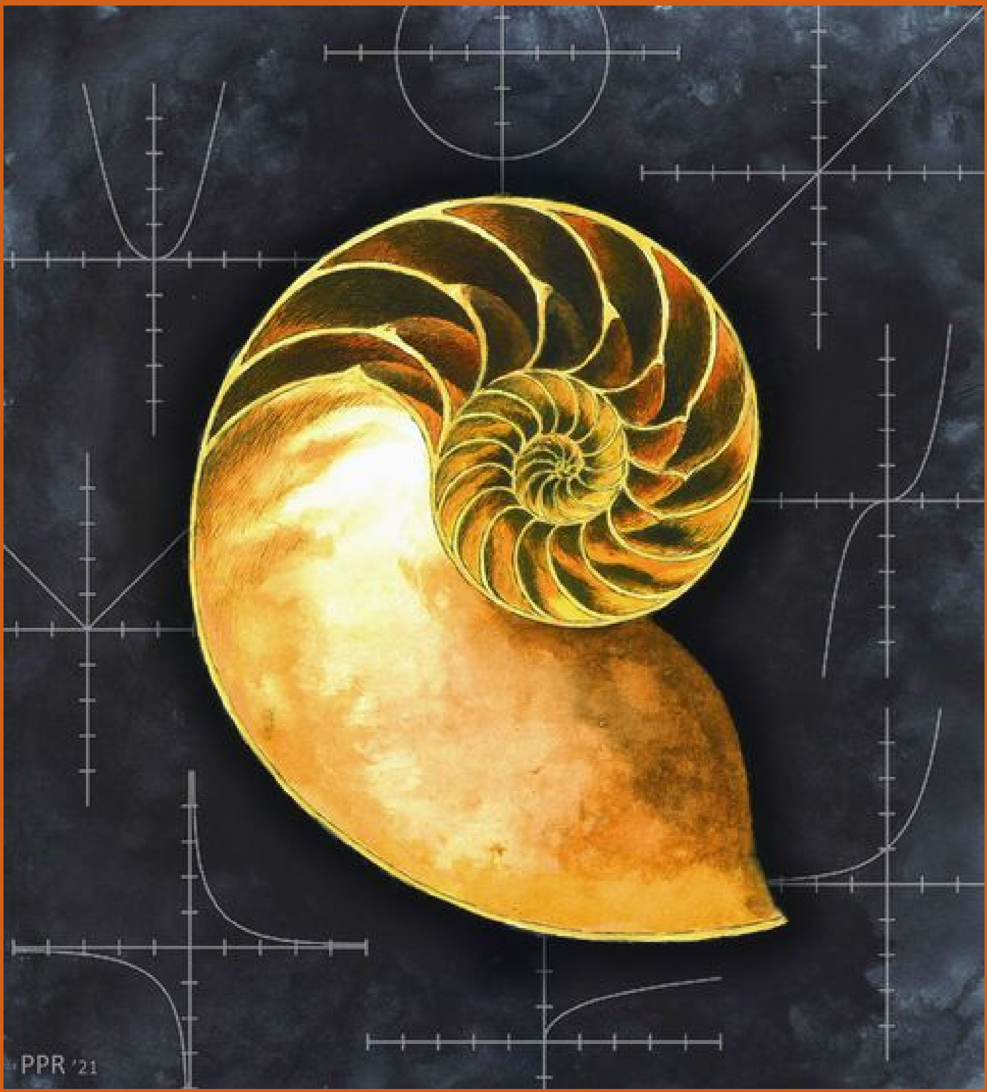
Wiskunde A

6 VWO

Katern 2



Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

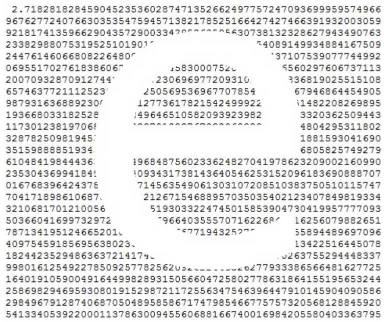
1

Exponentiële en logaritmische functies

1.1 Het getal e

Inleiding

Je kunt functies van de vorm $f(x) = g^x$ nog niet differentiëren. Daar ga je nu wat aan doen. Je kunt dan tenminste iets zeggen over de veranderingssnelheid van groeiprocessen. Bij het differentiëren van exponentiële functies speelt het getal e een belangrijke rol. Daarmee ga je dan ook uitgebreid kennis maken.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van exponentiële functies bepalen;
- het getal e gebruiken, ook bij het bepalen van zo'n afgeleide.

Voorkennis

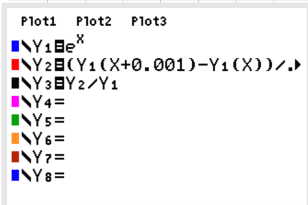
- exponenten en logaritmen gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Met je grafische rekenmachine kun je een functie $f(x)$ en een benadering voor de afgeleide van deze functie vergelijken. Daarbij maak je gebruik van het feit dat $f'(x)$ kan worden benaderd door de veranderingssnelheid bij een hele kleine toename van x.

Voer in je grafische rekenmachine in:
$y_1 = 2^x$
$y_2 = (y_1(x + 0{,}001) - y_1(x))/0{,}001$
$y_3 = y_2/y_1$
Gebruik de standaardinstellingen van het venster.



Figuur 1.2

a Leg uit dat y_2 een benadering is van de afgeleide van y_1.

b Wat valt op als je de grafiek van y_2 vergelijkt met die van y_1?

c Hoe kun je nu de grafiek van y_3 verklaren?

d Welke conclusie trek je? Geldt dit ook voor $f(x) = 3^x$? En voor andere exponentiële functies?

e Geldt dit ook voor $f(x) = x^2$? En voor $f(x) = x^3$?

Uitleg

Bekijk de applet: het getal e

Bij exponentiële groei gaat het om functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Neem je $b = f(0) = 1$, dan hebben deze functies

de vorm $f(x) = g^x$. Ga na dat de helling van de grafiek, de groeisnelheid per eenheid, af hangt van de grootte van g. Neem je bijvoorbeeld $x = 1$, dan zie je de helling groter worden als g groter wordt.
Neem je bijvoorbeeld $g = 2$ dan zie je dat de helling voor elke x recht evenredig is met $f(x)$: $f'(x) = c \cdot g^x$.

- Voor $g = 2$ geldt: $c \approx 0{,}69$.
  Dus als $f(x) = 2^x$ dan is $f'(x) \approx 0{,}69 \cdot 2^x$.
- Voor $g = 3$ geldt: $c \approx 1{,}10$.
  Dus als $f(x) = 3^x$ dan is $f'(x) \approx 1{,}10 \cdot 3^x$.

Er lijkt een waarde van g te bestaan (tussen 2 en 3) waarvoor geldt dat $c = 1$. Ga na, dat dit bij $g \approx 2{,}7$ het geval is. Het getal waarbij dit PRECIES het geval is, is net zo'n bijzonder getal als π. Dit getal heeft de letter e gekregen: e $\approx 2{,}71828...$
Voor dit getal geldt: als $f(x) = \text{e}^x$, dan is $f'(x) = \text{e}^x$.

Met $f(x) = \text{e}^x$ reken je net als met alle exponentiële functies. Er hoort dus ook een logaritme met grondtal e bij...

Opgave 1

Lees eerst de **Uitleg** goed door. In het algemeen geldt: Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = c \cdot g^x$.

a Bekijk de grafiek van $f(x) = 3^x$ en (een benadering van) zijn afgeleide. Laat zien dat $f'(x) \approx 1{,}10 \cdot 3^x$, dus $c \approx 1{,}10$.

b Bekijk de grafiek van $f(x) = 2{,}5^x$ en (een benadering van) zijn afgeleide. Bepaal nu zelf de bijpassende waarde van c.

c Doe ditzelfde ook voor $f(x) = 2{,}7^x$ en $f(x) = 2{,}8^x$.

d Is er een getal g waarvoor $c = 1$? Hoe groot is dit getal ongeveer?

Opgave 2

Gegeven de functie $f(x) = g^x$. De verandering van f op een klein interval $[x, x+h]$ is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g^{x+h} - g^x}{h}$.

a Leg dat met behulp van een figuur uit. (Maak eventueel een eigen applet in GeoGebra!)

b Laat zien, dat $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g^h - 1}{h} \cdot g^x$.

c Waarom kun je hieruit afleiden dat $f'(x) = c \cdot g^x$?

d Neem $g = \text{e}$ en bepaal met behulp van het antwoord van b de waarde van e.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \text{e}^x$.

a Hoe voer je die grafiek in je grafische rekenmachine in? Welke asymptoot heeft die grafiek?

b Waar in de grafiek vind je het getal e?

c Los met je grafische rekenmachine op $\text{e}^x = 10$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De exacte oplossing van $\text{e}^x = 10$ is gelijk aan $x = {}^{\text{e}}\log(10)$.

d Laat zien dat je zo dezelfde waarde voor x vindt als bij c.

In plaats van $x = {}^{\mathrm{e}}\log(...)$ wordt in de wiskunde $\ln(...)$ gebruikt. Je rekenmachine heeft een speciale toets voor $\ln(...)$.

e Los nu zowel exact als in drie decimalen nauwkeurig op: $\mathrm{e}^x = 20$.

f Los op: $\frac{1}{50} \leq \mathrm{e}^x \leq 50$. Geef benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

g Welk hellingsgetal heeft de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$ in het punt $(1, \mathrm{e})$? Stel een vergelijking op van de raaklijn in dat punt.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

De afgeleide van de exponentiële functie $f(x) = g^x$ vind je door de functie met een factor afhankelijk van g te vermenigvuldigen. Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = c_g \cdot g^x$.

Er bestaat een waarde van g waarvoor geldt dat $c_g = 1$.

Deze **natuurlijke groeifactor** is het **getal e**.
Een benadering voor e is: $\mathrm{e} \approx 2{,}71828...$

Als $f(x) = \mathrm{e}^x$, dan is $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

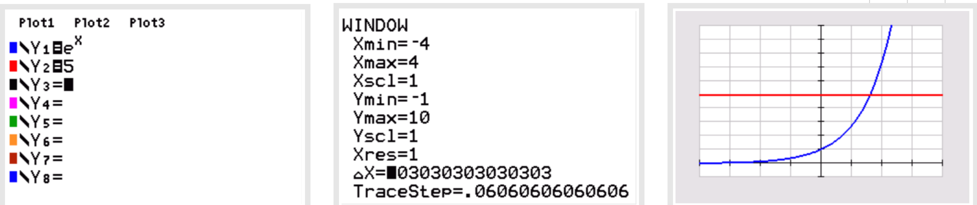
Met $f(x) = \mathrm{e}^x$ reken je net als met alle exponentiële functies. Op je rekenmachine zit er een speciale toets voor. En er hoort ook een logaritme met grondtal e bij...

Ook nu is $\mathrm{e}^x = a$ gelijkwaardig met $x = {}^{\mathrm{e}}\log(a)$.
In plaats van ${}^{\mathrm{e}}\log(a)$ schrijf je $\ln(a)$.
$\ln(a)$ is de **natuurlijke logaritme** van a.
De functies $y = \mathrm{e}^x$ en $y = \ln(x)$ zijn elkaars inverse functies. De grafieken daarvan zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Voorbeeld 1

Maak met je grafische rekenmachine de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.
Los op: $f(x) \leq 5$.

Antwoord



Figuur 1.3

$f'(x) = \mathrm{e}^x$, dus $f'(2) = \mathrm{e}^2$.
Verder is $f(2) = \mathrm{e}^2$.
De vergelijking van de raaklijn is daarom $y = \mathrm{e}^2 x - \mathrm{e}^2$.

Om de ongelijkheid op te lossen, moet je de waarden van x bepalen waarvoor $\mathrm{e}^x = 5$, dit geeft: $x = \ln(5)$.

De oplossing van de gegeven ongelijkheid is $x \leq \ln(5)$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Stel de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$ op.

b Bekijk de oplossing van de gegeven ongelijkheid. Ga met behulp van de grafiek van f na dat deze juist is.

c Los op: $f(x) \leq 20$.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $2^x = \frac{1}{8}$

b $\mathrm{e}^x = \frac{1}{\mathrm{e}^3}$

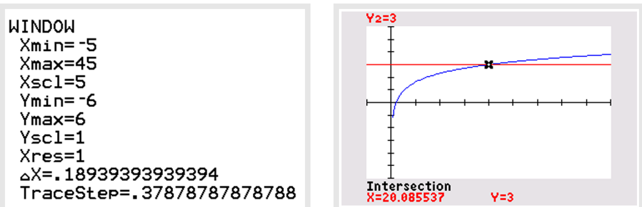
c $5\,\mathrm{e}^x = 125$

d $8\,\mathrm{e}^x = \left(2\sqrt{\mathrm{e}}\right)^3$

Voorbeeld 2

Bekijk met je grafische rekenmachine de grafiek van $f(x) = \ln(x)$. Bepaal de karakteristieken van f en los op: $f(x) \leq 3$.

Antwoord



Figuur 1.4

Omdat $\ln(x) = {}^{\mathrm{e}}\log(x)$ moet ook nu $x > 0$.
$D_f = \langle 0 \rightarrow \rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$.
De verticale asymptoot is $x = 0$.

$f(x) = \ln(x) = 3$ geeft $x = \mathrm{e}^3$ want de e-macht is de terugrekenfunctie van de natuurlijke logaritme.
Uit de grafiek lees je de oplossing van de ongelijkheid af: $0 < x \leq \mathrm{e}^3$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Waar in de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ vind je het getal e?

b Leg uit hoe je het domein en het bereik van f kunt afleiden uit het domein en het bereik van $g(x) = \mathrm{e}^x$.

c Voor welke waarde van x is $\ln(x) = 5$? Geef je antwoord exact en in één decimaal nauwkeurig.

d Los op: $-5 \leq \ln(x) \leq 5$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 2\text{e}^{2x} - 3\text{e}^{x}$.
Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f.

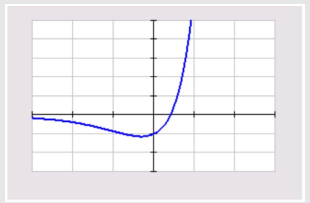
Antwoord

$f'(x) = 4\text{e}^{2x} - 3\text{e}^{x} = 0$ als $\text{e}^{x}(4\text{e}^{x} - 3) = 0$, dus $\text{e}^{x} = 0 \vee \text{e}^{x} = 0{,}75$.
Hieruit volgt: $x = \ln(0{,}75)$.

Aan de grafiek van f zie je dat er een minimum zit bij $x = \ln(0{,}75)$.

Nu is $f(0{,}75) = 2 \cdot \left(\text{e}^{\ln(0{,}75)}\right)^2 - 3\text{e}^{\ln(0{,}75)} = -1{,}125$.

En dus is: $\text{B}_f = [-1{,}125; \rightarrow\rangle$.



Figuur 1.5

Opgave 7

Bepaal de afgeleide van de volgende functies. Maak gebruik van alle bekende differentieerregels. Bepaal ook het bereik van f. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 3**.

a $f(x) = 100 - 2 \cdot \text{e}^{x}$

b $f(x) = \text{e}^{3x}$

c $f(x) = \text{e}^{3-x}$

d $f(x) = x\,\text{e}^{x}$

e $f(x) = \frac{x}{\text{e}^{x}}$

f $f(x) = \text{e}^{x^2}$

Opgave 8

Los algebraïsch op en geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $\text{e}^{2x} = 0{,}05$

b $\ln(x) = 2{,}06$

c $3\text{e}^{4x} = 10$

Opgave 9

Het is nuttig om de rekenregels voor exponentiële en logaritmische functies nog een keer te oefenen. Nu gebruik je daarbij (ook) het nieuwe grondtal e. Zoek ze eventueel eerst op (het wordt trouwens tijd voor een eigen formuleoverzicht).

Druk bij de volgende formules y uit in x en vereenvoudig de uitdrukking.

a $\text{e}^{y} = 2 \cdot \text{e}^{x}$

b $2 \cdot \text{e}^{2y} = x^3$

c $x = 2 \cdot \ln(y) + 3$

d $x = 2 \cdot \ln(y + 3)$

e $\ln(y) + 2 \cdot \ln(x) = 1$

f $(\ln(y) + 2) \cdot \ln(x) = 1$

g $\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)^{y} = 4x$

h $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{y} = 4\,\mathrm{e}^{x}$

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} - 2$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?

b Bereken met behulp van logaritmen het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

c Bepaal de afgeleide van f en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

d Los op: $f(x) < -1$.

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = 4\ln(-0{,}5x) - 2$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?

b Schrijf het domein en het bereik van f op.

c Bereken met behulp van exponenten het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

d Los op: $f(x) < -1$.

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op en benader zo nodig de antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

a $\mathrm{e}^{x} = 3$

b $\mathrm{e} \cdot x = 3$

c $\ln(x) = 3$

d $\log(x) = 3$

e $2 \cdot \mathrm{e}^{0{,}1x - 5} = 40$

f $2\ln(0{,}1x - 5) = 40$

Opgave 13

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op en benader zo nodig de antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

a $\mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{x-6} = 1$

b $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x-6} = 0$

c $\ln(2x) - \ln(x - 6) = 1$

d $\ln(2x) \cdot \ln(x - 6) = 0$

e $3\,\mathrm{e}^{x} = 15\,\mathrm{e}^{2-x}$

Opgave 14

Druk N zo eenvoudig mogelijk uit in t:

a $\ln(N) = 2 \cdot \ln(t) - 3$

b $\log(N) = 2 \cdot \log(t) - 3$

c $\mathrm{e}^{2N} = t + 2$

d $10^{2N} = t + 2$

e $\ln(N) = 2t - 3$

f $\mathrm{e}^{t} = 2N - 3$

Toepassen

Als een kop thee of een kop koffie een tijdje in de kamer op tafel blijft staan, koelt de inhoud langzaam af. Maar ze wordt nooit kouder dan de temperatuur in de kamer. Hoe verloopt die afkoeling precies?

Als een fles melk uit de koelkast wordt gehaald en een tijdje in een warmere kamer staat, warmt de melk langzaam op. Maar ze wordt nooit warmer dan de kamertemperatuur. Hoe verloopt die opwarming precies?

Volgens de warmtewet van Newton is de snelheid waarmee de temperatuur verandert recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

Figuur 1.6

Opgave 15

Een kop koffie uit een automaat heeft een temperatuur van 80 °C op het moment dat hij wordt ingeschonken. Hij koelt af volgens de formule:

$T(t) = 20 + 60 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}22t}$

Hierin is T de temperatuur van de koffie en t de tijd in minuten vanaf het moment van inschenken.

a Ga na dat de koffie volgens de formule bij het inschenken een temperatuur van 80 °C heeft.

b Hoeveel bedraagt de omgevingstemperatuur?

c Laat met behulp van een berekening zien dat de gegeven functie T aan de warmtewet van Newton voldoet.

d Hoe kun je aan de afgeleide van T zien dat er inderdaad van afkoeling sprake is?

Opgave 16

Een glas melk heeft een temperatuur van 6 °C op het moment dat het uit de koelkast komt. De melk warmt op volgens de formule:

$T(t) = 20 - 14 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05t}$

Hierin is T de temperatuur van de melk en t de tijd in minuten vanaf het moment dat het glas uit de koelkast komt.

a Ga na dat de melk volgens de formule bij het inschenken een temperatuur van 6 °C heeft.

b Na hoeveel minuten is de melk opgewarmd tot 15 °C?

c Laat met behulp van een berekening zien dat de gegeven functie T aan de warmtewet van Newton voldoet.

d Hoe kun je aan de afgeleide van T zien dat er van opwarming sprake is?

Testen

Opgave 17

Gegeven is de functie $f(x) = 8 - 4\,\mathrm{e}^{x}$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?

b Bereken met behulp van logaritmen het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

c Bepaal de afgeleide van f en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

d Los op: $f(x) \geq 2$.

Opgave 18

Gegeven is de functie $g(x) = 8 - 4\ln(x)$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?

b Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafiek van g met de x-as.

c Los op: $g(x) < 2$.

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $10\,\mathrm{e}^{x-2} + 5 = 50$

b $\ln(x) + \ln(x+2) = 1$

Opgave 20

Differentieer:

a $f(x) = \mathrm{e}^{x} - 3\,\mathrm{e}^{2x}$

b $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x}$

1.2 Exponentiële functies

Inleiding

Je hebt het getal e leren kennen en de natuurlijke logaritme.
Je kunt nu functies van de vorm $f(x) = \text{e}^x$ differentiëren. Maar je wilt ook $f(x) = g^x$ en alle functies waarin g^x in het voorschrift voorkomt kunnen differentiëren. Dan kun je van dit soort functies de karakteristieken berekenen met behulp van de afgeleide en de tweede afgeleide.

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van $f(x) = g^x$ bepalen;
- de regels voor het differentiëren toepassen op functies waarin de onbekende in de exponent voorkomt;
- van dergelijke functies de hellingen, de extremen en de buigpunten berekenen.

Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken, ook met grondtal e;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- de afgeleide van $f(x) = \text{e}^x$ bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt $f(x) = 2^x$ differentiëren.
Je weet dat de afgeleide van $y = \text{e}^x$ is $y' = \text{e}^x$.
Verder ken je de eigenschappen van exponenten en logaritmen.

a Laat zien, dat $f(x) = \text{e}^{\ln(2) \cdot x}$.

b Differentieer nu f met behulp van de kettingregel.

c Welke afgeleide heeft $f(x) = 2^x$?

Uitleg

Je wilt $f(x) = 2^x$ differentiëren.
Je weet dat de afgeleide van $y = \text{e}^x$ is $y' = \text{e}^x$.
Verder ken je de eigenschappen van exponenten en logaritmen.

Met behulp van deze eigenschappen kun je van grondtal veranderen.
In het algemeen is $g^{{}^g\log(2)} = 2$.
Dit geldt ook voor grondtal $g = \text{e}$, dus $\text{e}^{\ln(2)} = 2$.

Hieruit volgt: $f(x) = \left(\text{e}^{\ln(2)}\right)^x = \text{e}^{\ln(2) \cdot x}$.
Nu kun je f met behulp van de kettingregel differentiëren, het grondtal is namelijk e.
Je vindt: $f'(x) = \text{e}^{\ln(2) \cdot x} \cdot \ln(2)$.
En dit kun je weer schrijven als $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$.

Deze redenering kun je ook op elk ander grondtal toepassen. Doe je dit op grondtal g dan blijkt de afgeleide van $f(x) = g^x$ te zijn: $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de afgeleide van $f(x) = 2^x$ bepaald.

a Bepaal op dezelfde manier de afgeleide van $g(x) = 3^x$.

b Bepaal op dezelfde manier de afgeleide van $h(x) = 0{,}5^x$.

c Bepaal nu zelf de afgeleide van $f(x) = g^x$.

Opgave 2

Je hebt in de voorgaande opgave de afgeleide van $f(x) = g^x$ bepaald.

Ga na dat deze afgeleide ook geldt voor $f(x) = \text{e}^x$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **afgeleide van de exponentiële functie** geldt:

- Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Hierbij maak je gebruik van het **veranderen van grondtal**: $g = \text{e}^{\ln(g)}$. (Denk er om dat $g > 0$ moet zijn.)
Dit is één van de definitieformules van logaritmen, toegepast op het getal e.

Hiermee kun je elke exponentiële functie N met groeifactor g per tijdseenheid t op meerdere manieren schrijven:

- $N(t) = N(0) \cdot g^t$
- $N(t) = N(0) \cdot \text{e}^{kt}$ waarin $k = \ln(g)$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ waarin $k = \log(g)$

Dat is handig als je met meerdere exponentiële functies met verschillende groeifactoren te maken hebt. Je kunt ze dan toch steeds hetzelfde grondtal geven, e of 10.

Verder kun je nu allerlei functies waarin vormen als e^x en/of g^x voorkomen differentiëren met de differentieerregels. Daarmee kun je van functies die ingewikkelder zijn dan zuiver exponentiële functies ook de karakteristieken bepalen.

Voorbeeld 1

In dit voorbeeld gaat het om het differentiëren van exponentiële functies met behulp van de differentieerregels die je tot nu toe hebt geleerd. Probeer eerst zelf de juiste afgeleiden te vinden en bekijk daarna pas de oplossingen.

- $f(x) = 5^x$
- $f(x) = 5^{2x}$
- $f(x) = x \cdot 5^{2x}$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot 10^{-0{,}5t}$

- $K(q) = 100 \cdot q^{-1} + 12 \cdot 0{,}8^q$
- $P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}$

Antwoord

- $f(x) = 5^x$ geeft $f'(x) = 5^x \cdot \ln(5)$
- $f(x) = 5^{2x}$ geeft $f'(x) = 5^{2x} \cdot \ln(5) \cdot 2 = 2\ln(5) \cdot 5^{2x}$
- $f(x) = x \cdot 5^{2x}$ geeft
  $f'(x) = 1 \cdot 5^{2x} + x \cdot 5^{2x} \cdot \ln(5) \cdot 2 = 5^{2x}(1 + 2\ln(5) \cdot x)$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot 10^{-0{,}5t}$ geeft
  $N'(t) = -2000 \cdot 10^{-0{,}5t} \cdot \ln(10) \cdot -0{,}5 = 1000\ln(10) \cdot 10^{-0{,}5t}$
- $K(q) = 100 \cdot q^{-1} + 12 \cdot 0{,}8^q$ geeft $K'(q) = -100 \cdot q^{-2} + 12 \cdot 0{,}8^q \cdot \ln(0{,}8)$
- $P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}$ geeft $P'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2} \cdot -z = \frac{-z}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}$

Opgave 3

Probeer bij de functies in **Voorbeeld 1** eerst zelf de afgeleiden te vinden.

Opgave 4

Bepaal de afgeleide van:

a $f(x) = 5 \cdot 3^x$

b $f(x) = 5 \cdot 2^{0{,}5x}$

c $f(x) = 50 - 48 \cdot 10^{0{,}1x}$

d $f(x) = 100\,\mathrm{e}^{-0{,}1x} + 200$

Voorbeeld 2

Een radiatorplaat warmt op volgens de formule:

$T(t) = 50 - 40 \cdot 0{,}9^t$

Hierin is:

- T de temperatuur in °C
- t de tijd in minuten

Laat zien hoe je deze formule kunt schrijven met grondtal e en bereken de snelheid waarmee het opwarmen begint op $t = 0$.

Antwoord

De formule moet de vorm $T(t) \approx 50 - 40 \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t}$ krijgen.

Omdat $0{,}9 = \mathrm{e}^k$ wordt $k = \ln(0{,}9) \approx -0{,}11$ en geldt $T(t) \approx 50 - 40 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}11t}$.

De opwarmsnelheid is: $T'(t) = -40 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}11t} \cdot -0{,}11 \approx 4{,}21 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}11t}$.

Op $t = 0$ bedraagt de opwarmsnelheid $T'(0) \approx 4{,}21$ °C/min.

Opgave 5

Bekijk het temperatuurverloop van de opwarmende radiator in **Voorbeeld 2**.

a Welke temperatuur heeft de radiator aan het begin van het opwarmingsproces?

b Je kunt de snelheid waarmee het opwarmen begint op $t = 0$ ook rechtstreeks vanuit $T(t) = 50 - 40 \cdot 0{,}9^t$ afleiden. Laat zien, dat je dan dezelfde opwarmsnelheid krijgt.

Opgave 6

Bij benzinestations is vaak een extra service beschikbaar om de autobanden op te pompen. De automatische pomp levert een druk van $3{,}5$ atmosfeer. De luchtdrukverandering in de band is recht evenredig met het drukverschil tussen de luchtdruk in de band en de luchtdruk van de pomp. Er geldt:

$p(t) = 3{,}5 - 2{,}1 \cdot 0{,}97^t$

Hierin is:

- p de luchtdruk in de band in atmosfeer
- t de tijd in seconden

a Maak een passende grafiek bij dit verband.

De luchtdruk in de band begint met $1{,}4$ atmosfeer en is na 10 seconden pompen opgelopen tot $2{,}0$ atmosfeer.

b Laat zien dat dit uit de gegeven formule volgt.

c Je stopt de pomp als de druk in de band $2{,}6$ atmosfeer bedraagt. Na hoeveel seconden is dat het geval?

d Bereken de snelheid waarmee de druk in de band toeneemt op $t = 0$.

e Schrijf de gegeven formule in de vorm met grondtal e en bereken daarmee opnieuw de snelheid waarmee de druk in de band toeneemt op $t = 0$.

Verwerken

Opgave 7

Differentieer.

a $f(x) = 3 \cdot 1{,}2^x$

b $f(x) = 50 \cdot \mathrm{e}^{0{,}1x}$

c $f(x) = x \cdot 0{,}88^x$

d $f(x) = 60 - 20 \cdot 10^{-0{,}5x}$

Opgave 8

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = x + 2^{-x}$.

a Bereken het minimum van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

a Bereken algebraïsch de extremen f in twee decimalen nauwkeurig.

b Welke lijn raakt de grafiek van f in de oorsprong?

Opgave 10

Melk bewaar je in de koelkast op een temperatuur van 6 °C. Als je een glas melk inschenkt heeft dit op $t = 0$ dan ook deze temperatuur. Vanaf dat moment warmt de melk op tot kamertemperatuur, zeg 20 °C. Die opwarming gaat volgens de warmtewet van Newton zo, dat de snelheid van opwarmen recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving.

a Maak een schets van het verloop van de temperatuur T van de melk als functie van de tijd t in minuten.

b Leg uit dat de functie T die de temperatuur van de melk in het glas beschrijft moet voldoen aan $T'(t) = c \cdot (T(t) - 20)$.

c Toon aan dat een functie van de vorm $T(t) = 20 + a \cdot \text{e}^{ct}$ voldoet.

d Neem aan, dat na 12 minuten de melk is opgewarmd tot 18 °C. Stel een daarbij passende formule voor $T(t)$ op.

e Bereken de opwarmsnelheid van de melk op $t = 0$ en op $t = 15$. Verklaar het verschil tussen beide waarden.

Toepassen

Radioactieve stoffen zijn stoffen die straling uitzenden. Bij dergelijke stoffen zijn de atoomkernen instabiel, bijvoorbeeld doordat er te veel protonen en/of neutronen in zitten. Een natuurlijke **radioactieve stof** is de radiumisotoop $^{226}_{88}$Ra. Bij deze stof zendt elke atoomkern een α-deeltje (een heliumkern) uit, waardoor hij overgaat in een atoom van het element radon: $^{222}_{86}$Rn. De halfwaardetijd van dit radium is ongeveer 1600 jaar. In die tijd wordt de helft van de radiumatomen omgezet in radon. Het percentage radium neemt voortdurend af (vanaf 100%).

