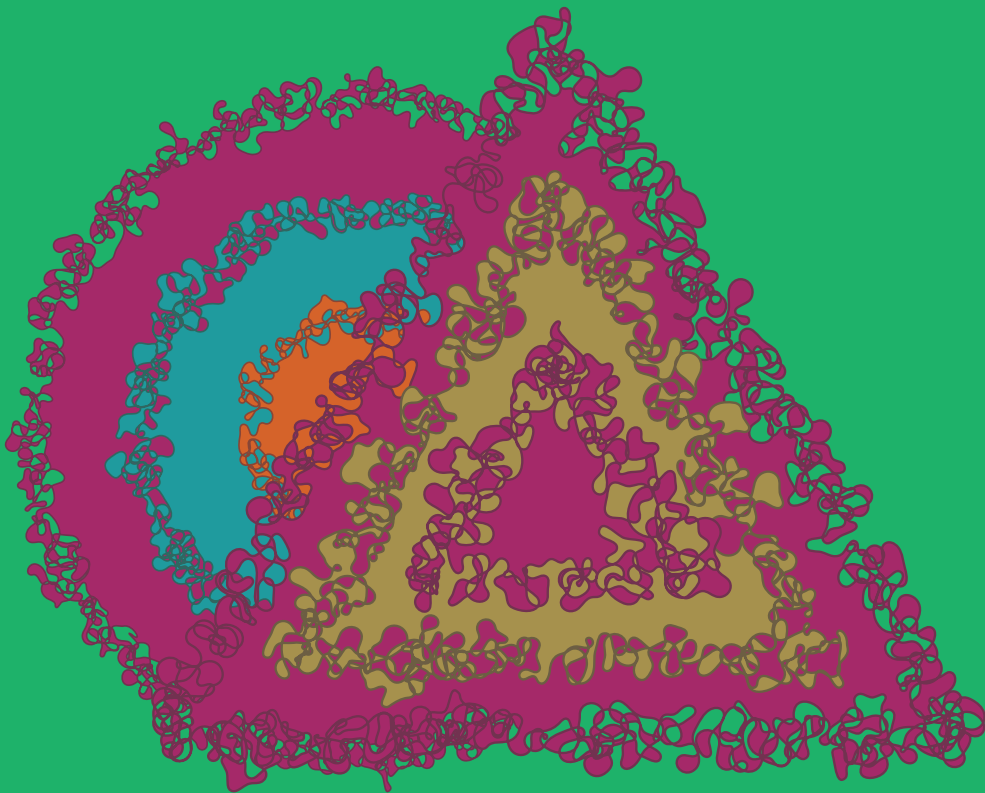


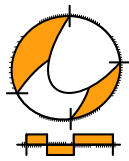
Wiskunde D

5 VWO

Katern 3

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Continue kansmodellen 5

- 1.1 Continue stochast 6
- 1.2 Normaalkromme 14
- 1.3 Standaardiseren 25
- 1.4 Normaal of niet? 34
- 1.5 Binomiale kansen benaderen 44
- 1.6 Totaalbeeld 51

2 Hypothesen en verbanden 61

- 2.1 Het begrip toets 62
- 2.2 Binomiale toetsen 70
- 2.3 Normale toetsen 78
- 2.4 Bijzondere toetsen 87
- 2.5 Correlatie 97
- 2.6 Lineaire regressie 108
- 2.7 Totaalbeeld 116

Register 127

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Continue kansmodellen

1.1	Continue stochast	6
1.2	Normaalkromme	14
1.3	Standaardiseren	25
1.4	Normaal of niet?	34
1.5	Binomiale kansen benaderen	44
1.6	Totaalbeeld	51

- b Hoe geef je die kans in het staafdiagram weer? En in het lijndiagram?
- c Hoe bepaal je de kans dat een klant minder dan 4,75 minuten transactietijd kost?

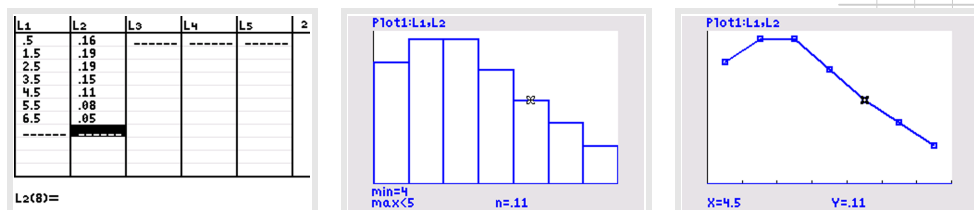
Uitleg 1

Een bedrijf heeft door tellingen een frequentieverdeling opgesteld voor de tijd die nodig is om een klant te helpen. Voor deze transactietijd (in minuten) geldt:

t (min.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(T = t)$	0,16	0,19	0,19	0,15	0,11	0,08	0,05	0,04	0,03	0,01

Tabel 1.2

Je kunt dit opvatten als een kansverdeling voor een discrete stochast T . Maar T kan in feite elke (positieve) reële waarde aannemen. Door steeds kleinere tijdsintervallen te nemen kun je een kansverdeling voor deze continue stochast opstellen, benaderen. Het lijndiagram laat dit al een beetje zien. (Merk op dat voor de juiste figuren de klassenmiddens van elke minuut moeten worden ingevoerd in de GR.)



Figuur 1.3

Bekijk de frequentieverdeling van de transactietijd T die je bij **Verkennen V1** aantreft.

- De kans dat een klant hoogstens 4 minuten transactietijd kost is:
 $P(T \leq 4) = 0,16 + 0,19 + 0,19 + 0,15 = 0,69$.
Dit is de oppervlakte van de eerste vier staafjes van het staafdiagram.
Het is ook de oppervlakte onder het lijndiagram vanaf $t = 0$ tot $t = 4$.
- De kans dat een klant hoogstens 4,75 minuten transactietijd kost kun je benaderen door de oppervlakte te schatten onder de kromme lijn die de middens van de bovenkanten van de staafjes verbindt vanaf $t = 0$ tot $t = 4,75$.
Bij deze kromme hoort een kansdichtheidsfunctie $f(t)$.

Opgave 1

Bekijk de relatieve frequentieverdeling van de transactietijd in **Uitleg 1**.

- a Teken zelf op papier het bijbehorende kanshistogram. Waarom is T nu een discrete toevalsvariabele?
- b Bepaal de kans dat je hoogstens 3 minuten moet wachten, dus $P(T \leq 3)$.

- c Teken door de middens van de staven van je histogram een vloeiende kromme die goed past bij het histogram. Waarom kun je T eigenlijk opvatten als een continue stochast?
- d Schat in geval je T opvat als een continue stochast $P(T \leq 3)$.
- e Waarom is de kans dat je hoogstens 3 minuten moet wachten eigenlijk $P(T \leq 3,5)$?

Opgave 2

Gebruik de vloeiende grafiek die je in de voorgaande opgave hebt gemaakt.

- a Arceer het gebied dat de kans voorstelt dat de transactietijd gelijk is aan 3 minuten en leg uit waarom dit gebied wordt begrensd door de lijnen $t = 2,5$ en $t = 3,5$. Geef een schatting van deze kans.
- b Bepaal op dezelfde manier de kans op dat de transactietijd minstens 3 minuten is.
- c Welk percentage hoort bij het hele gebied onder deze grafiek?

Uitleg 2

De transactietijd (de afhandelingsijd per klant) is een continue stochast T die alle positieve reële waarden kan aannemen. Door tellingen over steeds kleinere tijdsintervallen kun je een kansdichtheidsfunctie benaderen. De bijbehorende kansen worden dan weergegeven door een deel van de oppervlakte onder de kromme die bij deze functie hoort. Dergelijke kansen bereken je daarom door integreren.

Bijvoorbeeld $P(T \leq 4,75) = \int_0^{4,75} f(t) dt$.

Om deze integraal te kunnen berekenen moet je wel een functievoorschrift voor $f(t)$ hebben. Anders moet je de oppervlakte schatten m.b.v. de tekening.

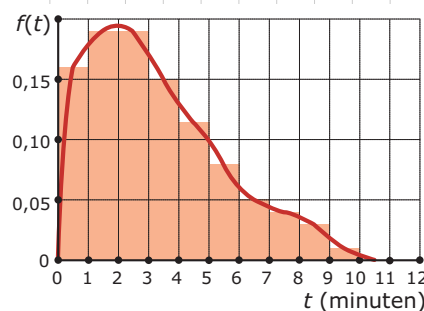
Omdat de totale kans 1 moet zijn, is $\int_0^{\infty} f(t) dt$.

Je kunt bij de transactietijd geen kansverdeling zoals bij discrete kansmodellen opstellen, want een kans als $P(T = 4,75)$ heeft altijd de waarde 0. Wil je de kans op een transactietijd van 4,75 minuten berekenen, dan moet je rekening houden met alle getallen die door afronding op 4,75 uitkomen.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** hoe je bij een continue stochast kansen berekent door middel van integreren.

- a Wat stelt in dit verband de kansdichtheidsfunctie voor? En waarom is het belangrijk om die te weten?
- b Schrijf de kans die wordt bedoeld bij a van de voorgaande opgave als integraal.
- c Waarom is $P(T = 4,75) = 0$?
- d Hoe bereken je toch de kans op een wachttijd van afgerond 4,75 minuten?



Figuur 1.4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

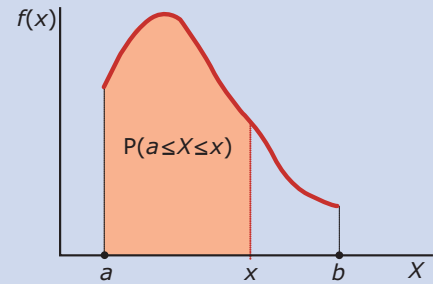
Een toevalsvariabele X die alle reële waarden uit een bepaald interval $[a, b]$ kan aannemen noem je een **continue stochast**. Kun je daarbij een **kansdichtheidsfunctie** bepalen, dan worden de bijbehorende kansen weergegeven door een deel van de oppervlakte onder de kromme die bij deze functie hoort. Dergelijke kansen bereken je daarom door integreren.

Bijvoorbeeld $P(a \leq X \leq x) = \int_a^x f(x) dx$.

Daarvoor moet je dan wel een functievoorschrift voor $f(t)$ hebben. Anders moet je de oppervlakte schatten m.b.v. de tekening.

Omdat de totale kans 1 moet zijn, is $\int_a^b f(x) dx = 1$.

Hieraan moet elke kansdichtheidsfunctie f voldoen. Een kansverdeling kun je bij een continue stochast niet maken.



Figuur 1.5

Voorbeeld 1

In een callcenter is de transactietijd T de tijd die nodig is om een klant te woord te staan. T is een continue stochast met kansdichtheidsfunctie $f(t) = 0,25t \cdot e^{-0,5t}$.

Ga na dat deze functie inderdaad als kansdichtheid kan dienen en past bij de kromme in deze figuur.

Bereken $P(T \leq 4,75)$ in vier decimalen nauwkeurig.

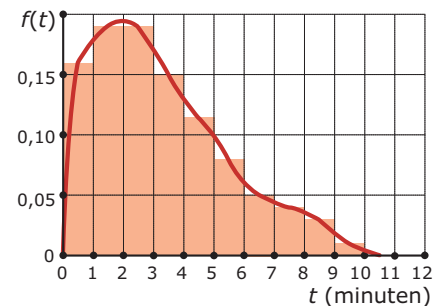
Antwoord

T is een continue stochast op $[0, \infty)$.

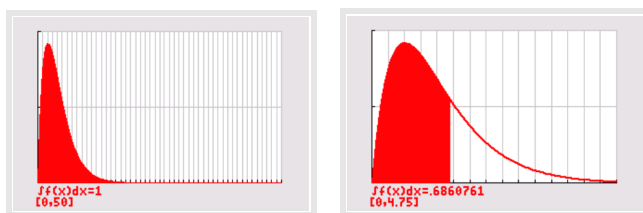
Voor f moet gelden: $\int_0^\infty f(t) dt = 1$.

Met de GR ga je na dat dit (bij benadering) klopt.

Bekijk je vervolgens de tabel van f dan blijken de waarden bij 0, 1, 2, ..., 10 redelijk bij de figuur te passen.



Figuur 1.6



Figuur 1.7

Verder is: $P(T \leq 4,75) = \int_0^{4,75} f(t) dt \approx 0,6861$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt opnieuw het berekenen van de kans op een bepaalde transactietijd bekeken.

- Ga na dat de gegeven kansdichtheidsfunctie past bij de gemeten transactietijden.
- Laat zien dat voor deze kansdichtheidsfunctie geldt $\int_0^{50} f(t) dt \approx 1$.
- Ga de schatting van $P(T \leq 4,75)$ zelf na.

- d Hoe groot is de kans op meer dan 10 minuten transactietijd? Schrijf deze kans als integraal en benader dan die integraal met de grafische rekenmachine.
- e Bereken de kans op een transactietijd van tussen de 2 en de 3 minuten.
- f Waarom is de kans op een transactietijd van precies 4 minuten gelijk aan 0?
- g Waarom is $P(T \leq 4,75) = P(T < 4,75)$?

Voorbeeld 2

Een bekende continue toevalsvariabele is de stochast X met kansdichtheidsfunctie

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0,5x^2}.$$

Laat met de GR zien, dat deze functie inderdaad een kansdichtheid kan zijn.

Bereken $P(-1 \leq X \leq 1)$.

Antwoord

Voor f moet gelden $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Door deze integraal met de GR te benaderen kun je nagaan dat dit (waarschijnlijk) klopt.

$$P(-1 \leq X \leq 1) = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx 0,6827.$$

Opgave 5

Een veel voorkomende continue stochast is de normale stochast. In **Voorbeeld 2** zie je daarvan de standaard kansdichtheidsfunctie. Bekijk eerst even de grafiek van deze standaard normale kansdichtheidsfunctie $f(x)$.

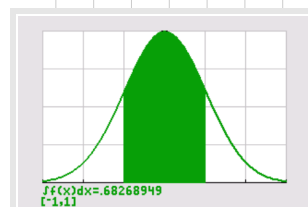
- a Toon aan dat de grafiek van f symmetrisch is t.o.v. de y -as.
- b Bereken de coördinaten van de top van f .
- c Bereken de coördinaten van de buigpunten van f .
- d Ga ook zelf na dat f een geschikte kansdichtheidsfunctie is.
- e Bereken $P(-2 < X < 2)$.
- f Bereken $P(x \geq 1,6)$.

Opgave 6

Als de lengte van een groep personen gemiddeld 180 cm is met een standaardafwijking van 5 cm, dan past daar deze kansdichtheidsfunctie bij

$$l(x) = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-180}{5} \right)^2}.$$

- a Ga na dat deze kansdichtheidsfunctie eenzelfde grafiek heeft als die van de vorige opgave.
- b Welke verschuiving en welke vermenigvuldigingen moet je op de grafiek van f toepassen om die van l te krijgen?
- c Ga na, dat l een geschikte kansdichtheidsfunctie is.
- d Bepaal de coördinaten van de top en de buigpunten van l .



Figuur 1.8

- e Bereken $P(180 - 10 < X < 180 + 10)$. Vergelijk je antwoord met dat van e van de vorige opgave. Wat valt je op?
- f Bereken $P(178 < X < 186)$.
- g Hoe groot is de kans dat in deze groep iemand van 2 meter of langer voorkomt?

Voorbeeld 3

Stochast X kan alle reële waarden aannemen uit het interval $[0,4]$. De bijpassende kansdichtheidsfunctie f heeft de vorm $f(x) = p(x - 2)^2$. Welke waarde heeft p ?

Antwoord

Voor f moet gelden $\int_0^4 f(x) dx = 1$.

De integraal is te bepalen m.b.v. primitiveren.

Dus moet gelden: $\left[\frac{1}{3}p(x - 2)^3\right]_0^4 = 1$.

Ga na, dat dit betekent dat $p = \frac{3}{16}$.

Opgave 7

Gegeven is de continue toevalsvariabele X door de kansdichtheidsfunctie $f(x) = \frac{x}{a}$ waarbij $0 \leq x \leq 10$.

Functie f is alleen een kansdichtheidsfunctie als de oppervlakte onder de grafiek gelijk is aan 1 en als alle functiewaarden groter of gelijk aan 0 zijn. Bekijk eventueel [Voorbeeld 3](#).

- a Bepaal de waarde van a waarvoor dit zo is.
- b Bereken $P(0 < X < 3)$.
- c Hoeveel procent hoort er bij het gebied onder de grafiek tussen 2 en 8?
- d Bereken $P(X > 5)$.
- e Bereken $P(X = 3)$.

Verwerken

Opgave 8

Voor de afhandelingstijd T van telefoontjes in een call-center is een model opgesteld.

Bij het percentage P van de gesprekken met een tijdsduur kleiner of gelijk aan $T = t$ minuten geldt de kansdichtheidsfunctie $f(t) = 0,042t \cdot e^{-0,20t}$ met $0 \leq t \leq 30$.

- a Laat zien dat er inderdaad sprake is van een kansdichtheidsfunctie.
- b Schrijf de kans op een transactietijd van hoogstens 10 minuten als een integraal. Benader vervolgens deze kans met behulp van die integraal.
- c Bereken op dezelfde manier de kans op een transactietijd van minstens 10 minuten.
- d Hoeveel procent van de transacties duurt tussen de 5 en de 10 minuten?
- e Hoeveel procent van de transacties duurt precies 5 minuten?

Opgave 9

Het geboortegewicht $G = x$ kilogram van zuigelingen ligt ongeveer rond de 3,6 kg. Hieronder zie je de verdeling van de gewichten van 500 zuigelingen.

gewicht (kg)	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2
aantal	3	8	22	41	73	85	93	83	53	28	9	2

Tabel 1.3

- Geef de resultaten weer in een histogram.
- Bereken het gemiddelde $\mu(G)$ en de standaardafwijking $\sigma(G)$ van deze steekproef.

Bij deze steekproef past een kansdichtheidsfunctie van de vorm

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}.$$

- Teken de grafiek van f op de grafische rekenmachine in het kans-histogram.
- Schat met behulp van het histogram de kans dat een baby bij de geboorte minder dan 3,45 kg weegt.
- Bepaal met behulp van een integraal de kans dat een baby bij de geboorte minder dan 3,45 kg weegt.

Opgave 10

Bij de bloeddruk X van volwassenen tussen de 20 en de 40 jaar hoort bij benadering een kansverdeling die wordt bepaald door de kansdichtheidsfunctie $f(x) = 0,044 \cdot e^{-0,006(x-130)^2}$.

Hierin is x in mm kwikdruk.

Als de bloeddruk van een volwassene in die leeftijdscategorie hoger is dan 150 mm kwikdruk wordt er bij een medisch testrapport 'hoge bloeddruk' aangegeven.

- Toon aan dat f bij goede benadering een kansdichtheidsfunctie is.
- Welke integraal stelt de kans voor dat iemand een bloeddruk van boven de 130 mm kwikdruk heeft? Hoe groot is die kans?
- Hoeveel procent van de volwassenen tussen 20 en 40 jaar hebben in dit kansmodel last van 'hoge bloeddruk'?

Opgave 11

De kansverdelingsfunctie van een stochast X ziet er als volgt uit: $P(X \leq x) = 1 - e^{-x}$ voor $x \geq 0$ en $P(X \leq x) = 0$ voor $x < 0$.

- Teken de grafiek van deze functie en toon aan dat hij voldoet aan de eisen waaraan een kansverdeling moet voldoen.
- Bepaal het voorschrift van de bijbehorende kansdichtheidsfunctie $f(x)$.
- Bereken $P(X < 1)$.
- Bereken $P(0 < X < 3)$.
- Bereken $P(X > 3)$.

Opgave 12

Bij een continue stochast is de kans de oppervlakte op een interval onder de vloeiende kromme die de kansverdeling weergeeft. De functie die bij deze kromme hoort, wordt de kansdichtheidsfunctie genoemd.

Voor de continue stochast X geldt de kansdichtheidsfunctie $f(x) = -0,08x + 0,4$ met $0 \leq x \leq 5$.

- a Bereken $P(2 \leq X \leq 3,5)$.

Voor de continue stochast Z geldt de kansdichtheidsfunctie $g(z) = a \cdot e^{-z}$ met $z \geq 0$.

- b Bereken a .

Toepassen

Opgave 13: Intelligentiequotiënt

Een maat voor iemands intelligentie is het IQ (intelligentiequotiënt). Dat is de score op een intelligentietest vergeleken met die van leeftijdsgenoten.

Neem aan dat het IQ een kansverdeling heeft met kansdichtheidsfunctie $f(x) = 0,026 e^{-0,002(x-100)^2}$.

- a Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ tussen 85 en 115?
 b Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van meer dan 130?
 c Met welk IQ behoort je tot de mensen die de 16% laagste scores hebben?

Testen

Opgave 14

Gegeven is de continue stochast X met kansdichtheidsfunctie $f(x) = a(4 - x)$ met $0 \leq x \leq 4$.

- a Bereken a .
 b Bereken de kans dat X tussen 1 en 3 ligt.

Opgave 15

Een bepaald type gloeilampen heeft een gemiddelde levensduur van 680 uur. Voor de levensduur $L = x$ uur van dit type gloeilampen is een continu kansmodel opgesteld met een kansdichtheidsfunctie $f(x) = 0,0088e^{-0,00025(x-680)^2}$.

- a Hoeveel procent van deze lampen heeft een levensduur tussen 635 en 725 uur?
 b Hoeveel procent van deze lampen heeft een levensduur van meer dan 770 uur?

1.2 Normaalkromme

Inleiding

Bij heel veel continue toevalsvariabelen blijkt een mooie symmetrische klokvormige kansdichtheidsfunctie te horen. Dat geldt voor het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, e.d.

De beroemde wiskundige Gauss (1777–1855) vond er een formule voor. Sinds die tijd spreek je van een ‘Gausskromme’ of ook wel ‘normaalkromme’. Bijvoorbeeld is het vulgewicht van pakken suiker ongeveer normaal verdeeld.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- kansen berekenen bij normaal verdeelde stochasten.

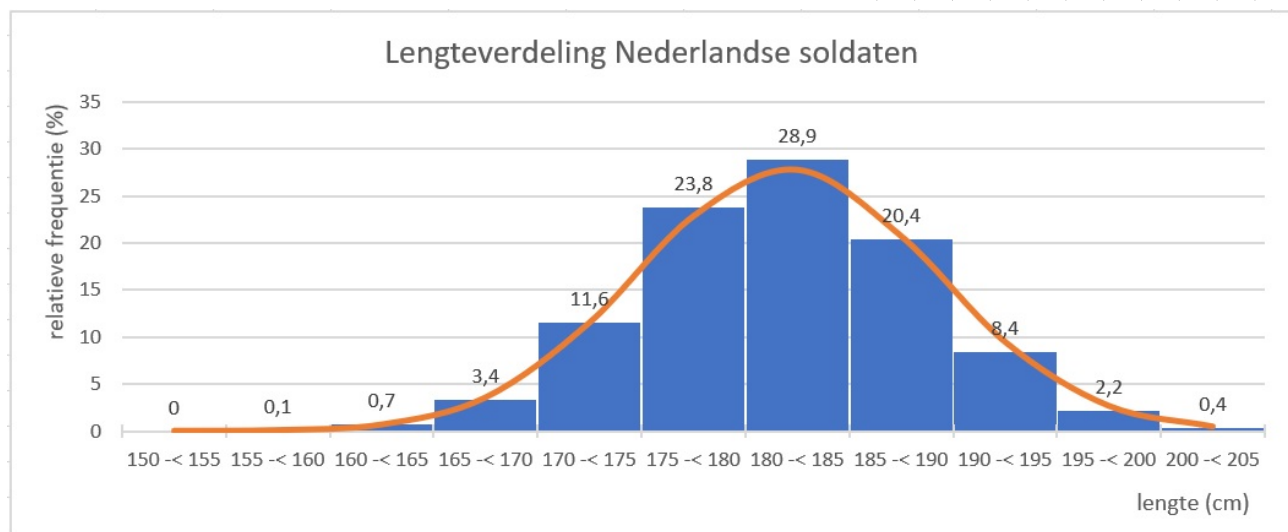
Voorkennis

- werken met continue stochasten;
- de normaalkromme als voorbeeld van kansdichtheidsfunctie hanteren;
- de vuistregels voor de normaalkromme gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de lengteverdeling van een groep soldaten op een bepaalde kazerne.

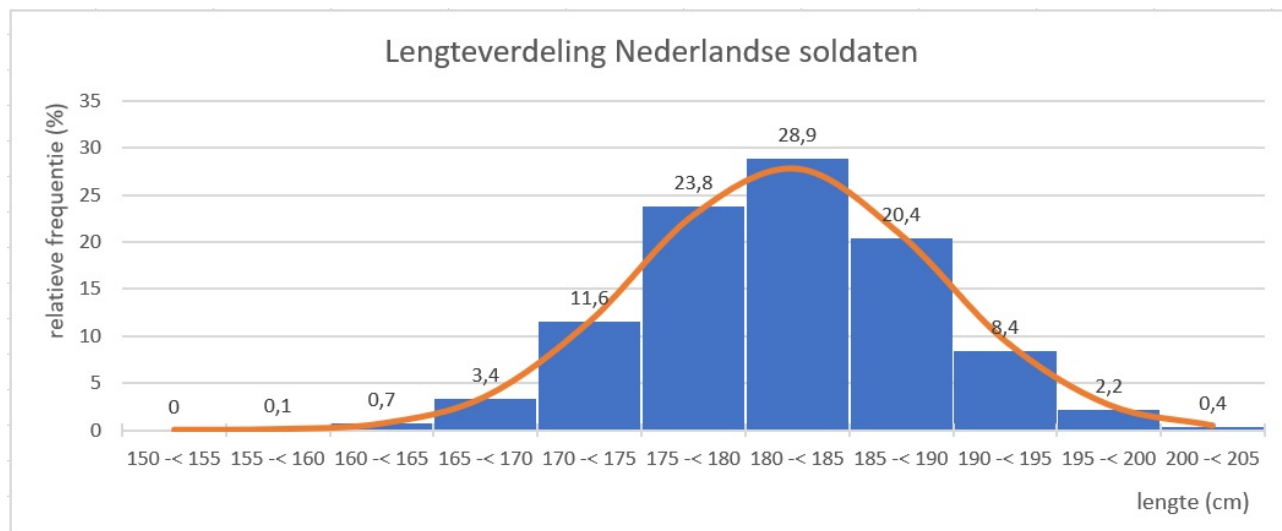


Figuur 2.2

Bij de lengte L hoort een normaalkromme met gemiddelde $\mu(L) = 182$ en standaardafwijking $\sigma(L) = 7$ cm.

- a Laat zien dat hierbij de kansdichtheidsfunctie $f(x) = \frac{1}{7\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-182}{7}\right)^2}$ past.
- b Laat zien dat $P(182 - 7 \leq X \leq 182 + 7) \approx 0,68$.
- c Laat zien dat $P(182 - 14 \leq X \leq 182 + 14) \approx 0,95$.

Uitleg



Figuur 2.3

Bekijk de lengteverdeling van een groep soldaten op een bepaalde kazerne hierboven nog eens. De lengte L is een continue stochast. De kromme is een benadering van de grafiek van de bijpassende kansdichtheidsfunctie. De benadering wordt beter als je meer klassen maakt. De grafiek heeft een mooie klokvorm die wordt bepaald door gemiddelde $\mu(L) = 182$ cm en standaardafwijking $\sigma(L) = 7$ cm.

Hierbij past de kansdichtheidsfunctie $f(x) = \frac{1}{7\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-182}{7}\right)^2}$.

Een kansdichtheidsfunctie van deze vorm heet een normale kansdichtheidsfunctie, de grafiek ervan is een normaalkromme. Je zegt dat L normaal verdeeld is. De bijbehorende kansen kun je berekenen door integreren, maar ook meteen met de grafische rekenmachine. De bijbehorende vuistregels ken je al.

Bekijk het [Practicum](#).

Opgave 1

Bestudeer de [Uitleg](#).

Bekijk het histogram van de lengteverdeling van de soldaten.

- a Hoeveel bedraagt $P(165 \leq L < 180)$ volgens het histogram? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.
- b Bepaal $P(165 \leq L < 180)$ met behulp van een integraal.

Deze kans kun je ook bepalen door uit te gaan van de normaalkromme als model voor de lengteverdeling van de soldaten. Je grafische rekenmachine kent de normale verdeling. Je schrijft de gevraagde kans vaak als $P(165 \leq L < 180 | \mu(L) = 182 \wedge \sigma(L) = 7)$.

De vier getallen in deze uitdrukking moet je in de grafische rekenmachine in de juiste volgorde in de normaalverdeling invoeren. Bekijk het **Practicum**.

- c Bepaal $P(165 \leq L < 180 | \mu(L) = 182 \wedge \sigma(L) = 7)$.
- d Bereken de kans dat een soldaat tussen 166 en 177 cm lang is.
- e Bereken hoeveel procent van de soldaten kleiner dan 166 cm is.
- f Bereken hoeveel procent van de soldaten langer dan 192 cm is.

Opgave 2

Kijk weer naar de lengteverdeling van de soldaten en de bijpassende kansdichtheidsfunctie.

- a Laat met behulp van differentiëren zien, dat de top van de normaalkromme bij $\mu = 182$ zit en dat de x -waarden van de buigpunten $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ zijn.
- b Laat zien dat ongeveer 68% van de soldaten een lengte heeft tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- c Hoeveel procent van de soldaten heeft volgens de normaalkromme een lengte die minder dan twee standaarddeviaties van het gemiddelde afwijkt?
- d Hoeveel procent van de soldaten heeft volgens de normaalkromme een lengte die minder dan drie standaarddeviaties van het gemiddelde afwijkt?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

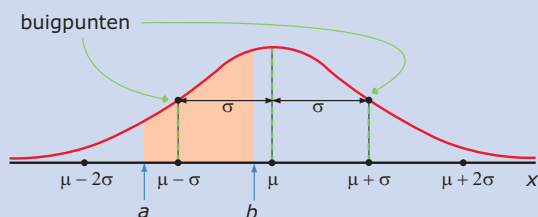
Bekijk de applet: Normale verdeling

Bij continue stochasten zoals lengte, gewicht, inhoud, etc., hebben de relatieve frequentiehistogrammen vaak de kenmerkende klokvorm. Dergelijke klokvormige histogrammen kun je benaderen door de kansdichtheidsfunctie

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Hierin is μ het gemiddelde en σ de standaardafwijking van de frequentieverdeling.

De grafiek van deze functie noem je de **normaalkromme** of Gausskromme. De twee buigpunten van deze kromme zitten bij $x = \mu + \sigma$ en $x = \mu - \sigma$.



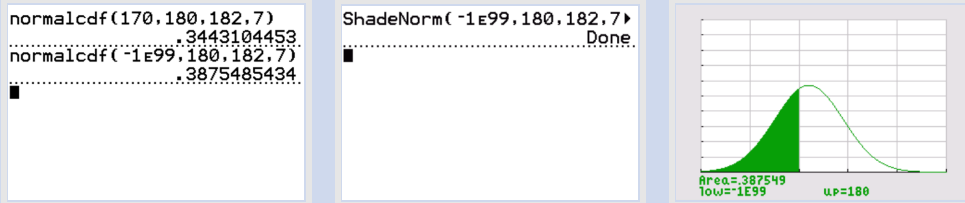
Figuur 2.4

De bijbehorende **normale kansen** zijn te vinden door de oppervlakte te berekenen van het juiste gebied onder de normaalkromme.

De bijbehorende stochast X heet een **normale stochast**. Je spreekt ook wel van een **normale kansverdeling** die bestaat uit kansen van de vorm

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

De grafische rekenmachine kan dergelijke kansen rechtstreeks berekenen en het bijbehorende gebied voor je schaduwen.



Figuur 2.5

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Normale verdeling

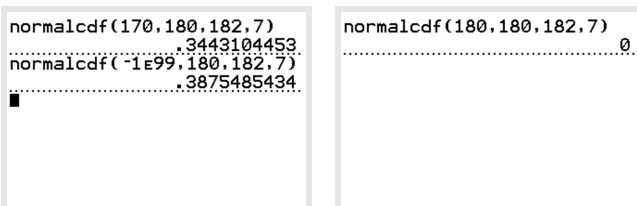
De lengte L van een groep soldaten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = \bar{L} = 182$ cm en een standaarddeviatie van $\sigma = 7$ cm.

Bereken $P(167 < L < 180)$, $P(L < 180)$, $P(L = 180)$ en $P(L > 180)$.

Antwoord

Al deze kansen zijn met de GR gemakkelijk te vinden, zie ook het **Practicum**.

- $P(170 < L < 180) \approx 0,3443$
- $P(L < 180) \approx 0,3875$
- $P(L = 180) = 0$
- $P(L > 180) = 1 - P(L < 180) \approx 0,6125$



Figuur 2.6

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je nog eens hoe je bij de lengteverdeling van de soldaten kansen berekend uitgaande van een normale verdeling als model.

- Wat betekent $P(162 < L < 178)$ in dit verband?
- Hoeveel procent van de soldaten heeft een lengte tussen 171 en 178 cm?
- Hoeveel procent van de soldaten heeft een lengte van precies 171 cm?

