $x = e^3$ want de e-macht en de natuurlijke logaritme zijn elkaars inverse.

Uit de grafiek lees je de oplossing van de ongelijkheid af:
 $0 < x \leq e^3$.

Opgave 6

Bekijk [Voorbeeld 2](#).

- a Waar in de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ vind je het getal e?
 b Leg uit hoe je het domein en het bereik van f kunt afleiden uit het domein en het bereik van $g(x) = e^x$.
 c Voor welke waarde van x is $\ln(x) = 5$? Geef je antwoord exact en in één decimaal nauwkeurig.
 d Los op: $-5 \leq \ln(x) \leq 5$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = e^{2x} - 3e^x$.
 Bereken algebraïsch het bereik van f .

Antwoord

$$f'(x) = 4e^{2x} - 3e^x = 0 \text{ als } e^x(4e^x - 3) = 0, \text{ dus } e^x = 0 \vee e^x = 0,75.$$

Hieruit volgt: $x = \ln(0,75)$.

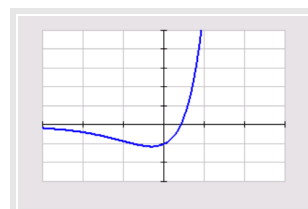
Aan de grafiek van f zie je dat er een minimum zit bij $x = \ln(0,75)$.

Nu is $f(0,75) = 2 \cdot (e^{\ln(0,75)})^2 - 3e^{\ln(0,75)} = -1,125$.

Er is een horizontale asymptoot $y = 0$ omdat $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 3e^x = 0$.

Maar deze asymptoot heeft op het bereik geen invloed.

En dus is: $B_f = [-1,125; \rightarrow)$.



Figuur 1.7

Opgave 7

Bepaal de afgeleide van de volgende functies. Maak gebruik van alle bekende differentieerregels. Bepaal ook het bereik van f . Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 3**.

a $f(x) = 100 - 2 \cdot e^x$

b $f(x) = e^{3x}$

c $f(x) = e^{3-x}$

d $f(x) = x e^x$

e $f(x) = \frac{x}{e^x}$

f $f(x) = e^{x^2}$

Opgave 8

Los algebraïsch op en geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $e^{2x} = 0,05$

b $\ln(x) = 2,06$

c $3e^{4x} = 10$

Opgave 9

Het is nuttig om de rekenregels voor exponentiële en logaritmische functies nog een keer te oefenen. Nu gebruik je daarbij (ook) het nieuwe grondtal e . Zoek ze eventueel eerst op (het wordt trouwens tijd voor een eigen formuleoverzicht).

Druk bij de volgende formules y uit in x en vereenvoudig de uitdrukking.

a $e^y = 2 \cdot e^x$

b $2 \cdot e^{2y} = x^3$

c $x = 2 \cdot \ln(y) + 3$

d $x = 2 \cdot \ln(y + 3)$

e $\ln(y) + 2 \cdot \ln(x) = 1$

f $(\ln(y) + 2) \cdot \ln(x) = 1$

g $(\sqrt{e})^y = 4x$

h $\left(\frac{1}{e}\right)^y = 4e^x$

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 4e^{-0,5x} - 2$.

- Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?
- Bereken met behulp van logaritmen het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- Bepaal de afgeleide van f en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- Los op: $f(x) < -1$.

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = 4 \ln(-0,5x) - 2$.

- Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?
- Schrijf het domein en het bereik van f op.
- Bereken met behulp van exponenten het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- Los op: $f(x) < -1$.

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op en benader zo nodig de antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

- $e^x = 3$
- $e \cdot x = 3$
- $x^e = 3$
- $\ln(x) = 3$
- $\log(x) = 3$
- $2 \cdot e^{0,1x-5} = 40$
- $2 \ln(0,1x - 5) = 40$

Opgave 13

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op en benader zo nodig de antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

- $e^{2x} \cdot e^{x-6} = 1$
- $e^{2x} - e^{x-6} = 0$
- $\ln(2x) - \ln(x-6) = 1$
- $\ln(2x) \cdot \ln(x-6) = 0$
- $2^x = e^{x+2}$
- $\ln(\ln(2x)) = 1$
- $3e^x = 15e^{2-x}$
- $e^x - 2e^{-x} = 1$

Opgave 14

Druk N zo eenvoudig mogelijk uit in t :

- a $\ln(N) = 2 \cdot \ln(t) - 3$
- b $\log(N) = 2 \cdot \log(t) - 3$
- c $e^{2N} = t + 2$
- d $10^{2N} = t + 2$
- e $\ln(N) = 2t - 3$
- f $e^t = 2N - 3$

Opgave 15

Toon aan dat de volgende formules waar zijn voor elke waarde van x .

- a $\left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$
- b $e^{2 \ln(x)} = x^2$
- c $e^{\ln(x) + \ln(2)} = 2x$
- d $e^{2 - \ln(x)} = \frac{e^2}{x}$

Toepassen

Practicum: Warmtewet van Newton

Als een kop thee of een kop koffie een tijdje in de kamer op tafel blijft staan koelt de inhoud langzaam af. Maar ze wordt nooit kouder dan de temperatuur in de kamer. Hoe verloopt die afkoeling precies?

- Zorg voor een waterkoker en een digitale thermometer die temperaturen van 10°C - 100°C aankan. Breng water aan de kook en schenk dit in een glas waar de thermometer in staat. Lees vervolgens elke minuut de temperatuur van het water af in graden nauwkeurig. Maak een tabel en een grafiek. Meet ook de omgevingstemperatuur!
- Probeer in woorden te beschrijven hoe de afkoeling van het water verloopt. Let daarbij vooral op het verschil tussen de gemeten temperaturen en de omgevingstemperatuur. Beschrijf ook de eenheden die je bij dit afkoelingsproces gebruikt. Welke eenheid gebruik je voor de temperatuur, voor het temperatuurverschil met de omgeving en voor de tijd?

De grote natuurkundige Isaac Newton (1643—1727) heeft het afkoelingsproces beschreven door vast te stellen dat de snelheid van afkoelen recht evenredig is met het temperatuurverschil van de vloeistof met de omgevingstemperatuur.

De snelheid van afkoelen is dan een constante maal het temperatuurverschil met de omgeving.

Noem je de temperatuur T en de tijd t dan betekent dit:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = c \cdot (T - T_{\text{omg}}).$$

De constante c noem je de evenredigheidsconstante.

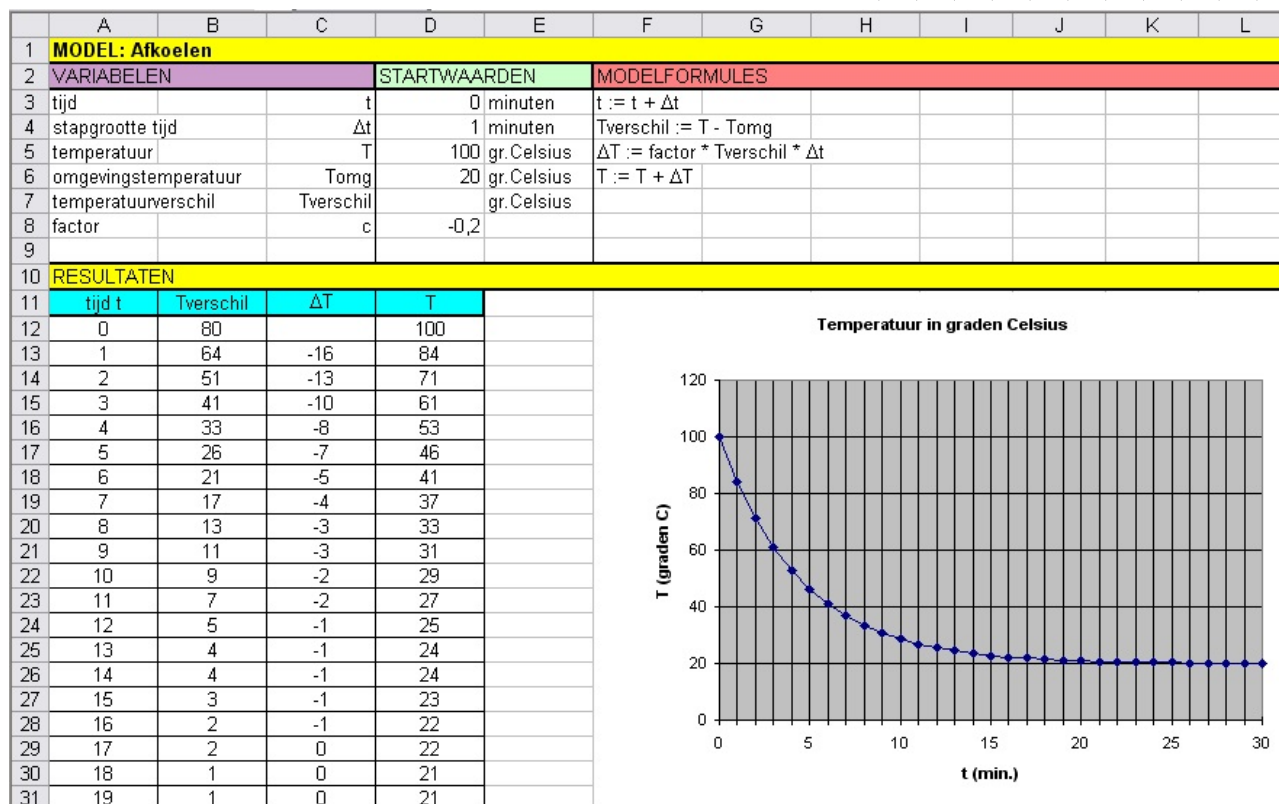
Dit heet de **warmtewet van Newton**.



Figuur 1.8

Op grond hiervan kun je een formule afleiden waarmee de temperatuur van een afkoelende vloeistof van minuut tot minuut kan worden berekend. Dat ga je proberen te doen...

Je gebruikt er het Excel-bestand **AfkoelingVloeistof.xls** bij. In dit Excel bestand is de warmtewet van Newton verwerkt. Dat is terug te vinden in de formules. Je ziet hieronder een afdruk van het Excel-bestand.



Figuur 1.9

Opgave 16

Bekijk het afkoelingsproces beschreven in **Toepassen**.

Open het Excel-bestand.

- Wat stellen T, Tomg, Tverschil, Δt en ΔT voor?
Leg uit dat de modelformule $\Delta T := factor * Tverschil * \Delta t$ een vertaling is van de warmtewet van Newton.
- Welke waarde heeft de evenredigheidsconstante in het gegeven model? Waarom is hij negatief? Wat gebeurt er als je die constante verandert in -0,15?
- Vul in kolom E je eigen meetwaarden in en stel de juiste omgevingstemperatuur in. Pas de factor aan totdat je eigen meetwaarden zo goed mogelijk worden benaderd. Je hebt dan een passend afkoelingsmodel gevonden. Schrijf de bijbehorende evenredigheidsconstante op.

Volgens de warmtewet van Newton is de snelheid waarmee de temperatuur verandert recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

- d** Laat met behulp van een berekening zien dat functies van de vorm $T(t) = a + b \cdot g^t$ aan de warmtewet van Newton voldoen.
- e** Bekijk nu je eigen gegevens. Waarom is a de omgevingstemperatuur?
- f** Je berekent b met behulp van $T(0)$ en de omgevingstemperatuur. En je kunt bijvoorbeeld de waarde voor g berekenen met behulp van een meetpunt (t, T) . Stel de formule op die past bij jouw meetgegevens.
- g** Bereken met dit afkoelingsmodel hoeveel tijd de temperatuur van het water minder dan 30°C is.

Opgave 17

Een kop koffie uit een automaat heeft een temperatuur van 80°C op het moment dat hij wordt ingeschonken. Hij koelt af volgens de formule:

$$T(t) = 20 + 60 \cdot 0,8^t$$

Hierin is T de temperatuur van de koffie en t de tijd in minuten vanaf het moment van inschenken.

- a** Ga na dat de koffie volgens de formule bij het inschenken een temperatuur van 80°C heeft.
- b** Hoeveel bedraagt de omgevingstemperatuur?
- c** De afgeleide van $f(t) = 0,8^t$ is $f'(t) = c \cdot 0,8^t$. Bepaal met je grafische rekenmachine de bijpassende waarde van c .
- d** Volgens de warmtewet van Newton is de snelheid waarmee de temperatuur verandert recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving. Laat met behulp van een berekening zien dat de gegeven functie T aan de warmtewet van Newton voldoet.
- e** Hoe kun je aan de afgeleide van T zien dat er inderdaad van afkoeling sprake is?

Testen

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 8 - 4e^x$.

- a** Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?
- b** Bereken met behulp van logaritmen het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- c** Bepaal de afgeleide van f en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- d** Los op: $f(x) \geq 2$.

Opgave 19

Gegeven is de functie $g(x) = 8 - 4 \ln(x)$.

- a Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?
- b Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafiek van g met de x -as.
- c Los op: $g(x) < 2$.

Opgave 20

Druk N zo eenvoudig mogelijk uit in t .

- a $5e^N = 2t + 10$
- b $5 \ln(N) = 2t + 10$
- c $\ln(N) = 0,01 \ln(t) + 1,15$

Opgave 21

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

- a $10e^{x-2} = 5e^{4x}$
- b $\ln(x) + \ln(x+2) = 1$

Opgave 22

Differentieer:

- a $f(x) = e^x - 3e^{2x}$
- b $f(x) = x^2 e^x$

1.2 Exponentiële functies

Inleiding

Je hebt het getal e leren kennen en de natuurlijke logaritme.

Je kunt nu functies van de vorm $f(x) = e^x$ differentiëren. Maar je wilt ook $f(x) = g^x$ en alle functies waarin g^x in het voorschrift voorkomt kunnen differentiëren. Dan kun je van dit soort functies de karakteristieken berekenen met behulp van de afgeleide en de tweede afgeleide.

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van $f(x) = g^x$ bepalen;
- de regels voor het differentiëren toepassen op functies waarin de onbekende in de exponent voorkomt;
- van dergelijke functies de hellingen, de extremen en de buigpunten berekenen.

Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken, ook met grondtal e ;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- de afgeleide van $f(x) = e^x$ bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt $f(x) = 2^x$ differentiëren.

Je weet dat de afgeleide van $y = e^x$ is $y' = e^x$.

Verder ken je de eigenschappen van exponenten en logaritmen.

- Laat zien, dat $f(x) = e^{\ln(2) \cdot x}$.
- Differentieer nu f met behulp van de kettingregel.
- Welke afgeleide heeft $f(x) = 2^x$?

Uitleg

Je wilt $f(x) = 2^x$ differentiëren.

Je weet dat de afgeleide van $y = e^x$ is $y' = e^x$.

Verder ken je de eigenschappen van exponenten en logaritmen.

Met behulp van deze eigenschappen kun je van grondtal veranderen.

In het algemeen is $g^{\log(2)} = 2$.

Dit geldt ook voor grondtal $g = e$, dus $e^{\ln(2)} = 2$.

Hieruit volgt: $f(x) = (e^{\ln(2)})^x = e^{\ln(2) \cdot x}$.

Nu kun je f met behulp van de kettingregel differentiëren, het grondtal is namelijk e .

Je vindt: $f'(x) = e^{\ln(2) \cdot x} \cdot \ln(2)$.

En dit kun je weer schrijven als $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$.

Deze redenering kun je ook op elk ander grondtal toepassen. Doe je dit op grondtal g dan blijkt de afgeleide van $f(x) = g^x$ te zijn: $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de afgeleide van $f(x) = 2^x$ bepaald.

- Bepaal op dezelfde manier de afgeleide van $g(x) = 3^x$.
- Bepaal op dezelfde manier de afgeleide van $h(x) = 0,5^x$.
- Bepaal nu zelf de afgeleide van $f(x) = g^x$.

Opgave 2

Je hebt in de voorgaande opgave de afgeleide van $f(x) = g^x$ bepaald.

Ga na dat deze afgeleide ook geldt voor $f(x) = e^x$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **afgeleide van de exponentiële functie** geldt:

- Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Bewijs 1

Omdat: $f(x) = g^x = (e^{\ln(g)})^x = e^{\ln(g) \cdot x}$ kun je f met behulp van de kettingregel differentiëren, het grondtal is nu namelijk e .

Je vindt: $f'(x) = e^{\ln(g) \cdot x} \cdot \ln(g)$.

En dit kun je weer schrijven als $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Hierbij maak je gebruik van het **veranderen van grondtal**: $g = e^{\ln(g)}$. (Denk er om dat $g > 0$ moet zijn.)

Dit is één van de definitieformules van logaritmen, toegepast op het getal e .

Hiermee kun je elke exponentiële functie N met groeifactor g per tijdseenheid t op meerdere manieren schrijven:

- $N(t) = N(0) \cdot g^t$
- $N(t) = N(0) \cdot e^{kt}$ waarin $k = \ln(g)$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ waarin $k = \log(g)$

Dat is handig als je met meerdere exponentiële functies met verschillende groeifactoren te maken hebt. Je kunt ze dan toch steeds hetzelfde grondtal geven, e of 10 .

Verder kun je nu allerlei functies waarin vormen als e^x en/of g^x voorkomen differentiëren met de differentieerregels. Daarmee kun je van functies die ingewikkelder zijn dan zuiver exponentiële functies ook de karakteristieken bepalen.

Voorbeeld 1

In dit voorbeeld gaat het om het differentiëren van exponentiële functies met behulp van de differentieerregels die je tot nu toe hebt geleerd. Probeer eerst zelf de juiste afgeleiden te vinden en bekijk daarna pas de oplossingen.

- $f(x) = 5^x$
- $f(x) = 5^{2x}$
- $f(x) = x \cdot 5^{2x}$

- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot 10^{-0,5t}$
- $K(q) = 100 \cdot q^{-1} + 12 \cdot 0,8^q$
- $P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$

Antwoord

- $f(x) = 5^x$ geeft $f'(x) = 5^x \cdot \ln(5)$
- $f(x) = 5^{2x}$ geeft $f'(x) = 5^{2x} \cdot \ln(5) \cdot 2 = 2 \ln(5) \cdot 5^{2x}$
- $f(x) = x \cdot 5^{2x}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot 5^{2x} + x \cdot 5^{2x} \cdot \ln(5) \cdot 2 = 5^{2x}(1 + 2 \ln(5) \cdot x)$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot 10^{-0,5t}$ geeft $N'(t) = -2000 \cdot 10^{-0,5t} \cdot \ln(10) \cdot -0,5 = 1000 \ln(10) \cdot 10^{-0,5t}$
- $K(q) = 100 \cdot q^{-1} + 12 \cdot 0,8^q$ geeft $K'(q) = -100 \cdot q^{-2} + 12 \cdot 0,8^q \cdot \ln(0,8)$
- $P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$ geeft $P'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \cdot -z = \frac{-z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$

Opgave 3

Probeer bij de functies in **Voorbeeld 1** eerst zelf de afgeleiden te vinden.

Opgave 4

Bepaal de afgeleide van:

- $f(x) = 5 \cdot 3^x$
- $f(x) = 5 \cdot 2^{0,5x}$
- $f(x) = 50 - 48 \cdot 10^{0,1x}$
- $f(x) = 100 e^{-0,1x} + 200$

Voorbeeld 2

Radioactieve stoffen zijn stoffen die straling uitzenden. Bij dergelijke stoffen zijn de atoomkernen instabiel, bijvoorbeeld doordat er te veel protonen en/of neutronen in zitten. Een natuurlijke radioactieve stof is de radiumisotoop $^{226}_{88}\text{Ra}$. Bij deze stof zendt elke atoomkern een α -deeltje (een heliumkern) uit, waardoor hij overgaat in een atoom van het element radon: $^{222}_{86}\text{Rn}$. De halfwaardetijd van dit radium is ongeveer 1600 jaar. In die tijd wordt de helft van de radiumatomen omgezet in radon. Het percentage radium neemt voortdurend af (vanaf 100%).

Beschrijf het verval van radium op drie manieren met een formule.

Antwoord

Neem $t = 0$ op 1-1-1900 en t in jaren en noem het percentage radium N . Het verval van dit radium kun je dan beschrijven met een formule van de vorm:

- $N(t) = N(0) \cdot g^t$ met $N(0) = 100$ en $g^{1600} = 0,5$.
Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot 0,9996^t$.
- $N(t) = N(0) \cdot e^{kt}$ met $N(0) = 100$ en $e^{1600k} = 0,5$.
Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot e^{-0,00043t}$.
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ met $N(0) = 100$ en $10^{1600k} = 0,5$.
Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot 10^{-0,00019t}$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Reken de drie gevonden vervalformules zelf na.
- Bereken met elk van de drie gevonden vervalformules de vervalsnelheid op $t = 0$.
- Bereken ook de vervalsnelheid op $t = 90$. Wat gebeurt er met de vervalsnelheid als t toeneemt?
- In welk jaar is er nog 20% van de beginhoeveelheid radium over als er verder niemand aan komt?

Opgave 6

Differentieer de volgende functies en stel de vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

- $f(x) = 4 \cdot 3^{2x-4} - 12$
- $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$
- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
- $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^3}$

Voorbeeld 3

Bereken algebraïsch de extremen van de functie f met $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$.

Antwoord

Bekijk eerst de grafiek van f , bijvoorbeeld met de grafische rekenmachine.

$$f'(x) = (2x + 2) \cdot e^{-x} + (x^2 + 2x) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (2 - x^2) \cdot e^{-x}.$$

Voor de extremen los je op: $f'(x) = 0$.

Ga na, dat je vindt: $x = -\sqrt{2}$ v $x = \sqrt{2}$.

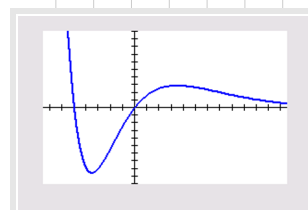
De extremen zijn:

$$\min. f(-\sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2}) e^{\sqrt{2}} \text{ en } \max. f(\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2}) e^{-\sqrt{2}}.$$

Opgave 7

Gegeven is de functie f met $f(x) = x e^{-x}$.

- Bereken algebraïsch alle karakteristieken van de grafiek van f . Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 3**.
- Bereken het buigpunt van de grafiek van f en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in dit buigpunt.
De functie f_a wordt gegeven door $f_a(x) = ax e^{-x}$.
- Hebben alle functies f_a een uiterste waarde? Zo ja, druk die uiterste waarde dan uit in a .
- Op welke rechte lijn liggen alle toppen van functies f_a ?
- Voor welke a is de uiterste waarde van f_a gelijk aan 80?



Figuur 2.1

- f** Voor welke a gaat de raaklijn aan de grafiek van f_a in $(0,0)$ ook door het punt $(2,15)$?
- g** Voor welke a ligt het buigpunt van de grafiek van f_a op de lijn $y = 20$?

Opgave 8

Bij benzinestations is vaak een extra service beschikbaar om de autobanden op te pompen. De automatische pomp levert een druk van 3,5 atmosfeer. De luchtdrukverandering in de band is recht evenredig met het drukverschil tussen de luchtdruk in de band en de luchtdruk van de pomp. De luchtdruk in de band begint met 1,4 atmosfeer en is na 10 seconden pompen opgelopen tot 2,0 atmosfeer.

- a** De luchtdruk p in de band (in atmosfeer) hangt gedurende het oppompen af van de tijd t in seconden. Schets een passende grafiek bij dit verband.
- $p(t)$ kan worden beschreven door een formule van de vorm:
 $p(t) = 3,5 - a \cdot g^t$.
- b** Bereken a en g .
- c** Je stopt de pomp als de druk in de band 2,6 atmosfeer bedraagt. Na hoeveel seconden is dat het geval?
- d** Bereken de snelheid waarmee de druk in de band toeneemt op $t = 0$.

Verwerken

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = x + 2^{-x}$.

- a** Bereken het minimum van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.
- b** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Opgave 10

Gegeven is de functie f met $f(x) = x e^{-x^2}$.

- a** Bereken algebraïsch de karakteristieken van de grafiek van f .
- b** Bereken de buigpunten van de grafiek van f .
- c** De lijn met vergelijking $y = px$ heeft precies één punt met de grafiek van f gemeen. Welke waarden kan p aannemen?

Opgave 11

Gegeven een familie van functies f_p door $f_p(x) = (x - p)^2 e^x$, waarin $p > 0$.

- a** Bereken algebraïsch de karakteristieken van f_0 .
- b** Bereken het snijpunt van de grafieken van f_0 en f_1 .
- c** Het snijpunt van de grafieken van f_0 en f_p ligt op de lijn $y = 1$. Bepaal voor welke p dit het geval is.

- d Toon aan dat f_p precies één maximum heeft en druk dit maximum uit in p .
- e Onderzoek hoeveel buigpunten de grafieken van f_p hebben.

Opgave 12

Melk bewaar je in de koelkast op een temperatuur van 6 °C. Als je een glas melk inschenkt heeft dit op $t = 0$ dan ook deze temperatuur. Vanaf dat moment warmt de melk op tot kamertemperatuur, zeg 20 °C. Die opwarming gaat volgens de warmtewet van Newton zo, dat de snelheid van opwarmen recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving.

- a Maak een schets van het verloop van de temperatuur T van de melk als functie van de tijd t in minuten.
- b Leg uit dat de functie T die de temperatuur van de melk in het glas beschrijft moet voldoen aan $T'(t) = c \cdot (T(t) - 20)$.
- c Toon aan dat een functie van de vorm $T(t) = 20 + a \cdot e^{ct}$ voldoet.
- d Neem aan, dat na 12 minuten de melk is opgewarmd tot 18 °C. Stel een daarbij passende formule voor $T(t)$ op.
- e Bereken de opwarmsnelheid van de melk op $t = 0$ en op $t = 15$. Verklaar het verschil tussen beide waarden.

Opgave 13

Bij onderzoek in het menselijk lichaam gebruiken artsen de stof jodium-131. Die stof is namelijk radioactief en daardoor kunnen deeltjes van die stof in het menselijk lichaam van buitenaf worden gevolgd. De halveringstijd (of halfwaardetijd) van jodium-131 is 8,06 dagen. Omdat radioactief verval exponentieel verloopt, kan de hoeveelheid jodium-131 in mg worden beschreven door:

$$m = m_0 \cdot e^{-kt}$$

t is daarin de tijd in dagen en m_0 is de hoeveelheid op tijdstip $t = 0$.

- a Bereken k , dat is de zogenaamde desintegratieconstante.
- b Als iemand een stof krijgt ingespoten die 5,00 mg jodium-131 bevat, hoeveel is daar na 15 dagen dan nog van terug te vinden?
- c Toon aan dat in dit model de vervalsnelheid recht evenredig is met de hoeveelheid radioactieve stof. Hoe groot is de bijbehorende evenredigheidsconstante?
- d Na hoeveel dagen is er nog 10% van de beginhoeveelheid over?
- e Na hoeveel dagen is de vervalsnelheid (de radioactiviteit) vermindert tot 10% van de beginsnelheid?
- f Als een meetnauwkeurigheid van twee decimalen maximaal haalbaar is, na hoeveel dagen is de ingespoten 5 mg jodium-131 dan niet meer meetbaar? Is de stof ooit volledig verdwenen?

Toepassen

Opgave 14: C-14 methode

Zowel in de atmosfeer als in levende organismen bevindt zich een bepaald percentage aan radioactieve koolstof C-14. Zodra een organisme sterft vindt er geen uitwisseling met de koolstof uit de atmosfeer meer plaats. Het percentage C-14 neemt vanaf dat moment exponentieel af met een halveringstijd van ongeveer 5600 jaar. Omdat alle levende organismen eenzelfde gehalte aan C-14 hebben, stelt dit ons in staat de ouderdom te bepalen van natuurlijke materialen als perkament, leren kleding, houten palen en dergelijke.