Neem $t = 0$ op 1-1-1900 en t in jaren en noem het percentage radium N. Je kunt het verval van radium dan op drie manieren met een formule beschrijven:

- $N(t) = N(0) \cdot g^t$ met $N(0) = 100$ en $g^{1600} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot 0{,}9996^t$
- $N(t) = N(0) \cdot \text{e}^{kt}$ met $N(0) = 100$ en $\text{e}^{1600k} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot \text{e}^{-0{,}00043t}$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ met $N(0) = 100$ en $10^{1600k} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot 10^{-0{,}00019t}$

Opgave 11

Bekijk **Toepassen**.

a Reken de drie gevonden vervalformules zelf na.

b Bereken met elk van de drie gevonden vervalformules de vervalsnelheid op $t = 0$.

c Bereken ook de vervalsnelheid op $t = 90$. Wat gebeurt er met de vervalsnelheid als t toeneemt?

d In welk jaar is er nog 20% van de beginhoeveelheid radium over als er verder niemand aan komt?

Opgave 12: Radioactieve koolstof

Zowel in de atmosfeer als in levende organismen bevindt zich een bepaald percentage aan radioactieve koolstof C-14. Zodra een organisme sterft vindt er geen uitwisseling met de koolstof uit de atmosfeer meer plaats. Het percentage C-14 neemt vanaf dat moment exponentieel af met een halveringstijd van ongeveer 5600 jaar. Omdat alle levende organismen eenzelfde gehalte aan C-14 hebben, stelt dit ons in staat de ouderdom te bepalen van natuurlijke materialen als perkament, leren kleding, houten palen en dergelijke.

Het gehalte $C(t)$ aan C-14 is gegeven als percentage van het gehalte in levende organismen. t is de tijd in jaren met $t = 0$ op het moment dat het organisme is gestorven.

a Stel een formule op voor $C(t)$ van de vorm $C(t) = 100 \cdot \text{e}^{kt}$. Bereken k in zes decimalen nauwkeurig.

b Van de Dode Zee-rollen is het gehalte aan C-14 nog 79%. Hoe oud zijn ze?

c Van een mummie is nog 65% van het gehalte aan C-14 over. Hoe oud is die mummie?

d Van een Indianensandaal uit een grot in Amerika is nog 33% van het gehalte aan C-14 over. Hoe oud is die sandaal?

Opgave 13: Radioactieve jodium

Bij onderzoek in het menselijk lichaam gebruiken artsen de stof jodium-131. Die stof is namelijk radioactief en daardoor kunnen deeltjes van die stof in het menselijk lichaam van buitenaf worden gevolgd. De halveringstijd (of halfwaardetijd) van jodium-131 is 8,06 dagen. Omdat radioactief verval exponentieel verloopt, kan de hoeveelheid jodium-131 in mg worden beschreven door:

$m = m_0 \cdot \text{e}^{-kt}$

t is daarin de tijd in dagen en m_0 is de hoeveelheid op tijdstip $t = 0$.

a Bereken k, dat is de zogenaamde desintegratieconstante.

b Als iemand een stof krijgt ingespoten die 5,00 mg jodium-131 bevat, hoeveel is daar na 15 dagen dan nog van terug te vinden?

c Toon aan dat in dit model de vervalsnelheid recht evenredig is met de hoeveelheid radioactieve stof. Hoe groot is de bijbehorende evenredigheidsconstante?

d Na hoeveel dagen is er nog 10% van de beginhoeveelheid over?

e Na hoeveel dagen is de vervalsnelheid (de radioactiviteit) verminderd tot 10% van de beginsnelheid?

f Als een meetnauwkeurigheid van twee decimalen maximaal haalbaar is, na hoeveel dagen is de ingespoten 5 mg jodium-131 dan niet meer meetbaar? Is de stof ooit volledig verdwenen?

Testen

Opgave 14

Differentieer de volgende functies en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt met de x-as. Geef de raaklijn met benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $f(x) = 3 \cdot 0{,}5^{2x-1} - 4$

b $f(x) = 5 - \text{e}^{\sqrt{x}}$

Opgave 15

Bij het maken van foto's van je gebit gebruikt de tandarts röntgenstraling. De patiënt krijgt een heel geringe dosis straling toegediend en ondervindt daarvan geen nadelige gevolgen. Maar een tandarts die dit regelmatig doet krijgt te maken met een opeenhoping van straling in zijn lichaam. Daarom beschermt hij zich met behulp van een loden plaat.
De intensiteit van de straling neemt namelijk af in een stof als lood.
Als die stralingsintensiteit wordt voorgesteld door I, dan geldt:

$I(d) = I(0) \cdot \text{e}^{-\alpha \cdot d}$

waarin d de dikte van de loden plaat in cm is en α een constante is die afhangt van het materiaal.

a Een loden plaat van 1 cm dik houdt ongeveer 60% van de straling tegen. Bereken de materiaalconstante α.

b Hoe dik moet een loden plaat zijn om 99% van de straling tegen te houden?

c Hoeveel bedraagt de snelheid waarmee de stralingsintensiteit afneemt op het moment dat die straling de loden plaat bereikt?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren van exponentiële functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.3 Logaritmische functies

Inleiding

Je kunt functies van de vorm $f(x) = g^x$ differentiëren. En met behulp daarvan leer je nu logaritmische functies differentiëren. Daarbij maak je gebruik van de definitieformules van logaritmen.

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van een logaritmische functie bepalen;
- van dergelijke functies de hellingen, de extremen en de buigpunten berekenen.

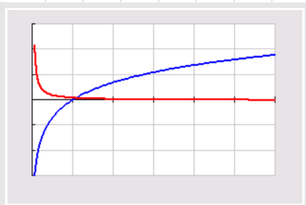
Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- de afgeleide van $f(x) = g^x$ bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ met de bijbehorende afgeleide. Het gaat daarbij echter om benaderingen...



Figuur 3.1

a Breng de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ zelf in beeld.

b Waarom heeft de grafiek van deze afgeleide bij $x = 0$ een verticale asymptoot?

c De grafiek van de afgeleide heeft ook een horizontale asymptoot. Welke?

d Kun je een functievoorschrift voor de afgeleide verzinnen?

Uitleg

Bekijk de applet

De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ kun je vinden door te gebruiken dat $\text{e}^{\ln(x)} = x$.
Bekijk de functie $g(x) = \text{e}^{\ln(x)}$.
Omdat $g(x) = \text{e}^{\ln(x)} = \text{e}^u$ met $u = \ln(x)$ is $g'(x) = \text{e}^u \cdot u'(x)$.
Omdat $g(x) = x$ geldt ook $g'(x) = 1$.
Dus is $\text{e}^u \cdot u'(x) = 1$, dus $u'(x) = \frac{1}{\text{e}^u} = \frac{1}{\text{e}^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$.

Conclusie: uit $u(x) = \ln(x)$ volgt $u'(x) = \frac{1}{x}$.

- De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Nu je de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ hebt gevonden, kun je die van $f(x) = {}^g\log(x)$ er uit afleiden door te gebruiken dat ${}^g\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)}$.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ bepaald. Differentieer de volgende functies en bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 10$.

a $f(x) = \ln(5x)$

b $f(x) = 3\ln(4 - x)$

c $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Opgave 2

Bepaal nu zelf de afgeleide van $f(x) = {}^{2}\log(x)$. Gebruik daarbij ${}^{2}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **afgeleide van de natuurlijke logaritmische functie** $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

De **afgeleide van de g-logaritme** $f(x) = {}^{g}\log(x)$ is hieruit af te leiden door te gebruiken dat ${}^{g}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)}$.

Je vindt:

Als $f(x) = {}^{g}\log(x)$, dan is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g) \cdot x}$.

Verder kun je nu allerlei functies waarin vormen als $\ln(x)$ en/of ${}^{g}\log(x)$ voorkomen differentiëren met de differentieerregels. Daarmee kun je van functies die ingewikkelder zijn dan zuiver logaritmische functies ook de karakteristieken bepalen.

Voorbeeld 1

Differentieer de volgende functies:

- $f(x) = {}^{5}\log(x)$
- $f(x) = {}^{5}\log(2x)$
- $f(x) = x \cdot {}^{5}\log(2x)$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot \log(0{,}5t)$

Antwoord

- $f(x) = {}^{5}\log(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\ln(5) \cdot x}$.
- $f(x) = {}^{5}\log(2x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\ln(5) \cdot 2x} \cdot 2 = \frac{1}{\ln(5) \cdot x}$.
- $f(x) = x \cdot {}^{5}\log(2x)$ geeft

  $f'(x) = 1 \cdot {}^{5}\log(2x) + x \cdot \frac{1}{\ln(5) \cdot x} = {}^{5}\log(2x) + \frac{1}{\ln(5)}$.
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot \log(0{,}5t)$ geeft

  $N'(t) = -2000 \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot 0{,}5t} \cdot 0{,}5 = -\frac{2000}{\ln(10) \cdot t}$.

Opgave 3

Probeer bij de functies in **Voorbeeld 1** eerst zelf de afgeleiden te vinden.

Opgave 4

Bepaal van de volgende functies de afgeleide en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $x = 1$.

a $f(x) = \ln(4x)$

b $f(x) = {}^{3}\log(x)$

c $f(x) = 5\log(x)$

d $f(x) = 50\ln(2x) + 100$

e $f(x) = {}^{2}\log\left(50 + x^2\right)$

f $f(x) = \ln\left(\frac{3}{x}\right)$

Voorbeeld 2

De **luchtdruk** p (in hectopascal hPa) hangt af van de hoogte k in km boven het aardoppervlak. In een luchtballon is de luchtdruk gemakkelijk te meten en wordt daaruit de hoogte berekend met de formule:

$h = -6{,}5\log\left(\frac{p}{p_0}\right)$

Hierin is p_0 de luchtdruk op zeeniveau. Neem aan dat $p_0 = 1000$ hPa.
Bereken nu de hoogte en de snelheid waarmee $h(p)$ verandert als $p = 920$ hPa wordt gemeten.

Figuur 3.2

Antwoord

Als $p_0 = 1000$ hPa dan is $h = -6{,}5\log(0{,}001p)$.

Als $p = 920$ hPa dan is $h \approx 0{,}235$ km.
Je zit dan 235 m boven zeeniveau.

$h'(p) = -6{,}5 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{0{,}001p} \cdot 0{,}001 = \frac{-2{,}823}{p}$.

Als $p = 920$ hPa dan is $h' \approx -0{,}003$.
Bij een toename van de luchtdruk daalt de hoogte met ongeveer 3 m/hPa.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**. Neem nu aan dat $p_0 = 1020$ hPa.

a Bepaal voor deze waarde van p_0 de afgeleide van $h(p)$.

b Bereken h en de veranderingssnelheid van h als er 900 hPa wordt gemeten in de ballon.

c Hoe kun je aan de afgeleide van h zien dat de grafiek van h voor elke waarde van p dalend is?

Verwerken

Opgave 6

Bepaal $f'(x)$ en bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x=2$.

a $f(x)=\ln(0{,}5x)$

b $f(x)=4\cdot {}^2\log(x)+10$

c $f(x)=200\ln\left(\frac{x}{4}\right)$

Opgave 7

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x)=4-\ln(2x)$.

a Maak de grafiek van f.
Welke asymptoot heeft deze grafiek?

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x=2$.

c Voor welke x heeft de raaklijn aan de grafiek van f een richtingscoëfficiënt van -1?

Opgave 8

Bekijk de grafieken van $y_1={}^2\log(6-x)$ en $y_2=-{}^2\log(x)$ met domein $[0,6]$.

a Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de snijpunten van deze grafieken.

Op de grafieken van f en g liggen punten A en B beide met x-waarde k. Neem aan dat $1<k<4$.

b Toon aan dat de lengte van AB dan maximaal $2\cdot {}^2\log(3)$ is.

Opgave 9

Bepaal $f'(x)$.

a $f(x)=\ln\left(x^2-4x\right)$

b $f(x)={}^3\log\left(x^2-4x\right)$

Opgave 10

Voor het geluidsdrukniveau L geldt de formule:

$$L=10\cdot\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Hierin is I de geluidsintensiteit in W/m^2 (Watt per m^2). De grootheid L wordt veel gebruikt om geluidshinder te meten. Hij wordt uitgedrukt in decibel (dB).

a Bij de gehoorgrens ($L=0$) is de geluidsintensiteit 10^{-12} W/m^2. Bij de pijngrens is de geluidsintensiteit 10 W/m^2. Bereken het geluidsdrukniveau bij de pijngrens.

Op een bepaalde afstand produceren twee personenauto's elk een geluidsdrukniveau van 80 dB. Nu kun je hun gezamenlijke geluidsdrukniveau niet krijgen door beide afzonderlijke geluidsdrukniveaus op te tellen. Dat kan echter wel met hun afzonderlijke geluidsintensiteiten.

b Bereken met behulp daarvan hun gezamenlijke geluidsdrukniveau.

De geluidshinder in de buurt van een snelweg hangt onder meer af van de afstand tot die weg. Voor niet te grote afstanden (van ongeveer 20 m tot 1000 m) wordt de formule: $L = L_0 - 10\log(2\pi R)$ gebruikt, waarin R de afstand tot de as van de weg in m is en L het geluidsdrukniveau in dB is. L_0 is het geluidsdrukniveau van het verkeer op de as van de weg.

c Als op 20 m een geluidsdrukniveau van 77 dB wordt gemeten, hoe groot is dan het geluidsdrukniveau op 100 m afstand van die weg?

d Op welke afstand van die weg is het geluidsdrukniveau 60 dB?

e Geef de formule voor L als functie van R als $L(20) = 80$ dB.

Toepassen

Opgave 11: Lengte in de loop van een dag

Een gezonde volwassene is ’s morgens langer dan aan het einde van de dag. De Australische wetenschapper D. Burgess heeft dit verschijnsel onderzocht en publiceerde in 1999 de volgende formule voor de lengtefractie S:

$S(t) = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183)$

Hierin is:

- t het aantal uren nadat een persoon is opgestaan
- S de verhouding tussen de lengte L van die persoon ten opzichte van zijn lengte L_0 bij het opstaan

Dus $S = \frac{L}{L_0}$.

Meneer Jansen heeft als hij uit bed komt een lengte van 170,0 cm. Ga er van uit dat hij elke dag 16 uur actief is en verder slaapt.

a Bereken na hoeveel tijd meneer Jansen volgens de formule 2,0 cm korter is geworden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

b Laat met behulp van de afgeleide van $S(t)$ zien, dat deze functie dalend is.

Testen

Opgave 12

Bepaal van de volgende functies de afgeleide en los op $f'(x) = 10$.

a $f(x) = {}^3\log(x)$

b $f(x) = 2\log(11 - x)$

c $f(x) = \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

Opgave 13

In de jaren vijftig deed de Amerikaan D.L. Gerlough onderzoek naar de voetgangersveiligheid van wegen. Als er veel verkeer over een weg gaat, is er voor voetgangers weinig gelegenheid om veilig over te steken. Daarom stelde Gerlough de zogenaamde ‘veilige norm’ op. Een weg voldoet aan deze veilige norm wanneer er zich gemiddeld elke minuut een gelegenheid voordoet om veilig over te steken. Dat lukt alleen als het aantal auto’s dat per uur passeert onder een maximum blijft. Dit maximum wordt aangegeven met N_{max} en is afhankelijk van de breedte van de weg. Gerlough beperkte zich in zijn onderzoek tot wegen met een breedte tussen 2 meter en 9 meter. Hij kwam tot de formule:

$$N_{\text{max}} = \frac{8289{,}3}{B} \cdot (1{,}778 - \log(B))$$

In deze formule is B de breedte van de weg in meter. Vanzelfsprekend is deze formule een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model komt er enig inzicht in de veiligheid bij de aanleg van wegen.

Bij een brede weg duurt het oversteken langer dan bij een smalle weg. Voor wegen die voldoen aan de veilige norm, betekent dit dat er bij een brede weg per uur minder auto’s mogen passeren dan bij een smalle weg. De grafiek van N_{max} moet dus dalend zijn. De formule voor N_{max} moet hiermee in overeenstemming zijn.

Toon met de afgeleide van de formule voor N_{max} (dus zonder gebruik van de grafische rekenmachine) aan dat de veiligheid bij een brede weg minder is dan bij een smalle weg.

Practicum

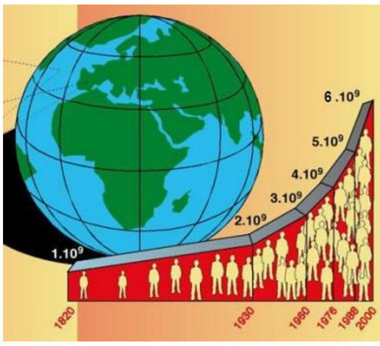
Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **het differentiëren van logaritmische functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen.
Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.4 Groeimodellen

Inleiding

Een belangrijk toepassingsgebied van exponentiële functies en dus ook van logaritmen zijn de verschillende groeimodellen die ermee kunnen worden beschreven. Behalve exponentiële groei, komen ook geremde groei en het logistische groeimodel voorbij. En ook zul je werken met twee soorten logaritmisch papier.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met enkellogaritmisch en dubbellogaritmisch grafiekenpapier;
- groeimodellen opstellen en de eigenschappen ervan kennen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, logaritmische functies en machtsfuncties;
- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de kettingregel;
- de afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies opstellen.

Verkennen

Opgave V1

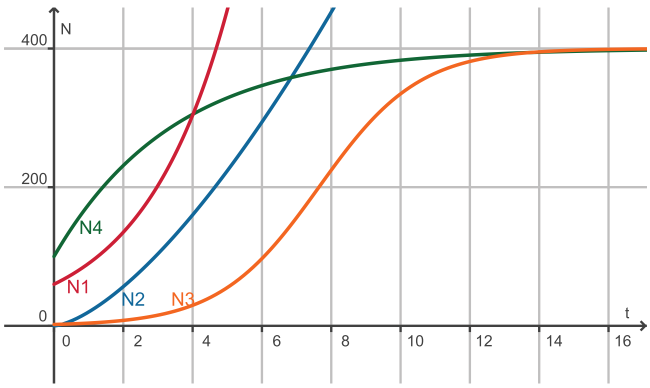
Hier zie je in één figuur vier grafieken. De bijbehorende functies zijn:

- $N_1(t) = 60 \cdot 1{,}5^t$
- $N_2(t) = 20 \cdot t^{1{,}5}$
- $N_3(t) = \frac{400}{1+200 \cdot 0{,}5^t}$
- $N_4(t) = 400 - 300 \cdot 0{,}75^t$

Elk van deze functies is te gebruiken als groeimodel.

a Beschrijf bij elk van deze functies de wijze waarop de groei verloopt.

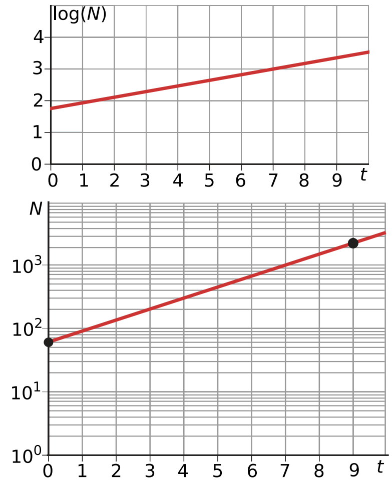
b Beschrijf ook telkens het verloop van de groeisnelheid.



Figuur 4.2

Uitleg 1

Een functie zoals $N(t) = 60 \cdot 1{,}5^t$ beschrijft exponentiële groei. Je kunt deze functie opvatten als een exponentieel groeimodel. De groei is dan nogal explosief, bij betrekkelijk kleine waarden van t heb je al met hele grote uitkomsten te maken.
Dat is lastig als je een geschikte grafiek wilt maken.
Neem je daarentegen aan beide zijden de logaritme dan krijg je: $\log(N) = \log\left(60 \cdot 1{,}5^t\right)$.
Met de eigenschappen van logaritmen wordt dit:
$\log(N) = \log(60) + t \cdot \log(1{,}5)$.
Omdat zowel $\log(60)$ als $\log(1{,}5)$ getallen zijn, staat hier dat tussen $\log(N)$ en t een lineair verband bestaat. En daarom wordt een exponentiële functie een rechte lijn als je op de verticale as een logaritmische schaal gebruikt.
Er bestaat speciaal grafiekenpapier waar de verticale as zo is aangepast dat je zonder omrekenen met logaritmen een rechte lijn krijgt bij een exponentiële functie. Dat heet **enkellogaritmisch papier**.



Figuur 4.3

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Daarin gaat het over het tekenen van de grafiek van een exponentiële functie.

a Ga na dat de getekende grafiek juist is.

Neem nu de functie $K(t) = 600 \cdot 0{,}8^t$.

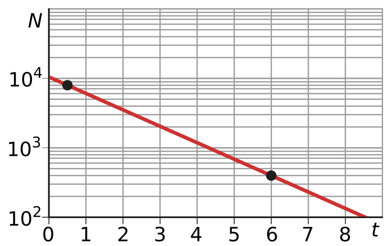
b Laat op algebraïsche wijze zien dat $\log(K)$ een lineaire functie van t is.

c Teken de grafiek van $\log(K)$.

Zowel de grafiek van N als die van K kun je op enkellogaritmisch grafiekenpapier tekenen. Je hoeft dan niet eerst de formule te herschrijven.

d Neem een blad van dit grafiekenpapier en teken daarop de grafieken van beide functies.

e Je ziet hier de grafiek van een nieuwe functie $N(t)$ op enkellogaritmisch grafiekenpapier. Leg uit dat de grafiek door $(0{,}5; 8000)$ en $(6{,}400)$ gaat en stel het functievoorschrift op.



Figuur 4.4

f Lees uit de figuur af hoe groot $N(1)$ en $N(4{,}5)$ (bij benadering) zijn. Controleer je antwoorden met behulp van het functievoorschrift.

g Heeft $N(t) = 0$ oplossingen? Kan er op de verticale as een 0 voorkomen?

Opgave 2

Bekijk de functie $N_4(t) = 400 - 300 \cdot 0{,}75^t$.

a Teken de grafiek van N_4 op enkellogaritmisch grafiekenpapier.

b Kun je verklaren waarom de grafiek geen rechte lijn wordt?

Opgave 3

Deze tabel met gegevens hoort bij een bacteriecultuur. t is gegeven in uren, en $N(t)$ in aantallen.

t	0	1	2	3	4	5	6
$N(t)$	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 4.1

a Maak met behulp van deze tabel een tabel waarin $\log(N)$ wordt uitgezet tegen t.

b Teken de bijbehorende grafiek. Kun je deze grafiek benaderen door een rechte lijn? Is er sprake van exponentiële groei?

c Stel een formule op voor $\log(N)$ als functie van t.

d Stel met behulp van het antwoord van c een formule op voor N als functie van t.

Uitleg 2

Een functie zoals $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$ is een machtsfunctie. Ook daarvan is de grafiek lastig te tekenen, want in de buurt van $t = 0$ heb je uitkomsten vlak bij 0, maar bij grotere waarden van t al snel uitkomsten die behoorlijk groot zijn.

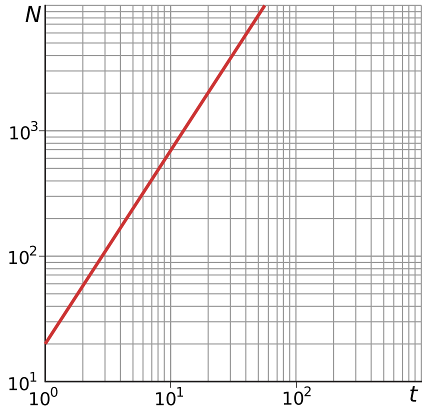
Ook nu kun je het voorschrift herleiden met behulp van logaritmen: $\log(N) = \log\left(20 \cdot t^{1,5}\right)$.

Dit levert op: $\log(N) = \log(20) + 1{,}5 \cdot \log(t)$.

Er bestaat een lineair verband tussen $\log(N)$ en $\log(t)$.

Dus gebruik je op beide assen een logaritmische schaal.

Ook hiervoor bestaat speciaal grafiekenpapier waar de beide assen zo zijn aangepast dat je zonder omrekenen met logaritmen een rechte lijn krijgt bij een machtsfunctie. Dat heet **dubbellogaritmisch papier**.



Figuur 4.5

Opgave 4

Bekijk **Uitleg 2** over het tekenen van een machtsfunctie.

a Maak bij de functie N met $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$ een tabel van $\log(N)$ afhankelijk van $\log(t)$. Teken de grafiek van $\log(N)$ uitgezet tegen $\log(t)$.

b Neem een blad dubbellogaritmisch grafiekenpapier. Teken daarop de grafiek van $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$.

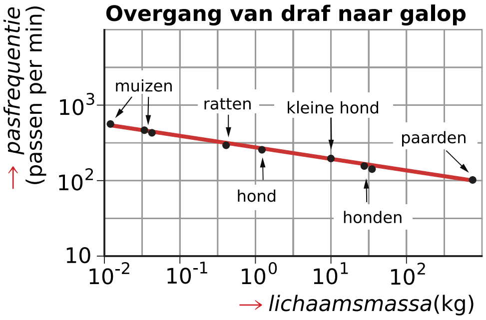
Neem nu de functie $K(t) = 600 \cdot t^{0,8}$.

c Laat op algebraïsche wijze zien dat $\log(K)$ een lineaire functie van $\log(t)$ is.

d Teken de grafiek van $K(t)$ op dubbellogaritmisch grafiekenpapier.

Opgave 5

Zoogdieren gaan bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) over van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt hangt af van de lichaamsmassa (in kg).



Figuur 4.6

a Waaraan kun je zien dat op beide assen van deze grafiek een logaritmische schaal is gebruikt?

b Noem de lichaamsmassa m (in kg) en de pasfrequentie P. De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden. Leg uit dat het punt dat hoort bij paarden ongeveer de coördinaten $(10^{2,9}, 10^{2,0})$ heeft. Bepaal zelf de coördinaten van het punt dat bij een kleine hond hoort.

c Leid nu een formule af voor P als functie van m.

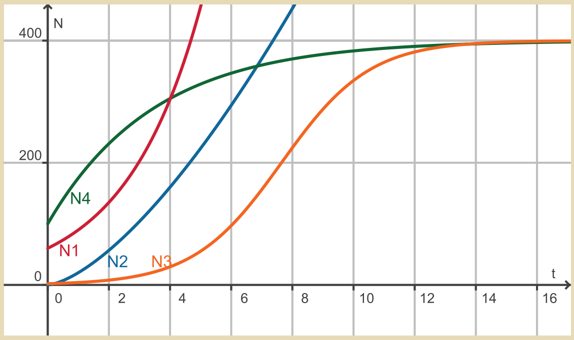
d Bereken bij welke pasfrequentie een pony van 120 kg van draf naar galop overgaat.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het **exponentiële groeimodel** hoort een functie van de vorm $N_1(t) = b \cdot g^t$ of $N_1(t) = b \cdot e^{kt}$ of $N_1(t) = b \cdot 10^{kt}$. (In de figuur is $b = 60$ en $g = 1{,}5$.)
Teken je dergelijke functies op **enkellogaritmisch papier** dan wordt de grafiek een rechte lijn.

Bij een **machtsfunctie** als model hoort een voorschrift van de vorm $N_2(t) = b \cdot t^p$.
(In de figuur is $b = 20$ en $p = 1{,}5$.)
Van dergelijke functies is de grafiek op **dubbellogaritmisch papier** een rechte lijn.



Figuur 4.7

Bij een **geremd exponentieel groeimodel** hoort een functie als $N_3(t) = \frac{G}{1+b \cdot g^t}$.
Kenmerkend voor dit groeimodel is, dat de groei eerst vrijwel exponentieel verloopt, maar op zeker moment (voedselgebrek, te weinig ruimte) afremt. De groeisnelheid die eerst toeneemt, gaat vanaf dat moment afnemen. In dit groeimodel is $N = G$ de horizontale asymptoot en vind je de grootste groeisnelheid bij $N(t) = \frac{1}{2}G$. (In de figuur is $G = 400$, $b = 200$ en $g = 0{,}5$.)

Er zijn tenslotte nog situaties waarin het verschil met een constante waarde exponentieel afneemt. Daarbij hoort een groeimodel van de vorm $N_4(t) = G + b \cdot g^t$. Kenmerkend voor dit groeimodel is dat de groeisnelheid vanaf het begin afneemt. (In de figuur is $G = 400$, $b = $ -300 en $g = 0{,}75$.)

Voorbeeld 1

In deze tabel zie je de groei van een aantal fruitvliegjes ('Drosophila melanogaster'). De populatie leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. N is het aantal fruitvliegjes.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24
$N(t)$	2	5	10	22	47	91	156

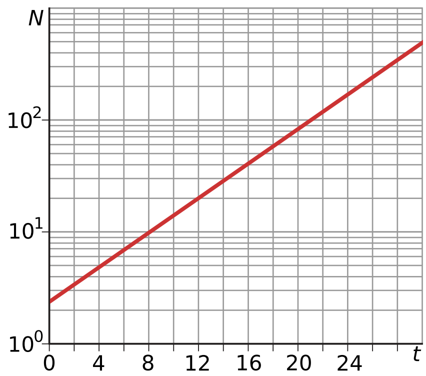
Tabel 4.2

Figuur 4.8

De sterke toename van N doet exponentiële groei vermoeden.
Teken de grafiek van $\log(N)$ als functie van t en/of teken de grafiek van $N(t)$ op **enkellogaritmisch papier** en stel een passende formule voor $N(t)$ op.

Antwoord

Je kunt de grafiek maken in Excel met een logaritmische schaal op de N-as.
De rechte lijn die het beste bij deze punten past kan door Excel worden berekend (exponentiële trendlijn).
Ga zelf na, dat $N(t) = 2{,}3\,\mathrm{e}^{0{,}18t}$ een passende formule is.



Figuur 4.9

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**. De sterke toename van N doet exponentiële groei vermoeden.

a Teken de punten uit de tabel op enkellogaritmisch papier. Teken een lijn die zo goed mogelijk past bij de getekende punten. Deze lijn stelt de grafiek van $N(t)$ voor op enkellogaritmisch papier.

b Stel zelf een formule op voor $N(t)$.

c Controleer of de punten uit de tabel passen bij de gevonden formule.

d Na hoeveel dagen zouden er volgens dit groeimodel meer dan 1000 fruitvliegjes zijn?

Voorbeeld 2

Johannes Kepler (1571—1630) beschreef als eerste het verband tussen de omlooptijd T (in jaren) van een planeet en zijn gemiddelde afstand tot de zon R. Voor de Aarde geldt $T = 1$ jaar en wordt $R = 1$ AE (astronomische eenheid) genomen. In de tabel vind je de gegevens van de andere planeten in ons zonnestelsel.