Bij deze laatste vraag ben je hopelijk een probleem tegengekomen dat bij het werken met normale verdelingen een rol speelt. De gegevens van de soldaten zijn op hele lengtes afgerond. Als je dus vraagt naar het percentage soldaten met een lengte van precies 171 cm, dan moet je goed afspreken wat je bedoelt: echt precies 171 cm, of afgerond 171 cm.

- d** Wat is het antwoord op c wanneer je wilt weten hoeveel procent van de soldaten een lengte heeft van afgerond 171 cm?
- e** Wat betekent dit afrondingsprobleem voor het antwoord op b?
Vanaf nu moet je de afspraak hanteren dat je bij een normale verdelingen geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk in de vraagstelling naar voren komt dat dit moet. Dit betekent dat $P(162 < L < 178) = P(162 \leq L < 178) = P(162 < L \leq 178) = P(162 \leq L \leq 178)$.
- f** Hoeveel procent van de soldaten van deze kazerne heeft een lengte van minder dan 158 cm?
- g** Hoeveel procent van de soldaten van deze kazerne heeft een lengte vanaf $\mu - 1,5 \cdot \sigma$ t/m $\mu + 1,5 \cdot \sigma$?

Voorbeeld 2

Het gewicht G van een bepaalde soort appels is normaal verdeeld met een gemiddeld van 150 gram en een standaarddeviatie van 17 gram. Hoeveel procent van deze appels weegt meer dan 160 gram?

Antwoord

Deze vraag kun je vertalen naar:

“Bereken $P(G > 160 | \mu = 150 \text{ en } \sigma = 17)$.”

Met je GR vind je: $P(G > 160 | \mu = 150 \text{ en } \sigma = 17) \approx 0,2781$.

En dus is ongeveer 28% van deze appels zwaarder dan 160 gram.

Opgave 4

Het gewicht G van een bepaalde soort appels is normaal verdeeld met een gemiddelde van 150 gram en een standaarddeviatie van 17 gram. Bekijk eventueel [Voorbeeld 2](#).

- a** Hoe groot is de kans dat een appel van deze soort minder dan 140 gram weegt?
- b** Hoeveel procent van deze appels heeft een gewicht dat minder dan 10 afwijkt van het gemiddelde?
- c** Een groenteboer heeft nog 340 van die appels. Hoeveel daarvan zijn lichter dan 120 gram?

Opgave 5

Bioloog Peter Adriaanse heeft van 1000 koolwitjes de spanwijdte van de vleugels gemeten. Hij vond dat deze spanwijdte ongeveer normaal is verdeeld met een gemiddelde van 5,2 cm en een standaardafwijking van 0,8 cm.

- Hoeveel procent van de gemeten koolwitjes had een spanwijdte van meer dan 6 cm?
- Hoeveel van de gemeten koolwitjes hadden een spanwijdte tussen de 5 en de 6 cm?
- Hoe groot is de kans op een koolwitje met een spanwijdte van minstens 6,5 cm?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: Normale verdeling

De lengte L van een groep soldaten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu(L) = 182$ cm en een standaarddeviatie van $\sigma(L) = 7$ cm.

Welke lengtes kunnen de 20% langste mensen in deze groep aan nemen?

Antwoord

Deze vraag kun je vertalen in:

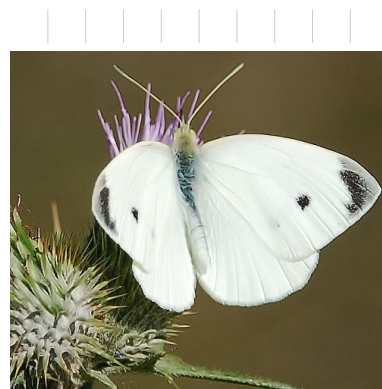
Bereken grenswaarde g als $P(L > g) = 0,20$.

De grafische rekenmachine heeft hiervoor een speciale functie ingebouwd gekregen. Die stelt je in staat om vanuit een gegeven kans de grenswaarde terug te vinden. Alleen is die functie wel ingesteld op 'kleiner-of-gelijk'-kansen.

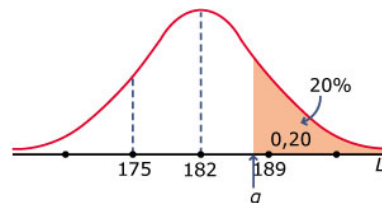
Omdat $P(L > g) = 0,20$ betekent dat $P(L < g) = 1 - P(L > g) = 0,80$ kun je die functie hier toch gebruiken.

Je vindt: $g = 187,9$.

De 20% langste mensen zijn 187,9 cm of langer.



Figuur 2.7



Figuur 2.8

```
invNorm(0.80,182,7)
187.8913486
```

Figuur 2.9

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je met de rekenmachine bij gegeven kansen de grenswaarde kunt terugvinden.

- Voer zelf de berekening in dit voorbeeld uit.
- Hoe lang zijn de 20% kleinste soldaten op zijn hoogst?
- 10% van de soldaten zit boven het gemiddelde maar is toch niet langer dan a cm. Bereken a .

Opgave 7

Ga nog eens uit van de normaal verdeelde lengtes van de soldaten in een bepaalde kazerne. De gemiddelde lengte is 182 cm en de standaardafwijking is 7. Men besluit voor deze 1200 soldaten T-shirts aan te schaffen in drie maten: S (small), M (medium) en L (large). Deze maten worden zo gemaakt dat elke maat precies voor $\frac{1}{3}$ deel van de soldaten geschikt is.

- Voor welke lengtes is maat S geschikt?
- Voor welke lengtes is maat M geschikt?

Verwerken

Opgave 8

In een fabriek worden kilopakken suiker machinaal gevuld. Volgens de Europese norm mag niet meer dan 2,5% van de pakken suiker minder dan 1000 gram bevatten, maar deze fabriek lijkt hier niet aan te voldoen.

Bekijk de vulgewichten van een steekproef van dertig pakken suiker uit deze fabriek.

998,3	994,9	1003,5	999,6	1001,0	1001,1
997,9	1003,0	999,5	999,4	991,7	998,0
1001,8	997,8	999,3	995,1	1000,0	998,8
996,3	999,9	999,5	998,6	999,0	1001,5
1000,8	1001,4	998,1	997,5	995,3	998,2

Tabel 2.1

- Hoeveel procent van deze pakken suiker is lichter dan 1000 gram?
- Maak een histogram van de vulgewichten uit de tabel. Gebruik klassen met een klassenbreedte van 1 gram. Laat zien dat de fabrikant met een beetje goede wil kan beargumenteren dat de vulgewichten van deze machine bij benadering een symmetrische klokvormige verdeling hebben.
- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van deze vulgewichten tot op één decimaal nauwkeurig.

De steekproef wordt als representatief voor alle pakken suiker uit deze fabriek beschouwd. Op grond van het berekende gemiddelde en de berekende standaardafwijking wordt verondersteld dat het gewicht van de pakken suiker uit deze fabriek normaal is verdeeld.

- Hoeveel procent van al zijn pakken is dan te licht?

Opgave 9

Aan een examen wiskunde A nemen 20000 kandidaten deel. De resultaten zijn ongeveer normaal verdeeld. Het gemiddelde cijfer is 6,4 en de standaardafwijking 1,1

- Hoeveel kandidaten hebben een cijfer onder de 5,5, dus een onvoldoende?
- Hoeveel kandidaten hebben minstens een 7,0?
- Hoeveel kandidaten hebben hoogstens een 4,0?

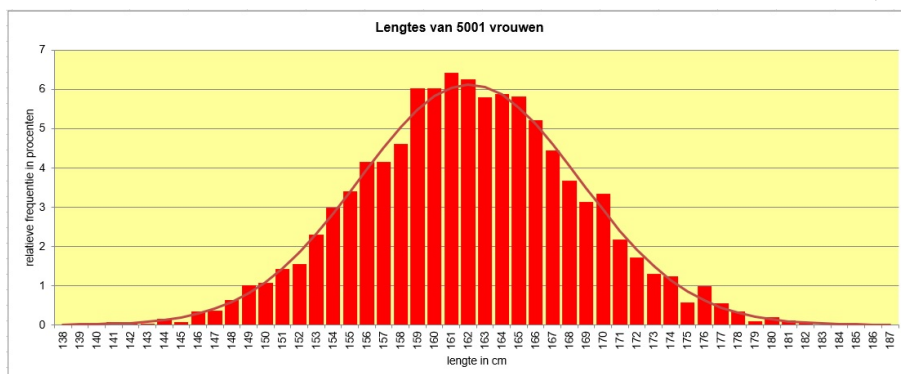
Opgave 10

Het vulvolume V van een pak melk is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,02 liter en een standaardafwijking van 0,015 liter. De consument verwacht 1 liter melk te kopen.

- Hoeveel procent van de melkpakken bevat minder dan 1 liter melk?
- Hoeveel procent van de melkpakken bevat meer dan 1,03 liter melk?
- Je koopt zo'n melkpak. Hoe groot is de kans dat er 2 centiliter te weinig melk in je pak zit?
- Je kunt niet bepalen hoeveel procent van de melkpakken een inhoud van precies 1 liter heeft. Je kunt wel bepalen hoeveel procent van de melkpakken afgerond op twee decimalen 1 liter bevat. Dan zie je dat het gaat om het gebied vanaf de grens 0,995 tot de grens 1,005. En daar hoort wel degelijk een bepaald percentage bij. Bereken dat percentage.
- 5% van de melkpakken heeft een vulvolume van minder dan g . Bereken g .
- Hoeveel liter melk bevat een melkpak dat hoort bij de volste 10%?

Opgave 11

Volgens het onderzoek van Freudenthal en Sittig uit 1947 waren de lengtes van vrouwen die bij de Bijenkorf winkelden normaal verdeeld met een gemiddelde van 162 cm en een standaarddeviatie van 6,5 cm. Ga bij het beantwoorden van de onderstaande vragen steeds uit van die normale verdeling als model voor de lichaamslengte van deze 5001 vrouwen.



Figuur 2.10

- Hoeveel procent van deze vrouwen was langer dan 170 cm?
- Hoeveel procent van deze vrouwen had een lengte tussen 160 en 170 cm?
- Hoe groot is de kans dat een vrouw die je toen bij de Bijenkorf tegen kon komen 160 cm lang was? (Neem aan dat alle lengtes op gehele cm zijn afgerond.)
- Hoe lang waren de 10% kleinste vrouwen?
- En hoe lang waren de 10% langste vrouwen?

Opgave 12

Open het bestand **Enkele lichaamsafmetingen van 5001 vrouwen uit 1947**.

Hierin zie je een tabel met kniehoogtes in cm van de 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

- Bereken met de computer de gemiddelde kniehoogte en de standaarddeviatie.
- Teken een histogram en benader dit met een normaalkromme waarin je beide waarden aangeeft.
Neem nu verder aan dat de kniehoogte K van vrouwen normaal is verdeeld met de eerder berekende waarden voor het gemiddelde μ en de standaarddeviatie σ .
- 90% van de kniehoogtes zit tussen $\mu - a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a ?
- Welke minimale lengte hebben de 20% grootste kniehoogtes?

Toepassen**Opgave 13: Leeftijdsgroepen vergelijken**

Van twee leeftijdsgroepen zijn de scores voor een test verzameld. De scores van beide groepen zijn bij benadering normaal verdeeld. Bekijk de gemiddelden en de standaardafwijkingen in het overzicht.

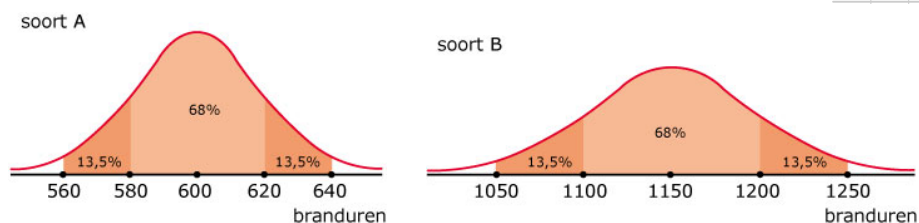
	12-jarigen	16-jarigen
aantal tests	500	800
μ	48	56
σ	8	12

Tabel 2.2

- Hoe groot ongeveer is de kans dat een 12-jarige beter scoorde dan gemiddeld een 16-jarige?
- Hoe groot is de kans dat in een groep van 25 willekeurige 12-jarigen er hoogstens één is die beter scoorde dan gemiddeld een 16-jarige?
Rond af op gehele procenten (vanwege de schatting).
- Schets de twee bijbehorende normaalkrommen. Zijn ze even hoog? Zo nee, welke reikt hoger?

Opgave 14: Levensduur van lampen

Van twee soorten lampen is de levensduur van 500 exemplaren gemeten. Het aantal branduren blijkt vrijwel normaal verdeeld te zijn. Hier zie je de bijpassende normaalkrommen. Enkele percentages zijn gegeven.



Figuur 2.11

Van soort A is het gemiddelde $\mu_A = 600$ branduren en de standaardafwijking $\sigma_A = 20$ uur.

- Hoeveel procent van de lampen van soort A brandt minder dan 600 uur?
 - Hoeveel procent van de lampen van soort A brandt minder dan 620 uur?
 - Hoeveel is het gemiddelde aantal branduren van de lampen van soort B? En hoeveel is de standaardafwijking van de lampen van soort B?
- Beargumenteer je antwoord.
- Waarom heeft de normale verdeling bij soort B een top die minder hoog is dan die van de normale verdeling van soort A?

Testen

Opgave 15

Een zakje Cup-a-Soup moet 17 g bevatten. Het gewicht van zakjes is normaalverdeeld. De vulmachine is zo ingesteld dat het vulgewicht 19 g bedraagt met een standaardafwijking van 1,5 g. Het vulgewicht komt overeen met het gemiddelde gewicht.

- Hoe groot is de kans dat een zakje minder dan 17 g weegt?
- Hoe groot is de kans dat een zakje Cup-a-Soup meer dan 17 g weegt?
- Hoeveel weegt 90% van deze zakjes op zijn hoogst?
- Hoeveel weegt 90% van deze zakjes op zijn minst?

Opgave 16

Bij een groep van 1000 mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

- Hoeveel mannen hebben een bloeddruk die meer dan drie keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?
- Hoeveel procent van de mannen heeft een bloeddruk van meer dan 150?
- Hoeveel bedraagt de bloeddruk van de 10% mannen met de hoogste bloeddruk?



Figuur 2.12

Practicum

Met de volgende practica kun je zien hoe je **normale kansen berekent met de grafische rekenmachine**. Doe alleen de onderdelen die betrekking hebben op de normale verdeling.

- [Kansverdelingen met de TI84](#)
- [Kansverdelingen met de TIInspire](#)
- [Kansverdelingen met de Casio fx-CG50](#)
- [Kansverdelingen met de HP-prime](#)
- [Kansverdelingen met de NumWorks](#)

Bekijk het practicum [Normale verdeling](#) als je met Excel-2013 t/m Excel-2021 werkt. Ook voor oudere versies van Excel zijn er nog practica.

1.3 Standaardiseren

Inleiding

In het voorgaande heb je met de normaalkromme leren werken. Een normale kansverdeling wordt gekarakteriseerd door gemiddelde μ en standaardafwijking σ . Maar er zijn situaties denkbaar waarin je één van beide niet weet. Bijvoorbeeld als je bij het vullen van bijvoorbeeld een pak suiker het vulgewicht nauwkeuriger wilt afstellen.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip standaardnormale stochast;
- verwachtingswaarde of standaarddeviatie berekenen bij een normale stochast.

Voorkennis

- werken met normale stochasten;
- kansen berekenen bij normale stochasten;
- grenswaarden terugzoeken bij normale kansen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: Standaardiseren

Het vulgewicht van kilopakken suiker is ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Maar nu bevat ongeveer 25% van de pakken minder dan 1000 gram.

- Je wilt dat niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat. Hoe doe je dat?
- Stel dat je drie kilopakken suiker koopt. Hoe groot is de kans dat je bij de gegeven instelling minder dan 3000 gram suiker hebt?

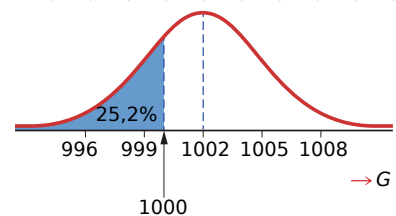
Uitleg 1

Bekijk de applet

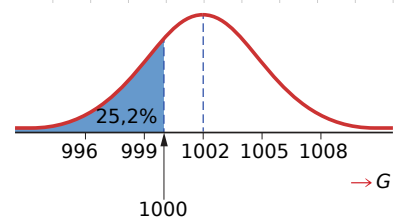
Het vulgewicht van kilopakken suiker is ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Maar nu bevat ongeveer 25% van de pakken minder dan 1000 gram. Je wilt dat niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat.

In de applet kun je dit bijvoorbeeld bewerkstelligen door het gemiddelde vulgewicht μ te verhogen. Maar daar zal de fabrikant niet blij van worden, dat is een dure oplossing.

Maar je kunt dit ook voor elkaar krijgen door de vulmachine nauwkeuriger te laten werken: je verkleint de standaardafwijking σ .



Figuur 3.1



Figuur 3.2

Met de applet kun je de aangepaste μ of σ wel vinden, maar hoe bereken je die?

Kennelijk gaat het daarbij om het verschuiven en smaller worden van de grafiek.

Opgave 1

Bestudeer **Uitleg 1**. Werk met de daarin genoemde applet om de volgende vragen te beantwoorden.

- Pas eerst alleen het gemiddelde aan. Bij welk gemiddelde is niet meer dan 5% van de pakken lichter dan 1000 gram?
- Waarom is dit voor de fabrikant een dure oplossing?
- Laat nu het gemiddelde staan op 1002 gram en pas de standaardafwijking aan. Bij welke standaardafwijking is niet meer dan 5% van de pakken te licht?
- Welke mogelijke voor- en nadelen heeft deze oplossing voor de fabrikant?

Opgave 2

Aan een examen hebben 200 kandidaten meegedaan. Het examen bestaat uit twee gedeelten: een schoolexamen (SE) en een centraal examen (CE). Uit onderzoek is gebleken dat de examencijfers normaal verdeeld zijn. Het gemiddelde cijfer voor het schoolexamen was een 6,5 en de standaardafwijking was 1,0. Het gemiddelde cijfer voor het centraal examen was een 5,5 en de standaardafwijking was 2,0. Een leerling heeft een 7,0 gehaald voor het schoolexamen en een 6,0 voor het centraal examen.

- Noem het cijfer voor het schoolexamen S en dat voor het centraal examen C . Schets de normaalkrommen van de verdeling van zowel S als C . Geef de cijfers van de leerling in die figuren aan.
- Kun je de prestaties van de leerling voor het SE en het CE nu goed met elkaar vergelijken? Licht je antwoord toe.
- Je kunt beter in beide gevallen kijken naar de afwijking van het gemiddelde, dus naar $S_2 = S - \mu(S)$ en $C_2 = C - \mu(C)$. Schets de beide normaalkrommen van S_2 en C_2 en geef de resultaten van de leerling erin aan. Wat is het gemiddelde van beide normale verdelingen?
- Gaat nu het vergelijken van de twee cijfers van de leerling beter?
- Je kunt beide verdelingen nog beter op elkaar afstemmen door te zorgen dat ze even 'breed' zijn. Dat doe je door de normaalkrommen van $S_3 = \frac{S - \mu(S)}{\sigma(S)}$ en $C_3 = \frac{C - \mu(C)}{\sigma(C)}$ te tekenen en daar de resultaten van de leerling in te zetten.
Maak deze figuren en leg uit voor welk onderdeel de leerling het best heeft gepresteerd.

Uitleg 2

Het vulgewicht van kilopakken suiker is ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ gram en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. De kans dat een pak minder dan 1000 gram is ongeveer 25%.

Als je drie pakken suiker koopt doe je in feite drie keer hetzelfde kansexperiment.

Omdat het telkens een keuze uit een zeer grote hoeveelheid kilopakken suiker betreft, mag je dit opvatten als onafhankelijke trekkingen.

En dus geldt de $\sqrt{n}$ -wet: het totale gewicht T is ook normaal verdeeld met een gemiddelde van $3 \cdot \mu = 3006$ gram en een standaardafwijking van $\sqrt{3} \cdot \sigma \approx 5,3$ gram.

De kans dat je nu minder dan 3000 gram hebt is kleiner dan 25% geworden:

$$P(T < 3000) \approx 0,1243.$$

Opgave 3

Bestudeer in **Uitleg 2** de trekking van een steekproef van drie pakken suiker.

Bereken zelf de kans dat je meer dan 3010 gram hebt in totaal.

```
normalcdf(-10^5,3000,3006,5.3)
.....1242816779
```

Figuur 3.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Standaardiseren

De vorm van de normaalkromme hangt af van het gemiddelde μ en de standaarddeviatie σ en heeft als bijbehorend functievoorschrift:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Neem je nu $\mu = 0$ en $\sigma = 1$, dan krijg je de **standaard normaalkromme**. Het bijbehorende voorschrift voor de kansdichtheidsfunctie is dan veel eenvoudiger:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}.$$

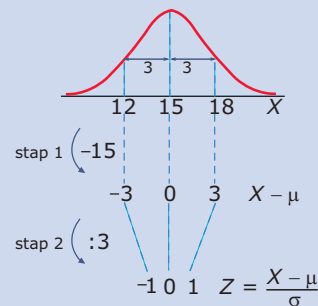
Elke normaalkromme kan door transformatie ontstaan uit de standaard normaalkromme: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Met de standaard normale variabele Z kun je kansen bepalen bij elke willekeurige normale variabele X . Er geldt: $P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

Je noemt dit het **standaardiseren** van de normale stochast X . Het is alleen handig als je μ of σ wilt uitrekenen.

Heb je de som S van n gelijke normale stochasten X , dan geldt de **wortel-n-wet**:

S is normaal verdeeld met $\mu(S) = n \cdot \mu(X)$ en $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$.



Figuur 3.4

Voorbeeld 1**Bekijk de applet: Standaardiseren**

Het vulgewicht van kilopakken suiker is ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Maar nu bevat ongeveer 25% van de pakken minder dan 1000 gram. Je wilt dat niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat.

Hoeveel moet je daartoe het gemiddelde vulgewicht μ verhogen?

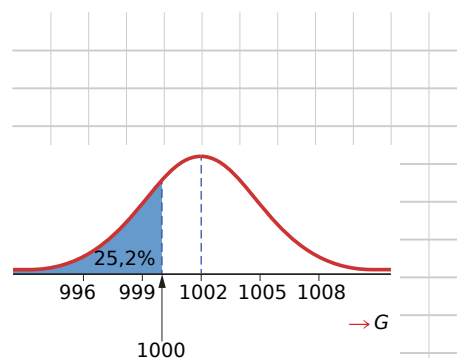
Antwoord

Je wilt oplossen: $P(G < 1000 | \mu = m \text{ en } \sigma = 3) = 0,05$.

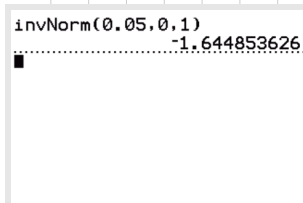
Na standaardiseren vind je $P\left(Z \leq \frac{1000-m}{3}\right) = 0,05$.

De GR geeft $z = \frac{1000-m}{3} \approx -1,64$.

Je vindt dan $m \approx 1004,9$ gram voor het nieuwe gemiddelde.



Figuur 3.5



Figuur 3.6

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de standaardnormale verdeling toepast bij het berekenen van een gemiddelde.

- Reken zelf het gemiddelde nog eens na.
- Stel je voor dat de eisen worden aangescherpt: niet meer dan 2,5% van de pakken suiker mag minder dan 1000 gram wegen. Welk gemiddeld vulgewicht moet je dan hanteren?
- Is het mogelijk om te eisen dat 0% van de pakken te licht is? Verklaar je antwoord.

Opgave 5

Van een bepaald type batterij is de levensduur normaal verdeeld met een gemiddelde van 80 uur en een standaardafwijking van 255 minuten.

- De fabrikant vermeldt op de verpakking dat deze batterijen 75 uur mee gaan. Hoeveel procent van de batterijen haalt deze levensduur niet?
- Door het verbeteren van het fabricageproces gaan de batterijen gemiddeld langer mee. De standaardafwijking van de levensduur blijft hetzelfde. De fabrikant garandeert nu dat slechts 1% van de batterijen geen 90 uur mee gaat. Hoeveel bedraagt nu de gemiddelde levensduur van dit soort batterijen?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Standaardiseren

Het vulgewicht van kilopakken suiker is ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Maar nu bevat ongeveer 25% van de pakken minder dan 1000 gram. Je wilt dat niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat.

Hoe moet je daartoe de standaardafwijking σ aanpassen?

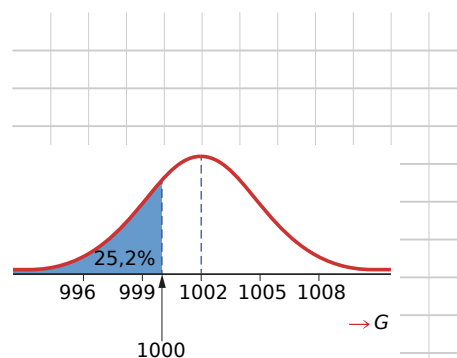
Antwoord

Je wilt oplossen: $P(G < 1000 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = s) = 0,05$.

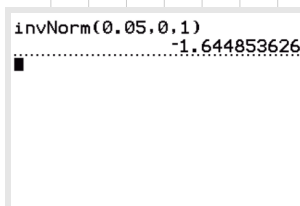
Na standaardiseren vind je $P\left(Z \leq \frac{1000-1002}{s}\right) = 0,05$.

De GR geeft $z = \frac{1000-1002}{s} \approx -1,64$.

Je vindt dan $s \approx 1,2$ gram voor de nieuwe standaardafwijking.



Figuur 3.7



Figuur 3.8

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je de standaardnormale verdeling toepast bij het berekenen van een standaardafwijking.

- Reken zelf de standaardafwijking nog eens na.
- Stel je voor dat de eisen worden aangescherpt: niet meer dan 2,5% van de pakken suiker mag minder dan 1000 gram wegen. Welke standaarddeviatie moet je dan hanteren?

Opgave 7

Aan een examen nemen 3000 kandidaten deel. De resultaten zijn normaal verdeeld. Het gemiddelde cijfer is 5,0. Slechts 10% van de kandidaten haalden een 7,0 of hoger.

Welke standaardafwijking heeft de verdeling van deze cijfers? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Het vulgewicht van kilopakken suiker is ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ gram en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. De kans dat een pak minder dan 1000 gram suiker bevat is dan meer dan 25%.

Je koopt 5 van die kilopakken suiker. Hoe groot is de kans dat je minder dan 5000 gram suiker hebt?

Antwoord

Je voert nu 5 keer hetzelfde kansexperiment uit, namelijk het kiezen van een pak suiker uit een heel groot aantal van die pakken. Het totale gewicht T is daarom ook normaal verdeeld met $\mu(T) = 5 \cdot \mu(X) = 5010$ en $\sigma(T) = \sqrt{5} \cdot \sigma(X) \approx 6,7$ gram.

De gevraagde kans is: $P(T < 5000 | \mu = 5010 \text{ en } \sigma = 6,7) \approx 0,0678$.

Opgave 8

Als je een steekproef van n pakken suiker trekt uit de (veel grotere) dagproductie van pakken suiker, moet je met de $\sqrt{n}$ -wet rekening houden. Zie **Voorbeeld 3**.

Voor de dagproductie geldt dat het gemiddelde gewicht van een pak suiker 1002 gram is met een standaardafwijking van 3 gram. Je trekt een steekproef van 10 pakken suiker uit die dagproductie.

- Welk gemiddelde gewicht zal de totale hoeveelheid suiker in die steekproef hebben? En welke standaarddeviatie hoort daar bij?
- Bereken de kans dat het totale gewicht in de steekproef meer is dan 10 kg.
- Welk gemiddelde gewicht zal één pak suiker in die steekproef hebben? En welke standaarddeviatie hoort daar bij?
- Bereken de kans dat het gemiddelde gewicht van één pak in de steekproef meer is dan 1 kg.

Opgave 9

Kerrie is te krijgen in zakjes van 150 g. De zakjes worden in de fabriek machinaal gevuld. Bekend is dat de gewichten van de zakjes normaal verdeeld zijn. De vulmachine is zo afgesteld dat het gemiddelde gewicht 155 g wordt met een standaardafwijking van 6 g.

- Ter controle worden 100 zakjes uit de dagproductie genomen en gewogen. Tussen welke gewichtsgrenzen zal 95% van de zakjes uit de steekproef liggen?
- Hoe groot is de steekproef als minder dan 5% van de zakjes uit die steekproef lichter is dan 154 gram?

Verwerken**Opgave 10**

Een fabrikant vindt dat 5% van al zijn kilopakken suiker lichter dan 1 kg mag zijn.

- Welk gemiddeld vulgewicht moet je nu instellen bij een gegeven standaarddeviatie van 4 gram (de nauwkeurigheid van de vulmachine)?
- De Europese Unie stelt een scherpere eis: slechts 2% van de pakken mag te licht zijn. Welk gemiddelde vulgewicht moet de fabrikant nu instellen?

De fabrikant wordt niet blij van het verhogen van het gemiddelde vulgewicht, want dat kost hem nogal wat extra geld. Hij moet dan immers gemiddeld meer suiker in een pak stoppen. Daarom besluit hij om niet het gemiddelde vulgewicht aan te passen, maar de vulmachine nauwkeuriger af te stellen. Het gemiddelde vulgewicht is 1003 gram en hij gaat uit van de eis van de EU dat 2% van de pakken te licht mag zijn.

- Welke standaardafwijking mag zijn vulmachine nu veroorzaken?

Opgave 11

Bij de serieproductie van een bepaald type auto wordt het plaatsen van het stuur door mensen gedaan. Deze handeling kost gemiddeld 55 seconden. De handelingstijd T blijkt ongeveer normaal te zijn verdeeld rond dit gemiddelde met een standaardafwijking van 4 seconden.

- a Er worden in een bepaalde maand 1200 van deze auto's geproduceerd. Schat het aantal auto's waarbij het langer dan 60 seconden geduurd heeft om het stuur te plaatsen.
- b Hoeveel tijd hebben de 5% snelste handelingstijden gekost?
- c De fabrikant van deze auto's onderzoekt of een machine de mens kan vervangen. De gemiddelde afhandelingstijd is ook dan 55 seconden, maar de standaardafwijking wordt veel kleiner. Nu duurt maar 1% van alle afhandelingstijden meer dan 60 seconden. Welke standaarddeviatie geldt voor deze machine?

Opgave 12

In een fabriek worden schroeven gemaakt met verschillende afmetingen. In opdracht moet er een partij schroeven gemaakt worden waarvan de kop een diameter heeft tussen de 9,98 mm en 10,03 mm. Schroeven met een te dikke of te dunne kop worden afgekeurd. De gemiddelde diameter is afhankelijk van de waarde waarop de machine is ingesteld. De fabrikant stelt de machine in op een diameter van 9,99 mm. De standaardafwijking van de machine bedraagt 0,02 mm.

- a Hoeveel procent van de schroeven zal goedgekeurd worden?
- b Hoeveel procent van de schroeven zal worden goedgekeurd als de fabrikant er in slaagt de standaardafwijking van de machine terug te brengen naar 0,01 mm?

De fabrikant wil dat 99% van de schroeven goedgekeurd wordt. Hij denkt dat te kunnen bereiken door een andere instelwaarde van de machine te kiezen. Ook kan de machine fijner worden afgesteld, waardoor de standaardafwijking verandert.

- c Bij welke afstellingen zal hem dat lukken?

Opgave 13

Bij een veredelingsbedrijf van zaden wordt de lengte van een bepaalde plant gemeten. Men vindt dat de lengten van deze planten normaal verdeeld zijn. 12,5% van de planten heeft een lengte van meer dan 60 cm en 39% van de planten is niet groter dan 30 cm.

- a Bereken de gemiddelde lengte en de standaardafwijking van deze plantensoort.

Te kleine planten zijn niet geschikt voor de zaadontwikkeling. Deze planten worden vernietigd. Het blijkt dat 30% van de planten vernietigd moet worden.

- b Tot welke lengte worden de planten vernietigd?

Opgave 14

Een bakker bakt kerststollen van 1000 g.

- a Hoe groot is de standaardafwijking als het gemiddelde gewicht 1000 g is en 5% van de stollen minder weegt dan 900 g?
- b Als de standaardafwijking van de stollen 60 g is, hoeveel procent van de stollen weegt dan minder dan 900 g?
- c Hoe groot is het gemiddelde gewicht van de stollen bij een standaardafwijking van 65 g als 5% van de stollen minder weegt dan 900 g?

Je koopt bij deze bakker drie kerststollen. Ga er van uit dat het gemiddelde gewicht 1000 g is met een standaardafwijking van 50 g.