Het gehalte $C(t)$ aan C-14 is gegeven als percentage van het gehalte in levende organismen. t is de tijd in jaren met $t = 0$ op het moment dat het organisme is gestorven.

- Stel een formule op voor $C(t)$ van de vorm $C(t) = 100 \cdot e^{kt}$. Bereken k in zes decimalen nauwkeurig.
- Van de Dode-Zeerollen is het gehalte aan C-14 nog 79%. Hoe oud zijn ze?
- Van een mummie is nog 65% van het gehalte aan C-14 over. Hoe oud is die mummie?
- Van een Indianensandaal uit een grot in Amerika is nog 33% van het gehalte aan C-14 over. Hoe oud is die sandaal?
- Bereken de vervalsnelheid als $t = 0$.

Testen

Opgave 15

Differentieer de volgende functies en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt met de x-as. Geef de raaklijn met benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

- $f(x) = 3 \cdot 0,5^{2x-1} - 4$
- $f(x) = 5 - e^{\sqrt{x}}$

Opgave 16

Bij het maken van foto's van je gebit gebruikt de tandarts röntgenstraling. De patiënt krijgt een heel geringe dosis straling toegediend en ondervindt daarvan geen nadelige gevolgen. Maar een tandarts die dit regelmatig doet krijgt te maken met een opeenhoping van straling in zijn lichaam. Daarom beschermt hij zich met behulp van een loden plaat.

De intensiteit van de straling neemt namelijk af in een stof als lood. Als die stralingsintensiteit wordt voorgesteld door I , dan geldt:

$$I(d) = I(0) \cdot e^{-\alpha \cdot d}$$

waarin d de dikte van de loden plaat in cm is en α een constante is die afhangt van het materiaal.

- Een loden plaat van 1 cm dik houdt ongeveer 60% van de straling tegen. Bereken de materiaalconstante α .
- Hoe dik moet een loden plaat zijn om 99% van de straling tegen te houden?

- c Hoeveel bedraagt de snelheid waarmee de stralingsintensiteit afneemt op het moment dat die straling de loden plaat bereikt?

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het differentiëren van exponentiële functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.3 Logaritmische functies

Inleiding

Je kunt functies van de vorm $f(x) = g^x$ differentiëren. En met behulp daarvan leer je nu logaritmische functies differentiëren. Daarbij maak je gebruik van de definitieformules van logaritmen.

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van een logaritmische functie bepalen;
- van dergelijke functies de hellingen, de extremen en de buigpunten berekenen.

Voorkennis

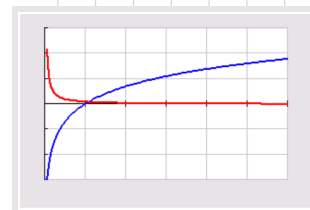
- exponenten en logaritmen gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- de afgeleide van $f(x) = g^x$ bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ en die van de bijbehorende afgeleide. Het gaat daarbij echter om benaderingen...

- Breng zelf de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ (bij benadering) in beeld.
- Waarom heeft de grafiek van deze afgeleide bij $x = 0$ een verticale asymptoot?
- De grafiek van de afgeleide heeft ook een horizontale asymptoot. Welke?
- Kun je een functievoorschrift voor de afgeleide verzinnen?



Figuur 3.1

Uitleg

Bekijk de applet.

De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ kun je vinden door te gebruiken dat $e^{\ln(x)} = x$.

Bekijk de functie $g(x) = e^{\ln(x)}$.

Uit $g(x) = e^{\ln(x)}$ volgt $g'(x) = e^{\ln(x)} \cdot [\ln(x)]'$.

Uit $g(x) = x$ volgt $g'(x) = 1$.

Dus is $e^{\ln(x)} \cdot [\ln(x)]' = 1$ en $[\ln(x)]' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$.

Conclusie:

- De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Nu je de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ hebt gevonden, kun je die van $f(x) = {}^g \log(x)$ er uit afleiden door te gebruiken dat ${}^g \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)}$.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ bepaald. Differentieer de volgende functies en bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 10$.

- a $f(x) = \ln(5x)$
- b $f(x) = 3 \ln(4 - x)$
- c $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Opgave 2

Bepaal nu zelf de afgeleide van $f(x) = {}^2\log(x)$. Gebruik daarbij ${}^2\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Opgave 3

Bepaal de afgeleide van $f(x) = {}^g\log(x)$. (Neem aan dat $g > 0$ en $g \neq 1$.)

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **afgeleide van de natuurlijke logaritmische functie**

$$f(x) = \ln(x) \text{ is } f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Bewijs 1

Je gebruikt de definitieformule $\ln(e^x) = x$.

Voor $f(x) = \ln(x)$ geldt dan $f(e^x) = x$.

Als je hierin links en rechts van het isgelijktteken differentieert, dan

$$\text{vind je } f'(e^x) \cdot e^x = 1, \text{ dus } f'(e^x) = \frac{1}{e^x}.$$

Vervang je hierin e^x door een letter, bijvoorbeeld x , dan staat er

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

De **afgeleide van de g -logaritme** $f(x) = {}^g\log(x)$ is hieruit af te

$$\text{leiden door te gebruiken dat } {}^g\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)}.$$

Je vindt:

$$\text{Als } f(x) = {}^g\log(x), \text{ dan is } f'(x) = \frac{1}{\ln(g) \cdot x}.$$

Verder kun je nu allerlei functies waarin vormen als $\ln(x)$ en/of ${}^g\log(x)$ voorkomen differentiëren met de differentieerregels.

Daarmee kun je van functies die ingewikkelder zijn dan zuiver logaritmische functies ook de karakteristieken bepalen. En ook kun je nu eindelijk de algemene machtsregel bewijzen.

Voorbeeld 1

Differentieer de volgende functies:

- $f(x) = {}^5\log(x)$
- $f(x) = {}^5\log(2x)$
- $f(x) = x \cdot {}^5\log(2x)$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot \log(-0,5t)$
- $K(q) = 100 \cdot \ln\left(\frac{1}{q}\right) + 12 \cdot \ln(2q)$
- $f(x) = \frac{3\ln^2(x)}{x}$

Antwoord

- $f(x) = {}^5\log(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\ln(5) \cdot x}$.
- $f(x) = {}^5\log(2x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\ln(5) \cdot 2x} \cdot 2 = \frac{1}{\ln(5) \cdot x}$.
- $f(x) = x \cdot {}^5\log(2x)$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot {}^5\log(2x) + x \cdot \frac{1}{\ln(5) \cdot x} = {}^5\log(2x) + \frac{1}{\ln(5)}$$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot \log(0,5t)$ geeft

$$N'(t) = -2000 \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot 0,5t} \cdot 0,5 = -\frac{2000}{\ln(10) \cdot t}$$
- $K(q) = 100 \cdot \ln\left(\frac{1}{q}\right) + 12 \cdot \ln(2q) = -100 \ln(q) + 12 \ln(2q)$ geeft

$$K'(q) = -\frac{100}{q} + \frac{12}{2q} \cdot 2 = -\frac{88}{q}$$
- $f(x) = \frac{3\ln^2(x)}{x}$ geeft $f'(x) = \frac{6\ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 3\ln^2(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{6\ln(x) - 3\ln^2(x)}{x^2}$.

Opgave 4

Bepaal van de volgende functies de afgeleide en los op: $f'(x) = 10$.
 Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 1**.

- a $f(x) = \ln(4x)$
- b $f(x) = {}^3\log(x)$
- c $f(x) = 5\log(x)$
- d $f(x) = 50\ln(2x) + 100$
- e $f(x) = {}^2\log(50 + x^2)$
- f $f(x) = \frac{2}{\ln(3x)}$

Opgave 5

De algemene machtsregel zegt dat de afgeleide van $f(x) = x^r$ is $f'(x) = rx^{r-1}$.

Deze regel heb je al veel gebruikt, maar nog niet bewezen.

Bewijs de machtsregel met behulp van exponentiële en logaritmische functies.

Voorbeeld 2

De **luchtdruk** p (in hectopascal hPa) hangt af van de hoogte h in km boven het aardoppervlak. In een luchtballon is de luchtdruk gemakkelijk te meten en wordt daaruit de hoogte berekend met de formule:

$$h = -6,5 \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

Hierin is p_0 de luchtdruk op zeeniveau. Neem aan dat $p_0 = 1000$ hPa.

Bereken nu de hoogte en de snelheid waarmee $h(p)$ verandert als $p = 920$ hPa wordt gemeten.

Antwoord

Als $p_0 = 1000$ hPa dan is $h = -6,5 \log(0,001p)$.

Als $p = 920$ hPa dan is $h \approx 0,235$ km.

Je zit dan 235 m boven zeeniveau.

$$h'(p) = -6,5 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{0,001p} \cdot 0,001 = \frac{-2,823}{p}.$$

Als $p = 920$ hPa dan is $h' \approx -0,003$.

Bij een toename van de luchtdruk daalt de hoogte met ongeveer 3 m/hPa.



Figuur 3.2

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**. Neem nu aan dat $p_0 = 1020$ hPa.

- Bepaal voor deze waarde van p_0 de afgeleide van $h(p)$.
- Bereken h en de veranderingssnelheid van h als er 900 hPa wordt gemeten in de ballon.
- Hoe kun je aan de afgeleide van h zien dat de grafiek van h voor elke waarde van p dalend is?

Opgave 7

Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(2x + 4)$ en $g(x) = \ln(-x)$.

- Bepaal van beide functies het domein. Bij welke instellingen van het venster van de grafische rekenmachine krijg je van beide functies de karakteristieken goed in beeld?
- Los algebraïsch op: $f(x) \leq g(x)$.
- De grafieken van f en g snijden elkaar in punt S . Hoe groot is de hoek die de raaklijnen aan de grafieken van f en g in S met elkaar maken?

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie f met $f(x) = x \ln^2(x)$.

Bereken algebraïsch de extremen van f .

Bereken de coördinaten van de punten op de grafiek van f waarin de raaklijn evenwijdig is aan de lijn met vergelijking $y = 3x$.

Antwoord

Om de grafiek te kunnen tekenen stel je vast dat het domein $[0, \rightarrow)$ en het nulpunt $x = 1$ is.

De afgeleide van f is: $f'(x) = \ln^2(x) + 2 \ln(x)$.

De extremen vind je uit $f'(x) = \ln^2(x) + 2 \ln(x) = 0$.

Dit geeft $\ln(x) \cdot (\ln(x) + 2) = 0$, dus $\ln(x) = 0 \vee \ln(x) = -2$ en dus $x = 1 \vee x = e^{-2}$.

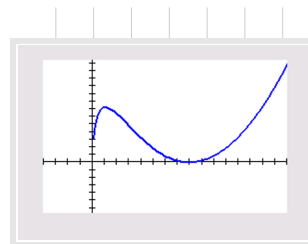
Dus zijn de extremen $\min. f(1) = 0$ en $\max. f(e^{-2}) = 4e^{-2}$.

Voor de raaklijn ga je uit van $f'(x) = 3$.

Dit geeft: $\ln^2(x) + 2 \ln(x) = 3$ en dus $\ln^2(x) + 2 \ln(x) - 3 = 0$.

Dit levert op: $\ln(x) = 3 \vee \ln(x) = -1$ en dus $x = e^3 \vee x = e^{-1}$.

De gevraagde punten zijn $(e^3, 9e^3)$ en (e^{-1}, e^{-1}) .



Figuur 3.3

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt de functie f met $f(x) = x \ln^2(x)$ bekeken.

- Bepaal zelf de afgeleide van f en bereken de extremen van f .
- Bereken het buigpunt van de grafiek van f en stel een vergelijking op van de raaklijn aan die grafiek in dit buigpunt.

Opgave 9

Gegeven is de familie van functies f_n met het voorschrift $f_n(x) = x^n \ln(x)$ met n een positief geheel getal.

- Waarom is er geen functie van deze familie waarvan de top op de lijn $y = 2$ ligt?
- Bereken de hoek waaronder de grafiek van elke functie f_n de x -as snijdt.
- Druk de buigpunten van de grafieken van f_n uit in n . Hoeveel buigpunten heeft elke grafiek?
- Op de grafiek van f_2 ligt een punt P waarin de raaklijn aan die grafiek door de oorsprong van het assenstelsel gaat. Bereken de coördinaten van P .

Verwerken

Opgave 10

Bepaal $f'(x)$ en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

- $f(x) = 2 \log(2 - x)$
- $f(x) = \ln(x^2 + 4x)$
- $f(x) = x \ln(2x)$
- $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
- $f(x) = x^{+1} \log(e)$

Opgave 11

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = \frac{2}{x} + \ln(2x)$.

- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.
- Bereken algebraïsch het minimum van f .
- Voor welke x heeft de raaklijn aan de grafiek van f een richtingscoëfficiënt van -1 ?

Opgave 12

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = {}^2\log(6-x)$ en $g(x) = -{}^2\log(x)$ met domein $[0,6]$.

- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
Op de grafieken van f en g liggen punten A en B beide met x -waarde k . Neem aan dat $1 < k < 4$.
- Toon aan dat de lengte van AB dan maximaal $2 \cdot {}^2\log(3)$ is.
Op de grafieken van f en g liggen punten C en D beide met y -waarde p .
- Toon aan dat voor de lengte l van CD geldt: $l(p) = 6 - 2^p - \frac{1}{2^p}$.
- Bereken de maximale lengte van CD .

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = x(\ln(x) - 1)$.

- Bereken algebraïsch de karakteristieken van de grafiek van f .
- Teken een nauwkeurige grafiek van f voor $0 \leq x \leq 3$. Laat daarin duidelijk zien hoe de grafiek van f er in de buurt van $(0,0)$ uitziet.
- Er ligt een punt op de grafiek van f waarin de raaklijn aan die grafiek door het punt $(0,1)$ gaat. Bereken de coördinaten van dat punt.

Opgave 14

Gegeven zijn de functies f_p door $f_p(x) = x^2 - \ln(px)$ met $p > 0$.

- Toon aan dat de grafieken van alle functies f_p door verschuiving in de y -richting uit elkaar kunnen ontstaan.
- De grafiek van f_p heeft een extreme waarde van 1 . Bereken p .
- Toon aan dat de grafieken van f_p geen buigpunt hebben.

Toepassen

Opgave 15: Geluidsdruk niveau

Voor het geluidsdruk niveau L geldt de formule:

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Hierin is I de geluidsintensiteit in W/m^2 (Watt per m^2). De grootte L wordt veel gebruikt om geluidshinder te meten. Hij wordt uitgedrukt in decibel (dB).

- a** Bij de gehoor grens ($L = 0$) is de geluidsintensiteit 10^{-12} W/m^2 . Bij de pijngrens is de geluidsintensiteit 10 W/m^2 . Bereken het geluids druk niveau bij de pijngrens.

Op een bepaalde afstand produceren twee personen auto's elk een geluids druk niveau van 80 dB. Nu kun je hun gezamenlijke geluids druk niveau niet krijgen door beide afzonderlijke geluids druk niveaus op te tellen. Dat kan echter wel met hun afzonderlijke geluidsintensiteiten.

- b** Bereken met behulp daarvan hun gezamenlijke geluids druk niveau. De geluidshinder in de buurt van een snelweg hangt onder meer af van de afstand tot die weg. Voor niet te grote afstanden (van ongeveer 20 m tot 1000 m) wordt de formule: $L = L_0 - 10 \log(2\pi R)$ gebruikt, waarin R de afstand tot de as van de weg in m is en L het geluids druk niveau in dB is. L_0 is het geluids druk niveau van het verkeer op de as van de weg.
- c** Als op 20 m een geluids druk niveau van 77 dB wordt gemeten, hoe groot is dan het geluids druk niveau op 100 m afstand van die weg?
- d** Op welke afstand van die weg is het geluids druk niveau 60 dB?
- e** Geef de formule voor L als functie van R als $L(20) = 80 \text{ dB}$.

Testen

Opgave 16

Bepaal van de volgende functies de afgeleide en los op $f'(x) = 10$.

- a** $f(x) = 3 \log(x)$
- b** $f(x) = 2 \log(11 - x)$
- c** $f(x) = \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

Opgave 17

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2+2\ln(x)}{x}$.

- a** Bereken algebraïsch de karakteristieken van de grafiek van f .
- b** Bereken de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f .
- c** De raaklijn in een punt P van de grafiek van f gaat door $O(0,0)$. Bereken de coördinaten van punt P .

Opgave 18

De helderheid van sterren wordt vanouds aangegeven door de grootteklasse of magnitude m . Heldere sterren zijn van de eerste grootte: $m = 1$. Sterren die met het blote oog nog net zichtbaar zijn, hebben magnitude 6. Die magnitude wordt echter nog fijner onderverdeeld. De ster 'Castor' in het sterrenbeeld 'Tweelingen' heeft een magnitude van 1,58.

Volgens de wet van Fechner is de magnitude afhankelijk van de lichtsterkte I volgens de formule: $m = a \ln(I) + b$. Daarin is de lichtsterkte van een ster met magnitude 6 gelijk aan 1: dus voor $I = 1$ geldt $m = 6$. Een ster van de eerste grootte is echter 100 keer zo lichtsterk: dus voor $I = 100$ geldt $m = 1$.

- Bereken met behulp van deze gegevens a en b .
- Voor de ster 'Regulus' geldt dat $I = 73$. Bereken de magnitude van Regulus.
- De helderste ster is 'Sirius' met een magnitude van $m = -1,6$. Bereken de bijbehorende lichtsterkte.
- Schrijf I als functie van m .

De lichtsterktes van twee sterren die samen een dubbelster vormen kun je optellen, hun magnitudes echter niet. De ster ϵ in het sterrenbeeld 'Lier' is zo'n dubbelster. De magnitudes van de afzonderlijke sterren zijn 4,5 en 4,7.

- Hoe groot is de magnitude van de dubbelster?

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het differentiëren van logaritmische functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

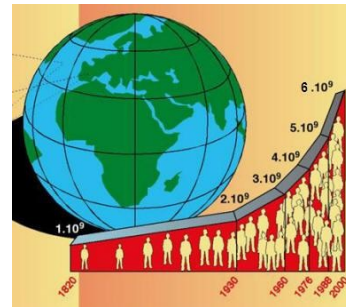
Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.4 Groeimodellen

Inleiding

Een belangrijk toepassingsgebied van exponentiële functies en dus ook van logaritmen zijn de verschillende groeimodellen die ermee kunnen worden beschreven. Behalve exponentiële groei, komen ook geremde groei en het logistische groeimodel voorbij. En ook zul je werken met twee soorten logaritmisch papier.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met logaritmische schalen;
- groeimodellen opstellen en de eigenschappen ervan kennen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, logaritmische functies en machtsfuncties;
- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de kettingregel;
- de afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies opstellen.

Verkennen

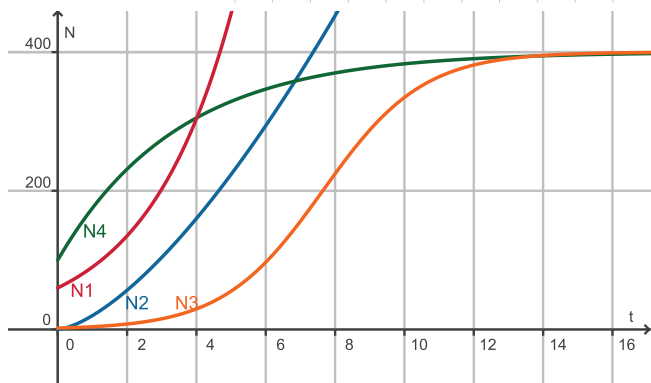
Opgave V1

Hier zie je in één figuur vier grafieken. De bijbehorende functies zijn:

- $N_1(t) = 60 \cdot 1,5^t$
- $N_2(t) = 20 \cdot t^{1,5}$
- $N_3(t) = \frac{400}{1+200 \cdot 0,5^t}$
- $N_4(t) = 400 - 300 \cdot 0,75^t$

Elk van deze functies is te gebruiken als groeimodel.

- Beschrijf bij elk van deze functies de wijze waarop de groei verloopt.
- Beschrijf ook telkens het verloop van de groeisnelheid.



Figuur 4.2

Uitleg 1

Een functie zoals $N(t) = 60 \cdot 1,5^t$ beschrijft exponentiële groei. Je kunt deze functie opvatten als een exponentieel groeimodel. De groei is dan nogal explosief, bij betrekkelijk kleine waarden van t heb je al met hele grote uitkomsten te maken.

Dat is lastig als je een geschikte grafiek wilt maken.

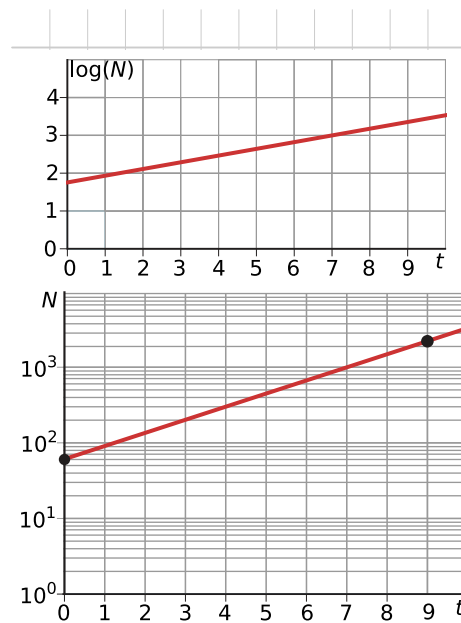
Neem je daarentegen aan beide zijden de logaritme dan krijg je:
 $\log(N) = \log(60 \cdot 1,5^t)$.

Met de eigenschappen van logaritmen wordt dit:

$$\log(N) = \log(60) + t \cdot \log(1,5).$$

Omdat zowel $\log(60)$ als $\log(1,5)$ getallen zijn, staat hier dat tussen $\log(N)$ en t een lineair verband bestaat. En daarom wordt een exponentiële functie een rechte lijn als je op de verticale as een logaritmische schaal gebruikt.

Er bestaat speciaal grafiekenpapier waar de verticale as zo is aangepast dat je zonder omrekenen met logaritmen een rechte lijn krijgt bij een exponentiële functie. Dat heet **enkellogaritmisch papier**.



Figuur 4.3

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Daarin gaat het over het tekenen van de grafiek van een exponentiële functie.

- a** Ga na dat de getekende grafiek juist is.

Neem nu de functie $K(t) = 600 \cdot 0,8^t$.

- b** Laat op algebraïsche wijze zien dat $\log(K)$ een lineaire functie van t is.

- c** Teken de grafiek van $\log(K)$.

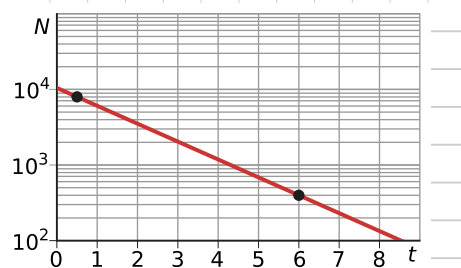
Zowel de grafiek van N als die van K kun je op enkellogaritmisch grafiekenpapier tekenen. Je hoeft dan niet eerst de formule te herschrijven.

- d** Neem een blad van dit grafiekenpapier en teken daarop de grafieken van beide functies.

- e** Je ziet hier de grafiek van een nieuwe functie $N(t)$ op enkellogaritmisch grafiekenpapier. Leg uit dat de grafiek door $(0,5; 8000)$ en $(6,400)$ gaat en stel het functievoorschrift op.

- f** Lees uit de figuur af hoe groot $N(1)$ en $N(4,5)$ (bij benadering) zijn. Controleer je antwoorden met behulp van het functievoorschrift.

- g** Heeft $N(t) = 0$ oplossingen? Kan er op de verticale as een 0 voorkomen?



Figuur 4.4

Opgave 2

Bekijk de functie $N_4(t) = 400 - 300 \cdot 0,75^t$.

- a** Teken de grafiek van N_4 op enkellogaritmisch grafiekenpapier.

- b** Kun je verklaren waarom de grafiek geen rechte lijn wordt?

Opgave 3

Deze tabel met gegevens hoort bij een bacteriecultuur. t is gegeven in uren, en $N(t)$ in aantallen.

t	0	1	2	3	4	5	6
$N(t)$	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 4.1

- Maak met behulp van deze tabel een tabel waarin $\log(N)$ wordt uitgezet tegen t .
- Teken de bijbehorende grafiek. Kun je deze grafiek benaderen door een rechte lijn? Is er sprake van exponentiële groei?
- Stel een formule op voor $\log(N)$ als functie van t .
- Stel met behulp van het antwoord van c een formule op voor N als functie van t .

Uitleg 2

Een functie zoals $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$ is een **machtsfunctie**. Ook daarvan is de grafiek lastig te tekenen, want in de buurt van $t = 0$ heb je uitkomsten vlak bij 0, maar bij grotere waarden van t al snel uitkomsten die behoorlijk groot zijn.

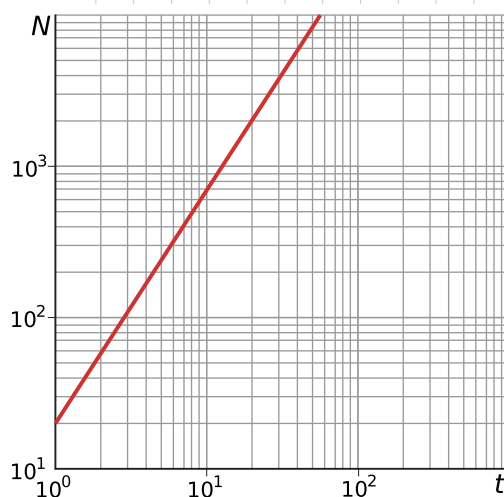
Weer kun je het voorschrift herleiden met behulp van logaritmen: $\log(N) = \log(20 \cdot t^{1,5})$.

Dit levert op: $\log(N) = \log(20) + 1,5 \cdot \log(t)$.

Er bestaat een lineair verband tussen $\log(N)$ en $\log(t)$.

Nu gebruik je op beide assen een logaritmische schaal.

Ook hiervoor bestaat speciaal grafiekenpapier waar de beide assen zo zijn aangepast dat je zonder omrekenen met logaritmen een rechte lijn krijgt bij een machtsfunctie. Dat heet **dubbellogaritmisch papier**.



Figuur 4.5

Opgave 4

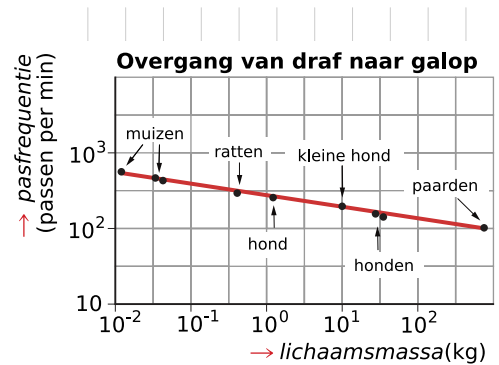
Bekijk **Uitleg 2** over het tekenen van een machtsfunctie.

- Maak bij de functie N met $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$ een tabel van $\log(N)$ afhankelijk van $\log(t)$. Teken de grafiek van $\log(N)$ uitgezet tegen $\log(t)$.
- Neem een blad dubbellogaritmisch grafiekenpapier. Teken daarop de grafiek van $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$.
Neem nu de functie $K(t) = 600 \cdot t^{0,8}$.
- Laat op algebraïsche wijze zien dat $\log(K)$ een lineaire functie van $\log(t)$ is.
- Teken de grafiek van $K(t)$ op dubbellogaritmisch grafiekenpapier.

Opgave 5

Zoogdieren gaan bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) over van draf naar galop. De pasfrequentie waar- bij dat gebeurt hangt af van de lichaamsmassa (in kg).