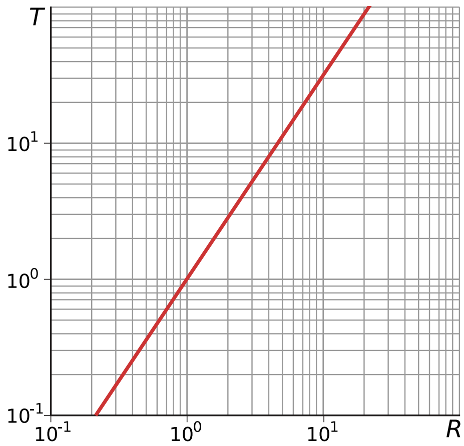
planeet	Mercurius	Venus	Aarde	Mars	Jupiter	Saturnus	Uranus	Neptunus
R (in AE)	0,39	0,72	1	1,52	5,20	9,54	19,19	30,07
T (in jaren)	0,24	0,62	1	1,88	11,9	25,5	84,0	164,8

Tabel 4.3

Het verloop van $T(R)$ doet een machtsfunctie vermoeden.
Teken de grafiek van $\log(T)$ als functie van $\log(R)$ en/of teken de grafiek van $T(R)$ op **dubbellogaritmisch papier** en stel een passende formule op.

Antwoord

Je kunt de grafiek maken in Excel met een logaritmische schaal op beide assen.
De rechte lijn die het beste bij deze punten past kan weer door Excel worden berekend (machtstrendlijn).
Ga zelf na, dat $T = 1 \cdot R^{1,5}$ een passende formule is.



Figuur 4.10

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Teken de grafiek van $\log(T)$ als functie van $\log(R)$ en/of teken de grafiek van $T(R)$ op dubbellogaritmisch papier. Wat voor soort groeimodel past bij $T(R)$?

b Door welk punt moet je grafiek in ieder geval gaan?

c Stel zelf een formule op voor $T(R)$.

In 1930 ontdekte astronoom **Clyde Tombaugh** een nieuw hemellichaam dat om de zon draaide op een (gemiddelde) afstand van $38{,}4851$ AE. Dit hemellichaam werd Pluto genoemd en is lang als planeet geclassificeerd.

d Welke omlooptijd heeft Pluto?

Voorbeeld 3

In deze tabel zie je de groei van een aantal fruitvliegjes (‘Drosophila melanogaster’). De populatie leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. N is het aantal fruitvliegjes.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
$N(t)$	2	5	10	22	47	91	156	226	282	317	335	343	347

Tabel 4.4

Figuur 4.11

Nu lijkt er sprake van geremde exponentiële groei. $N(t)$ nadert de 350 fruitvliegjes. Stel m.b.v. de tabel een passend geremd exponentieel groeimodel op. Bereken bij welke t de groeisnelheid maximaal is.

Antwoord

De bijpassende formule wordt: $N(t) = \frac{350}{1+b \cdot g^t}$.

De grafiek gaat door $(0,2)$ en dit geeft: $b = 174$.
De grafiek gaat ook door $(40,335)$ en dit geeft: $g \approx 0,81$.

Een passende formule is: $N(t) = \frac{350}{1+174 \cdot 0,81^t}$.

De waarde van t waarin de groeisnelheid een maximum heeft kun je vinden met behulp van je grafische rekenmachine. Je vindt: $t \approx 23$ dagen.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** lijkt er sprake van geremde exponentiële groei. $N(t)$ nadert de 350 fruitvliegjes.

a Teken een grafiek van $N(t)$ die zo goed mogelijk past bij de gegevens in de tabel.

b Gebruik de grenswaarde van 350 fruitvliegjes, de waarde van $N(0)$ en nog een ander geschikt punt van je grafiek om zelf een formule op te stellen voor $N(t)$.

c Bereken zelf de waarde van t waarin de groeisnelheid van N zo groot mogelijk is.

Voorbeeld 4

Een kop vers gezette koffie heeft een temperatuur van 80 °C. Als je die koffie rustig laat afkoelen in een omgevingstemperatuur van 20 °C, dan neemt (warmtewet van Newton) het temperatuurverschil met de omgeving exponentieel af: $T(t) - 20 = b \cdot g^t$.

t (min.)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
T (°C)	80,0	58,4	44,6	35,7	30,1	26,4	24,1	22,6	21,7	21,1	20,7	20,4	20,3

Tabel 4.5

Ga uit van het beschreven groeimodel en stel een bijpassende formule op.
Bereken de snelheid van afkoelen na 5 minuten.

Antwoord

Je gaat uit van: $T(t) - 20 = b \cdot g^t$.
De grafiek gaat door $(0,80)$ en dit geeft: $b = 60$.
De grafiek gaat ook door $(24;20,3)$ en dit geeft: $60 \cdot g^{24} = 0,3$ en dus $g \approx 0,80$.
Een passende formule is: $T(t) = 20 + 60 \cdot 0,80^t$.

De afkoelsnelheid na vijf minuten is
$T'(5) = 60 \cdot \ln(0,80) \cdot 0,80^5 \approx 4,39$ °C/minuut.

Opgave 9

Bekijk het afkoelingsproces van een kop koffie in **Voorbeeld 4**.

a Ga uit van het beschreven groeimodel en stel zelf een bijpassende formule op als je aanneemt dat de grafiek door de punten $(0,80)$ en $(20;20,7)$ gaat.

b Bereken de snelheid van afkoelen na 10 minuten.

Opgave 10

Bekijk **Voorbeeld 4**.

Bepaal op welk tijdstip t de afkoelsnelheid 10 °C/minuut is.
Geef je antwoord in seconden.

Verwerken

Opgave 11

Druk $\log(y)$ uit in x. Geef aan of de grafiek van het verband tussen y en x mogelijk op enkellogaritmisch papier of op dubbellogaritmisch papier een rechte lijn is.

a $y = 3 \cdot 2^x$

b $y = 3 + 2^x$

c $y = 3 \cdot x^2$

d $y = 3 + x^2$

Opgave 12

Op enkellogaritmisch papier gaat een rechte lijn door de punten $(2,5)$ en $(6,17)$.
Druk $\log(y)$ uit in x en druk ook y uit in x.

Opgave 13

Op dubbellogaritmisch papier gaat een rechte lijn door de punten $(2,5)$ en $(6,17)$.
Druk $\log(y)$ uit in $\log(x)$ en druk ook y uit in x.

Opgave 14

De tabel geeft de gemiddelde hoogte aan van de zonnebloemen op een bepaalde akker op verschillende tijdstippen na het ontkiemen.
De gemiddelde maximale hoogte die deze zonnebloemen bereiken is 256 cm.
t is de tijd in weken na het ontkiemen.
$H(t)$ is de gemiddelde hoogte van deze zonnebloemen in cm op tijdstip t.

Figuur 4.12

aantal weken	2	4	6	8	10	12
hoogte in cm	36	98	170	228	251	255

Tabel 4.6

a Onderzoek of er sprake is van lineaire groei, exponentiële groei, of geen van beide.

b Teken de grafiek van de functie: $F(t) = \log\left(\frac{256 - H(t)}{H(t)}\right)$.
Gebruik de gegevens in de tabel.

c Toon aan dat er een eerstegraads functie is die de functie F redelijk benadert en geef het bijpassende functievoorschrift.

d Leid uit de resultaten van b en c een functievoorschrift van H als functie van de tijd af.

e Bereken de groeisnelheid van deze zonnebloemen op $t = 1$. Waarom is de gemiddelde groei gedurende de tweede week groter?

f Bereken de groeisnelheid van deze zonnebloemen op $t = 10$. Waarom is de gemiddelde groei gedurende de tiende week kleiner?

g Op welke dag na het ontkiemen van de zonnebloemen groeien ze het snelst? Hoe snel groeien de zonnebloemen dan?

Opgave 15

In de tabel zie je de meetresultaten van een onderzoek naar het verband tussen de massa m van het dier en de energie E die het nodig heeft om zich over één kilometer te verplaatsen.

dier	m (gram)	E (calorieën)
muis	21	270
eekhoorn	236	870
witte rat	384	$1{,}7 \cdot 10^3$
hond (klein)	$2{,}6 \cdot 10^3$	$4{,}4 \cdot 10^3$
hond (groot)	$1{,}8 \cdot 10^4$	$1{,}7 \cdot 10^4$
schaap	$3{,}9 \cdot 10^4$	$2{,}3 \cdot 10^4$
paard	$5{,}8 \cdot 10^5$	$5{,}8 \cdot 10^5$

Tabel 4.7

a Teken deze gegevens op dubbellogaritmisch grafiekenpapier. Zet m uit op de horizontale as en E op de verticale as.

b Waarom kun je bij benadering aannemen, dat er tussen m en E een verband van de vorm $E = a \cdot m^b$ bestaat?

c Bereken passende waarden van a en b.

d Bereken het energieverbruik per km van een kat met een massa van 3,2 kg.

Opgave 16

De volgende alinea's zijn vrij naar een artikel dat in 1991 in een krant stond.

FAO luidt noodklok

"Elk jaar verdwijnt steeds meer tropisch oerwoud. In 1990 was de afname wel anderhalf keer zo groot als in 1980." Dit stelt de FAO, de voedsel- en landbouworganisatie van de Verenigde Naties, in een zondag verschenen rapport met nieuwe gegevens over de ontbossing van de aarde.

1 – In 1990 verdween in de tropen zeventien miljoen hectare oerwoud. Dit is een gebied even groot als Oostenrijk, Denemarken en Nederland samen.

2 – Er was op 1 januari 1990 nog 2900 miljoen hectare tropisch oerwoud over.

3 – De FAO wijst naar de geïndustrialiseerde landen waar de ontbossing een halt is toegeroepen. Tussen 1 januari 1980 en 1 januari 1985 is de bosoppervlakte in die landen met 5 procent toegenomen tot 2100 miljoen hectare.

Een lezer van dit artikel probeert de gegeven informatie in een wiskundig model te verwerken om daarmee te kijken wat de gevolgen zullen zijn als de afname van het tropisch oerwoud op dezelfde wijze blijft voortduren. Zij noemt de oppervlakte aan tropisch oerwoud (in miljoenen hectare) dat op tijdstip t nog aanwezig is $y(t)$. Zij neemt $t = 0$ op 1 januari 1980 en t in jaren.

a Leg uit waarom zowel een formule van de vorm $y(t) = a \cdot t + b$ als een formule van de vorm $y(t) = a \cdot g^t$ niet in overeenstemming is met de gegevens uit het krantenartikel.

De lezer kiest voor een formule van de vorm $y(t) = b - a \cdot g^t$.
Uit de in de alinea's 1, 2 en 3 verstrekte gegevens leidt zij deze waarden af: $b = 3311$, $a = 274$ en $g = 1{,}0414$.

b Laat zien dat de formule met die waarden in overeenstemming is met de in de alinea's 1, 2 en 3 gegeven informatie.

Wanneer de ontbossing op dezelfde wijze blijft voortduren, zal op een gegeven moment minder dan 1000 miljoen hectare tropisch oerwoud overblijven.

c Bereken in welk jaar dat volgens de door de lezer gevonden formule zal gebeuren.

Het oorspronkelijke krantenartikel begon met de zin: "De tropische oerwouden verdwijnen anderhalf keer zo snel als 10 jaar geleden."

d Onderzoek met behulp van differentiëren of de door de lezer gevonden formule ook hiermee in overeenstemming is.

Toepassen

Bij het oogsten van koren wordt vaak gewerkt met een combine, of maaidorser. In zo'n maaidorser wordt in twee etappes gedorst: eerst in de dorstrommel en daarna op de zogenaamde 'schudder', waar het graan (de graankorrels) tijdens het doorlopen van een traject uit het stro wordt geschud. De snelheid waarmee de hoeveelheid graan G (in kg) in het stro door het schudden afneemt, is recht evenredig met die hoeveelheid zelf:

$G'(x) = -k \cdot G(x)$

waarin x de afstand tot het begin van de schudder in meters is.

Figuur 4.13

Opgave 17

Bekijk **Toepassen**.

a Verklaar de formule in de tekst, met name ook het minteken.

Neem $k = 0{,}2$. Dan moet gelden $G'(x) = -0{,}2 \cdot G(x)$.

b Toon aan dat de functie $G(x) = 100 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2x}$ hieraan voldoet.

c Ga uit van een schudder met een totale lengte van 6 m. Hoeveel procent van de hoeveelheid graan aan het begin van de schudder is aan het einde nog niet uit het stro geschud?

Opgave 18

k heet de scheidingsfactor van het proces van schudden zoals beschreven in **Toepassen**. De scheidingsfactor hangt af van de snelheid v (in m/s) van de maaidorser. Er geldt $k = \frac{1}{v}$.

a Verklaar de naam 'scheidingsfactor'. Hoeveel procent van het graan wordt niet uit het stro geschud als de maaidorser rijdt met een snelheid van 2 m/s?

b Is er een snelheid mogelijk waarbij alle graan uit het stro wordt geschud?

Testen

Opgave 19

Bij een slingerproef is de slingerperiode T voor een aantal verschillende slingerlengten l gemeten.

a Laat zien met behulp van logaritmisch papier, dat de meetresultaten in overeenstemming zijn met de veronderstelling, dat T een machtsfunctie is van l: $T = A \cdot l^a$.

b Bereken A en a.

l (cm)	T (s)
63,5	1,65
87,5	1,87
140,5	2,38
225,0	3,00
320,0	3,55

Tabel 4.8

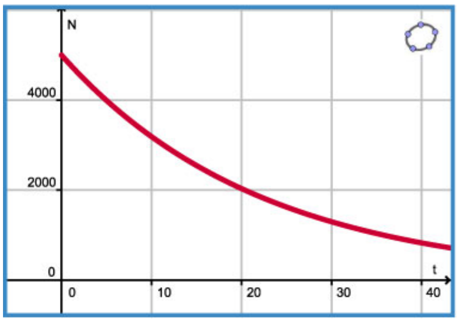
Opgave 20

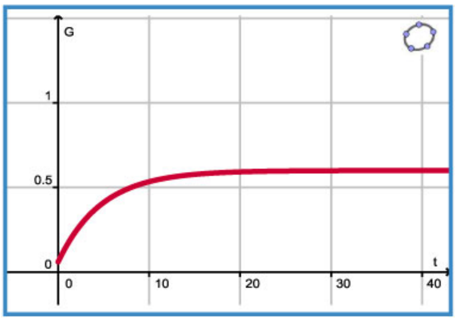
Een forellenkweker zet in elk van zijn kweekvijvers steeds 5000 jonge forellen uit. Die forellen nemen vanaf dat moment ($t = 0$) in gewicht toe, maar er sterven ook forellen. Hij heeft al een aantal jaren maandelijks de stand van de forellen bijgehouden. Op grond daarvan kan hij formules opstellen voor de groei van zo'n populatie forellen. Als t de tijd in maanden is, dan geldt:

- $N(t) = 5000 \cdot \text{e}^{a \cdot t}$ waarin N het aantal forellen is.
- $G(t) = G_{\text{eind}} - b \cdot \text{e}^{c \cdot t}$ waarin G het gewicht per forel in kg is.

G_{eind} stelt het gewicht voor dat een gemiddelde forel steeds meer zal benaderen naarmate hij ouder wordt.

Figuur 4.14





Figuur 4.15

a De uitgezette forellen wegen gemiddeld 65 gram. Stel nu met behulp van de grafieken de juiste formules op voor $N(t)$ en $G(t)$.

b Stel een formule op voor het totale gewicht aan forellen in deze vijver.

c Als de forellenkweker zijn kweekvijver wil leegvissen als het totale gewicht aan forellen maximaal is, hoeveel maanden na het uitzetten moet hij dat dan doen?

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Exponentiële en logaritmische functies**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- het getal e de natuurlijke logaritme — afgeleide van $f(x) = \mathrm{e}^x$
- afgeleide van een exponentiële functie
- afgeleide van een logaritmische functie
- groeimodellen, o.a. geremde exponentiële groei — enkellogaritmisch en dubbellogaritmisch grafiekenpapier

Activiteitenlijst

- werken met het getal e en de natuurlijke logaritme
- exponentiële functies differentiëren
- logaritmische functies differentiëren
- verschillende groeimodellen herkennen — werken met enkel- en dubbellogaritmisch grafiekenpapier

Achtergronden

Het getal e heeft (waarschijnlijk) zijn naam gekregen door **Leonhard Euler (1707—1783)**. Het getal komt voor het eerst voor in een tabel van natuurlijke logaritmen in de appendix van een boek over logaritmen van **John Napier (1550—1617)**. Alleen de constante zelf wordt er niet in genoemd, er wordt alleen met natuurlijke logaritmen gewerkt.

De ontdekking van het getal dat later de naam e kreeg is van **Jakob Bernoulli (1654—1705)** die het volgende probleem op het gebied van de renteberekening onderzocht:

Figuur 5.1 Jakob Bernoulli

Stel je hebt 1 euro en je krijgt jaarlijks 100% rente, dan heb je aan het einde van dat jaar 2 euro.
Stel je nu voor dat je elk half jaar 50% rente krijgt, dan heb je aan het einde van het jaar $1 \cdot 1{,}5^2 = 2{,}25$ euro. Zo kun je door gaan. Als je het jaar in n delen verdeeld en je krijgt steeds $100/n\%$ rente, dan heb je aan het einde $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ euro.
Als n heel groot wordt, nadert dit getal naar het getal $\mathrm{e} = 2{,}71828...$

Tabel 5.1

Leonhard Euler begon in 1727 de letter e te gebruiken. Het getal e komt voor het eerst voor in Euler's 'Mechanica' (1736). Waarom het nu precies e is geworden zal niemand ooit weten: het is de eerste letter van het woord 'exponent', maar ook de eerste letter van 'Euler', en misschien was er wel een heel andere aanleiding...

Testen

Opgave 1

Het aantal inwoners van een bepaalde stad B groeide vanaf 1990 met $1{,}5\%$ per jaar. Op 01-01-2018 heeft deze stad 600000 inwoners.

Er wordt verondersteld dat de groei de komende jaren zo door gaat. Op het stadhuis is de volgende formule opgesteld:

$N(t) = 6 \cdot 10^5 \cdot \mathrm{e}^{0{,}015t}$

Hierin is:

- t de tijd in jaren na 2018
- N het aantal inwoners van B

a Laat zien dat deze formule inderdaad een bevolkingsgroei van $1{,}5\%$ laat zien.

b Hoeveel inwoners had B volgens dit groeimodel in 2000?

c Hoeveel bedraagt de groeisnelheid 2018? En in 2028?

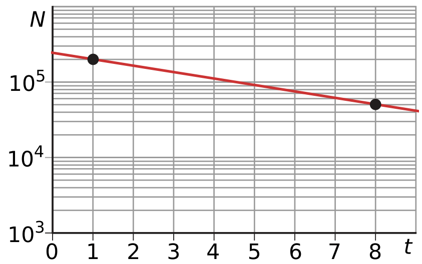
d In welk jaar overstijgt het aantal inwoners van B volgens dit groeimodel de 1 mln?

Opgave 2

Je ziet hier hoe een hoeveelheid N afneemt met de tijd t in dagen.

a Stel een bij deze grafiek passende formule op.

b Voor welke waarde van t (in één decimaal nauwkeurig) is $N(t) \leq 10.000$?



Figuur 5.2

Opgave 3

Belangrijk nieuws verspreidt zich razendsnel. Het aantal leerlingen N dat op een zeker tijdstip t van een belangrijk feit op de hoogte is, wordt gegeven door de formule

$N(t) = 1200\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}31t}\right)$

Hierin is t in uren en is $t = 0$ om 09:00 uur.

a Op grond van deze formule kun je concluderen dat het aantal leerlingen dat van een belangrijk feit op de hoogte is uiteindelijk ongeveer constant wordt? Leg uit waarom.

b Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $N(t)$.

c Bereken algebraïsch op welk tijdstip er 550 leerlingen van het feit gehoord hebben. Rond in het antwoord af op minuten.

d Voor de snelheid v waarmee het nieuws zich verspreidt geldt: $v(t) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$. Hoe ziet de formule voor de snelheid van de nieuwsverspreiding er uit? Kun je op grond van deze formule dezelfde conclusies als bij a trekken?

e Toon algebraïsch aan dat de grafiek van N stijgend is.

f Met welke snelheid verspreidt het nieuws zich om kwart voor 11? Geef het antwoord in gehelen per minuut.

g Op welk tijdstip is de snelheid van de nieuwsverspreiding de helft van die om 09:00 uur? Geef dit tijdstip in minuten nauwkeurig.

Opgave 4

Hardlopers die regelmatig een bepaalde afstand lopen, zijn vaak nieuwsgierig naar hun eindtijd op een andere afstand. De Amerikaanse onderzoeker Pete Riegel stelde in 1977 de volgende formule op:

$$v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{0{,}06}$$

Hiermee kan met behulp van de bekende gemiddelde snelheid v_1 op een bepaalde afstand s_1, de te verwachten gemiddelde snelheid v_2 op een andere afstand s_2 worden uitgerekend.

Hardlopers gebruiken vaak de volgende vuistregel: als de afstand verdubbelt, dan neemt je gemiddelde snelheid met 6% af.

a Onderzoek of de bovenstaande formule aan deze vuistregel voldoet.

In de onderstaande tabel staan de wereldrecords hardlopen op de weg bij de heren op een aantal afstanden zoals ze in het jaar 2015 waren.

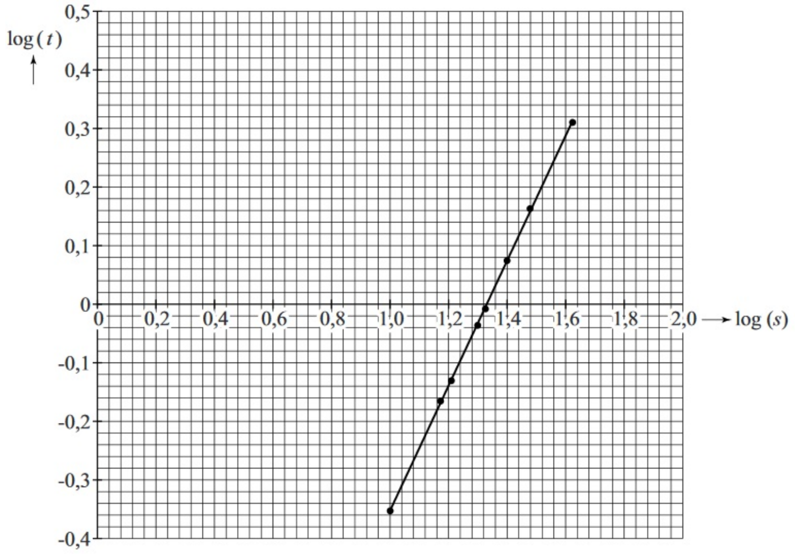
		Wereldtijd in 2015		
Wedstrijd	**Afstand (m)**	**Uren**	**Minuten**	**Seconden**
10 km	10000		26	44
15 km	15000		41	13
10 mijl	16093		44	23
20 km	20000		55	21
halve marathon	21097		58	23
25 km	25000	1	11	18
30 km	30000	1	27	37
marathon	42195	2	02	57

Tabel 5.2

In de hardloopsport wordt vaak gekeken naar de tijd die een hardloper gemiddeld over een kilometer doet. Dit wordt het looptempo genoemd.

b Bereken het looptempo van het wereldrecord op de marathon in het jaar 2015. Geef je eindantwoord in hele minuten en seconden nauwkeurig.

In onderstaande figuur is de logaritme van de tijd t in uren tegen de logaritme van de afstand s in kilometers van de wereldrecords op de afstanden uit de tabel uitgezet. Deze punten liggen bij benadering op een rechte lijn, die ook in de figuur is getekend.



Figuur 5.3

c Bepaal met behulp van de lijn in de figuur het te verwachten wereldrecord hardlopen op een afstand van 50 kilometer. Geef je eindantwoord in hele uren en minuten nauwkeurig.

Opgave 5

Het verloop van de temperatuur van een huis is veel complexer dan dat van een afkoelende kop koffie of een opwarmend blikje cola. Denk bijvoorbeeld aan zonne-instraling, cv, tocht, etc. Toch spelen ook aan de basis hiervan exponentiële functies een rol. Je kijkt eerst naar een ruimte in de vorm van een balk, en verwaarloost tocht en zonnestraling. Hoe reageert de temperatuur van zo'n huis op het aan- en uitzetten van de cv? Ga uit van de situatie dat de buitentemperatuur constant gelijk is aan 10 °C, en de binnentemperatuur gelijk aan 20 °C. Als de cv niet aanstaat, dan heb je ongeveer de situatie van de afkoelende kop koffie: de snelheid waarmee de temparatuur T in huis daalt is recht evenredig met het temperatuurverschil met de buitentemperatuur.

a Voor een bepaald huis is de waarde van de evenredigheidsconstante c gelijk aan $-0{,}0018$ (eenheid: min^{-1}). Hoe lang duurt het voor het binnen is afgekoeld tot 15 graden Celsius? En hoelang duurt het voor de temperatuur een halve graad is gezakt?

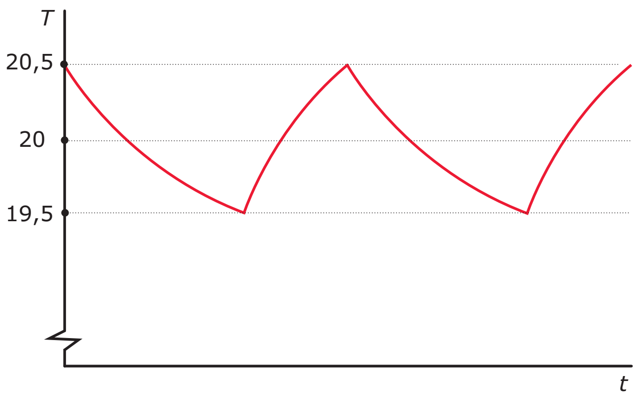
b Hoeveel graden neemt de temperatuur in het begin af per minuut, en hoeveel na een uur?

Bij $19{,}5$ graden zet je de cv aan. Dit zorgt voor een temperatuurstijging. Hoe groot zal deze worden? Dat hangt af van veel factoren, waarvan de belangrijkste zijn: de grootte van de cv-ketel, en de grootte van het warmteverlies naar de omgeving. Bij een grotere cv-ketel zal de eindtemperatuur ook hoger zijn. Stel dat de eindtemperatuur T_c voor dit huis 35 graden is (je zult lang daarvoor de cv natuurlijk uitschakelen, maar het gaat nu om de 'evenwichtssituatie' die zal ontstaan als je de cv steeds aan laat staan). Hoe zal het temperatuurverloop zijn? Er geldt: $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = c \cdot (T - T_c)$ (waarbij c de zelfde evenredigheidsconstante is als in de situatie zonder cv!), en T_c de eindtemperatuur is in het geval dat de cv blijft aanstaan.

c Ga na dat de temperatuur volgens de formule inderdaad stijgt.

d Hoelang duurt het voor het weer 20 graden Celsius is?

Je wilt de temperatuur nu zo dicht mogelijk bij die 20 graden houden. Met een besturingssysteem zet je de cv nu steeds aan- en uit als je hier een halve graad van afzit. Je kunt dan de temperatuurkromme tekenen. Er ontstaat een soort zaagtand.



Figuur 5.4

e Hoe lang duurt het voor de cv weer afslaat? Hoe lang duurt het vervolgens voor hij opnieuw aanspringt? Wat is dus de periode van de temperatuurregeling? Welk deel van de tijd brandt de cv?

f Stel je voor dat je de cv-ketel sneller kunt aansturen, door de cv te schakelen bij een kwart graad afwijking van de gewenste temperatuur. Hoelang wordt de periode dan? Welk deel van de tijd brandt de cv? Licht de antwoorden toe.

Als het buiten kouder wordt, kan de cv de ruimte minder goed verwarmen. De 'evenwichtstemperatuur' zakt dan ook: de cv kan de ruimte tot maximaal 25 graden boven de buitentemperatuur verwarmen.

g 's Avonds koelt het buiten af tot 3 graden Celsius. Bereken nu in beide gevallen de periode en het percentage dat de cv brandt. De waarde van c blijft gelijk.

Toepassen

Opgave 6: Vissen in de Grevelingen

De Grevelingen (thans het Grevelingenmeer) is een voormalige zeearm van de Noordzee, gelegen tussen de eilanden Goeree-Overflakkee en Schouwen-Duiveland, op de grens van de provincies Zuid-Holland en Zeeland. In het kader van de Deltawerken werd de Grevelingen door de Grevelingendam (1965) en de Brouwersdam (1971) van zee afgesloten. Het Grevelingenmeer is het grootste zoutwatermeer van West-Europa, en is vooral van belang voor de watersport en recreatie. Het zoutgehalte van het Grevelingenmeer wordt op peil gehouden door de Brouwerssluis, een doorlaatsluis in de Brouwersdam, waarmee zeewater ingelaten wordt. Een gebied met een oppervlakte van 13.872 ha is aangemerkt als beschermd Natura 2000-gebied.

In 1985 werd voor enkele vissoorten het verloop van hun populatiegrootte in modellen beschreven. Omdat enkele vissoorten zoals de schol zich in het afgesloten Grevelingenmeer niet meer konden voortplanten moest de mens een handje helpen. De larven van de schol zwemmen recht op na hun geboorte en zien er dan ook uit als andere vissen. Na ongeveer 6 weken ondergaan ze een gedaanteverwisseling, waarbij een van hun ogen naar de andere kant groeit en ze zich tot platvis ontwikkelen en een jonge schol worden. Voor de schol werden er twee modellen ontworpen:

Figuur 5.5

- Model A: Er worden jaarlijks 5 miljoen larven en 200.000 schollen ouder dan 1 jaar uitgezet in het Grevelingenmeer.
- Model B: Er worden jaarlijks 2 miljoen larven en 100.000 schollen ouder dan 1 jaar uitgezet in het Grevelingenmeer.

Voor beide modellen geldt dat de sterfte onder jonge schollen (jonger dan 1 jaar) 90% per jaar is en onder schollen ouder dan 1 jaar 33% per jaar. Alle larven worden jonge schollen. Neem aan dat er in 1985 nog 300.000 schollen ouder dan 1 jaar in het Grevelingenmeer zaten.

a Maak op grond van model A een tabel van het aantal schollen ouder dan 1 jaar gedurende de eerste 10 jaren na 1985.

b Teken een grafiek van het aantal schollen S ouder dan 1 jaar in de loop van de jaren.

c Voor S geldt een groeimodel van de vorm $S(t) = G - a \cdot \mathrm{e}^{bt}$. Welke waarde voor G schat je op grond van de grafiek bij b? Bereken nu ook de waarden van a en b.

d Er is in dit model nog geen rekening gehouden met bevissing. De visserijmortaliteit is 23% per jaar. Wat betekent dit?

e Pas je model A aan en onderzoek wat dit betekent voor het aantal schollen op den duur.