- d Hoe groot is de kans dat deze drie kerststollen samen minder dan 2950 gram wegen?
- e Hoe groot is de kans dat het gemiddelde gewicht van deze drie kerststollen minder dan 960 gram is?

Opgave 15

Limburgse kaas wordt verkocht in pakjes van 200 g. De snijmachine is zo afgesteld dat het gewicht van de pakjes normaal verdeeld is met een gemiddelde van 202,50 g en een standaardafwijking van 4,0 g.

- a Hoe groot is de kans dat een pakje minder dan 200 g weegt?
- b In een doos gaan 50 pakjes kaas. Hoe groot is de kans dat een doos minder dan 10 kg kaas bevat?
- c Een winkelier bestelt voor een bepaalde week een groot aantal pakjes kaas. Minder dan 10% daarvan weegt meer dan 203 gram. Hoeveel pakjes kaas heeft hij besteld?

Toepassen

Opgave 16: Zwangerschap

In het 'Moeders voor moeders babyboek' staat dat 75% van de zwangere vrouwen bevalt tussen 14 dagen vóór en 14 dagen na de uitgerekende datum. Bij het bepalen van deze uitgerekende datum gaat men uit van een zwangerschap van 40 weken, dus 280 dagen.

De zwangerschapsduur is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 280 dagen.

In 2002 vonden er in Nederland 199205 bevallingen plaats. Van een aantal van deze bevallingen duurde de zwangerschap minder dan 36 weken.

- a Bereken bij hoeveel bevallingen dit het geval was.
De standaardafwijking kan nauwkeuriger bepaald worden.
- b Bereken deze standaardafwijking in twee decimalen nauwkeurig.
- c Hoe groot is de kans dat de gemiddelde zwangerschapsduur van deze 18 bevallingen meer dan 285 dagen was?

Zeventien procent van de vrouwen die in één maand tijd in dezelfde kraamafdeling zijn bevallen, had een gemiddelde zwangerschapsduur van maximaal 278 dagen.

- d** Hoeveel bevallingen vonden in die maand plaats in de betreffende kraamafdeling?

(naar: examen VWO wiskunde A 1,2 uit 2005, 2e tijdvak)

Testen

Opgave 17

Van een partij suiker, verpakt in pakken van 1000 g, blijkt 15% minder te wegen dan 1000 g. Het vulgewicht is gelijk aan het gemiddeld gewicht.

Als de standaardafwijking van de machine 7 g bedraagt, waar staat het vulgewicht dan op ingesteld?

Opgave 18

Een machine die flessen vult, is ingesteld op een gemiddeld vulgewicht van 1015 g. De standaardafwijking is onbekend. Uit onderzoek is gebleken dat 1,5% van de flessen een gewicht heeft dat kleiner is dan 1000 g.

Bepaal de standaardafwijking.

Opgave 19

Bloemzaadjes worden verkocht in zakjes van 30 g. Het gewicht van een zakje uit een grote partij is normaal verdeeld met een gemiddelde van 31 g en een standaardafwijking van 0,6 g. Uit de partij wordt willekeurig een zakje genomen.

- a** Hoe groot is de kans dat het zakje meer dan 32 g weegt?
- b** Hoe groot is de kans dat het gewicht van het zakje meer dan 4% afwijkt van het gemiddelde?
- c** Hoeveel procent van de zakjes weegt te weinig?
- d** De fabrikant vindt het percentage bij c te groot en besluit het gemiddelde vulgewicht wat te verhogen tot maar 1% van de zakjes te licht is. Welk vulgewicht moet hij dan instellen?

Uit de oorspronkelijke partij wordt een steekproef van 25 zakjes getrokken.

- e** Hoe groot is de kans dat de totale hoeveelheid bloemzaadjes meer dan 780 g weegt?
- f** Hoe groot is de kans dat het gemiddelde gewicht van een zakje uit de steekproef meer dan 4% afwijkt van het populatiegemiddelde?

1.4 Normaal of niet?

Inleiding

Als je de gewichten van zo'n 1000 aselekt gekozen vrouwen uit de leeftijdsgroep van 20– < 30 jaar meet, krijg je ongeveer een klok-vormige frequentieverdeling. Maar mag je nu zeggen dat er sprake is van een normale verdeling?

Er bestaat normaal waarschijnlijkheidspapier. Op dat papier wordt een cumulatief relatief frequentiepolygoon een rechte lijn als er van een normale verdeling sprake is. Met behulp van de vuistregels kun je vanaf dat papier dan het gemiddelde en de standaardafwijking aflezen.

Je leert in dit onderwerp

- een cumulatief relatief frequentiepolygoon tekenen op normaal waarschijnlijkheidspapier om te onderzoeken of de gegevens normaal zijn verdeeld;
- verwachtingswaarde of standaarddeviatie van een normaal verdeelde variabele berekenen;
- kansen berekenen bij som/verschil van twee normaal verdeelde variabelen.

Voorkennis

- werken met normale verdelingen;
- kansen berekenen bij normale verdelingen;
- grenswaarden terugzoeken bij normale kansen.

Verkennen

Opgave V1

Bij een landelijk onderzoek zijn de gewichten bepaald van 1000 aselekt gekozen volwassen vrouwen van 20– < 30 jaar, zie tabel. De frequentieverdeling lijkt op die van een normale verdeling. Kun je nu zonder meer een normale verdeling als rekenmodel gebruiken voor deze groep vrouwen?

- Ga na of deze frequentieverdeling voldoet aan de vuistregels voor een normale verdeling.
- Is het voldoen aan de vuistregels voldoende reden om te concluderen dat een normale verdeling een bruikbaar rekenmodel is?



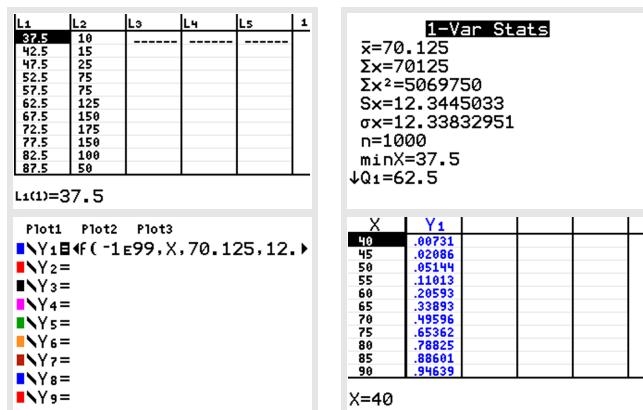
Figuur 4.1

gewicht	frequentie
35-<40	10
40-<45	15
45-<50	25
50-<55	75
55-<60	75
60-<65	125
65-<70	150
70-<75	175
75-<80	150
80-<85	100
85-<90	50
90-<95	25
95-<100	15
100-<105	10

Figuur 4.2

Uitleg

Bij een landelijk onderzoek zijn de gewichten bepaald van 1000 aselekt gekozen volwassen vrouwen van 20– < 30 jaar, zie tabel. De frequentieverdeling lijkt op die van een normale verdeling met $\mu(L) = 70,125$ en $\sigma(L) = 12,338$. Kun je nu zonder meer een normale verdeling als rekenmodel gebruiken voor deze groep vrouwen?



Figuur 4.4

Zet je op **normaal waarschijnlijkheidspapier** kansen van de vorm $P(L \leq 40 | \mu = 70,125 \text{ en } \sigma = 12,338)$ uit, dan krijg je een rechte lijn. Elke zuivere cumulatieve normale verdeling wordt op normaal waarschijnlijkheidspapier een rechte lijn.

Maak je van de gegeven frequentieverdeling een cumulatieve relatieve frequentieverdeling en zet je die uit op normaal waarschijnlijkheidspapier, dan zou je een rechte lijn moeten krijgen (je zet de cumulatieve relatieve frequenties uit tegen de rechter klassengrenzen). Je zult zien, dat de cumulatieve relatieve frequentieverdeling en de normale verdeling goed overeenkomen! Kennelijk zijn deze gewichten ongeveer normaal verdeeld!

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg**. Neem (print) een aantal bladen normaal waarschijnlijkheidspapier. Ga uit van een normale verdeling met $\mu = 70,125$ en $\sigma = 12,338$.

- Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de waarden van $P(L \leq g)$ bij deze normale verdeling voor $g = 40, 45, 50, \dots, 105$. Denk er om dat alle kansen als percentages moeten worden gegeven.
- Wordt je grafiek een rechte lijn?
- Waar in je figuur vind je μ terug? Kun je ook σ terugvinden?

Opgave 2

Neem nu de tabel met de werkelijke gewichten van de 1000 vrouwen.

- Maak hierbij een tabel met cumulatieve relatieve frequenties.
- Zet deze cumulatieve relatieve frequenties uit tegen de bovengrenzen van elke klasse op het normaal waarschijnlijkheidspapier waar de normale verdeling van de vorige opgave op staat.

gewicht	frequentie
35-<40	10
40-<45	15
45-<50	25
50-<55	75
55-<60	75
60-<65	125
65-<70	150
70-<75	175
75-<80	150
80-<85	100
85-<90	50
90-<95	25
95-<100	15
100-<105	10

Figuur 4.3

- c Verschilt je grafiek veel van de grafiek van de normale verdeling? Waarom moet je de bovengrenzen van de klassen gebruiken?
- d Kun je concluderen dat de gewichten van deze 1000 vrouwen normaal zijn verdeeld?



Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Zet je bij een normaal verdeelde stochast X met verwachting $\mu(X)$ en standaardafwijking $\sigma(X)$ op **normaal waarschijnlijkheidspapier** kansen van de vorm $P(X \leq g)$ uit tegen g , dan krijg je een rechte lijn.

Maak je van een gegeven frequentieverdeling een cumulatieve relatieve frequentieverdeling en zet je die uit op normaal-waarschijnlijkheidspapier, dan zou je een rechte lijn moeten krijgen als de frequenties normaal zijn verdeeld. De cumulatieve relatieve frequenties moeten tegen de **bovengrenzen** van de klassen worden uitgezet.

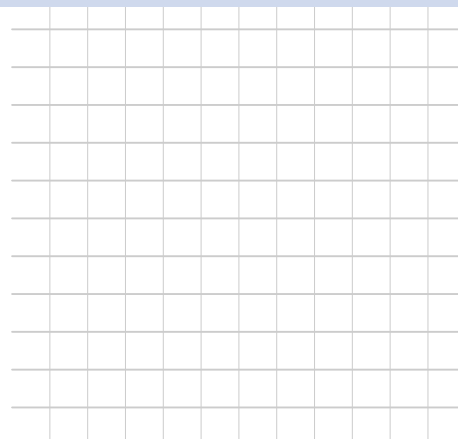
Vaak liggen op het **normaal waarschijnlijkheidspapier** de punten van de cumulatieve relatieve frequentieverdeling niet precies op een rechte lijn. Trek dan een rechte lijn die zo goed mogelijk bij de getekende punten past. Je benadert op die manier de frequentieverdeling door de normale kansverdeling die bij die lijn hoort. Schat de verwachtingswaarde door af te lezen welk getal er bij 50% hoort.

Omdat één van de twee vuistregels zegt dat bij een normale verdeling 68% in het interval $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ligt, is bij 84% de waarde van $\mu + \sigma$ af te lezen. Bepaal zo σ .

Is van twee verschillende stochasten X en Y bekend dat ze normaal verdeeld zijn met $\mu(X) \neq \mu(Y)$ en/of $\sigma(X) \neq \sigma(Y)$ en moeten beide stochasten met elkaar vergeleken worden, dan kun je beide stochasten **standaardiseren**.

Elke normaal verdeelde stochast X is om te zetten naar de standaardnormaal verdeelde stochast Z met: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$. Dit heet de **z-waarde**.

Met behulp van z-waarden van twee verschillende stochasten zijn deze stochasten met elkaar te vergelijken.



Voorbeeld 1

De tabel geeft de diameters (in mm) van machinaal geproduceerde moeren. Ga na, dat deze diameters normaal zijn verdeeld en bereken het gemiddelde en de standaardafwijking.

Antwoord

Met de GR vind je $\mu(M) = 13,20$ en $\sigma(M) = 0,10$ waarin M de diameter van een moer voorstelt.

Op normaal waarschijnlijkheidspapier verschillen de cumulatieve relatieve frequentieverdeling vanuit de tabel en die gemaakt vanuit een normale verdeling met $\mu(M) = 13,20$ en $\sigma(M) = 0,10$ vrijwel niet van elkaar. (Maak beide op een blad normaal waarschijnlijkheidspapier.)

Conclusie: M is normaal verdeeld met $\mu(M) = 13,20$ en $\sigma(M) = 0,10$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je een tabel met diameters van machinaal geproduceerde moeren.

- Reken zelf het gemiddelde en de standaarddeviatie na.
- Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de cumulatieve normale verdeling bij dit gemiddelde en deze standaardafwijking.
- Teken op hetzelfde papier de cumulatieve relatieve frequentieverdeling van de moeren.
- Ga na, dat beide redelijk goed overeen komen. Welke conclusie kun je trekken?

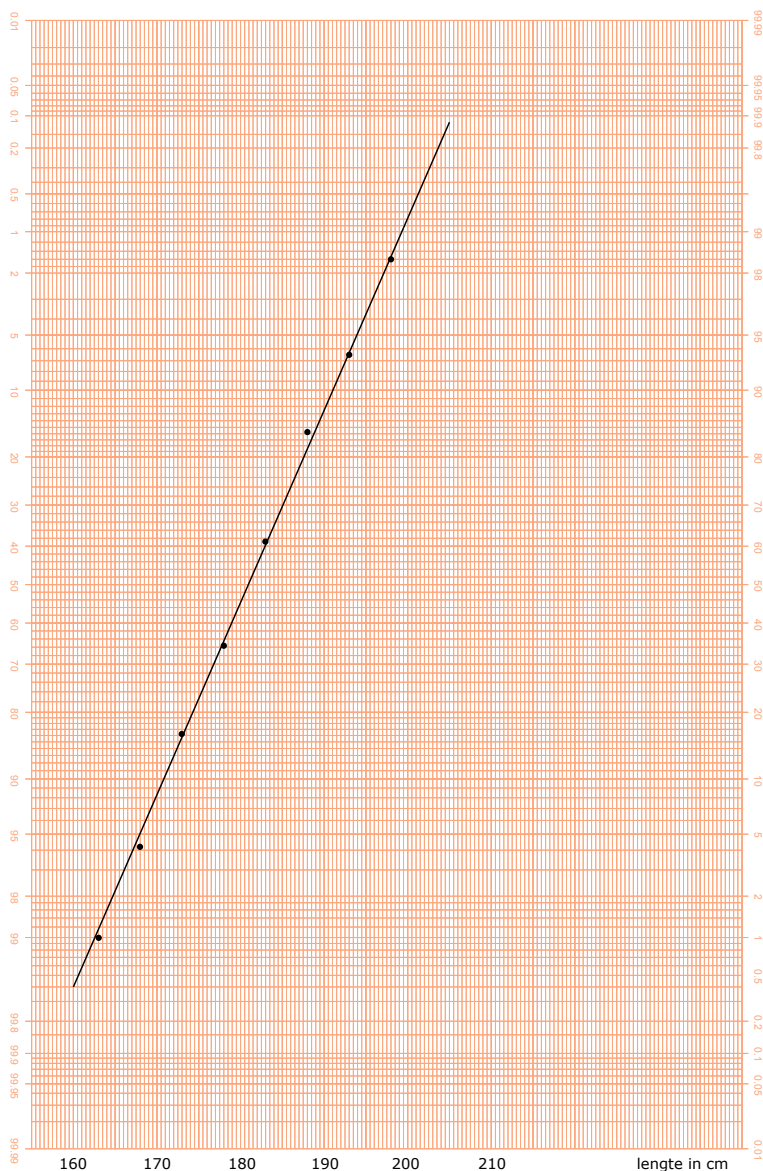


diameter	percentage
12,8-<12,9	0,1
12,9-<13,0	2,1
13,0-<13,1	13,6
13,1-<13,2	34,1
13,2-<13,3	34,0
13,3-<13,4	13,6
13,4-<13,5	2,0
13,5-<13,6	0,1

Figuur 4.5

Voorbeeld 2

De lengteverdeling van Nederlandse mannen boven 20 jaar is bij benadering klokvormig. In deze figuur op normaal waarschijnlijkheidspapier zie je hoe deze verdeling wordt benaderd door een rechte lijn.



Figuur 4.6

Bepaal vanuit deze figuur het gemiddelde en de standaardafwijking van de lengte X van de Nederlandse man in cm.

Antwoord

Op deze lengteverdeling van Nederlandse mannen boven 20 jaar zijn de lengtes bij 50% en 84% af te lezen:

- bij 50% zit de gemiddelde lengte van $\mu \approx 181$ cm;
- bij 84% zit volgens de vuistregels $\mu + \sigma \approx 189$ cm.

Je vindt een gemiddelde van ongeveer 181 cm met een standaardafwijking van $189 - 181 = 8$ cm.

Opgave 4

Wanneer een cumulatieve relatieve frequentieverdeling op normaal waarschijnlijkheidspapier vrijwel een rechte lijn oplevert is er sprake van een normale verdeling. In **Voorbeeld 2** kun je zien hoe je dan het gemiddelde en de standaardafwijking van de verdeling kunt aflezen uit de figuur.

Ga zelf na dat de in het voorbeeld vermelde waarden inderdaad correct zijn.

Opgave 5

In een fabriek worden kilopakken suiker machinaal gevuld. Volgens de Europese norm mag niet meer dan 2,5% van de pakken suiker minder dan 1000 gram bevatten. Open het bestand **de vulgewichten van 100 pakken suiker**.

- Maak een tabel met cumulatieve relatieve frequenties van deze vulgewichten. Gebruik klassen met een klassenbreedte van 1 gram.
- Bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie van deze vulgewichten in één decimaal nauwkeurig.
- Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de cumulatieve relatieve frequentieverdeling.
- Zijn de vulgewichten (bij goede benadering) normaal verdeeld? Zo ja, trek dan de rechte lijn die hoort bij deze normale verdeling.
- Laat zien dat het gemiddelde vulgewicht en de bijbehorende standaarddeviatie die je uit de figuur afleest overeen komen met de berekende waarden.
- Welke vulgewichten hebben de 10% zwaarste pakken suiker? Lees je antwoord uit de figuur af.

Voorbeeld 3

In **Voorbeeld 1** zag je dat de diameters M van een bepaalde soort moeren normaal zijn verdeeld met $\mu(M) = 13,20$ en $\sigma(M) = 0,10$ mm.

Bij deze moeren horen bouten waarvan de diameters B ook normaal zijn verdeeld: $\mu(B) = 13,05$ en $\sigma(B) = 0,10$ mm.

Deze bouten passen nog in de moeren als hun diameters maximaal 0,25 mm kleiner zijn dan die van de moeren.

Hoeveel procent van de bouten past niet?

Antwoord

Kijk naar het verschil $V = M - B$ van de diameters van een bout en een moer. Dit verschil is ook normaal verdeeld met

- $\mu(V) = \mu(M - B) = \mu(M + (-B)) =$
 $= \mu(M) + \mu(-B) = \mu(M) - \mu(B) = 13,20 - 13,05 = 0,15$ mm.
- $\sigma(V) = \sigma(M - B) = \sigma(M + (-B)) = \sqrt{(\sigma(M))^2 + (\sigma(-B))^2}$
 $= \sqrt{(\sigma(M))^2 + (\sigma(B))^2} = \sqrt{(0,10)^2 + (0,10)^2} \approx 0,14$ mm.

De bouten passen als $0 \leq V \leq 0,25$.

De kans hierop is $P(0 \leq V \leq 0,25 | \mu = 0,15 \text{ en } \sigma = 0,14) \approx 0,62$.

Conclusie: 38% van de bouten past niet in de moeren.



Figuur 4.7

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** vind je de gegevens van machinaal geproduceerde moeren en bijbehorende bouten.

- a** Het verschil van de diameters van de bouten en de moeren is ook normaal verdeeld. Welk gemiddelde en welke standaarddeviatie horen daar bij?

- b** Reken zelf het percentage bouten na dat niet in de moeren past.

Het bedrijf dat deze bevestigingsmiddelen maakt, produceert nog veel meer bouten en moeren in diverse afmetingen. Voor een ander type bout met bijpassende moer geldt: de diameter van de moer is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,10 mm en een standaarddeviatie van 0,05 mm en de diameter van de bout is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,05 mm en een standaardafwijking van 0,03 mm. De bouten passen in de moeren als het verschil van de diameter van de moer en de bout minder dan 0,02 mm is.

- c** Hoeveel procent van deze bouten is te dik voor de moeren?
- d** Hoeveel procent van deze bouten past niet in de bijbehorende moer?

Ook de gewichten van de bouten en moeren van deze tweede soort zijn normaal verdeeld: het gemiddelde gewicht van de moer is 5,0 gram met een standaardafwijking van 0,2 gram en het gemiddelde gewicht van de bout is 7,3 gram met een standaardafwijking van 0,3 gram. Ze worden verpakt in dozen. In elke doos zitten 100 bouten en moeren.

- e** Hoe zwaar zijn de bouten en moeren in zo'n doos gemiddeld? En welke standaardafwijking hoort daar bij?
- f** Hoeveel procent van deze dozen heeft een totale inhoud van meer dan 1235 gram?

Verwerken

Opgave 7

Deze tabel geeft de bloeddruk in mmHg (millimeter kwikdruk) van een groep mannen en een groep vrouwen.

- a** Bereken van beide groepen de gemiddelde bloeddruk en de standaardafwijking van de bloeddruk.
- b** Welke klassenindeling is hier gehanteerd?
- c** Laat met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier zien dat de bloeddruk van de mannen niet normaal is verdeeld.
- d** Je kunt wel een rechte lijn trekken die de verdeling zo goed mogelijk benaderd. Doe dat en lees het gemiddelde en de standaardafwijking af die bij die lijn passen. Wijken de waarden veel af van de berekende waarden?
- e** Is de bloeddruk van de vrouwen wel normaal verdeeld?

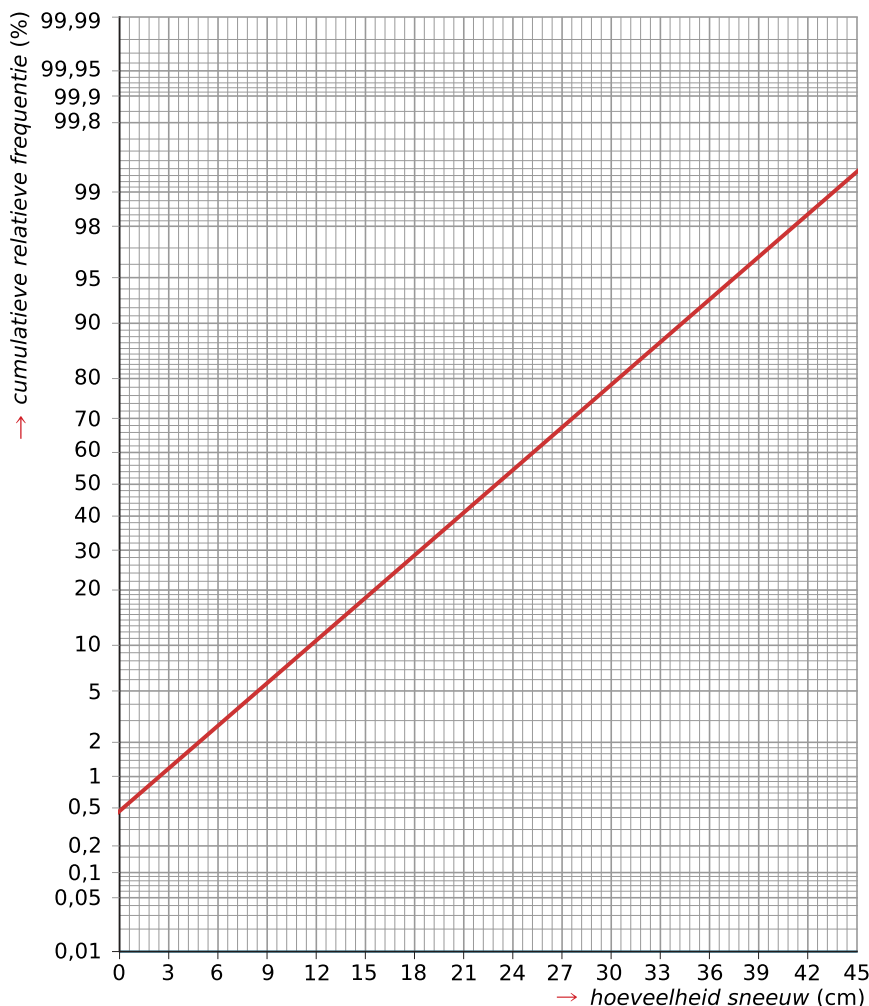
bloeddruk	mannen	vrouwen
105	2	1
110	4	3
115	6	5
120	16	15
125	15	12
130	6	6
135	7	7
140	7	7
145	7	8
150	2	5
155	1	3
160	1	2
165	15	1

Tabel 4.1

Opgave 8

In een noordelijk gelegen stad sneeuwt het regelmatig in het winterseizoen.

Van de hoeveelheid sneeuw die afgelopen winter per dag dat het sneeuwde viel, is een grafiek op normaal-waarschijnlijkheidspapier gemaakt.



Figuur 4.8

- Leg uit hoe je uit deze grafiek kunt aflezen hoeveel procent van de dagen dat het sneeuwde, er meer dan 18 cm sneeuw per dag viel.
- Leg uit waarom de hoeveelheid sneeuw die per sneeuwdag viel, normaal verdeeld is en bepaal de gemiddelde hoeveelheid sneeuw die per sneeuwdag viel. Bepaal ook de bijbehorende standaardafwijking.

Opgave 9

Open het bestand [Enkele lichaamsmetingen van 5001 vrouwen uit 1947](#). Hierin zie je een tabel met lichaamslengtes in cm van de 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

- Bereken de gemiddelde lichaamslengte en de standaarddeviatie.
- Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de bijbehorende cumulatieve relatieve frequentieverdeling.

- c Zijn de lichaamslengtes bij benadering normaal verdeeld?
- d 95% van de lichaamslengtes zit tussen $\mu - a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a ? Lees je antwoord uit de figuur af.
- e Welke minimale lengte hebben de 16% grootste lichaamslengtes? Lees je antwoord uit de figuur af.

Opgave 10

Limburgse kaas wordt verkocht in pakjes van 200 g. De snijmachine is zo afgesteld dat het gewicht van de pakjes normaal verdeeld is met een gemiddelde van 202,5 g en een standaardafwijking van 4,0 g. Er gaan 50 pakjes in een doos. Die dozen hebben een gemiddeld gewicht van 145,0 gram met een standaardafwijking van 5,5 gram.

- a Hoeveel bedraagt het gemiddelde gewicht van zo'n doos met 50 pakjes kaas? En welke standaardafwijking hoort daar bij?
- b Hoeveel procent van deze dozen met kaas weegt minder dan 10250 gram?

Toepassen

Opgave 11: Voedselzoekende vogels

Vogels die hun voedsel in bomen en struiken zoeken, doen dat vaak bij voorkeur op een specifieke hoogte. Gedurende een winter zijn in een bos voedselzoekende vogels geobserveerd. In de tabel staat de verdeling over verschillende hoogtes van 400 waarnemingen bij pimpelmezen.

hoogte in meter	< 1,5	1,5– < 3	3– < 5	5– < 7	7– < 10	10– < 15	> 15
aantal waarnemingen	24	26	51	72	122	92	13

Tabel 4.2

Toon aan dat de waargenomen hoogtes bij benadering normaal verdeeld zijn. Gebruik hiervoor normaal waarschijnlijkheidspapier. Lees uit je tekening af hoe groot het gemiddelde en de standaardafwijking van deze verdeling zijn. Geef beide antwoorden tot op dm nauwkeurig. Licht je werkwijze toe.

(bron: examen vwo wiskunde A1,2 2002, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 12

Open het bestand [Enkele lichaamsmetingen van 5001 vrouwen uit 1947](#). Hierin zie je een tabel met kniehoogtes in cm van de 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

- a Bereken de gemiddelde kniehoogte en de standaarddeviatie.
- b Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de bijbehorende cumulatieve relatieve frequentieverdeling.
- c Ga na, dat de gemiddelde kniehoogte en de standaardafwijking die je uit de figuur kunt aflezen overeen komen met de berekende waarden.

- d Zijn de kniehoogtes bij benadering normaal verdeeld?
- e 60% van de kniehoogtes zit tussen $\mu - a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a ? Lees je antwoord uit de figuur af.
- f Welke minimale lengte hebben de 15% grootste kniehoogtes? Lees je antwoord uit de figuur af.

Opgave 13

Literpakken melk worden machinaal gevuld. Zo'n pak heeft een inhoud die normaal is verdeeld met een gemiddelde van 1,010 liter en een standaardafwijking van 0,006 liter. De vulmachine staat ingesteld op het vullen van gemiddeld 1,005 liter melk in zo'n pak met een standaardafwijking van 0,004 liter. Ook dit vulvolume is normaal verdeeld.

- a In hoeveel procent van de gevallen gaat bij het vullen melk verloren?
- b Het gemiddelde vulvolume kan worden ingesteld. Hoeveel moet dit bedragen opdat in niet meer dan 1% van de gevallen melk verloren gaat bij het vullen van een pak?

Practicum

Hier vind je een **leeg blad normaal-waarschijnlijkheidspapier** in drie kleuren.

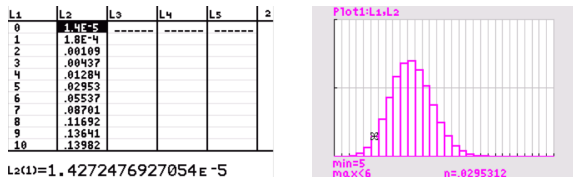
- [normaal waarschijnlijkheidspapier \(paars\)](#)
- [normaal waarschijnlijkheidspapier \(oranje\)](#)
- [normaal waarschijnlijkheidspapier \(grijs\)](#)

1.5 Binomiale kansen benaderen

Inleiding

Je ziet hier een kanshistogram van een binomiale verdeling met $n = 50$ en $p = 0,20$. Je ziet dat het een mooie klokvorm heeft, X loopt van 0 tot 30, de verwachtingswaarde is $50 \cdot 0,20 = 10$ en de standaardafwijking is ongeveer 2,8. Hoe groter n hoe beter het kanshistogram de klokvorm benadert.

De wiskundige formulering van deze stelling heet de centrale limietstelling.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- een binomiale stochast benaderen door een normale stochast;
- de continuïteitscorrectie toepassen.

Voorkennis

- werken met normale en binomiale stochasten.

Verkennen

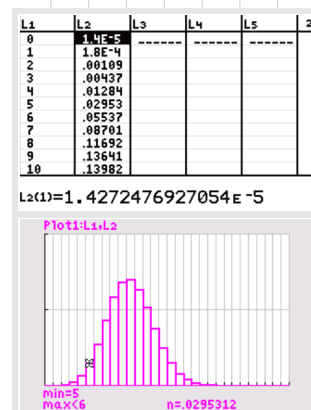
Opgave V1

Je ziet hier een kanshistogram van een binomiale verdeling met $n = 50$ en $p = 0,20$. Je ziet dat het een mooie klokvorm heeft, X loopt van 0 tot 30, de verwachtingswaarde is $50 \cdot 0,20 = 10$ en de standaardafwijking is ongeveer 2,8. Hoe groter n hoe beter het kanshistogram de klokvorm benadert.

De wiskundige formulering van deze stelling heet de centrale limietstelling.

Lees de inleiding en bekijk de figuren.

- Maak zelf dit kanshistogram en laat zien hoe je de standaardafwijking berekent.
- Doe hetzelfde nog eens voor $n = 100$ en dezelfde waarde van p .
- Bepaal $P(X \leq 23 | n = 100 \text{ en } p = 0,20)$.
- Benader deze kans met de normale verdeling die past bij de klokvormige kromme die past bij het kanshistogram.



Figuur 5.2

Uitleg

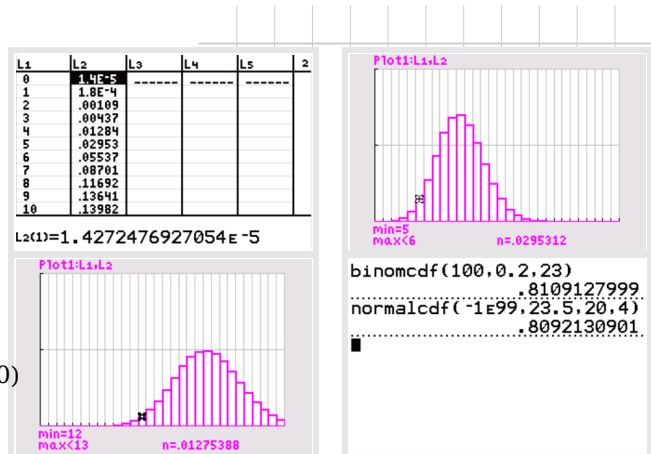
Hier zie je een kanshistogram van een binomiale verdeling met $n = 50$ en $p = 0,20$.