- Waarom kun je zien dat op beide assen van deze grafiek een logaritmische schaal is gebruikt?
- Noem de lichaamsmassa m (in kg) en de pasfrequentie P . De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden. Leg uit dat het punt dat hoort bij paarden ongeveer de coördinaten $(10^{2,9}, 10^{2,0})$ heeft. Bepaal zelf de coördinaten van het punt dat bij een kleine hond hoort.
- Leid nu een formule af voor P als functie van m .
- Bereken bij welke pasfrequentie een pony van 120 kg van draf naar galop overgaat.



Figuur 4.6

Theorie en voorbeelden

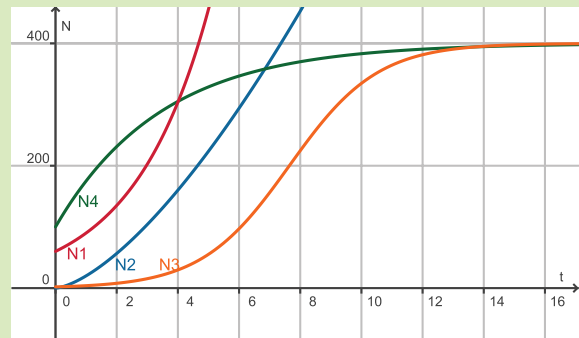
Om te onthouden

Bij het **exponentiële groeimodel** hoort een functie van de vorm $N_1(t) = b \cdot g^t$ of $N_1(t) = b \cdot e^{kt}$ of $N_1(t) = b \cdot 10^{kt}$. (In de figuur is $b = 60$ en $g = 1,5$.)

Teken je dergelijke functies op **enkellogaritmisch papier** dan wordt de grafiek een rechte lijn.

Bij een **machtsfunctie** als model hoort een voorschrift van de vorm $N_2(t) = b \cdot t^p$. (In de figuur is $b = 20$ en $p = 1,5$.)

Van dergelijke functies is de grafiek op **dubbellogaritmisch papier** een rechte lijn.



Figuur 4.7

Bij een **geremd exponentieel groeimodel** hoort een functie als

$$N_3(t) = \frac{G}{1+b \cdot g^t}.$$

Kenmerkend voor dit groeimodel is, dat de groei eerst vrijwel exponentieel verloopt, maar op zeker moment (voedselgebrek, te weinig ruimte) afremt. De groeisnelheid die eerst toeneemt, gaat vanaf dat moment afnemen. In dit groeimodel is $N = G$ de horizontale asymptoot en vind je de grootste groeisnelheid bij $N(t) = \frac{1}{2}G$. (In de figuur is $G = 400$, $b = 200$ en $g = 0,5$.)

Er zijn tenslotte nog situaties waarin het verschil met een constante waarde exponentieel afneemt. Daarbij hoort een groeimodel van de vorm $N_4(t) = G + b \cdot g^t$. Kenmerkend voor dit groeimodel is dat de groeisnelheid vanaf het begin afneemt. (In de figuur is $G = 400$, $b = -300$ en $g = 0,75$.)

Voorbeeld 1

In deze tabel zie je de groei van een aantal fruitvliegjes ('*Drosophila melanogaster*'). De populatie leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. N is het aantal fruitvliegjes.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24
$N(t)$	2	5	10	22	47	91	156

Tabel 4.2

De sterke toename van N doet exponentiële groei vermoeden. Teken de grafiek van $\log(N)$ als functie van t en/of teken de grafiek van $N(t)$ op **enkellogaritmisch papier** en stel een passende formule voor $N(t)$ op.

Antwoord

Je kunt de grafiek maken in Excel met een logaritmische schaal op de N -as.

De rechte lijn die het beste bij deze punten past kan door Excel worden berekend (exponentiële trendlijn).

Je kunt de figuur ook op enkellogaritmisch papier tekenen.

Ga zelf na, dat $N(t) = 2,3 e^{0,18t}$ een passende formule is.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**. De sterke toename van N doet exponentiële groei vermoeden.

- Teken de punten uit de tabel op enkellogaritmisch papier. Teken een lijn die zo goed mogelijk past bij de getekende punten. Deze lijn stelt de grafiek van $N(t)$ voor op enkellogaritmisch papier.
- Stel zelf een formule op voor $N(t)$.
- Controleer of de punten uit de tabel passen bij de gevonden formule.
- Na hoeveel dagen zouden er volgens dit groeimodel meer dan 1000 fruitvliegjes zijn?

Voorbeeld 2

Johannes Kepler (1571–1630) beschreef als eerste het verband tussen de omlooptijd T (in jaren) van een planeet en zijn gemiddelde afstand tot de zon R . Voor de Aarde geldt $T = 1$ jaar en wordt $R = 1$ AE (astronomische eenheid) genomen. In de tabel vind je de gegevens van de andere planeten in ons zonnestelsel.

planeet	Mercurius	Venus	Aarde	Mars	Jupiter	Saturnus	Uranus	Neptunus
R (in AE)	0,39	0,72	1	1,52	5,20	9,54	19,19	30,07
T (in jaren)	0,24	0,62	1	1,88	11,9	29,5	84,0	164,8

Tabel 4.3

Het verloop van $T(R)$ doet een machtsfunctie vermoeden.

Teken de grafiek van $\log(T)$ als functie van $\log(R)$ en/of teken de grafiek van $T(R)$ op **dubbellogaritmisch papier** en stel een passende formule op.



Figuur 4.8

Antwoord

Je kunt de grafiek maken in Excel met een logaritmische schaal op beide assen.

De rechte lijn die het beste bij deze punten past kan weer door Excel worden berekend (machtstrendlijn).

Je kunt de figuur ook op dubbellogaritmisch papier tekenen.

Ga zelf na, dat $T = 1 \cdot R^{1,5}$ een passende formule is.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Teken de grafiek van $\log(T)$ als functie van $\log(R)$ en/of teken de grafiek van $T(R)$ op dubbellogaritmisch papier. Wat voor soort groeimodel past bij $T(R)$?
- Door welk punt moet je grafiek in ieder geval gaan?
- Stel zelf een formule op voor $T(R)$.

In 1930 ontdekte astronoom **Clyde Tombaugh** een nieuw hemellichaam dat om de zon draaide op een (gemiddelde) afstand van 38,4851 AE. Dit hemellichaam werd Pluto genoemd en is lang als planeet geclassificeerd.

- Welke omlooptijd heeft Pluto?

Voorbeeld 3

In deze tabel zie je de groei van een aantal fruitvliegjes ('Drosophila melanogaster'). De populatie leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. N is het aantal fruitvliegjes.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
$N(t)$	2	5	10	22	47	91	156	226	282	317	335	343	347

Tabel 4.4

Nu lijkt er sprake van geremde exponentiële groei. $N(t)$ nadert de 350 fruitvliegjes. Stel m.b.v. de tabel een passend geremd exponentieel groeimodel op. Bereken bij welke t de groeisnelheid maximaal is.

Antwoord

De bijpassende formule wordt: $N(t) = \frac{350}{1+b \cdot g^t}$.

De grafiek gaat door (0,2) en dit geeft: $b = 174$.

De grafiek gaat ook door (40,335) en dit geeft: $g \approx 0,81$.

Een passende formule is: $N(t) = \frac{350}{1+174 \cdot 0,81^t}$.

De waarde van t waarin de groeisnelheid een maximum heeft kun je vinden door de tweede afgeleide te berekenen en dan $N''(t) = 0$ op te lossen. Je kunt ook gebruik maken van het feit dat die maximale groeisnelheid bereikt wordt als $N = \frac{350}{2} = 175$. Je vindt in beide gevallen: $t \approx 23$ dagen.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** lijkt er sprake van geremde exponentiële groei. $N(t)$ nadert de 350 fruitvliegjes.

- Teken een grafiek van $N(t)$ die zo goed mogelijk past bij de gegevens in de tabel.
- Gebruik de grenswaarde van 350 fruitvliegjes, de waarde van $N(0)$ en nog een ander geschikt punt van je grafiek om zelf een formule op te stellen voor $N(t)$.
- Bereken zelf de waarde van t waarin de groeisnelheid van N zo groot mogelijk is.

Opgave 9

Toon aan dat bij een functie van de vorm $N(t) = \frac{G}{1+b \cdot g^t}$ de grootste groeisnelheid optreedt als $N = \frac{1}{2}G$.

Voorbeeld 4

Een kop vers gezette koffie heeft een temperatuur van 80 °C. Als je die koffie rustig laat afkoelen in een omgevingstemperatuur van 20 °C, dan neemt (warmtewet van Newton) het temperatuurverschil met de omgeving exponentieel af: $T(t) - 20 = b \cdot g^t$.

t (min.)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
T (°C)	80,0	58,4	44,6	35,7	30,1	26,4	24,1	22,6	21,7	21,1	20,7	20,4	20,3

Tabel 4.5

Ga uit van het beschreven groeimodel en stel een bijpassende formule op.

Bereken de snelheid van afkoelen na 5 minuten.

Antwoord

Je gaat uit van: $T(t) - 20 = b \cdot g^t$.

De grafiek gaat door (0,80) en dit geeft: $b = 60$.

De grafiek gaat ook door (24; 20,3) en dit geeft: $60 \cdot g^{24} = 0,3$ en dus $g \approx 0,80$.

Een passende formule is: $T(t) = 20 + 60 \cdot 0,80^t$.

De afkoelsnelheid na vijf minuten is

$$T'(5) = 60 \cdot \ln(0,80) \cdot 0,80^5 \approx 4,39 \text{ °C/minuut.}$$

Opgave 10

Bekijk het afkoelingsproces van een kop koffie in **Voorbeeld 4**.

- Ga uit van het beschreven groeimodel en stel zelf een bijpassende formule op als je aanneemt dat de grafiek door de punten (0,80) en (20; 20,7) gaat.
- Bereken de snelheid van afkoelen na 10 minuten.

Verwerken

Opgave 11

De tabel geeft de gemiddelde hoogte aan van de zonnebloemen op een bepaalde akker op verschillende tijdstippen na het ontkiemen. De gemiddelde maximale hoogte die deze zonnebloemen bereiken is 256 cm.

t is de tijd in weken na het ontkiemen.

$H(t)$ is de gemiddelde hoogte van deze zonnebloemen in cm op tijdstip t .

aantal weken	2	4	6	8	10	12
hoogte in cm	36	98	170	228	251	255

Tabel 4.6

- Onderzoek of er sprake is van lineaire groei, exponentiële groei, of geen van beide.
- Teken de grafiek van de functie: $F(t) = \log\left(\frac{256-H(t)}{H(t)}\right)$.
Gebruik de gegevens in de tabel.
- Toon aan dat er een eerstegraads functie is die de functie F redelijk benadert en geef het bijpassende functievoorschrift.
- Leid uit de resultaten van b en c een functievoorschrift van H als functie van de tijd af.
- Bereken de groeisnelheid van deze zonnebloemen op $t = 1$. Waarom is de gemiddelde groei gedurende de tweede week groter?
- Bereken de groeisnelheid van deze zonnebloemen op $t = 10$. Waarom is de gemiddelde groei gedurende de tiende week kleiner?
- Op welke dag na het ontkiemen van de zonnebloemen groeien ze het snelst? Hoe snel groeien de zonnebloemen dan?

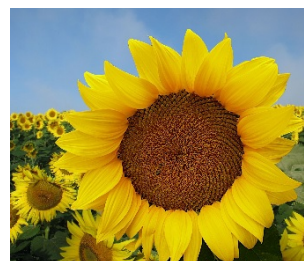
Opgave 12

In de tabel zie je de meetresultaten van een onderzoek naar het verband tussen de massa m van het dier en de energie E die het nodig heeft om zich over één kilometer te verplaatsen.

dier	m (gram)	E (calorieën)
muis	21	270
eekhoorn	236	870
witte rat	384	$1,7 \cdot 10^3$
hond (klein)	$2,6 \cdot 10^3$	$4,4 \cdot 10^3$
hond (groot)	$1,8 \cdot 10^4$	$1,7 \cdot 10^4$
schaap	$3,9 \cdot 10^4$	$2,3 \cdot 10^4$
paard	$5,8 \cdot 10^5$	$5,8 \cdot 10^5$

Tabel 4.7

- Teken deze gegevens op dubbellogaritmisch grafiekenpapier. Zet m uit op de horizontale as en E op de verticale as.



Figuur 4.9

- b** Waarom kun je bij benadering aannemen, dat er tussen m en E een verband van de vorm $E = a \cdot m^b$ bestaat?
- c** Bereken passende waarden van a en b .
- d** Bereken het energieverbruik per km van een kat met een massa van 3,2 kg.

Opgave 13

Bij het oogsten van koren wordt vaak gewerkt met een combine, of maaidorser. In zo'n maaidorser wordt in twee etappes gedorst: eerst in de dorststroom en daarna op de zogenaamde 'schudder', waar het graan (de graankorrels) tijdens het doorlopen van een traject uit het stro wordt geschud. De snelheid waarmee de hoeveelheid graan G (in kg) in het stro door het schudden afneemt, is recht evenredig met die hoeveelheid zelf:

$$G'(x) = -k \cdot G(x)$$

waarin x de afstand tot het begin van de schudder in meters is.

- a** Verklaar de formule in de tekst hierboven, met name ook het minteken.
- b** Toon aan dat aan deze formule een functie $G(x)$ van de vorm $G(x) = b \cdot e^{-kx}$ voldoet. Hierin is b de hoeveelheid aan het begin van de schudder.
- c** Ga uit van een schudder met een totale lengte van 6 m. Neem $k = 0,2$. Hoeveel procent van de hoeveelheid graan aan het begin van de schudder is aan het einde nog niet uit het stro geschud?
 k heet de scheidingsfactor van dit proces van schudden. De scheidingsfactor hangt af van de snelheid v (in m/s) van de maaidorser. Er geldt $k = \frac{1}{v}$.
- d** Verklaar de naam 'scheidingsfactor'. Hoeveel procent van het graan wordt niet uit het stro geschud als de maaidorser rijdt met een snelheid van 2 m/s?
- e** Is er een snelheid mogelijk waarbij alle graan uit het stro wordt geschud?



Figuur 4.10

Opgave 14

De volgende alinea's zijn vrij naar een artikel dat in 1991 in een krant stond.

FAO luidt noodklok

'Elk jaar verdwijnt steeds meer tropisch oerwoud. In 1990 was de afname wel anderhalf keer zo groot als in 1980. Dit stelt de FAO, de voedsel- en landbouworganisatie van de Verenigde Naties, in een zondag verschenen rapport met nieuwe gegevens over de ontbossing van de aarde.

1 – In 1990 verdween in de tropen zeventien miljoen hectare oerwoud. Dit is een gebied even groot als Oostenrijk, Denemarken en Nederland samen.

2 – Er was op 1 januari 1990 nog 2900 miljoen hectare tropisch oerwoud over.

3 – De FAO wijst naar de geïndustrialiseerde landen waar de ontbossing een halt is toegeroepen. Tussen 1 januari 1980 en 1 januari 1985 is de bosoppervlakte in die landen met 5 procent toegenomen tot 2100 miljoen hectare.'

Een lezer van dit artikel probeert de gegeven informatie in een wiskundig model te verwerken om daarmee te kijken wat de gevolgen zullen zijn als de afname van het tropisch oerwoud op dezelfde wijze blijft voortduren. Zij noemt de oppervlakte aan tropisch oerwoud (in miljoenen hectare) dat op tijdstip t nog aanwezig is $y(t)$. Zij neemt $t = 0$ op 1 januari 1980 en t in jaren.

- a** Leg uit waarom zowel een formule van de vorm $y(t) = a \cdot t + b$ als een formule van de vorm $y(t) = a \cdot g^t$ niet in overeenstemming is met de gegevens uit het krantenartikel.

De lezer kiest voor een formule van de vorm $y(t) = b - a \cdot g^t$.

Uit de in de alinea's 1, 2 en 3 verstrekte gegevens leidt zij deze waarden af: $b = 3311$, $a = 274$ en $g = 1,0414$.

- b** Laat zien dat de formule met die waarden in overeenstemming is met de in de alinea's 1, 2 en 3 gegeven informatie.

Wanneer de ontbossing op dezelfde wijze blijft voortduren, zal op een gegeven moment minder dan 1000 miljoen hectare tropisch oerwoud overblijven.

- c** Bereken in welk jaar dat volgens de door de lezer gevonden formule zal gebeuren.

Het oorspronkelijke krantenartikel begon met de zin: "De tropische oerwouden verdwijnen anderhalf keer zo snel als 10 jaar geleden."

- d** Onderzoek met behulp van differentiëren of de door de lezer gevonden formule ook hiermee in overeenstemming is.

Testen

Opgave 15

Bij een slingerproef is de slingerperiode T voor een aantal verschillende slingerlengten l gemeten.

- Laat zien met behulp van logaritmisch papier, dat de meetresultaten in overeenstemming zijn met de veronderstelling, dat T een machtsfunctie is van l : $T = A \cdot l^a$.
- Bereken A en a .

l (cm)	T (s)
63,5	1,65
87,5	1,87
140,5	2,38
225,0	3,00
320,0	3,55

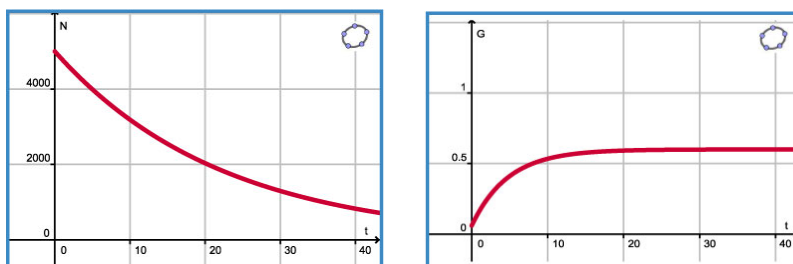
Tabel 4.8

Opgave 16

Een forellenkweker zet in elk van zijn kweekvijvers steeds 5000 jonge forellen uit. Die forellen nemen vanaf dat moment ($t = 0$) in gewicht toe, maar er sterven ook forellen. Hij heeft al een aantal jaren maandelijks de stand van de forellen bijgehouden. Op grond daarvan kan hij formules opstellen voor de groei van zo'n populatie forellen. Als t de tijd in maanden is, dan geldt:

- $N(t) = 5000 \cdot e^{a \cdot t}$ waarin N het aantal forellen is.
- $G(t) = G_{\text{eind}} - b \cdot e^{c \cdot t}$ waarin G het gewicht per forel in kg is.

G_{eind} stelt het gewicht voor dat een gemiddelde forel steeds meer zal benaderen naarmate hij ouder wordt.



Figuur 4.12

- De uitgezette forellen wegen gemiddeld 65 gram. Stel nu met behulp van de grafieken de juiste formules op voor $N(t)$ en $G(t)$.
- Stel een formule op voor het totale gewicht aan forellen in deze vijver.
- Als de forellenkweker zijn kweekvijver wil leegvissen als het totale gewicht aan forellen maximaal is, hoeveel maanden na het uitzetten moet hij dat dan doen?



Figuur 4.11

1.5 Integralen

Inleiding

Nu je exponentiële en logaritmische functies kunt differentiëren, kun je ook primitieven van dergelijke functies afleiden. Die heb je nodig om oppervlaktes onder vlakdelen, inhouden van omwentelingslichamen, lengtes van krommen, en dergelijke exact te kunnen berekenen als bij het beschrijven ervan exponentiële en/of logaritmische functies worden gebruikt.

Je leert in dit onderwerp

- de primitieven van exponentiële en logaritmische functies kennen;
- integralen berekenen waarin exponentiële en/of logaritmische functies voorkomen.

Voorkennis

- werken met exponentiële en logaritmische functies;
- differentiëren en integreren met alle basisregels;
- de afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies opstellen.

Verkennen

Opgave V1

Uit de afgeleiden van de exponentiële en de logaritmische functies kun je een hele lijst met primitieven samenstellen.

- a Welke primitieven kun je zelf verzinnen?
- b Licht toe dat uit $f(x) = \frac{1}{x}$ volgt: $F(x) = \ln(|x|) + c$.
(Waarom die absoluutstrepen???)

Uitleg

Uit de afgeleiden van de exponentiële en de logaritmische functies kun je een hele lijst met primitieven samenstellen.

- Als $f(x) = e^x$ dan is $f'(x) = e^x$.
Dus: als $f(x) = e^x$ dan is $F(x) = e^x + c$.
- Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = \ln(g) \cdot g^x$.
Dus: als $f(x) = g^x$ dan is $F(x) = \frac{g^x}{\ln(g)} + c$.
- Als $f(x) = \ln(x)$ dan is $f'(x) = \frac{1}{x}$ (met $x > 0$).
Dus: als $f(x) = \frac{1}{x}$ (met $x > 0$) dan is $F(x) = \ln(x) + c$.
Is echter $x < 0$ dan is $f(x) = -\frac{1}{-x}$.
De primitieve is dan $F(x) = -\ln(-x) \cdot -1 + c = \ln(-x) + c$.
Dit kun je samenvatten tot: als
 $f(x) = \frac{1}{x}$ dan is $F(x) = \ln(|x|) + c$.

Hierin worden de haakjes van de ln-functie vaak weggelaten!

Moeilijker is het vinden van de primitieve van $f(x) = \ln(x)$.

Maar je kunt wel bewijzen dat $F(x) = x \ln(x) - x + c$ als afgeleide heeft: $F'(x) = \ln(x)$.

En dan heb je toch een geschikte primitieve gevonden.

Vervolgens is $f(x) = {}^g \log(x)$ ook niet moeilijk meer te primitiveren...

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Er worden primitieven bepaald van exponentiële en logaritmische functies.

- Als $f(x) = g^x$ dan is $F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x + c$. Laat zien dat dit klopt door F te differentiëren.
- Leid de primitieve van $g(x) = e^x$ af uit die van $f(x) = g^x$.
Neem nu de functie $h(x) = 2 + 0,5 e^{2x}$.
- Bereken $\int_0^2 h(x) dx$.
- Wat heb je met de integraal uit c uitgerekend?

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt verteld dat $F(x) = \ln|x| + c$ de primitieve is van $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Laat met behulp van differentiëren zien dat dit juist is.
- Welke primitieve heeft $g(x) = \frac{4}{x+2}$?
- Welke primitieve heeft $h(x) = \frac{4}{2x+4}$?

Opgave 3

In de **Uitleg** wordt verteld dat $F(x) = x \ln(x) - x + c$ de primitieve is van $f(x) = \ln(x)$.

- Laat met behulp van differentiëren zien dat dit juist is.
- Welke primitieve heeft $f(x) = {}^g \log(x)$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Om te kunnen werken met integralen waarin exponentiële en logaritmische functies voorkomen heb je een lijst nodig met **primitieven van exponentiële en logaritmische functies**.

- Als $f(x) = e^x$ dan is $F(x) = e^x + c$.
- Als $f(x) = g^x$ dan is $F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x + c$.
- Als $f(x) = \ln(x)$ dan is $F(x) = x \ln(x) - x + c$.

Verder is de lijst met **primitieven van machtsfuncties** nu ook compleet gemaakt.

- Als $f(x) = x^n$ dan is $F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$ mits $n \neq -1$.
- Als $f(x) = \frac{1}{x}$ dan is $F(x) = \ln|x| + c$.

Je ziet dat de haakjes van de $\ln$ -functie zijn weggelaten!

Functies waarin de hierboven genoemde functies voorkomen kun je nu af en toe ook primitiveren. Maar omdat het aantal methoden dat je leert voor het primitiveren beperkt is, moet je bij het berekenen van een integraal nog regelmatig terugvallen op je grafische rekenmachine voor een benadering.

Voorbeeld 1

Primitiveer de volgende functies:

- $f(x) = 5^x$
- $f(x) = 5^{2x}$
- $f(x) = {}^5\log(x)$
- $f(x) = e^{-0,5x}$
- $f(x) = \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2$

Antwoord

Hier zie je hoe het primitiveren in zijn werk gaat. Soms moet je eerst de functie herleiden.

- $f(x) = 5^x$ geeft $F(x) = \frac{1}{\ln(5)} \cdot 5^x + c$.
- $f(x) = 5^{2x}$ geeft $F(x) = \frac{1}{\ln(5)} \cdot 5^{2x} \cdot \frac{1}{2} + c = \frac{1}{2\ln(5)} \cdot 5^{2x} + c$.
- $f(x) = {}^5\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(5)} = \frac{1}{\ln(5)} \cdot \ln(x)$ geeft $F(x) = \frac{1}{\ln(5)}(x \ln(x) - x) + c$.
- $f(x) = e^{-0,5x}$ geeft $F(x) = e^{-0,5x} \cdot \frac{1}{-0,5} + c = -2e^{-0,5x} + c$.
- $f(x) = \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$ geeft $F(x) = 0,5e^{2x} + 2x - 0,5e^{-2x} + c$.

Opgave 4

Primitiveer de volgende functies, zie **Voorbeeld 1**.

- $f(x) = e^{x+1}$
- $f(x) = 5 + 3 \cdot 2^{4x}$
- $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{3}{2x+1}$
- $f(x) = \ln(3x)$
- $f(x) = \frac{2}{e^{4x}}$

Opgave 5

Bepaal de volgende integralen met behulp van primitiveren.

- $\int_0^2 \frac{3}{3x+4} dx$
- $\int_0^4 0,5^{2x-1} dx$
- $\int_1^2 \frac{x^4+5x^2}{x^3} dx$
- $\int_{0,25}^e \ln(4x) dx$

Voorbeeld 2

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln(x)$, de lijn $y = 2$ en de beide coördinaatassen. Bereken de exacte oppervlakte A van V .

Antwoord

De grafiek van f snijdt de x -as in $(1,0)$.

De grafiek van f snijdt de lijn $y = 2$ in $(e^2, 2)$.

$$A(V) = \int_0^{e^2} 2 \, dx - \int_1^{e^2} \ln(x) \, dx = [2x]_0^{e^2} - [x \ln(x) - x]_1^{e^2} = e^2 - 1$$

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

- a Voer zelf de berekening in het voorbeeld uit. Ga na, dat je hetzelfde antwoord krijgt.

Gegeven is de functie $f(x) = e^x$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de lijn $x = 2$ en de twee coördinaatassen.

- b Bereken de oppervlakte van vlakdeel V met behulp van primitieven.
- c Hoe komt het dat je antwoord bij b hetzelfde is als de oppervlakte die je in het voorbeeld hebt gevonden?

Voorbeeld 3

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln(x)$, de lijn $y = 2$ en de beide coördinaatassen.

Vlakdeel V wordt gewenteld om de y -as. Bereken de exacte inhoud I van het omwentelingslichaam W dat zo ontstaat.

Antwoord

Omdat voor de grafiek van f geldt $y = \ln(x)$, wordt $x = e^y$.

$$I(W) = \int_0^2 \pi (e^y)^2 \, dy = \pi \int_0^2 e^{2y} \, dy = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \pi (e^4 - 1).$$

Opgave 7

Bestudeer **Voorbeeld 3**.

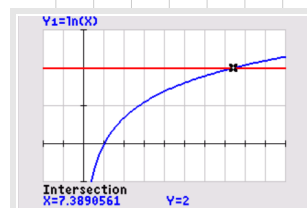
- a Voer zelf de berekening in het voorbeeld uit. Ga na, dat je hetzelfde antwoord krijgt.

Gegeven is de functie $f(x) = e^x$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de lijn $x = 2$ en de twee coördinaatassen. Dit vlakdeel wordt gewenteld om de x -as.

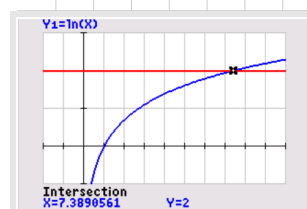
- b Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam W_x dat daardoor ontstaat.

Vlakdeel V wordt gewenteld om de y -as.