Opgave 7: Verouderende populaties

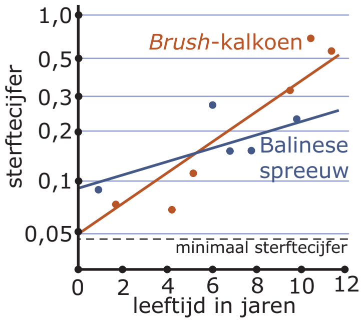
Van een zekere populatie neemt met een toenemende leeftijd x van het individu het aantal individuen van die leeftijd meestal af. Die afname wordt door demografen uitgedrukt in het sterftecijfer m (van ‘mortality’), dat is het deel van het aantal individuen van een bepaalde leeftijd dat er jaarlijks sterft. Bij een constant sterftecijfer neemt het aantal individuen van een bepaalde leeftijd $S(x)$ (van ‘survivors’) exponentieel af.

a Verklaar waarom dat zo is.

Bij verouderende populaties blijft het sterftecijfer niet constant, maar wordt het bij hogere leeftijden steeds groter. In dat geval geldt de zogenaamde Gompertzvergelijking:

$m(x) = M \cdot \mathrm{e}^{G \cdot x}$

waarin M het sterftecijfer van volgroeide individuen voorstelt en x de leeftijd is van een individu. G heet de Gompertz-constante. Deze Gompertz-constante is een maat voor de verouderingssnelheid. Hier zie je de grafieken van $m(x)$ voor de Australische Brush-kalkoen en de Balinese spreeuw. Van Australische Brush-kalkoenen is $M = 0{,}05$ en $G = 0{,}21$.



Figuur 5.6

b Ga na hoe deze getallen zijn terug te vinden in de grafieken van het sterftecijfer.

c Stel voor deze soort een Gompertz-vergelijking voor het sterftecijfer op en ga na of hij past bij de getekende grafiek.

d Als een populatie Brush-kalkoenen 100 volgroeide 0-jarige individuen kent, hoeveel 10-jarige individuen zou die populatie dan moeten hebben?

e Schat nu zelf met behulp van de grafiek de waarden van M en G die gelden voor de Balinese spreeuw. Stel ook voor deze soort de Gompertz-vergelijking op.

Een andere maat voor de veroudering van een populatie is de verdubbelingstijd van het sterftecijfer, de $SCVT$.

f Toon aan dat $SCVT = \frac{\ln(2)}{G}$.

g Bereken de $SCVT$ voor zowel de Brush-kalkoen als de Balinese spreeuw.

h $S(x)$ stelt het aantal volwassen individuen van een populatie met de leeftijd x voor. Teken grafieken van $S(x)$ voor een populatie Australische Brush-kalkoenen en voor een populatie Balinese spreeuwen. Ga bij beide populaties uit van 100 volgroeide 0-jarige individuen. Vergelijk beide grafieken en de verouderingsprocessen van beide populaties.

Examen

Opgave 8: Aardbevingen

Aardbevingen worden geregistreerd met een **seismograaf**, die aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. Verspreid over de aarde staan veel seismografen opgesteld. De uitwijking van een seismograaf hangt af van de afstand van dit instrument tot de plaats aan de oppervlakte van de aarde waar de beving het eerst optreedt. Deze plaats noemt men het epicentrum van de aardbeving. Om aardbevingen met elkaar te kunnen vergelijken gebruikt men seismogrammen die op een afstand van 100 km van het epicentrum zijn gemaakt (standaard seismogrammen). De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Bij deze schaal wordt de logaritme (met grondtal 10) gebruikt van de grootste uitwijking in micrometer die in het seismogram voorkomt.

a Leg uit, dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitwijking van de seismograaf 10 keer zo groot wordt.

De aardbeving in Nederland van 13 april 1992 had een kracht van 5,5 op de schaal van Richter. De kracht van de aardbeving op 27 februari 2010 in Chili was 8,8.

b Bereken de verhouding tussen deze twee grootste uitwijkingen.

Als op een bepaald waarnemingsstation een seismogram gemaakt is en je weet de plaats van het epicentrum, dan kun je met de volgende formule de kracht van de aardbeving berekenen:

$$R = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 1{,}66 \cdot \log(D) + 3{,}30$$

Hierin is:

- R de kracht van de aardbeving uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter;
- A de grootste uitwijking in het seismogram in μm (1 μm = 0,001 mm);
- T de tijd in seconden van de trilling met de grootste uitwijking;
- D de grootte in graden van de hoek tussen de verbindingslijnstukken ME en MW, waarin M het middelpunt van de aarde, E het epicentrum van de aardbeving en W de plaats van het waarnemingsstation is.

Uit de formule volgt inderdaad dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitslag van de seismograaf 10 keer zo groot wordt (bij dezelfde T en D).

c Toon dit aan.

Van de Chileense aardbeving van 2010 werd een seismogram opgenomen. De trillingen gaven daar een maximale uitslag van 1500 μm; de trillingstijd T bedroeg 20 s. Na invulling van D werd $R = 8{,}8$ gevonden. Neem aan dat de omtrek van de aarde 40.000 km is.

d Bereken de afstand over de aardbol tussen de plaats waar het seismogram werd opgenomen en het epicentrum in Chili in honderden kilometers nauwkeurig.

Ook op diverse andere plaatsen werd in 2010 een seismogram van de Chileense aardbeving opgenomen. Op al die plaatsen berekende men dat de kracht van de aardbeving 8,8 was.

e Toon aan dat hieruit volgt dat tussen A, T en D een verband bestaat van de vorm: $D = p \cdot \left(\frac{T}{A}\right)^q$ en bereken p en q in twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen wiskunde B havo 1994, eerste tijdvak, aangepast)

Opgave 9: Medicijn

Als een patiënt een dosis van een medicijn toegediend krijgt, zal de concentratie van dit medicijn in het bloed eerst toenemen en daarna afnemen. Van een bepaald medicijn wordt de concentratie C (in mg/cm^3) in het bloed gegeven door de formule:

$C(t) = 0{,}12 \cdot t \cdot \text{e}^{-0{,}5t}$

Hierbij is t het aantal uren na het toedienen van één dosis van het medicijn.
Van dit medicijn is bekend dat het werkzaam is zolang C groter is dan $0{,}035$ mg/cm^3. De tijd dat het medicijn werkzaam is bij één keer toedienen is minder dan 6 uur.

a Bereken in minuten nauwkeurig hoe lang het medicijn in dit geval werkzaam is.

Er geldt: $C'(t) = 0{,}12(1 - 0{,}5t)\,\text{e}^{-0{,}5t}$.

b Toon dit aan.

Er is een tijdstip waarop de concentratie het sterkst afneemt.

c Bereken dit tijdstip.

Het medicijn wordt in gelijke doses toegediend met tussenpozen van 6 uur. Omdat 6 uur na de eerste keer toedienen van het medicijn een tweede dosis wordt toegediend, geldt vanaf $t = 6$ tot $t = 12$ de volgende formule voor de concentratie C^* (in mg/cm^3) van het medicijn in het bloed:

$C^*(t) = C(t) + C(t - 6)$

Bij elke nieuwe dosis verandert de formule voor de concentratie van het medicijn in het bloed. In elke periode van 6 uur heeft de concentratie van het medicijn in het bloed een maximale waarde. De maximale waarde wordt in elke volgende periode van 6 uur iets groter. Het medicijn kan schadelijke gevolgen hebben als de concentratie boven de $0{,}11$ mg/cm^3 komt.

d Onderzoek of dit het geval is binnen 24 uur na het begin van het toedienen van het medicijn.

(bron: examen vwo wiskunde B vwo 2007, tweede tijdvak)

2

Toepassen van formules

2.1 Evenredig en lineair

Inleiding

Je hebt al kennis gemaakt met diverse soorten verbanden, beschreven door formules. Recht evenredigheid en omgekeerd evenredigheid komt veel voor. Daarbij horen lineaire en gebroken verbanden. De formules daarvan zijn betrekkelijk eenvoudig en ze worden daarom veel gebruikt, bijvoorbeeld bij het vergelijken van autokosten.

Figuur 1.1 bron: anwb.nl

Je leert in dit onderwerp

- recht evenredige, lineaire, omgekeerd evenredige en hyperbolische verbanden herkennen en gebruiken;
- lineair interpoleren en extrapoleren.

Voorkennis

- werken met lineaire verbanden, waaronder recht evenredige verbanden;
- werken met gebroken functies, waaronder omgekeerd evenredige verbanden.

Verkennen

Opgave V1

Iemand heeft een eigen auto en stelt de autokosten per jaar K alleen afhankelijk van het aantal gereden kilometers g. Ga uit van een gemiddeld verbruik van 1 liter brandstof op 20 kilometer en een gemiddelde brandstofprijs van € 1,670 per liter.

a Zijn K en g recht evenredig, omgekeerd evenredig of nog iets anders?

Daarnaast zijn er nog jaarlijkse vaste kosten voor de auto.

- afschrijving € 1040,00
- garagekosten € 425,00
- wegenbelasting € 296,00
- premie verzekering € 480,00

Die wil je ook meerekenen.

b Zijn K en g recht evenredig, omgekeerd evenredig of nog iets anders?

Het verbruik van een auto is het aantal kilometer dat een auto kan rijden op 1 liter brandstof. Het verbruik kan variëren afhankelijk van onder andere de snelheid waarmee de auto rijdt en de weersomstandigheden. Er is een verband tussen het (gemiddelde) verbruik v en de autokosten per jaar K.

c Zijn K en v recht evenredig, omgekeerd evenredig of nog iets anders?

Uitleg 1

De kosten die het bezit van een auto jaarlijks met zich meebrengt hangen onder andere af van het aantal gereden kilometer, het verbruik per kilometer, de brandstofprijs, de jaarlijkse afschrijving, de garagekosten, de wegenbelasting en de premie van de verzekering.

Deze autokosten per jaar zijn:

- recht evenredig, als je de kosten alleen afhankelijk stelt van het aantal gereden kilometers met een vast (gemiddeld) verbruik per kilometer en een vaste (gemiddelde) brandstofprijs.
  Bij een recht evenredig verband hoort een formule van de vorm: $y = ax$.
  Hierin is a de evenredigheidsconstante.
- lineair, als je de kosten afhankelijk stelt van het aantal gereden kilometers en als je ook de vaste kosten meetelt zoals jaarlijkse afschrijving, de garagekosten, de wegenbelasting en de premie van de verzekering.
  Bij een lineair verband hoort een formule van de vorm: $y = ax + b$.
  Hierin is b het begingetal en a de richtingscoëfficiënt van de grafiek.
- omgekeerd evenredig, als je de kosten alleen afhankelijk stelt van het verbruik, namelijk het aantal kilometers dat de auto kan rijden op 1 liter brandstof met een vast (gemiddeld) aantal gereden kilometer per jaar en een vaste (gemiddelde) brandstofprijs.
  Bij een omgekeerd evenredig verband hoort een formule van de vorm: $y = \frac{a}{x}$
  Hierin is a een constante.
- hyperbolisch, als je niet alleen de kosten afhankelijk stelt van het verbruik, maar ook de vaste kosten meetelt zoals jaarlijkse afschrijving, de garagekosten, de wegenbelasting en de premie van de verzekering.
  Bij een hyperbolisch verband hoort een formule van de vorm: $y = \frac{a}{x} + b$
  Hierin zijn a en b constanten.

Figuur 1.2 bron: anwb.nl

Opgave 1

Iemand heeft een eigen auto en stelt de autokosten per jaar K alleen afhankelijk van het aantal gereden kilometers g, uitgaande van een gemiddeld verbruik van 1 liter brandstof op 20 kilometer en een gemiddelde brandstofprijs van € 1,670 per liter.

a Als hij het ene jaar twee keer zo veel kilometers rijdt als het andere jaar, wat gebeurt er dan met de autokosten per jaar?

b Wat voor soort verband is er tussen K en g?

c Stel een formule op bij het verband tussen K en g.

d De jaarlijkse autokosten waren in 2016 € 1806,44.
Bereken hoeveel kilometer hij in 2016 heeft gereden.

e In 2017 wil hij niet meer dan € 1750,00 aan autokosten kwijt zijn. Hoeveel kilometer kan hij maximaal rijden in 2017?

Opgave 2

Iemand stelt de autokosten per jaar K niet alleen afhankelijk van het aantal gereden kilometers g bij een gemiddeld verbruik van 1 liter brandstof op 20 kilometer en een gemiddelde brandstofprijs van € 1,670 per liter.
Zij rekent ook de jaarlijkse vaste kosten voor de auto:

- afschrijving € 1040,00
- garagekosten € 425,00
- wegenbelasting € 296,00
- premie verzekering € 480,00

a Wat voor soort verband is er tussen K en g?

b Stel een formule op bij het verband tussen K en g.

c Ze wil in 2018 niet meer dan € 4000,00 aan autokosten kwijt zijn. Hoeveel kilometer kan ze maximaal rijden in 2018?

Opgave 3

Het verbruik van een auto is het aantal kilometer dat een auto kan rijden op 1 liter brandstof. Het verbruik kan variëren afhankelijk van onder andere de snelheid waarmee de auto rijdt en de weersomstandigheden. Er is een verband tussen het (gemiddelde) verbruik v en de autokosten per jaar K.

a Als v twee keer zo klein wordt, wat gebeurt er dan met K?

b Wat voor soort verband is er tussen K en v?

Een autobezitter stelt de autokosten per jaar K alleen afhankelijk van het gemiddelde verbruik v. Hij gaat uit van een gemiddeld aantal gereden kilometers per jaar van 20000 km en een gemiddelde brandstofprijs van € 1,620 per liter. Als deze auto een gemiddeld verbruik heeft van 1 liter op 18 kilometer, dan zijn de autokosten per jaar € 1800,00.

c Stel een mogelijke formule op bij het verband tussen K en v.

d Bereken de jaarlijkse autokosten als deze auto een gemiddeld verbruik heeft van 1 liter op 20 kilometer.

e Bereken het gemiddelde verbruik van de auto als de jaarlijkse autokosten € 1705,00 zijn.

f Daarnaast zijn er jaarlijks € 2150,00 aan vaste kosten voor de auto. Pas de formule uit c zo aan, dat daarin deze vaste kosten worden meegenomen.
Wat voor soort verband beschrijft deze formule?

Uitleg 2

Je ziet hier een tabel van het aantal leerlingen in de brugklas van een school gedurende een aantal jaar.

tijd (jaar)	1995	2000	2005	2010	2015
aantal leerlingen	88	95	89	102	114

Tabel 1.1

Het aantal leerlingen dat in 2002 in de brugklas zat, kun je schatten.
In 2000 zaten er 95 leerlingen in de brugklas en in 2005 waren dat er 89.

In de tussentijd neem je aan dat het aantal daalde met $\frac{95-89}{5} = 1{,}2$ leerlingen per jaar.
In 2002 zaten er dan naar schatting $95 - 2 \cdot 1{,}2 = 92{,}6 \approx 93$ leerlingen in de brugklas.

Deze manier van schatten heet lineair interpoleren. Je gaat er vanuit dat tussen de twee meetpunten de waarden steeds gelijkmatig toe- of afnemen.

Het aantal leerlingen dat in 2028 in de brugklas zal zitten, kun je ook schatten.
In 2010 zaten er 102 leerlingen in de brugklas en in 2015 waren dat er 114.

Dat is per jaar een stijging van $\frac{114-102}{5} = 2{,}4$ leerlingen.

In 2028 zitten er naar schatting $114 + 13 \cdot 2{,}4 \approx 145$ leerlingen in de brugklas.

Deze manier van schatten heet lineair extrapoleren. Je neemt weer aan dat de waarden steeds gelijkmatig blijven toe- of afnemen.

Het verschil tussen interpoleren en extrapoleren is dat je in het eerste geval een schatting geeft voor een waarde binnen de tabel (in 2002) en in het tweede geval voor een waarde buiten de tabel (in 2028).

Opgave 4

Bekijk de tabel in **Uitleg 2**. Schat de volgende aantallen door middel van lineair interpoleren/extrapoleren.

a Het aantal leerlingen dat in 1997 in de brugklas zat.

b Het aantal leerlingen dat in 2022 in de brugklas zal zitten.

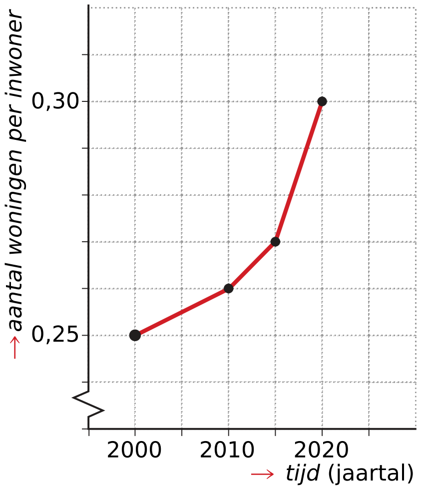
c Het aantal leerlingen dat in 1993 in de brugklas zat.

Opgave 5

Bekijk de grafiek met het aantal woningen per inwoner in de periode 2000-2020 in de gemeente D.

a Schat door lineair interpoleren het aantal woningen per inwoner in 2005.

b Schat door lineair extrapoleren het aantal woningen per inwoner in 2024.



Figuur 1.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als er een **lineair** verband bestaat tussen y en x heeft de bijbehorende formule de vorm $y = ax + b$, waarin:

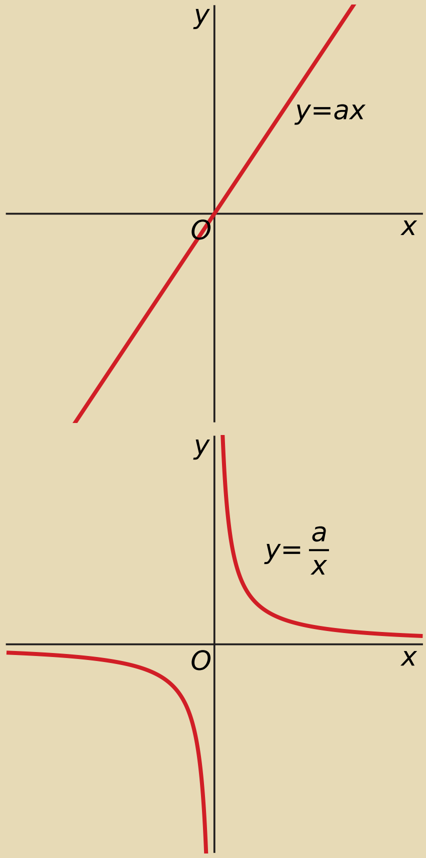
- a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt is van de rechte lijn die de grafiek van dit verband is;
- b het begingetal is: de waarde van y bij het snijpunt met de y-as.

Als $b = 0$ gaat de lijn door de oorsprong van het assenstelsel. De formule heeft dan de vorm $y = ax$ en in dat geval is y **recht evenredig** met x.
Er geldt: als x k keer zo groot wordt, wordt y ook k keer zo groot.

Twee variabelen x en y zijn **omgekeerd evenredig** wanneer geldt: als x k keer zo groot wordt, wordt y k keer zo klein. Bij een omgekeerd evenredig verband hoort een formule van de vorm: $y = \frac{a}{x}$.
In de figuur is de grafiek van een omgekeerd evenredig verband getekend.

Waarden die niet in de tabel of grafiek voorkomen, kun je alleen schatten. Dat kan door:

- **lineair interpoleren**: het schatten van punten tussen twee meetpunten, waarbij je aanneemt dat tussen die twee meetpunten de waarden steeds gelijkmatig toe- of afnemen.
- **lineair extrapoleren**: het schatten van punten buiten het gebied met meetpunten, waarbij je ook aanneemt dat de waarden steeds gelijkmatig blijven toe- of afnemen.



Figuur 1.4

Voorbeeld 1

De kosten voor leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3. Daarnaast zijn er ook kosten voor het gebruik van de waterleiding, het zogenoemde vastrecht. Het vastrecht in deze regio is € 65,00 per jaar.

Beschrijf in de volgende gevallen het soort verband en stel een formule ervan op.

- de jaarlijkse kosten van het verbruik K_j en het jaarverbruik a in m^3.
- de totale jaarkosten voor leidingwater K en het jaarverbruik a in m^3.
- de kosten per m^3 k en het jaarverbruik a in m^3.

Antwoord

- Elke extra m^3 water die je verbruikt, zorgt voor een toename van K_j met € 1,25. Deze formule beschrijft een recht evenredig verband tussen a en K_j.

  Hierbij past de formule $K_j = 1{,}25a$.

- De formule voor de totale kosten voor leidingwater is daarmee $K = K_j + 65$ en dus $K = 1{,}25a + 65$.
  Er is dus sprake van een lineair verband. De grafiek wordt daarom een rechte lijn door het punt $(0{,}65)$ en bijvoorbeeld $(1; 66{,}25)$.
- De kosten per m^3 k bereken je door de totale jaarlijkse kosten K te delen door het jaarverbruik a.
  $k = \frac{K}{a} = \frac{1{,}25a+65}{a} = \frac{65}{a} + 1{,}25$
  Het verband tussen m en a is hyperbolisch.

Opgave 6

In een andere regio zijn de jaarlijkse kosten K_j voor het verbruik van water € 1,20 per m^3 en de vaste kosten K_v (het vastrecht) € 70,00 per jaar.

a Welke formule geldt voor de kosten van het verbruik K_j als functie van a, als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?

b Welke formule geldt voor de totale kosten K als functie van a, als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?

c Met hoeveel neemt K toe als a met 1 m^3 toeneemt?

d Hoeveel betaal je in deze regio als je geen water verbruikt?

e Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 195 m^3 water. Hoeveel moeten ze dat jaar betalen?

f Welke formule, die van K_j of die van K, geeft een recht evenredig verband en waarom?

Opgave 7

Iemand uit Eindhoven rijdt regelmatig naar Maastricht. De afstand tussen Eindhoven en Maastricht is ongeveer 90 kilometer.

a Hoelang duurt de rit als er gemiddeld 100 kilometer per uur wordt gereden?

b Bereken de gemiddelde snelheid als de rit $1{,}5$ uur duurt.

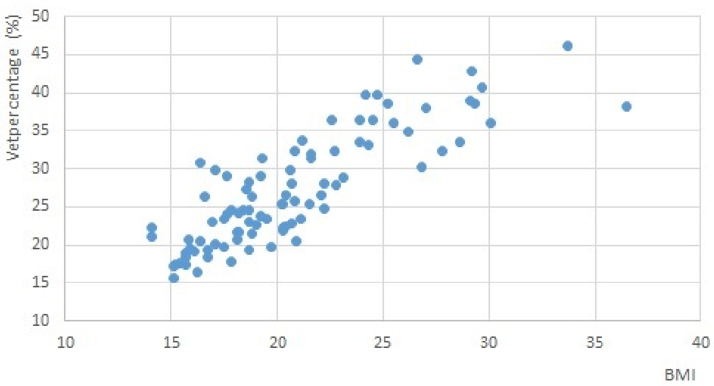
c Met welke formule kun je de gemiddelde snelheid berekenen als de reistijd bekend is? Gebruik de reistijd t in uur en de gemiddelde snelheid v in kilometer per uur.

d Geef een formule met t uitgedrukt in v.

e Voor welke waarden van t en v is deze formule bruikbaar?

Voorbeeld 2

Bekijk de puntenwolk BMI-Vetpercentage. Daarin zijn de resultaten weergegeven van een onderzoek onder 90 jongeren. BMI is een getal dat samenhangt met lengte en gewicht, vetpercentage is het percentage van het lichaamsgewicht dat bestaat uit vet.



Figuur 1.5

Er lijkt een verband te bestaan tussen de BMI b en het vetpercentage v.
Bij deze puntenwolk past een trendlijn door bijvoorbeeld $(15,17)$ en $(30,42)$.

Stel een formule op voor het lineaire verband tussen b en v.

Antwoord

De formule heeft de vorm: $v = pb + q$.

$p = \frac{\Delta b}{\Delta v} = \frac{42-17}{30-15} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

p invullen in de formule geeft: $v = \frac{5}{3}b + q$.

Vul één van beide punten in en je vindt $q = -8$.

De formule is: $v = \frac{5}{3}b - 8$.

Met behulp van de formule kun je het vetpercentage schatten van iemand met een BMI van bijvoorbeeld 21.

Opgave 8

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Waarom worden twee punten gekozen die ver uit elkaar liggen?

b Bereken met de formule een schatting van het vetpercentage van iemand met een BMI van 21.

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 2** nog eens.
Iemand neemt aan dat de trendlijn door $(10,10)$ en $(35,40)$ gaat.

a Stel een formule op voor zijn trendlijn.

b Welk vetpercentage krijgt iemand nu met een BMI van 21?

Voorbeeld 3

Bekijk de tabel van het CBS met het aantal daklozen in Nederland op 1 januari van elk jaar tussen 2009 en 2015.

Daklozen absoluut							
Perioden	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Persoonskenmerken	x 1000						
aantal personen	17,8	23,3	24,4	27,3	24,8	26,9	31,0
geslacht: mannen	14,2	17,6	19,7	22,5	19,9	21,4	25,3
geslacht: vrouwen	3,6	5,7	4,7	4,8	4,9	5,5	5,7
leeftijd: 18 tot 30 jaar	4,0	6,1	6,1	6,4	7,2	6,8	8,3
leeftijd: 30 tot 50 jaar	10,1	12,7	13,2	15,0	12,8	14,3	16,4
leeftijd: 50 tot 65 jaar	3,7	4,5	5,1	5,9	4,8	5,8	6,3

Figuur 1.6

Schat door middel van lineair extrapoleren het aantal daklozen met een leeftijd tussen de 30 en 50 jaar op 1 oktober 2016.

Antwoord

Op 1 januari 2014 waren er 14300 daklozen tussen de 30 en 50 jaar.
Op 1 januari 2015 waren dat er 16400.
In een jaar tijd is het aantal daklozen tussen de 30 en 50 jaar met $16400 - 14300 = 2100$ toegenomen.

Dat is een toename van $\frac{2100}{4} = 525$ per kwartaal.

Op 1 oktober is het derde kwartaal net voorbij.
Tussen 1 januari 2015 en 1 oktober 2016 zitten zeven kwartalen.
Op 1 oktober 2016 waren er naar schatting $16400 + 7 \cdot 525 = 20075$ daklozen van 30 tot 50 jaar.

Opgave 10

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.

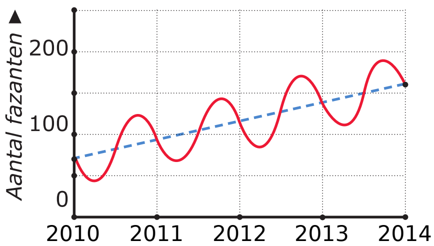
a Schat door middel van lineair interpoleren het aantal vrouwelijke daklozen op 1 april 2013.

b Schat door middel van lineair extrapoleren het aantal daklozen tussen de 18 en 30 jaar op 1 oktober 2016.

Opgave 11

Bekijk de grafiek van het aantal fazanten tussen 2010 en 2014. Hier is sprake van een duidelijke trend: het aantal fazanten in dit gebied neemt gestaag toe.

Bepaal het aantal fazanten in juli 2020 als deze trend zich voortzet.



Figuur 1.7

Verwerken

Opgave 12

In een winkelbedrijf wordt onderzocht hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat de volgende formule geldt: $a = \frac{500}{p}$.

Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro.

a Plot een grafiek waaruit je de verkoop kunt aflezen voor prijzen tussen de € 1,00 en € 5,00 per kilogram.

b Iemand zegt: “Een verdubbeling van de prijs zorgt voor een halvering van de verkoop.” Klopt dat?

A. De bewering is waar.
B. De bewering is niet waar.

c Klopt deze bewering met de formule: “Als de prijs vijf keer zo hoog wordt, wordt de verkoop vijf keer zo klein.”?

A. De bewering is waar.
B. De bewering is niet waar.

d Geef twee andere formules voor hetzelfde verband tussen a en p.

e In het bedrijf heeft men een voorraad van 300 kg tomaten. Deze tomaten zijn niet lang meer houdbaar en men wil er binnen een dag vanaf. Bereken de maximale prijs volgens de formule.

Een formule zoals $a = \frac{500}{p}$ is meestal slechts op een beperkt gebied bruikbaar. Dat kun je zien als je voor p extreme gevallen neemt.

f Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij een prijs van € 100,00? Zal dit in werkelijkheid ook zo zijn?

Opgave 13

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{2{,}25}{p} = 0{,}45$

b $4{,}50 + \frac{300}{k} = 4{,}70$

c $\frac{1200}{k+12} - 42 = 6$

Opgave 14

Een kaasboer houdt bij hoeveel kilo geraspte kaas hij per week verkoopt. Het blijkt dat de hoeveelheid k (kg) die hij verkoopt omgekeerd evenredig is met de prijs p per kilo. Bij een prijs van € 13,00 per kilo verkoopt hij 15 kg geraspte kaas.

a Stel een op formule die k uitdrukt in p.

b Bereken het aantal verkochte kilo’s kaas als de prijs € 10,00 per kilogram is.

Er is een nieuw restaurant in het pand naast de kaasboer geopend. De eigenaar van het restaurant neemt iedere week 15 kg kaas af. De prijs die hij betaalt, wordt in onderling overleg met de kaasboer bepaald.

c Bereken in de nieuwe situatie het aantal verkochte kilo's als de prijs € 10,00 per kilo is.

d Welke nieuwe formule voor k geldt nu?

e Plot de grafiek van k en bepaal bij welke prijs per kilogram de verkoop per week 40 kg is.

f Bereken ook algebraïsch bij welke prijs de verkoop per week 40 kg is.

Opgave 15

Bekijk de tabel met het aantal personenauto's in Nederland in een aantal jaren.

jaar	1999	2005	2007	2008	2009	2010
aantal personenauto's	4100000	4300000	4350000	4410000	4500000	4660000

Tabel 1.2

a Bepaal door lineair interpoleren het aantal personenauto's voor het jaar 2000 en het jaar 2006.

b Bepaal door lineair extrapoleren de aantallen voor 2014 en 2016.

c In 1990 telde Nederland $14{,}89$ miljoen inwoners.

Hoeveel auto's waren er per Nederlander in 1990?
Geef je antwoord in twee decimalen.

d Hoeveel Nederlanders waren er per auto in 1990?
Geef je antwoord in twee decimalen.

Opgave 16

Er bestaat een omgekeerd evenredig verband tussen x en y.
Als x toeneemt van $x = 10$ naar $x = 30$ dan neemt y af met 30.
Stel een formule op bij dit verband.

Toepassen

Opgave 17: Benzinetoerisme

Lees de tekst uit een artikel in een landelijk dagblad in augustus 2005.