Er onder zie je een kanshistogram van een binomiale stochast X met $n = 100$ en $p = 0,20$ voor X van 0 tot 35. De klokvorm wordt nog beter: hoe groter n hoe beter het kanshistogram de klokvorm benadert. De wiskundige formulering van deze stelling heet de centrale limietstelling.

Je kunt nu bijvoorbeeld $P(X \leq 23 | n = 100 \text{ en } p = 0,20)$ benaderen met behulp van de normale verdeling:

- De binomiale stochast X heeft een verwachtingswaarde $E(X) = 100 \cdot 0,20 = 20$ en een standaardafwijking van $\sigma(X) = \sqrt{100 \cdot 0,20 \cdot 0,80} = 4$.
- De binomiale stochast X is bij benadering gelijk aan de normale stochast Y met $\mu(Y) = 20$ en $\sigma(Y) = 4$.
- Omdat X alleen gehele waarden aanneemt en Y alle reële waarden kan hebben, moet je rekening houden met afrondingen op gehelen:
 $P(X \leq 23 | n = 100 \text{ en } p = 0,20) \approx$
 $\approx P(X < 23,5 | \mu = 20 \text{ en } \sigma = 4) \approx 0,81$.

Deze aanpassing van een normale stochast aan een discrete stochast heet de continuïteitscorrectie.



Figuur 5.3

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg**.

- Bepaal $P(X \leq 23 | n = 100 \text{ en } p = 0,20)$ met behulp van de binomiale kansverdeling in vier decimalen nauwkeurig.
- Benader $P(X \leq 23 | n = 100 \text{ en } p = 0,20)$ met behulp van de normale verdeling in vier decimalen nauwkeurig.
- Vind je veel verschil tussen a en b? Heb je de continuïteitscorrectie toegepast?

Opgave 2

Je gooit 15 keer met een eerlijk geldstuk. Het gaat je om de kans dat je slechts 6 keer munt gooit.

- Gebruik de binomiale verdeling om deze kans te berekenen.
- Gebruik de normale verdeling om deze kans te berekenen.
- Vergelijk je antwoorden met elkaar. Wat valt je op? Geef hiervoor een verklaring.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **centrale limietstelling** zegt:

Als $X_1, X_2, \dots, X_n$ onafhankelijke stochasten met dezelfde kansverdeling (en dus ook met gelijke verwachting $E(X)$ en variantie $\text{Var}(X)$) zijn, dan is de som van deze stochasten normaal verdeeld met verwachting $\mu = n \cdot E(X)$ en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{n \cdot \text{Var}(X)}$ als n oneindig groot wordt.

Het bewijs van deze stelling vereist meer wiskundige kennis dan je nu hebt. Daarom wordt het hier buiten beschouwing gelaten.

Een gevolg van deze stelling is dat je een **binomiale stochast** X met parameters n en p voor grote n en niet al te kleine p kunt **benaderen met een normale stochast** Y met $\mu(Y) = E(X) = n \cdot p$ en $\sigma(Y) = \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Meestal wordt als vuistregel gebruikt dat deze benadering goed is als $n > 25$ en $n \cdot p > 5$ en $n \cdot (1 - p) > 5$.

Bij het benaderen van binomiale kansen met behulp van een bijpassende normale stochast moet je wel de **continuïteitscorrectie** toepassen. Dat wil zeggen bij het overgaan van de discrete binomiale stochast naar de continue normale stochast letten op de afronding op gehelen!

Een gevolg van de centrale limietstelling is, dat je verschillend verdeelde stochasten gemakkelijk met elkaar kunt vergelijken, als ze afzonderlijk te benaderen zijn met een normale stochast. Ook kun je dan hun som en verschil bekijken omdat som en verschil van normale stochasten ook normaal verdeeld zijn.

Voorbeeld 1

Volgens het artikel [Wikipedia: Kleurenblindheid](#) heeft ongeveer 1 op elke 12 mannen last van 'rood-groen' kleurenblindheid.

Hoe groot is de kans dat in een representatieve steekproef van 15.000 mannen inderdaad 1200 rood-groen-kleurenblinden voorkomen?

Antwoord

Stochast X is het aantal mannen in de steekproef van 15.000 dat rood-groen-kleurenblind is.

X is binomiaal verdeeld met $n = 15.000$ en $p = 0,08$.

Dus $E(X) = 15000 \cdot 0,08 = 1200$ en $\sigma(X) = \sqrt{15000 \cdot 0,08 \cdot 0,92} \approx 33,2265$.

De gevraagde kans is $P(X = 1200 | n = 15000 \text{ en } p = 0,08)$.

- Met de binomiale kansfunctie vind je:
 $P(X = 1200 | n = 15000 \text{ en } p = 0,08) \approx 0,0120$.
- Door normale benadering vind je:
 $P(X = 1200 | n = 15000 \text{ en } p = 0,08) \approx$
 $\approx P(1199,5 \leq X < 1200,5 | \mu = 1200 \text{ en } \sigma = 33,2265) \approx 0,0120$.

Beide kansen zijn inderdaad op vier decimalen nauwkeurig hetzelfde.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je een binomiaal kansmodel kunt benaderen door een normale verdeling.

- Reken zelf dit voorbeeld na.
- In de **Theorie** staat een vuistregel die aangeeft wanneer je een binomiale kans kunt benaderen met de normale verdeling. Is in dit voorbeeld aan die vuistregel voldaan?

Voorbeeld 2

De kans op kleurenblindheid is bij vrouwen veel kleiner, maar ongeveer 0,4% van de Westerse vrouwen is kleurenblind. Hoe groot is de kans dat in een representatieve steekproef van 250 vrouwen inderdaad 1 kleurenblinde voorkomt?

Antwoord

Stochast X is het aantal vrouwen in de steekproef van 250 dat kleurenblind is.

X is binomiaal verdeeld met $n = 250$ en $p = 0,004$.

Dus $E(X) = 250 \cdot 0,004 = 1$ en $\sigma(X) = \sqrt{250 \cdot 0,004 \cdot 0,996} \approx 0,9980$.

De gevraagde kans is $P(X = 1 | n = 250 \text{ en } p = 0,004)$.

- Met de binomiale kansfunctie vind je:
 $P(X = 1 | n = 250 \text{ en } p = 0,004) \approx 0,3686$.
- Door normale benadering vind je:
 $P(X = 1 | n = 250 \text{ en } p = 0,004)$
 $\approx P(0,5 \leq X < 1,5 | \mu = 1 \text{ en } \sigma = 0,9980) \approx 0,3836$.

Beide kansen zijn iets verschillend van elkaar. Dat komt omdat $n \cdot p = 250 \cdot 0,004 = 1 < 5$ en een normale benadering in dit geval eigenlijk volgens de vuistregel niet verantwoord is.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je nog eens hoe je een binomiaal kansmodel kunt benaderen door een normale verdeling.

- Reken ook dit voorbeeld na.
- Is in dit voorbeeld aan de vuistregel in de **Theorie** voldaan?

```
binompdf(15000,.08,1200)
.0120059121
normalcdf(1199.5,1200.5,1)
.0120063625
```

Figuur 5.4

```
binompdf(250,0.004,1)
.3686169212
normalcdf(0.5,1.5,1,0.998)
.3836303016
```

Figuur 5.5

Opgave 5

Ongeveer 6% van de koffers die door een bepaalde machine geproduceerd worden, vertoont defecten.

- Geef een normale benadering van de kans dat van de 100 koffers die op een morgen worden gemaakt er hooguit 3 zijn die defecten vertonen.
- Hoe groot is de kans dat dit er precies 11 zijn?

Opgave 6

Uit onderzoek blijkt 55% van de stemgerechtigden uit een stad te zullen gaan stemmen op kandidaat A. Veronderstel dat je aan 1400 stemgerechtigden zou vragen waarop ze bij de eerstkomende verkiezing zouden stemmen. Het gaat je om de kans dat minstens 700 mensen antwoorden op kandidaat A te zullen stemmen.

- Waarom ligt een normale benadering van deze kans voor de hand?
- Is zo'n normale benadering ook per se nodig?
- Geef een normale benadering van deze kans.

Voorbeeld 3

Bij een landelijke verkiezing heeft 30% van de mannen en 24% van de vrouwen op partij A gestemd.

Een groep bestaat uit 150 mannen en 180 vrouwen.

Hoe groot is de kans dat er in deze groep minstens 80 mensen op partij A hebben gestemd?

Antwoord

Noem X het aantal mannen dat op partij A heeft gestemd en Y het aantal vrouwen dat op partij A heeft gestemd.

X is binomiaal verdeeld met parameters $n = 150$ en $p = 0,3$.

Y is ook binomiaal verdeeld met parameters $n = 180$ en $p = 0,24$.

Je moet de kans uitrekenen dat de som van X en Y minstens 80 is. Het probleem hierbij is dat $X + Y$ niet binomiaal verdeeld is. Maar je kunt X en Y wel benaderen met de normale verdeling en de som van twee normale stochasten is wel normaal verdeeld.

$X + Y$ is bij benadering normaal verdeeld met parameters $\mu = 88,2$ en $\sigma \approx 8,02$.

De kans dat minstens 80 mensen van de groep op partij A hebben gestemd is bij benadering

$$P(X + Y \geq 79,5 | \mu = 88,2 \text{ en } \sigma = 8,02) \approx 0,8610$$

(Denk aan de continuïteitscorrectie.)

Opgave 7

Bekijk [Voorbeeld 3](#).

- Toon aan dat $\mu = 93,2$ en $\sigma \approx 8,02$.
- Bereken in vier decimalen de kans dat er hoogstens 100 mensen uit de groep op partij A hebben gestemd.

Verwerken

Opgave 8

Van een geneesmiddel is bekend dat 80% van de patiënten die het gaan gebruiken, inderdaad ook geneest. Het middel wordt in een kliniek aan 25 patiënten voorgeschreven. Geef een normale benadering van de kans dat van deze groep patiënten:

- a precies 20 personen genezen.
- b alle 25 personen genezen.
- c niet één persoon geneest.
- d meer dan 12 personen genezen.
- e tussen de 17 en de 23 personen genezen.

Opgave 9

In een bepaalde streek is bekend dat 2,5% van de baby's in hun eerste levensjaar sterven. In deze streek worden in een bepaald jaar 525 baby's geboren.

- a Hoeveel zullen hiervan naar verwachting in het eerste levensjaar sterven?
- b Geef een normale benadering van de kans dat er hooguit 8 sterven. Verschilt je antwoord veel van de werkelijke kans?
- c Bepaal de kans dat minstens 520 baby's het eerste levensjaar overleven.

Opgave 10

De kans dat een entstof A tegen griep succes heeft, blijkt na onderzoeken 0,95 te zijn. Een bedrijf laat alle 1150 werknemers met dit griepvaccin inenten.

- a Hoe groot is voor dit bedrijf de kans dat meer dan 60 werknemers toch de griep krijgen?
- b Benader de bij a genoemde kans ook met de normale verdeling.

Opgave 11

In een restaurant met een capaciteit van 350 tafels zijn voor de komende feestdagen alle tafels gereserveerd. De restauranthouder weet dat het aantal reserveringen waarbij niemand komt opdagen bij benadering normaal is verdeeld met een gemiddelde van 17,5 en een standaardafwijking van 4,1.

- a Hoe groot is de kans dat iemand die heeft gereserveerd ook komt opdagen?
- b De eigenaar van het restaurant wil zoveel reserveringen aannemen dat de kans dat voor iedereen die heeft gereserveerd en dan ook inderdaad verschijnt plaats is, minstens 99% is. Hoeveel reserveringen zal hij maximaal kunnen noteren?

Opgave 12

Van de mannen is 8% kleurenblind, van de vrouwen is dat 0,4%.

Een groep bestaat uit 550 mannen en 450 vrouwen. Je wilt de kans berekenen dat daarvan 90 personen kleurenblind zijn.

- Welke kansverdeling hoort er bij de groep mannen?
- Welke kansverdeling hoort er bij de groep vrouwen?
- Welke kansverdeling hoort er bij de groep van 1000 personen?
- Bereken de gevraagde kans.

Testen

Opgave 13

Een voedingsmiddelenbedrijf is zeer geïnteresseerd in de mening van haar klanten. Bij een onderzoek dat onder een grote groep mensen plaatsvond, was 70% van alle ondervraagden zeer tevreden over de smaak van één van hun producten. Het bedrijf levert aan een bedrijfskantine voor 250 mensen dit product en vraagt hen daarna naar hun mening over de smaak ervan. Ga er van uit dat alle 250 mensen die van deze bedrijfskantine gebruik maken ook echt het product hebben geproefd.

- Hoe groot is de kans dat minder dan 60 van hen het product niet lekker vinden als het resultaat van het onderzoek ook voor de mensen in deze bedrijfskantine opgaat?
- Bepaal de voorgaande kans ook door benadering met de normale verdeling.

Opgave 14

Het aantal keren dat een redelijk goede schutter bij een serie van 50 schoten de roos raakt blijkt normaal te zijn verdeeld met een standaardafwijking van 3. Hij gaat er van uit dat deze normale verdeling is ontstaan omdat hij per schot een bepaalde vaste kans p heeft om de roos te raken.

- Welke waarde zou p bij deze aanname moeten hebben?
- Bij hoeveel van de 50 schoten zal hij dan gemiddeld de roos raken?
- Hoe groot is de kans dat hij tenminste 30 keer van de 50 schoten de roos raakt?

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Continue kansmodellen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Merk op dat het nu ook nuttig is om het onderwerp 'Discrete kansmodellen' nog een keer te bekijken. In veel opgaven worden zowel de normale verdeling als de binomiale verdeling gebruikt.

Begrippenlijst

- continue stochast — kansdichtheidsfunctie — normaalkromme
- normale stochast — μ en σ bij een normale stochast — normale kansen
- de standaardnormale stochast — standaardiseren — de wortel- n -wet voor een steekproef uit een normale verdeling
- normaal waarschijnlijkheidspapier
- de centrale limietstelling

Activiteitenlijst

- bij een continue stochast kansen bepalen — eigenschappen van de normaalkromme
- kansen berekenen bij een normale stochast — grenswaarden berekenen bij gegeven normale kansen
- standaardiseren — μ of σ berekenen bij een normale verdeling
- met normaal waarschijnlijkheidspapier onderzoeken of er van een normale verdeling sprake is
- een binomiale stochast benaderen met een normale stochast.

Achtergronden

In 1718 publiceerde **Abraham de Moivre (1667–1754)** 'The Doctrine of Chance', een boek over kansrekening waarin de eerste definitie van statistische onafhankelijkheid verschijnt, naast de aanpak van allerlei problemen op het gebied van dobbelen en andere kansspelen.

Bij de bestudering van herhaalde trekkingen (met teruglegging) van een schijf uit een vaas met alleen zwarte en witte schijven waarbij de kans op een zwarte en een witte schijf even groot is, ontdekte De Moivre dat een bijpassende kansverdeling een histogram heeft dat netjes klokvormig is. Later werd dit probleem gesimuleerd met het **bord van Galton** waarin balletjes naar beneden vallen op een aantal rijen met pinnen.

De Moivre bestudeerde ook sterftetabellen en werkte aan de theorie van de wiskunde rond levensverzekeringen.

In 1733 leidt hij de formule voor de normaalverdeling als benadering van de binomiale verdeling af.



Figuur 6.1 Abraham de Moivre

De Duitse wiskundige **Carl Friedrich Gauss (1777–1854)** toonde aan dat de verdeling van meetfouten de normaalverdeling was en de bijbehorende verdelingskromme heet dan ook de gauskromme. In 1812 publiceerde de Franse wiskundige **Pierre-Simon de Laplace (1749–1827)** over deze onderwerpen het boek 'Théorie analytique des probabilités', wat tientallen jaren lang als standaardwerk over waarschijnlijkheidsrekening was.

Testen

Opgave 1

Open het Excelbestand **Gegevens 154 leerlingen**. Hierin zie je een tabel met gegevens van 154 leerlingen, jongens en meisjes door elkaar.

- Bereken de gemiddelde lichaamslengte en de standaarddeviatie zowel voor de jongens als voor de meisjes.
- Maak voor beide groepen een klassenindeling van de lichaamslengtes, zorg er voor dat je ongeveer 10 klassen hebt.
- Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de bijbehorende cumulatieve relatieve frequentieverdelingen.
- Zijn de lichaamslengtes van beide groepen bij benadering normaal verdeeld? Lees de gemiddeldes en de standaardafwijkingen uit je figuur af en vergelijk ze met de berekende waarden.
- Hoeveel procent van de jongens is kleiner dan het gemiddelde van de meisjes?
- Hoeveel procent van de meisjes is groter dan het gemiddelde van de jongens?

Opgave 2

In een fabriek worden sokken machinaal vervaardigd. De gemiddelde lengte van een sok blijkt 47 cm te zijn. De lengte van de sokken is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 0,2 cm. De sokken worden in paren verkocht. In de fabriek worden paren gevormd door willekeurig twee sokken bij elkaar te stoppen.

- Als één sok een lengte heeft van 46,5 cm, hoe groot is dan de kans dat het lengteverschil met de andere sok van het paar meer dan 0,7 cm bedraagt?
- Als de eerste sok een lengte heeft van 49,5 cm, is dan de kans dat het lengteverschil met de andere sok van het paar meer dan 0,7 cm is even groot? Licht je antwoord toe.
- Bepaal deze kans.

Opgave 3

De zwangerschapsduur bij mensen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 266 dagen en een standaarddeviatie van 16 dagen.

- Bij een premature geboorte wordt het kind minstens drie weken voor het gemiddelde geboren. Hoe groot is de kans daar op?

- b** In 7% van de gevallen duurt een zwangerschap zo lang dat de geboorte moet worden ingeleid. Vanaf welke zwangerschapsduur gebeurt dit dus?
- c** In 1973 beweerde een vrouw dat ze 310 dagen zwanger was geweest omdat op de dag van de bevalling haar man al 310 dagen als marinier van huis was. Hoe groot is de kans op een zwangerschap van minstens 310 dagen?

Opgave 4

In een fabriek verpakt een machine in kleine zakjes poedermelk voor in de koffie. Elk van die zakjes hoort 3 gram melkpoeder te bevatten. De fabrikant heeft zijn machine zo afgesteld dat het vulgewicht van deze zakjes normaal is verdeeld met een gemiddelde van 3,1 gram en een standaardafwijking van 0,06 gram.

- a** Hoeveel procent van de zakjes melkpoeder die deze machine produceert is te licht?
- b** Je koopt een doosje met daarin 20 zakjes van die melkpoeder. Hoe groot is de kans dat je in totaal minder dan $20 \cdot 3 = 60$ gram melkpoeder hebt gekocht?
- c** Hoeveel gram melkpoeder verwacht je gemiddeld per zakje in het doosje met 20 zakjes? En welke standaardafwijking hoort daar bij? De fabrikant voldoet hiermee niet aan de richtlijnen van de Europese Unie op dit gebied. Die schrijven voor dat niet meer dan 1% van de zakjes poedermelk minder dan 3 gram mag bevatten.
- d** De fabrikant besluit om iets meer melkpoeder in de zakjes te doen. Op welk gemiddelde vulgewicht moet hij de machine instellen om aan de richtlijn van de EU te voldoen? (Ga er van uit dat de standaarddeviatie van de verdeling van de vulgewichten hetzelfde blijft.)
- e** Achteraf bezien vindt de fabrikant de oplossing die hij heeft gekozen bij b toch te duur. Hij laat de machine nauwkeuriger afstellen en houdt het gemiddelde vulgewicht op 3,1 gram. Welke standaardafwijking moet de verdeling van de vulgewichten nu krijgen om aan de richtlijn van de EU te voldoen?

Opgave 5

In een bedrijf wordt onder andere margarine geproduceerd. Het eindproduct wordt via een vulmachine in kuipjes gegoten, die volgens het opschrift een inhoud hebben van 500 g. De gewichten van de gevulde kuipjes blijken normaal verdeeld te zijn. De standaarddeviatie is ongeacht het vulgewicht waarop de vulmachine ingesteld staat steeds 4 g. Het gemiddelde gewicht van zo'n kuipje is gelijk aan het vulgewicht waarop de machine is ingesteld.

- a** Hoe groot is de kans dat het gewicht van een vol kuipje tussen 496 en 502 g ligt?

De kuipjes worden verpakt in kartonnen dozen waarvan het gewicht normaal verdeeld is. Het gemiddelde gewicht is 400 g met een standaardafwijking van 15 g. In één doos gaan 20 kuipjes.

- b** Het gewicht van de volle dozen is ook weer normaal verdeeld. Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het gewicht van deze dozen.

De keuringsdienst van waren gaat regelmatig na of de fabriek wel voldoende margarine in de kuipjes doet. Daartoe nemen ze één volgepakte doos uit de dagproductie en wegen die. Als het totale gewicht meer dan 50 g naar beneden afwijkt van het gemiddelde, krijgt de fabrikant een boete.

- c** Hoe groot is de kans op een boete, als de fabrikant het vulgewicht van 500 g aanhoudt?

Natuurlijk zou de keuringsdienst van waren ook de 20 kuipjes zonder de bijbehorende doos kunnen wegen. Ook nu wordt een boete gegeven als 50 g minder dan het gemiddelde gemeten zou worden.

- d** Waarom is deze controle eerlijker dan de eerste?

- e** In welk van de twee gevallen is de kans op een boete het kleinst? Waarom?

Op een gegeven moment worden de eisen door de keuringsdienst van waren veranderd. In het vervolg zullen 100 kuipjes op hun gewicht gecontroleerd worden. Daarbij mogen er maximaal 4 zijn die minder dan 492 g wegen.

- f** Hoe groot is nu de kans op een boete, aangenomen dat de fabrikant de machine nog steeds op 500 g heeft ingesteld?

- g** De kans op een boete kan verkleind worden door het vulgewicht te verhogen. Hoe hoog moet het ingesteld worden om te bereiken dat de kans op een gewicht van minder dan 492 g nog maar 1% is?

Opgave 6

Een atleet heeft zich gespecialiseerd in het verspringen. Zijn sprongen blijken normaal te zijn verdeeld met een gemiddelde van 8,60 m en een standaarddeviatie van 10 cm. Om in aanmerking te komen voor afvaardiging naar de Olympische Spelen, moet hij in zijn eigen land drie keer voldoen aan de zogenaamde Olympische limiet. Dat betekent, dat hij drie keer verder moet springen dan een door het landelijk Olympisch comité vastgestelde afstand. In dit geval bedraagt die afstand 8,70 m.

- a** Bepaal de kans dat de atleet bij één sprong de limiet haalt.
- b** Hoe groot is de kans dat hij bij drie achtereenvolgende sprongen drie keer de limiet overschrijdt?
- c** Binnen vier maanden moet deze atleet drie keer de gestelde limiet halen. In deze vier maanden zijn er twee door het landelijk Olympisch comité erkende wedstrijden met elk drie sprongen. Bereken de kans dat de atleet precies drie keer de limiet haalt.
- d** Het Olympisch record bedraagt 8,80 m. Op de Olympische Spelen heeft de atleet drie sprongen om zijn kansen te verdedigen. Hoe groot is de kans dat het hem lukt op de Olympische Spelen één keer dit record te verbeteren?

De voorwaarde waaraan voldaan moet worden om naar de Olympische Spelen te worden uitgezonden bestaat uit 4 elementen:

- de gestelde limiet moet worden gehaald;
 - dat moet drie keer gebeuren;
 - het moet in een bepaald aantal sprongen gerealiseerd worden;
 - het moet binnen een bepaalde tijdsspanne worden verricht.
- e Welke van deze vier elementen heeft de grootste invloed op het al of niet uitzenden naar de Olympische Spelen? Motiveer je antwoord.

Opgave 7

Een schroefas van een schip verbindt de motor met de schroef. Deze as wordt op een of meer plaatsen ondersteund door een lager. Dit lager is een bronzen bus waarvan de binnendiameter zo goed mogelijk passend wordt gemaakt om de diameter van de as en waarin zich goed geoliede kogels bevinden die het draaien van de as mogelijk maken.

Er wordt gestreefd naar een binnendiameter van 15,0 mm van de bussen (en dus de lagers) en naar een diameter van 14,9 mm voor de assen. Na fabricage zijn zowel de binnendiameter van de lagers als de diameters van de assen normaal verdeeld:

- voor de assen geldt: $\mu = 14,9$ mm en $\sigma = 0,1$ mm;
- voor de lagers geldt: $\mu = 15,0$ mm en $\sigma = 0,1$ mm.

Assen met een diameter groter dan 15,1 mm en lagers met een binnendiameter kleiner dan 14,8 mm worden na een test afgekeurd.

- a Hoeveel procent van de assen heeft een diameter groter dan 15,15 mm?
- b Hoeveel procent van de lagers heeft een binnendiameter kleiner dan 14,85 mm?
- c Bereken de diameter waarvoor geldt: de kans op een as met die diameter is gelijk aan de kans op een lager met die binnendiameter.

Uit een grote hoeveelheid, die evenveel assen als lagers bevat, neem je willekeurig een as en een lager. Het verschil van de binnendiameter van de lager en de diameter van de as is een normaal verdeelde toevalsvariabele V . Als de lager niet om de as past is $V < 0$.

- d Welke waarden hebben het gemiddelde en de standaardafwijking van V ?
- e Hoe groot is de kans dat de lager niet om de as past?

Opgave 8

Een continue stochast X heeft als kansdichtheidsfunctie:

$$f(X) = a(75 - 3x^2) \text{ als } 0 \leq X \leq 5$$

$$f(X) = 0 \text{ als } X < 0 \vee X > 5$$

- a Bereken a .
- b Bereken de kans dat X inligt tussen 2 en 4.
- c Bereken k als $P(X \leq k) = 0,05$ in drie decimalen nauwkeurig.

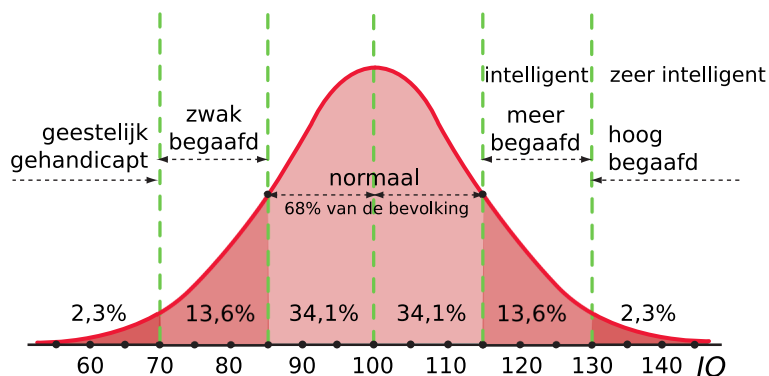


Figuur 6.2

Toepassen

Opgave 9: Intelligentiequotiënt

In het begin van de vorige eeuw werd er veel waarde gehecht aan het zogenaamde **intelligentiequotiënt (IQ)** van met name kinderen. In 1904 werd de psycholoog **Alfred Binet (1857–1911)** door de Franse overheid gevraagd een test te ontwerpen om ‘slimme’ van ‘domme’ kinderen te onderscheiden.



Figuur 6.3

Binet ontwierp een intelligentietest waarmee hij de intelligentieleeftijd van een kind vaststelde. Wanneer de intelligentieleeftijd wordt gedeeld door de werkelijke leeftijd (en met 100 vermenigvuldigd) dan krijg je het IQ. Dit IQ is normaal verdeeld met een gemiddelde dat op 100 is gesteld. Zo is de Stanford-Binet intelligentieschaal ontwikkeld. Bekijk de normale verdeling van de IQ's zoals Binet die aantrof.

- Welk gemiddelde en welke standaardafwijking heeft het IQ volgens de Stanford-Binet-schaal?
- Is het IQ afhankelijk van je leeftijd?
- Hoeveel procent van de mensen heeft een minder dan normale intelligentie?
- Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van boven de 140?
- Welk IQ heeft de meest intelligente 10% van de bevolking volgens de Stanford-Binet-schaal?

Examen

Opgave 10: Cakemeel

In een fabriek worden pakken met cakemeel gevuld. Op zo'n pak wordt vermeld: "Inhoud 500 gram". Veronderstel dat de inhoud per pak normaal verdeeld is met een gemiddelde van 500 g en met een standaarddeviatie van 4 g.

- Bereken in één decimaal nauwkeurig het percentage pakken dat minder dan 495 g cakemeel bevat.

Volgens de fabrikant betekent de vermelding "Inhoud 500 gram" dat slechts 25% van de pakken minder dan 500 g inhoud heeft. Als een pak een inhoud van minder dan 500 g heeft, spreekt hij van ondergewicht. Veronderstel bij de volgende drie vragen dat de fabrikant gelijk heeft en dat de standaarddeviatie van de normaal verdeelde inhoud 4 g bedraagt.

- b** Bereken in één decimaal nauwkeurig de gemiddelde inhoud per pak.

In een rek van een kruidenierswinkel staan 20 pakken cakemeel afkomstig van bovengenoemde fabriek. Daarvan hebben er 5 een ondergewicht. Een klant neemt aselekt 3 pakken uit het rek.

- c** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat geen van deze 3 pakken een ondergewicht heeft.
- d** Een banketbakker koopt 16 pakken rechtstreeks van de fabriek. Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat hij minder dan 8000 g cakemeel heeft gekocht.

(bron: examen wiskunde A vwo 1986, eerste tijdvak)

Opgave 11: Zeeppoeder

Een grootwinkelbedrijf heeft in zijn assortiment een eigen merk zeeppoeder. Het bedrijf beschikt over een vulmachine met een vulcapaciteit van 7536 kg per dag. Van de door de machine gevulde pakken is het gewicht normaal verdeeld, met een standaardafwijking van 40 g ongeacht de inhoud. De keuringsdienst van waren eist dat, op één decimaal nauwkeurig, slechts 4,0% van de in de handel gebrachte pakken minder mag bevatten dan op de pakken vermeld staat. Het bedrijf brengt zeeppoeder op de markt in kleine pakken, waarop vermeld staat dat zij 1 kg zeeppoeder bevatten. De vulmachine is ingesteld op 1070 g per pak.

- a** Onderzoek of aan de eis van de keuringsdienst van waren wordt voldaan.
- De bedrijfsleiding overweegt om naast de kleine pakken met opschrift 1 kg ook gezinspakken met opschrift 2,5 kg op de markt te brengen.
- b** Op hoeveel gram per pak moet de vulmachine ingesteld worden voor de gezinspakken om aan de eis van de keuringsdienst van waren te voldoen?
- c** Neem aan dat het aantal geproduceerde kleine pakken twee maal zo groot is als het aantal gezinspakken. Hoeveel gezinspakken kunnen er dan maximaal per dag worden geproduceerd?

(bron: examen wiskunde A vwo 1984, eerste tijdvak)

Opgave 12: Bewaking

Een zekere bank wordt 's nachts intensief bewaakt. Meerdere malen per nacht doet één van de bewakers een ronde door het gebouw. Op zo'n ronde moet hij zich op vijftien plaatsen melden door een speciale code in te toetsen in een meldkastje. De computer in de controlekamer registreert de tijdstippen waarop dit gebeurt. Ook schrijft de procedure voor dat de tijdstippen van vertrek en terugkomst worden geregistreerd. De kastjes zijn zodanig op de route geplaatst dat de zestien loopafstanden vrijwel even lang zijn. Uit overzichten over langere tijd blijkt dat, in het geval dat er niets bijzonders valt op te merken, de lengte van de tijdsintervallen tussen twee opeenvolgende meldingen van de bewaker vrijwel normaal verdeeld is met een gemiddelde van 3,6 minuten en een standaarddeviatie van 0,7 minuten. In het geval dat een melding langer dan vijf minuten uitblijft, wordt een bewaker in de controlekamer automatisch gewaarschuwd dat er mogelijk iets aan de hand is. De bewaker heeft zich zojuist gemeld bij het vijfde kastje.

- a Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de volgende melding langer dan 5,0 minuten uitblijft.
- b Veronderstel dat de lengtes van de 16 tijdsintervallen bij een ronde door het gebouw onder normale omstandigheden onafhankelijk van elkaar zijn. Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de totale tijd van een ronde door het gebouw langer is dan 60,0 minuten.

Tijdens zo'n ronde kijkt de bewaker wel enige keren in de gang naar de kluis, maar hij gaat er niet in. In de gang naar de kluis is namelijk een alarminstallatie aangebracht die in directe verbinding staat met de meldkamer op het hoofdbureau van de politie. In het plafond zijn (onzichtbaar) vijf roterende sensoren aangebracht. 's Nachts gaat het alarm automatisch af zodra minstens één van deze sensoren geactiveerd wordt. De sensoren werken geheel onafhankelijk van elkaar. Voor elke sensor afzonderlijk geldt dat de kans op alarm (de detectiekans) in het geval dat iemand 's nachts de sensor passeert, gelijk is aan 0,45.

- c Toon met een berekening aan dat de kans dat het alarm bij de politie afgaat als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, ongeveer gelijk is aan 95%.