- c Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam W_y dat daardoor ontstaat.



Figuur 5.1



Figuur 5.2

Voorbeeld 4

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln(x)$, de lijn $y = 2$ en de beide coördinaatassen. Bereken de omtrek van V in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De gevraagde omtrek bestaat uit de lengtes van drie lijnstukken en de lengte van de grafiek van f tussen $x = 1$ en $x = e^2$ samen.

Dus:

$$P(V) = 1 + 2 + e^2 + \int_1^{e^2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx =$$

$$3 + e^2 + \int_1^{e^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \approx 17,18.$$

Opgave 8

Bestudeer **Voorbeeld 4**.

- a** Voer zelf de berekening in het voorbeeld uit. Ga na, dat je hetzelfde antwoord krijgt

Gegeven is de functie $f(x) = e^x$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de lijn $x = 2$ en de twee coördinaatassen.

- b** Bereken de omtrek van vlakdeel V met behulp van een integraal.
c Hoe komt het dat je antwoord bij b hetzelfde is als de omtrek die je in het voorbeeld hebt gevonden?

Opgave 9

Gegeven is de functie f door $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = 2\frac{1}{2}$.

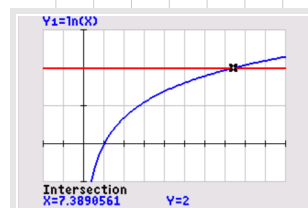
- a** Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van V .
b Het vlakdeel V wordt gewenteld om de x -as. Bereken met behulp van primitiveren de inhoud van het omwentelingslichaam dat daarvoor ontstaat.
c Bereken met behulp van de grafische rekenmachine de omtrek van V .

Verwerken

Opgave 10

Bereken de volgende integralen exact en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

- a** $\int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx$
b $\int_0^1 x^{2e} - e^{2x} dx$
c $\int_{0,25}^1 \ln(4x) dx$
d $\int_1^4 \frac{x+4}{2x} dx$
e $\int_0^1 2 + 5 \cdot 10^{0,5x} dx$
f $\int_1^2 \log(3x) dx$



Figuur 5.3

Opgave 11

Bepaal de primitieve functie $F(x)$ als bekend is dat:

- a $f(x) = -0,25 e^{-\frac{1}{2}x} + e$ en $F(0) = 1$.
- b $f(x) = 1 - \log(x)$ en $F(1) = 0$.

Opgave 12

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x^2-4}{2x}$. V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = 4$.

- a Bereken exact de oppervlakte van V .
- b Bereken de omtrek van V in twee decimalen nauwkeurig.
- c V wordt gewenteld om de x -as. Bereken de exacte inhoud van het omwentelingslichaam dat daardoor ontstaat.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$.

- a Laat zien dat $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.
- b Bepaal de oppervlakte van het gebied tussen de x -as en de functie $g(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ op het interval $[0,2]$.

Voor $a > 0$ is G_a het gebied ingesloten door de grafiek van g en de x -as op $[-a, a]$.

- c Bereken de exacte waarde van a waarvoor de oppervlakte van G_a gelijk is aan 1.

Opgave 14

Gegeven zijn de functies f_p door $f_p(x) = px e^{-x^2}$. V_p is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = 2$.

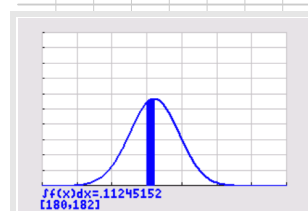
- a Toon aan dat $F(x) = -0,5p e^{-x^2} + c$ de primitieve is van f .
- b Bereken de oppervlakte van V_1 .
- c Voor welke p is de oppervlakte van V_p gelijk aan 10?

Toepassen

De lengte x van bijvoorbeeld een grote groep mannen kent een bepaalde verdeling rond het gemiddelde. Die verdeling kan worden weergegeven door een kromme die een mooie klokvorm heeft. Dit heet een **normale verdeling** en voor de kromme geldt:

$$f(x) = \frac{1}{7\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-182}{7}\right)^2\right)}$$

De precieze klokvorm bij de lengtes van deze groep mannen wordt hiermee bepaald door de getallen 182 (de gemiddelde lengte) en 7. Voor bijvoorbeeld een grote groep vrouwen zullen dit twee andere getallen zijn.



Figuur 5.4

Het percentage mannen van deze groep waarvoor $180 \leq x \leq 182$ kun je berekenen door integreren.

Dit percentage p is $100 \cdot \int_{180}^{182} f(x) dx$.

Opgave 15

Bekijk de normale verdeling beschreven in [Toepassen](#).

- a Breng zelf de bij de formule horende kromme in beeld.
- b Hoeveel procent van deze mannen heeft een lengte vanaf 180 cm tot en met 182 cm?
- c Laat zien dat 100% van deze mannen een lengte tussen 150 cm en 220 cm heeft.
- d Kun je dergelijke integralen berekenen door primitiveren?
Het percentage mannen met een lengte van 180 cm kun je niet berekenen met $100 \cdot \int_{180}^{180} f(x) dx$.

e Waarom niet? En hoe kun je dit wel berekenen?

- f Laat zien dat de helft van deze mannen kleiner is dan het gemiddelde.

Het getal 7 in de formule heet de standaardafwijking van de lengtes van deze grote groep mannen. Dit getal bepaalt de 'breedte' van de klokvorm.

- g Laat zien dat vrijwel alle mannen lengtes hebben die vallen tussen $182 - 3 \cdot 7$ en $182 + 3 \cdot 7$.

Testen

Opgave 16

Bereken de volgende integralen met behulp van primitiveren.

- a $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} + e^x \right) dx$
- b $\int_0^1 \frac{e^x + e^{2x}}{e^x} dx$
- c $\int_1^2 \frac{4}{2x+3} dx$
- d $\int_1^2 \left(1 - \frac{3}{x} \right)^2 dx$
- e $\int_2^4 \ln(x-1) dx$
- f $\int_0^2 2^{3x} dx$

Opgave 17

Gegeven is $f(x) = e^{\frac{x}{3}} - 2x + 5$.

Bereken de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f , de y -as, de lijn $y = 5 - 2x$, de x -as en de lijn $x = 6$.

Opgave 18

Gegeven is de functie f door $f(x) = e^x + e^{-x}$. V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = 4$.

- a Bereken algebraïsch de extremen van f .
- b Los op: $f(x) < 4$.
- c Bereken exact de oppervlakte van V .
- d Bereken exact de inhoud van het lichaam dat ontstaat door V om de x -as te wentelen.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Exponentiële en logaritmische functies**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- het getal e — de natuurlijke logaritme — afgeleide van $f(x) = e^x$
- afgeleide van een exponentiële functie
- afgeleide van een logaritmische functie
- groeimodellen, o.a. geremde exponentiële groei — enkellogaritmisch en dubbellogaritmisch grafiekenpapier
- primitieven van exponentiële en logaritmische functies

Activiteitenlijst

- werken met het getal e en de natuurlijke logaritme
- exponentiële functies differentiëren
- logaritmische functies differentiëren
- verschillende groeimodellen herkennen — werken met enkel- en dubbellogaritmisch grafiekenpapier
- exponentiële en logaritmische functies primitiveren — deze primitieven gebruiken om integralen exact te berekenen

Achtergronden

Het getal e heeft (waarschijnlijk) zijn naam gekregen door **Leonhard Euler (1707–1783)**. Het getal komt voor het eerst voor in een tabel van natuurlijke logaritmen in de appendix van een boek over logaritmen van **John Napier (1550–1617)**. Alleen de constante zelf wordt er niet in genoemd, er wordt alleen met natuurlijke logaritmen gewerkt.

De ontdekking van het getal dat later de naam e kreeg is van **Jakob Bernoulli (1654–1705)** die het volgende probleem op het gebied van de renteberekening onderzocht:

Stel je hebt 1 euro en je krijgt jaarlijks 100% rente, dan heb je aan het einde van dat jaar 2 euro. Stel je nu voor dat je elk half jaar 50% rente krijgt, dan heb je aan het einde van het jaar $1 \cdot 1,5^2 = 2,25$ euro. Zo kun je door gaan. Als je het jaar in n delen verdeelt en je krijgt steeds 100/n% rente, dan heb je aan het einde $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ euro. Als n heel groot wordt, nadert dit getal naar het getal $e = 2,71828\dots$

Leonhard Euler begon in 1727 de letter e te gebruiken. Het getal e komt voor het eerst voor in Euler's 'Mechanica' (1736). Waarom het nu precies e is geworden zal niemand ooit weten: het is de eerste letter van het woord 'exponent', maar ook de eerste letter van 'Euler', en misschien was er wel een heel andere aanleiding...



Figuur 6.1 Jakob Bernoulli

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = -2 \ln(x - 4) + 2$.

- Bepaal de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f en schrijf het domein van f op.
- Bereken de snijpunten van de grafiek van f met de assen. Geef benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek met de x -as.
- Los algebraïsch in drie decimalen nauwkeurig op: $-10 < f(x) < 10$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

- Bepaal algebraïsch het bereik van deze functie.
- Bereken de waarden van x waarin het hellingsgetal van deze functie een grootste of een kleinste waarde aanneemt.
- Schets de grafieken van y en van $\frac{dy}{dx}$.

Opgave 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ en $g(x) = 2^x + 4$.

- Los algebraïsch op: $f(x) < g(x)$.
- Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door beide grafieken en de y -as.
Op de grafiek van f ligt punt A met x -waarde p . Op de grafiek van g ligt punt B met x -waarde p .
- Voor welke waarden van p is de lengte van lijnstuk AB gelijk aan 8?
- Los op: $f(x) + g(x) = -2$.

Opgave 4

Belangrijk nieuws verspreidt zich razendsnel. Het aantal leerlingen N dat op een zeker tijdstip t van een belangrijk feit op de hoogte is, wordt gegeven door de formule

$$N(t) = 1200(1 - e^{-0,31t})$$

Hierin is t in uren en is $t = 0$ om 09:00 uur.

- Op grond van deze formule kun je concluderen dat het aantal leerlingen dat van een belangrijk feit op de hoogte is uiteindelijk ongeveer constant wordt? Leg uit waarom.
- Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $N(t)$.
- Bereken algebraïsch op welk tijdstip er 550 leerlingen van het feit gehoord hebben. Rond in het antwoord af op minuten.
- Voor de snelheid v waarmee het nieuws zich verspreidt geldt: $v(t) = \frac{dN}{dt}$. Hoe ziet de formule voor de snelheid van de nieuwsverspreiding er uit? Kun je op grond van deze formule dezelfde conclusies als bij a trekken?

- e Toon algebraïsch aan dat de grafiek van N stijgend is.
- f Met welke snelheid verspreidt het nieuws zich om kwart voor 11? Geef het antwoord in gehelen per minuut.
- g Op welk tijdstip is de snelheid van de nieuwsverspreiding de helft van die om 09:00 uur? Geef dit tijdstip in minuten nauwkeurig.

Opgave 5

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(4 - x^2)$ en $g(x) = \log(3x)$.

- a Bepaal van beide functies het domein en het bereik.
- b Los algebraïsch op: $f(x) \geq g(x)$.
- c De grafieken snijden elkaar in punt S . l is de raaklijn aan de grafiek van f in S , m is de raaklijn aan de grafiek van g in S . Bereken de hoek waaronder beide raaklijnen elkaar snijden als op beide assen dezelfde schaalverdeling wordt gebruikt.

Opgave 6

Gegeven is de functie f door $f(x) = \frac{4 \ln(x)}{1 + \ln^2(x)}$.

- a Bepaal het domein van f .
- b Bereken algebraïsch de karakteristieken van de grafiek van f .
- c Los algebraïsch op: $f(x) \leq 1$.
De raaklijn aan de grafiek van f in het punt waarvoor geldt $x = e^2$, snijdt de x -as in punt A en de y -as in punt B .
- d Bereken de lengte van lijnstuk AB .

Opgave 7

Gegeven is voor elke waarde van $p \neq 0$ de functie $f_p(x) = (x^2 - px)e^{-px}$.

- a Voor welke waarden van k heeft de vergelijking $f_1(x) \cdot f_{-1}(x) = k$ geen oplossingen?
- b De grafiek van f_p heeft een buigpunt dat op de x -as ligt. Bereken p .
- c Onderzoek voor welke waarden van p de functie f_p een maximum heeft. Druk voor die waarden van p dat maximum uit in p .

Toepassen

Opgave 8: Vissen in de Grevelingen

De Grevelingen (thans het Grevelingenmeer) is een voormalige zeearm van de Noordzee, gelegen tussen de eilanden Goeree-Overflakkee en Schouwen-Duiveland, op de grens van de provincies Zuid-Holland en Zeeland. In het kader van de Deltawerken werd de Grevelingen door de Grevelingendam (1965) en de Brouwersdam (1971) van zee afgesloten. Het Grevelingenmeer is het grootste zoutwatermeer van West-Europa, en is vooral van belang voor de watersport en recreatie. Het zoutgehalte van het Grevelingenmeer wordt op peil gehouden door de Brouwerssluis, een doorlaatsluis in de Brouwersdam, waarmee zeewater ingelaten wordt. Een gebied met een oppervlakte van 13.872 ha is aangemerkt als beschermd Natura 2000-gebied.

In 1985 werd voor enkele vissoorten het verloop van hun populatiegrootte in modellen beschreven. Omdat enkele vissoorten zoals de schol zich in het afgesloten Grevelingenmeer niet meer konden voortplanten moest de mens een handje helpen. De larven van de schol zwemmen recht op na hun geboorte en zien er dan ook uit als andere vissen. Na ongeveer 6 weken ondergaan ze een gedaanteverwisseling, waarbij een van hun ogen naar de andere kant groeit en ze zich tot platvis ontwikkelen en een jonge schol worden.

Voor de schol werden er twee modellen ontworpen:

- Model A: Er worden jaarlijks 5 miljoen larven en 200.000 schollen ouder dan 1 jaar uitgezet in het Grevelingenmeer.
- Model B: Er worden jaarlijks 2 miljoen larven en 100.000 schollen ouder dan 1 jaar uitgezet in het Grevelingenmeer.

Voor beide modellen geldt dat de sterfte onder jonge schollen (jonger dan 1 jaar) 90% per jaar is en onder schollen ouder dan 1 jaar 33% per jaar. Alle larven worden jonge schollen. Neem aan dat er in 1985 nog 300.000 schollen ouder dan 1 jaar in het Grevelingenmeer zaten.

- Maak op grond van model A een tabel van het aantal schollen ouder dan 1 jaar gedurende de eerste 10 jaren na 1985.
- Teken een grafiek van het aantal schollen S ouder dan 1 jaar in de loop van de jaren.
- Voor S geldt een groeimodel van de vorm $S(t) = G - a \cdot e^{bt}$. Welke waarde voor G schat je op grond van de grafiek bij b? Bereken nu ook de waarden van a en b .
- Er is in dit model nog geen rekening gehouden met bevissing. De visserijmortaliteit is 23% per jaar. Wat betekent dit?
- Pas je model A aan en onderzoek wat dit betekent voor het aantal schollen op den duur.



Figuur 6.2

Opgave 9: CV-installatie

Het verloop van de temperatuur van een huis is veel complexer dan dat van een afkoelende kop koffie of een opwarmend blikje cola. Denk bijvoorbeeld aan zonne-instraling, cv, tocht, etc. Toch spelen ook aan de basis hiervan exponentiële functies een rol. Je kijkt eerst naar een ruimte in de vorm van een balk, en verwaarloost tocht en zonnestraling. Hoe reageert de temperatuur van zo'n huis op het aan- en uitzetten van de cv? Ga uit van de situatie dat de buitentemperatuur constant gelijk is aan $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, en de binnentemperatuur gelijk aan $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Als de cv niet aanstaat, dan heb je ongeveer de situatie van de afkoelende kop koffie: de snelheid waarmee de temperatuur T in huis daalt is recht evenredig met het temperatuurverschil met de buitentemperatuur.

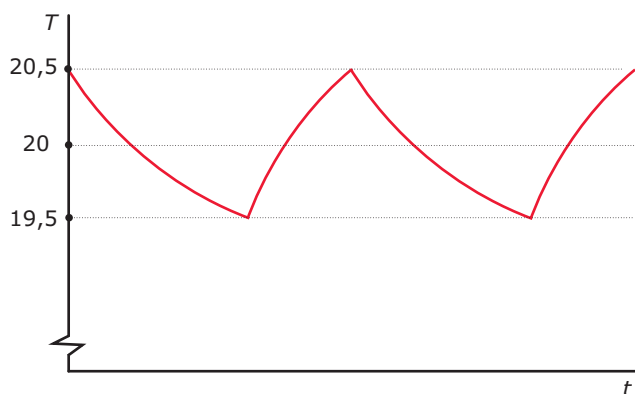
- a** Voor een bepaald huis is de waarde van de evenredigheidsconstante c gelijk aan $-0,0018$ (eenheid: min^{-1}). Hoe lang duurt het voor het binnen is afgekoeld tot 15 graden Celsius? En hoelang duurt het voor de temperatuur een halve graad is gezakt?

- b** Hoeveel graden neemt de temperatuur in het begin af per minuut, en hoeveel na een uur?

Bij $19,5$ graden zet je de cv aan. Dit zorgt voor een temperatuurstijging. Hoe groot zal deze worden? Dat hangt af van veel factoren, waarvan de belangrijkste zijn: de grootte van de cv-ketel, en de grootte van het warmteverlies naar de omgeving. Bij een grotere cv-ketel zal de eindtemperatuur ook hoger zijn. Stel dat de eindtemperatuur T_c voor dit huis 35 graden is (je zult lang daarvoor de cv natuurlijk uitschakelen, maar het gaat nu om de 'evenwichtssituatie' die zal ontstaan als je de cv steeds aan laat staan). Hoe zal het temperatuurverloop zijn? Er geldt: $\frac{dT}{dt} = c \cdot (T - T_c)$ (waarbij c de zelfde evenredigheidsconstante is als in de situatie zonder cv!), en T_c de eindtemperatuur is in het geval dat de cv blijft aanstaan.

- c** Ga na dat de temperatuur volgens de formule inderdaad stijgt.
- d** Hoelang duurt het voor het weer 20 graden Celsius is?

Je wilt de temperatuur nu zo dicht mogelijk bij die 20 graden houden. Met een besturingssysteem zet je de cv nu steeds aan- en uit als je hier een halve graad van afzit. Je kunt dan de temperatuurkromme tekenen. Er ontstaat een soort zaagtand.



Figuur 6.3

- e** Hoe lang duurt het voor de cv weer afslaat? Hoe lang duurt het

vervolgens voor hij opnieuw aanspringt? Wat is dus de periode van de temperatuurregeling? Welk deel van de tijd brandt de cv?

- f Stel je voor dat je de cv-ketel sneller kunt aansturen, door de cv te schakelen bij een kwart graad afwijking van de gewenste temperatuur. Hoelang wordt de periode dan? Welk deel van de tijd brandt de cv? Licht de antwoorden toe.

Als het buiten kouder wordt, kan de cv de ruimte minder goed verwarmen. De 'evenwichtstemperatuur' zakt dan ook: de cv kan de ruimte tot maximaal 25 graden boven de buitentemperatuur verwarmen.

- g 's Avonds koelt het buiten af tot 3 graden Celsius. Bereken nu in beide gevallen de periode en het percentage dat de cv brandt. De waarde van c blijft gelijk.

Opgave 10: Verouderende populaties

Van een zekere populatie neemt met een toenemende leeftijd x van het individu het aantal individuen van die leeftijd meestal af. Die afname wordt door demografen uitgedrukt in het sterftecijfer m (van 'mortality'), dat is het deel van het aantal individuen van een bepaalde leeftijd dat er jaarlijks sterft. Bij een constant sterftecijfer neemt het aantal individuen van een bepaalde leeftijd $S(x)$ (van 'survivors') exponentieel af.

- a Verklaar waarom dat zo is.

Bij verouderende populaties blijft het sterftecijfer niet constant, maar wordt het bij hogere leeftijden steeds groter. In dat geval geldt de zogenaamde Gompertzvergelijking:

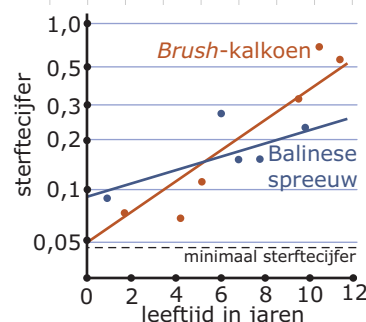
$$m(x) = M \cdot e^{G \cdot x}$$

waarin M het sterftecijfer van volggroeide individuen voorstelt en x de leeftijd is van een individu. G heet de Gompertz-constante. Deze Gompertz-constante is een maat voor de verouderingssnelheid. Hier zie je de grafieken van $m(x)$ voor de Australische Brush-kalkoen en de Balinese spreeuw. Van Australische Brush-kalkoenen is $M = 0,05$ en $G = 0,21$.

- b Ga na hoe deze getallen zijn terug te vinden in de grafieken van het sterftecijfer.
- c Stel voor deze soort een Gompertz-vergelijking voor het sterftecijfer op en ga na of hij past bij de getekende grafiek.
- d Als een populatie Brush-kalkoenen 100 volggroeide 0-jarige individuen kent, hoeveel 10-jarige individuen zou die populatie dan moeten hebben?
- e Schat nu zelf met behulp van de grafiek de waarden van M en G die gelden voor de Balinese spreeuw. Stel ook voor deze soort de Gompertz-vergelijking op.

Een andere maat voor de veroudering van een populatie is de verdubbelingstijd van het sterftecijfer, de $SCVT$.

- f Toon aan dat $SCVT = \frac{\ln(2)}{G}$.
- g Bereken de $SCVT$ voor zowel de Brush-kalkoen als de Balinese spreeuw.



Figuur 6.4

- h $S(x)$ stelt het aantal volwassen individuen van een populatie met de leeftijd x voor. Teken grafieken van $S(x)$ voor een populatie Australische Brush-kalkoenen en voor een populatie Balinese spreuwen. Ga bij beide populaties uit van 100 volgroeide 0-jarige individuen. Vergelijk beide grafieken en de verouderingsprocessen van beide populaties.

Examen

Opgave 11: Aardbevingen

Aardbevingen worden geregistreerd met een **seismograaf**, die aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. Verspreid over de aarde staan veel seismografen opgesteld. De uitwijking van een seismograaf hangt af van de afstand van dit instrument tot de plaats aan de oppervlakte van de aarde waar de beving het eerst optreedt. Deze plaats noemt men het epicentrum van de aardbeving. Om aardbevingen met elkaar te kunnen vergelijken gebruikt men seismogrammen die op een afstand van 100 km van het epicentrum zijn gemaakt (standaard seismogrammen). De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Bij deze schaal wordt de logaritme (met grondtal 10) gebruikt van de grootste uitwijking in micrometer die in het seismogram voorkomt.

- a Leg uit, dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitwijking van de seismograaf 10 keer zo groot wordt. De aardbeving in Nederland van 13 april 1992 had een kracht van 5,5 op de schaal van Richter. De kracht van de aardbeving op 27 februari 2010 in Chili was 8,8.

- b Bereken de verhouding tussen deze twee grootste uitwijkingen.

Als op een bepaald waarnemingsstation een seismogram gemaakt is en je weet de plaats van het epicentrum, dan kun je met de volgende formule de kracht van de aardbeving berekenen:

$$R = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 1,66 \cdot \log(D) + 3,30$$

Hierin is:

- R de kracht van de aardbeving uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter;
- A de grootste uitwijking in het seismogram in μm ($1 \mu\text{m} = 0,001 \text{ mm}$);
- T de tijd in seconden van de trilling met de grootste uitwijking;
- D de grootte in graden van de hoek tussen de verbindingsslijnstukken ME en MW , waarin M het middelpunt van de aarde, E het epicentrum van de aardbeving en W de plaats van het waarnemingsstation is.

Uit de formule volgt inderdaad dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitslag van de seismograaf 10 keer zo groot wordt (bij dezelfde T en D).

- c Toon dit aan.

Van de Chileense aardbeving van 2010 werd een seismogram opgenomen. De trillingen gaven daar een maximale uitslag van

1500 μm ; de trillingstijd T bedroeg 20 s. Na invulling van D werd $R = 8,8$ gevonden. Neem aan dat de omtrek van de aarde 40.000 km is.

- d** Bereken de afstand over de aardbol tussen de plaats waar het seismogram werd opgenomen en het epicentrum in Chili in honderden kilometers nauwkeurig.

Ook op diverse andere plaatsen werd in 2010 een seismogram van de Chileense aardbeving opgenomen. Op al die plaatsen berekende men dat de kracht van de aardbeving 8,8 was.

- e** Toon aan dat hieruit volgt dat tussen A , T en D een verband bestaat van de vorm: $D = p \cdot \left(\frac{T}{A}\right)^q$ en bereken p en q in twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen wiskunde B havo 1994, eerste tijdvak, aangepast)

Opgave 12: Medicijn

Als een patiënt een dosis van een medicijn toegediend krijgt, zal de concentratie van dit medicijn in het bloed eerst toenemen en daarna afnemen. Van een bepaald medicijn wordt de concentratie C (in mg/cm^3) in het bloed gegeven door de formule:

$$C(t) = 0,12 \cdot t \cdot e^{-0,5t}$$

Hierbij is t het aantal uren na het toedienen van één dosis van het medicijn.

Van dit medicijn is bekend dat het werkzaam is zolang C groter is dan $0,035 \text{ mg}/\text{cm}^3$. De tijd dat het medicijn werkzaam is bij één keer toedienen is minder dan 6 uur.

- a** Bereken in minuten nauwkeurig hoe lang het medicijn in dit geval werkzaam is.

$$\text{Er geldt: } C'(t) = 0,12(1 - 0,5t) e^{-0,5t}.$$

- b** Toon dit aan.

Er is een tijdstip waarop de concentratie het sterkst afneemt.

- c** Bereken dit tijdstip.

Het medicijn wordt in gelijke doses toegediend met tussenpozen van 6 uur. Omdat 6 uur na de eerste keer toedienen van het medicijn een tweede dosis wordt toegediend, geldt vanaf $t = 6$ tot $t = 12$ de volgende formule voor de concentratie C^* (in mg/cm^3) van het medicijn in het bloed:

$$C^*(t) = C(t) + C(t - 6)$$

Bij elke nieuwe dosis verandert de formule voor de concentratie van het medicijn in het bloed. In elke periode van 6 uur heeft de concentratie van het medicijn in het bloed een maximale waarde. De maximale waarde wordt in elke volgende periode van 6 uur iets groter. Het medicijn kan schadelijke gevolgen hebben als de concentratie boven de $0,11 \text{ mg}/\text{cm}^3$ komt.

- d** Onderzoek of dit het geval is binnen 24 uur na het begin van het toedienen van het medicijn.

(bron: examen wiskunde B vwo 2007, tweede tijdvak)

Opgave 13: De vergelijking van Antoine

Als een vloeistof een gesloten ruimte niet geheel opvult, dan verdampt een deel van de vloeistof. De damp oefent druk uit op de wanden van de gesloten ruimte: de dampdruk. De grootte van de dampdruk hangt af van de soort vloeistof en van de temperatuur in de gesloten ruimte. Voor het verband tussen de dampdruk en de temperatuur geldt de volgende formule:

$$\log(P) = k - \frac{m}{T-n} \quad (\text{met } T > n)$$

Hierin is P de dampdruk in bar en T de temperatuur in kelvin en zijn k , m en n constanten die afhangen van de soort vloeistof.