..... De enige reden waarom de benzine in Nederland niet veel duurder mag zijn dan in België of in Duitsland is het benzinetoerisme. Hoe groter het prijsverschil, hoe meer kilometers mensen afleggen om goedkoop te tanken aan gene zijde. Stel de prijs in Nederland is € 3,00 per liter en die in Duitsland is € 1,50 per liter, dan levert een volle tank van 50 liter een voordeel op van € 75,00. Bij een verbruik van 1 op 10 betaalt een benzinetoerist 15 cent per kilometer aan benzine (de Duitse prijs) en kan hij voor het uitgespaarde bedrag 500 kilometer rijden, dat is 250 km heen en weer. Bij een dergelijk prijsverschil zou zelfs iemand uit Alkmaar nog in Duitsland kunnen gaan tanken, ware het niet dat hij met een halfvolle tank zou moeten vertrekken om de grens te halen en met een half lege thuis zou komen .....

Tabel 1.3

Om meer inzicht te krijgen in de voor- en nadelen van tanken in het buitenland bekijk je in de vragen a en b een vereenvoudigd voorbeeld:
Jan gebruikt zijn auto voor het doen van boodschappen en voor het afleggen van familiebezoekjes in de directe omgeving. Hij woont op 100 km afstand van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation. Hij maakt een aparte rit als hij in het buitenland gaat tanken. Als hij in Nederland tankt, dan hoeft hij daar niet extra voor te rijden. Hij rijdt 1 op 10, dat wil zeggen dat zijn auto met 1 liter benzine 10 kilometer rijdt. Als hij tankt, dan tankt hij altijd precies 50 liter.

a Ga uit van de in het artikel genoemde benzineprijzen. Jan redeneert op de manier van het artikel: 'mijn voordeel is € 2,00 per liter; zelfs als ik daar de kosten voor het heen en weer rijden van aftrek, heb ik nog voordeel'.
Laat met een berekening zien dat het voordeel van Jan per keer dat hij in het buitenland gaat tanken, volgens deze redenering, € 70,00 bedraagt.

Jan merkt al snel dat er iets mis is met zijn redenering. Hij is meer geld kwijt dan toen hij in Nederland tankte. Om een eerlijke vergelijking te maken tussen tanken in Nederland en tanken in het buitenland moet hij voor beide situaties de kosten berekenen per gebruikskilometer. Een gebruikskilometer is elke afgelegde kilometer die niet gereden wordt om te tanken. In Jans geval is er dus sprake van het afleggen van gebruikskilometers bij bijvoorbeeld familiebezoekjes of boodschappen doen.

b Hoe groot is het voordeel voor Jan per gebruikskilometer bij tanken in Nederland vergeleken met tanken in het buitenland? Licht je antwoord toe met een berekening.

Bekijk nu een wat algemenere situatie: de benzineprijs in Nederland noem je N (euro per liter), de benzineprijs in het buitenland noem je B (euro per liter) en de afstand tot het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation noem je x (km).
Voor het voordeel bij tanken in het buitenland V (euro) per gebruikskilometer geldt dan: $V = 0{,}0625 \cdot N - \frac{30 \cdot B}{480 - x}$
Ga ervan uit dat:

- auto's 1 op 16 rijden: elke auto rijdt 16 km op 1 liter benzine;
- een eigenaar van een auto bij een tankbeurt altijd 60 liter tankt;
- een eigenaar van een auto altijd een aparte rit maakt om in het buitenland te tanken;
- een eigenaar van een auto niet extra hoeft te rijden om in Nederland te tanken.

c Toon aan dat deze formule juist is.

Men wil de benzineprijs in Nederland zodanig vaststellen dat er geen voordeel bij tanken in het buitenland is voor mensen die 20 kilometer of verder van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation wonen. De benzineprijs in Nederland is dan een vast percentage hoger dan de benzineprijs in het buitenland ongeacht de benzineprijs in het buitenland.

d Toon dat aan.

e De literprijs van benzine verandert geregeld. Daarmee verandert ook de afstand tot het dichtstbijzijnde tankstation in het buitenland waarbij er geen voordeel of nadeel is om daar te gaan tanken.

Toon aan dat uit $V = 0{,}0625 \cdot N - \frac{30 \cdot B}{480 - x}$ volgt dat deze afstand gelijk is aan: $480 \cdot \left(1 - \frac{B}{N}\right)$.

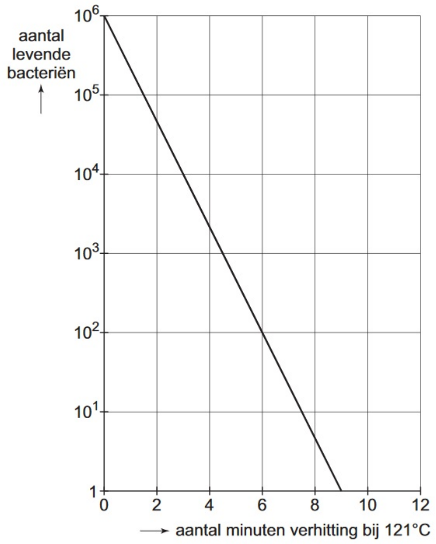
(naar: examen vwo wiskunde A in 2004, eerste tijdvak)

Opgave 18: Sterilisatie

Om voedingswaren tegen bederf te beschermen, worden ze tijdelijk verhit. Dit heet steriliseren. Er zijn verschillende sterilisatiemethodes. In deze opgave kijk je naar het sterilisatieproces bij twee soorten bacteriën. De temperatuur bij dat proces is 121 °C. Naarmate de bacteriën korter aan deze temperatuur zijn blootgesteld, zullen er meer bacteriën overleven. Bekijk de overlevingsgrafiek van een bepaalde bacterie.

Bij een overlevingsgrafiek heeft de verticale as altijd een logaritmische schaalverdeling. Het aantal bacteriën bij aanvang van het sterilisatieproces stelt men altijd op 1 miljoen. Ga er steeds van uit dat voor verschillende soorten bacteriën de overlevingsgrafieken rechte lijnen zijn indien de verticale as een logaritmische schaalverdeling heeft.

Bij de grafiek hoort een formule van de vorm:
$N(t) = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot t}$
Hierin is N het aantal bacteriën na t minuten en is r de sterftefactor. De sterftefactor is afhankelijk van het type bacteriën.



Figuur 1.8

a Met behulp van de grafiek kun je berekenen dat de sterftefactor r van deze bacterie ongeveer gelijk is aan $2{,}2$. Toon dat met een berekening aan.

De D-waarde is de tijd in minuten die nodig is om het aantal bacteriën te reduceren tot 10% van het oorspronkelijke aantal. Net als de sterftefactor is de D-waarde afhankelijk van de soort bacteriën.

b Bereken voor deze bacterie de D-waarde met behulp van de formule en leg uit hoe je deze D-waarde kunt controleren met behulp van de grafiek.

Men heeft ook van andere bacteriën de D-waarde bepaald. Voor deze bacterie is de D-waarde gelijk aan $2{,}55$ minuten. Met dit gegeven kun je de overlevingsgrafiek van deze bacterie tekenen. Ook voor deze overlevingsgrafiek begin je weer met 1 miljoen bacteriën.

c Teken deze overlevingsgrafiek. Licht je werkwijze toe.

Voor elk type bacteriën kun je de D-waarde berekenen wanneer je de sterftefactor r kent. Daarvan heb je in b een voorbeeld gezien. Wanneer je dat voor een aantal typen bacteriën doet, blijkt dat D en r omgekeerd evenredig zijn.

d Toon aan, door gebruik te maken van de formule $N(t) = 10^6 \cdot 2^{-2{,}2 \cdot t}$ dat tussen D en r een omgekeerd evenredig verband bestaat.

(naar: examen wiskunde A1,2 in 2006, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 19

De hoogte van geluid wordt bepaald door de frequentie. Hoe hoger de frequentie, hoe kleiner de golflengte. De frequentie wordt uitgedrukt in Hertz (Hz) en geeft het aantal trillingen per seconde aan. Weet je de frequentie f dan kun je de golflengte W (meter) berekenen: $W = \frac{330}{f}$

a Is er een omgekeerd evenredig verband tussen W en f?

A. ja
B. nee

b Een geluidsinstallatie kan geluiden van 15 Hz tot 30000 Hz produceren.
Welke golflengtes horen daarbij?

c Vleermuizen kunnen geluiden horen die wij niet horen. Soms wel geluiden met een frequentie van 120000 Hz. Is dit een hoog of juist laag geluid?

A. hoog geluid
B. laag geluid

d Welke golflengte heeft het geluid?

e Mensen kunnen geluiden onder de 20 Hz nauwelijks horen. Gaat het dan om bassen of hoge tonen? Welke golflengte heeft zo’n geluid?

f Welke waarde benadert W als f heel groot wordt?

Opgave 20

Koolstofdatering is een manier om de ouderdom van organisch materiaal te bepalen, bijvoorbeeld van hout, plantenresten of botten. In levende organismen komt naast de gewone, niet-radioactieve vorm van koolstof C-12 ook het radioactieve C-14 voor en wel in een bepaalde verhouding tot C-12. Na de dood van het organisme zal de hoeveelheid C-14 door radioactief verval exponentieel afnemen. Door te meten hoeveel C-14 er nog over is, kan men de ouderdom van het organische materiaal bepalen.

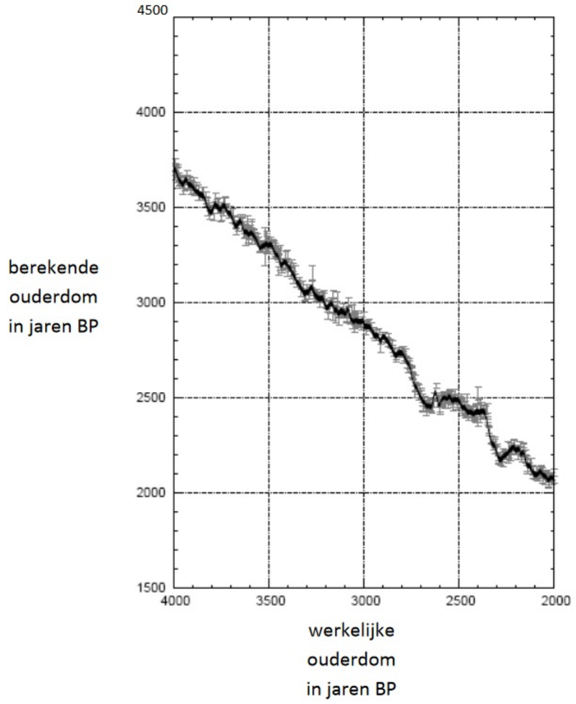
Voor de afname van de hoeveelheid C-14 geldt de volgende formule:

$t = \frac{\ln(Q) - 4{,}6052}{-0{,}00012}$

Hierin is Q de relatieve huidige hoeveelheid C-14 (als percentage van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14) en t de ouderdom van het organische materiaal in jaar.

De ouderdom die men met de formule $t = \frac{\ln(Q)-4{,}6052}{-0{,}00012}$ berekent, is niet de werkelijke ouderdom. Bekijk de grafiek van een gedeelte van de zogenoemde 'calibratiecurve', dat is een grafiek waarmee men de berekende ouderdom kan omzetten in de werkelijke ouderdom. Deze calibratiecurve is gemaakt door de hoeveelheid C-14 te bepalen in materiaal waarvan de ouderdom ook op een andere manier bekend was.

Langs de verticale as is de berekende ouderdom uitgezet. Deze wordt uitgedrukt in jaren BP, 'Before Present' (vóór heden). Hiermee wordt in dit verband altijd bedoeld: het aantal jaren vóór 1950, zodat het niet nodig is te weten in welk jaar het onderzoek is gedaan. Langs de horizontale as staat de werkelijke ouderdom, ook in jaren BP, dus in jaren vóór 1950.
Bij Vlaardingen is een kano gevonden, gemaakt van een uitgeholde boomstam. Om de ouderdom van deze kano te bepalen wordt de hoeveelheid C-14 gemeten. Het blijkt dat er nog 73,19% over is van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14.



Figuur 1.9

a Bereken in welk jaar deze kano gemaakt is.

De curve van de figuur verloopt vooral rechtsonder grillig, doordat er voor deze periode veel materiaal beschikbaar was om de curve te maken. Voor het oudste deel van de calibratiecurve is niet zoveel materiaal beschikbaar. Voor een bepaald gedeelte heeft men alleen de volgende gegevens:

- Bij een berekende ouderdom van 20550 BP hoort een werkelijke ouderdom van 22650 voor Chr.
- Bij een berekende ouderdom van 19925 BP hoort een werkelijke ouderdom van 21925 voor Chr.

Men neemt aan dat de calibratiecurve tussen deze twee punten volgens een rechte lijn verloopt.

b Bereken, uitgaande van die rechte lijn, de werkelijke ouderdom van een stuk hout waarvan de berekende ouderdom 20100 BP is. Rond je antwoord af op tientallen jaren.

(bron: voorbeeldexamenopgaven wiskunde A in 2018)

2.2 Formules herleiden

Inleiding

Dit zijn bonobo's die elkaar vlooien. Zo moet je soms ook wat aan formules plukken en trekken om ze in een goed leesbare vorm te krijgen. Zeker als je ze bij elkaar moet invullen, of optellen en aftrekken. Het gaat nu om algebraïsche vaardigheid...

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- formules van de vorm $y = f(x)$ herleiden naar de vorm $x = g(y)$ en formules eenvoudiger schrijven;
- formules combineren (bij elkaar invullen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen) en herleiden naar een gegeven vorm.

Voorkennis

- rekenen met variabelen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machten;
- de verschillende soorten functies en hun eigenschappen.

Verkennen

Opgave V1

Onderzoekers zijn erachter gekomen dat bonobo's net als mensen vanaf ongeveer hun veertigste last krijgen van verziendheid. Aanleiding voor het onderzoek was de constatering dat oudere apen tijdens het vlooien hun armen verder strekken en hun hoofd verder van hun vlooipartner vandaan houden dan jongere apen.

Tussen het aantal centimeter dat de apen hun hoofd van hun vlooipartner vandaan houden, de vlooiafstand A, en hun leeftijd t in jaar, bestaat het volgende verband: $A = 1{,}1^{2t+11}$.
Deze formule geldt voor apen vanaf 40 jaar. Om die reden is $t = 0$ bij 40 jaar.

a Schrijf deze formule in de vorm $A = b \cdot g^t$

b Voor onderzoekers die bonobo's in het wild bestuderen is het veel handiger om een formule te hebben waarin t is uitgedrukt in A. Hiermee kunnen ze namelijk de leeftijd van een aap berekenen door de vlooiafstand te schatten en deze in de formule in te vullen. Druk t uit in A.

Uitleg 1

Onderzoekers zijn erachter gekomen dat bonobo's net als mensen vanaf ongeveer hun veertigste last krijgen van verziendheid. Aanleiding voor het onderzoek was de constatering dat oudere apen tijdens het vlooien hun armen verder strekken en hun hoofd verder van hun vlooipartner vandaan houden dan jongere apen.

Figuur 2.2

Tussen het aantal centimeter dat de apen hun hoofd van hun vlooipartner vandaan houden, de vlooiafstand A, en hun leeftijd t in jaar, bestaat het volgende verband: $A = 1{,}1^{2t+11}$

Deze formule geldt voor apen vanaf 40 jaar. Om die reden is $t = 0$ bij 40 jaar. Door deze formule te herleiden met behulp van de rekenregels, kun je aantonen dat er een exponentieel verband bestaat tussen de vlooiafstand A en de leeftijd t van de apen:

$$A = 1{,}1^{2t+11} = 1{,}1^{2t} \cdot 1{,}1^{11} = 1{,}1^{11} \cdot \left(1{,}1^2\right)^t \approx 2{,}85 \cdot 1{,}21^t$$

Dit is een exponentieel verband met beginwaarde $2{,}85$ en groeifactor $1{,}21$ per jaar.

Voor onderzoekers die bonobo's in het wild bestuderen is het veel handiger om een formule te hebben waarin t is uitgedrukt in A. Hiermee kunnen ze namelijk de leeftijd van een aap berekenen door de vlooiafstand te schatten en deze in de formule in te vullen. Gebruik de rekenregels en de balansmethode.

$$\begin{aligned} A &= 1{,}1^{2t+11} && y = g^x \text{ dan } x = {}^{g}\log(y) \\ 2t + 11 &= {}^{1,1}\log(A) && \text{beide zijden } -11 \\ 2t &= {}^{1,1}\log(A) - 11 && \text{beide zijden} : 2 \\ t &= \frac{{}^{1,1}\log(A) - 11}{2} \end{aligned}$$

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.

a Bereken de vlooiafstand van een bonobo van 50 jaar oud. Rond af op gehele centimeters.

b Onderzoekers hebben een bonobo gezien met een vlooiafstand van naar schatting 45 cm. Bereken de geschatte leeftijd van deze aap. Rond af op gehele jaren.

Opgave 2

Toon aan dat er een exponentieel verband bestaat tussen y en x.

a $y = 5^{3x+2}$

b $4x + 3 = {}^{2}\log(y)$

Uitleg 2

Een fabrikant van spelcomputers heeft een rekenmodel laten ontwerpen waarmee hij de gunstigste verkoopprijs kan vaststellen. Daarin wordt aangenomen dat er een verband bestaat tussen de verkoopprijs p van een spelcomputer en het aantal spelcomputers q dat per dag verkocht wordt: $q = 300 - 0{,}5p$.

Verder zijn er iedere dag € 1200,00 aan vaste productiekosten. Daarbovenop komen de kosten voor het maken van iedere spelcomputer, deze kosten bedragen € 30,00 per stuk.
Voor de totale kosten per dag K geldt dan: $K = 30q + 1200$.

Als je de twee voorgaande formules met elkaar combineert, krijg je:

$K = 30(300 - 0{,}5p) + 1200 = 9000 - 15p + 1200 = 10200 - 15p$

De winst W per dag krijg je door de totale kosten van de totale opbrengst af te halen:
$W = O - K = pq - (10200 - 15p)$
Deze formule bevat drie variabelen. Daarom vervang je weer q door $300 - 0{,}5p$:

$W = p(300 - 0{,}5p) - 10200 + 15p = 300p - 0{,}5p^2 - 10200 + 15p = -0{,}5p^2 + 315p - 10200$

De fabrikant kan nu berekenen bij welke verkoopprijs de winst per dag maximaal is en hoe hoog die winst is.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

a Bereken hoeveel spelcomputers de fabrikant per dag verkoopt als de prijs per stuk € 200,00 is.

b Bij welke verkoopprijs is de winst per dag maximaal?
En hoe hoog is die maximale winst?

c Druk p uit in q.

d Stel een formule op waarmee de winst per dag berekend kan worden als het aantal verkochte spelcomputers per dag bekend is.

e Ga na dat je met de winstformule uit d dezelfde maximale winst per dag vindt als bij b. Hoeveel spelcomputers moeten er per dag verkocht worden om die maximale winst te bereiken?

Opgave 4

Combineer de twee formules, druk K uit in p en herleid.

a $K = 5p + 7b + 20$ en $b = 3p$

b $K = -4p + 3a - 8$ en $a = 8p - 2$

c $p = \frac{K}{2b}$ en $b = 5p$

d $K = p \cdot a$ en $p = 2a - 8$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Vaak is het nodig om **formules te herleiden** tot een andere vorm, bijvoorbeeld omdat je in de formule y moet uitdrukken in x of juist x moet uitdrukken in y. Of om aan te tonen dat een formule een lineair, exponentieel, kwadratisch of een ander verband heeft.
Voor het herleiden van formules gebruik je de balansmethode en rekenregels voor het werken met variabelen, machten, exponenten en logaritmen.

Formules bestaan vaak uit meerdere variabelen. Het aantal variabelen en het aantal formules kan soms worden teruggebracht door **formules te combineren**. Het combineren van twee formules is mogelijk, indien de formules ten minste één gemeenschappelijke variabele hebben. Bij het combineren van twee formules wordt in de ene formule de gemeenschappelijke variabele vrijgemaakt en de bijbehorende uitdrukking wordt vervolgens in de andere formule ingevuld.

Voorbeeld 1

Als iemand zich in koud water met temperatuur T (°C) onderdompelt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Wanneer de lichaamstemperatuur is gedaald tot 30 °C, ontstaat een levensbedreigende situatie. De tijd die verstrijkt tussen het te water raken en het bereiken van een lichaamstemperatuur van 30 °C wordt de overlevingstijd R (min) genoemd.

Een persoon is te water geraakt in gewone kleding en een reddingsvest.
In deze situatie geldt de volgende formule:

$R = 15 + \frac{7{,}2}{0{,}0785 - 0{,}0034T}$ met $R > 0$ en $T \geq 0$

Herleid deze formule, zodat T wordt uitgedrukt in R.

Antwoord

$$\begin{aligned}
R &= 15 + \frac{7{,}2}{0{,}0785-0{,}0034T} && \text{beide zijden } -15 \\
R - 15 &= \frac{7{,}2}{0{,}0785-0{,}0034T} && \text{beide zijden } \times(0{,}0785 - 0{,}0034T) \\
(R-15)(0{,}0785 - 0{,}0034T) &= 7{,}2 && \text{beide zijden } /(R-15) \\
0{,}0785 - 0{,}0034T &= \frac{7{,}2}{R-15} && \text{beide zijden } -0{,}0785 \\
\text{-}\,0{,}0034T &= \frac{7{,}2}{R-15} - 0{,}0785 && \text{beide zijden } /\,\text{-}\,0{,}0034 \\
T &\approx \frac{\text{-}\,2117{,}65}{R-15} + 23{,}088
\end{aligned}$$

Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Bij een watertemperatuur van 20 °C is de overlevingstijd groter dan bij een watertemperatuur van 10 °C. Bereken hoeveel keer zo groot.

b Gebruik de formule waarin R is uitgedrukt in T.
Bereken algebraïsch de watertemperatuur waarbij de overlevingstijd vijf uur is. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

c Controleer je antwoord bij b door de formule te gebruiken waarbij T is uitgedrukt in R.

Opgave 6

Herleid de formule, zodat x wordt uitgedrukt in y.

a $y = \frac{4-x}{x}$

b $y = \frac{1}{4+x}$

c $y = 4 - \frac{1}{x}$

d $y = \frac{5x-10}{x-3}$

e $y = 75 - \frac{3{,}8}{3{,}034+8{,}0075x}$

Voorbeeld 2

Hoeveel brandstof een personenauto verbruikt, hangt onder andere af van de af te leggen afstand, het aantal stops en het wachten voor verkeerslichten. Het brandstofverbruik B (mL) van een auto kan berekend worden met de formule: $B = a \cdot L + b \cdot S + c \cdot D$.
Hierin is:

- L de ritlengte (km)
- S het aantal stops onderweg
- D de totale wachttijd voor verkeerslichten (s)

a en b zijn getallen die van de gemiddelde snelheid V (km/h) afhangen en c is een constante.
Voor a geldt $a = 170 - 4{,}55V + 0{,}049V^2$.
Voor b geldt $b = 0{,}0077V^2$.
Voor c geldt $c = 0{,}39$.
Optrekken en afremmen worden buiten beschouwing gelaten, zodat in de uitdrukkingen voor a en b steeds een constante waarde voor V ingevuld kan worden.

- Neem een rit van één kilometer met een snelheid van 50 km/h, twee stops onderweg en een totale wachttijd van 40 seconden. Bereken het totale brandstofverbruik.
- Iemand rijdt iedere ochtend 110 km naar haar werk. Zij maakt geen stops onderweg en rijdt met een gemiddelde snelheid van 70 km/h. De totale wachttijd voor verkeerslichten varieert. Laat zien dat er een lineair verband bestaat tussen het brandstofverbruik B en de totale wachttijd voor verkeerslichten D.

Antwoord

- Voor deze rit geldt $V = 50$.
  Invullen geeft:
  $a = 170 - 4{,}55 \cdot 50^2 + 0{,}049 \cdot 50^2 = 65$
  $b = 0{,}0077 \cdot 50^2 = 19{,}25$
  $c = 0{,}39$
  De waarden van L, S en D zijn gegeven.
  Invullen geeft: $B = 65 \cdot 1 + 19{,}25 \cdot 2 + 0{,}39 \cdot 40 = 119{,}1$ mL
- Voor de persoon die naar haar werk rijdt, geldt $L = 110$, $S = 0$ en $V = 70$.
  Invullen geeft:
  $a = 170 - 4{,}55 \cdot 70 + 0{,}049 \cdot 70^2 = 91{,}6$
  $b = 0{,}0077 \cdot 70^2 = 37{,}73$
  Invullen in de formule geeft: $B = 91{,}6 \cdot 110 + 37{,}73 \cdot 0 + 0{,}39D$ en $B = 10076 + 0{,}39D$.
  Dit is een lineair verband.

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Neem een rit van 10 kilometer met een snelheid van 80 km/h, twee stops onderweg en een totale wachttijd van 40 seconden. Bereken het totale brandstofverbruik.

Iemand is voor zijn werk veel onderweg met de auto om klanten te bezoeken. Hij legt daarvoor steeds verschillende afstanden af. Hij maakt geen stops onderweg en hij rijdt met een gemiddelde snelheid van 90 km/h. Hij kiest altijd routes waarop hij geen verkeerslichten tegenkomt.

b Laat zien dat er een recht evenredig verband bestaat tussen het brandstofverbruik B en de ritlengte L.

Voorbeeld 3

Bij de verkoop van een bepaald artikel gelden de formules $TO = p \cdot q$ en $q = 450 - p$, waarin TO de totale maandelijkse opbrengst bij de verkoop van dat artikel is. p is de prijs (€) en q is de verkochte hoeveelheid per maand.

Voor de maandelijkse winst TW geldt: $TW = TO - TK$.
$TK = 30q + 7500$ zijn de totale maandelijkse kosten voor dit artikel.
Stel een formule op voor TW en bereken bij welke verkoopcijfers winst wordt gemaakt.

Antwoord

$TO = p \cdot q = (-q + 450) \cdot q = -q^2 + 450q$

$TW = TO - TK = \left(-q^2 + 450q\right) - (30q + 7500) = -q^2 + 420q - 7500$

Voer in: $y_1 = -x^2 + 420x - 7500$ met venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 450$ en $-100 \leq y \leq 50000$.
De rekenmachine geeft $x \approx 18{,}7$ of $x \approx 401{,}3$.
Dus voor q van 19 tot en met 401 wordt winst gemaakt.

Opgave 8

Bij de verkoop van een bepaald artikel gelden de formules $TO = p \cdot q$ en $q = 300 - p$, waarin TO de totale maandelijkse opbrengst bij de verkoop van dat artikel is. p is de prijs (€) en q is de verkochte hoeveelheid per maand.

a Combineer deze twee formules tot een formule voor TO die alleen afhankelijk is van q.

b Voor de maandelijkse winst TW geldt: $TW = TO - TK$
$TK = 40q + 6900$ zijn de totale maandelijkse kosten voor dit artikel.
Stel een formule op voor TW.

c Bij welke verkoopcijfers wordt winst gemaakt?

Opgave 9

Gegeven zijn de formules: $P = 4q + 6r + 48$ en $r = 2q - 12$.
Combineer de formules en stel formules op in de vorm $P = ar + b$ en $r = cP + d$.
Welke getallen zijn a, b, c en d?

Verwerken

Opgave 10

De kosten voor leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3. Naast de kosten van het verbruik van water zijn er ook kosten voor het gebruik van de waterleiding, het zogenaamde vastrecht. Het vastrecht in deze regio is € 65,00 per jaar.
Er bestaat een verband tussen de kosten per m^3 water m en het jaarverbruik a in m^3: $m = \frac{1{,}25a + 65}{a}$.

Herleid deze formule, zodat a wordt uitgedrukt in m.

Opgave 11

Een softwareontwikkelaar verkoopt softwarepakketten aan kleinere bedrijven. Deze softwareproducent rekent met de formule $p = 1200 - 3q$ om zijn prijs p te bepalen afhankelijk van het aantal pakketten q dat hij verkoopt. De kosten voor het versturen van dit pakket naar een klant bedragen € 10,00 per stuk.
Alle variabelen zijn in euro.

a Voor de opbrengst R geldt de formule: $R = q \cdot p$
Welke formule geldt voor de opbrengst R uitgedrukt in q?

b Welke formule geldt voor de kosten K uitgedrukt in q?

c Voor de winst W geldt de formule: $W = R - K$
Stel een formule op voor de winst W. Schrijf de formule zonder haakjes.

d Breng de formule voor W volledig in beeld op de grafische rekenmachine en bereken de maximaal haalbare winst.

Opgave 12

ChemTech produceert een bepaald onkruidbestrijdingsmiddel. Bekijk de tabel met de productiekosten per maand.

q (duizend kg per maand)	1	2	3	4	5	6
TK (per maand)	775	1000	1220	2000	4000	8000

Tabel 2.1

Hierin is q de geproduceerde hoeveelheid per maand in duizenden kg en is TK de totale kosten in euro. Verder verkoopt ChemTech dit middel voor € 2,25 per kg.

a De bedrijfsleiding heeft voor de kosten deze formule bedacht:
$TK = 100q^3 - 600q^2 + 1300q$
Laat zien dat deze formule redelijk goed bij de gegeven tabel past.

b Voor de totale winst TW in euro geldt de formule: $TW = TO - TK$.
Hierin is TO de totale opbrengst in euro.
Stel een formule op voor de totale winst TW afhankelijk van q. Ga ervan uit dat de geproduceerde hoeveelheid elke maand ook wordt verkocht.

c Gebruik de grafische rekenmachine en bepaal bij welke productie per maand de winst maximaal is.

Opgave 13

Koolstofdatering is een manier om de ouderdom van organisch materiaal te bepalen, bijvoorbeeld van hout, plantenresten of botten. In levende organismen komt naast de gewone, niet-radioactieve vorm van koolstof C-12 ook het radioactieve C-14 voor en wel in een bepaalde verhouding tot C-12. Na de dood van het organisme zal de hoeveelheid C-14 door radioactief verval exponentieel afnemen. Door te meten hoeveel C-14 er nog over is, kan men de ouderdom van het organische materiaal bepalen.

Voor de afname van de hoeveelheid C-14 geldt de volgende formule:
$Q = 100 \cdot g^t$
Hierin is Q de relatieve huidige hoeveelheid C-14 (als percentage van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14), g de jaarlijkse groeifactor en t de ouderdom van het organische materiaal in jaar.
De halfwaardetijd, ook wel halveringstijd genoemd, van C-14 is 5730 jaar.
Hiermee kun je berekenen dat $g \approx 0{,}99988$.

a Bereken de waarde van g in zes decimalen.

b De methode van koolstofdatering is niet bruikbaar voor materiaal ouder dan 60000 jaar, omdat de hoeveelheid C-14 dan te klein is om te meten.
Bereken hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14 nog over is na 60000 jaar. Rond je antwoord af op honderdsten van procenten.

c De formule $Q = 100 \cdot 0{,}99988^t$ kan, bij benadering, herschreven worden tot de volgende formule:

$t = \frac{\ln(Q) - 4{,}6052}{-0{,}00012}$

Laat dit zien.