De directie vindt deze kans te klein. Zij wil de sensorinstallatie zo laten verbeteren dat de kans op alarm als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, groter is dan 99,5%. Volgens de chef van de beveiliging kan dit op twee manieren bereikt worden:

- Het aantal sensoren met een detectiekans van 0,45 wordt uitgebreid; per bij te plaatsen sensor kost dit € 8000,00.
 - Een aantal van de aanwezige sensoren wordt omgeruild tegen een nieuw type met een detectiekans van 0,80; per in te ruilen sensor kost dit € 9000,00.
- d Bereken hoeveel men minimaal moet uitgeven om de sensorinstallatie zodanig te verbeteren dat aan de wens van de directie wordt voldaan.

(bron: examen wiskunde A vwo 1991, tweede tijdvak)

Opgave 13: Lengte van vrouwen

In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceert. Deze fabriek nam alleen personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm. De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen omdat ze niet aan deze eis voldeden. De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van deze aanstellingsvoorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van volksgezondheid. Neem aan dat de lengte van de Amerikaanse vrouwen in de betreffende leeftijdsgroep normaal verdeeld is met een gemiddelde μ en standaarddeviatie σ .

- a** Stel, uitgaande van het genoemde percentage, een verband op tussen μ en σ .

Neem aan dat $\mu = 160,4$ cm.

- b** Toon aan dat $\sigma \approx 7,2$ cm.

Stel je voor dat de groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 cm V wordt genoemd. Voor de mediaan (m) van de lengte van de vrouwen van V geldt dat 50% van de vrouwen uit V langer is dan m .

- c** Toon aan dat $m \approx 172,6$, uitgaande van $\mu = 160,4$ cm en $\sigma = 7,2$ cm.

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91% sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte van volwassenen was volgens hem in de periode 1948-1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselekt gekozen groep van 10.000 vrouwen in de leeftijd 18 tot 65 jaar werden 1243 vrouwen aangetroffen met een lengte van meer dan 172,6 cm.

- d** Als je aanneemt dat de standaardafwijking niet is veranderd, wat is dan de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens dit recente onderzoek?

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk wel was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen. Stel dat voor 1972 gold: $\mu = 164,0$ cm en $\sigma = 7,2$ cm.

- e** Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.

(bron: examen wiskunde A vwo 1990, eerste tijdvak)

2

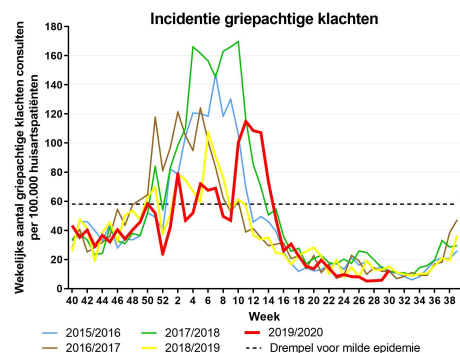
Hypothesen en verbanden

2.1	Het begrip toets	62
2.2	Binomiale toetsen	70
2.3	Normale toetsen	78
2.4	Bijzondere toetsen	87
2.5	Correlatie	97
2.6	Lineaire regressie	108
2.7	Totaalbeeld	116

2.1 Het begrip toets

Inleiding

Vaak worden uitspraken over de hele bevolking gedaan op basis van een steekproef. Dat brengt natuurlijk risico's met zich mee. Immers ook als (bijvoorbeeld) in werkelijkheid 15% van de bevolking het afgelopen jaar griep heeft gehad, kan in een steekproef door toevallige omstandigheden dit percentage wel eens anders liggen. Hoe kun je zo een steekproef gebruiken om te schatten hoeveel grieppatiënten er zijn geweest?



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip hypothese toetsen;
- de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese en kritiek gebied.

Voorkennis

- werken met binomiale en normale kansverdelingen;
- de wortel-n-wet toepassen.

Verkennen

Opgave V1

Uit onderzoek blijkt dat in een bepaalde week 3,9% van de Nederlandse bevolking griep heeft gehad.

In een klas van 25 leerlingen hebben diezelfde week 4 leerlingen de griep gehad, dat is maar liefst 16%.

- Hoe groot is de kans daarop als die 3,9% inderdaad voor de hele Nederlandse bevolking geldt?
- Hoeveel grieppatiënten verwacht je in deze klas als die 3,9% inderdaad geldt?
- Kun je nu zonder meer zeggen dat de 3,9% niet klopt als je meer dan het verwachte aantal grieppatiënten in de klas aantreft?
- Bij welk aantal grieplijders in deze klas heb je minder dan 5% kans dat je het percentage van 3,9% grieppatiënten ten onrechte verworpt?

Uitleg

Op een consultatiebureau blijken de laatste tijd veel meisjes te zijn geboren: 48 van de 80 laatst geboren kinderen zijn meisjes. Dat is 60% van het totaal.

Is dit toeval of is de kans op de geboorte van een meisje inderdaad groter dan op die van een jongen?

Om te onderzoeken hoe dit zit kun je een nieuwe steekproef doen: je vraagt bijvoorbeeld een ander consultatiebureau hoeveel meisjes er bij de 100 laatstgeborenen zijn. Je vergelijkt dan twee hypothesen:

- de nulhypothese H_0 : de kans op een meisje is 0,5
- de alternatieve hypothese H_1 : de kans op een meisje is 0,6

Je moet wel vooraf afspreken vanaf welk aantal meisjes bij de 100 laatstgeborenen je welke hypothese accepteert en welke je verworpt: bij 50 of minder meisjes accepteer je H_0 en verwerp je H_1 , bij 60 of meer accepteer je H_1 en verwerp je H_0 . Maar hoe zit het daar tussenin? Er bestaat altijd een kans dat je een hypothese ten onrechte verworpt.

Laat X het aantal meisjes bij de 100 laatstgeborenen zijn. X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,5$ (als H_0 geldt) of $p = 0,6$ (als H_1 geldt).

Neem bijvoorbeeld aan dat je H_0 verworpt bij 55 meisjes of meer, dan is de kans dat je dit ten onrechte doet: $P(X \geq 55 | n = 100 \text{ en } p = 0,5) \approx 0,1841$.

Opgave 1

In de **Uitleg** gaat het om de geboorte van meisjes. Neem eens aan dat de kans op de geboorte van een meisje echt 0,5 is. Je bekijkt een steekproef van 100 baby's.

- Bereken de kans dat daar dan ook precies 50 meisjes bij zijn.
- Hoe groot is de kans dat er geen 50 meisjes bij zijn?
- Welke van beide kansen is het grootst? Is dat in strijd met een kans van 0,5 op de geboorte van een meisje?

Opgave 2

Je zag in de voorgaande opgave dat de kans op precies 50 meisjes in een steekproef van 100 pasgeborenen nog niet zo groot is. En dat terwijl je uitging van een kans van 50% op de geboorte van een meisje.

- Maak een kansverdeling voor het aantal meisjes in een steekproef van 100 bij een geboortekans van 0,5 voor een meisje.
Je ziet dat de kans dat er 51 meisjes in de steekproef voorkomen kleiner is dan de kans dat dit er 50 zijn. Toch is die kans niet zoveel kleiner dat je in zo'n geval gaat twifelen aan de kans van 0,5.
- Waarom ga je bij 60 meisjes waarschijnlijk wel twifelen?
- Bekijk opnieuw de kansverdeling uitgaande van een geboortekans van 0,5 voor een meisje. Bij welke aantallen meisjes in de steekproef is de kans daarop minder dan 1%?



Figuur 1.2

- d Bij welke aantallen ga je twijfelen aan de geboortekans van 0,5 in de steekproef van 100?

Opgave 3

In de **Uitleg** is sprake van een geval waarin het aantal geboren meisjes 60% van het totaal is. Ga uit van de steekproef van 100 pasgeborenen.

- a Waarom is de nulhypothese $p = 0,5$ als p de kans is dat een pasgeborene een meisjes is?
- b Maak uitgaande van deze nulhypothese een tabel van de kansen dat H_0 ten onrechte wordt verworpen.
- c Maak uitgaande van de alternatieve hypothese een tabel van de kansen dat H_1 ten onrechte wordt verworpen.
- d Voor welk aantal meisjes onder de pasgeborenen is de som van de kansen uit a en b het kleinst?
- e Bij welk aantal meisjes in de steekproef zul je toch zeggen dat de kans dat een pasgeborene een meisje is 50% is?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **hypothese** is in de statistiek een vermoeden over een eigenschap van een populatie:

- de **nulhypothese** H_0 is de gangbare opvatting (bijvoorbeeld op grond van voorgaand onderzoek)
- de **alternatieve hypothese** H_1 is een uitspraak die de nulhypothese bestrijdt

Bij **hypothesen toetsen** gaat het erom door middel van een aslecte, representatieve steekproef uit de populatie te beslissen welke van beide hypothesen als waar kan worden aangemerkt: H_0 wordt verworpen of wordt niet verworpen. Je moet wel vooraf afspreken bij welke waarden je H_0 accepteert en bij welke je H_0 verworpt, dit noem je het **beslissingsvoorschrift** van de toets.

De waarden waarvoor je de nulhypothese verworpt vormen het **kritieke gebied** van de toets.

Er bestaat altijd een kans dat je H_0 **ten onrechte** verworpt.

Dat betekent: je verworpt H_0 terwijl toch H_0 eigenlijk waar is (als je maar een betere, grotere steekproef had getrokken). Dit heet een **fout van de eerste soort**.

	H_0 accepteren	H_0 verworpen
H_0 is waar	correct	fout van de eerste soort
H_1 is waar	fout van de tweede soort	correct

Tabel 1.1

Voorbeeld 1

Op een consulatiebureau blijken de laatste tijd veel meisjes te zijn geboren: 48 van de 80 laatst geboren kinderen zijn meisjes. Dat is 60% van het totaal.

Toets met behulp van een steekproef van 100 of de kans op de geboorte van een meisje inderdaad groter is dan op die van een jongen.

Antwoord

Je vergelijkt $H_0: p = 0,5$ met $H_1: p = 0,6$.

Vanaf welk aantal meisjes in de steekproef van 100 verwerp je H_0 ?

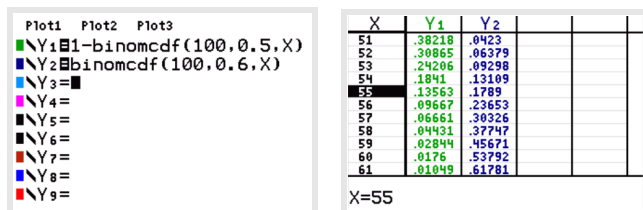
Er bestaat altijd een kans dat je H_0 ten onrechte verworpt of ten onrechte accepteert.

Laat X het aantal meisjes in de steekproef zijn. X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,5$ (als H_0 geldt) of $p = 0,6$ (als H_1 geldt).

Als je H_0 verworpt bij meer dan g meisjes, dan is de kans dat je dit ten onrechte doet: $P(X > g | n = 100 \text{ en } p = 0,5)$.

Als je H_0 accepteert bij g meisjes of minder, dan is de kans dat je dit ten onrechte doet: $P(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0,6)$.

Je ziet hier een lijst van dergelijke kansen.



Figuur 1.4

Bij $g = 55$ zijn beide kansen samen het kleinst.

Je zou als kritieke gebied kunnen kiezen: $g > 55$.

Opgave 4

Als het goed is heb je in **Opgave 3** het probleem dat in **Voorbeeld 1** wordt besproken al zelf uitgevoerd.

- Leg nog eens uit waarom de kans dat je ten onrechte H_0 verworpt gelijk is aan $P(X > g | n = 100 \text{ en } p = 0,5)$. Is dit een fout van de eerste of van de tweede soort?
- Leg nog eens uit waarom de kans dat je ten onrechte H_0 accepteert gelijk is aan $P(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0,6)$. Is dit een fout van de eerste of van de tweede soort?
- Wat is nu je conclusie als je in de steekproef 55 meisjes en dus 45 jongetjes aantreft?

Opgave 5

Je kunt in **Voorbeeld 1** ook $H_0: p = 0,5$ vergelijken met $H_1: p > 0,5$.

- Waarom kun je nu niet zo maar vaststellen bij welk aantal meisjes in de steekproef van 100 je H_0 verwerpt?
- Stel je verwerpt H_0 als het aantal meisjes groter is dan 55. Hoe groot is dan de kans dat je dit ten onrechte doet?



Figuur 1.3

- c Maak een tabel van dergelijke kansen voor $g = 55$ tot en met $g = 65$.
- d Vanaf welke waarde van g is de bedoelde kans kleiner dan 5%? Wat is dan het kritieke gebied van de toets?
- e Vanaf welke waarde van g is de bedoelde kans kleiner dan 1%? Wat is dan het kritieke gebied van de toets?

Voorbeeld 2

De inhoud van een fles cola is ongeveer 1,5 L.

Omdat de fabrikant volgens Europese richtlijnen niet teveel klanten mag teleurstellen moet hij zijn flessen met een volume V dat normaal is verdeeld met gemiddeld 1530 mL en een standaardafwijking van 18 mL vullen. Nu bevat minder dan 5% van zijn flessen te weinig cola.

Hij controleert regelmatig de afstelling van zijn vulmachine door in een steekproef van 25 flessen het gemiddelde volume te meten. Hij besluit de machine bij te stellen als hij minder dan 1525 of meer dan 1535 mL vindt. Hoe groot is de kans dat hij dit ten onrechte doet?

Antwoord

In een steekproef van 25 flessen moet - als de vulmachine goed is afgesteld - volgens de $\sqrt{n}$ -wet het vulvolume $\bar{V}$ normaal zijn verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 1530$ mL en een standaardafwijking van $\sigma = \frac{18}{\sqrt{25}} = 3,6$ mL.

Je toetst $H_0: \mu = 1530$ tegen $H_1: \mu \neq 1530$.

Het kritieke gebied is $\bar{V} < 1525$ of $\bar{V} > 1535$.

De kans dat H_0 ten onrechte wordt verworpen is:

$P(\bar{V} < 1525 \vee \bar{V} > 1535 | \mu = 1530 \text{ en } \sigma = 3,6) \approx 0,1649$.

Opgave 6

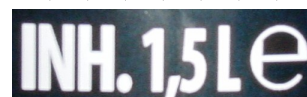
In **Voorbeeld 2** wordt het afstellen van een vulmachine bekeken.

- a Ga na, dat inderdaad minder dan 5% van de flessen te weinig cola bevatten als de afstelling van de machine klopt.
- b Waarom zal de fabrikant de afstelling veranderen als hij te weinig en als hij te veel cola in zijn flessen stopt?
- c Reken de kans dat hij ten onrechte besluit de machine bij te stellen nog even na. Is dit een fout van de eerste of de tweede soort?
- d De kans bedoeld bij c is aan de hoge kant. Wat moet de fabrikant met het kritieke gebied doen om die kans kleiner te maken?

Opgave 7

In beide voorbeelden is er sprake van de kans dat de nulhypothese ten onrechte wordt verworpen.

- a Waarom kun je die kans niet gewoon 0 maken?
- b Waarom zou je deze kans een overschrijdingskans kunnen noemen?



Figuur 1.5

Verwerken

Opgave 8

Er wordt onderzocht of een inpakmachine voor rollen koekjes goed is afgesteld. Er zouden 20 koekjes in een rol moeten gaan.

Noteer de variabele, nulhypothese en alternatieve hypothese van de toets.

Opgave 9

Beschrijf bij elke van de onderzoeken hoe een bijbehorende toets er uit zal zien.

- a Een onderzoek naar de bewering van een politicus dat meer dan 50% van de kiezers op hem gaat stemmen.
- b Een consumentenbond doet onderzoek naar de levensduur van lampen.
- c De kwaliteitsafdeling van een fabriek onderzoekt de hoeveelheid shampoo in flessen.

Opgave 10

Leraar A denkt uit jarenlange ervaring dat slechts 60% van de leerlingen zich ook echt aan zijn planning houdt. Leraar B vermoedt dat dit toch wel bij 75% van de leerlingen het geval is. Ze besluiten in hun klassen een contrôle te houden. Het gaat daarbij om 80 leerlingen.

- a Hoe luiden de nulhypothese en de alternatieve hypothese?
Ze spreken een grens af van 54: bij meer dan 54 leerlingen die 'bij' zijn krijgt B gelijk, anders leraar A.
- b Hoe groot is de kans dat B ten onrechte ongelijk krijgt?
- c En hoe groot is de kans dat A ten onrechte ongelijk krijgt?
- d Bepaal de grens g zo, dat de kans op deze fouten voor beide docenten samen zo klein mogelijk is.

Opgave 11

In een bepaald gebied lijdt volgens de krant 15% van de mensen aan griep. De afdelingsleider van de bovenbouw van de enige havo/vwo school in dat gebied constateert dat er op datzelfde moment van zijn 350 leerlingen 45 ziek zijn. Dat is minder dan 15%.

- a Mag zij nu concluderen dat de krant overdrijft? Licht je antwoord toe.

Ze besluit om de sectie wiskunde te vragen om met een groep leerlingen dit ziektepercentage te onderzoeken. Het groepje leerlingen gaat in een aselechte steekproef van 500 personen navragen wie er op de dag dat deze krant verscheen de griep hadden.
- b Welke nulhypothese en welke alternatieve hypothese gaan ze hanteren?
- c Ze kiezen voor hun kritieke gebied 70 of minder zieken in de steekproef. Hoe groot is dan de kans dat ze ten onrechte concluderen dat de krant overdrijft?

- d Hoe kunnen ze die kans verkleinen?
- e Waarom heeft het weinig zin om het kritieke gebied zo te maken dat die kans afgerond op vier decimalen 0 is?

Opgave 12

De gemiddelde lengte van vrouwen is bij benadering normaal verdeeld. In 1999 was de gemiddelde lengte van de vrouwen in Nederland 167 cm met een standaardafwijking van 6,5 cm. Het is niet ondenkbaar dat de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw sinds die tijd groter is geworden. Een onderzoeksbureau onderzoekt dit door middel van een aselechte steekproef van 100 vrouwen in Nederland. Vooraf stellen de onderzoekers dat ze zullen concluderen dat de Nederlandse vrouw langer is geworden als de gemiddelde lengte in die steekproef 169 cm of meer is.

- a Welke nulhypothese hanteert het bureau? En hoe luidt de alternatieve hypothese?
- b Wat is het kritieke gebied van deze toets? Waarom moet dit vooraf worden vastgesteld?
- c Hoe groot is de kans dat men ten onrechte concludeert dat de Nederlandse vrouw langer is geworden?
- d Hoe kan die kans worden verkleind door het kritieke gebied aan te passen?
- e Is de grootte van de steekproef ook van invloed op die kans?

Toepassen

Opgave 13: Suikerziekte

Een onderzoeker voert een hypothesetoets uit naar de toename van suikerziekte onder Nederlanders. De gegevens van het onderzoek zijn:

X is het aantal Nederlanders met suikerziekte in een steekproef.

p is het deel van de mensen uit de steekproef met suikerziekte.

$$H_0 : p = \frac{1}{15}$$

$$H_1 : p > \frac{1}{15}$$

De steekproefomvang is 1000.

Als het aantal Nederlanders met suikerziekte blijkt te zijn gestegen, wil de onderzoeker heel zeker zijn over deze uitkomst. Hij wil dus de kans dat H_1 wordt aangenomen terwijl H_0 waar is, klein maken.

- a Welk kritieke gebied moet hij kiezen om ervoor te zorgen dat deze kans kleiner is dan 10%?
- b Welk kritieke gebied moet hij kiezen om ervoor te zorgen dat deze kans kleiner is dan 5%?
- c Welk kritieke gebied moet hij kiezen om ervoor te zorgen dat deze kans kleiner is dan 1%?

Opgave 14: Dekking van verf

Een fabrikant van verf stelt dat zijn witte verf een oppervlakte dekt van 15 m^2 per liter. Omdat dit een goede dekking is, besluit een schildersbedrijf met deze verf te werken. Na een tijdje gelooft het management van het schildersbedrijf echter dat de voorgestelde dekking van 15 m^2 per liter te hoog is. Er lijkt namelijk meer verf nodig te zijn dan berekend: de ingekochte emmers zijn sneller op dan verwacht.

Het besluit is om de dekking van de verf te toetsen. Het besluit wordt: bij een dekking van minder dan $13,5 \text{ m}^2$ per liter is deze inderdaad niet goed genoeg, en wordt een andere verfsoort gebruikt.

- a Noteer de variabele(n), de nulhypothese, de alternatieve hypothese en het kritieke gebied.
- b Het management lijkt voorzichtig met zijn keuze. Noem redenen waarom het bedrijf niet direct overstapt op nieuwe verf.

Testen

Opgave 15

Iemand beweert dat 10% van het niet-brildragende deel van de Nederlandse bevolking contactlenzen draagt. Maar hij raakt na een paar keer vragen aan het twijfelen, wellicht is dat percentage toch hoger. Hij besluit om zijn mening te toetsen in een representatieve steekproef van 50 personen.

- a Hoe luiden de nulhypothese en de alternatieve hypothese?
- b Als hij bij 10 of meer personen in de steekproef met contactlenzen zijn oorspronkelijke mening verwerpt, hoe groot is dan de kans dat hij dit ten onrechte doet?
- c Als hij bij 100 of meer personen met contactlenzen in een steekproef van 500 zijn oorspronkelijke mening verwerpt, hoe groot is dan de kans dat hij dit ten onrechte doet?

Opgave 16

Het vulgewicht van kilopakken suiker van merk A is volgens de fabrikant normaal verdeeld met een gemiddelde van 1005 gram en een standaardafwijking van 3 gram. In een restaurant worden 10 van die pakken suiker gekocht en de restauranthouder ontdekt dat in die 10 pakken gemiddeld maar 998 gram suiker zit.

- a Mag de restauranthouder op grond van deze steekproef zonder meer aannemen dat de fabrikant zijn vulmachine moet bijstellen?
- b Hoe groot is de kans dat de restauranthouder ten onrechte reclameert?
- c De fabrikant controleert zijn vulmachine door 100 pakken te wegen. Hij vindt een gemiddelde gewicht van 1002 gram. Omdat dit aan de lage kant is besluit hij zijn vulmachine bij te stellen. Hoe groot is de kans dat hij dit terecht doet?

2.2 Binomiale toetsen

Inleiding

Meestal ga je er van uit dat bij het verwekken van een kind de kans op een jongen even groot is als die op een meisje: de kans op een meisje is 50% is je nulhypothese. Als bij een zekere Nederlandse gemeente in een bepaald jaar 60% van de geboren kinderen een meisje is dan denk je niet meteen dat de kans op een meisje nu wel 60% moet zijn geworden, maar je vraagt je wel af of de kans op een meisje in Nederland soms meer dan 50% is geworden. Zo'n hypothese kun je heel goed toetsen bijvoorbeeld door te kijken naar de geboren kinderen van het volgende jaar. Maar wanneer zeg je nu dat de kans op een meisje niet langer 50% is?

Je leert in dit onderwerp

- hypothesen toetsen met behulp van de binomiale kansverdeling;
- het begrip significantieniveau en bij een gegeven significantieniveau een binomiale toets uitvoeren.

Voorkennis

- werken met binomiale kansverdelingen;
- de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese en kritiek gebied.

Verkennen

Opgave V1

In 2016 was in de Nederlandse gemeente A 60% van de geboren kinderen een meisje. Je vraagt je af of de kans op een meisje in Nederland soms meer dan 50% is geworden. Je neemt in 2017 een steekproef van 650 in dat jaar geboren en door heel Nederland en vraagt of het een jongen dan wel een meisje betreft.

- Wat is de nulhypothese en wat de alternatieve hypothese in dit geval?
- Stel je voor dat er in je steekproef 348 meisjes voorkomen. Hoe groot is nu de kans dat de nulhypothese ten onrechte wordt verworpen?
- Stel je eens voor dat je de kans dat de nulhypothese ten onrechte wordt verworpen maximaal 1% wilt hebben. Wat wordt dan het kritieke gebied van de toets?

Uitleg

In 2011 was in de Nederlandse gemeente A 60% van de geboren kinderen een meisje. Je vraagt je af of de kans op een meisje in Nederland soms meer dan 50% is geworden. Je neemt in 2018 een steekproef van 650 in dat jaar geboren en door heel Nederland en vraagt of het een jongen dan wel een meisje betreft.

Je wilt nu vooraf vaststellen bij welk aantal meisjes M in deze steekproef je kunt zeggen dat de kans op een meisje inderdaad meer dan 50% is. M is een binomiale stochast.

Je toetst $H_0: p = 0,5$ tegen $H_1: p > 0,5$.

Je gebruikt een steekproef van grootte $n = 650$.

Bij zo'n toets neem je als uitgangspunt het vermijden van een fout van de eerste soort: de kans dat je H_0 ten onrechte verworpt moet kleiner zijn dan (bijvoorbeeld) 5%. Deze 5% heet het significantieniveau of de onbetrouwbaarheidsdrempel van de toets en wordt aangegeven met α . Je spreekt dus VOORAF af dat (bijvoorbeeld) $\alpha = 0,05$.

Je kritieke gebied is $M > g$. Dan moet:

$$P(H_0 \text{ verwerpen} | H_0 \text{ is waar}) = P(M > g | p = 0,5 \text{ en } n = 650) \leq 0,05$$

Dus moet $P(M \leq g | p = 0,5 \text{ en } n = 650) \leq 0,95$.

Je grafische rekenmachine geeft: $g = 346$.

Als je dus meer dan 346 meisjes in je steekproef aantreft mag je met een significantieniveau van 5% besluiten dat de kans op een meisje meer dan 50% is.

Opgave 1

In de **Uitleg** gaat het weer om de hypothese dat de kans op de geboorte van een meisje 50% is. Het significantieniveau van de toets is 5%.

- Leg uit wat dit significantieniveau precies betekent.
- Er is hier sprake van een enkelzijdig binomiale toets. Kun je die naam verklaren?
- Reken zelf het kritieke gebied van deze toets na.
- Waarom kun je ook zeggen dat de beschreven toets een betrouwbaarheid heeft van 95%?

Opgave 2

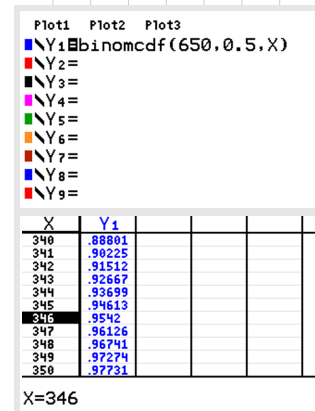
Bekijk nog eens de toets in de **Uitleg**.

- Voer deze toets nog eens uit, maar nu met een significantieniveau van 1%.
- Welke invloed heeft het verkleinen van het significantieniveau op het kritieke gebied?
- Waarom wordt het significantieniveau niet nog veel kleiner genomen, zeg 0,1%?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Stel je voor dat voor een binomiale stochast X de gangbare opvatting is dat $p = p_0$ de kans is dat een element van de steekproef een bepaalde eigenschap heeft. Iemand bestrijdt deze opvatting en beweert dat $p > p_0$.



Figuur 2.1

Je toetst $H_0: p = p_0$ tegen $H_1: p > p_0$ met behulp van een steekproef van grootte N .

Het **kritieke gebied** (de waarden in de steekproef waarbij je H_0 verworpt) van de toets stel je vast door te eisen dat de kans, dat je H_0 verworpt terwijl hij toch waar is, kleiner blijft dan een bepaalde waarde die je vooraf kiest. Die waarde noem je het **significantieniveau** of de **onbetrouwbaarheidsdrempel** van de toets en hij wordt aangegeven met α . Je spreekt dus VOORAF af dat (bijvoorbeeld) $\alpha = 0,05$. Dit betekent:

$$P(H_0 \text{ verwerpen} | H_0 \text{ is waar}) = P(X > g | p = p_0 \text{ en } n = N) \leq 0,05$$

Op grond hiervan bereken je g en zo stel je het kritieke gebied van de toets vast.

Dit is een **rechtszijdige toets** omdat $H_1: p > p_0$.

Zo bestaat er ook een **linkszijdige toets** met $H_1: p < p_0$.

En een **tweezijdige toets** met $H_1: p \neq p_0$.

In dit laatste geval trek je aan beide zijden van het op grond van H_0 verwachte aantal in de steekproef een grens. De onbetrouwbaarheidsdrempel α verdeel je dan in twee gelijke delen voor elk deel van het kritieke gebied.

Voorbeeld 1

Voor een bepaalde toets scoort gemiddeld 72% van de kandidaten een voldoende. Deze keer hebben 16 van de 30 kandidaten een voldoende gehaald, duidelijk minder dan 72%. Wijkt dit resultaat significant af van het verwachte resultaat als je een significantieniveau van 10% hanteert?

Antwoord

Je kunt deze vraag vertalen naar een linkszijdige binomiale toets:

- $H_0: p = 0,72$
- $H_1: p < 0,72$

De steekproefgrootte is 30 en stochast X is het aantal kandidaten met een voldoende in deze steekproef. Het significantieniveau is $\alpha = 0,10$.

Je bepaalt het kritieke gebied uit: $P(X \leq g | n = 30 \text{ en } p = 0,72) \leq 0,10$.

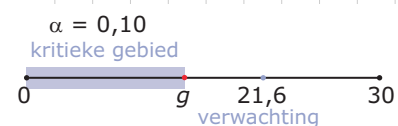
Dit levert op: $g = 17$ en dus wordt het kritieke gebied $X \leq 17$.

Het resultaat van 16 voldoende's ligt binnen het kritieke gebied, dus inderdaad wijkt het resultaat significant af van het verwachte resultaat.

Opgave 3

Bestudeer **Voorbeeld 1**.

- Voer de beschreven toets zelf uit.
- Voer de toets nog eens uit, maar nu met een betrouwbaarheid van 95%. Is er nog steeds sprake van een significante afwijking?



Figuur 2.2

Voorbeeld 2

Om te bepalen of een dobbelsteen eerlijk is, kun je bijvoorbeeld 50 keer met deze dobbelsteen werpen en het aantal keren 'zes ogen' tellen. Bij hoeveel keer 'zes ogen' mag je dan besluiten dat hij niet eerlijk is? Neem een significantieniveau van 1%.

Antwoord

Je kunt deze vraag vertalen naar een tweezijdige binomiale toets:

- $H_0 : p = \frac{1}{6}$
- $H_1 : p \neq \frac{1}{6}$

De steekproefgrootte is 50 en de stochast X is het aantal keren 'zes ogen' in deze steekproef. Het significantieniveau is $\alpha = 0,01$.

Nu moet $P(X \leq g_1 \vee X > g_2 | n = 50 \text{ en } p = \frac{1}{6}) \leq 0,01$.

Je bepaalt de twee grenzen daarom uit:

- $P(X \leq g_1 | n = 50 \text{ en } p = \frac{1}{6}) \leq 0,005$
- $P(X > g_2 | n = 50 \text{ en } p = \frac{1}{6}) \leq 0,005$

Ga na, dat het kritieke gebied wordt: $X \leq 1 \vee X \geq 16$.

Bij deze aantallen zessen mag je aannemen dat de dobbelsteen niet eerlijk is.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je bij een tweezijdige toets te werk kunt gaan.

- Waarom is dit een tweezijdige toets? Wat gebeurt er met de onbetrouwbaarheidsdrempel α ?
- Voer de beschreven toets zelf uit, maar nu met een significantieniveau van 5%.

Voorbeeld 3

Voor een bepaalde toets scoort gemiddeld 72% van de kandidaten een voldoende. Deze keer hebben 16 van de 30 kandidaten een voldoende gehaald, duidelijk minder dan 72%. Wijkt dit resultaat significant af van het verwachte resultaat als je een significantieniveau van 10% hanteert?

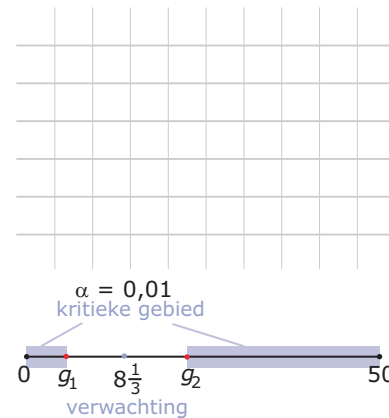
Antwoord

Dit is hetzelfde probleem als dat in **Voorbeeld 1**. Je kunt het echter ook op een andere manier oplossen. Daarbij maak je meteen gebruik van het testresultaat: 16 van de 30 kandidaten haalden een voldoende.

Als 16 in het kritieke gebied van de toets ligt, dan moet dit gebied minstens $X \leq 16$ zijn (wellicht groter). En dan moet

$P(X \leq 16 | n = 30 \text{ en } p = 0,72) \leq 0,10$.

Deze **overschrijdingskans** is 0,0225 en dus inderdaad kleiner dan $\alpha = 0,10$.



Figuur 2.3



Figuur 2.4

Je weet nu zeker dat 16 in het kritieke gebied van de toets ligt, ook al heb je de grens ervan niet vastgesteld. De nulhypothese wordt verworpen, het resultaat wijkt significant af.

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** wordt de toets van **Voorbeeld 1** opnieuw bekeken.

- Waarom is het in dit geval niet nodig om het kritieke gebied vast te stellen?
- Wat betekent het als de overschrijdingskans kleiner is dan de onbetrouwbaarheidsdrempel?
- Wat betekent het als de overschrijdingskans groter is dan de onbetrouwbaarheidsdrempel?