Voor aceton, een zeer vluchtige vloeistof, geldt (bij benadering)

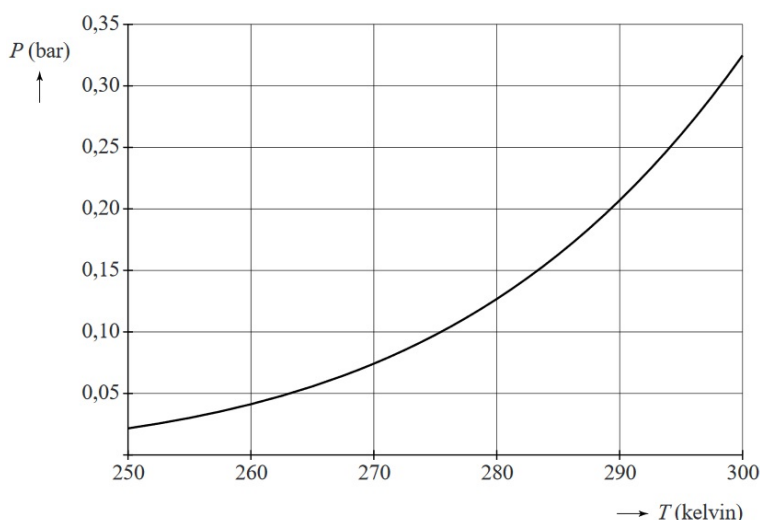
$$k = 4,146, m = 1144 \text{ en } n = 53,15, \text{ dus } \log(P) = 4,146 - \frac{1144}{T-53,15}$$

(met $T > 53,15$).

Het kookpunt van een vloeistof is de temperatuur waarbij de dampdruk precies 1 bar bedraagt.

- a** Bereken op algebraïsche wijze het kookpunt van aceton. Rond je antwoord af op een geheel aantal kelvin.

In de figuur is voor aceton de grafiek getekend van de dampdruk P als functie van de temperatuur T voor temperaturen tussen 250 en 300 kelvin.



Figuur 6.5

- b** Uit de figuur krijgen we de indruk dat de functie P stijgend is. Beredeneer aan de hand van de formule zonder te differentiëren dat de functie inderdaad stijgend is.

Hoe de dampdruk bij een bepaalde temperatuur reageert op een verandering van die temperatuur, wordt weergegeven door de afgeleide waarde $\frac{dP}{dT}$ (in bar/kelvin).

- c** Bereken voor aceton de waarde van $\frac{dP}{dT}$ bij een kamertemperatuur van 293 kelvin. Rond je antwoord af op drie decimalen.

Voor andere stoffen dan aceton gelden soortgelijke formules; alleen de waarden van k , m en n zijn anders. De vorm van de formule is universeel en staat sinds 1888 bekend als de vergelijking van Antoine. In de tijd dat Antoine de vergelijking opstelde, gebruikte men voor de dampdruk nog de eenheid mmHg (millimeter kwik) in plaats van bar. Voor de temperatuur gebruikte men de eenheid °C (graden Celsius) in plaats van kelvin.

Voor het verband tussen de dampdruk p in mm Hg en de dampdruk P in bar geldt:

$$P = \frac{p}{750}$$

Voor het verband tussen de temperatuur t in °C en de temperatuur T in kelvin geldt: $T = t + 273,15$.

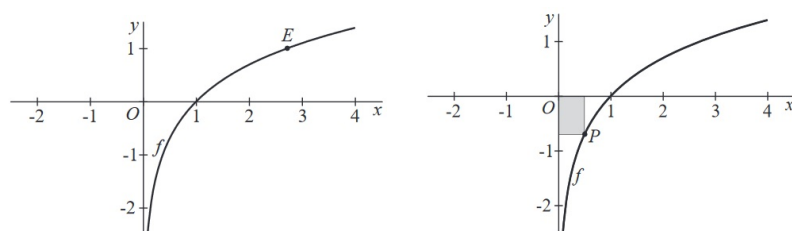
De eerder genoemde formule voor de dampdruk van aceton kan men herschrijven tot een formule van de vorm: $\log(p) = a - \frac{1144}{t+b}$. Hierin is p de dampdruk in mmHg, is t de temperatuur in °C en zijn a en b constanten.

- d Bereken a en b . Rond de waarde van a af op twee decimalen en rond de waarde van b af op een geheel getal.

(bron: examen wiskunde B vwo 2013, eerste tijdvak)

Opgave 14: Vier vragen over $f(x) = \ln(x)$

De functie f is gegeven door $f(x) = \ln(x)$. Je ziet hier twee keer de grafiek van f .



Figuur 6.6

- a Bereken exact voor welke waarden van x geldt: $f(x) \leq \frac{1}{2}$.
- b Het punt $E(e, 1)$ ligt op de grafiek van f .
De raaklijn in E aan de grafiek van f gaat door O .
Toon dit aan.
- c Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door lijnstuk OE , de x -as en de grafiek van f .
Voor elke waarde van x met $0 < x < 1$ ligt het punt $P(x, \ln(x))$ op de grafiek van f .
Er zijn rechthoeken waarvan twee zijden op de assen liggen en waarvan P een hoekpunt is. Er is een waarde van x waarvoor de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.
- d Bereken langs algebraïsche weg de exacte waarde van die maximale oppervlakte.

(bron: wiskunde B examen vwo 2008, eerste tijdvak)

2

Goniometrische functies

- 2.1 Goniometrische functies 64
- 2.2 Goniometrische formules 74
- 2.3 Goniometrische functies differentiëren 84
- 2.4 Harmonische trilling 92
- 2.5 Integralen 100
- 2.6 Totaalbeeld 107

2.1 Goniometrische functies

Inleiding

Muziek maak je door lucht in trilling te brengen. Dat doe je met een snaar, een holle buis, je stembanden, een trillend plaatje, e.d. Als je een snaar in trilling brengt hoor je behalve de grondtoon ook boventonen meeklinken. De frequenties van deze boventonen zijn een veelvoud van die van de grondtoon, maar ze klinken minder luid. Door de sinusoiden van de grondtoon en de boventonen op te tellen krijg je het trillingspatroon van de snaar.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip goniometrische functie en eigenschappen van dergelijke functies onderzoeken;
- de functie $f(x) = \tan(x)$ en zijn eigenschappen.

Voorkennis

- werken met sinusoiden en vergelijkingen van de vorm $\sin(x) = a$ of $\cos(x) = a$ oplossen;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

In de Westerse muziek worden zeven stamtonen onderscheiden, die samen een toonladder vormen. Deze zeven stamtonen worden aangeduid met A, B, C, D, E, F en G. De centrale A heeft een frequentie van 440 Hz (440 trillingen per seconde). Dit betekent dat in de lucht een trilling plaatsvindt met die frequentie (is aantal trillingen per seconde). Voor de A geldt dan bijvoorbeeld

$$u(t) = a \sin(440 \cdot 2\pi \cdot t).$$

De luidheid van deze grondtoon wordt bepaald door de amplitude a . Neem voor het gemak $a = 1$. De eerste boventoon van de A klinkt soms minder luid, en dan geldt (bijvoorbeeld) $u_1(t) = 0,8 \sin(880 \cdot 2\pi \cdot t)$. Voor de tweede boventoon kan: $u_2(t) = 1,2 \sin(1320 \cdot 2\pi \cdot t)$. Tel je deze drie sinusfuncties op, dan krijg je een A met een bepaalde klankkleur.

- Breng eerst de grafiek van de grondtoon A maar eens in beeld met je grafische rekenmachine. Zorg dat je precies drie periodes in beeld krijgt.
- Zet de twee boventonen er bij en tel deze functies op.
- Is de resulterende snaartrilling een zuivere sinusoid?

Uitleg 1

Je kent de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen al. Omdat in deze functies de goniometrische verhoudingen sinus en cosinus voorkomen zijn het voorbeelden van goniometrische functies. De belangrijkste eigenschap is wel hun periodiciteit. Maar wat als je $\sin(x)$ en/of $\cos(x)$ gaat gebruiken om ingewikkelder functievoorschriften te maken? Bekijk eerst maar eens een paar grafieken:

- $y_3 = 1 + 2 \sin(0,5x - 1)$
- $y_4 = \sin(x) + \cos(x)$
- $y_5 = \sin(x^2)$
- $y_6 = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$
- $y_7 = \sin(2x) - \sin(x)$
- $y_8 = x + \sin(x)$

Je weet dat y_3 een zuivere sinusoïde is, dus daarbij is sprake van een periode (4π), een amplitude (2), een evenwichtsstand ($y = 1$) en een horizontale verschuiving (2 in de positieve x -richting). Ga dit na, eigenlijk moet je dit vooraf meteen kunnen zien.

Verder lijken ook y_4 en y_6 zuivere sinusoïden. Dat is ook inderdaad het geval, al kun je nu nog niet aantonen dat dit zo is. Je kunt wel periode, amplitude, evenwichtsstand en horizontale verschuiving uit de grafiek aflezen.

Van de overige functies is alleen y_7 periodiek, de andere twee niet.

Opgave 1

Gegeven is de goniometrische functie $f(x) = 12 + 4 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{4}\pi\right)$.

- a Breng de grafiek in beeld op de grafische rekenmachine. Waarom is het hierbij handig om vooraf in te zien dat het hier een sinusoïde betreft en de periode, de amplitude en de evenwichtsstand te bepalen?
- b Welke horizontale verschuiving moet je op de grafiek van $y = \sin(x)$ toepassen om die van f te krijgen?
- c Bereken de toppen van de grafiek van f op het interval $[0, 12]$.
- d Los op: $f(x) \leq 15$.

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1**. Ga van elk van de volgende functies na of de grafiek op een sinusoïde lijkt of niet.

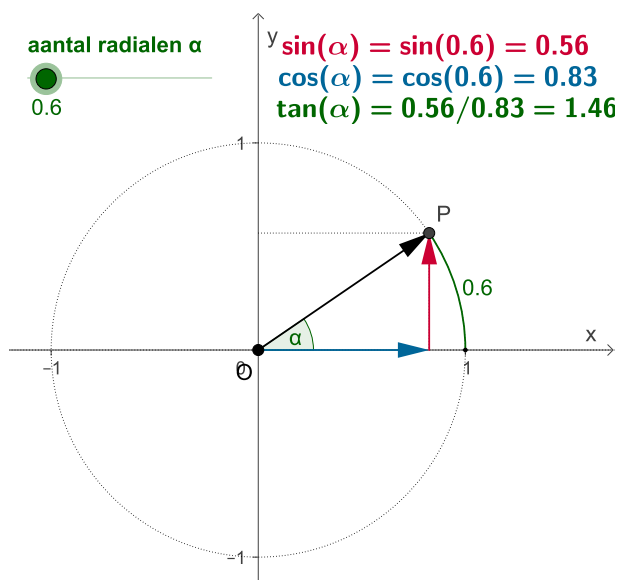
- a $y_3 = 1 + 2 \sin(0,5x - 1)$
- b $y_4 = \sin(x) + \cos(x)$
- c $y_5 = \sin(x^2)$
- d $y_6 = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$
- e $y_9 = \sin(9x) - \sin(11x)$

Opgave 3

Waarom weet je bij y_4 en y_6 in de vorige opgave eigenlijk (nog) niet zeker of hun grafieken echt dezelfde vorm hebben als die van $y = \sin(x)$?

Uitleg 2

Bekijk de applet: tangens



Figuur 1.2

In een eenheidscirkel kun je zo de tangens definiëren:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$$

En daarom geldt voor de tangensfunctie:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Deze functie is ook periodiek, maar nu met een periode van π . Verder heeft deze functie verticale asymptoten: voor waarden van x waarbij $\cos(x) = 0$ bestaan de functiewaarden niet, je deelt dan door 0. Dit is het geval als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$. De bijbehorende limieten

$$\lim_{x \downarrow \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi} \tan(x) = -\infty \text{ en } \lim_{x \uparrow \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi} \tan(x) = \infty.$$

Opgave 4

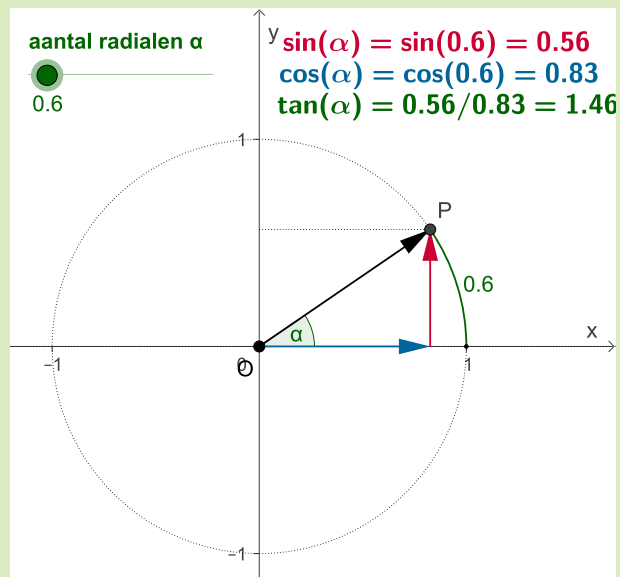
Bekijk [Uitleg 2](#). Bekijk de grafiek van $y = \tan(x)$ op je grafische rekenmachine.

- Breng die grafiek op je grafische rekenmachine zo in beeld, dat je precies twee periodes ziet.
- Waar zitten de verticale asymptoten van deze functie? Leg ook uit hoe je dat kunt afleiden uit de formule $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
- Voor welke waarden van x is $\tan(x) = 1$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet



Figuur 1.3

Onder **goniometrische functies** versta je functies waarin $\sin$, $\cos$ (en $\tan$) voorkomen.

De basisfuncties $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen ken je al. De tangensfunctie is nieuw.

In deze eenheidscirkel zijn sinus, cosinus en tangens gedefinieerd als:

$$\sin(\alpha) = y_P$$

$$\cos(\alpha) = x_P$$

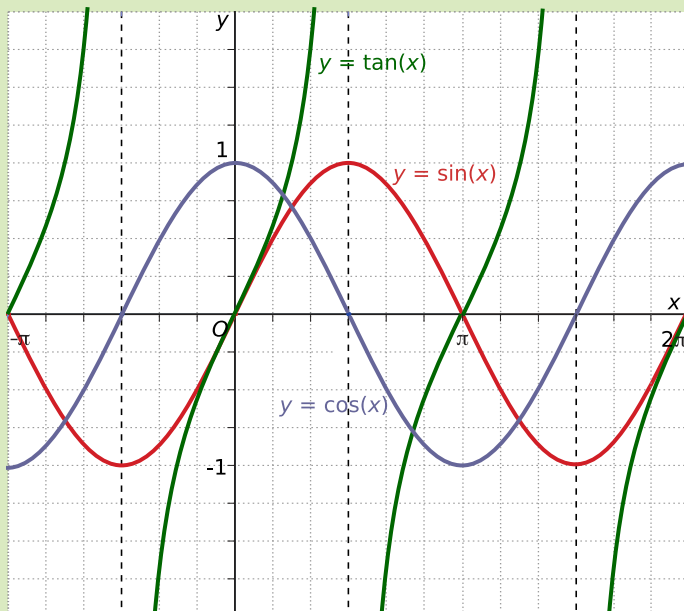
$$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$$

En dus geldt voor de **tangensfunctie**: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Deze functie is ook periodiek, maar nu met een periode van π . Verder heeft deze functie verticale asymptoten: voor waarden van x waarbij $\cos(x) = 0$ bestaan de functiewaarden niet, je deelt dan door 0. Dit is het geval als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De bekende sinusoiden zijn goniometrische functies die zuiver periodiek zijn en een amplitude en een evenwichtsstand hebben. Maar dat geldt niet voor alle goniometrische functies. Hier zie je de drie basisfuncties. Door transformaties toe te passen krijg je:

[Bekijk de applet](#)



Figuur 1.4

$$f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$$

- periode: $\frac{2\pi}{b}$
- amplitude: a
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

[Bekijk de applet](#)

$$f(x) = a \cos(b(x - c)) + d$$

- periode: $\frac{2\pi}{b}$
- amplitude: a
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

[Bekijk de applet](#)

$$f(x) = a \tan(b(x - c)) + d$$

- periode: $\frac{\pi}{b}$
- amplitude: geen
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Voorbeeld 1

Los op $[-\pi, \pi]$ op: $\tan(x) \leq 1$.

Antwoord

Maak eerst met je GR de grafiek van $y = \tan(x)$ op $[-\pi, \pi]$.

De verticale asymptoten vallen meteen op. Omdat $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

vind je ze bij x -waarden waarvoor $\cos(x) = 0$. Dus: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Los nu op: $\tan(x) = 1$.

Omdat $\arctan(1) = \frac{1}{4}\pi$ en de tangensfunctie een periode van π

heeft, wordt dit: $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$.

Uit de grafiek lees je nu de oplossing af, rekening houdend met de verticale asymptoten:

$$-\pi \leq x < -\frac{3}{4}\pi \vee -\frac{1}{2}\pi < x \leq \frac{1}{4}\pi \vee \frac{1}{2}\pi < x \leq \pi.$$

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**. Los zelf op $[0, 2\pi]$ op: $\tan(x) > \sqrt{3}$.

Opgave 6

Gegeven is de functie f met $f(x) = 10 \sin(0,1\pi(x-5)) + 15$ op het interval $[0, 50]$.

- Lees periode, amplitude, evenwichtsstand en de horizontale verschuiving t.o.v. de y -as uit het functievoorschrift af.
- Teken de grafiek met je grafische rekenmachine.
- Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) = 12$.

Voorbeeld 2

Gegeven de functie f met voorschrift $f(x) = 2 \cos^2(x) - 1$.

(Met $\cos^2(x)$ wordt $(\cos(x))^2$ bedoeld.)

Onderzoek of deze goniometrische functie periodiek is en bepaal dan de bijbehorende periode.

Antwoord

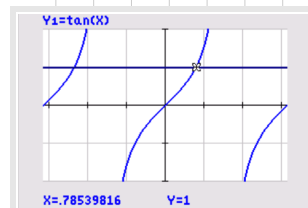
De standaard cosinusgrafiek heeft een periode van 2π . Het ligt dus voor de hand om de grafiek van f in beeld te brengen op bijvoorbeeld $[0, 2\pi]$. Die grafiek lijkt op een zuivere sinusoïde met periode π , amplitude 1 en evenwichtsstand $y = 0$. Als je er een formule met $\cos$ bij wilt maken is de horizontale verschuiving 0. Kortom: de grafiek lijkt op die van $y = \cos(2x)$.

Of dit echt het geval is, kun je (nog) niet aantonen. Wel kun je de nulpunten berekenen en kijken of die hetzelfde zijn als die van $y = \cos(2x)$.

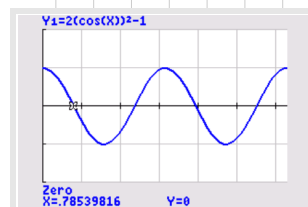
$$f(x) = 0 \text{ als } 2 \cos^2(x) - 1 = 0, \text{ dus als } \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee \cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dit levert dezelfde waarden op als $\cos(2x) = 0$ oplossen.

Ga dat zelf na.



Figuur 1.5



Figuur 1.6

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Breng zelf de grafiek van f op je grafische rekenmachine in beeld en bepaal de twee opeenvolgende maxima.
- Welke periode kun je hieruit afleiden voor de sinusoïde die lijkt te ontstaan?
- Welke andere formule zou je bij deze sinusoïde kunnen opstellen?
- Waarom weet je nog niet helemaal zeker dat de grafiek van f ook echt een sinusoïde is?

Opgave 8

Gegeven de functie f met $f(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ op $[0, 2\pi]$.

- Maak de grafiek van f op je grafische rekenmachine.
- Lijkt de grafiek op een sinusoïde? Zo ja, welke formule past er dan bij die sinusoïde?
- Los op: $f(x) = 0,5$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.
- Gebruik nu de formule van de sinusoïde die je bij b hebt gemaakt en los exact op: $y = 0,5$. Komen deze antwoorden overeen met die bij c?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 2x \sin(x)$ op $[0, 2\pi]$.

- Waarom kan hier geen sprake zijn van een sinusoïde?
- Is dit een periodieke functie?
- Beschrijf de regelmaat van de grafiek van f .

Voorbeeld 3

Gegeven de functie f met voorschrift $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Is deze functie periodiek?

Bepaal de nulpunten en de asymptoten van deze functie.

Antwoord

Omdat de standaard sinusfunctie een periode van 2π heeft en een vorm als $\frac{1}{x}$ juist voor $x = 0$ niet bestaat, bekijk je de grafiek op $[-\pi, \pi]$. Je krijgt dan op $[-\pi, \pi] \times [-2, 2]$ deze grafiek. In de buurt van $x = 0$ is erg onduidelijk hoe de grafiek er uit ziet, inzoomen laat zien dat er steeds meer en steeds smallere 'golfjes' ontstaan als je dichterbij 0 komt. Periodiek is hij in ieder geval niet...

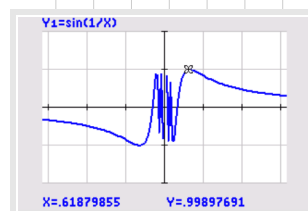
Nulwaarden: $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ geeft $\frac{1}{x} = 0 + k \cdot \pi$ en dus $x = \frac{1}{k \cdot \pi}$.

De positieve nulwaarden zijn $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{4\pi}$, enz.

Deze komen steeds dichterbij 0 te liggen en ook steeds dichterbij elkaar.

Voor de negatieve nulwaarden geldt iets vergelijkbaars.

Er is bij $x = 0$ geen verticale asymptoot omdat een sinus altijd binnen $[-1, 1]$ blijft.



Figuur 1.7

Wel is er een horizontale asymptoot: als x heel groot (of heel groot negatief) wordt, dan nadert $\frac{1}{x}$ naar 0 en dus nadert ook $f(x)$ naar 0. De horizontale asymptoot is $y = 0$.

Opgave 10

Bekijk eerst **Voorbeeld 3**. Je ziet daar een bijzondere functie die wel een sinus bevat maar niet periodiek is. Gegeven is de functie f met $f(x) = \sin(\sqrt{x})$.

- Maak de grafiek van f op $[0,1000]$.
- Los op: $f(x) = 1$.
- Hoe kun je aan de antwoorden bij b zien dat dit geen periodieke functie is?

Verwerken

Opgave 11

Als je de sinusoiden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \cos(x)$ optelt, krijg je de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

- Breng de grafiek in beeld op je grafische rekenmachine. Lijkt de grafiek op een sinusoid? Waarom mag je op grond hiervan nog niet aannemen dat het er ook werkelijk één is?

De grafiek van f is een sinusoid.

- Geef de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y_1 = \sin(x)$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- Stel een formule op voor deze sinusoid.
- Bereken met behulp van je formule bij c de toppen en de nulpunten van de grafiek van f .
- Los op $[0,2\pi]$ op: $f(x) > 1$.

Opgave 12

Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = \cos(x) - \cos(2x)$.

- Deze grafiek is periodiek. Hoe groot is de periode?
- Is de grafiek van g een sinusoid?
- Bepaal met je grafische rekenmachine de nulpunten en de toppen van de functie g . Neem als domein $[0,2\pi]$.

Opgave 13

De grafiek van de functie $y_2 = \sin^2(x)$ is een zuivere sinusoid.

- Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van de grafiek van $y = \cos(x)$.
- Geef een passende formule voor deze sinusoid.
- Los op: $y_2 = 1$ door gebruik te maken van het oorspronkelijke functievoorschrift.
- Doe hetzelfde nog eens door gebruik te maken van de gevonden formule voor de sinusoid.

Opgave 14

Door de sinusoiden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$ op te tellen ontstaat de grafiek van een functie f . Neem voor het domein van f het interval $[0, 4\pi]$.

- Breng de grafiek van f in beeld op je grafische rekenmachine.
- Neem aan dat de grafiek van f een zuivere sinusoid is. Stel een formule op. Gebruik benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.
- Los nu algebraïsch op: $f(x) < 0,5$.

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ met $[-0,5\pi; 0,5\pi]$.

- Breng de grafiek van f in beeld op je grafische rekenmachine.
- De grafiek ziet er in de buurt van de oorsprong nogal merkwaardig uit. Waardoor wordt dit veroorzaakt?
- Welke waarde zou je f geven voor $x = 0$?
- Hoe ziet de grafiek er uit als je heel ver van de oorsprong verwijderd bent? Probeer dat je verklaren.

Toepassen

In de Westerse muziek worden zeven stamtonen onderscheiden, die samen een toonladder vormen. Deze zeven stamtonen worden aangeduid met A, B, C, D, E, F en G. De centrale A heeft een frequentie van 440 Hz (440 trillingen per seconde). Dit betekent dat in de lucht een trilling plaats vindt met die frequentie (is aantal trillingen per seconde). Voor de A geldt dan bijvoorbeeld

$$u(t) = a \sin(440 \cdot 2\pi \cdot t).$$

De luidheid van deze grondtoon wordt bepaald door de amplitude a . Neem voor het gemak $a = 1$. De eerste boventoon van de A klinkt soms minder luid, en dan geldt (bijvoorbeeld) $u_1(t) = 0,8 \sin(880 \cdot 2\pi \cdot t)$. Voor de tweede boventoon kan: $u_2(t) = 1,2 \sin(1320 \cdot 2\pi \cdot t)$. Tel je deze drie sinusfuncties op, dan krijg je een A met een bepaalde klankkleur.

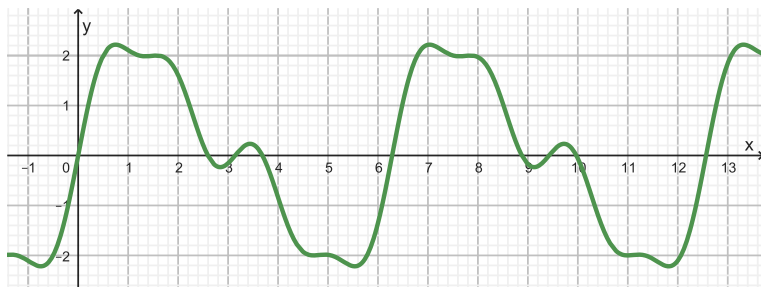
Opgave 16: De toon B

Voor de B geldt een frequentie van 495 Hz (reine stemming).

- Welke sinusoid beschrijft de B als je ervan uitgaat dat de standaardamplitude 1 is?
Op een bepaald instrument trilt alleen de eerste boventoon voor 50% hoorbaar mee.
- Welke formule geldt voor deze eerste boventoon?
- De B en zijn eerste boventoon trillen tegelijk. Schrijf de bijbehorende formule op en breng de grafiek ervan in beeld (ongeveer drie periodes).
- Is deze gecombineerde trilling een sinusoid?

Opgave 17: Sinusoïden stapelen

Deze grafiek is ontstaan door de grafieken van $y = 2 \sin(x)$, $y = a \sin(2x)$ en $y = b \sin(4x)$ op te tellen.



Figuur 1.8

Zoek uit welke waarden a en b hebben.

Testen

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. De grafiek van f is een sinusöide.

- Geef een formule voor deze sinusöide met benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken algebraïsch de nulpunten van f .
- Beredeneer de extremen van f .
- Los algebraïsch op: $f(x) \geq 1$.

Opgave 19

De toppen van $y = \sin(x^2)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$ kun je met je grafische rekenmachine wel vinden. Je kunt ze ook algebraïsch bepalen. Laat zien hoe.

2.2 Goniometrische formules

Inleiding

Je hebt gezien dat goniometrische functies soms periodiek zijn, maar soms ook niet. En af en toe lijkt een op het oog lastige functie een zuivere sinusoïde als grafiek op te leveren. Om aan te tonen dat er dan ook echt van een sinusoïde sprake is, moet je het functievoorschrift kunnen herschrijven. En daarvoor heb je een aantal eigenschappen van $\sin$, $\cos$ en $\tan$ nodig: de goniometrische formules.