(bron: voorbeeldexamenopgaven in 2018)

Opgave 14

Beleggingsmaatschappijen zoeken steeds naar nieuwe manieren om geld te beleggen. Eén van die manieren is beleggen in bomen. Over het beleggen in bomen schrijft een beleggingsmaatschappij in een folder het volgende.

Uw belegging groeit vanzelf

De Labironia is een duurzame houtsoort. De houtindustrie maakt veel gebruik van de Labironia en het is te verwachten dat de vraag naar Labironia in de komende jaren zal toenemen. Van het geld dat u belegt, worden een stuk grond en jonge boompjes gekocht. Het stuk grond is verdeeld in percelen en op elk perceel worden 960 boompjes geplant. Hoe ouder de bomen, hoe langer en dikker ze worden. Voordat de bomen gekapt worden, groeien ze voortdurend volgens de formules:

$L = 0{,}75 \cdot t$ en $D = 0{,}0042 \cdot t + 0{,}072$

Hierbij is t de tijd in jaren na het plantmoment, L de lengte van een boom in meter en D de stamdiameter in meter.

De houtopbrengst wordt berekend met de formule:

$M = 0{,}16 \cdot D^2 \cdot L$

Hierin is M het aantal m^3 benutbaar hout van de boom.

De houtopbrengst van een boom kan geschreven worden in de volgende vorm:

$M = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t$

Bereken a, b en c.

(naar: examen vwo wiskunde A in 2007, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 15: Verf

Voordat je met verven begint, wil je weten hoeveel (blikken) verf je nodig hebt om de totale oppervlakte te verven. Je kunt je ook afvragen hoeveel vierkante meter je kunt verven met één blik verf. Afhankelijk van het soort kwast dat wordt gebruikt, verlies je tussen de 5 en 10 procent van de verf. Het verband tussen deze variabelen staat in de volgende formule, waarin ook rekening is gehouden met verlies van verf door gebruik van de kwast: $H = \frac{10 \cdot A \cdot d}{V \cdot (100 - p)}$

Hierin is:

- H de hoeveelheid verf (liter)
- A de oppervlakte (m^2)
- d de dikte van de verflaag (micrometer)
- V het percentage vaste stof
- p het verliespercentage bij kwasten; dit varieert van 5 tot 10.

a De verf die Esmee wil gebruiken, wordt verkocht in blikken van $2{,}5$ liter. Op de blikken staat dat het percentage vaste stof 35 is. Esmee wil met een kwast een verflaag van 70 micrometer dikte aanbrengen.
Bereken hoeveel vierkante meter Esmee met zo'n blik verf maximaal kan schilderen.

b Iemand heeft 15 liter verf gekocht met een percentage vaste stof van 67.
Hij gaat een verflaag van 60 micrometer dikte aanbrengen.
Laat zien dat er een lineair verband bestaat tussen A en p.

(naar: examen havo wiskunde A in 2009, tweede tijdvak)

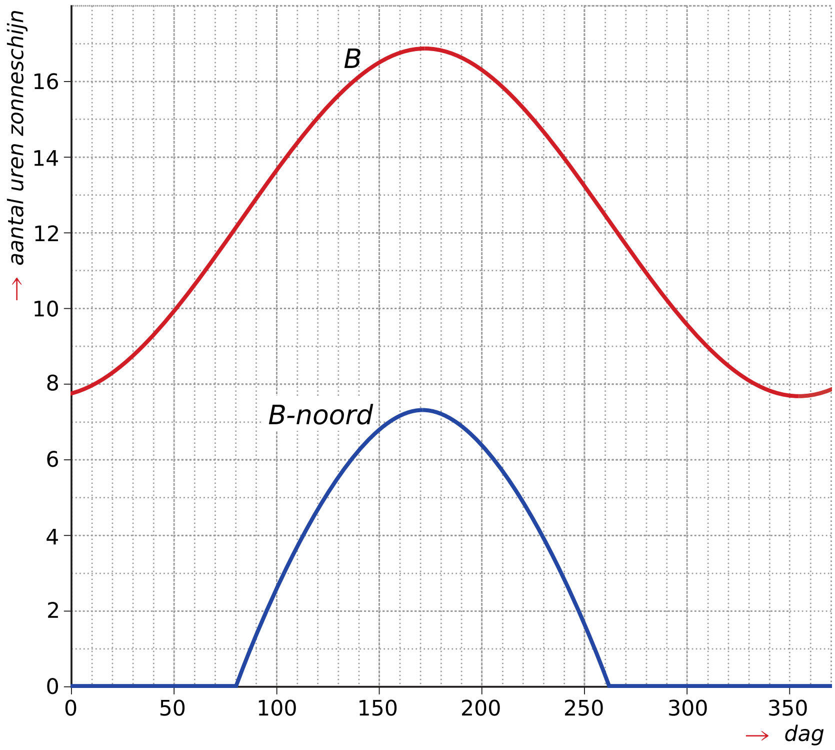
Opgave 16: Bezonning

Bij het ontwerpen van gebouwen besteedt men aandacht aan de mogelijke bezonning. Daarbij gaat men uit van een altijd wolkenloze hemel. In deze opgave beperken we ons tot gebouwen met rechte verticale gevels die niet in de schaduw van andere gebouwen staan. Verder gaan we uit van een jaar met 365 dagen. Bekijk de tabel met het aantal dagen per kalendermaand.

maand	*aantal dagen*	*maand*	*aantal dagen*	*maand*	*aantal dagen*
januari	31	mei	31	september	30
februari	28	juni	30	oktober	31
maart	31	juli	31	november	30
april	30	augustus	31	december	31

Tabel 2.2

In de figuur is het dagelijkse aantal uren zonneschijn B bij een altijd wolkenloze hemel uitgezet tegen het nummer van de dag n. Hierbij geldt $n = 1$ voor 1 januari.
De andere grafiek B-noord speelt bij b pas een rol.
Voor B geldt de formule:
$B = 12{,}3 + 4{,}6 \cdot \sin(0{,}0172 \cdot (n - 80))$



Figuur 2.3

a Op 30 januari komt de zon op om 8:27 uur.
Bereken met behulp van de formule het tijdstip waarop de zon op 30 januari onder gaat in minuten nauwkeurig.

Gevels aan weerszijden van een rechthoekig gebouw kunnen niet tegelijkertijd door de zon beschenen worden. Ook is het zo dat, áls de zon schijnt, óf de noordgevel óf de zuidgevel zonlicht vangt. Bekijk de grafiek B-noord. In de grafiek op het **werkblad** is het dagelijks aantal bezonningsuren voor een noordgevel uitgezet. Uit de grafiek blijkt dat een noordgevel slechts een gedeelte van het jaar beschenen wordt.

b Teken de grafiek B-zuid voor het dagelijks aantal bezonningsuren voor een zuidgevel.

(naar: examen vwo wiskunde A in 1991, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 17

Een fabriek produceert steps. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Het aantal verkochte producten q, in duizendtallen, hangt uitsluitend af van de prijs p (€): $q = 12 - 0{,}1p$.
De bedrijfswiskundige heeft een model opgesteld voor de kosten van de productie van deze steps: $TK = 1{,}5q^3 - 22{,}5q^2 + 120q$.
Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

a Toon aan dat geldt $p = 120 - 10q$.

b De prijs p is minimaal € 0,00.
Welke waarden kan q aannemen?

c Voor de totale opbrengst TO (€) geldt de formule: $TO = p \cdot q$.
Stel een formule op voor de opbrengst TO uitgedrukt in q.

d Voor de totale winst TW (€) geldt de formule: $TW = TO - TK$.
Stel een formule op voor de winst TW uitgedrukt in q.

e Bepaal de prijs van één step indien de winst maximaal is.

f q is het aantal verkochte producten in duizendtallen. Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK per 1000 steps. Bepaal bij welk aantal verkochte producten de GTK minimaal is.

Opgave 18

In de 19e eeuw deed Fechner onderzoek naar de esthetische waarde die door velen aan de gulden snede wordt toegekend. Hij liet een aantal mensen rechthoeken zien waarvan de verhouding tussen de lengte en de breedte telkens verschillend was. Aan deze mensen werd gevraagd welke rechthoek zij het mooist vonden. Uit het onderzoek bleek dat rechthoeken waarvan de verhouding van de lengte en de breedte ongeveer de gulden snede opleverde, het meest werden uitgekozen. Mede op grond van deze resultaten stelde Petrov een formule op waarmee hij deze voorkeur wilde uitdrukken in een getal. Hij noemde dit de appreciatiewaarde A van de rechthoek en kwam met de volgende formule:

$$A = \left(\frac{1}{v} - 1\right) \cdot \log\left(1 - \frac{1}{v}\right)$$

In deze formule is v de verhouding tussen de langste zijde en de kortste zijde van de rechthoek:

$$v = \frac{\text{langste zijde}}{\text{kortste zijde}}$$

De formule van Petrov werd oorspronkelijk op een iets andere manier opgeschreven dan hier.
Welke van deze formules komt overeen met de oorspronkelijke formule van Petrov? Licht je antwoord toe.

A. $A = \frac{v-1}{v} \cdot \log\left(\frac{v}{v-1}\right)$

B. $A = \frac{1-v}{v} \cdot \log\left(\frac{v}{v-1}\right)$

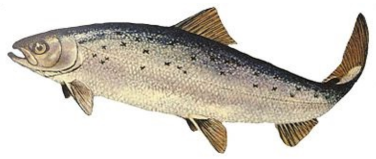
C. $A = \frac{v}{v-1} \cdot \log\left(\frac{v-1}{v}\right)$

(naar: examen vwo wiskunde A in 2007, eerste tijdvak)

2.3 Redeneren met formules

Inleiding

In veel praktijksituaties worden rekenmodellen gebruikt. Bijvoorbeeld voor verzekeringspremies, hypotheken, filevorming, luchtstromingen, bevolkingsgroei (en niet alleen van mensen). Bureau's als het Centraal Planbureau, het Centraal Bureau voor de Statistiek en allerlei particuliere bureau's bestaan ervan. Een aardig voorbeeld is het groeimodel van een populatie zalmen in een kweekvijver...



Figuur 3.1 bron: Wikipedia

Je leert in dit onderwerp

- karakteristieken van functies afleiden uit de formule en bijbehorende vergelijkingen en ongelijkheden oplossen;
- rekenmodellen waarin de tijd in stappen gaat (rijen) beschrijven door recursieformules en/of directe formules en daarmee rekenen.

Voorkennis

- de eigenschappen van de verschillende soorten functies;
- werken met rijen, met name rekenkundige en meetkundige rijen.

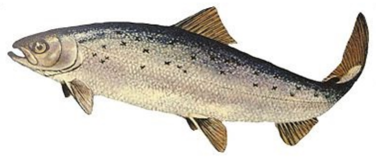
Verkennen

Opgave V1

Wanneer een zalmkwekerij een aantal zalmen in een vijver uitzet en de condities zijn in orde, dan zullen de vissen zich gaan vermenigvuldigen.

Het verband tussen de tijd t in maanden nadat de eerste vissen in de vijver zijn uitgezet en het aantal vissen a dat in de vijver leeft, wordt weergegeven met de formule:

$a = \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t}$



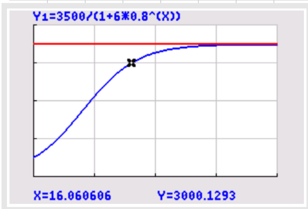
Figuur 3.2 bron: Wikipedia

a Plot de groeigrafiek van deze zalmpopulatie.

b Beredeneer hoeveel zalmen er maximaal in deze vijver kunnen leven in dit groeimodel.

c Wanneer zou je als zalmkweker het best kunnen beginnen met zalmen vangen?

Uitleg 1



Figuur 3.3

Wanneer een zalmkwekerij een aantal zalmen in een vijver uitzet en de condities zijn in orde, dan zullen de vissen zich gaan vermenigvuldigen.
Het verband tussen de tijd t in maanden nadat de eerste vissen in de vijver zijn uitgezet en het aantal vissen a dat in de vijver leeft, wordt weergegeven met de formule:

$a = \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t}$

Bekijk de grafiek. Het aantal vissen in de vijver groeit eerst exponentieel, maar bereikt daarna een grenswaarde (het verzadigingsniveau). Dat komt doordat de vijver dan verzadigd is met vissen. Als er nog meer vissen bij zouden komen, dan zou er niet meer genoeg leefruimte zijn voor iedere vis. Wat die grenswaarde precies is, kun je afleiden uit de formule.

- Wanneer je voor t een heel grote waarde invult (bijvoorbeeld 1000000), dan nadert $0{,}8^t$ naar 0.
- Dit betekent dat $1 + 6 \cdot 0{,}8^t$ naar 1 nadert.
- En dus nadert $\frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t}$ naar $\frac{3500}{1} = 3500$.

De grenswaarde is dus 3500 zalmen. De zalmkweker gaat voor het eerst zalmen vangen als er 3000 vissen in de vijver zitten.
Om uit te zoeken na hoeveel maanden dat het geval is, moet je een vergelijking oplossen:

$\frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t} = 3000$

Dit kun je schrijven als $1 + 6 \cdot 0{,}8^t = \frac{3500}{3000} = \frac{7}{6}$ en $0{,}8^t = \frac{1}{36}$ zodat

$t = {}^{0{,}8}\log\left(\frac{1}{36}\right) \approx 16.$

Na 16 maanden wordt het aantal van 3000 vissen in de vijver bereikt.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.

a Bereken het aantal vissen dat volgens de eerste formule na tien maanden in de vijver zit.

b Vul $t = 1000000$ in de formule in en laat daarmee zien dat de grenswaarde 3500 is.

c Welke ongelijkheid moet je oplossen als er maximaal 2600 vissen in de vijver mogen zitten? Los deze ongelijkheid op.

d Welke formule krijg je als de vissen zich twee keer zo snel gaan vermenigvuldigen? Neem a_2 voor het aantal vissen en t voor de tijd in maanden.

e Plot de grafieken van a en de grafiek van a_3.
Hoe wordt de grafiek van a_2 verkregen uit de grafiek van a?

Opgave 2

Beredeneer aan de hand van de functie of de bijbehorende grafiek stijgend of dalend is en welke grenswaarde de grafiek mogelijk benadert.

a $f(x) = \frac{720}{1+3 \cdot 0,5^x}$

b $g(x) = 500(3 - 0,75^x)$

c $h(x) = \frac{21+6 \cdot 1,5^x}{250}$

d $i(x) = 55 - \frac{33}{x+1}$

Uitleg 2

Er bestaan ook rekenmodellen waarin met vaste stappen wordt gerekend, bijvoorbeeld bij het in waarde toenemen of dalen van een aandelenpakket uitgaande van een vast maandelijks rendement.

Neem bijvoorbeeld een aandelenpakket met een waarde van € 12000,00.
De aanbieder van dit aandelenpakket belooft een gemiddelde waardestijging van 6% per jaar. Over hoeveel jaar is het pakket meer dan € 20000,00 waard?

De waarde w_n na n jaar van dit pakket kun je op twee manieren doorrekenen:

- Door een proces van recursie:
  Je kijkt steeds terug naar het voorgaande jaar: $w_n = 1,06 \cdot w_{n-1}$ met $w_0 = 12000$.
- Door een directe formule samen te stellen:
  De waarde in jaar n is $w_n = 12000 \cdot 1,06^n$.

In het eerste geval heb je voor de rij getallen een recursieformule en een startwaarde nodig. In het tweede geval geeft de directe formule meteen de waarde in het $n$de jaar. Omdat hier steeds met een vast getal wordt vermenigvuldigd, is de rij w_n een meetkundige rij.

Een directe formule kan als iedere andere formule worden ingevoerd op de grafische rekenmachine.
Een recursieformule kan ook in de grafische rekenmachine worden ingevuld, zoals je weet.

Er bestaan ook rekenkundige rijen. Bij dit soort rijen is het verschil tussen twee opeenvolgende termen uit de rij constant.

Opgave 3

Bekijk de rij getallen: $1020, 1080, 1140, 1200, 1260, 1320, \ldots$.
Deze getallen vormen een rij u_n met $u_0 = 1020$.

a Welke regelmaat zit er in rij u_n?

b Is rij u_n een meetkundige of rekenkundige rij?

c Stel een recursieformule op bij rij u_n.

d Bereken u_6 met behulp van de recursieformule.

e Stel een directe formule op bij rij u_n.

f Bereken de honderdste term van rij u_n.

Opgave 4

Anna en Bas huren elk een huis voor € 9000,00 per jaar. In 2010 moesten ze beiden € 9000,00 aan huur betalen. De huur voor Anna wordt jaarlijks verhoogd met € 350,00; die van Bas wordt jaarlijks verhoogd met 2,8%.

a Stel een directe formule op voor de huur a_n van Anna in jaar n met $n = 0,1,2,...$

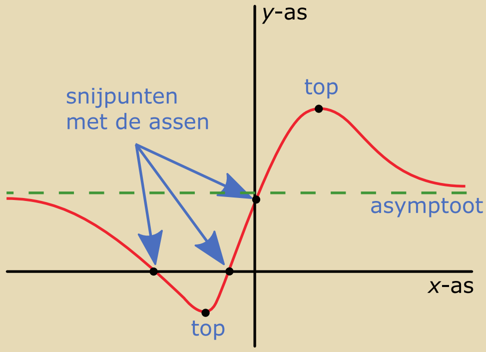
b Stel een directe formule op voor de huur b_n van Bas in jaar n met $n = 0,1,2,...$

c Wie betaalt er in 2035 de meeste huur?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De grafiek van **functie** met voorschrift $f(x)$ heeft karakteristieken zoals: de snijpunten met de assen, de asymptoten en de toppen. Het is nuttig deze karakteristieken goed in beeld te krijgen.



Figuur 3.4

De grafiek van f kan op vier manieren ontstaan uit een standaardfunctie:

- verschuiven in de y-richting: $f(x)+a$ ontstaat door de grafiek van f met a omhoog te verschuiven;
- verschuiven in de x-richting: $f(x+a)$ ontstaat door de grafiek van f met a naar links te verschuiven;
- herschalen in de y-richting: $a \cdot f(x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x-as met factor a te vermenigvuldigen;
- herschalen in de x-richting: $f(ax)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{a}$ te herschalen.

Een **rij** is een rekenmodel waarin je met vaste stappen rekent. Omschrijf een rij als: u_n of $u(n)$, waarin n het nummer van de term aangeeft. Geef daarbij aan of n bij 0 of bij 1 begint. De beginwaarde van de rij wordt aangeduid met b. Je kunt een rij op twee manieren beschrijven:

- met een recursieformule waarmee je elke term berekent uit de voorgaande.
- met een directe formule waarmee je elke term direct berekent.

Er worden soorten rijen onderscheiden. Bijvoorbeeld:

- een rekenkundige rij is een rij waarbij elke term ontstaat door een vast getal a bij de vorige op te tellen of af te trekken;
- een meetkundige rij is een rij waarbij elke term ontstaat door de vorige met een vast getal r te vermenigvuldigen.

Een rij kan op de grafische rekenmachine worden ingevoerd. Hiermee kunnen andere termen in de rij berekend worden, en vergelijkingen en ongelijkheden worden opgelost.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{340}{2x+3} + 80$.

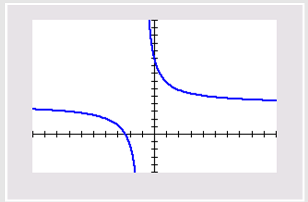
- Bepaal de karakteristieken van f en plot de grafiek.
- Los op: $f(x) = 100$.

Antwoord

- Voer in: $y_1 = \frac{340}{2x+3} + 80$.
  Aan de formule zie je dat voor heel grote waarden van x geldt $y_1 \approx 80$. Verder mag $2x+3$ niet 0 zijn, dus $x = -1{,}5$ is vermoedelijk een verticale asymptoot. Hierop baseer je de vensterinstellingen, bijvoorbeeld: $-15 \leq x \leq 15$ en $-100 \leq y \leq 300$.
  Nu kun je de karakteristieken bepalen.
  Het snijpunt met de y-as is $\left(0{,}193\frac{1}{3}\right)$ ($x = 0$ invullen).
  Het snijpunt met de x-as vind je door op te lossen

$$\begin{aligned} \frac{340}{2x+3} + 80 &= 0 \\ \frac{340}{2x+3} &= -80 \\ 2x + 3 &= \frac{340}{-80} = -4{,}25 \\ x &= \frac{-6{,}25}{2} = -3{,}125 \end{aligned}$$

  Het snijpunt met de x-as is $(-3{,}125; 0)$.
  De verticale asymptoot is $x = -1{,}5$.
  De horizontale asymptoot is $y = 80$.
- Vervolgens moet je $f(x) = 100$ oplossen.
  Dit kan op dezelfde manier als bij het oplossen van $f(x) = 0$, je vindt $x = 7$.
  Deze oplossing kun je ook met de GR vinden.



Figuur 3.5

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Los zelf de vergelijking $f(x) = 100$ algebraïsch op.

b Hoe is de grafiek van f te herleiden uit die van $y = \frac{1}{x}$?

Opgave 6

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{475}{4-1{,}5x} - 50$.

a Bepaal de karakteristieken van f.

b Plot de grafiek van f zodat alle karakteristieken goed in beeld zijn.

c Los op: $f(x) = -200$.

d De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{3}$ te herschalen en vervolgens de grafiek 25 omlaag te verschuiven.
Geef de formule van $g(x)$.

Voorbeeld 2

Een bioloog houdt de populatiegroei van kikkers in een natuurgebied in de gaten. Als er te veel kikkers zijn, is er sprake van een plaag en moet er worden ingegrepen. Er wordt gesproken over een plaag wanneer het aantal kikkers meer dan 400000 bedraagt.

Bekijk de tabel met meetgegevens van 1990 t/m 2015.

- De aantallen kikkers in de tabel vormen rij u_n. Zoek uit of dit (bij benadering) een rekenkundige of meetkundige rij is en stel een recursieformule op bij rij u_n. Neem $n = 0$ in 1990.
- Stel een directe formule op bij rij u_n en bereken in welk jaar er een kikkerplaag zal zijn als de groei op deze manier door gaat.

jaar	*aantal kikkers* $(x1000)$
1990	212
1995	230
2000	250
2005	272
2010	295
2015	320

Tabel 3.1

Antwoord

- $230 - 212 = 18$, $250 - 230 = 20$ en $272 - 250 = 22$.
  u is geen rekenkundige rij, want de verschillen zijn niet constant.
  $\frac{230}{212} \approx 1{,}08$, $\frac{250}{230} \approx 1{,}09$ en $\frac{272}{250} \approx 1{,}09$.
  u is bij benadering een meetkundige rij met een groeifactor per vijf jaar van ongeveer $1{,}08$.
  De groeifactor per jaar is ongeveer $1{,}08^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}02$.
  De recursieformule is dus $u_n = u_{n-1} \cdot 1{,}02$ met $u_0 = 212$.
- De directe formule wordt $u_n = 212 \cdot 1{,}02^n$, want er is sprake van exponentiële groei.
  De vergelijking $212 \cdot 1{,}02^n = 400$ geeft $1{,}02^n = \frac{400}{212}$ en
  $n = {}^{1{,}02}\log\left(\frac{400}{212}\right) \approx 32$.
  In 2022 zal er een kikkerplaag zijn. Deze oplossing kun je ook met de grafische rekenmachine vinden.

Opgave 7

Bekijk de tabel met het aantal inschrijvingen voor een congres. Er is ruimte voor 500 inschrijvingen.

tijdstip	00:00 uur	04:00 uur	08:00 uur	12:00 uur	16:00 uur	20:00 uur
aantal	25	61	97	132	168	205

Tabel 3.2

a De aantallen inschrijvingen in de tabel vormen rij u_n.
Zoek uit of rij u_n (bij benadering) een rekenkundige of een meetkundige rij is.

b Stel een recursieformule op bij rij u_n. Neem $n = 0$ om 00:00 uur.

c Bereken met de recursieformule het aantal inschrijvingen om 02:00 uur.

d Stel een directe formule op bij rij u_n. Is dit een lineaire formule of een exponentiële formule?

e Bereken na hoeveel uur de inschrijving voor het congres gesloten wordt als de groei op deze manier doorgaat.

Opgave 8

Schrijf de recursieformules om naar directe formules.

a $u_n = u_{n-1} + 44$ met $u_0 = 12$. Begin te nummeren bij $n = 0$.

b $u_n = u_{n-1} \cdot 15$ met $u_0 = 2$. Begin te nummeren bij $n = 0$.

c $u_n = u_{n-1} - 35$ met $u_1 = 3000$. Begin te nummeren bij $n = 1$.

d $u_n = u_{n-1} \cdot 0{,}8$ met $u_1 = 5$. Begin te nummeren bij $n = 1$.

Opgave 9

Schrijf de directe formules om naar recursieformules.

a $u_n = 3 + \frac{1}{3} \cdot n$ met $n = 0,1,2,...$

b $u_n = 1200 + 77 \cdot (n - 1)$ met $n = 1,2,3,...$

c $u_n = 200 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$ met $n = 0,1,2,...$

d $u_n = 50 \cdot 0{,}75^{n-1}$ met $n = 1,2,3,...$

Verwerken

Opgave 10

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die zaden nodig hebben om voor 50% te ontkiemen. Proefondervindelijk is er een verband gebleken tussen de temperatuur T in °C en de kiemtijd K in dagen. Dit verband wordt gegeven door: $K = \frac{89}{T-2}$.

a Boven welke temperatuur is de helft van de zaden al binnen tien dagen ontkiemd?

b Welke waarden van T zijn zinvol?

c Wat is er aan de hand bij $T = 2$ en bij $K = 0$?

d Welke waarden kan K aannemen?

Opgave 11

Gegeven is de rij u_n waarin elke term 6 meer is dan de vorige term. De vierde term in de rij is 55.

a Is u_n een rekenkundige rij of een meetkundige rij? Licht je antwoord toe.

b Maak een tabel bij de rij met een nummering die begint bij 0.

c Bepaal $u(8)$.

d Stel de directe formule en de recursieformule op.
Begin de nummering bij $n = 0$.

Opgave 12

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{690}{2+4 \cdot 0{,}8^x}$ nadert een bepaalde grenswaarde.
Beredeneer aan de hand van de functie of de bijbehorende grafiek stijgend of dalend is en wat de grenswaarde is.

Opgave 13

Een onderzoeker heeft gegevens verzameld over de gemiddelde lengte van jongetjes van 0 tot 10 jaar in Nederland. In figuur 1 zie je het verband tussen de gemiddelde lengte L en de leeftijd j.

De formule die het verband tussen j en L beschrijft is $L = p + q \cdot \sqrt{j}$ waarin p en q getallen zijn.

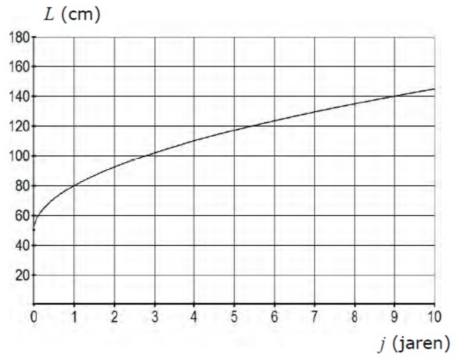
a Bereken de waarden van p en q.

De onderzoeker is vooral geïnteresseerd in het verband tussen lengte en leeftijd in de eerste maanden na de geboorte. Zij maakt daartoe de grafiek van figuur 2.

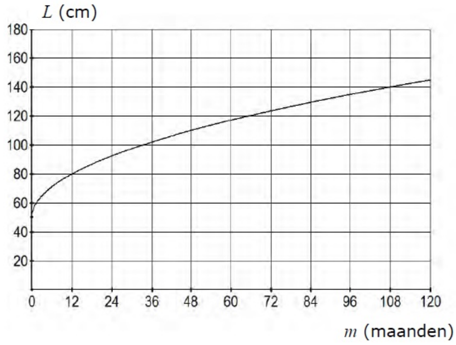
b Teken met behulp van de formule een grafiek van het verband tussen de gemiddelde lengte L en de leeftijd m in maanden voor het eerste levensjaar. Neem op de horizontale as 1 cm voor elke maand en op de verticale as 1 cm voor elke 5 cm lengte (gebruik een scheurlijn).

c Uit de gegeven formule die het verband tussen L en j beschrijft, is een vergelijkbare formule af te leiden van het verband tussen L en m.
Stel een formule op die het verband tussen L en m beschrijft.

figuur 1



figuur 2



Figuur 3.6

Opgave 14

Beleggingsmaatschappijen zoeken steeds naar nieuwe manieren om geld te beleggen. Eén van die manieren is het beleggen in bomen. Over het beleggen in bomen schrijft een beleggingsmaatschappij in een folder het volgende.

> **Uw belegging groeit vanzelf**
> De Labironia is een duurzame houtsoort. De houtindustrie maakt veel gebruik van de Labironia en het is te verwachten dat de vraag naar Labironia in de komende jaren zal toenemen. Van het geld dat u belegt, worden een stuk grond en jonge boompjes gekocht. Het stuk grond is verdeeld in percelen en op elk perceel worden 960 boompjes geplant. Hoe ouder de bomen, hoe langer en dikker ze worden. Voordat de bomen gekapt worden, groeien ze voortdurend volgens de formules:
> $L = 0{,}75 \cdot t$ en $D = 0{,}0042 \cdot t + 0{,}072$
> Hierbij is t de tijd in jaren na het plantmoment, L de lengte van een boom in meter en D de stamdiameter in meter.
> De houtopbrengst wordt berekend met de formule:
> $M = 0{,}16 \cdot D^2 \cdot L$
> Hierin is M het aantal m^3 benutbaar hout van de boom.

De formules voor L en D zijn benaderingen van de werkelijke groei. Direct na het planten passen de formules nog niet zo goed bij de echte groei van de bomen. Pas vanaf het moment dat volgens de formules de diameter van de Labironia-boom 5% bedraagt van de lengte van een Labironia-boom, gelden de formules.

a Vanaf welk moment na het plantmoment gelden de formules?

b Een Labironia-boom van 15 jaar oud levert meer m^3 benutbaar hout op dan een van 8 jaar oud. Bereken hoeveel m^3 het verschil bedraagt.
Geef je antwoord in drie decimalen.

Ook is het zo dat de groei van oudere bomen van deze soort niet volgens de formules plaats zal vinden. Omdat alle bomen toch op een bepaald vastgesteld moment na het planten gekapt zullen worden, is het in deze opgave niet van belang dat de groei op zeker moment niet meer volgens de formules verloopt. De 960 bomen op één perceel worden niet alle op hetzelfde moment gekapt. Dat kappen gebeurt in verschillende rondes. De laatste ronde van dat kappen, het moment dus dat alle bomen gekapt zijn, vindt plaats op het moment dat een Labironia-boom een diameter heeft van $0{,}156$ m.

c Bereken de lengte van een Labironia-boom op het moment van de laatste kapronde.