Opgave 6

Je toetst $H_0 : p = 0,35$ tegen $H_1 : p > 0,35$ met een significantieniveau van 5%.

- Bepaal het kritieke gebied bij een steekproef met grootte 100.
- Doe hetzelfde bij een steekproef van grootte 1000.
- En nog eens bij een steekproef met grootte 10.000.
- Welke invloed heeft de grootte van de steekproef op de grens van het kritieke gebied? Wat heeft dit te maken met de standaardafwijking van de gebruikte binomiale verdeling?
- Waarom neemt men niet altijd een zo groot mogelijke steekproef?

Opgave 7

Je toetst $H_0 : p = 0,75$ tegen $H_1 : p \neq 0,75$ met een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha = 0,05$.

- Bepaal het kritieke gebied als je een representatieve steekproef van 100 gebruikt.
- Stel je voor dat je vooraf hebt bepaald dat in de steekproef 80 elementen de betreffende eigenschap hebben. Leg uit waarom in dat geval het berekenen van het kritieke gebied niet nodig is. Laat zien hoe je in zo'n geval sneller te werk kunt gaan.

Verwerken

Opgave 8

Op een grote school slaagt elk jaar ongeveer 96% van de eindexamenkandidaten. Het afgelopen jaar viel het resultaat behoorlijk tegen. Slechts 92 van de 107 kandidaten haalden het eindexamen. Op andere scholen in de buurt waren er geen grote veranderingen ten opzichte van de slagingspercentages van de voorafgaande jaren. Er wordt geroepen: "De kwaliteit van de school holt achteruit". Een van de geslaagden is het daarmee niet eens: "Nee hoor; dat is helemaal niet waar. Dat kan gewoon eens een jaar voorkomen. Die kans bestaat nou eenmaal".

- De uitspraak van deze geslaagde kun je toetsen. Hoe luiden de nulhypothese en de alternatieve hypothese?

- b** Bereken de kans op 92 of minder geslaagden als de nulhypothese waar is.
- c** Krijgt de geslaagde leerling gelijk als het significantieniveau 0,01 is?

Opgave 9

Het hoofd van de personeelsadministratie van een groot bedrijf heeft het idee dat het ziekteverzuim op maandag veel groter is dan op de andere dagen in de week. Om dit te onderzoeken vraagt hij het aantal ziekteverzuimdagen per werkdag op in een bepaalde maand. In deze tabel zie je de resultaten.

dag	ma	di	wo	do	vr
aantal zieken	95	61	58	63	11

Tabel 2.1

- a** Hoeveel zieken zou je op maandag mogen verwachten als het ziekteverzuim onafhankelijk is van de weekdag?
- Het vermoeden van de bedrijfsleider kun je met deze gegevens toetsen. Als nulhypothese kun je nemen: $H_0 : p = 0,2$.
- b** Formuleer de alternatieve hypothese.
- c** Krijgt de bedrijfsleider gelijk? Neem een significantieniveau van $\alpha = 0,05$.

Opgave 10

Bij een loterij die elke week plaatsvindt, moet je op een formulier met daarop de getallen 1 tot en met 19, drie getallen aankruisen. Nadat de inlevertijd is verstreken, worden aselekt drie getallen getrokken. Een deelnemer die op zijn lot tenminste twee van de drie getrokken getallen heeft aangekruist, krijgt een prijs.

- a** Toon aan dat, afgerond op twee decimalen, de kans op een prijs gelijk is aan 0,05.
- Iemand beweert dat zijn kans op een prijs groter is dan 0,05. Deze bewering wordt getoetst door gedurende honderd weken het aantal prijzen van deze persoon te noteren. Er wordt een significantieniveau van 1% gekozen.
- b** Hoeveel prijzen moet deze persoon in die honderd weken tenminste hebben gewonnen om hem gelijk te kunnen geven?

Opgave 11

Iemand wil de zuiverheid van een geldstuk controleren en besluit er 500 keer mee te werpen.

Bij welke aantallen 'kop' zal hij besluiten dat het geldstuk onzuiver is als hij een betrouwbaarheid van 90% hanteert?

Opgave 12

In 1998 zijn er in Nederland 179.568 baby's geboren, te weten 90.096 meisjes en 89.472 jongens. Met deze getallen kun je toetsen of toentertijd de kans op een meisje gelijk was aan de kans op een jongen.

De nulhypothese is dan weer: de kans op een meisje is 0,5.

- Neem aan dat het aantal meisjes binomiaal is verdeeld. Welke parameters heeft deze verdeling?
- Moet de nulhypothese verworpen of geaccepteerd worden als de onbetrouwbaarheidsdrempel 5% is?
- En als de toets een betrouwbaarheid van 99% moet hebben?

Toepassen

Opgave 13: Onderdelen produceren

In een fabriek wordt een cilindervormig onderdeelje voor machines gemaakt. Voor de diameter van dit onderdeel, D (in millimeter), geldt: D is normaal verdeeld met een gemiddelde van 10 millimeter en een standaardafwijking van 0,2 millimeter. De geproduceerde onderdelen worden als volgt gecontroleerd. Er wordt een steekproef genomen van de geproduceerde onderdelen met een omvang van 100. Deze onderdelen worden gepast in een rond gat met $D = 10,3$ millimeter. Het aantal niet-passende onderdelen wordt geteld. Ga uit van een significantie van 5%.

- Hoe groot is de kans dat een onderdeel niet in het gat past?
- Voer een hypothesetoets uit om te bepalen hoeveel niet-passende onderdelen er in de steekproef mogen zitten vóór men het productieproces gaat bijstellen.

Opgave 14: Fout van de tweede soort

Bij het toetsen van hypothesen kan er nog een andere fout optreden, namelijk dat de nulhypothese niet wordt verworpen, terwijl deze toch niet klopt. Deze fout heet 'fout van de tweede soort'. De kans op deze fout is alleen te berekenen als de waarde van p in de populatie bekend is. Maar dat is bijna nooit zo. Deze fout kan wel worden onderzocht.

Bekijk de volgende toets:

M is het aantal keren munt bij het werpen met een geldstuk, M is binomiaal verdeeld.

De indruk bestaat dat het geldstuk niet zuiver is. Er wordt een toets uitgevoerd met steekproefomvang 100, om te bepalen of het geldstuk zuiver is.

Er wordt een significantie van 5% gebruikt.

- Bepaal het kritieke gebied.
- Neem nu voor het kritieke gebied $M \geq 59$. Onderzoek de kans dat H_0 niet verworpen wordt, terwijl H_0 niet juist is, dus als $p > 0,5$. Doe dit door een tabel te maken waarin p loopt van 0,50 tot 0,60 met stapjes van 0,02 en bij deze waarden de gevraagde kans te berekenen.

- c Hoe kan deze foutkans worden verkleind?
- d Voor a en b nog een keer uit, maar nu met een steekproefomvang 1000. Vergelijk de beide uitkomsten.

Testen

Opgave 15

Op het instituut voor toepast psychologisch onderzoek onderzoekt men helderziendheid. Mensen die beweren helderziend te zijn, worden uitgenodigd voor het volgende experiment. De helderziende wordt opgesloten in een kamer. Hij krijgt een serie van drie zeer verschillende plaatjes. Op hetzelfde ogenblik ontvangt een ander persoon in dezelfde ruimte dezelfde drie plaatjes. Deze persoon krijgt de opdracht om zich vijf minuten lang op één van de drie plaatjes te concentreren. Na die vijf minuten moet de helderziende dan aangeven op welk plaatje de ander zich geconcentreerd heeft. De twee deelnemers kunnen elkaar niet zien. Ze hebben een kop-telefoon op waardoor ze steeds een nieuwe opdracht krijgen. Dit proces wordt in totaal 40 keer herhaald met steeds nieuwe series plaatjes. De nulhypothese die men wil toetsen luidt: de helderziende is niet helderziend. Dat kan men toetsen met behulp van het aantal keren dat de helderziende hetzelfde plaatje aangeeft als de ander. Als de nulhypothese waar is dan is 'het aantal keren hetzelfde plaatje' binomiaal verdeeld.

- a Welke parameters heeft deze binomiale verdeling?
- b Helderziende X geeft 17 keer het juiste plaatje aan. Bereken de kans dat dit gebeurt als de nulhypothese juist is.
- c Bereken de kans dat de nulhypothese ten onrechte verworpen wordt als er afgesproken wordt dat er sprake is van helderziendheid bij meer dan 20 juiste plaatjes.
- d Er wordt afgesproken dat het significantieniveau 0,05 is. Wordt helderziende Y helderziend verklaard als hij 18 plaatjes goed heeft?

Opgave 16

Een kweker wil onderzoeken of zijn kruisingsmethode als resultaat heeft dat 25% van de bessenstruiken gevoelig is voor meeldauw. Hij constateert dat van de 100 bessenstruiken er 33 last hebben van meeldauw.

Mag hij nu met een significantieniveau van 5% aannemen dat toch maar 25% gevoelig is voor meeldauw?

2.3 Normale toetsen

Inleiding

Het toetsen van hypothesen kun je ook doen als een stochast normaal is verdeeld.

een goed voorbeeld is de controle door de consumentenbond van het vulgewicht van kilopakken suiker. Ook daarbij speelt de significantie een grote rol. Maar bovendien wordt er vaak een steekproef getrokken met een bepaalde grootte n uit een normaal verdeelde populatie. En dan moet je met de wortel- n -wet rekening houden.

Je leert in dit onderwerp

- het gemiddelde μ van een normaal verdeelde stochast toetsen;
- de wortel- n -wet gebruiken bij een steekproef van grootte n .

Voorkennis

- werken met binomiale toetsen;
- werken met de normale verdeling en bijbehorende kansen berekenen;
- de wortel- n -wet gebruiken;
- de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese en beslissingsvoorschrift en significantieniveau gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: normale verdeling gewicht kilopakken suiker

Volgens de fabrikant is het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal verdeeld met $\mu(G) = 1002$ en $\sigma(G) = 3$.

Omdat de consumentenbond veel klachten heeft binnengekregen waarin wordt gemeld dat de pakken suiker van deze fabrikant te weinig suiker bevatten, wordt er door hen getwijfeld aan dit gemiddelde. De consumentenbond stelt dat $\mu(G) < 1002$.

Ze onderzoeken de bewering van de fabrikant door een pak suiker te wegen.

Ze vinden dat de fabrikant ongelijk heeft als dit pak suiker minder dan 998 gram weegt.

- Hoe groot is de kans dat men toevallig minder dan 998 gram suiker vindt?
- Wat zegt dit over de kans dat de consumentenbond een fout maakt? Hoe zou de consumentenbond dit resultaat kunnen verbeteren?



Figuur 3.1

Uitleg 1

Bekijk de applet: normale verdeling gewicht kilopakken suiker

Volgens de fabrikant is het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal verdeeld met $\mu(G) = 1002$ en $\sigma(G) = 3$. Omdat de consumentenbond veel klachten heeft binnengekregen waarin wordt gemeld dat de pakken suiker van deze fabrikant te weinig suiker bevatten, wordt er door hen getwijfeld aan dit gemiddelde. De consumentenbond stelt dat $\mu(G) < 1002$.

Ze onderzoeken de bewering van de fabrikant door een pak suiker te wegen.

Ze vinden dat de fabrikant ongelijk heeft als dit pak suiker minder dan 998 gram weegt. Dit is het beslissingsvoorschrift.

Dan bestaat de kans dat dit pak toevalligerwijs minder dan 998 gram weegt, terwijl toch de fabrikant gelijk heeft. De consumentenbond zou dan moeten beweren dat de fabrikant ongelijk heeft, terwijl dat niet waar is.

Ga na, dat die kans is: $P(G < 998 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = 3) \approx 0,091$.

Er is dus meer dan 9% kans dat de consumentenbond ten onrechte beweert dat de fabrikant ongelijk heeft.

De bewering van de fabrikant is de nulhypothese $H_0: \mu(G) = 1002$. De consumentenbond stelt als alternatieve hypothese $H_1: \mu(G) < 1002$.

De mogelijkheid dat dit pak toevalligerwijs minder dan 998 gram weegt, terwijl de fabrikant toch gelijk heeft, is een fout van de eerste soort. De kans op zo'n fout heet het significantieniveau van de toets. Die kans is hier $\alpha \approx 0,091$.

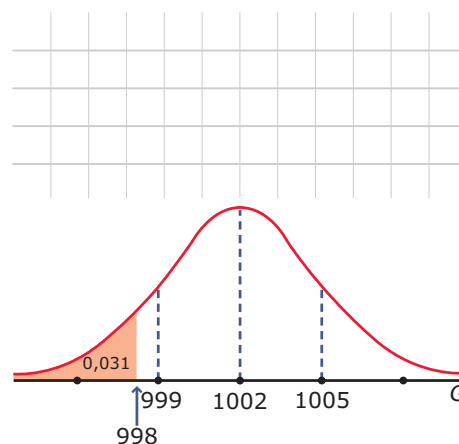
Meestal wordt geprobeerd om α kleiner te krijgen, want de consumentenbond doet niet graag foute uitspraken. Ze stellen dan voorafgaande aan de toets vast welke waarde van α nog acceptabel is en bepalen het bijbehorende beslissingsvoorschrift.

En natuurlijk nemen ze een grotere steekproef. Want dan geldt de $\sqrt{n}$ -wet...

Opgave 1

In **Uitleg 1** zie je hoe de consumentenbond het gewicht van kilopakken suiker controleert.

- Er is hier sprake van een enkelzijdige normale toets. Kun je die naam verklaren?
- Waarom voert de consumentenbond een enkelzijdige toets uit? Hoe zou dat met de fabrikant zelf zijn?
- Wat moet de conclusie zijn als de consumentenbond vooraf een significantieniveau van 5% wilde hanteren?
- Bij welk gewicht zou er dan sprake zijn van een significant verschil?



Figuur 3.2

Opgave 2

Gebruik de gegevens van **Uitleg 1**.

- Stel dat de consumentenorganisatie vindt dat de fabrikant ongelijk heeft als het gewogen pak suiker minder dan 997 gram weegt. Wat is nu in drie decimalen de kans op onterecht verwerpen van H_0 ?
- Welk bezwaar zit er aan deze toets?

Uitleg 2

Je gaat nu het gemiddelde gewicht van de pakken suiker toetsen door een steekproef van 100 pakken.

De fabrikant beweert dat het gewicht G (gram) van zijn pakken suiker een gemiddelde $\mu(G) = 1002$ en een standaardafwijking $\sigma(G) = 3$ hebben.

Het gewicht G van die pakken suiker hoeft niet normaal verdeeld te zijn.

Toch is het gemiddelde gewicht $\bar{G}$ van de pakken suiker uit deze steekproef automatisch normaal verdeeld. Want uit de centrale limietstelling volgt: als er veel steekproeven genomen worden, zijn de gemiddelde steekproefgewichten normaal verdeeld. Dat geldt ook voor de gemiddelden van steekproeven van 100.

Om te kunnen toetsen moeten het gemiddelde van de steekproef $\mu(\bar{G})$ en de standaardafwijking van dit gemiddelde $\sigma(\bar{G})$ bekend zijn.

- $\mu(\bar{G})$ volgt uit de steekproefgegevens: $\mu(\bar{G}) = \mu(G)$
- $\sigma(\bar{G})$ volgt uit de wortel-n-wet: $\sigma(\bar{G}) = \frac{\sigma(G)}{\sqrt{n}}$

Bij gebruik van het kritieke gebied uit het eerdere voorbeeld volgt nu de overschrijdingskans:

$$P(\bar{G} < 998 | \mu(\bar{G}) = 1002 \text{ en } \sigma(\bar{G}) = \frac{3}{\sqrt{100}}) \approx 0$$

De kans dat er een foute conclusie wordt getrokken is dus veel kleiner geworden.

Opgave 3

Gebruik de gegevens in **Uitleg 1**. Nu neemt de consumentenbond een steekproef van 100 pakken.

- Wat betekent dit voor de toets?
- Als in die steekproef het gemiddelde gewicht 999 gram zou zijn, zou de consumentenbond dan met een betrouwbaarheid van 99% gelijk krijgen?

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**. Neem nu aan de consumentenorganisatie een steekproef van 8 pakken hanteert.

- Geef de waarden van $\mu(\bar{G})$ en $\sigma(\bar{G})$.
- Stel dat in de steekproef het gemiddelde gewicht minder dan 1000 gram is. Wat is de conclusie als de consumentenorganisatie een significantieniveau van 1% hanteert?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Iemand beweert: stochast X is normaal verdeeld met $\mu(X) = \mu$ en $\sigma(X) = \sigma$.

Iemand anders vertrouwt het gemiddelde niet en vermoedt (bijvoorbeeld): $\mu(X) \neq \mu$.

Dit wordt getoetst met een steekproef van grootte n . Je bepaalt dan het gemiddelde in de steekproef en kijkt of de afwijking van μ significant is.

Bij zo'n **normale toets van het gemiddelde** is de **nulhypothese** $H_0 : \mu(X) = \mu$.

Daarnaast staat een **alternatieve hypothese** $H_1 : \mu(X) \neq \mu$.

Het gemiddelde $\bar{X}$ in de steekproef is ook normaal verdeeld met $\mu(\bar{X}) = \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu$ en $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ als de nulhypothese inderdaad waar is.

Bij de alternatieve hypothese hoort een **kritiek gebied** dat aangeeft waar de afwijking van μ zo groot is dat je de nulhypothese verworpt. Dat kritieke gebied bepaal je op grond van een vooraf vastgesteld **significantieniveau** α , bijvoorbeeld:

$$P(\bar{X} \leq g_1 \vee \bar{X} > g_2 \mid \mu(\bar{X}) = \mu \text{ en } \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \alpha$$

Hierin zijn g_1 en g_2 de grenswaarden van het kritieke gebied $\bar{X} \leq g_1$ of de grenswaarden van het kritieke gebied $\bar{X} > g_2$.

Het significantieniveau kies je voordat je de toets uitvoert, bijvoorbeeld 10%, 5% of 1%. De keuze geeft informatie over de significantie van de toets.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: normale verdeling gewicht kilopakken suiker

Volgens de fabrikant is het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal verdeeld met $\mu(G) = 1002$ en $\sigma(G) = 3$.

Omdat de consumentenbond veel klachten heeft binnengekregen waarin wordt gemeld dat de pakken suiker van deze fabrikant te weinig suiker bevatten, wordt er door hen getwijfeld aan dit gemiddelde. De consumentenbond stelt dat $\mu(G) < 1002$.

In een steekproef van 10 is het gemiddelde 999 gram. Is dit bij een significantieniveau van 1% voldoende reden om aan te nemen dat de fabrikant ongelijk heeft?

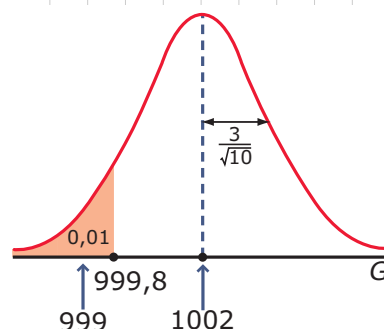
Antwoord

- $H_0 : \mu(\bar{G}) = 1002$ en $\sigma(\bar{G}) = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0,95$.
- $H_1 : \mu(\bar{G}) < 1002$

Het significantieniveau is $\alpha = 0,01$.

$P(\bar{G} < g \mid \mu = 1002 \text{ en } \sigma = 0,95) \leq 0,01$ geeft: $g \approx 999,8$.

Het kritieke gebied wordt daarom: $\bar{G} \leq 999,8$.



Figuur 3.3

Het in de steekproef gevonden gemiddelde geeft daarom inderdaad aanleiding om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken bij een significantieniveau van 1%.

Opgave 5

Je ziet in **Voorbeeld 1** hoe de consumentenbond met een steekproef van 10 pakken het gewicht van kilopakken suiker controleert.

- Voer de beschreven toets zelf uit.
- Voer de toets nog eens uit, maar nu met een betrouwbaarheid van 99,5%. Is er nog steeds sprake van een significante afwijking?
- In plaats van een steekproef van 10 pakken wordt een steekproef van 50 pakken suiker genomen. Bij welke gewichten krijgt de consumentenbond nu met 99% betrouwbaarheid gelijk?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: normale verdeling gewicht kilopakken suiker

Volgens de fabrikant is het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal verdeeld met $\mu(G) = 1002$ en $\sigma(G) = 3$.

De fabrikant test zijn vulmachine door van een steekproef van 10 pakken het gemiddelde gewicht te berekenen. Hij doet uiteraard een dubbelzijdige toets.

Wat is het beslissingsvoorschrift bij een significantieniveau van 1%?

Antwoord

- $H_0 : \mu(\bar{G}) = 1002$ en $\sigma(\bar{G}) = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0,95$.
- $H_1 : \mu(\bar{G}) \neq 1002$

Het significantieniveau is $\alpha = 0,01$.

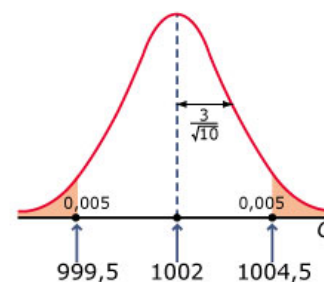
$P(\bar{G} \leq g_1 \vee \bar{G} > g_2 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = 0,95) \leq 0,01$ geeft: $g_1 \approx 999,5$ en $g_2 \approx 1004,5$.

Het kritieke gebied wordt daarom: $\bar{G} \leq 999,5$ of $\bar{G} \geq 1004,5$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je bij een tweezijdige toets te werk kunt gaan.

- Waarom is dit een tweezijdige toets? Wat gebeurt er met de onbetrouwbaarheidsdrempel α ?
- Voer de beschreven toets zelf uit, maar nu met een significantieniveau van 5%.



Figuur 3.4

Opgave 7

In een fabriek heeft men het vermoeden dat het koolstofgehalte van een bepaalde staalsoort groter is dan 0,200%. Uit een steekproef van 80 metingen wordt een gemiddelde gevonden van 0,213%.

De standaardafwijking van het koolstofgehalte is bekend en bedraagt $\alpha = 0,041\%$.

- Formuleer een geschikte nulhypothese en een alternatieve hypothese.
- Toets de hypothese met een onbetrouwbaarheidsdrempel van 0,01. Wat is je conclusie?

Opgave 8

In een medisch laboratorium worden voortdurend cholesterolgehalten in bloedmonsters bepaald. De gebruikte apparatuur wordt elk uur gecontroleerd met behulp van een ijkmonster. Hiervan is bekend dat het gemiddelde 175 mg per 100 mL zou moeten zijn. De controlemetingen aan het ijkmonster leveren op: 168, 170, 188, 170, 174, 190, 188, 171.

Is er met een significantie van $\alpha = 0,01$ reden om aan te nemen dat de meetapparatuur niet goed meer werkt?

Verwerken

Opgave 9

Een consumentenbond toetst of verpakkingen van maaltijdmixen goed zijn gevuld.

- Leg uit dat de toets links-, rechts- of tweezijdig is.
- Het gewicht G in gram van een maaltijdmix is ingesteld als $\mu(G) = 50$ en $\sigma(G) = 2$. De steekproefgrootte is 100. Wat is het kritieke gebied bij een significantieniveau van 1%?

Opgave 10

Een firma die batterijen levert voor rekenmachines, beweert dat die batterijtjes geschikt zijn om gemiddeld zo'n apparaat 3600 uur te laten werken. Ze gaan er van uit dat die levensduur normaal is verdeeld met een standaarddeviatie van 600 uur.

In een aselekt gekozen groep van 60 rekenmachines stop je de batterijen van deze firma. De gemiddelde levensduur blijkt 3300 uur te zijn.

Kun je op grond van dit resultaat met een betrouwbaarheid van 97% de bewering van de firma verwerpen?

Opgave 11

Volgens een wetenschappelijk tijdschrift is het gewicht van zeventienjarigen normaal verdeeld met een gemiddelde van 54,2 kg en een standaarddeviatie van 4,7 kg. Om deze bewering te toetsen wordt van 200 aselekt gekozen zeventienjarigen het gewicht bepaald.

- Als het gemiddelde gewicht in de steekproef 53,3 kg is, heeft het tijdschrift dan met een significantie van 2,5% gelijk?

- b** Bij welk significantieniveau verwerp je de mening van het tijdschrift?
- c** Bij welk significantieniveau had je de mening van het tijdschrift verworpen als je in een veel kleinere steekproef van 10 zeventienjarigen hetzelfde gemiddelde gewicht had aangetroffen? Kun je een verklaring geven voor het verschil met het antwoord bij c?

Opgave 12

Vacuüm verpakte vleeswaren mogen maximaal 0,022% natriumnitriet bevatten. Bij de keuringsdienst van waren controleren ze dit percentage.

- a** Formuleer de hypothese die getoetst wordt. Je mag aannemen dat het natriumnitrietpercentage normaal verdeeld is.
- b** Is de toets eenzijdig of tweezijdig? Formuleer ook de alternatieve hypothese.

Bij de nulhypothese zijn er nog meer mogelijkheden voor μ . Omdat zelfs 0,022 toegestaan is, wordt er uitgegaan van $H_0 : \mu = 0,022$. Hieronder zie je 25 meetresultaten:

0,0219	0,0226	0,0225	0,0225	0,0216
0,0219	0,0220	0,0216	0,0229	0,0226
0,0214	0,0219	0,0226	0,0220	0,0212
0,0225	0,0223	0,0215	0,0221	0,0223
0,0224	0,0215	0,0228	0,0223	0,0223

Tabel 3.1

- c** Toets met behulp van deze steekproef of er reden is tot bezorgdheid. Neem een significantieniveau van 5%.

Opgave 13

Op een pak melk staat: "Het natuurlijk vetgehalte van melk - zoals die van de koe komt - varieert van 3,7% tot 4,3%".

Volle melk wordt in de fabriek altijd afgeroomd tot 3,5%. Een consumentenorganisatie besluit na te gaan of volle melk 3,5% vet bevat. In een aselechte steekproef van 20 pakken volle melk vindt ze de percentages die je in de tabel ziet.

Men veronderstelt dat het vetgehalte van pakken melk normaal verdeeld is.

- a** Onderzoek met normaal waarschijnlijkheidspapier of de resultaten van deze proef reden geven om deze veronderstelling in twijfel te trekken.
- b** Schat met behulp van deze steekproef de parameter σ van de normale verdeling.
- c** Toets met significantieniveau 0,05 of de consumentenorganisatie op grond van de steekproef de bewering op het pak kan verwerpen.

percentage	freq.
3,445– < 3,455	1
3,455– < 3,465	0
3,465– < 3,475	4
3,475– < 3,485	3
3,485– < 3,495	3
3,495– < 3,505	4
3,505– < 3,515	2
3,515– < 3,525	2
3,525– < 3,535	1

Tabel 3.2

Toepassen

Opgave 14: Vulmachine instellen

Een fabrikant produceert een vloeistof in vaten van ruim 100 liter. Door middel van steekproeven voert de kwaliteitsdienst controles op de inhoud uit. Het nemen van steekproeven kost geld, dus worden er zo weinig mogelijk steekproeven genomen.

De vulmachine staat ingesteld op vullen met 100,5 liter per vat. De standaardafwijking van dit vulproces is 1 liter. De kwaliteitsdienst wil zo weinig mogelijk steekproeven nemen. Maar de dienst wil ook met een significantie van hoogstens 1% weten of er gemiddeld minstens 100 liter in de vaten zit.

a Hoeveel vaten moet de dienst testen?

Het aantal vaten dat moet worden getest bij een significantie van 1% hangt af van de instelling van het vullen van het vat. Dit gaat met stapjes van 0,1 liter. Hoe hoger de instelling, hoe minder vaten er hoeven te worden getest, maar hoe meer het vullen kost. Het testen van een vat kost € 10,00. 1 liter vloeistof kost € 1,50. De kwaliteitsdienst controleert steeds een partij van 1000 vaten door daar een aantal van te testen.

b Op welke instelling moet de fabrikant de vulmachine zetten, zodat de kosten voor steekproef nemen en vloeistof samen zo laag mogelijk zijn?

Opgave 15: Student's t-toets

Bij normale toets van het gemiddelde kan de standaardafwijking van de steekproef worden gebruikt. In de theorie van dit onderwerp wordt opgemerkt dat er dan rekening moet worden gehouden met een grotere fout.

William Sealy Gosset (1876–1937) was een Engelse statisticus, die publiceerde onder het pseudoniem 'Student'. Deze wiskundige heeft onderzoek gedaan naar deze fout.

Hij ontdekte dat er in dat geval van een iets andere verdeling dan de normale verdeling gebruikgemaakt kan worden. Deze verdeling wordt de Student- of t-verdeling genoemd.

Voor de Studentverdeling moet de steekproefomvang bekend zijn. Als deze n is, moet bij vrijheidsgraden $n - 1$ worden ingevuld.

- a** Teken met behulp van bijvoorbeeld de grafische rekenmachine de normale verdeling en de Studentverdeling. Gebruik bij de normale verdeling $\mu = 0$ en $\sigma = 1$. Bij de Studentverdeling is dit vaak automatisch het geval. De Studentverdeling is in de meestal beschikbaar als tPdf-functie. Neem een steekproefomvang 2.
- b** Leg aan de hand van deze grafieken uit dat het steekproefgemiddelde bij de Studentverdeling een grotere afwijking van het gemiddelde moet hebben om de nulhypothese te kunnen verwerpen, dan bij de normale verdeling.
- c** Vanaf welke steekproefomvang is te zeggen dat de Studentverdeling en de normale verdeling op elkaar lijken?

Testen

Opgave 16

In een melkfabriek worden flessen machinaal gevuld. De gedoseerde hoeveelheid per fles is normaal verdeeld. Bij juiste instelling is de verwachte hoeveelheid 250 g per fles. Een kwaliteitsinspecteur neemt een steekproef van 9 flessen en vindt voor het gemiddelde 252 g. De standaardafwijking is 2 g.

Toets, met significantieniveau $\alpha = 0,05$, $H_0 : \mu = 250$ g tegen $H_1 : \mu \neq 250$ g.

Opgave 17

Een partij kobaltchloride wordt bij levering door de ontvanger gekeurd op het gehalte kobalt. Volgens de leverancier is het gehalte 16,4%. Hieronder zie je de resultaten van de metingen.

16,2	15,8	16,1	15,8	15,9
15,9	16,2	16,1	16,2	16,0
15,8	15,9	16,1	15,8	16,0
16,0	16,0	15,9	16,2	16,2
16,0	16,1	16,0	15,9	16,3

Tabel 3.3

Toets met behulp van deze resultaten of de leverancier gelijk heeft. Je mag aannemen dat het gehalte kobalt normaal verdeeld is. Neem als significantieniveau 0,02.

2.4 Bijzondere toetsen

Inleiding

Je hebt nu kennis gemaakt met binomiale toetsen en met het toetsen van het gemiddelde van een normale verdeling. Er bestaan nog veel andere soorten toetsen, afhankelijk van het type kansverdeling wat er achter zit. Maar ook een zogenaamde tekentoets vereist een speciale aanpak, hoewel het daarbij gewoon om een binomiale verdeling gaat. Je vergelijkt dan twee sets gegevens met elkaar, bijvoorbeeld het cijfer voor het SE (schoolexamen) en het CE (centraal examen).

Je leert in dit onderwerp

- de tekentoets gebruiken;
- een eenvoudige chi-kwadraat-toets toepassen;
- het verschil van twee normaal verdeelde stochasten toetsen.

Voorkennis

- binomiale en normale toetsen uitvoeren.

Verkennen

Opgave V1

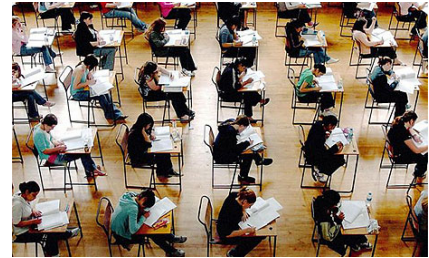
De inspectie voor het onderwijs vergelijkt van een bepaalde school de cijfers voor wiskunde B van het SE (schoolexamen) en het CE (centraal examen).

- Kun je een manier bedenken om vast te stellen of de CE-cijfers significant afwijken van de SE-cijfers?
- Waarom zou de inspectie daarin zijn geïnteresseerd?

Uitleg 1

Bij statistisch onderzoek wordt vaak onderzoek gedaan met meerdere statistische variabelen. Deze worden dan vergeleken. Hier wordt een situatie bekeken waarbij onderzoek wordt gedaan met paren waarnemingen.

In de voedselindustrie wordt gewerkt met smaakpanels, groepen mensen die bijvoorbeeld beoordelen of een gerecht smaakvoller wordt als het anders wordt klaargemaakt. De leden van het smaakpanel proeven hierbij beide gerechten en geven aan of het ze het eerste of het tweede gerecht smaakvoller vinden. Er zijn drie mogelijke uitkomsten: het tweede gerecht is smaakvoller, van gelijke smaak of minder smaakvol. Deze uitkomsten worden bijvoorbeeld +, 0 en – genoemd.