Je leert in dit onderwerp

- de goniometrische formules (symmetrievormules, somformules, verdubbelingsformules, enz.) kennen;
- hoe je de goniometrische formules uit elkaar kunt afleiden;
- de goniometrische formules gebruiken bij het herschrijven van functievoorschriften en het oplossen van vergelijkingen.

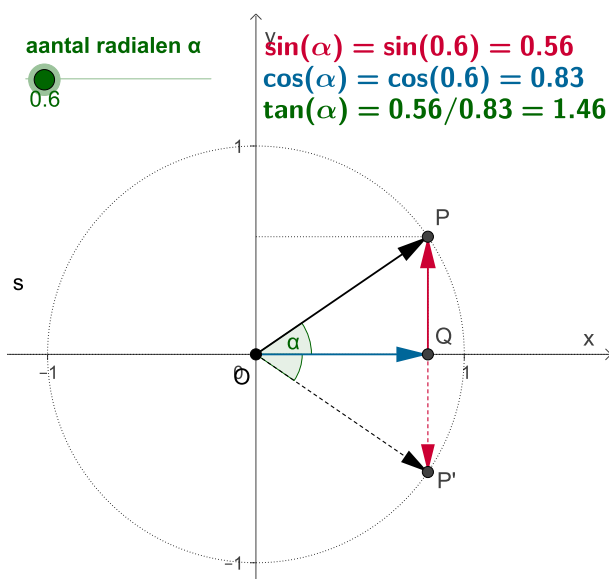
Voorkennis

- werken met sinusoiden en vergelijkingen met sinus en cosinus oplossen;
- goniometrische functies met de grafische rekenmachine onderzoeken;
- werken met de functie $y = \tan(x)$.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.



Figuur 2.1

Om eigenschappen van sinus, cosinus en tangens af te leiden moet je kijken naar hun definities in de eenheidscirkel:

$$\sin(\alpha) = y_P$$

$$\cos(\alpha) = x_P$$

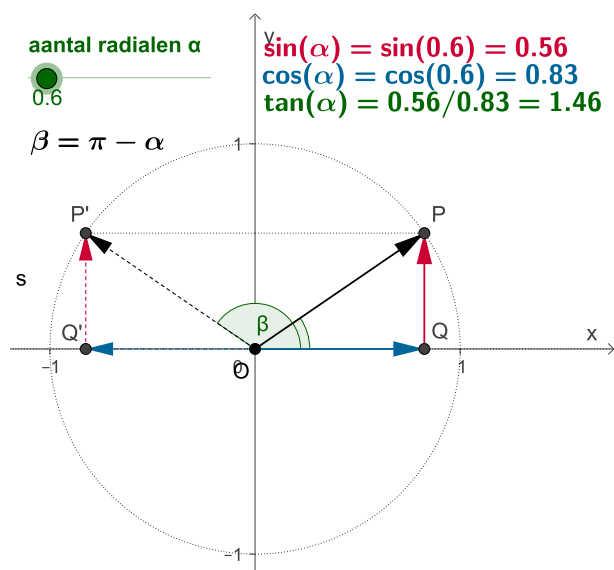
$$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$$

Hier zie je α en $-\alpha$ in één figuur.

- Leg uit waarom $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.
- Welk verband is er tussen $\sin(\alpha)$ en $\sin(-\alpha)$?
- Kun je nog meer van dit soort symmetriemethodes afleiden?
- Denk ook eens aan de stelling van Pythagoras. Kun je iets zeggen over $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$?

Uitleg 1

Bekijk de applet.



Figuur 2.2

Om eigenschappen van sinus, cosinus en tangens af te leiden moet je kijken naar hun definities in de eenheidscirkel:

$$\sin(\alpha) = y_P$$

$$\cos(\alpha) = x_P$$

$$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$$

In deze figuur zie je de hoeken α en $\beta = \pi - \alpha$.

Omdat $\triangle OQP$ en $\triangle OQ'P'$ congruent zijn vanwege de symmetrie van de figuur geldt:

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

Kijk je alleen naar $\triangle OQP$ dan zie je op grond van de stelling van Pythagoras:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Op deze wijze kun je allerlei symmetrievormules voor $\sin$, $\cos$ en $\tan$ afleiden.

Bijvoorbeeld: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ en $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$.

Of: $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ en $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$.

Of: $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$.

Opgave 1

Bekijk de symmetrievormules die in **Uitleg 1** worden afgeleid.

- Laat zelf zien, dat: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ en $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ en $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$.
- Laat zien, dat: $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ en $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$.
- Laat ook zien dat: $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$.

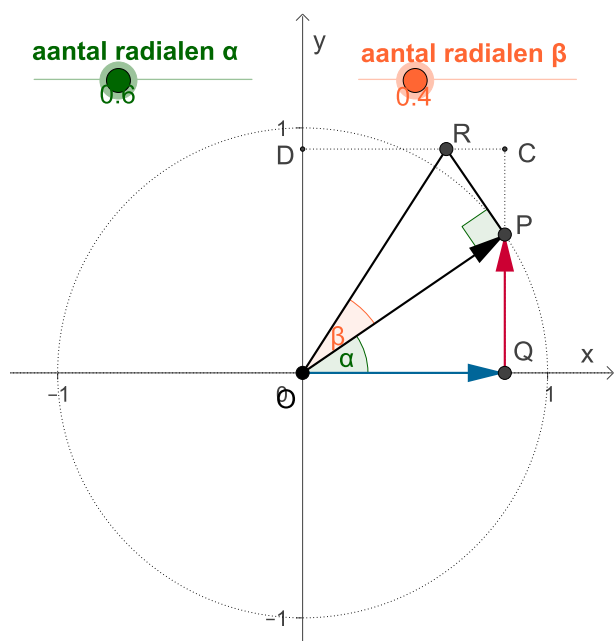
Opgave 2

Breng de grafiek van $y = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ op je grafische rekenmachine in beeld.

- Welke formule heb je nu zichtbaar gemaakt? En hoe wordt die formule in **Uitleg 1** afgeleid?
- Maakt het daarbij verschil of je in graden of radialen werkt?

Uitleg 2

Bekijk de applet.



Figuur 2.3

Met behulp van de figuur kun je de zogenaamde somformules afleiden. Je ziet hoe hier de hoeken α en β 'op elkaar gestapeld' zijn. Het is de bedoeling om $\sin(\alpha + \beta)$ uit te drukken in $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$,

$\cos(\alpha)$ en $\cos(\beta)$ met behulp van rechthoek $OQCD$ en de rechthoekige $\triangle OPR$. Dit gaat alleen zolang $\alpha + \beta$ tussen 0 en $0,5\pi$ blijft. Alle andere situaties moet je met behulp van de symmetrievormules en de eenheidscirkel tot deze herleiden!

Ga na, dat $\sin(\alpha + \beta) = \frac{QC}{OR}$.

Ga ook na, dat $\sin(\alpha) = \frac{QP}{OP}$, $\cos(\alpha) = \frac{PC}{PR}$, $\sin(\beta) = \frac{PR}{OR}$ en

$\cos(\beta) = \frac{OP}{OR}$.

Dan is:

$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{QP}{OP} \cdot \frac{OP}{OR} + \frac{PC}{PR} \cdot \frac{PR}{OR} =$$

$$\frac{QP}{OR} + \frac{PC}{OR} = \frac{QC}{OR} = \sin(\alpha + \beta).$$

Hiermee heb je afgeleid: $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.

Met behulp van de symmetrievormules kun je hier dan weer varianten op maken.

En daarbij maak je de verdubbelingsformules en de formules van Simpson...

Opgave 3

In **Uitleg 2** wordt de formule

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$ afgeleid. Hieruit kun je formules afleiden voor $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ en $\cos(\alpha - \beta)$. Je ziet al die formules in de **Theorie**.

- Leid eerst de formule voor $\sin(\alpha - \beta)$ af. Gebruik de symmetrievormules.
- Leid nu de formule voor $\cos(\alpha + \beta)$ af. Gebruik daarbij formules die sin omzetten in cos en omgekeerd.
- Uit de formule bij b kun je een formule voor $\cos(\alpha - \beta)$ afleiden. Laat zien hoe.
- Leid een formule af voor $\tan(\alpha + \beta)$. Zorg er voor dat er alleen de tan in voorkomt.

Opgave 4

In **Uitleg 2** worden ook de formules van Simpson genoemd naar **Thomas Simpson** (1710—1761).

Eén van die formules is

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(p + q)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(p - q)\right).$$

Deze formule kun je afleiden uit de formules voor $\sin(\alpha + \beta)$ en $\sin(\alpha - \beta)$.

Probeer dat zelf te doen, neem $\alpha + \beta = p$ en $\alpha - \beta = q$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Dit is een overzicht van de belangrijkste **goniometrische formules**. Met behulp van de eenheidscirkel zijn de symmetrievormules, de verbanden tussen sin en cos en de eerste somformule af te leiden. Uit deze formules kun je de rest herleiden...

Symmetrievormules	Vervanden tussen sin en cos
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$ $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
Somformules	Verdubbelingsformules
$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$	$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$ $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$ $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$
Formules van Simpson	
$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(p+q)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(p-q)\right)$ $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(p-q)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(p+q)\right)$ $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(p+q)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(p-q)\right)$ $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{1}{2}(p+q)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(p-q)\right)$	

Tabel 2.1

Voorbeeld 1

Toon aan dat de functie f met $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ een sinusöide is.

Antwoord

Je moet het functievoorschrift herleiden tot $f(x) = a \sin(b(x-c))+d$ (of zoiets met cos). Daarvoor moeten $\sin(x)$ en $\cos(x)$ worden opgeteld. Bij de formules waarin uitdrukkingen met sin en/of cos worden opgeteld, vind je alleen gevallen voor twee sinussen of twee cosinussen. Daarom begin je met $\cos(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$.

Je vindt: $f(x) = \sin(x) + \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$.

En dit wordt met één van de formules van Simpson:

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)\right)\right) \cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)\right)\right) = 2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right).$$

En dus $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$.

Dit is een formule van een sinusöide.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**. Er wordt aangetoond dat

$f(x) = \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$. En dus is f een zuivere sinusoid.

- Waarom is dat zo?
- Los nu algebraïsch vergelijking $f(x) = 1$ op.
- Waarom is het nuttig om een functievoorschrift in de vorm van een sinusoid te schrijven?

Opgave 6

Als je de sinusoiden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$ optelt, krijg je de functie $f(x) = \sin(x) + \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$. Laat zien dat je het functievoorschrift van f zo kunt herleiden dat je er een zuivere sinusoid in herkent.

Voorbeeld 2

Leid de verdubbelingsformules af uit de somformules.
Stel ook een vergelijkbare formule op voor $\tan(2x)$.

Antwoord

Neem $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.

Kies $\alpha = x$ en $\beta = x$.

Je vindt: $\sin(2x) = \sin(x) \cos(x) + \sin(x) \cos(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.

Neem $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.

Kies $\alpha = x$ en $\beta = x$.

Je vindt: $\cos(2x) = \cos(x) \cos(x) - \sin(x) \sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Met behulp van $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ kun je de twee andere formules voor $\cos(2x)$ uit de voorgaande afleiden.

$$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)}.$$

Deel je nu teller en noemer van deze breuk door $\cos^2(x)$, dan krijg je:

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** worden de verdubbelingsformules afgeleid.

- Leid alle drie de formules voor $\cos(2x)$ af die ook in de **Theorie** worden genoemd.
- Leid zelf de formule voor $\tan(2x)$ af.
Als het goed is, vraag je jezelf af wat het nut van dergelijke formules is. Wel, soms zijn ze handig, bijvoorbeeld om een goniometrische vergelijking op te lossen.
- Los algebraïsch op: $\sin(2x) = 2 \sin(x)$.

Voorbeeld 3

Los op $[-\pi, \pi]$ op: $\sin(2x) - \sin(x) < 0$.

Antwoord

Maak eerst de grafiek van f op $[-\pi, \pi]$.

Vervolgens los je op: $\sin(2x) - \sin(x) = 0$.

Dit kun je op twee manieren doen:

- Je gebruikt $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.
Dan krijg je $2 \sin(x) \cos(x) - \sin(x) = 0$.
Ontbinden geeft: $\sin(x)(2 \cos(x) - 1) = 0$.
En zo vind je: $\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = 0,5$.
Oplossingen: $x = -\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi \vee x = 0 \vee x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \pi$.
- Je kunt ook meteen de vergelijking schrijven als $\sin(2x) = \sin(x)$.

Dan vind je: $2x = x + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - x + k \cdot 2\pi$.

Dit geeft: $x = 0 + k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi + k \cdot 2\pi$ en dus
 $x = k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$. Dit geeft op $[-\pi, \pi]$ dezelfde vijf oplossingen.

De oplossing van de ongelijkheid wordt: $-\frac{1}{3}\pi < x < 0 \vee \frac{1}{3}\pi < x < \pi$.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt de vergelijking $\sin(2x) - \sin(x) = 0$ op twee manieren opgelost.

- Bij welke van beide manieren wordt gebruik gemaakt van symmetrie? Bij welke stap in de oplossing?
- Bij de andere methode wordt een verdubbelingsformule gebruikt. Bij welke stap in de oplossing?

Opgave 9

Los algebraïsch op in $[0, 2\pi]$: $\sin(2x) - \cos(x) > 0$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 4

Gegeven is op $[-2\pi, 2\pi]$ de functie f met $f(x) = \cos(2x) - 2 \cos(x)$.

Bereken de nulpunten van deze functie en los op: $f(x) = -1$.

Antwoord

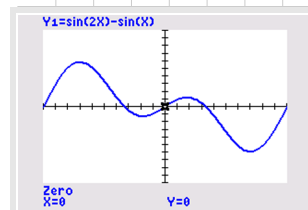
Voor de nulpunten moet je oplossen $f(x) = \cos(2x) - 2 \cos(x) = 0$.

Hierbij maak je gebruik van $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$.

De vergelijking wordt dan: $2 \cos^2(x) - 1 - 2 \cos(x) = 0$.

Schrijf je dit als $2 \cos^2(x) - 2 \cos(x) - 1 = 0$, dan krijg je een kwadratische vergelijking in $\cos(x)$. Die kun je oplossen met de abc-formule:

$$\cos(x) = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$



Figuur 2.4

Nu zijn benaderingen nodig, bijvoorbeeld in twee decimalen nauwkeurig:

$$\cos(x) \approx 1,366 \vee \cos(x) \approx -0,366.$$

Alleen $\cos(x) \approx -0,366$ heeft oplossingen, namelijk

$$x \approx \arccos(-0,366) + k \cdot 2\pi \vee x \approx -\arccos(-0,366) + k \cdot 2\pi.$$

Er zijn dus twee series nulpunten: $(1,95 + k \cdot 2\pi, 0)$ en $(-1,95 + k \cdot 2\pi, 0)$.

De vergelijking $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x) = -1$ geeft op dezelfde manier:

$$2\cos^2(x) - 1 - 2\cos(x) = -1 \text{ en dus } 2\cos^2(x) - 2\cos(x) = 0.$$

Ontbinden is nu mogelijk en daarmee kun je gemakkelijk alle antwoorden opschrijven...

Opgave 10

In **Voorbeeld 4** wordt de functie $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$ bekeken.

- a Voer de berekening van de nulpunten van de grafiek van f zelf uit.
- b Maak de oplossing van $f(x) = -1$ verder af.
- c Los in $[-2\pi, 2\pi]$ op: $f(x) < -1$.

Verwerken

Opgave 11

Als je de sinusoiden $y_1 = \cos(x)$ en $y_2 = \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ van elkaar aftrekt, krijg je de grafiek van de functie

$$f(x) = \cos(x) - \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right).$$

- a Toon aan dat f een sinusïde is.
- b Bereken met behulp van je formule bij a de toppen en de nulpunten van de grafiek van f .
- c Los algebraïsch op $[0, 2\pi]$ op: $f(x) > \frac{1}{2}$. (Benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.)

Opgave 12

Met domein $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie

$$f(x) = \sin^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - 1.$$

- a Bepaal de nulpunten van deze functie met de grafische rekenmachine.
- b Laat zien dat je het voorschrift van deze functie kunt herleiden tot $f(x) = -\cos^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$.
- c Bereken nu de nulpunten exact.
- d Los algebraïsch op: $f(x) > -\frac{1}{2}$.

Opgave 13

Met domein $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \frac{1}{8} \tan(x) - \sin(x)$.

- Bereken algebraïsch de nulpunten van deze functie.
- Breng de grafiek in beeld en bepaal de toppen.
- Welke asymptoten heeft de grafiek?
- Los algebraïsch op: $f(x) \geq \frac{1}{2} \sin(x)$.

Opgave 14

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- $\sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + \sin(x) = \frac{1}{2}$
- $\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos(x)$
- $\cos^2(x) + \sin(x) = 1$
- $2 \sin^2(x) - \cos(2x) = 0$
- $2 \cos^2(x) - 2 \sin(x) = 0$
- $\tan(x) = \sin(x)$

Opgave 15

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$, $g(x) = \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ en $S(x) = f(x) + g(x)$.

- Onderzoek met je grafische rekenmachine of de functie S een sinusïde zou kunnen zijn.
- Toon algebraïsch aan dat S een sinusïde is.
- Los algebraïsch op: $S(x) \geq 1$.

Toepassen

Opgave 16: Verdrievoudigingsformules

Behalve de verdubbelingsformules voor $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ en $\tan(2x)$ kun je ook formules maken voor $\sin(3x)$, $\cos(3x)$ en $\tan(3x)$.

- Toon aan dat $\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$.
- Toon aan dat $\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$
- Toon aan dat $\tan(3x) = \frac{3 \tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3 \tan^2(x)}$.

Opgave 17: Verviervoudigingsformules

Behalve de verdubbelingsformules voor $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ en $\tan(2x)$ kun je ook $\sin(4x)$, $\cos(4x)$ en $\tan(4x)$ uitdrukken in $\sin(x)$, $\cos(x)$ en $\tan(x)$.

Leid zelf zo eenvoudig mogelijke formules af.

Testen

Opgave 18

Gegeven zijn de functies $y_1 = \sin(2x) + \frac{1}{2}$, $y_2 = \sin\left(2x + \frac{1}{4}\pi\right)$ en $y_3 = y_2 - y_1$. Neem voor al deze functies als domein $[-\pi, \pi]$.

- a Toon aan dat de grafiek van y_3 een zuivere sinusoidale is.
- b Bepaal algebraïsch alle toppen en nulpunten van y_3 .
- c Los algebraïsch op: $y_3 \geq 0$.

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. (Eventuele benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.)

- a $\sin(x) = \cos(x)$
- b $\sin(2x) = \cos(x)$
- c $\cos^2(x) = \sin^2(x)$
- d $\cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

2.3 Goniometrische functies differentiëren

Inleiding

Als je met sinusoiden hebt gewerkt, dan weet je dat het hierbij gaat om functies die door transformatie kunnen ontstaan uit de grafiek van $y = \sin(x)$ of $y = \cos(x)$. Een sinusoida beschrijft een periodiek verschijnsel. De hellingswaarden van een sinusoida veranderen daarom ook periodiek.

Niet zo vreemd dus, dat de afgeleide van een sinusoida ook zelf weer een sinusoida is.

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van de sinus-, de cosinus- en de tangensfunctie bepalen;
- de differentieerregels toepassen op functies waarin sinus, cosinus of tangens voorkomen.

Voorkennis

- werken met sinusoiden;
- de differentieerregels gebruiken;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: Afgeleide sinus.

Je ziet hier de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.

Je wilt $f(x) = \sin(x)$ differentiëren.



Figuur 3.1

- a Je ziet ook de bijbehorende hellingsgrafiek. Welke functie hoort er bij die hellingsgrafiek?

Breng de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ zelf in beeld op je grafische rekenmachine.

- b Welke afgeleide heeft $f(x) = \sin(x)$, denk je?

Uitleg

Bekijk de applet: Afgeleide sinus.

Het differentiëren van functies waarin sinus en/of cosinus voorkomen is gebaseerd op:

- De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ is $f'(x) = -\sin(x)$.

In de figuren wordt dit voor $f(x) = \sin(x)$ aannemelijk gemaakt. Je ziet hierin dat de afgeleide van f gelijk is aan $f'(x) = \cos(x)$. Maar echt zeker weet je dit pas als je hebt aangetoond dat

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$$

Nu volgt uit de formules van Simpson dat

$$\sin(x+h) - \sin(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}h\right) \cos\left(x + \frac{1}{2}h\right) \text{ en hiermee is}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{1}{2}h\right) \cos\left(x + \frac{1}{2}h\right)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}{\frac{1}{2}h} \cdot \cos\left(x + \frac{1}{2}h\right) \end{aligned}$$

Uit de figuur hiernaast kun je afleiden dat voor $h \rightarrow 0$ geldt $\sin\left(\frac{1}{2}h\right) \approx \frac{1}{2}h$. En omdat in dat geval ook $\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right) \approx \cos(x)$ geldt:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$$

Hieruit kun je ook de afgeleide van $g(x) = \cos(x)$ bepalen.

En de afgeleide van $h(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ bepaal je met behulp van de quotiëntregel. En zo heb je bij het differentiëren van alle functies waarin sin en cos voorkomen ook de meeste andere differentieerregels weer nodig.

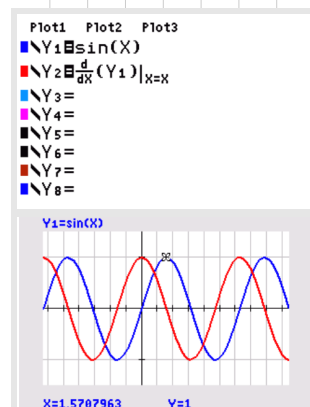
Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ bepaald.

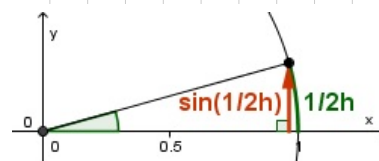
- Laat zelf zien dat $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$. Licht alle stappen in het bewijs toe.
- Laat zien dat de afgeleide van $g(x) = \cos(x)$ gelijk is aan $g'(x) = -\sin(x)$. Maak daarbij gebruik van $\cos(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ en de kettingregel voor differentiëren.

Opgave 2

De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ kun je vinden door de quotiëntregel voor differentiëren en de afgeleiden van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ te gebruiken. Laat dat zien.



Figuur 3.2



Figuur 3.3

Opgave 3

Met behulp van de al bekende differentieerregels en de regels voor het differentiëren van de drie standaard goniometrische functie die je hierboven hebt afgeleid, kun je alle functies differentiëren. Even oefenen met name bij goniometrische functies is nog nuttig. Bereken de afgeleide van de volgende functies.

- a $f(x) = 2 \sin(x)$
- b $f(x) = \sin(2x)$
- c $f(x) = \sin^2(x)$
- d $f(x) = x^2 \sin(x)$
- e $f(x) = 4 \cos(2x) - \sin(2x) + 1$
- f $f(x) = \cos^2(x) + 3 \cos(x)$
- g $f(x) = \tan(3x)$
- h $f(x) = \sin(x) \cos(x)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het **differentiëren van goniometrische functies** (waarin sinus en/of cosinus voorkomen) is gebaseerd op:

- De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ is $f'(x) = -\sin(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Het bewijs hiervan heb je bij de **Uitleg** gezien.

Om de afgeleide van een functie waarin sinus en/of cosinus voorkomen te bepalen heb je ook vaak nog de overige differentieerregels nodig.

Bijvoorbeeld moet je bij afgeleide van een sinusoïde rekening houden met de kettingregel en met de constante-regels.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = -10 + 20 \sin(0,1\pi x - 0,2\pi)$ met domein $[-10,10]$.

Stel m.b.v. differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Antwoord

$$f'(x) = 20 \cos(0,1\pi x - 0,2\pi) \cdot 0,1\pi = 2\pi \cos(0,1\pi x - 0,2\pi).$$

Daaruit volgt: $f'(0) = 2\pi \cos(-0,2\pi) \approx 5,08$.

Verder is: $f(0) = -10 + 20 \sin(-0,2\pi) \approx 21,76$.

De vergelijking van de raaklijn wordt bij benadering: $y = 5,08x - 21,76$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je ziet daar hoe de vergelijking van de raaklijn aan een sinusoïde wordt opgesteld. Differentieer nu de volgende functies en stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 0$.

- a $f(x) = 20 \sin(440\pi x)$
- b $f(x) = x \cos(x)$
- c $f(x) = x^2 \cos(3x)$
- d $f(x) = \tan^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

Opgave 5

Gegeven de functie $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$.

- a Bepaal de afgeleide van deze functie door differentiëren.
- b Met welke formule hangt het resultaat samen?

Voorbeeld 2

Bij in- en uitademen varieert het longvolume V (in liters) periodiek met de tijd t (in seconden). Stel je voor dat iemands longvolume varieert tussen 3,05 en 3,15 L en dat deze persoon 40 keer per minuut in- en uitademt. Neem verder aan dat $V(t)$ een zuivere sinusoïde is.

Op $t = 0$ is zijn longvolume maximaal. Bereken de grootste snelheid van uitademen.

Antwoord

Dit is een passende formule: $V(t) = 3,10 + 0,05 \cos\left(\frac{2\pi}{1,5}t\right)$.

Hierin is t in seconden (er gaan 40 ademhalingen in 60 seconden, dus de periode is 1,5 sec.).

De grootste snelheid van uitademen vindt plaats als de grafiek de evenwichtsstand passeert vanaf een maximum naar een minimum.

Bijvoorbeeld op $t = \frac{1,5}{4} = 0,375$.

Die snelheid is dan gelijk aan de afgeleide van $V(t)$ op dat tijdstip.

Nu is: $V'(t) = -0,05 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1,5}t\right) \cdot \frac{2\pi}{1,5}$.

En daarom is: $V'(0,375) = -0,05 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1,5} \cdot 0,375\right) \cdot \frac{2\pi}{1,5} \approx -0,209$.

De maximale snelheid van uitademen is ongeveer 0,2 L/s.

Opgave 6

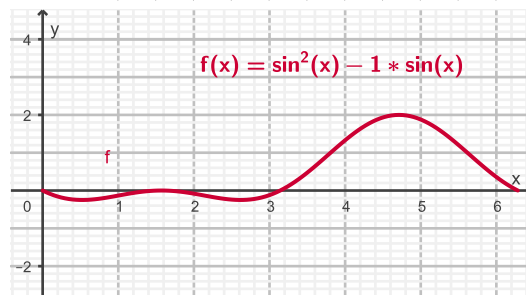
Voorbeeld 2 gaat over iemands longvolume en de snelheid van in- en uitademen.

- a Laat zien hoe je de formule voor $V(t)$ uit de tekst kunt afleiden.
- b Leg uit waarom de grootste snelheid van uitademen plaatsvindt als de grafiek de evenwichtsstand passeert vanaf een maximum naar een minimum.
- c Voer nu zelf de berekening van die maximale snelheid van uitademen uit.
- d En bij welke waarden van t krijg je de grootste snelheid van inademen? Hoe groot is die snelheid?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Je ziet hier de grafiek van een functie f van de vorm $f(x) = \sin^2(x) - p \sin(x)$. Het domein van deze functie is $[0, 2\pi]$. Hier is $p = 1$ en heeft de grafiek van f vier extremen. Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f vier extremen?



Figuur 3.4

Antwoord

$$f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) - p \cos(x) = 0$$

geeft:

$$\cos(x)(2 \sin(x) - p) = 0$$

en dus:

$$\cos(x) = 0 \vee \sin(x) = 0,5p.$$

Op $[0, 2\pi]$ heeft $\cos(x) = 0$ twee oplossingen.

Dan moet dit ook gelden voor $\sin(x) = 0,5p$.

Dit betekent $-1 < 0,5p < 1$ en $p \neq 0$.