(naar: examen vwo wiskunde A in 2007, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 15: Bezonning (2)

Bij het ontwerpen van gebouwen besteedt men aandacht aan de mogelijke bezonning. Daarbij gaat men uit van een altijd wolkenloze hemel. In deze opgave beperken we ons tot gebouwen met rechte verticale gevels die niet in de schaduw van andere gebouwen staan. Verder gaan we uit van een jaar met 365 dagen. Bekijk de tabel met het aantal dagen per kalendermaand.

maand	*aantal dagen*	*maand*	*aantal dagen*	*maand*	*aantal dagen*
januari	31	mei	31	september	30
februari	28	juni	30	oktober	31
maart	31	juli	31	november	30
april	30	augustus	31	december	31

Tabel 3.3

Voor het dagelijkse aantal uren zonneschijn B bij een altijd wolkenloze hemel geldt de formule:
$B = 12{,}3 + 4{,}6 \cdot \sin(0{,}0172 \cdot (n - 80))$
Hierin is n het nummer van de dag. Er geldt $n = 1$ voor 1 januari.

a Toon door berekening aan dat 13 april de eerste dag van het jaar is waarop de zon langer dan 14 uur schijnt.

b Er is een groot verschil tussen het maximale en het minimale dagelijkse aantal uren zonneschijn. Bereken aan de hand van de formule voor B dit verschil in minuten nauwkeurig.

(naar: examen vwo wiskunde A in 1991, eerste tijdvak)

Opgave 16: Al doende leert men

In de Amerikaanse industrie is ooit onderzocht hoe snel werknemers leren wanneer zij een handeling vaker verrichten. Van een groot aantal werknemers is bijgehouden hoeveel tijd ze nodig hadden om een bepaalde handeling voor de eerste keer te verrichten, hoeveel tijd voor de tweede keer, enzovoort. Zo bleken werknemers 16 minuten nodig te hebben om handeling A voor de eerste keer te verrichten. Bij de tweede keer was die handelingstijd $12{,}8$ minuten. Dus wanneer een werknemer handeling A twee keer heeft uitgevoerd, is zijn gemiddelde handelingstijd $14{,}4$ minuten. Bekijk deze $\frac{16+12{,}8}{2} = 14{,}4$ minuten in de tabel. De andere waarden in deze tabel zijn op een vergelijkbare manier berekend.

aantal keren dat handeling A is verricht (n)	1	2	3	4	5	6
gemiddelde handelingstijd (mi	16	14,4	13,1	12,1	11,3	10,7

Tabel 3.4

a Met behulp van de tabel kun je berekenen dat een werknemer $8{,}1$ minuten nodig heeft om handeling A voor de vijfde keer te verrichten.
Geef zo'n berekening.

Om de gemiddelde handelingstijd H_n uit te rekenen voor meer dan zes handelingen is het handig te beschikken over een formule voor H_n. Hiertoe zijn verschillende pogingen ondernomen. Eén zo'n poging resulteerde in de formule:
$H_n = 0{,}14n^2 - 2n + 17{,}8$
Deze formule komt redelijk overeen met de gegevens van de tabel voor $n = 1$ tot en met $n = 6$.

b Bereken het grootste verschil tussen de uitkomsten uit de tabel en de bijbehorende waarden van H_n.

c Voor grote waarden van n is de formule voor H_n echter niet geschikt om de gemiddelde handelingstijd te beschrijven. Leg uit waarom de formule voor H_n niet geschikt is.

Het is niet zo eenvoudig een formule voor H_n te vinden die wel voldoet. Toch kun je bijvoorbeeld de gemiddelde handelingstijd na tien handelingen uitrekenen. Daarbij maak je gebruik van T_n, de tijd die een werknemer nodig heeft om handeling A voor de n-de keer te verrichten. T_n kan goed worden benaderd met de formule:
$T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$
In deze formule is T_n in minuten.
Inderdaad levert deze formule $T_1 \approx 16$ en $T_2 \approx 12{,}8$.
Met deze formule kun je ook andere handelingstijden uitrekenen en dus ook gemiddelde handelingstijden berekenen.

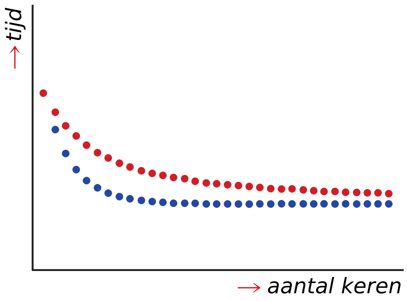
d Bereken hoe groot de gemiddelde handelingstijd is wanneer een werknemer tien keer handeling A heeft uitgevoerd.

e Als je kijkt naar de formule $T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$, dan kun je constateren dat T_n steeds kleiner wordt als n groter wordt. Op de lange duur komt T_n echter niet onder een bepaalde grens.
Hoe groot is die grens? Licht je antwoord toe.

Bekijk de figuur met schetsen van de grafieken van de handelingstijd en de gemiddelde handelingstijd in één assenstelsel. Naar aanleiding van deze grafieken maakt iemand de volgende twee opmerkingen:

1. Eén van beide grafieken zal altijd boven de andere grafiek liggen.
2. De twee grafieken komen steeds dichter bij elkaar en er zal op den duur geen echt verschil meer tussen beide grafieken te zien zijn.

Door redeneren zonder rekenen kun je onderzoeken of deze opmerkingen waar zijn of niet.



Figuur 3.7

f Onderzoek op deze manier of de beweringen waar zijn.

(naar: examen vwo wiskunde A1,2 in 2004, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 17

Je kent de normale verdeling uit de kansrekening wel. De bijbehorende normaalkromme is de grafiek van een functie f. Bij een gegeven standaardafwijking σ en een gegeven gemiddelde μ geldt daarvoor de formule

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Neem $\mu = 30$ en $\sigma = 2$.

a Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van de standaardnormaalkromme $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$?

b Plot de grafiek van f en bepaal de karakteristieken ervan.

c Los op $f(x) \geq 0{,}15$.
Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.
Waarom heeft dit voor de wiskundige statistiek geen enkele betekenis?

Opgave 18

Iemand leent voor het kopen van een appartement € 90000 tegen een rente van 2,5% per jaar (voor het eerst te betalen aan het eind van het eerste jaar). Zij wil dit bedrag in 10 jaar inclusief rente terugbetalen in vaste jaarbedragen A.

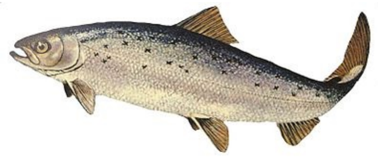
a Laat zien dat dit betekent dat
$90000 \cdot 1{,}025^{10} - A \cdot \left(1{,}025^9 + 1{,}025^8 + \ldots + 1{,}025^2 + 1{,}025\right) = 0$.

b Bereken de hoogte van het vaste jaarbedrag.

2.4 Verandering

Inleiding

In veel praktijksituaties worden rekenmodellen gebruikt. Bijvoorbeeld voor verzekeringspremies, hypotheken, filevorming, luchtstromingen, bevolkingsgroei (en niet alleen van mensen). Bureau's als het Centraal Planbureau, het Centraal Bureau voor de Statistiek en allerlei particuliere bureau's bestaan ervan. Een aardig voorbeeld is het groeimodel van een populatie zalmen in een kweekvijver. De snelheid waarmee het aantal zalmen in de kweekvijver toeneemt is voor de kweker interessant. Immers als die toenamesnelheid groot is kan hij het beste ‘oogsten’.



Figuur 4.1 bron: Wikipedia

Je leert in dit onderwerp

- vanuit een grafiek een hellingsgrafiek of toenamediagram afleiden en omgekeerd;
- de afgeleide toepassen in praktijksituaties.

Voorkennis

- de verandering van een functies vertalen in een toenamediagram dan wel een hellingsgrafiek;
- de techniek van het differentiëren gebruiken om de afgeleide van een functie te bepalen en daarmee hellingswaarden en extremen te berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Wanneer een zalmkwekerij een aantal zalmen in een vijver uitzet en de condities zijn in orde, dan zullen de vissen zich gaan vermenigvuldigen.
Het verband tussen de tijd t in maanden nadat de eerste vissen in de vijver zijn uitgezet en het aantal vissen a dat in de vijver leeft, wordt weergegeven met de formule:

$a = \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t}$

Figuur 4.2 bron: Wikipedia

De zalmkweker kan het beste zalmen gaan vangen als de groeisnelheid hoog is, dan groeit de populatie na het vangen ook snel weer aan.

a Welke functie hoort bij de groeisnelheid van deze populatie zalmen?

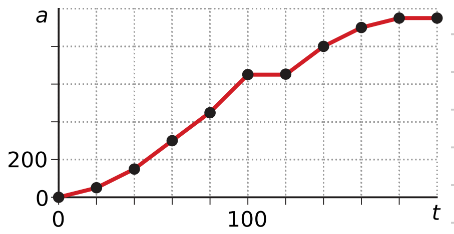
b Plot de grafiek van deze functie. Waaraan zie je dat het aantal zalmen altijd toeneemt?

c Na hoeveel tijd is de groeisnelheid maximaal? Hoeveel zalmen komen er dan per maand bij?

Uitleg 1

Bekijk de grafiek met daarin de afgelegde afstand a (m) van een fietser uitgezet tegen de tijd (s).

Bij deze grafiek kan een toenamediagram met stapgrootte $\Delta t = 20$ getekend worden. Maak eerst een tabel. Onder Δa wordt de toename van de afgelegde afstand a verstaan.

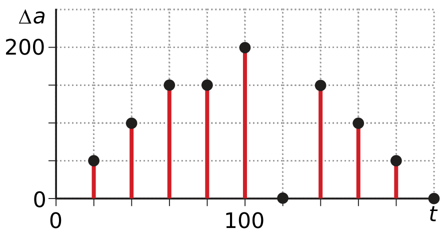


Figuur 4.3

t (s)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Δa (m)	-	50	100	150	150	200	0	150	100	50	0

Tabel 4.1

Deze tabel kun je weergeven in een toenamediagram. Als de toename positief is, wordt het staafje naar boven getekend. Is de toename negatief (afname), dan wordt het staafje naar beneden getekend.



Figuur 4.4

Neem je de stapgrootte steeds dichter bij 0 dan vormen de eindpunten van de staafjes de hellingsgrafiek bij de gegeven grafiek.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.
Wat kun je zeggen over het gedrag van de fietser als:

a De staafjes van het toenamediagram positief zijn.

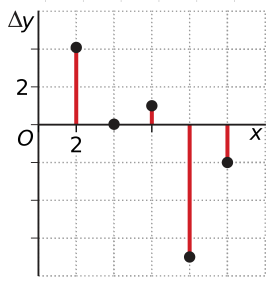
b De staafjes van het toenamediagram langer worden.

c De staafjes van het toenamediagram korter worden.

d Het toenamediagram een staafje van 0 heeft.

Opgave 2

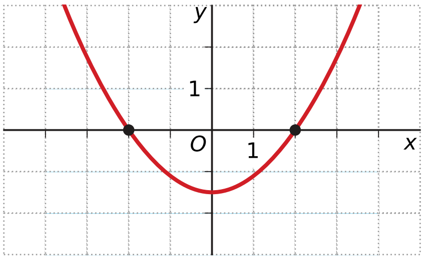
Schets een mogelijke grafiek door het punt $(4{,}8)$ bij het toenamediagram.



Figuur 4.5

Opgave 3

Gegeven is deze hellingsgrafiek.
Schets er een mogelijke grafiek bij. Ga er van uit dat de grafiek door (0,0) gaat.



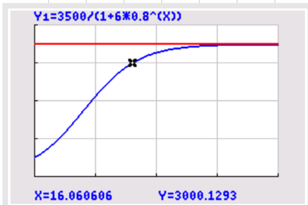
Figuur 4.6

Uitleg 2

Wanneer een zalmkwekerij een aantal zalmen in een vijver uitzet en de condities zijn in orde, dan zullen de vissen zich gaan vermenigvuldigen.
Het verband tussen de tijd t in maanden nadat de eerste vissen in de vijver zijn uitgezet en het aantal vissen a dat in de vijver leeft, wordt weergegeven met de formule:

$a = \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t}$

Je ziet hier de bijbehorende grafiek.



Figuur 4.7

Het differentiequotiënt (ook wel de gemiddelde verandering, de helling, of de richtingscoëfficiënt genoemd) op het interval [10,20] is:

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{\frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^{20}} - \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^{10}}}{20-10} \approx 114{,}5$$

Het differentiaalquotiënt is de gemiddelde verandering in een punt. Dit kun je benaderen door de gemiddelde verandering te berekenen op een heel klein interval, bijvoorbeeld $[10; 10{,}001]$ of nog kleiner.

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{\frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^{10{,}001}} - \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^{10}}}{10{,}001-10} \approx 186$$

In de figuur is te zien dat het aantal zalmen a steeds stijgt als de tijd t toeneemt. Dit is ook in te zien met behulp van de afgeleide van $a(t)$.

$$a'(t) = \frac{-3500 \cdot 6 \cdot 0{,}8^t \cdot \ln(0{,}8)}{(1+6 \cdot 0{,}8^t)^2}$$

a' is altijd positief, dus de grafiek van a is stijgend.
De grafiek van a is eerst toenemend stijgend en na verloop van tijd afnemend stijgend.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval [10,30].

b Bereken het differentiaalquotiënt bij $t = 20$, neem $\Delta t = 0{,}001$.

c Laat zien, hoe je door differentiëren de afgeleide $a'(t)$ kunt vinden. Laat met behulp van die afgeleide zien, dat $a'(20)$ overeen komt met het antwoord bij b.

d Wat is de betekenis van de afgeleide bij $t = 20$?

Opgave 5

De totale winst ($\times 1000$ euro) voor een fabriek kan berekend worden met de formule:
$TW = -0{,}34q^3 + 3{,}65q^2 + 2q - 25$.
Hierin is TW de totale winst en q het aantal geproduceerde producten ($\times 1000$).

a Bereken met behulp van differentiëren bij welk geproduceerd aantal producten de totale winst maximaal is. Hoeveel bedraagt die maximale winst?
Rond af op gehele euros.

b Bereken ook met behulp van differentiëren voor welke q de helling van TW maximaal is. Hoe groot is die helling?

c Wat is de praktische betekenis van je antwoorden bij b?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als bij de grafiek van $f(x)$ de waarde van x met een vaste stapgrootte Δx wordt vergroot, kun je een tabel maken van de toenames Δy van de functiewaarden: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
Bij een positieve toename wordt het staafje naar boven getekend.
Bij een negatieve toename (afname) wordt het staafje naar beneden getekend.

De **gemiddelde verandering** (ook wel het differentiequotiënt genoemd) van de functie f op het interval $[a,b]$ is:
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Het **differentiaalquotiënt** $\frac{dy}{dx}$ voor $x = a$ is de gemiddelde verandering in een punt. Deze kun je benaderen door de gemiddelde verandering te berekenen op een heel klein interval. Bijvoorbeeld het interval $[a; a + 0{,}0001]$ of nog kleiner.

Je kunt $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ook bepalen door de **afgeleide** te nemen van de functie.

- Als $f'(x) > 0$, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn positief en stijgt de grafiek.
- Als $f'(x) < 0$, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn negatief en daalt de grafiek.
- Als $f'(x) = 0$, dan is het hellingsgetal van de raaklijn 0. Er kan dan sprake zijn van een top.

De grafische rekenmachine kan het differentiaalquotiënt, het hellingsgetal van de raaklijn in een punt x aan de grafiek berekenen.

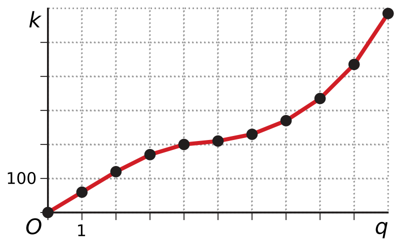
Extreme waarden kunnen worden gevonden door eerst te differentiëren, de afgeleide gelijk te stellen aan nul en vervolgens de ontstane vergelijking op te lossen. Controleer wel of er inderdaad van een extreme waarde sprake is. Je kunt het maximum of minimum ook met de grafische rekenmachine bepalen.

Voorbeeld 1

Bekijk de kostengrafiek waarin de totale variabele kosten k (€) van een bedrijf zijn uitgezet tegen het aantal producten q $(\times 100)$ dat het bedrijf produceert.

De marginale kosten zijn de extra totale kosten die een bedrijf maakt als de productie met één product uitgebreid wordt.

- Bereken de marginale kosten bij een productie van 200 stuks.
- Hoe kun je aan de grafiek zien dat de marginale kosten steeds positief zijn?
- Schets de hellingsgrafiek. Wat heeft de hellingsgrafiek met de marginale kosten te maken?
- Bij de productie van hoeveel stuks zijn de marginale kosten minimaal?



Figuur 4.8

Antwoord

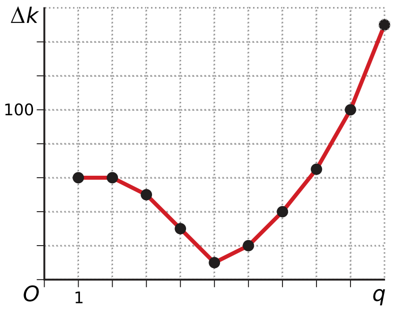
De marginale kosten bij een productie van 200 stuks zijn $\frac{120-60}{200-100} = 0{,}60$ euro.

De kostengrafiek is steeds stijgend, dus de marginale kosten zijn steeds positief.

Maak eerst een tabel.

q $(\times 100)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	0	60	120	170	200	210	230	270	335	435	585
Δk	-	60	60	50	30	10	20	40	65	100	150

Tabel 4.2



Figuur 4.9

De hellingsgrafiek is de grafiek van de marginale kosten.

Volgens de hellingsgrafiek zijn de marginale kosten minimaal bij een productie van 500 stuks.

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Hoe ziet de grafiek van de marginale kosten eruit als de grafiek van de totale variabele kosten constant stijgt?

b Is een bedrijf nog klein, dan stijgen de totale variabele kosten recht evenredig met de productie. Dat wil zeggen dat de kosten voor ieder geproduceerd product steeds gelijk blijven. Voor ieder product is dan even veel grondstof nodig tegen dezelfde prijs.
Bij welke productieaantallen is dit het geval?

c Hoe ziet de grafiek van de marginale kosten eruit als de grafiek van de totale variabele kosten afnemend stijgt?

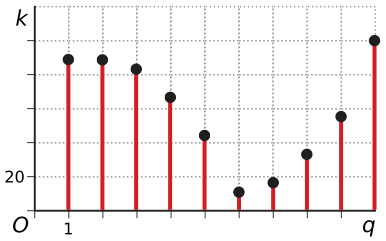
d Als de productieomvang stijgt, kan het bedrijf grondstoffen in grotere hoeveelheden inkopen, waardoor het korting krijgt en de totale variabele kosten dalen bij een stijgende productie.
Bij welke productieaantallen is dit het geval?

e Als de grafiek van de totale variabele kosten toenemend stijgt, hoe loopt de grafiek van de marginale kosten dan?

f Als de productieomvang heel groot wordt, kan het bedrijf minder efficiënt produceren. Er is dan meer uitval en meer afval, waardoor de totale variabele kosten stijgen.
Bij welke productieaantallen is dit het geval?

Opgave 7

Bekijk het toenamediagram van de totale variabele kosten van een bedrijf uitgezet tegen het aantal producten q (×100) dat het bedrijf produceert.



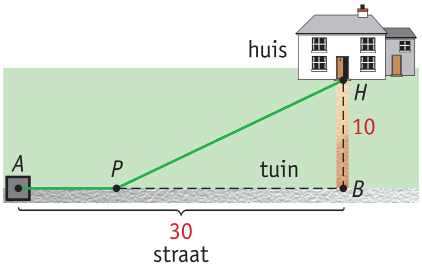
Figuur 4.10

Schets de grafiek van de totale variabele kosten.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Een woonhuis heeft een nieuwe waterleiding nodig. Het huis H staat op een afstand van 10 meter van de rechte weg AB. Het aansluitingspunt A voor de waterleiding ligt 30 meter verderop in de straat. De sleuf voor de waterleiding kan geheel of gedeeltelijk door de tuin gegraven worden. Het graven en weer netjes dichtmaken van een sleuf in de tuin kost 1,5 keer zo veel tijd als datzelfde werk langs de wegkant. Hoe moet er worden gegraven om alles in zo kort mogelijke tijd te doen?



Figuur 4.11

Antwoord

P is het punt waarbij de waterleiding de weg verlaat en dwars door de tuin verder gaat. Neem x meter voor de lengte van BP en t voor de benodigde tijd per meter langs de weg.

De totale benodigde tijd is: $T = t(30 - x) + 1{,}5t\sqrt{x^2 + 100}$.
Met behulp van differentiëren vind je de waarde van x waarvoor T minimaal is; de waarde van t mag hierin worden weggelaten.

$T'(x) = -1 + \frac{1{,}5x}{\sqrt{x^2+100}}$

De minimaal benodigde tijd vind je uit $T'(t) = 0$:

$$\begin{aligned} -1 + \frac{1{,}5x}{\sqrt{x^2+100}} &= 0 \\ \sqrt{x^2 + 100} &= 1{,}5x \\ 1{,}25x^2 &= 100 \\ x &= \sqrt{80} \vee x = -\sqrt{80} \end{aligned}$$

Plot de grafiek. Uit de grafiek van T blijkt dat T minimaal is als $x = \sqrt{80} \approx 8{,}94$ m.
De te graven sleuf moet daarom na 21,06 m afslaan naar de tuin en recht doorsteken naar het woonhuis.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Toon aan dat voor de totale tijd $T(x)$ als functie van de afstand x en de benodigde tijd t langs de weg geldt: $T = t(30 - x) + 1{,}5t\sqrt{x^2 + 100}$.

b Toon aan dat bij het vinden van de kortst benodigde tijd voor het graven de waarde van t geen enkele rol speelt.

Opgave 9

Tijdens een poldercross moeten de deelnemers lopend een afstand over een weiland afleggen en zwemmend een kanaal oversteken.

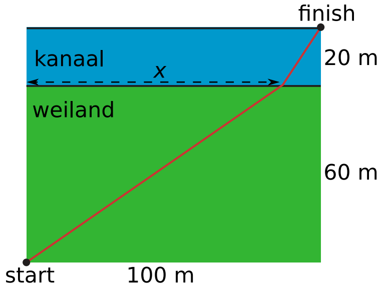
Een van de deelnemers loopt met een gemiddelde snelheid van 6 m/s en zwemt met een gemiddelde snelheid van 2 m/s.

a Leg uit dat bij de kortste afstand niet de snelste tijd hoort.

b Laat zien dat de functie $t(x)$ met tijd uitgedrukt als functie van x is: $t(x) = \frac{\sqrt{3600+x^2}}{6} + \frac{\sqrt{x^2-200x+10400}}{2}$.

c Bereken de afgeleide van t.

d Bereken voor welke waarde van x de deelnemer van de poldercross de snelste tijd heeft.



Figuur 4.12

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de formule: $y = 3 \cdot \sqrt{x}$.

a Teken het toenamediagram met stapgrootte 1 van $x = 0$ tot $x = 6$.

b Hoe ziet het toenamediagram van $y = 3 \cdot \sqrt{x} + 4$ er uit?

Opgave 11

Een fabrikant verkoopt zelfrijzend bakmeel voor € 2,25 per kilogram. Bekijk de tabel met de kosten TK voor productie en opslag.

q (honderd kg)	1	2	3	4	5	6
TK (€)	75	100	125	200	400	800

Tabel 4.3

a Hoeveel stijgt de winst gemiddeld per kilogram als de productie toeneemt van 400 naar 500 kg?

b Voor de kosten heeft de fabrikant de formule
$TK = 10q^3 - 60q^2 + 130q$ laten opstellen.
Ga na dat deze formule past bij de gegevens in de tabel.

c Stel een formule op voor de winst TW als functie van q.

d Bepaal met behulp van differentiëren de maximale winst.

Opgave 12

Bekijk de tabel met tussentijden van een wielrenner op bepaalde plaatsen in een tijdrit.

tijd t (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand a (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 4.4

a Bereken het differentiequotiënt op het tijdsinterval $[0,10]$.

b Welke betekenis heeft dit getal voor de wielrenner?

A. Het is de afgelegde afstand in die periode.
B. Het is de snelheid gedurende die periode.
C. Het is de gemiddelde snelheid gedurende die periode.

c Je kunt bij deze tabel een grafiek maken door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd t in minuten, op de verticale as de afgelegde afstand a in kilometer. Bereken het hellingsgetal van het lijnstuk dat hoort bij het interval $[44,60]$.

d Bereken voor het tijdsinterval $[18,44]$ de waarde $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ in twee decimalen.

e Welke betekenis hebben de bij c en d gevonden getallen voor de grafiek? Geef alle goede antwoorden.

A. Ze geven de helling van het lijnstuk door de punten op de grafiek bij begin en eind van het tijdsinterval.
B. Ze geven de totale toename van de afstand weer op het tijdsinterval.
C. Ze geven de gemiddelde toename van de afstand per minuut weer op het tijdsinterval.

Opgave 13

De makers van een nieuw te bouwen indoor skipiste gaan in plaats van een helling een complete berg maken. Het zijaanzicht van de berg heeft een sinusvorm. Bij deze berg hoort de formule:
$h = 30 + 30 \sin(0{,}0025\pi x - 0{,}5\pi)$
Hierin is h de hoogte van de berg in meter en x de horizontale afstand in meter vanaf de linker voet van de berg.

De helling van de berg is niet overal even groot. Om te bepalen wat de moeilijkheidsgraad (kleur) van deze piste is, moet het hellingspercentage berekend worden voor het steilste stuk van de berghelling.

a Bereken welke x-waarden horen bij het steilste stuk links en rechts van de bergtop.

b Bekijk de tabel met het hellingspercentage per kleur piste.

kleur	hellingspercentage
groen	$3 - 9\%$
blauw	$10 - 16\%$
rood	$17 - 23\%$
zwart	vanaf 24%

Tabel 4.5

Gebruik de grafische rekenmachine en bepaal welke kleur er bij deze berg hoort.

Opgave 14

Een gelijkstroomcircuit bestaat uit een 15 volts batterij met een inwendige weerstand van 15 ohm en een variabele weerstand van R (ohm). Het vermogen P (watt) dat door dit circuit wordt opgewekt, wordt gegeven door: $P = RI^2$.

De stroomsterkte I wordt daarin gegeven door: $I = \frac{15}{R+15}$.

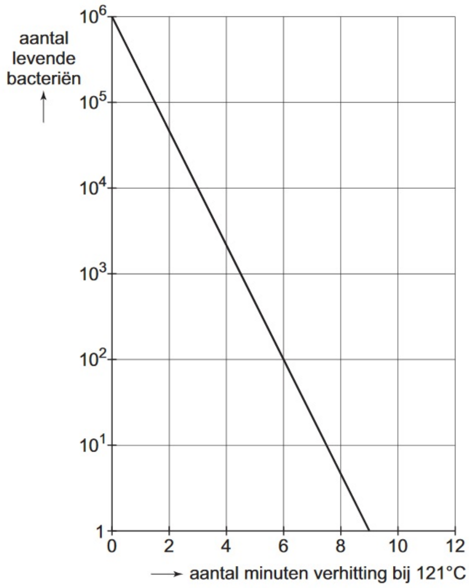
a Druk het ontwikkelde vermogen uit in R, de variabele weerstand.

b Bereken het maximaal ontwikkelde vermogen met behulp van differentiëren.

Toepassen

Opgave 15: Sterilisatie (2)

Om voedingswaren tegen bederf te beschermen, worden ze tijdelijk verhit. Men noemt dit steriliseren. Er zijn verschillende sterilisatiemethodes. In deze opgave kijken we naar het sterilisatieproces bij twee soorten bacteriën. De temperatuur bij dat proces is 121 °C. Naarmate de bacteriën korter aan deze temperatuur zijn blootgesteld, zullen er meer bacteriën overleven. Bekijk de overlevingsgrafiek van een bepaalde bacterie.



Figuur 4.13

Voor de bacterie geldt de formule:
$N(t) = 10^6 \cdot 2^{-2,2 \cdot t}$
Hierin is N het aantal bacteriën na t minuten.
Met behulp van deze formule kun je voor elk tijdstip t berekenen hoe groot het aantal bacteriën op dat tijdstip is. Je kunt aan deze formule (en ook aan de grafiek) zien dat er steeds minder bacteriën zijn naarmate de tijd toeneemt. Het aantal bacteriën neemt echter niet met een vast aantal per minuut af.

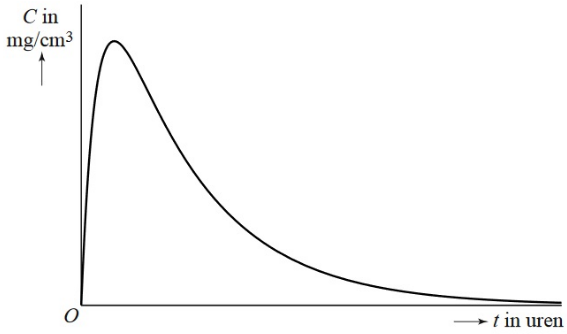
Bereken op welk tijdstip dat aantal bacteriën afneemt met 10000 bacteriën per minuut. Gebruik hiervoor de afgeleide van $N(t)$.

(naar: examen wiskunde A1,2 in 2006, tweede tijdvak)

Opgave 16: Hooikoorts

Hooikoorts is een vervelende allergische aandoening waar veel mensen last van hebben. Iemand die last heeft van hooikoorts, reageert op zogenoemde pollen in de lucht, die afkomstig zijn van bomen en grassen die in bloei staan. De allergische reactie veroorzaakt naast irritatie aan ogen, neus en keel ook hoest- en niesbuien.

PharmaCie brengt een nieuw medicijn tegen hooikoorts op de markt. Het nieuwe medicijn van PharmaCie wordt in pilvorm verkocht. Als een patiënt klachten krijgt, neemt hij een pil. De werkzame stof komt dan via de maag en de darm in de bloedbaan terecht. De hoeveelheid werkzame stof in de bloedbaan stijgt eerst en neemt daarna af, omdat het door het lichaam wordt afgebroken. De concentratie van de werkzame stof in de bloedbaan is C. Bekijk de figuur met een schets van de grafiek van C.



Figuur 4.14

Een onderzoeker van PharmaCie stelt de volgende formule op die dit verloop redelijk benadert:

$C_1(t) = \frac{16t}{190t^2+60}$

Hierin is C_1 de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t de tijd in uur na het innemen van de pil.

a Bereken met behulp van de afgeleide van C_1 na hoeveel minuten, gerekend vanaf het moment dat de pil is ingenomen, de concentratie werkzame stof maximaal is.