Figuur 4.1



Figuur 4.2



Figuur 4.3

Bij onveranderde smaak is de verwachting dat er evenveel + als – zal zijn. Daarom kun je hier toetsen met de binomiale toets op proportie:

X is het aantal + (binomiaal verdeeld)

$$H_0 : p = 0,5$$

$$H_1 : p > 0,5$$

Deze toets wordt tekentoets genoemd. Deze toets werkt dus zelfs bij sommige kwalitatieve variabelen.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

- Waarom heet deze wijze van toetsen een tekentoets?
- Waarom moet daarbij altijd als nulhypothese $p = 0,5$ worden gehanteerd?

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1**. Stel dat er bij de smaaktest van de 15 keer 10 keer + uit is gekomen.

- Waarom mag je nu niet concluderen dat er 5 keer – uit is gekomen?
- Veronderstel dat er toch 5 keer – uit kwam. Mag er nu met een significantie van 10% van worden uitgegaan dat de nieuwe bereidingswijze smaakvollere gerechten tot gevolg heeft?

Uitleg 2

Bij de normale toets werd onderzoek gedaan naar de juistheid van een bewering over het gemiddelde. Het gaat hier over één statistische variabele.

Maar bij statistisch onderzoek wordt vaak onderzoek gedaan met meerdere stochastische variabelen. Deze worden dan vergeleken. Bijvoorbeeld een onderzoek waarbij onderzocht wordt of de gemiddelden van twee variabelen gelijk zijn.

Ga hierbij uit van de volgende veronderstellingen:

- De gemiddelden van beide populaties zijn bekend;
- De beide variabelen zijn normaal verdeeld;
- De standaardafwijking van beide verdelingen is bekend.

Er geldt altijd: het verschil van twee normale verdelingen is weer een normale verdeling.

Stel dat het aantal sterftegevallen door griep per gemeente normaal verdeeld is.

In 2015 gaf een steekproef $\mu_{15} = 20$ en $\sigma_{15} = 2,3$.

In 2016 gaf een steekproef $\mu_{16} = 21$ en $\sigma_{16} = 3,0$.

Verschillen deze gemiddelden significant?

Als de gemiddelden niet zouden verschillen, kun je uitgaan van verdeling van het verschil V met $\mu_V = 0$ en $\sigma_V = \sqrt{2,3^2 + 3,0^2} \approx 3,8$

Het verschil tussen de gemiddelden is hier $\mu_{16} - \mu_{15} = 1$.
De overschrijdingskans van dit verschil is $P(V > 1) \approx 0,3957 > 0,05$.

Dat wil zeggen dat er geen significant verschil is tussen de aantallen sterftegevallen van 2015 en 2016.

Deze toets heet een verschiltoets voor gemiddelden.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

- Waarom is zichtbaar dat hier een verschiltoets moet worden toegepast en dus geen hypothesetoets zoals eerder in dit hoofdstuk beschreven?
- Wat is het toegepaste significantieniveau van deze toets?
- Het verschil tussen de gemiddelden is hier $\mu_{16} - \mu_{15} = 1$. Wat moet je doen als je μ_{16} en μ_{15} in deze berekening verwisselt?

Uitleg 3

Bij 200 worpen met een geldstuk vind je 115 keer kop en 85 keer munt. Mag je nu met een significantieniveau van 5% concluderen dat het geldstuk niet eerlijk is?

Bij een eerlijk geldstuk verwacht je 100 keer kop en 100 keer munt, noem deze theoretische waarden t_1 en t_2 . De experimenteel gevonden waarden zijn x_1 en x_2 .

Bekijk nu $\chi^2 = \frac{(x_1 - t_1)^2}{t_1} + \frac{(x_2 - t_2)^2}{t_2}$.

Hierin kan x_1 de waarden 0 t/m 200 aannemen en is $x_1 + x_2 = 200$. χ^2 (chi-kwadraat) is een continue stochast die een maat is voor de afwijking van de experimentele waarden en de theoretische waarden. Als $\chi^2 = 0$ stemmen beide volledig overeen. Omdat hier x_2 vastligt als x_1 bekend is, is het aantal vrijheidsgraden 1. In dit geval is $x_1 = 115$ en $x_2 = 85$ en dus $\chi^2 = 4,5$.

Met de grafische rekenmachine vind je:

$P(\chi^2 > 4,5) \approx 0,0339 < 0,05$.

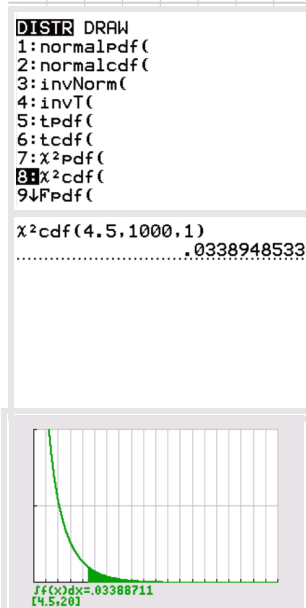
Dus ligt 4,50 in het kritieke gebied van de toets en is de afwijking van een eerlijk geldstuk significant.

Deze situatie is uit te breiden naar situaties met n theoretische en evenveel experimentele waarden. Er zijn dan $df = n - 1$ graden van vrijheid ($df = \text{degrees of freedom}$) voor χ^2 .

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 3**.

- Laat zien, dat $\chi^2 = 4,5$ van de vier metingen.
- Welke kleinste waarde kan χ^2 aannemen? Wat moet er dan in de steekproef aan de hand zijn?
- Bereken zelf de overschrijdingskans en controleer dat het antwoord in de uitleg juist is.
Is het geldstuk 'eerlijk' bij een significantieniveau van 5%?



Figuur 4.4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij statistisch onderzoek worden vaak twee (of meer) steekproeven genomen uit verschillende populaties. Deze steekproeven kunnen vaak met elkaar worden vergeleken door hypothesetoetsen toe te passen. Hier worden drie soorten toetsen genoemd. In de voorbeelden worden de details behandeld.

De **tekentoets** is geschikt om twee populaties te vergelijken door middel van steekproeven met bij elkaar horende paren van waarnemingen. Deze waarnemingen moeten te vergelijken zijn met begrippen als meer/minder, groter/kleiner, kleuriger/minder kleurig, enzovoort. De eventuele waarden van de waarnemingen worden niet gebruikt.

Met tekens (bijvoorbeeld +, – en 0) wordt aangegeven hoe en of een paar waarnemingen van elkaar verschilt. Als de populaties niet verschillen, zal het aantal + en – gelijk zijn en daarmee zal de kans op een + 0,5 zijn. Met een binomiale verdeling met $p = 0,5$ kan dan worden getoetst.

De **verschiltoets voor gemiddelden** wordt gebruikt om uitspraken over het verschil tussen de gemiddelden van twee steekproeven te doen. De populaties hoeven zelf niet normaal verdeeld zijn. Deze toets is gebaseerd op de volgende uitgangspunten:

- Steekproefgemiddelden zijn normaal verdeeld.
- Het verschil van twee normale verdelingen is ook weer normaal verdeeld.

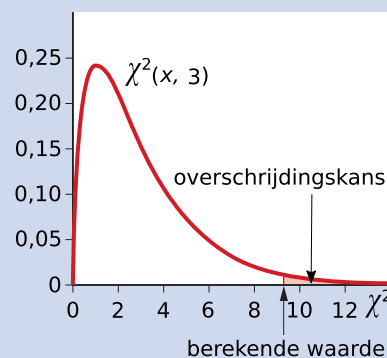
Als de populaties niet verschillen, zullen de gemiddelden ervan ook niet verschillen. Het (altijd normaal verdeelde) verschil van de gemiddelden heeft hier dus altijd een gemiddelde van 0. Met een normale verdeling kan hierop worden getoetst.

Met de **chi-kwadraat toets** kun je uitspraken doen over afwijkingen van gemeten resultaten ten opzichte van de theoretisch verwachte resultaten.

Bij n metingen $x_1, x_2, \dots, x_n$ horen dan theoretische resultaten $t_1, t_2, \dots, t_n$.

$$\text{Dan is } \chi^2 = \frac{(x_1 - t_1)^2}{t_1} + \frac{(x_2 - t_2)^2}{t_2} + \dots + \frac{(x_n - t_n)^2}{t_n}.$$

Spreek dit uit als 'chi kwadraat'. Het aantal **vrijheidsgraden** is $df = n - 1$ omdat $x_1 + x_2 + \dots + x_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ een vast getal per toets is.



Figuur 4.5

Voorbeeld 1

De inspectie voor het onderwijs vergelijkt van een bepaalde school de cijfers voor wiskunde B van het SE (schoolexamen) en het CE (centraal examen). In de tabel vind je de gegevens van een klas van 19 leerlingen.

leerling	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
SE-cijfer	6,0	6,7	5,8	7,1	5,4	6,5	8,8	6,9	7,9	5,1	6,1	6,1	6,4	7,4	5,9	6,2	7,1	6,8	6,3
CE-cijfer	6,4	6,3	5,2	6,5	5,4	6,1	9,0	6,8	7,5	5,6	6,0	6,5	6,0	6,5	6,0	6,6	7,0	6,6	6,4

Tabel 4.1

De inspectie besluit om een tekentoets toe te passen met een significantieniveau van 5%. Een + geeft aan dat de leerling het CE beter heeft gemaakt, een – dat het CE minder is gemaakt. Mag de inspectie op grond hiervan concluderen dat het CE slechter is gemaakt?

Antwoord

leerling	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
teken	+	–	–	–	0	–	+	–	–	+	–	+	–	–	+	+	–	–	+

Tabel 4.2

Een + geeft aan dat de leerling het CE beter heeft gemaakt, een – dat het CE minder is gemaakt. Een 0 geeft aan dat de twee resultaten niet verschillen. Dit paar waarnemingen wordt niet meegeteld. De reden is dat er anders een (te) grote kans op de fout ‘ H_1 is juist, maar wordt niet geaccepteerd’ kan optreden.

- X is het aantal minnen (CE slechter) in de steekproef ($n = 18$).
 X is binomiaal verdeeld.
- $H_0 : p = 0,5$ (altijd bij de tekentoets)
- $H_1 : p > 0,5$

$$P(X \geq 11 | n = 18 \text{ en } p = 0,5) \approx 0,2403 > 0,05$$

De inspectie mag op grond hiervan deze conclusie niet trekken.

Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- Waarom is $n = 18$ en niet $n = 19$?
- Stel dat het CE-cijfer van leerling 5 een 5,2 was geweest. Had dan de inspectie met een significantieniveau van 10% mogen concluderen dat het CE slechter is gemaakt?

Voorbeeld 2

Twee groepen hebben dezelfde toets gemaakt. De scores van beide groepen zijn normaal verdeeld. Groep A heeft een gemiddelde score gehaald van 6,4 met een standaardafwijking van 0,7. Groep B heeft een gemiddelde score gehaald van 7,9 met een standaardafwijking van 0,9.

Als je een onbetrouwbaarheidsdrempel van 10% neemt, kun je dan zeggen dat de scores van groep B significant beter zijn dan die van groep A?

Antwoord

Noem V het verschil van beide scores.

V is normaal verdeeld met een gemiddelde van $7,9 - 6,4 = 1,5$ en een standaardafwijking van $\sqrt{0,7^2 + 0,9^2} = \sqrt{1,3}$.

Wanneer de scores van groep B hetzelfde zouden zijn als die van groep A, zou het verschil 0 moeten zijn. De nulhypothese is daarom $H_0: \mu_V = 0$ (altijd) en de alternatieve hypothese luidt $H_1: \mu_V > 0$.

$P(V > g | \mu_V = 0 \text{ en } \sigma_V = \sqrt{1,3}) < 0,1$ geeft $g \approx 1,46$.

Omdat $\mu_V = 7,9 - 6,4 = 1,5 > 1,46$ is de afwijking voldoende om te concluderen dat de cijfers van groep A significant beter zijn.

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit [Voorbeeld 2](#).

- Als je een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5% hanteert, kun je dan ook concluderen dat de cijfers van groep A significant beter zijn dan die van groep B?
- Stel dat er een fout is gemaakt en dat groep B gemiddeld een 7,8 heeft gehaald. De standaardafwijking blijft hetzelfde. Wat is nu de conclusie bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 10%?

Opgave 7

Twee machines vullen pakken met suiker. De machines horen de pakken met een gelijke hoeveelheid suiker te vullen. Om te controleren of dit zo is, worden van beide machines steekproeven genomen.

Bij machine A is het gemiddelde gewicht van de pakken suiker in de steekproef 1002 gram met een standaardafwijking van 2,5 gram.

Bij machine B is het gemiddelde gewicht van de pakken suiker in de steekproef 1008 gram met een standaardafwijking van 3,6 gram.

Verschillen de gemiddelde vulgewichten van machine A en machine B significant van elkaar? Neem een significantie van 10%.

Voorbeeld 3

Een verzekeringsmaatschappij deelt branden in in drie klassen: licht, middel en zwaar. De ervaring is dat 65% van de branden licht, 25% middel en 10% zwaar is. Elk jaar doet de verzekeringsmaatschappij een toets om te beoordelen of er een wijziging in de verdeling over de klassen optreedt. Dit jaar blijkt dat 55% van de branden licht, 30% middel en 15% zwaar was.

Onderzoek met een significantie van 10% of er reden is om aan te nemen dat er een verschuiving van de percentages in de zwaardere richting heeft plaatsgevonden.

Antwoord

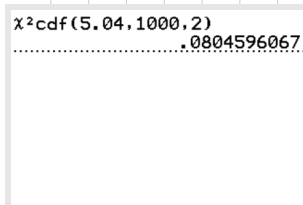
Hier is sprake van een afwijking van de 'theoretische' waarden $t_1 = 65$, $t_2 = 25$ en $t_3 = 10$.

Gebruik daarom de chi-kwadraat verdeling.

$$\chi^2 = \frac{(55-65)^2}{65} + \frac{(30-25)^2}{25} + \frac{(15-10)^2}{10} \approx 5,04$$

Met de grafische rekenmachine vind je $P(\chi^2 \geq 5,04) \approx 0,080$.

Deze overschrijdingskans is kleiner dan 10%, dus er is inderdaad een significante verschuiving naar de zwaardere branden opgetreden.



Figuur 4.6

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**.

- Waarom staat in de oplossing het woord 'theoretisch' tussen aanhalingstekens?
- Voer zelf de berekening uit.
- Waarom wordt op de grafische rekenmachine een 2 ingevoerd?

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 3**. De verzekeringsmaatschappij heeft dit jaar in een andere regio de volgende aantallen branden gehad: 58 lichte, 20 middelgrote en 10 zware.

- Hoeveel branden hebben er plaatsgevonden?
- Welke aantallen lichte, middelgrote en zware branden zou de verzekeringsmaatschappij hebben verwacht bij dit totaal aantal branden?
- Onderzoek met een significantie van 10% of er reden is om aan te nemen dat er een verschuiving van de percentages heeft plaatsgevonden.

Verwerken

Opgave 10

Aan de twee klassen A en B, beide van 30 leerlingen, wordt gevraagd met hoeveel Facebookvrienden ze regelmatig in levende lijve contact hebben. Een jaar later krijgen deze leerlingen dezelfde vraag.

- a De gegevens van de opeenvolgende jaren voor klas A worden met elkaar vergeleken.

Leg uit of je de tekentoets of de χ^2 toets gebruikt om aan te geven of het verschil statistisch significant is.

- b De gegevens van klas A en klas B worden alleen voor het eerste jaar met elkaar vergeleken.

Leg uit of je de tekentoets of de χ^2 toets gebruikt om aan te geven of het verschil statistisch significant is.

Opgave 11

De ondernemingsraad van een bedrijf beweert dat het ziekteverzuim op afdeling A significant hoger is dan op afdeling B. De raad legt de directie het volgende overzicht voor over het percentage ziekteverzuim:

maand	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
afd.A	9	9	8	10	12	13	12	12	10	11	8	12
afd.B	7	10	9	8	11	11	7	9	9	10	10	7

Tabel 4.3

De directie besluit hierop een tekentoets toe te passen met een significantieniveau van 5%.

- a Beschrijf de tekentoets, geef de nulhypothese, de alternatieve hypothese, de steekproefgrootte en de onbetrouwbaarheidsdrempel.
- b Onderzoek of de ondernemingsraad gelijk krijgt.

Opgave 12

De diameters van machinaal geproduceerde bouten en de bijbehorende moeren zijn normaal verdeeld: de diameter van de moer is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,10 mm en een standaarddeviatie van 0,05 mm. De diameter van de bout is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,05 mm en een standaardafwijking van 0,03 mm. De bouten passen in de moeren als het verschil in diameter van de moer en de bout minder dan 0,02 mm is. Er wordt regelmatig gecontroleerd of de machines die deze bouten en moeren maken niet moeten worden bijgesteld, omdat te veel moeren niet op de bouten passen. Wekelijks wordt een steekproef van 100 bouten en moeren getest.

- a Waarom is hier sprake van een tweezijdige toets?
- b Stel de nulhypothese en de alternatieve hypothese op.
- c Welke standaardafwijking moet er worden gehanteerd? Waarom speelt nu ook de wortel-n-wet ($\sqrt{n}$ -wet) een rol?

- d Voer de toets uit met een significantieniveau van 5%. Bij welk gemiddelde verschil in de steekproef worden de machines bijgesteld?

Opgave 13

Bekijk de resultaten van 19 leerlingen voor het SE en het CE.

leerling	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
SE-cijfer	6,0	6,7	5,8	7,1	5,4	6,5	8,8	6,9	7,9	5,1	6,1	6,1	6,4	7,4	5,9	6,2	7,1	6,8	6,3
CE-cijfer	6,4	6,3	5,2	6,5	5,4	6,1	9,0	6,8	7,5	5,6	6,0	6,5	6,0	6,5	6,0	6,6	7,0	6,6	6,4

Tabel 4.4

Eerder is hier een tekentoets mee uitgevoerd, waaruit bleek dat de resultaten niet significant verschilden. Omdat hier waarden bekend zijn, kan ook gebruik worden gemaakt van een verschiltoets. Ga na of uit deze toets met een significantieniveau van 5% volgt dat het SE beter is gemaakt dan het CE.

Opgave 14

Onderzoekers hebben van 320 gezinnen met 5 kinderen de aantallen meisjes geteld.

Kun je met een significantieniveau van 5% aannemen dat de kans op de geboorte van een jongen en een meisje even waarschijnlijk is? Voer daartoe een χ^2 -toets uit.

aantal meisjes	aantal families
0	18
1	56
2	110
3	88
4	40
5	8

Tabel 4.5

Toepassen

Opgave 15: Testen op muizen

In een laboratorium worden twee geneesmiddelen voor dezelfde ziekte getest op muizen die men kunstmatig aan deze ziekte laat lijden. Ze worden met één van beide middelen behandeld.

Elke dag wordt bijgehouden hoeveel dieren er genezen zijn. De helft van de muizen kreeg geneesmiddel A toegediend, de andere helft geneesmiddel B.

De resultaten staan in deze tabel.

dagnummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
middel A	2	5	4	6	3	3	6	3	2	2	2	4	6	9	4	2	3	2	4	9
middel B	3	8	6	9	2	4	8	5	5	2	5	5	3	11	8	4	5	0	5	1

Tabel 4.6

Onderzoekers in dit laboratorium toetsen de mening dat beide middelen even goed werken met een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5%. Er wordt een tekentoets uitgevoerd.

- a Stel een nulhypothese en een alternatieve hypothese op.

- b Stel vast of beide middelen op grond van de resultaten in deze test inderdaad even goed werken binnen de gegeven betrouwbaarheidseis.

Opgave 16: Voetlengtes

Open het bestand **Voetlengtes van 100 mannen en 100 vrouwen**. De gangbare opvatting is dat mannen gemiddeld grotere voeten hebben dan vrouwen. Je wilt deze opvatting toetsen met een significantieniveau van 5% met behulp van de gegevens in dit bestand.

- a Kun je met deze meetgegevens een tekentoets uitvoeren?
- b Je toetst het verschil in voetlengtes van mannen en vrouwen. Maakt het verschil of je twee willekeurige groepen mannen en vrouwen onderzoekt of een groep van 100 echtparen?
- c Voer de toets uit. Wordt de hierboven gedane uitspraak bevestigd?

Opgave 17: Gregor Mendel

De Tsjechische monnik **Gregor Mendel (1822–1884)** verrichtte kruisingsexperimenten met erwten.

Hij bekeek 556 erwten en vond dat 315 daarvan glad en geel waren, 108 glad en groen, 101 gerimpeld en geel en 32 gerimpeld en groen.

Met behulp van de door hem ontwikkelde erfelijkheidsleer kon hij berekenen dat deze aantallen zich theoretisch gesproken moesten verhouden als $9 : 3 : 3 : 1$.

Wordt de theorie van Mendel door dit experiment met de erwten bevestigd met een betrouwbaarheid van 90%?

Testen

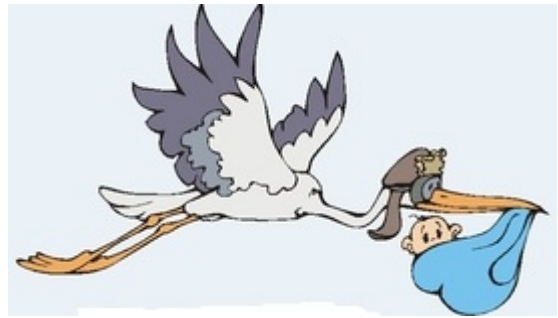
Opgave 18

Je hebt in dit onderdeel met drie soorten toetsen kennis gemaakt. Beschrijf hoe deze toetsen in elkaar zitten en onder welke omstandigheden je ze toepast.

2.5 Correlatie

Inleiding

Naast het toetsen van hypothesen is in de mathematische statistiek het onderzoeken naar statistische verbanden een belangrijke tak van sport: wanneer bestaat er een verband tussen twee statistische variabelen? Bestaat er bijvoorbeeld een verband tussen het aantal overvliegende ooievaars en het aantal geboorten in een bepaalde streek? Of bestaat er een verband tussen lengte en gewicht bij scholieren?



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- een puntenwolk tekenen bij twee statistische variabelen;
- de correlatiecoëfficiënt gebruiken als maat voor het statistische verband tussen beide variabelen;
- het verschil tussen statistische verbanden en oorzakelijke verbanden.

Voorkennis

- de elementaire statistische begrippen (gemiddelde, standaardafwijking, e.d.) gebruiken;
- werken met binomiale en normale toetsen.

Verkennen

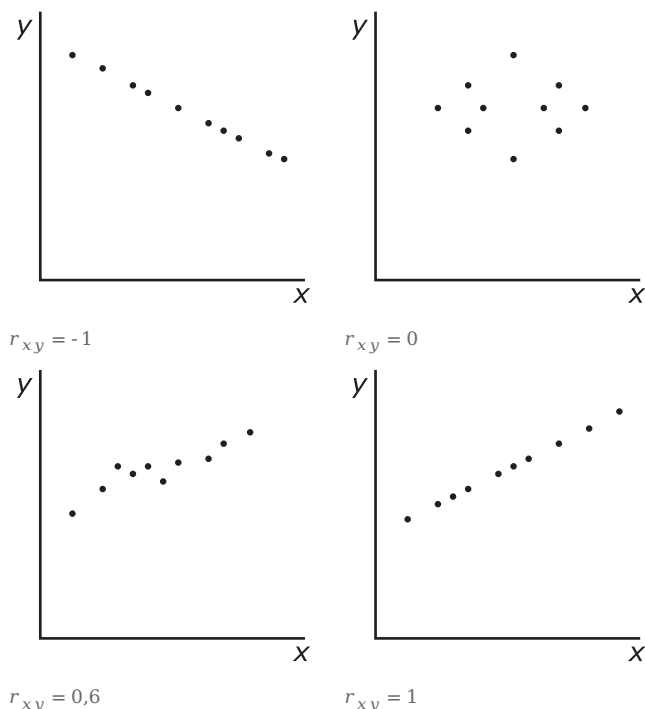
Opgave V1

Om te onderzoeken of er een verband bestaat tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud heb je gegevens nodig. Op het werkblad [LengteGewicht22h4.xls](#) vind je de gegevens van een 4HAVO-klas van 22 leerlingen.

- Welke drie gegevens zijn er verzameld?
- Welke afspraken moet je maken bij het verzamelen van deze gegevens? Beschrijf er een paar. (Denk om de manier van meten!)
- Bekijk het spreidingsdiagram. Trek je op grond van de gegevens op het werkblad de conclusie dat er zo'n verband bestaat? En is dat dan uitsluitend een statistisch verband of is het ook een oorzakelijk verband. Met andere woorden wordt een groter gewicht veroorzaakt door een grotere lengte?

Uitleg

Als je vermoedt dat er tussen twee variabelen x en y een lineair verband bestaat, maak je een spreidingsdiagram dat de vorm van een puntenwolk krijgt. De mate waarin tussen de twee variabelen een lineair verband bestaat wordt gegeven door de correlatiecoëfficiënt, aangeduid door r_{xy} .



Figuur 5.2

De correlatie tussen x en y wordt beter naarmate r_{xy} dichterbij 1 of -1 ligt. Maar hoe bereken je nu die correlatiecoëfficiënt?

Daarbij gebruik je het punt $(\bar{x}, \bar{y})$ waarin $\bar{x}$ het gemiddelde van de x -waarden en $\bar{y}$ het gemiddelde van de y -waarden is. Met behulp van die gemiddelden kan het grafiekgebied in vier delen I, II, III en IV worden verdeeld (zie figuur). Je kunt nu voor elk van de N punten (x_i, y_i) het getal $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ berekenen.

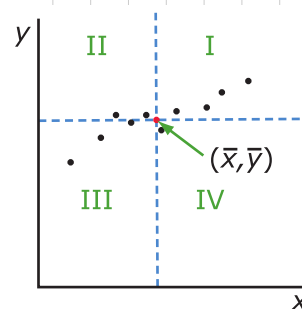
In de gebieden I en III is dit getal voor elk punt positief: deze punten dragen bij aan een positieve correlatie.

In de gebieden II en IV is dit getal voor elk punt juist negatief: deze punten dragen bij aan een negatieve correlatie.

Het gemiddelde van alle N getallen $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ is een goede maat voor de correlatie.

Deze maat heet de covariantie van de puntenwolk: covariantie $= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N}$.

Deze maat voor de correlatie in een puntenwolk hangt nog af van de eenheden waarin x en y zijn gemeten. Dat kun je voorkomen door telkens $(x_i - \bar{x})$ te delen door de bijbehorende standaarddeviatie σ_x en ook $(y_i - \bar{y})$ telkens te delen door σ_y .



Figuur 5.3

Je krijgt dan de correlatiecoëfficiënt, die niet langer afhangt van de gekozen eenheden:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

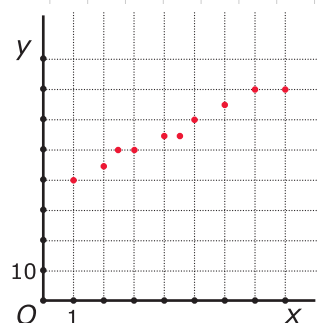
In Excel is de berekening van de correlatiecoëfficiënt niet al te moeilijk uit te voeren. Zeker niet als je de gemiddelden en de standaarddeviaties al hebt berekend met de statistische functies. Je maakt dan een kolom voor de getallen $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$. En daarna bereken je het gemiddelde van die kolom. Dat gemiddelde deel je nog door beide standaarddeviaties.

Overigens kent Excel ook statistische functies als COVARIANTIE en CORRELATIE, zie het [Practicum](#).

Opgave 1

Bekijk dit spreidingsdiagram.

- Is er op het oog sprake van een goede correlatie tussen x en y ?
- Schat de correlatiecoëfficiënt.
- Welke soort formule hoort er bij y als functie van x ?
- Waarom is de schaalverdeling op de assen niet van belang voor de correlatie?



Figuur 5.4

Opgave 2

Op het werkblad [LengteGewicht22h4.xls](#) vind je de gegevens van een 4HAVO-klas van 22 leerlingen.

TIP: Natuurlijk is het leuker (en beter) om met een eigen dataset van lengtes en gewichten van jouw jaargroep te werken.

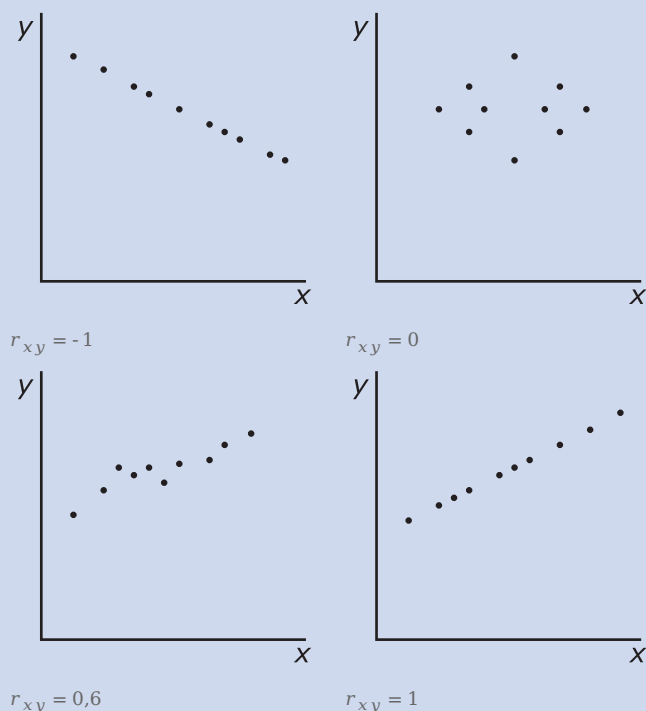
- Bereken het gemiddelde, de standaarddeviatie en de spreidingsbreedte van zowel de lengtes l als de gewichten g . Gebruik de statistische functies van je grafische rekenmachine.
- Is deze steekproef voldoende representatief voor 15-17 jarigen? Motiveer je antwoord.
- Ga met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier na of de lengtes van de 22 leerlingen in de voorgaande tekst ongeveer normaal verdeeld zijn. Doe dit ook voor de gewichten.
- Bereken de correlatiecoëfficiënt bij het verband tussen de lengte en het gewicht van de 22 leerlingen. Is er sprake van een goede correlatie tussen l en g ?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In een **spreidingsdiagram** van twee statistische variabelen x en y zet je alle combinaties (x, y) als een **puntenwolk** in een assenstelsel. Of er een sterk **lineair statistisch verband** bestaat tussen de variabelen wordt bepaald door de **correlatiecoëfficiënt**

$$r_{xy}. \text{ Er geldt: } r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}.$$



Figuur 5.5

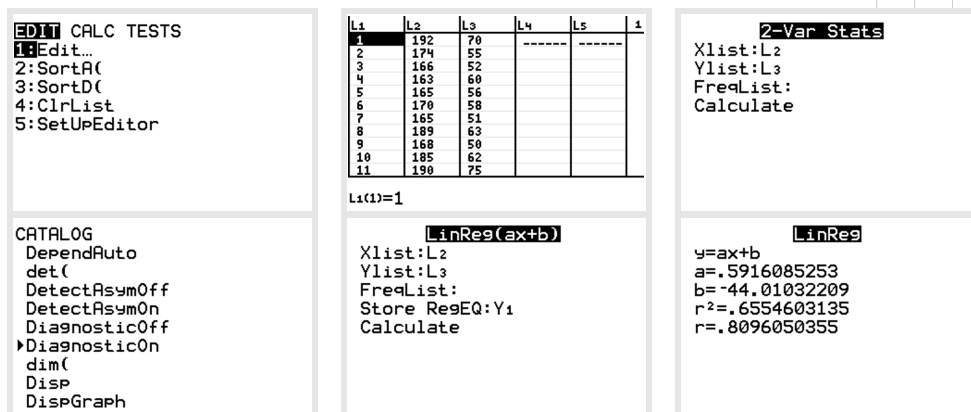
- Als $r_{xy} = 1$ dan is er een perfecte positieve correlatie tussen x en y . De punten van de puntenwolk liggen dan precies op een stijgende lijn.
- Als $r_{xy} = 0$ dan is er geen enkele correlatie tussen x en y .
- Als $r_{xy} = -1$ dan is er een perfecte negatieve correlatie tussen x en y . De punten van de puntenwolk liggen dan precies op een dalende lijn.

De correlatie tussen x en y wordt beter naarmate r_{xy} dichterbij 1 of -1 ligt.

Een verband waarbij de toename (of afname) van de éne variabele een gevolg is van een toename (of afname) van de andere heet een **causaal verband**: er is dan sprake van oorzaak en gevolg. Een statistisch verband tussen twee variabelen hoeft niet causaal te zijn. Andere variabelen kunnen de oorzaak zijn dat er bij twee variabelen een statistisch verband optreedt. Het is zeker niet zo, dat een grotere lengte veroorzaakt dat je daardoor automatisch ook een groter gewicht hebt.

Voorbeeld 1

Op het werkblad **LengteGewicht22h4.xls** vind je de gegevens van een 4HAVO-klas van 22 leerlingen. Je kunt deze gegevens ook in de grafische rekenmachine invoeren en die de correlatiecoëfficiënt laten berekenen. In de figuren hieronder zie je hoe dit op de TI84 in zijn werk gaat. Je hebt er het rekenalgoritme LinReg voor nodig. Dat staat voor 'lineaire regressie' en wordt in het volgende onderdeel nader bekeken. In het **Practicum** zie je hoe dit op de diverse rekenmachines gaat.