Dus moet $-2 < p < 2$ en $p \neq 0$.

Opgave 7

Bekijk de familie van functies met vier extremen in **Voorbeeld 3**.

- Neem $p = -1$ en bereken alle vier de extremen van deze functie.
- Laat zien dat de grafiek van f een voor elke p een top in $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ heeft.
- Er zijn twee waarden van p , waarvoor het grootste maximum tweemaal zo groot is als het kleinste maximum. Bereken die waarden van p .

Opgave 8

Gegeven de functie $f(x) = \tan(ax)$. Voor welke a is de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ evenwijdig met de lijn $2x + y = 6$?

Verwerken

Opgave 9

Differentieer deze goniometrische functies en bereken daarna algebraïsch de eventuele toppen van bijbehorende grafieken.

- $f_1(x) = \cos^2(x)$
- $f_2(x) = 4 \sin(2x - 0,25\pi) + 10$
- $f_3(x) = \cos^2(x) + \cos(x)$
- $f_4(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

Opgave 10

Met domein $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie

$$f(x) = \sin^2(x) - \sqrt{3} \cos(x) - 1.$$

- Bereken de exacte extremen van deze functie.
- Bereken algebraïsch de buigpunten van deze functie.

Opgave 11

Met domein $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \frac{1}{8} \tan(x) - \sin(x)$.

- Bereken algebraïsch de extremen van deze functie.
- Toon aan dat $(0, 0)$ een buigpunt van de grafiek is. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in dat buigpunt.

Opgave 12

Op het domein $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie

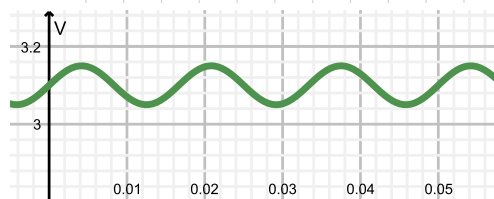
$$f(x) = (2 - \cos(x))(1 + \cos(x)).$$

- Los exact op: $f(x) = 2$.
- Bereken algebraïsch de extremen van f .
- Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ precies twee oplossingen?

Opgave 13

Het longvolume van een mens kun je registreren met een zogenaamde spirograaf. Bij iemand die hyperventileert geeft de spirograaf de grafiek die je hiernaast ziet. Op de horizontale as zie je de tijd in minuten.

- Hoeveel keer per minuut ademt deze patiënt uit?
- Stel een formule op voor het longvolume V als functie van de tijd t in minuten. Ga ervan uit dat de grafiek een zuivere sinusoïde is.
- Benader in twee decimalen nauwkeurig de toenamesnelheid van het longvolume op $t = \frac{7}{480}$.



Figuur 3.5

Opgave 14

Gegeven is op het domein $[0, 2\pi]$ de functie f door

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + 1}.$$

- Bereken algebraïsch de nulpunten en de toppen van de grafiek van deze functie.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt met de y -as.
- Bepaal in twee decimalen nauwkeurig de lengte van het lijnstuk dat de grafiek van de lijn $y = \frac{1}{2}$ afsnijdt.
- De rechte lijn met vergelijking $y = -2x + a$ snijdt de grafiek van f loodrecht. Bereken a .

Toepassen

Opgave 15: Scheve evenwichtslijn

Gegeven een functie waarvan de grafiek lijkt op een sinus-
ide. Alleen de evenwichtsstand is geen horizontale lijn, maar
een lijn met helling van $\frac{1}{2}$. Bij deze functie hoort het voorschrift

$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 + 2 \sin(x)$. Je spreekt nu niet van een evenwichts-
stand, maar van een trendlijn.

- Welke formule geldt voor de trendlijn? Breng op je grafische reken-
machine zowel de grafiek van f als de trendlijn in beeld.
- Bereken algebraïsch de toppen van de gegeven functie.
- Vallen de x -waarden van die toppen samen met die van de toppen
van $y = \sin(x)$? Geef een verklaring.

Testen

Opgave 16

Op het domein $[-2\pi, 2\pi]$ is gegeven de functie

$$f(x) = \sin^2(x) + \cos(x).$$

- Bereken algebraïsch de nulpunten en de toppen van de grafiek van
de functie.
- Los algebraïsch op: $f(x) > 1$.

Opgave 17

De kromme K_f is de grafiek van de functie $f(x) = x + 2 \sin(x)$ op
het domein $[0, 2\pi]$.

- Bereken algebraïsch de extremen van f .
- Stel vergelijkingen op van de rechte lijnen l en m die K_f raken en
evenwijdig zijn aan de lijn met vergelijking $y = x$.
- a is de richtingscoëfficiënt van een raaklijn aan K_f . Welke waarden
kan a aannemen? Licht je antwoord toe.

Opgave 18

De grafiek van $f(x) = 4 \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)$ op het domein $[0, 10]$ heeft precies
twee nulpunten O en S en een top T . Door de lijnstukken OT en
 TS te trekken ontstaat driehoek OST . Punt A beweegt over de
grafiek van f en punt B over de lijnstukken OT en TS . Het lijnstuk
 AB blijft steeds evenwijdig aan de y -as.

Bereken algebraïsch de maximale lengte van AB in twee decima-
len nauwkeurig.

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het differentiëren van goniometrische functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



2.4 Harmonische trilling

Inleiding

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. De hoogte van de toon hangt af van de lengte van de snaar: hoe vaker hij per seconde trilt, hoe hoger de toon. De centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een combinatie van meerdere harmonische trillingen.

Je leert in dit onderwerp

- harmonische trillingen beschrijven m.b.v. sinusoiden;
- uitdrukkingen van de vorm $a \sin(x) + b \cos(x)$ herleiden tot een sinusoid.

Voorkennis

- de somformules en de formules van Simpson voor goniometrische functies gebruiken;
- werken met sinusoiden;
- goniometrische functies differentiëren.

Verkennen

Opgave V1

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. De hoogte van de toon hangt af van de lengte van de snaar: hoe vaker hij per seconde trilt, hoe hoger de toon. De 'kamertoon', de centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een harmonische trilling.

Bij deze A hoort een harmonische trilling volgens $u(t) = \sin(880 \cdot \pi t)$ waarin u de uitwijking van de trilling en t de tijd in seconden is.

- a** Breng de bijbehorende grafiek in beeld op de grafische rekenmachine, precies twee periodes.

Behalve deze grondtoon klinken er bij instrumenten ook boventonen mee, de eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en de tweede heeft een frequentie die drie keer zo groot is, etc. Elke boventoon klinkt vaak minder sterk dan de grondtoon.

- b** Bekijk het trillingspatroon $u(t) = 2 \sin(880\pi t) + 0,5 \sin(1760\pi t)$ met je grafische rekenmachine. Is nu nog steeds sprake van een zuivere sinusoid?



Figuur 4.1



Figuur 4.2

Uitleg

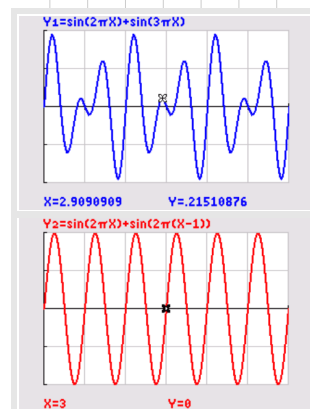
Bekijk de applet: harmonische trillingen combineren

Een harmonische trilling is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde.

Een goed voorbeeld is een veer met een gewichtje er aan wat in trilling wordt gebracht. De uitwijking uit de evenwichtsstand heeft dan bijvoorbeeld een formule van de vorm $u(t) = 4 \sin(4\pi t)$, waarin u de uitwijking uit de evenwichtsstand in cm is en t de tijd in seconden. De periode van deze trilling is $\frac{2\pi}{4\pi} = 0,5$ seconde.

Je kunt twee harmonische trillingen combineren. Soms zijn ze 'in fase' (ze starten dan op hetzelfde moment), soms niet. Neem aan dat ze dezelfde amplitude hebben en dat de evenwichtsstand 0 is. Als je ze optelt (ze werken dan tegelijkertijd) kunnen ze elkaar versterken, dan wel uitdoven. Altijd ontstaat er een nieuwe periodieke functie, niet altijd is het weer een harmonische trilling, een sinusoïde. Bekijk de figuren. Wanneer wel en wanneer niet?

Even experimenteren en je zult wel vermoeden dat dit te maken heeft met de periodes van u_1 en u_2 : alleen als die gelijk zijn krijg je weer een zuivere sinusoïde.



Figuur 4.3

Opgave 1

Bekijk de applet in de [Uitleg](#). Met de begininstellingen $p = 1$, $q = 1$ en $r = 0$ krijg je $u_1 = \sin(2\pi \cdot t)$, $u_2 = \sin(2\pi \cdot (t - 0))$ en $u = u_1 + u_2$. Bekijk deze grafieken.

- Laat algebraïsch zien dat u een sinusoïde is.
- Hebben u_1 en u_2 een faseverschil?
Je gaat nu r variëren.
- Neem bijvoorbeeld $r = 0,25$, dan krijg je $u_1 = \sin(2\pi \cdot t)$, $u_2 = \sin(2\pi \cdot (t - 0,25))$. Wat gebeurt er met $u = u_1 + u_2$?
- Bij welke waarden van r wordt u een rechte lijn?

Opgave 2

Bekijk weer de applet in de [Uitleg](#). Gebruik de begininstellingen $p = 1$, $q = 0,5$ en $r = 0$ en bekijk de grafieken van $u_1 = \sin(2\pi \cdot t)$, $u_2 = \sin(2\pi \cdot 0,5 \cdot t)$ en $u = u_1 + u_2$.

- De periodes van u_1 en u_2 zijn nu verschillend. Is u een sinusoïde?
- Experimenteer met de applet. Wanneer wordt u een sinusoïde?
- Je kunt de formules van u herleiden met de formules van Simpson. Hoe kun je daarna zien dat er alleen een sinusoïde kan ontstaan als de periodes van u_1 en u_2 gelijk zijn?

Opgave 3

In de applet kun je de amplitudes van u_1 en u_2 niet veranderen. Daarom kun je de formules van Simpson toepassen. Maar bekijk nu de functies $u_1 = \sin(2\pi t)$ en $u_2 = 2 \sin(2\pi(t - 1))$.

- Breng $u_3 = u_1 + u_2$ in beeld op de grafische rekenmachine (of in GeoGebra).
- Lijkt u_3 een sinusoïde te zijn?
- Kun je dit ook algebraïsch aantonen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **harmonische trilling** is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde. Een goed voorbeeld is een veer met een gewichtje er aan wat in trilling wordt gebracht. De uitwijking u (in m) uit de evenwichtsstand is een functie van de tijd t (in s):

$$u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right) \text{ met:}$$

- amplitude** (maximale uitwijking) A
- periode** of **trillingstijd** (de tijdsduur van één trilling) p
- frequentie** (aantal trillingen per s) $f = \frac{1}{p}$

Tel je twee harmonische trillingen bij elkaar op, dan zijn er verschillende mogelijkheden:

- Beide sinusoiden hebben dezelfde amplitude en periode maar de éne is horizontaal verschoven t.o.v. de andere. Deze horizontale verschuiving gedeeld door de periode noem je het **faseverschil**. Is er alleen sprake van een faseverschil dan levert de optelling van beide sinusoiden opnieuw een sinusoïde op: de som van twee harmonische trillingen is dan weer een harmonische trilling. Zie **Voorbeeld 1**.
- Beide sinusoiden hebben alleen dezelfde periode. Er is zowel een faseverschil als een verschil in amplitude. Ook in dit geval is de som van twee harmonische trillingen opnieuw een harmonische trilling. Zie **Voorbeeld 2**.
- Beide sinusoiden hebben verschillende periodes. Nu is de som van twee harmonische trillingen geen zuiver harmonische trilling. Zie **Voorbeeld 3**.

Voorbeeld 1

Gegeven de twee harmonische trillingen u_1 en u_2 door $u_1 = \sin(t)$ en $u_2 = \sin(t - 2)$.

Beide trillingen hebben dezelfde periode en amplitude, maar wel een faseverschil. Toon aan dat $u = u_1 + u_2$ ook een harmonische trilling is.

Antwoord

Het faseverschil van beide trillingen is $\frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$.

In dit geval (gelijke periodes en gelijke amplitudes) zijn de formules van Simpson goed bruikbaar:

$$u(t) = \sin(t) + \sin(t - 2) = 2 \sin(t - 1) \cos(1) \approx 1,08 \sin(t - 1)$$

Je krijgt dus door u_1 en u_2 op te tellen een sinusoidale met een amplitude van ongeveer 1,08 en een periode van 2π . Iets dergelijks vind je steeds als je twee harmonische trillingen met gelijke periodes en gelijke amplitudes optelt: de som is dan weer een harmonische trilling. Als de ene formule een sinus en de andere een cosinusfunctie is, zet je die cos-functie eerst om in een sinus (of de sin in een cos).

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe twee harmonische trillingen u_1 en u_2 met dezelfde periode en amplitude worden opgeteld. Met de formules van Simpson kun je aantonen dat $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ weer een sinusoidale is. Laat dit zelf zien als

- a $u_1(t) = \sin(t)$ en $u_2(t) = \sin(t - 2) + 4$
- b $u_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$ en $u_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t - 2)\right) + 4$
- c $u_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$ en $u_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t - 2)\right) + 4$
- d $u_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$ en $u_2(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}(t + 3)\right) + 2$

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** wordt ook het faseverschil van u_1 en u_2 berekend.

- a Licht deze berekening toe.
- b Bereken het faseverschil van u ten opzichte van zowel u_1 als u_2 . Wat valt je op?
- c Kun je een algemene regel bedenken voor het faseverschil van de som van twee sinusoiden met dezelfde amplitude en dezelfde periode?

Voorbeeld 2

Gegeven de twee harmonische trillingen u_1 en u_2 door

$$u_1 = 2 \sin(t) + 1 \text{ en } u_2 = \sin(t - 2).$$

Beide trillingen hebben alleen dezelfde periode. Toon aan dat $u = u_1 + u_2$ ook een harmonische trilling is.

Antwoord

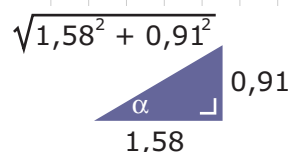
Omdat de amplitudes verschillen kun je de formules van Simpson niet toepassen. Wel kun je $\sin(t - 2)$ uitwerken:

$$\sin(t - 2) = \sin(t) \cos(2) - \cos(t) \sin(2).$$

Hiermee wordt: $u(t) \approx 1,58 \sin(t) - 0,91 \cos(t) + 1$.

Nu is er een hoek α met: $\cos(\alpha) = 1, \frac{58}{\sqrt{1,58^2 + 0,91^2}}$ en

$$\sin(\alpha) = 0, \frac{91}{\sqrt{1,58^2 + 0,91^2}}.$$



Figuur 4.4

En dus is:

$$u(t) = \sqrt{1,58^2 + 0,91^2} \cdot \left(\sin(t) \cdot \frac{1,58}{\sqrt{1,58^2 + 0,91^2}} - \cos(t) \cdot \frac{0,91}{\sqrt{1,58^2 + 0,91^2}} \right) + 1 =$$

$$= \sqrt{1,58^2 + 0,91^2} \cdot (\sin(t) \cos(\alpha) - \cos(t) \sin(\alpha)) + 1 =$$

$$= \sqrt{1,58^2 + 0,91^2} \cdot \sin(t - \alpha) + 1.$$

De hoek α bereken je uit $\tan(\alpha) \approx \frac{0,91}{1,58}$.

u is een harmonische trilling met $u(t) \approx \sqrt{1,58^2 + 0,91^2} \cdot \sin(t - 0,52) + 1$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe twee harmonische trillingen u_1 en u_2 met dezelfde periode worden opgeteld. Nu zijn echter de amplitudes verschillend. Bekijk goed hoe in dit voorbeeld wordt aangetoond dat er toch sprake is van een sinusoïde.

- Breng de grafiek van $u(t)$ in beeld op je grafische rekenmachine. Ga na dat hij op een sinusoïde lijkt en bepaal frequentie, amplitude en evenwichtslijn.
- Werk nu zelf het voorbeeld na. Bekijk goed hoe de amplitude van de sinusoïde wordt gevonden.
- Laat op dezelfde manier zien, dat $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ een sinusoïde is.

Opgave 7

Gegeven is $u_1(t) = 3 \sin(t)$ en $u_2(t) = 4 \cos(t)$.

- Toon aan dat $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$ een sinusoïde is. Bereken de amplitude en het faseverschil met $u = \sin(t)$.
- Toon aan dat $u_4(t) = u_1(t) - u_2(t)$ een sinusoïde is. Bereken de amplitude en het faseverschil met $u = \sin(t)$.
- Toon aan dat $u_5(t) = -u_1(t) + u_2(t)$ een sinusoïde is. Bereken de amplitude en het faseverschil met $u = \sin(t)$.

Opgave 8

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 \sin(2x)$ en $g(x) = 2 \cos(2x - 5) + 1$.

Het zijn beide sinusoïden. Verder is $S(x) = f(x) + g(x)$.

- Waarom is S weer een sinusoïde?
- Bewijs dat S een sinusoïde is en bereken de amplitude en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y = \sin(x)$.
- Los algebraïsch op: $S(x) = 2$.

Voorbeeld 3

Gegeven de twee harmonische trillingen u_1 en u_2 door $u_1 = \sin(t)$ en $u_2 = \sin(2t)$.

Beide trillingen hebben verschillende periodes. Toon aan dat $u = u_1 + u_2$ geen harmonische trilling is.

Antwoord

Omdat u_1 en u_2 dezelfde amplitudes hebben, kun je de formules van Simpson toepassen. Je vindt dan:

$$u(t) = \sin(t) + \sin(2t) = 2 \sin(1,5t) \cos(0,5t).$$

Deze formule heeft niet de gedaante van een sinusoïde.

Maar $u(t)$ is wel periodiek. Omdat $\sin(t)$ zich herhaalt met een periode van 2π en $\sin(2t)$ met een periode van π , past de trillingstijd van de $\sin(2t)$ precies twee keer in die van $\sin(t)$. De periode is daarom 2π .

(In het algemeen is in een dergelijk geval de periode het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van beide afzonderlijke periodes.)

Opgave 9

Bekijk de twee harmonische trillingen in **Voorbeeld 3**. Hun som is geen harmonische trilling.

a Waarom niet?

Neem nu $u_1(t) = \sin(3t)$ en $u_2(t) = \sin(4t)$.

b De grafiek van $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ is geen harmonische trilling, maar wel periodiek. Toon dit aan.

c Hoe leid je de periode van u af uit die van u_1 en die van u_2 ?

Verwerken

Opgave 10

Ga nog eens uit van twee harmonische trillingen u_1 en u_2 . Onderzoek in elk van de volgende gevallen of $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ weer een harmonische trilling is. Bepaal in dat geval de frequentie en amplitude.

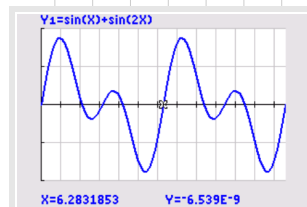
- a $u_1 = 2 \cos(t)$ en $u_2 = 5 + \sin(t)$
- b $u_1 = 2 \cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(50\pi t)$
- c $u_1 = 2 \cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(50\pi(t - 2))$
- d $u_1 = 2 \cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(100\pi t)$

Opgave 11

Je kunt met een hoorn lage tonen spelen. Zo'n toon heeft bijvoorbeeld een frequentie van 80 Hz. De toon kun je voorstellen door een sinusoïde met een amplitude van 10.

Op een hobo speel je hogere tonen met een frequentie van bijvoorbeeld 400 Hz. Deze toon kun je je voorstellen door een sinusoïde met een amplitude van 5.

a Stel voor beide tonen een formule op voor de bijbehorende sinusoïde.



Figuur 4.5



Figuur 4.6

- b Iemand hoort de beide tonen tegelijk. Teken de grafiek van de toon die hij hoort. Zorg ervoor dat er precies twee periodes zichtbaar zijn.
- c De amplitudes zijn een maat voor de sterkte van het geluid. Welke amplitude heeft de grafiek die je bij b hebt gemaakt?

Opgave 12

Twee trillingen hebben alleen een faseverschil. Als voor de ene trilling geldt $y_1 = \sin(t)$ dan geldt voor de andere $y_2 = \sin(t - p)$. Een puntmassa trilt onder invloed van beide trillingen.

- a Waarom trilt deze puntmassa zuiver harmonisch?
- b Voor welke waarden van p trilt deze puntmassa met een amplitude van 2?
- c Voor welke waarden van p komt deze puntmassa niet in beweging?
- d Voor welke waarden van p trilt de puntmassa met een amplitude van 1,5?

Opgave 13

Een passerend schip veroorzaakt op een rivier een golf die tegen de wal wordt teruggekaatst. Gedurende enige tijd ondervindt een klein vissersbootje zowel invloed van de oorspronkelijke golf als van de teruggekaatste golf. Bij de terugkaatsing wordt door demping de amplitude kleiner en wel $\frac{2}{3}$ deel van de oorspronkelijke amplitude.

De teruggekaatste golf is het spiegelbeeld van de voortzetting van de oorspronkelijke golf. Stel je voor dat voor de oorspronkelijke golf geldt $h(t) = \sin(t)$ met t in radialen. Verder bevindt de dichtstbijzijnde golftop zich $\frac{5}{6}$ periode uit de wal.

- a Toon nu aan dat voor de combinatie van beide golven geldt: $h(t) = \sin(t) + \frac{2}{3} \sin\left(t + 3\frac{1}{3}\pi\right)$.
- b Toon aan dat de combinatie van beide golven een sinusoïde is. Welke amplitude heeft deze sinusoïde?

Toepassen

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. De hoogte van de toon hangt af van de lengte van de snaar: hoe vaker hij per seconde trilt, hoe hoger de toon. De 'kamertoon', de centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een harmonische trilling.

Bij deze A hoort een harmonische trilling volgens $u(t) = \sin(880 \cdot \pi t)$ waarin u de uitwijking van de trilling en t de tijd in seconden is.

In de applet zie je een geluidsspoor van de grondtoon A van 440 Hz (rood). Ook zie je een geluidsspoor van een A zoals die op een klarinet wordt gespeeld (blauw). Je kunt aan de grondtoon boventonen toevoegen en bekijken hoe het geluidsspoor verandert. Je kunt zo het geluidsspoor van de A op de klarinet nabootsen.



Figuur 4.7

Bekijk de applet

Opgave 14

Bekijk het trillingspatroon van een A van 440 Hz gespeeld op de klarinet.

- a Maak zelf dit trillingspatroon na met de applet.
- b Welke formule hoort er bij?

Opgave 15

Van een aangeslagen pianosnaar zijn de grondtoon en de eerste en de tweede boventoon hoorbaar. Voor de grondtoon geldt de formule $u_0 = \sin(880\pi t)$. De eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en een amplitude die half zo groot is. De tweede boventoon heeft een frequentie die drie keer zo groot is en een amplitude die net zo groot is als die van de grondtoon.

- a Het geluid dat deze snaar produceert ontstaat door deze trillingen op te tellen. Welke formule geldt voor de trilling van de snaar?
- b Waarom trilt de snaar niet zuiver harmonisch? Welke frequentie heeft de trilling?

Testen

Opgave 16

Een puntmassa beweegt onder invloed van twee zuiver harmonische trillingen. Laat door berekening zien in welk van de volgende gevallen de puntmassa zelf ook zuiver harmonisch trilt. Bepaal in die gevallen de frequentie en de amplitude van de trilling.

- a $u_1 = 5 \sin(t)$ en $u_2 = 10 + 5 \sin(t + 2)$
- b $u_1 = 5 \sin(t)$ en $u_2 = 10 + 5 \sin(2t)$
- c $u_1 = 5 \sin(220\pi t)$ en $u_2 = 10 + 3 \sin(220\pi t)$

2.5 Integralen

Inleiding

Je kunt nu functies met sinus, cosinus en tangens differentiëren. De afgeleiden zijn ook weer functies met sinus, cosinus en tangens. Maar dat betekent dat je ook beschikt over een aantal primitieven van goniometrische functies. En die kun je dan weer toepassen als je met dergelijke functies te maken hebt.

Je leert in dit onderwerp

- de primitieven van $\sin$, $\cos$ en $\tan$;
- deze primitieven gebruiken bij het berekenen van integralen.

Voorkennis

- werken met goniometrische functies;
- de afgeleiden van goniometrische functies berekenen;
- werken met integralen voor het berekenen van de lengte van krommen, de oppervlakte van vlakdelen, de inhoud van omwentelingslichamen, enzovoorts.

Verkennen

Opgave V1

Uit de afgeleiden van de goniometrische functies kun je een hele lijst met primitieven samenstellen.

- Welke primitieven hebben $f(x) = \sin(x)$ en $f(x) = \cos(x)$?
- Kun je een primitieve verzinnen van $f(x) = \cos^2(x)$?
- Licht toe dat $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ als primitieve heeft $F(x) = \tan(x) + c$.
- Kun je een primitieve verzinnen van $f(x) = \tan^2(x) + 1$?

Uitleg

Uit de afgeleiden van de goniometrische functies kun je een hele lijst met primitieven samenstellen.

- Als $f(x) = \sin(x)$ dan is $f'(x) = \cos(x)$.
Dus: als $f(x) = \cos(x)$ dan is $F(x) = \sin(x) + c$.
- Als $f(x) = \cos(x)$ dan is $f'(x) = -\sin(x)$.
Dus: als $f(x) = \sin(x)$ dan is $F(x) = -\cos(x) + c$.
- Als $f(x) = \tan(x)$ dan is $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Dus: als $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ dan is $F(x) = \tan(x) + c$.

- Een primitieve van $f(x) = \tan(x)$ is niet zo gemakkelijk te verzinnen.

Omdat $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ kun je door differentiëren nagaan dat $F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$ zo'n primitieve is.

Hiermee (en soms met de goniometrische formules) kun je ook primitieven vinden van iets lastiger goniometrische functies. Bijvoorbeeld is de primitieve van $f(x) = \sin(2x)$ gelijk aan $F(x) = \cos(2x) \cdot \frac{1}{2} + c = \frac{1}{2} \cos(2x) + c$.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Er worden primitieven bepaald van goniometrische functies.

- Hoe kun je elke primitieve controleren?
- Laat zien dat $F(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c$ de primitieven van $f(x) = \sin(2x)$ zijn.
- Welke van deze primitieven gaat door $(0,1)$?
- Welke primitieven heeft $g(x) = \cos(3x)$?

Opgave 2

Laat zien, dat $F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$ de primitieven zijn van $f(x) = \tan(x)$.

Opgave 3

Bepaal de volgende onbepaalde integralen.

- $\int \sin(4x) + 4 \cos(x) dx$
- $\int \cos(x) \cdot \tan(x) dx$
- $\int 1 - 2 \tan(t) dt$
- $\int 250 + 20 \sin(2\pi(t - 2)) dt$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Om te kunnen werken met integralen waarin goniometrische functies voorkomen heb je een lijst nodig met **primitieven van goniometrische functies**.

- Als $f(x) = \sin(x)$ dan is $F(x) = -\cos(x) + c$.
- Als $f(x) = \cos(x)$ dan is $F(x) = \sin(x) + c$.
- Als $f(x) = \tan(x)$ dan is $F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$.
- Als $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ dan is $F(x) = \tan(x) + c$.

Functies waarin de hierboven genoemde functies voorkomen kun je nu af en toe ook primitiveren. Maar omdat het aantal methoden dat je leert voor het primitiveren beperkt is, moet je bij het berekenen van een integraal nog regelmatig terugvallen op je grafische rekenmachine voor een benadering.