Een andere onderzoeker stelt een geheel andere formule op voor het verband tussen de tijd na het innemen van de pil en de concentratie werkzame stof:

$C_2(t) = 0{,}13\left(\mathrm{e}^{-0{,}65t} - \mathrm{e}^{-3{,}9t}\right)$

Hierin is C_2 de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t de tijd in uur na het innemen van de pil.

Aan de schets van de grafiek is te zien dat de werkzame stof na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed verdwenen is. Met een redenering kun je aantonen dat elk van beide formules dit proces beschrijft.

b Beredeneer aan de hand van de formules van C_1 en C_2 dat de werkzame stof volgens beide formules na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed is verdwenen.

c Hoewel de grafieken van C_1 en C_2 beide erg op de grafiek in de figuur lijken, verschillen de momenten waarop het maximum bereikt wordt wel van elkaar. Onderzoek met behulp van de afgeleide C_2' of het maximum van C_2 eerder of later dan het maximum van C_1 optreedt.

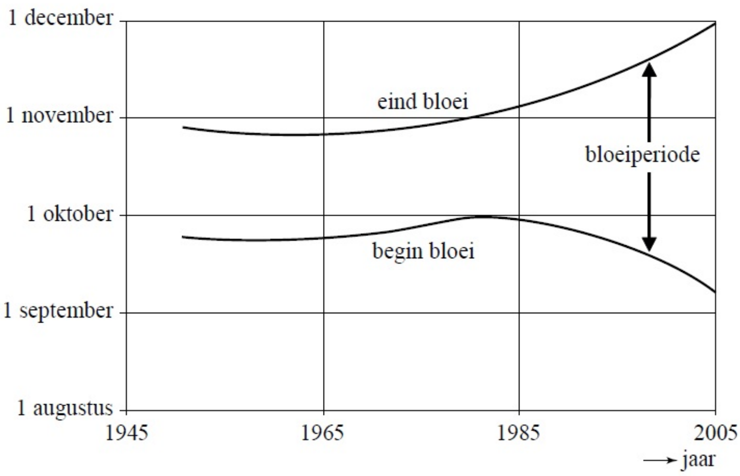
(naar: pilotexamen vwo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 17

In Zuid-Engeland onderzoekt men sinds 1950 de lengte van de bloeiperiode van paddenstoelen. Na vele duizenden waarnemingen bij 315 verschillende paddenstoelsoorten hebben Britse onderzoekers geconcludeerd dat er sinds 1980 een duidelijke verandering van de gemiddelde lengte van de bloeiperiode zichtbaar is. Zie figuur 1.

figuur 1 Bloeiperiode paddenstoelen



Figuur 4.15

Van 1950 tot 1980 bleef de lengte van de bloeiperiode ongeveer gelijk. Daarna is deze in de periode van 1980 tot 2005 toegenomen van 30 tot 83 dagen. In deze opgave nemen we aan dat de lengte van de bloeiperiode sinds 1980 exponentieel toeneemt.

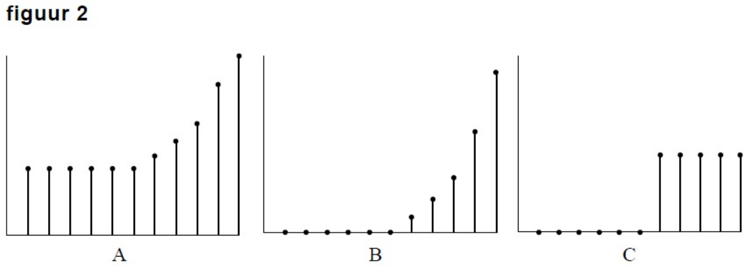
a Bereken met de gegevens van 1980 en 2005 het jaarlijkse groeipercentage vanaf 1980 in twee decimalen nauwkeurig.

Vanaf 1980 is de lengte van de bloeiperiode bij benadering te beschrijven met de formule:
$B = 30 \cdot 1{,}042^t$.
Hierin is B de lengte van de bloeiperiode in dagen en t de tijd in jaren vanaf 1980.

De lengte van de bloeiperiode is van 1980 tot 2005 ruimschoots verdubbeld.

b Bereken in hoeveel jaar de bloeiperiode twee keer zo lang wordt.

Bij de lengte van de bloeiperiode, zoals die aangegeven is in figuur 1, kun je een toenamediagram tekenen. In figuur 2 staan drie toenamediagrammen, waarvan er één goed past bij de bloeiperiode tussen 1950 en 2005.



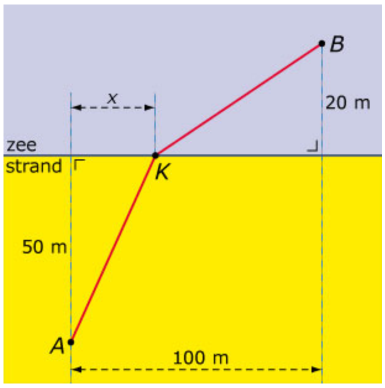
Figuur 4.16

c Geef met een toelichting aan welk toenamediagram het juiste is.

(bron: examen havo wiskunde a in 2012)

Opgave 18

Een zwemmer is in nood voor de kust van Bergen. De tekening geeft een beeld van de situatie. De zwemmer bevindt zich bij punt B in zee. Een lid van de reddingsbrigade ziet hem en wil in actie komen. Zij bevindt zich in punt A en wil via de snelste weg naar de zwemmer in nood toe. Maar wat is de snelste weg?
Een deel van de weg moet ze rennend afleggen en een deel zwemmend. Ze rent met een gemiddelde snelheid van 6 m/s en zwemt met een gemiddelde snelheid van 1,5 m/s. Hoe kan ze het snelst hulp bieden? Noem het punt waar ze het water in stapt K.
Punt K kan overal langs de aangegeven 100 m-lijn liggen. De tijd die ze nodig heeft om in B te komen moet zo klein mogelijk zijn. Noem de totale tijd t, de gemiddelde snelheid over het strand v_s en de gemiddelde snelheid in zee v_z.



Figuur 4.17

a Druk t uit in AK, KB, v_s en v_z.

b Formuleer een verband tussen t en x.

c Bepaal met behulp van differentiëren de minimale tijd die het lid van de reddingsbrigade nodig heeft om de zwemmer te bereiken. Geef je antwoord afgerond op een tiende seconde.

d Bepaal de kortste weg.

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Toepassen van formules**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- recht evenredig, omgekeerd evenredig — lineair verband, hyperbolisch verband — lineair interpoleren, extrapoleren
- combineren en herleiden van formules
- karakteristieken van functies — rekenmodel — rijen, met name rekenkundige en meetkundige
- verandering, toenamediagram, gemiddelde helling — afgeleide en helling in een bepaald punt

Activiteitenlijst

- herkennen of sprake is van een recht evenredig, een omgekeerd evenredig, een lineair, of een hyperbolisch verband met formules van de genoemde verbanden rekenen en de eigenschappen van de bijbehorende functies gebruiken — lineair interpoleren en extrapoleren
- formules herleiden en combineren: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, bij elkaar invullen
- karakteristieken van functies bepalen door redeneren en met behulp van de grafische rekenmachine — werken met rekenmodellen in toepassingen — werken met rekenmodellen met gehele stapgrootte, met rijen dus
- toenamediagrammen maken en gebruiken om toename te beschrijven, gemiddelde helling berekenen — afgeleide bepalen met behulp van differentiëren en helling in een bepaald punt berekenen en interpreteren, hellingsgrafieken maken en interpreteren

Achtergronden

Bij het toepassen van formules gaat het om het werken met rekenmodellen. Deze rekenmodellen ontstaan door modelleren. Modelleren is in feite een heel breed begrip: het wordt gebruikt om het op schaal bouwen van voorwerpen, het tekenen van objecten met de computer, het ontwerpen van rekenmodellen voor allerlei processen, enzovoorts, aan te duiden.

Testen

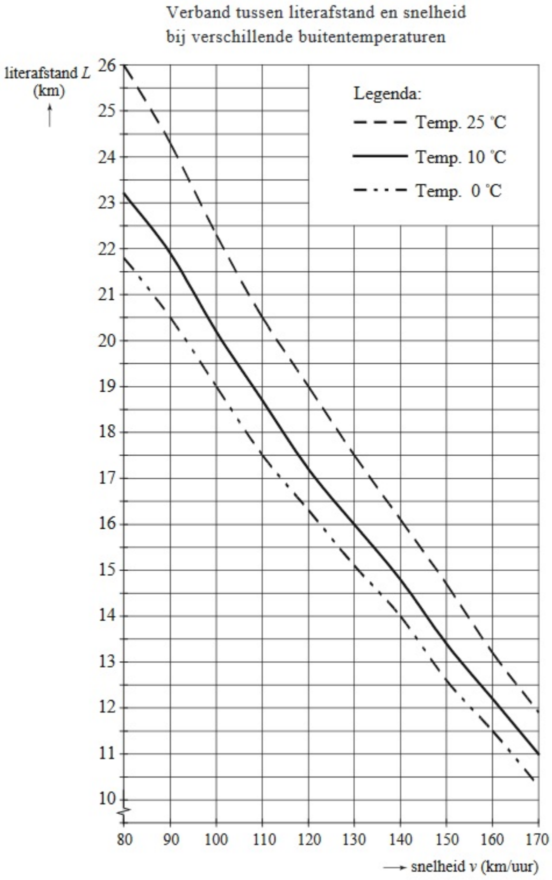
Opgave 1

Het benzineverbruik van een automotor is afhankelijk van verschillende factoren. Een van die factoren is de buitentemperatuur.
In de figuur is voor een aantal verschillende buitentemperaturen de literafstand L (km) uitgezet tegen de snelheid v (km/h).
De literafstand is het aantal kilometer dat met 1 liter benzine gereden kan worden. Hoe groter de literafstand, des te lager het verbruik.

Bekijk de figuur. Te zien is dat bij een snelheid van 90 km/h en een temperatuur van 10 °C de literafstand 21,9 kilometer is en dat bij een temperatuur van 25 °C de literafstand 24,3 kilometer is.

Bereken met lineair interpoleren de literafstand bij deze snelheid en een temperatuur van 13 °C.

(naar: examen havo wiskunde A in 2012, tweede tijdvak)



Figuur 5.1

Opgave 2

Op een school wordt een prestatieloop voor de vierde klassen georganiseerd. Er moet een afstand van vijftien kilometer worden afgelegd. De gemiddelde snelheid voor een loper in kilometer per uur is v, de totale tijd t.

a Wat voor soort verband bestaat er tussen de snelheid en de tijd?

b Geef een formule die de looptijd t uitdrukt in de gemiddelde snelheid v.

c Wat is de snelheid bij een looptijd van honderd minuten?

d Alle lopers zijn onderweg ongeveer vijf minuten tijd kwijt met het wachten bij een aantal stempelposten.

Maak met dit gegeven een formule voor t van de vorm: $t = \frac{a}{v} + c$.

e Bereken met de tweede formule de gemiddelde snelheid van een loper die in totaal een uur en twintig minuten nodig heeft voor deze afstand.

f Plot de grafiek van de tweede formule. Welke asymptoten heeft de grafiek?

Opgave 3

Gegeven zijn de formules: $P = 5q + 8r + 35$ en $r = 4q - 6$.
Combineer de formules en stel formules op van de vorm $P = ar + b$ en $r = cP + d$.
Welke getallen zijn a, b, c en d?

Opgave 4

Bekijk de tabel met het aantal inschrijvingen voor een hardloopwedstrijd. Er is ruimte voor 2000 inschrijvingen.

tijdstip (uur)	00:00	04:00	08:00	12:00	16:00	20:00
aantal	31	68	150	330	726	1598

Tabel 5.1

a De aantallen inschrijvingen in de tabel vormen rij u.
Zoek uit of rij u (bij benadering) een rekenkundige of meetkundige rij is.

b Stel een recursieformule op bij rij u. Neem $n = 0$ om 00:00 uur.

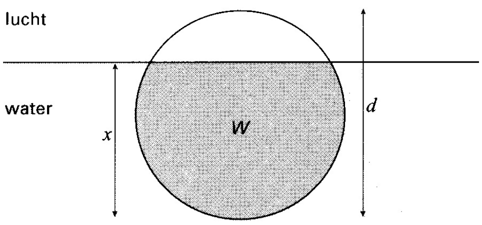
c Bereken met de recursieformule het aantal inschrijvingen om 02:00 uur.

d Stel een directe formule op bij rij u. Is dit een lineaire formule of een exponentiële formule?

e Bereken na hoeveel uur de inschrijving voor de hardloopwedstrijd gesloten wordt, als de groei op deze manier doorgaat.

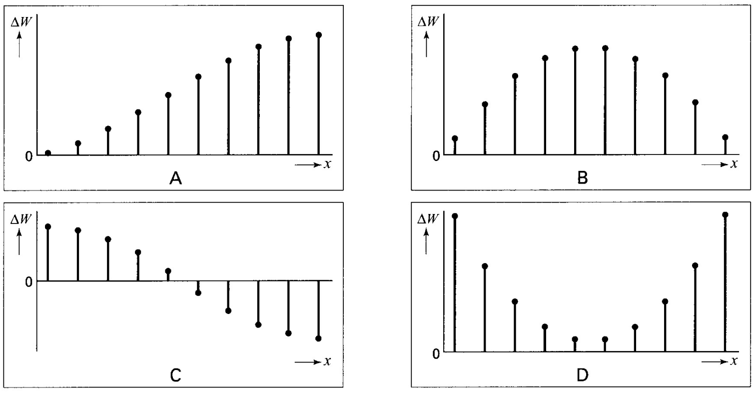
Opgave 5

Als je met een bal in het water speelt en je laat hem onder water los, schiet hij omhoog. Bekijk de figuur waarop een bal gedeeltelijk onder water gehouden wordt. W is het volume van het deel van de bal onder water.



Figuur 5.2

Bekijk de toenamediagrammen van de toename van W als de bal onder water geduwd wordt. x is de diepte onder water van de onderkant van de bal. Drie van de vier diagrammen zijn niet goed.



Figuur 5.3

Leg uit welk toenamediagram past bij het onder water duwen van de bal.

A. diagram A
B. diagram B
C. diagram C
D. diagram D

(naar: examen havo wiskunde A1,2 in 2001, tweede tijdvak)

Opgave 6

Gegeven is de functie: $f(x) = (2x - 1)^3 - 4(2x - 1)$.
De grafiek van deze functie is ontstaan uit die van $g(x) = x^3 - 4x$ door twee transformaties toe te passen.

a Welke twee transformaties zijn dat en in welke volgorde moet je ze toepassen?

b Laat zien hoe je de afgeleide van f kunt herleiden uit die van g.

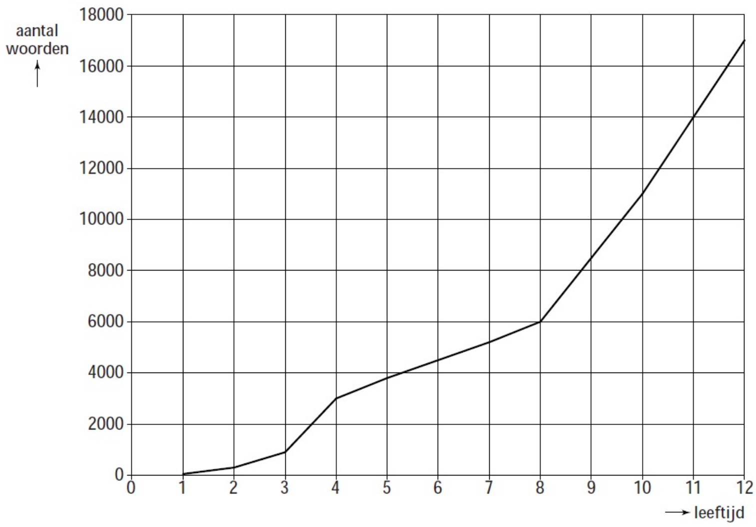
c Bepaal met behulp van de afgeleide de extremen van f in twee decimalen.

Examen

Opgave 7: Woordenschat

De woorden die je begrijpt of kunt gebruiken, vormen samen je woordenschat. Hoe groter je woordenschat is, des te beter kun je teksten lezen, teksten begrijpen en je mondeling en schriftelijk in een taal uitdrukken. In deze opgave beperken we ons tot mensen die opgroeien met de Nederlandse taal als moedertaal.

De woordenschat van een kind groeit bijna onmerkbaar door luisteren, spreken en lezen. In Nederland heeft een kind als het de leeftijd van 4 jaar bereikt een woordenschat van gemiddeld 3000 woorden. Tot de 12e verjaardag groeit dit tot gemiddeld 17000 woorden. In onderstaande figuur is dit grafisch weergegeven.



Figuur 5.4 gemiddelde woordenschat van Nederlandstalige kinderen in Nederland

Uit de figuur blijkt dat de gemiddelde woordenschat van de 8e tot de 12e verjaardag sneller groeit dan van de 4e tot de 8e verjaardag.

a Bereken met hoeveel woorden per jaar de gemiddelde woordenschat van een kind meer groeit van de 8e tot de 12e verjaardag dan van de 4e tot de 8e verjaardag.

We gaan uit van een woordenschat van gemiddeld 17000 op de 12e verjaardag. Na de 12e verjaardag gaat de woordenschat onder jongeren behoorlijk variëren: Bij het bereiken van de leeftijd van 21 jaar varieert deze van 45000 tot 150000.

Bij sommige jongeren spreken we van een hoge woordenschat. Bij hen groeit de woordenschat exponentieel tot gemiddeld 150000 wanneer de leeftijd van 21 jaar bereikt wordt. Hiervoor is de volgende formule opgesteld:
$W_h = 17000 \cdot 1{,}27^t$
Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.
In deze formule is de jaarlijkse groeifactor afgerond op twee decimalen.

b Bereken deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Bij andere jongeren spreken we van een lage woordenschat. Bij deze jongeren groeit de woordenschat lineair tot gemiddeld 45000 op hun 21e verjaardag. Hiervoor geldt de volgende formule:
$W_l = at + b$
Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.
Ga ook hierbij uit van een woordenschat van 17000 op de 12e verjaardag.

Met behulp van de formule $W_l = at + b$ kan de woordenschat die jongeren met een lage woordenschat op hun 18e verjaardag hebben, berekend worden.
Vervolgens kan met behulp van de formule $W_h = 17000 \cdot 1{,}27^t$

worden berekend hoeveel maanden eerder jongeren met een hoge woordenschat deze zelfde woordenschat zullen hebben.

c Bereken dit aantal maanden.

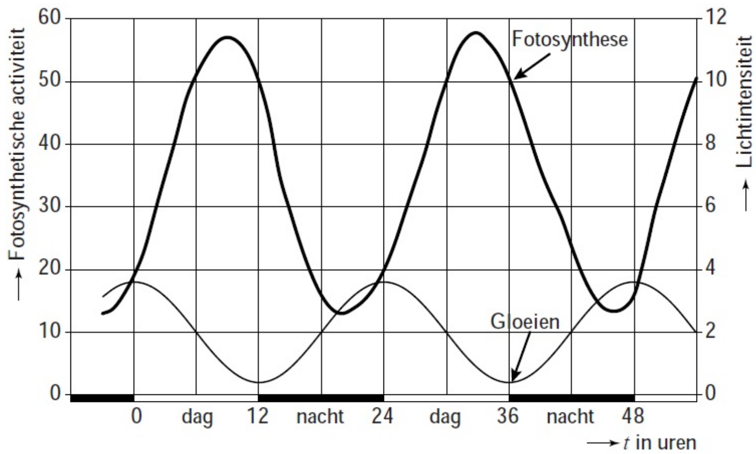
In de praktijk gebruikt men graag formules waar de werkelijke leeftijd in voorkomt. Voor jongeren met een hoge woordenschat geldt de formule
$W_h = 17000 \cdot 1{,}27^t$ (met $t = 0$ op de 12e verjaardag).

d Schrijf deze in de vorm $W_h = b \cdot g^L$, waarbij L de werkelijke leeftijd is. Rond b af op tientallen.

(bron: pilotexamen wiskunde a vwo 2012, tweede tijdvak)

Opgave 8: Algen

Van een bepaald soort ééncellige algen (Gonyaulax polyedra) is het dag- en nachtritme onderzocht. De algen werden blootgesteld aan afwisselend 12 uur licht en 12 uur donker. Deze perioden noemen we respectievelijk dag en nacht. In de figuur zijn resultaten van dit onderzoek te zien.



Figuur 5.5

Eén van de gemeten activiteiten is fotosynthese, het opslaan van energie met behulp van (zon)licht. De intensiteit van de fotosynthese is weergegeven op de linker verticale as.
De grafiek voor de fotosynthese F als functie van de tijd, kan benaderd worden door een formule van de vorm:
$F = a \cdot b \sin(c(t-3))$
Hierbij is t de tijd in uren met $t = 0$ bij het begin van een dag.

a Stel deze formule op. Licht je antwoord toe.

Sommige algen lichten vanzelf op in het donker. Dit verschijnsel, gloeien genaamd, is in de figuur ook met een grafiek weergegeven. De lichtintensiteit G werd gemeten in eenheden die langs de rechter verticale as zijn uitgezet. Men kan de grafiek van het gloeien benaderen met de formule:

$G = 2{,}0 + 1{,}6 \sin\left(\frac{1}{12}\pi(t-18)\right)$

Hierin is t weer de tijd in uren met $t = 0$ bij het begin van een dag. Tijdens iedere periode van 24 uur is de lichtintensiteit van het gloeien gedurende een bepaalde tijd groter dan 3 eenheden.

b Bereken met behulp van de formule van G hoe lang de lichtintensiteit van het gloeien in een periode van 24 uur groter is dan 3 eenheden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

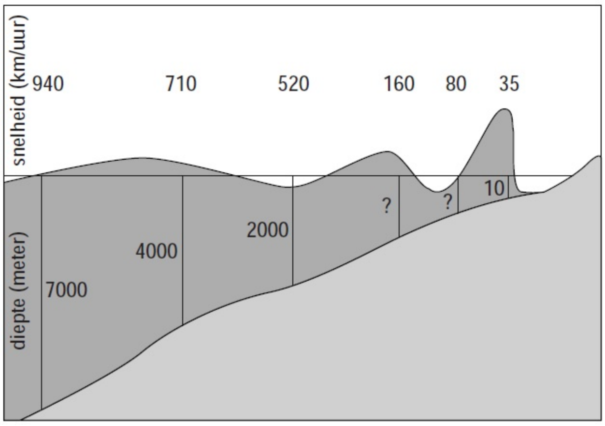
De lichtintensiteit bij gloeien is na een maximum eerst toenemend dalend en daarna afnemend dalend.

c Bij welke snelheid neemt de lichtintensiteit maximaal af bij gloeien? Gebruik de grafiek of de formule in de toelichting.

(bron: pilotexamen wiskunde a vwo 2012, tweede tijdvak, enigszins aangepast)

Opgave 9: Tsunami

Op 26 december 2004 werd Zuidoost-Azië getroffen door een tsunami. Een tsunami is één heel lange golf die bij de kust heel hoog wordt. De tsunami had rampzalige gevolgen voor een aantal kustgebieden. Dit kwam door de enorme hoeveelheid water die door deze tsunami werd meegevoerd.
In onderstaande figuur is een schematisch overzicht te zien van het verloop van een tsunami. Boven elke genoemde waterdiepte is steeds de bijbehorende snelheid weergegeven.



Figuur 5.6 snelheid in km/uur bij verschillende waterdiepten

In de figuur is bijvoorbeeld te zien dat een tsunami bij een diepte van 4000 meter zich met een snelheid van 710 km/uur verplaatst.

Voor de snelheid van een tsunami geldt bij benadering de volgende formule:

$v = 11{,}3\sqrt{d}$

Hierin is v de snelheid in km/uur en d de waterdiepte in meter.

In de figuur ontbreken twee waarden voor de waterdiepte. Zij zijn aangegeven met een vraagteken.

a Bereken met behulp van bovenstaande formule en de gegevens uit de figuur deze twee ontbrekende waarden.

De tsunami van december 2004 werd veroorzaakt door een aardbeving onder zee, 150 km uit de kust van het Indonesische eiland Sumatra.
De tsunami plantte zich voort door de Golf van Bengalen, waar de zee ongeveer 3 km diep is.

b Bereken hoeveel minuten een tsunami nodig heeft om een afstand van 150 km af te leggen in water van 3 km diep.

In de figuur is ook te zien dat in de buurt van de kust, waar de waterdiepte niet zo groot is, de golfhoogte van een tsunami groter wordt. Op volle zee, waar de waterdiepte groot is, is de golfhoogte niet zo hoog.
Bij tsunami's is het volgende verband gevonden tussen waterdieptes en golfhoogtes:

$$h_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{0{,}25} \cdot h_1$$

Hierin is h_1 de golfhoogte bij waterdiepte d_1 en h_2 de golfhoogte bij waterdiepte d_2. h_1, d_1, h_2 en d_2 zijn in meters.
De tsunami van 26 december 2004 ontstond in een gebied met waterdiepte 1 km en golfhoogte 60 cm. Met deze gegevens en de formule $h_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{0{,}25} \cdot h_1$ kunnen we voor het verdere verloop van deze tsunami het verband tussen de waterdiepte d en de golfhoogte h beschrijven met de formule:

$$h \approx 3{,}37 \cdot d^{-0{,}25}$$

c Toon dit aan.

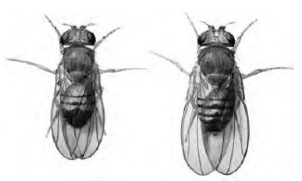
Naarmate een golf dichter bij de kust komt, neemt de waterdiepte steeds verder af. Dit is in de figuur te zien. In de figuur kun je ook zien dat de golfhoogte toeneemt als de golf dichter bij de kust komt.
Met behulp van de afgeleide van h kun je onderzoeken of de toename van de golfhoogte groter of kleiner wordt naarmate de golf dichter bij de kust komt.

d Onderzoek met behulp van een schets van de afgeleide van h of deze toename groter of kleiner wordt naarmate de golf dichter bij de kust komt.

(bron: pilotexamen wiskunde a vwo 2012, tweede tijdvak)

Opgave 10: Fruitvliegjes

Bij praktische opdrachten voor het vak biologie over kruisingen wordt vaak gebruik gemaakt van fruitvliegjes (Drosophila melanogaster). Deze fruitvliegjes zijn namelijk makkelijk te kweken en de ontwikkeling van ei tot fruitvliegje duurt maar negen dagen. Men kan dus in zeer korte tijd veel generaties kweken.



Figuur 5.7

Het aantal fruitvliegjes neemt de eerste weken exponentieel toe. Bij een praktische opdracht tellen leerlingen uit 5vwo na 2 weken 140 fruitvliegjes en na 5 weken 1065 fruitvliegjes. Bij deze gegevens is een exponentiële formule te maken voor het aantal fruitvliegjes F na t weken.

a Geef deze formule. Licht je antwoord toe.

In een kweekruimte kan het aantal fruitvliegjes niet onbeperkt toenemen. Het maximale aantal fruitvliegjes is afhankelijk van de grootte van de kweekruimte. Een ander experiment, dat werd gestart op 10 november 2011, werd in een kleinere kweekruimte uitgevoerd. Bij het vervolg van deze opgave gaan we uit van de volgende formule die het aantal fruitvliegjes bij dit experiment beschrijft:

$$F = \frac{340}{1+54\,e^{-0{,}24t}}$$

Hierbij is t de tijd in dagen na 10 november 2011 en F het aantal fruitvliegjes.

b Welke aantallen fruitvliegjes zijn volgens bovenstaande formule in de kweekruimte mogelijk? Licht je antwoord toe.

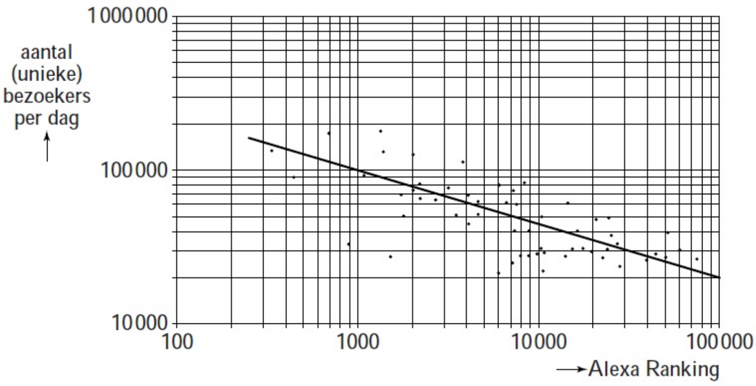
Fruitvliegjes zijn met een beetje etherdamp gemakkelijk te verdoven waarna je ze kan tellen en met een loep bestuderen. Op de dag dat er de meeste fruitvliegjes bijkomen wil Boris ze verdoven.

c Bereken met behulp van de afgeleide van F op welke datum er de meeste fruitvliegjes bijkomen.

(bron: pilotexamen wiskunde a vwo 2012, tweede tijdvak, enigszins aangepast)

Opgave 11: Websites

Een manier om de populariteit van websites te meten, is door naar de zogenoemde Alexa Ranking te kijken. Het internetbedrijf Alexa houdt bij hoe vaak websites bezocht worden, en stelt daarvan een ranglijst op. Zo heeft de website google.com wereldwijd ranking 1 met 1,2 miljard unieke bezoekers per dag (begin 2011).
Voor een aantal Nederlandse websites is het verband tussen de Alexa Ranking en het aantal unieke bezoekers per dag weergegeven in onderstaande figuur. In de figuur is op beide assen gebruik gemaakt van een logaritmische schaalverdeling.



Figuur 5.8

In de figuur is te zien dat er verschillende websites zijn met een Alexa Ranking tussen de 1000 en de 2000. Het verschil tussen de bijbehorende aantallen unieke bezoekers per dag van deze websites is vrij groot.

a Bereken dit maximale verschil met behulp van de figuur.

De punten in de figuur liggen globaal op een rechte lijn. Deze lijn is in de figuur getekend. Bij deze lijn hoort de formule $B = 1118000 \cdot r^{-0{,}35}$.
Hierin is B het aantal unieke bezoekers per dag en r de Alexa Ranking van de website.
Lang niet bij alle aantallen unieke bezoekers per dag is in de figuur precies af te lezen welke Alexa Ranking de betreffende website heeft. Met de hierboven vermelde formule is deze ranking wel te berekenen.

b Bereken met behulp van de formule de Alexa Ranking van een website met 25000 unieke bezoekers per dag.

c Beredeneer aan de hand van de formule dat de grafiek van B daalt.

De formule $B = 1118000 \cdot r^{-0{,}35}$ kan herschreven worden in de vorm
$\log(B) = a + b \cdot \log(r)$.

d Bereken de waarden van a en b.

(bron: pilotexamen wiskunde a vwo 2012, tweede tijdvak, enigszins aangepast)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het .

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

www.math4all.nl

Werkblad bij Opgave 16 op pagina 73