Soms kun je door het gebruik van de goniometrische formules een op het oog niet te primitiveren functie zo herleiden, dat primitiveren toch mogelijk is.

Voorbeeld 1

Primitiveer de volgende functies:

- $f(x) = \cos(3x)$
- $f(x) = 50 + 10 \sin\left(\frac{2\pi}{15}(x-5)\right)$
- $f(x) = \tan(2x)$
- $f(x) = \sin^2(x)$
- $f(x) = 1 + \tan^2(3x)$

Antwoord

Hier zie je hoe het primitiveren in zijn werk gaat. Soms moet je eerst de functie herleiden.

- $f(x) = \cos(3x)$ geeft $F(x) = \frac{1}{3} \sin(3x) + c$.
- $f(x) = 50 + 10 \sin\left(\frac{2\pi}{15}(x-5)\right)$ geeft

$$F(x) = 50x - 10 \cdot \frac{15}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{15}(x-5)\right) + c =$$

$$50x - \frac{75}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{15}(x-5)\right) + c.$$
- $f(x) = \tan(2x)$ geeft $F(x) = -\frac{1}{2} \ln|\cos(2x)| + c$.
- $f(x) = \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$ geeft

$$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + c.$$
- $f(x) = 1 + \tan^2(3x) = 1 + \frac{\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)} = \frac{\cos^2(3x)}{\cos^2(3x)} + \frac{\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)} =$

$$\frac{1}{\cos^2(3x)}$$
 geeft $F(x) = \frac{1}{3} \tan(3x) + c$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je van goniometrische functies primitieven kunt bepalen. Je hebt daar af en toe de goniometrische formules bij nodig. Primitiveer nu de volgende functies.

- $f(x) = 0,5 \sin(x) + 3 \cos(2x)$
- $f(x) = 2 + 4 \cos(0,4\pi x - 0,5\pi)$
- $f(x) = 3 \tan(0,5x)$
- $f(x) = \tan^2(x)$
- $f(x) = \cos^2(x)$
- $f(x) = 5 \sin(2x) \cos(2x)$

Opgave 5

Bepaal de volgende integralen met behulp van primitiveren.

- $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$
- $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$
- $\int_0^{10} 6 + 12 \sin(0,2\pi(x-2)) dx$
- $\int_0^1 2 \sin(\pi x) - \sin(0,5\pi x) dx$

e $\int_0^{\pi} \sin(t) \cos(2t) + \cos(t) \sin(2t) dt$

f $\int_0^{0,25\pi} \frac{3}{\cos^2(x)} dx$

Voorbeeld 2

Gegeven is op $[0, 2\pi]$ de functie f met $f(x) = \cos(x)$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de x -as en de grafiek van f .

Bereken de oppervlakte en de omtrek van V en de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door V om de x -as te wentelen.

Antwoord

Oppervlakte: $opp(V) = \int_{0,5\pi}^{1,5\pi} -\cos(x) dx = [-\sin(x)]_{0,5\pi}^{1,5\pi} = 2$.

(Merk op dat de integraal volgens de rekenmachine -2 is.)

Omtrek: $omt(V) = \pi + \int_{0,5\pi}^{1,5\pi} \sqrt{1 + \sin^2(x)} dx \approx 6,96$ (moet met de GR).

Inhoud: $I = \int_{0,5\pi}^{1,5\pi} \pi \cdot \cos^2(x) dx$.

Omdat $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, geldt: $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$.

De integraal wordt daarmee:

$$\int_{0,5\pi}^{1,5\pi} \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \right) dx = \left[\pi \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) \right) \right]_{0,5\pi}^{1,5\pi} = 0,5\pi^2.$$

Opgave 6

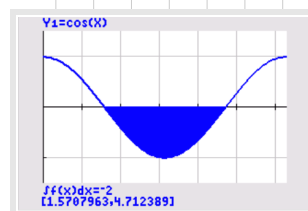
In **Voorbeeld 2** zie je de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ op $[0, 2\pi]$.

- Ga na dat $\int_0^{2\pi} \cos(x) dx = 0$.
- Hoe groot is de oppervlakte van alle vier de vlakdelen tussen de grafiek van f en de x -as op dit interval samen? Verklaar het verschil met het voorgaande antwoord.
- Bereken de oppervlakte van de vlakdelen tussen de grafiek en de x -as op $[0, \pi]$.

Opgave 7

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op $[0, \pi]$.

- Bereken met behulp van integreren de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek en de x -as.
- Bereken de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f op $[0, \pi]$ en de lijn $y = x$.
Het vlakdeel V wordt gewenteld om de x -as.
- Bereken met behulp van integreren de inhoud van het omwentelingslichaam dat daardoor ontstaat.



Figuur 5.1

Voorbeeld 3

Gegeven is op $[-\pi, \pi]$ de functie f met $f(x) = \frac{1}{\cos(\frac{1}{2}x)}$.

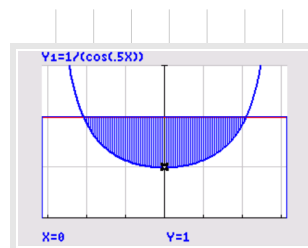
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de lijn $y = 2$ en de grafiek van f . Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door V om de x -as te wentelen.

Antwoord

De inhoud is:

$$I = \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \pi \cdot 2^2 dx - \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \pi \cdot \frac{1}{\cos^2(\frac{1}{2}x)} dx =$$

$$[\pi \cdot 4x]_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} + \left[\pi \cdot 2 \tan\left(\frac{1}{2}x\right) \right]_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \approx 30,9.$$



Figuur 5.2

Opgave 8

Bestudeer **Voorbeeld 3**.

- Voer zelf de berekening in het voorbeeld uit.
- Waarom is het niet eenvoudig om algebraïsch de inhoud te berekenen van het lichaam dat ontstaat door V om de y -as te wentelen?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ op $(0, \pi)$.

Bereken met behulp van primitiveren de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ te wentelen om de x -as.

Verwerken

Opgave 10

Bereken de volgende integralen met behulp van primitiveren.

- $\int_0^{\pi} \cos(0,5x) dx$
- $\int_0^{2\pi} \cos(x) dx$
- $\int_0^5 50 + 12 \cos(0,2\pi x) dx$
- $\int_0^{\pi} |\sin(2x)| dx$
- $\int_0^{\pi} \sin^2(t) dt$
- $\int_0^{0,25\pi} 0,5 \tan^2(x) dx$

Opgave 11

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(2x)$ en $g(x) = \cos(2x)$ op $[0, \pi]$. Beide grafieken sluiten een vlakdeel V in.

- Bereken met behulp van integreren de oppervlakte van V .
- Het kleinste vlakdeel W ingesloten door beide grafieken en de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$ wordt om de x -as gewenteld. Bereken met behulp van integreren de inhoud van het omwentelingslichaam dat daardoor ontstaat.

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \sin(2x) + \sqrt{3} \cos(2x) + p$ op het interval $[0, 2\pi]$.

- Breng de grafiek van f_0 in beeld op je grafische rekenmachine. Zorg er voor dat alle toppen zichtbaar zijn.
- Bereken met behulp van integreren de oppervlakte van alle vlakdelen ingesloten door de grafiek van f_0 en de x -as op dit interval samen.
- Voor welke waarde van p is de integraal van f_p op het gegeven interval gelijk aan 6?

Opgave 13

De grafiek van de functie $g(x) = 1 - \cos(0,2\pi x)$ ziet er op het interval $[0, 5]$ uit als één golf.

- Bereken de exacte oppervlakte van het gebied tussen deze golf en de x -as.
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de lengte van deze golf.

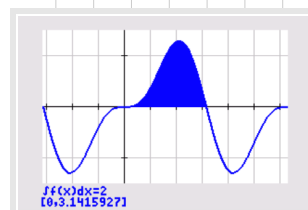
Opgave 14

Gegeven is de functie: $f(x) = \sin(x)(1 - \cos(x))$ op $[-\pi, 2\pi]$.

- Bepaal de primitieve van f .
- Toon aan dat $G(x) = -\cos(x) + \frac{1}{2}\cos^2(x)$ ook een primitieve is van f .

Verklaar het verschil met het antwoord bij a.

- In de figuur zie je een vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as. Bereken algebraïsch de oppervlakte ervan.



Figuur 5.3

Toepassen

Opgave 15: Twee benaderingen van $\sin(x)$

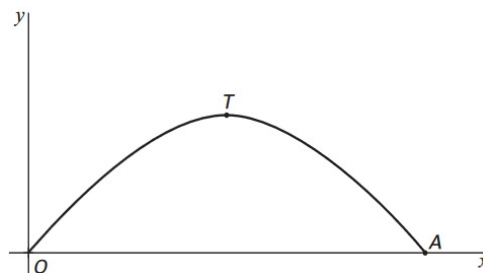
Met domein $[0, \pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin(x)$. De grafiek van f snijdt de x -as in O en A en heeft als top T . Gegeven is verder de tweedegraadsfunctie $g(x) = ax(\pi - x)$, eveneens met domein $[0, \pi]$. Neem $a = \frac{4}{\pi^2}$. De grafieken van f en g lijken dan op elkaar.

- Toon aan dat ook de grafiek van g door O , A en T gaat.
- In O is de helling van de grafiek van g groter dan de helling van de grafiek van f . Toon dit aan met behulp van differentiëren.

Een andere benadering voor de grafiek van f krijg je als je a zodanig kiest dat geldt: $\int_0^\pi (g(x) - f(x)) dx = 0$.

- Bereken in dit geval de exacte waarde van a .

(bron: vwo examen wiskunde B in 2005, tweede tijdvak, opgave 3)



Figuur 5.4

Testen

Opgave 16

Bereken de volgende integralen met behulp van primitiveren.

- a $\int_0^4 10 - 20 \cos(\pi x) \, dx$
- b $\int_0^\pi x - \cos(2x) \, dx$
- c $\int_0^\pi x - \cos^2(x) \, dx$
- d $\int_0^{0,25\pi} \tan^2(x) - 1 \, dx$

Opgave 17

Voor $0 < a < \frac{1}{2}\pi$ is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \sin(x) + a \sin(2x)$ op het domein $[0, \pi]$.

Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f_a en de x -as, onafhankelijk is van a .

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het primitiveren van goniometrische functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Goniometrische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- goniometrische functie — de functie $f(x) = \tan(x)$
- goniometrische formules: symmetrieformules, verdubbelingsformules, somformules, formules van Simpson — verbanden tussen sin en cos
- afgeleiden van sin, cos en tan
- harmonische trilling — frequentie en trillingstijd
- primitieven van goniometrische functies

Activiteitenlijst

- werken met goniometrische functies (o.a. $f(x) = \tan(x)$ op de GR
- de goniometrische formules afleiden — de goniometrische formules gebruiken bij het herleiden van goniometrische functies en het oplossen van vergelijkingen
- de afgeleide van een goniometrische functie bepalen en toepassen
- bepalen of een som van harmonische trillingen weer een harmonische trilling is
- de primitieve van een goniometrische functie bepalen en toepassen

Achtergronden

De Franse wis- en natuurkundige **Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)** stelde dat je elke trilling kunt opbouwen door harmonische trillingen (sinusoïden dus) op te tellen. Sterker nog, hij beweerde dat je alle periodieke functies van één variabele kunt schrijven als de som van een serie sinusoïden.

Latere wiskundigen ontdekten dat dit iets te optimistisch was, er zijn bepaalde voorwaarden waaraan de functie moet voldoen.

Fourier bouwde daarbij voort op werk van **Daniël Bernoulli (1700–1782)** die in 1753 afleidde dat de vorm van een snaar die op zeker tijdstip in trilling wordt gebracht is te beschrijven is door: $f(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x) + \dots$

Tegenwoordig is de Fourieranalyse die hierop is gebaseerd een belangrijk stuk wiskundige gereedschap bij het oplossen van zogenaamde differentiaalvergelijkingen. Toepassingen liggen vooral in de elektronica en de optica.



Figuur 6.1 Joseph Fourier

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) + 1$ en

$$g(x) = 1 + \sin(x).$$

Beide hebben ze als domein $[0, 2\pi]$.

Verder is gegeven de functie h met $h(x) = f(x) - g(x)$.

- Toon aan dat de grafiek van h een zuivere sinusoid is. Bereken de amplitude en de evenwichtsstand van h .
- Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van f en g .
- Los algebraïsch op: $f(x) < g(x)$.

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef alleen waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

- $\sin(x) - \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = 0$
- $\sin(x) - \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = 0,5$
- $\sin^2(x) = 1 - 2\cos(2x)$
- $\tan(x) = \cos(x)$

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(2x) + \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ met domein $[0, 2\pi]$.

- Waarom is de grafiek van f geen zuivere sinusoid?
- Los algebraïsch op: $f(x) \leq 0$.
- Bereken de hoek waaronder de grafiek van f de y -as snijdt als je op beide assen dezelfde schaalverdeling gebruikt.

Opgave 4

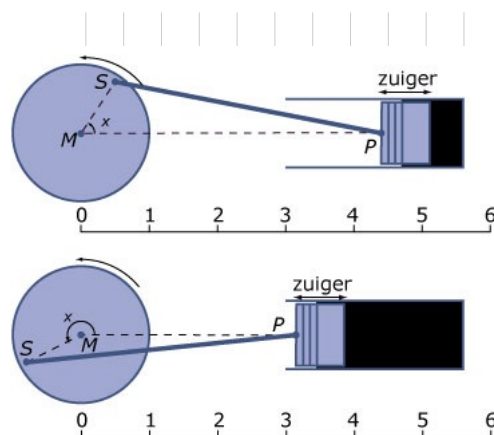
Een zuiger is door middel van een drijfstaag verbonden met een draaiende schijf. Als de schijf draait, beweegt de zuiger horizontaal heen en weer. M is het middelpunt van de schijf. S is de (scharnierende) verbinding van de drijfstaag met de schijf. Bij punt P is de drijfstaag scharnierend met de zuiger verbonden. $MS = 1$ en $PS = 4$. Stel de grootte van de hoek PMS is x radialen. Dan is de afstand PM afhankelijk van de hoekgrootte x . Er geldt: $PM = a(x)$. Voor elke hoekgrootte x geldt:

$$a(x) = \cos(x) + \sqrt{16 - \sin^2(x)}.$$

- a Bewijs deze formule voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

In de grafiek van a op het domein $[0, 2\pi]$ zie je dat het minimum van $a(x)$ gelijk is aan 3 en het maximum gelijk is aan 5.

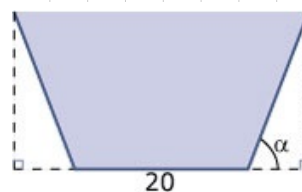
- b Hoe kun je dat berekenen aan de hand van de tekening van de zuiger?
- c Bij één rondgang van de schijf zal de lengte PM op twee momenten gelijk zijn aan de lengte van de drijfstaag PS . Hoe groot zijn de hoeken PMS waarbij zich dat voordoet? Geef je antwoord in radialen en in één decimaal nauwkeurig.
- d De afstand $a(x)$ kun je benaderen door de formule $b(x) = 4 + \cos(x)$. Bereken algebraïsch voor welke x het verschil tussen $b(x)$ en $a(x)$ maximaal is en bereken dit exact.



Figuur 6.2

Opgave 5

Het Ministerie van Ontwikkelingssamenwerking geeft een bedrijf opdracht om goten te ontwikkelen voor een bevoeiingssysteem in een ontwikkelingsland. Deze goten krijgen de vorm van langwerpige bakken met twee opstaande randen die een hoek van α (in radialen) maken met de horizontale bodem. De dwarsdoorsnede van de goot is een gelijkbenig trapezium, de breedte van de bodem is net als die van de opstaande randen 20 cm.

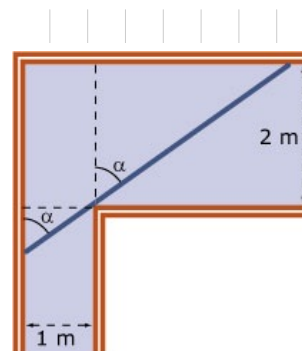


Figuur 6.3

- a Hoeveel liter water kan de goot per meter verwerken als $\alpha = 0,25\pi$?
- b Toon aan dat de hoeveelheid water (in L) die de goot per meter kan verwerken gelijk is aan: $W(\alpha) = 40 \sin(\alpha) + 40 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$.
- c Bereken de waarde van α waarvoor W zo groot mogelijk is in één decimaal nauwkeurig.
- d Is dit zonder meer de meest gunstige manier van buigen? Verklaar je antwoord.

Opgave 6

Door een smalle gang moet een houten paneel van 400 cm bij 90 cm worden vervoerd. De dikte van het paneel is te verwaarlozen. Je ziet in de figuur een bovenaanzicht van de hoek die er in de gang zit. Het paneel wordt tijdens het vervoer verticaal gehouden. De gang is 2,80 m hoog. De vraag is nu of het paneel de bocht kan maken. Stel je voor dat l de grootst mogelijke lengte is die nog in de bocht past bij een bepaalde hoek α .



Figuur 6.4

- Laat zien dat uit deze tekening volgt: $l = \frac{1}{\sin(\alpha)} + \frac{2}{\cos(\alpha)}$.
Hierin is α in radialen met $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$.
- Laat zien dat l een minimale waarde heeft. Welke betekenis heeft die waarde?
- Kan een paneel met een lengte van 4 m deze bocht halen?

Opgave 7

Gegeven is de functie f door $f(x) = \cos^2(0,5x)$ met domein $[0, \pi]$.

- Bereken de exacte oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafiek en de beide coördinaatassen.
- Bereken het exacte volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door V om de x -as te wentelen.
- Bereken de lengte van het deel van de grafiek binnen dit domein in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 8: Zwevingen

Als je twee tonen met vrijwel dezelfde frequentie tegelijk laat horen merk je het (onaangename) verschijnsel **zweving** op. De applet maakt meteen duidelijk hoe dit werkt: de rode grafiek is een A van 440 Hz, de blauwe grafiek is een toon die daar v.w.b. de frequentie vlak bij zit. Je ziet hoe hun optelling een grafiek oplevert die een frequentie heeft die weinig van de A verschilt, maar waarvan de amplitude toeneemt en weer afneemt...

Bekijk de applet: Zwevingen

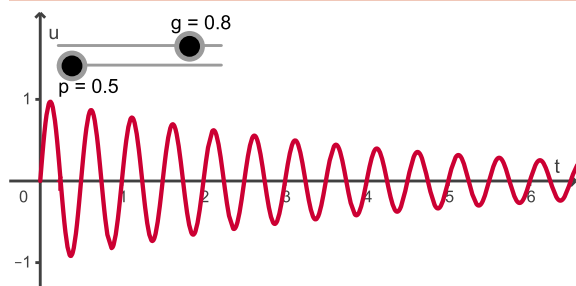
Stel in de applet naast de trilling $u_1(t) = \sin(2\pi \cdot 440 \cdot t)$ de trilling $u_2(t) = \sin(2\pi \cdot 430 \cdot t)$ in, met t in seconden.

- Stel je hoort deze trillingen tegelijk. Bekijk de grafiek van de resulterende trilling. Waaraan herken je de zweving?
- De amplitude van de trilling is een maat voor de sterkte van het geluid. Tussen welke waarden zweeft de resulterende trilling? Welk verband is er met de amplitudes van de twee afzonderlijke harmonische trillingen?
- Onderzoek of zweving zich altijd voordoet als de frequenties van twee trillingen verschillen. Als dat niet het geval is, probeer dan vast te leggen wanneer zweving zich wel voordoet. Is er verband tussen de waarden waartussen de geluidssterkte zweeft en de amplitudes van de afzonderlijke harmonische trillingen?

Opgave 9: Gedempte trillingen

Een gedempte trilling is een trilling waarvan de amplitude met de tijd afneemt. In praktische situaties heb je bijna altijd met demping te maken: wegstervend geluid, een steeds minder uitslaande slinger, een veer die steeds minder trilt...

Bekijk de applet: Gedempte trilling.



Figuur 6.5

Bij een trillende snaar bijvoorbeeld wordt door de luchtweerstand de amplitude steeds iets kleiner. Op zeker moment zo klein, dat de toon niet meer te horen is. De amplitude is dan een dalende functie van t .

$$u(t) = g^t \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right)$$

Bekijk hoe de demping afhangt van g en de 'periode' p . De amplitude is $A(t) = g^t$ met $0 < g < 1$.

- a** Waarom is exponentiële afname in praktijksituaties van de amplitude voor de hand liggender dan lineaire afname? Beschrijf een paar van die praktijksituaties.

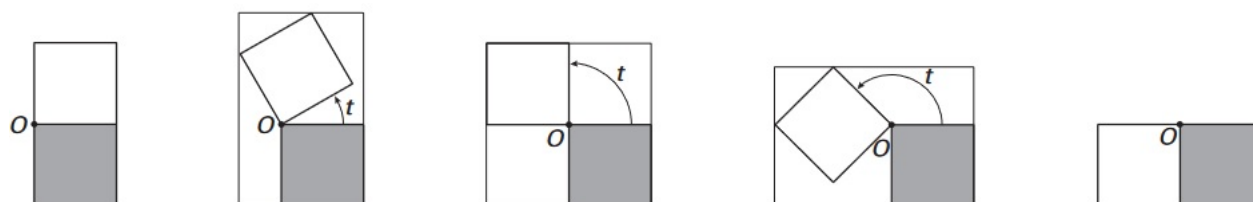
Neem aan dat $g = 0,8$.

- b** Na hoeveel tijd is de amplitude dan telkens gehalveerd?
- c** Bij een periode van $p = 1$ heeft $u(t)$ een maximum op $t = 0,25$. Hoe groot is dit maximum? Is er een maximum dat precies de helft van dit maximum is? Zo ja, op welk tijdstip?

Examen

Opgave 10: Twee scharnierende vierkanten

Twee vierkanten, beide met zijde 1, hebben het hoekpunt O gemeenschappelijk. Het onderste vierkant ligt vast. Het bovenste vierkant wordt om O gedraaid; t is de draaihoek in radialen. In de volgende figuur zijn tussen de begin- en eindstand drie tussenstanden getekend. Om de twee vierkanten is steeds een zo klein mogelijke rechthoek getekend, met twee zijden langs het vaste vierkant.

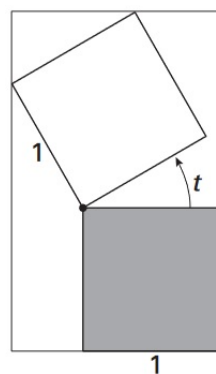


Figuur 6.6

De oppervlakte R van de omhullende rechthoek is een functie van de draaihoek t .

Voor elke waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ geldt:

$R(t) = (1 + \sin(t))(1 + \sin(t) + \cos(t))$. In de figuur hiernaast is de situatie getekend voor een waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.



Figuur 6.7

- Toon de juistheid van de formule aan voor elke waarde van $t = \frac{1}{4}\pi$.
- Toon de juistheid van de formule aan voor elke waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.
- Teken de posities van de vierkantjes waarvoor $R(t)$ maximaal is. Licht je werkwijze toe.
- Toon met behulp van differentiëren aan dat $R'(0) = 3$.

(bron: examen wiskunde B vwo 2003, eerste tijdvak)

Opgave 11: Een verzameling functies

Op het domein $[0, 2\pi]$ zijn gegeven de functies:

$f_n(x) = 1 + \sin^2(x) + \cos(nx)$ waarbij n een positief geheel getal is. De grafiek van f_n gaat voor bepaalde waarden van n door het punt $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4})$.

Als je de grafiek van f_2 door de GR laat tekenen, lijkt deze op een sinusoïde. Er geldt inderdaad $f_2(x) = a + b \sin(c(x - d))$.

- Geef een mogelijke combinatie van waarden voor a , b , c en d . Licht je antwoord toe.
- Onderzoek voor welke waarden van n tussen 0 en 50 dit geldt.
- $f_4(x)$ is te schrijven als $f_4(x) = 1,5 - 0,5 \cos(2x) + \cos(4x)$. Toon aan dat dit juist is.

Gegeven is de rechthoek $OABC$ met $A(2\pi, 0)$ en $C(0, 3)$. De grafiek van f_4 verdeelt deze rechthoek in twee gebieden.

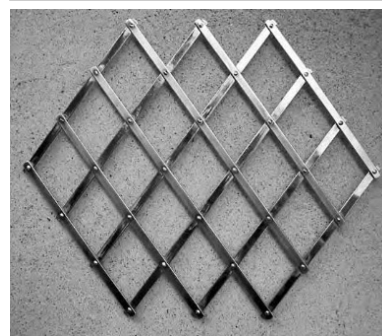
- Toon aan met behulp van integreren dat deze twee gebieden exact dezelfde oppervlakte hebben.

(bron: examen wiskunde B vwo 2004, eerste tijdvak)

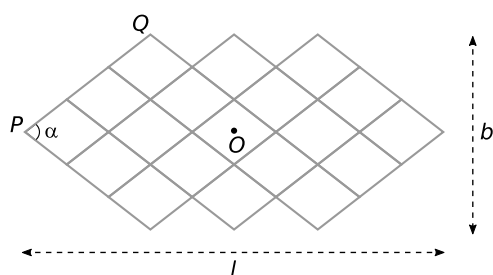
Opgave 12: Onderzetter

Een bepaalde onderzetter bestaat uit staven die onderling kunnen scharnieren. Deze onderzetter heeft 19 gelijke ruiten.

In een wiskundig model van deze onderzetter worden de breedte en de dikte van de staven verwaarloosd. Het linker scharnierpunt van het model is P , het scharnierpunt linksboven Q en het midden van de middelste ruit is O . De grootte van de binnenhoek bij P in radialen is α met $0 \leq \alpha \leq \pi$.



Figuur 6.8



Figuur 6.9

Neem aan dat de lengte van een zijde van elke ruit 5 cm is. De lengte l en de breedte b van het model zijn functies van α . Er geldt:

$$l = 50 \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \text{ en } b = 30 \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right).$$

a Toon aan dat de formules voor l en b juist zijn.

b Bereken exact de waarde van b als $l = 40$ cm.

Als we α van 0 tot π laten toenemen, zal b toenemen en l afnemen.

c Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van α de breedte even snel toeneemt als de lengte l afneemt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

d Toon aan dat $OQ = \sqrt{100 + 125 \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$.

Het model van de onderzetter kan zodanig gescharnierd worden dat zes van de acht buitenste scharnierpunten op één cirkel met middelpunt O liggen.

e Bereken voor welke waarde van α dit het geval is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

(naar: examen wiskunde B vwo 2010, eerste tijdvak)

a

afgeleide van de g -logaritme **26**

afgeleide van de exponentiële functie **18**

afgeleide van de natuurlijke logaritmische functie **26**

amplitude **94**

d

differentiëren van goniometrische functies **86**

dubbellogaritmisch papier **36**

e

enkellogaritmisch papier **36**

exponentiële groeimodel **36**

f

formules van simpson **78**

faseverschil **94**

frequentie **94**

g

geremd exponentieel groeimodel **36**

getal e **8**

goniometrische formules **78**

goniometrische functies **67**

h

harmonische trilling **94**

m

machtsfunctie **35, 36**

n

natuurlijke groeifactor **8**

natuurlijke logaritme **9**

p

periode **94**

primitieven van exponentiële en logaritmische functies **45**

primitieven van goniometrische functies **101**

primitieven van machtsfuncties **45**

s

somformules **78**

symmetrieformules **78**

t

tangensfunctie **67**

trillingstijd **94**

v

verbanden tussen $\sin$ en $\cos$ **78**

verdubbelingsformules **78**

veranderen van grondtal **18**

w

warmtewet van newton **13**

z

zweving **110**

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst.

De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het .

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

15. Exponentiële en logaritmische functies

16. Goniometrische functies



www.math4all.nl