Figuur 5.6

Opgave 3

Voer de berekening van de correlatiecoëfficiënt bij de gegevens van de 4HAVO-klas uit **Voorbeeld 1** zelf uit met behulp van de grafische rekenmachine.

Opgave 4

De inspectie voor het onderwijs vergelijkt van een bepaalde school de cijfers voor wiskunde B van het SE (schoolexamen) en het CE (centraal examen). In de tabel vind je de gegevens van een klas van 19 leerlingen.

leerling	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
SE-cijfer	6,0	6,7	5,8	7,1	5,4	6,5	8,8	6,9	7,9	5,1	6,1	6,1	6,4	7,4	5,9	6,2	7,1	6,8	6,3
CE-cijfer	6,4	6,3	5,2	6,5	5,4	6,1	9,0	6,8	7,5	5,6	6,0	6,5	6,0	6,5	6,0	6,6	7,0	6,6	6,4

Tabel 5.1

Je zou kunnen onderzoeken of er een lineair statistisch verband is tussen het CE-cijfer c en het SE-cijfer s . Teken een bijpassend spreidingsdiagram en ga door berekening van de correlatiecoëfficiënt na of zo'n verband bestaat.

Verwerken

Opgave 5

Om te onderzoeken of er enig verband bestaat tussen de lengte van een vader en die van zijn zoon zijn de lengtes van 12 vaders en die van hun oudste zoons gemeten op het moment dat die zoons volwassen werden. De gegevens staan in deze tabel.

lengte vader v in cm	173	168	178	170	180	165	185	175	180	178	183	188
lengte zoon z in cm	180	175	180	173	183	175	180	173	188	178	180	185

Tabel 5.2

- Teken een spreidingsdiagram (een puntenwolk) bij deze gegevens.
- Bereken de correlatiecoëfficiënt in twee decimalen nauwkeurig.
- Kun je zeggen dat er een lineair verband bestaat tussen v en z ?

Opgave 6

De formule voor de correlatiecoëfficiënt is te herleiden tot:

$$r_{xy} = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Laat dat zien door in de formule in de **Uitleg** de haakjes uit te werken. (Als je de correlatiecoëfficiënt handmatig moet uitrekenen gaat dat met deze formule iets sneller.)

Opgave 7

Soms is er wel sprake van een goede correlatie tussen twee statistische variabelen, maar kun je toch je vraagtekens zetten bij het verband tussen beide.

- In een provincie neemt het aantal ooievaars en het aantal geboorten af. Het spreidingsdiagram geeft een statistisch verband te zien. Bestaat er een causaal verband tussen het aantal ooievaars en het aantal geboorten?
- Leg uit waarom er wel een statistisch verband is tussen ijsverkoop en verkoop van zonnebrillen in de zomer maar geen causaal verband.

Opgave 8

Iemand probeert aan te tonen dat de klassengrootte van invloed is op de leerprestaties. Zij vergelijkt - onder zoveel mogelijk gelijke omstandigheden - de gemiddelde cijfers voor drie wiskundetoetsen in klassen met uiteenlopende leerlingenaantallen. Hier zie je de verzamelde gegevens.

- Maak een spreidingsdiagram met c op de verticale en a op de horizontale as. Waarom is dit een logische keuze?
- Bereken de correlatiecoëfficiënt. Is er sprake van een duidelijke correlatie? Bestaat er tussen a en c een lineair statistisch verband?
- Welke conclusie zou deze onderzoekster kunnen trekken? Geef daar commentaar op.

aantal leerlingen a	gemiddelde cijfer c
30	6,1
25	6,6
32	5,5
24	7,2
18	7,4
19	6,9
30	5,2
22	7,1
29	6,0
14	7,8

Tabel 5.3

Opgave 9

In 1947 hielden de wiskundigen Freudenthal en Sittig een statistisch onderzoek ten behoeve van een nieuw maatsysteem voor vrouwenkleding in opdracht van het warenhuis De Bijenkorf. Zij lieten daarbij een grote verscheidenheid aan lichaamsmaten opmeten van 5001 vrouwen. In het bestand [StatFS-Bijenkorf1947.xls](#) vind je enkele gegevens.

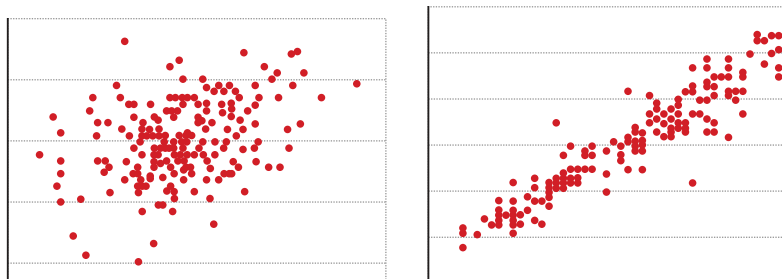
Gebruik de werkbladen 'lengte-gewicht', 'mouwlengte-kniehoogte' en 'voetlengte-breedte'.

- Waarom was De Bijenkorf geïnteresseerd in dergelijke gegevens? En waarom zijn eventuele verbanden als die tussen voetlengte en voetbreedte van belang?
- Op de drie genoemde werkbladen is er sprake van een mogelijk verband tussen twee variabelen. Hoe zou je in dit geval een spreidingsdiagram tekenen?
- En hoe zou je een correlatiecoëfficiënt berekenen? Waarom is het hier handiger om over de oorspronkelijke ruwe meetgegevens te beschikken?

Toepassen

Opgave 10: Huwelijken

In een onderzoek onder 199 echtparen is gevraagd naar de lengte en de leeftijd van de man en de vrouw. Onder andere werd onderzocht of er bij bepaalde eigenschappen van de gehuwden sprake was van een bepaalde statistische samenhang. Dit heeft geresulteerd in de volgende twee puntenwolken:



Figuur 5.7

Een van beide puntenwolken heeft betrekking op de leeftijden van de twee huwelijkspartners, waarbij de gegevens van de man op de horizontale as zijn uitgezet en die van de vrouw op de verticale as. De andere puntenwolk heeft betrekking op de lengte van beide partners. Ook hier zijn de gegevens van de man weer op de horizontale as uitgezet.

- a Beredeneer dat, op basis van de vorm van de puntenwolk, de linker puntenwolk zeer waarschijnlijk betrekking heeft op de lengte en de rechter puntenwolk op de leeftijd.
- b Bekijk de puntenwolk. Onderzoek met behulp van de puntenwolk of het in de betreffende 199 huwelijken vaker voorkomt dat de man ouder is dan de vrouw of dat het omgekeerde juist vaker voorkomt. Laat duidelijk zien hoe je tot je antwoord gekomen bent.

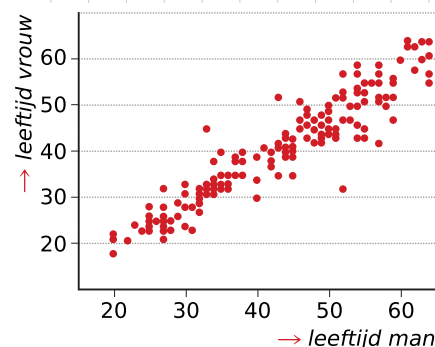
Op basis van dergelijke puntenwolken wil men soms een schatting maken van de lengte of de leeftijd van een vrouw als men de lengte of de leeftijd van de man kent. Hoewel dit soort schattingen altijd een grote mate van onzekerheid hebben, is het toch mogelijk om aan te geven bij welk van de twee puntenwolken een dergelijke schatting het meest betrouwbaar zal zijn.

- c Beredeneer bij welk van de twee puntenwolken, die met de leeftijden of die met de lengtes, een dergelijke schatting het meest betrouwbaar zal zijn.

In de tabel is een aantal kengetallen weergegeven uit het onderzoek.

	leeftijd man (jaar)	leeftijd vrouw (jaar)	lengte man (cm)	lengte vrouw (cm)
gemiddelde	42,6	40,7	173	160
minimum	20	18	156	141
maximum	64	64	195	176
standaardafwijking	11,6	11,4	6,9	6,2

Tabel 5.4

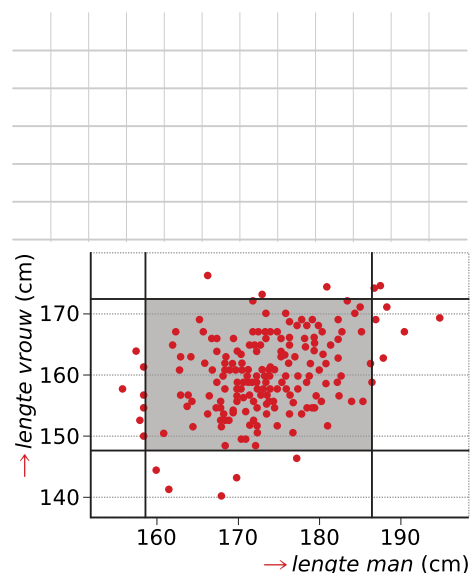


Figuur 5.8

Ervan uitgaande dat de lengtes en de leeftijden van de huwelijkspartners nagenoeg normaal verdeeld zijn, is met behulp van deze gegevens uit te rekenen dat 95% van de lengtes van de mannen tussen de 159,2 cm en 186,8 cm zal liggen.

- d Leg uit hoe je aan deze waarden komt.
- e Bepaal tussen welke twee lengtes 95% van de vrouwen zit.
- Omdat 5% van de mannen buiten de berekende grenzen zal vallen, evenals 5% van de vrouwen, concludeert de onderzoeker dat in totaal 10% van de punten uit de puntenwolk buiten de getekende rechthoek zullen vallen.
- f Beargumenteer of je het met die conclusie eens bent of niet.

(bron: voorbeeldopgave Statistiek - syllabus havo A)



Figuur 5.9

Opgave 11: Vliegsnelheid en lichaamslengte

Biologen veronderstellen op grond van metingen dat er bij vliegende dieren een verband bestaat tussen de lichaamslengte L (in cm) en de vliegsnelheid v (in cm/s).

Vliegsnelheid en lichaamslengte bij verschillende dieren			
Soort		Lengte L in cm	Vliegsnelheid v in cm/s
1.	<i>Drosophila melanogaster</i> (fruitvlieg)	0,2	190
2.	<i>Tabanus affinis</i> (paardenvlieg)	1,3	660
3.	<i>Archilochus colubris</i> (kolibriesoort)	8,1	1120
4.	<i>Anax sp.</i> (waterjuffer)	8,5	1000
5.	<i>Eptesicus fuscus</i> (grote bruine vleermuis)	11,0	690
6.	<i>Phylloscopus trochilus</i> (fitis)	11,0	1200
7.	<i>Apus apus</i> (gierzwaluw)	17,0	2550
8.	<i>Cypselurus cyanopterus</i> (vliegende vis)	34,0	1560
9.	<i>Numenius phaeopus</i> (genwulp)	41,0	2320
10.	<i>Anas acuta</i> (pijlstaart)	56,0	2280
11.	<i>Olor columbianus bewicki</i> (kleine zwaan)	120,0	1880
12.	<i>Pelecanus onocrotalus</i> (witte pelikaan)	160,0	2280

Tabel 5.5

- a Maak een spreidingsdiagram met v op de verticale en L op de horizontale as.

- b** Bereken de correlatiecoëfficiënt. Is er sprake van een duidelijke correlatie? Bestaat er tussen v en L een verband van de vorm $v = a \cdot L + b$?
- c** Maak een tabel voor $\log(L)$ en $\log(v)$ en teken een spreidingsdiagram voor deze twee variabelen.
- d** Bereken de correlatiecoëfficiënt voor de variabelen $\log(L)$ en $\log(v)$.
- e** Er bestaat tussen L en v dus een verband van de vorm $\log(v) = a \cdot \log(L) + b$. Laat zien dat dit betekent dat v een machtsfunctie is van L .

Testen

Opgave 12

Bekijk de tabel. In een Amerikaans laboratorium heeft men proeven gedaan waarbij gelet werd op het verband tussen de hoogte van de bewaartemperatuur F in graden Fahrenheit en de werkzaamheid W van een bepaald geneesmiddel. Bij temperaturen van 30° , 50° , 70° en 90° (Fahrenheit) werden drie porties van gelijk gewicht uit eenzelfde productie 20 dagen bewaard. Na deze periode werd op identieke wijze de werkzaamheid van de porties vastgesteld. De werkzaamheid werd uitgedrukt in percentages van de werkzaamheid zoals die was voor het bewaren.

bewaartemperatuur F ($^\circ\text{F}$)	30	50	70	90
werkzaamheid W (%)	39, 42, 35	32, 26, 33	19, 27, 23	14, 19, 21

Tabel 5.6

- a** In hoeverre is er sprake van correlatie tussen bewaartemperatuur F en werkzaamheid W ?
- b** Is de conclusie gerechtvaardigd dat de werkzaamheid van het geneesmiddel afneemt als de bewaartemperatuur stijgt?

Practicum

Met deze practica leer je hoe je de **de correlatiecoëfficiënt** met de grafische rekenmachine berekent.

- [Trendlijn, correlatie en de TI84](#)
- [Trendlijn, correlatie en de TIinspire](#)
- [Trendlijn, correlatie en de Casio fx-CG50](#)
- [Trendlijn, correlatie en de HPprime](#)
- [Trendlijn, correlatie en de NumWorks](#)

Met het volgende practicum kun je zien hoe je **de correlatiecoëfficiënt in Excel** berekent. Dat is handig als je een grote set gegevens hebt. Je treft er ook in aan hoe je de **regressielijn**, dat is de meest geschikte lijn door de puntenwolk, kunt tekenen en er door Excel de vergelijking van kunt laten opstellen. In Excel heet die lijn de 'trendlijn'. In het volgende onderdeel hoor je daar meer over.

- [Correlatie en regressie](#)

Natuurlijk is het veel mooier om een eigen dataset met gegevens van leerlingen in jouw jaargroep te gebruiken. Die moet je dan wel eerst zelf maken: statistisch onderzoek!

2.6 Lineaire regressie

Inleiding

Naast het toetsen van hypothesen is in de mathematische statistiek het onderzoeken naar statistische verbanden een belangrijke tak van sport: wanneer bestaat er een verband tussen twee statistische variabelen? En kun je dan met zo'n verband tussen twee variabelen ook voorspellingen doen? Met andere woorden kun je een formule vinden die het verband beschrijft? Met de 'kleinste kwadraten methode' kun je bij vrijwel elke puntenwolk wel een (soms kromme) lijn vinden die het verloop beschrijft. Maar hoe zinnig is dat? In dit onderdeel bekijk je alleen lineaire verbanden.

Je leert in dit onderwerp

- bij een puntenwolk bij twee statistische variabelen een regressielijn te tekenen en er een formule van te vinden;
- te bekijken hoe zinvol die formule is en welke voorspellingen je er mee kunt doen.

Voorkennis

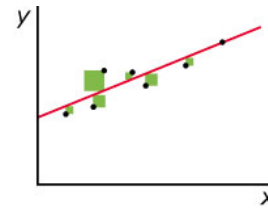
- de elementaire statistische begrippen (gemiddelde, standaardafwijking, e.d.) gebruiken;
- spreidingsdiagrammen tekenen in de vorm van een puntenwolk en daarbij de correlatiecoëfficiënt berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Om te onderzoeken of er een verband bestaat tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud heb je gegevens nodig. Op het werkblad [LengteGewicht22h4.xls](#) vind je de gegevens van een 4HAVO-klas van 22 leerlingen. Bekijk het getekende spreidingsdiagram. De correlatiecoëfficiënt bedraagt ongeveer 0,81, dus er bestaat een lineair statistisch verband tussen lengte en gewicht.

Kun je een formule voor dit verband opstellen? En hoe doe je dit dan?



Figuur 6.1

Uitleg

Als er tussen twee variabelen x en y een goede correlatie bestaat, bestaat er een lineair (statistisch) verband tussen. Maar hoe stel je daarbij een formule op? Een regressielijn moet uiteraard door het punt $(\bar{x}, \bar{y})$ gaan. De richtingscoëfficiënt (het hellingsgetal) van die lijn kun je op dit moment echter alleen nog maar schatten.

De beroemde wiskundige **Carl Friedrich Gauss** bedacht daarvoor in de negentiende eeuw de 'methode van de kleinste kwadrate'. Stel je voor dat je een regressielijn wilt maken van de vorm $y = a \cdot x + b$. Je gaat dan uit van een regressielijn van y op x .

Gauss' methode houdt in dat de som van de kwadraten van de verticale afwijkingen van de meetpunten tot deze regressielijn zo klein mogelijk moet zijn. Dat betekent dat

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (a \cdot x_i + b))^2$$

minimaal moet zijn. Gauss vond dat dit het geval is als

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N \cdot \sigma_x^2}$$

Deze formule lijkt erg op die van de correlatiecoëfficiënt. In feite is $a = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$. En hiermee heb je een snelle manier gevonden om het hellingsgetal a te vinden.

Opgave 1

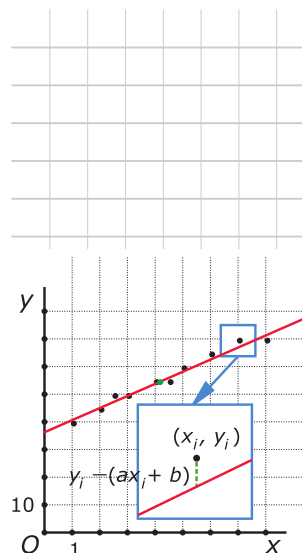
Bekijk dit spreidingsdiagram.

- Maak een tabel van de 10 meetpunten. Voer deze gegevens in je grafische rekenmachine in.
- Bereken de coördinaten van het punt $(\bar{x}, \bar{y})$.
- Als je door deze punten 'op het oog' een regressielijn zou willen tekenen, hoe groot wordt dan de richtingscoëfficiënt ongeveer?
- Bereken nu de correlatiecoëfficiënt en de richtingscoëfficiënt van de regressielijn.
- Stel een vergelijking op van de regressielijn van y op x .
- Welke waarde zou y moeten hebben volgens deze regressielijn als $x = 10$?

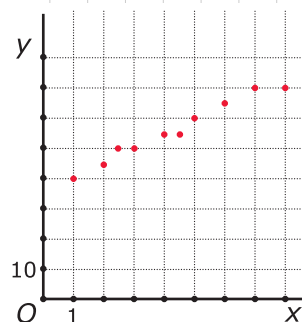
Opgave 2

Lees in de **Uitleg** na hoe Gauss de methode van de kleinste kwadraten gebruikte om de richtingscoëfficiënt van de regressielijn te berekenen.

- Laat zien (door haakjes uitwerken) dat $\sum_{i=1}^n (y_i - (a \cdot x_i + b))^2$ een kwadratische functie van a is.
- Bereken voor welke waarde van a deze functie minimaal is en leidt zo de formule voor a zelf af.
- Leg ook uit hoe je aan de formule komt waarmee je a kunt berekenen vanuit r_{xy} .



Figuur 6.2



Figuur 6.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

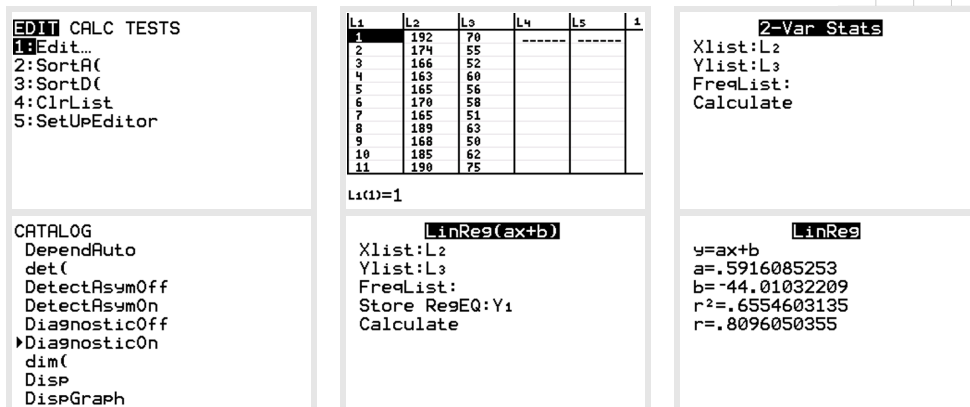
Als de correlatie tussen de variabelen x en y groot genoeg is, kun je een formule van de vorm $y = ax + b$ opstellen die het verband tussen x en y weergeeft. Deze formule heeft als grafiek een rechte lijn, de **regressielijn** of **trendlijn** van y op x . Zo'n regressielijn gaat door het punt $(\bar{x}, \bar{y})$ en heeft als richtingscoëfficiënt (hellingsgetal):

$$a = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Deze richtingscoëfficiënt heet wel de **regressiecoëfficiënt** van y op x . Met behulp van deze regressiecoëfficiënt en het feit dat de regressielijn door $(\bar{x}, \bar{y})$ gaat, kun je de bijbehorende formule opstellen.

Voorbeeld 1

Op het werkblad **LengteGewicht22h4.xls** vind je de gegevens van een 4HAVO-klas van 22 leerlingen. Je kunt deze gegevens ook in de grafische rekenmachine invoeren en die de regressielijn laten berekenen. In de figuren hieronder zie je hoe dit op de TI84 in zijn werk gaat. Je hebt er het rekenalgoritme LinReg voor nodig. Dat staat voor 'lineaire regressie' en wordt in het volgende onderdeel nader bekeken. In het **Practicum** zie je hoe dit op de diverse rekenmachines gaat.



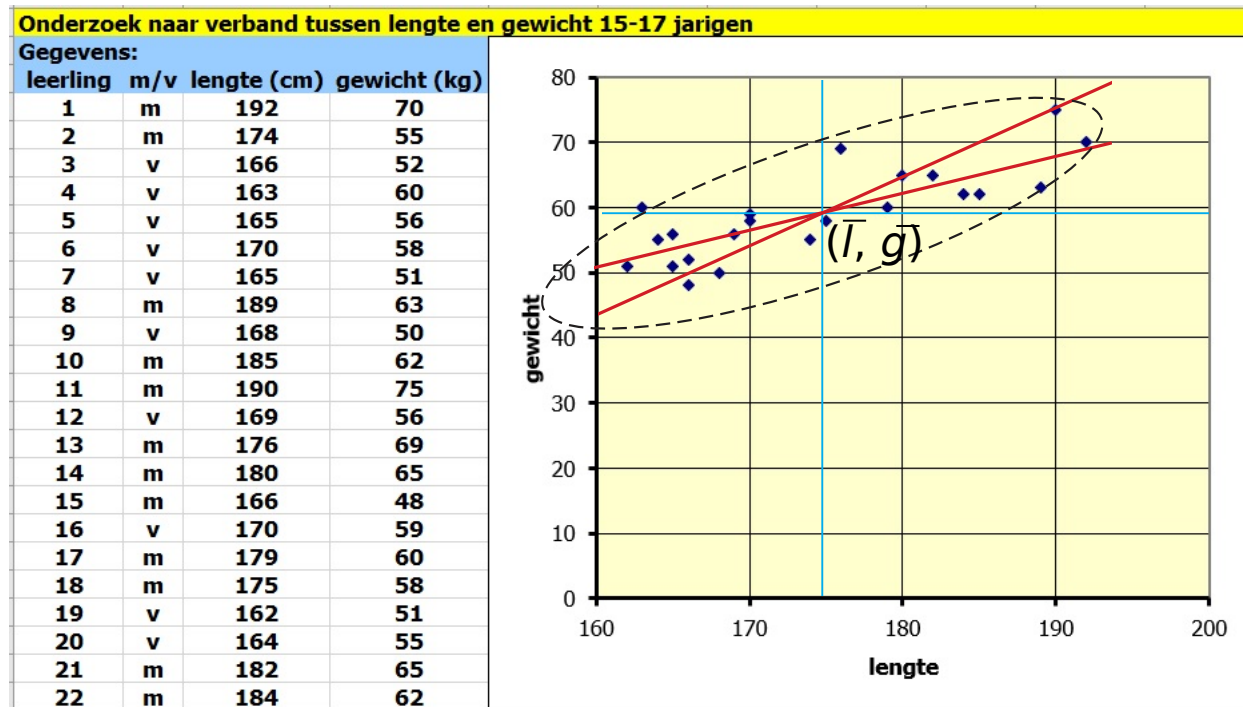
Figuur 6.4

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Voer de berekening van de regressielijn bij de gegevens van de 4HAVO-klas zelf uit met behulp van de grafische rekenmachine.
- Welke betekenis heeft deze regressielijn als je aanneemt dat de groep leerlingen voldoende representatief is voor alle 15-17 jarigen?
- Hoe zwaar zou iemand van 16 jaar moeten zijn als hij 180 cm lang is?

Voorbeeld 2



Figuur 6.5

Bij het verband tussen de lengte l en het gewicht g bij de groep van 22 leerlingen in het bestand [LengteGewicht22h4.xls](#) heb je een regressielijn van g op l gemaakt: $g = 0,59 \cdot l - 44,01$.

Er past echter ook heel goed een regressielijn van l op g bij. Ga na, dat je dan vindt: $l = 1,11 \cdot g + 108,80$.

Deze tweede regressielijn kun je in dezelfde figuur tekenen als de eerste. Deze twee regressielijnen zijn verschillend!

Als je van een leerling van 15-17 jaar met een lengte van $l = 180$ cm het gewicht zou moeten voorspellen, vind je volgens de eerste regressielijn ongeveer 62,19 kg, maar volgens de tweede regressielijn hoort bij een gewicht van 62,19 kg een lengte van 177,83 cm!

Dit verschil is het **regressie-effect**.

Dat regressie-effect ontstaat doordat er geen volledige correlatie tussen g en l is, de correlatiecoëfficiënt is 'slechts' ongeveer 0,81 en dat is minder dan 1.

Opgave 4

In [Voorbeeld 2](#) zie je dat er twee regressielijnen kunnen worden gemaakt bij elk verband tussen twee variabelen.

- Bereken zelf ook de regressielijn van l op g .
- Bereken bij beide regressielijnen het gewicht dat zou moeten horen bij een 15-17 jarige die precies één standaardafwijking groter is dan de gemiddelde lengte.
- Wijkt dit gewicht meer of minder dan één standaardafwijking van het gemiddelde af? Geef voor beide regressielijnen antwoord op deze vraag.

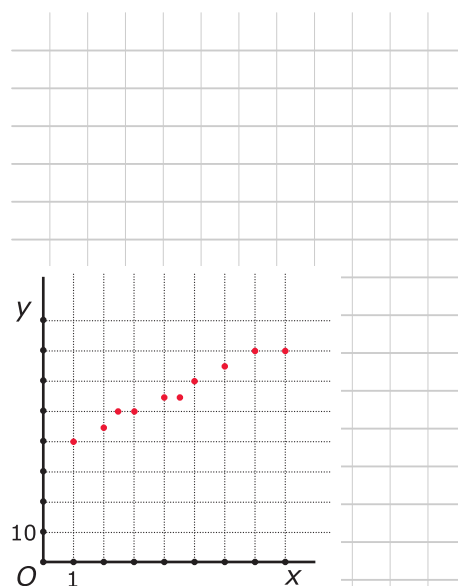
Opgave 5

Laat zien dat het product van de twee regressiecoëfficiënten precies het kwadraat van de correlatiecoëfficiënt is.

Verwerken**Opgave 6**

Bekijk dit spreidingsdiagram uit de eerste opgave bij de **Uitleg** nog eens.

- Stel een formule op voor de regressielijn van x op y .
- Teken zelf het spreidingsdiagram met daarin beide regressielijnen.
- Is er sprake van een regressie-effect? Zo ja, laat dit dan met een rekenvoorbeeld zien.

**Figuur 6.6****Opgave 7**

Om te onderzoeken of er enig verband bestaat tussen de lengte van een vader en die van zijn zoon zijn de lengtes van 12 vaders en die van hun oudste zoons gemeten op het moment dat die zoons volwassen werden. De gegevens staan in deze tabel.

lengte vader v in cm	173	168	178	170	180	165	185	175	180	178	183	188
lengte zoon z in cm	180	175	180	173	183	175	180	173	188	178	180	185

Tabel 6.1

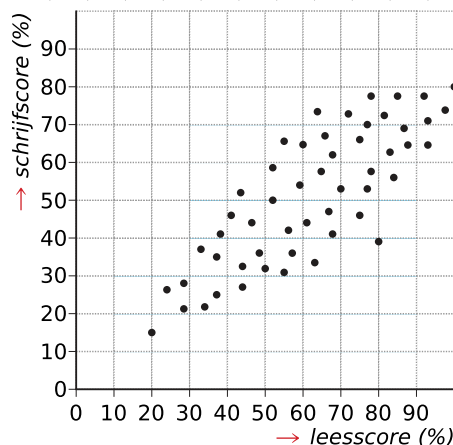
- Was er sprake van een positieve of een negatieve correlatie? Wat betekent dit in de praktijk?
- Stel de regressielijn op van z op v bij deze gegevens.
- Als een bepaalde vader 1,77 m lang is, hoe lang zou dan zijn oudste zoon moeten zijn?
- Wat betekent het optredende regressie-effect voor de bepaling van de lengte van een zoon waarvan de vader bijvoorbeeld 2 m lang is?

Opgave 8

Een basisschool heeft een leestest en schrijftest Nederlands afgenomen bij de leerlingen in groep acht. De resultaten zijn verwerkt in een puntenwolk.

Er lijkt een verband te zijn tussen de schrijfscore S en de leesscore L .

- Stel een formule op voor de trendlijn die het verband tussen S en L weergeeft.
- Geef met behulp van de formule uit a een schatting van de schrijfscore bij een leesscore van 80%.
- Geef met behulp van de formule uit a een schatting van de leesscore bij een schrijfscore van 10%.

**Figuur 6.7**

Opgave 9

In de tabel vind je het aantal inwoners N in een bepaalde stad.

Jaartal	1960	1970	1980	1990	2000
Aantal inwoners N	23.107	25.880	28.985	32.479	36.358

Tabel 6.2

Er wordt aangenomen dat N een exponentiële functie is van t , de tijd in jaren met $t = 0$ in 1960.

- Maak het spreidingsdiagram van $\log(N)$ afhankelijk van t .
- Bereken de correlatiecoëfficiënt van $\log(N)$ en t .
- Voorspel met behulp van de regressielijn van $\log(N)$ op t het aantal inwoners in 2010 en 2020.
- Waarom is er vrijwel geen regressie-effect?

Opgave 10

Om het verband tussen het gewicht G (in pounds) en de braadtijd voor kalkoenen te onderzoeken, werd onder gelijke omstandigheden nagegaan hoeveel minuten t het duurde tot het binnenste van een kalkoen de temperatuur van 85°C bereikte. Er werden diverse kalkoenen aan dit onderzoek onderworpen. Ze hadden een gemiddeld gewicht van 15,24 pounds met een standaardafwijking van 6,07. Voor de waarden van t vonden de onderzoekers een gemiddelde van 205,4 minuten met een standaardafwijking van 59,1. De regressielijn van t op G had de vergelijking: $t = 9,65G + 58,40$. Hoeveel bedroeg de correlatiecoëfficiënt?

Opgave 11

In 1947 hielden de wiskundigen Freudenthal en Sittig een statistisch onderzoek ten behoeve van een nieuw maatsysteem voor vrouwenkleding in opdracht van het warenhuis De Bijenkorf. Zij lieten daarbij een grote verscheidenheid aan lichaamsmaten opmeten van 5001 vrouwen. In het bestand [StatFS-Bijenkorf1947.xls](#) vind je enkele gegevens.

Gebruik de werkbladen 'mouwlengte en kniehoogte' en 'mouwlengte-kniehoogte'.

Op het werkblad 'mouwlengte-kniehoogte' zie je een zogenaamde kruistabel waarin de combinaties mouwlengte-kniehoogte zijn weergegeven. De hierbij gevonden correlatiecoëfficiënt is ongeveer 0,6271.

- Bereken op het werkblad 'mouwlengte-kniehoogte' de standaardafwijkingen van beide statistische variabelen.
- Stel vergelijkingen op van de beide bijbehorende regressielijnen met de constanten in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken met behulp van deze regressielijnen de gemiddelde kniehoogte van een vrouw met een mouwlengte van 60 cm. Is er sprake van een groot regressie-effect?

Toepassen

Opgave 12: Vliegsnelheid en lichaamslengte (vervolg)

Biologen veronderstellen op grond van metingen dat er bij vliegen- de dieren een verband bestaat tussen de lichaamslengte L (in cm) en de vliegsnelheid v (in cm/s).

Vliegsnelheid en lichaamslengte bij verschillende dieren			
Soort		Lengte L in cm	Vliegsnelheid v in cm/s
1.	<i>Drosophila melanogaster</i> (fruitvlieg)	0,2	190
2.	<i>Tabanus affinis</i> (paardenvlieg)	1,3	660
3.	<i>Archilochus colubris</i> (kolibriesoort)	8,1	1120
4.	<i>Anax sp.</i> (waterjuffer)	8,5	1000
5.	<i>Eptesicus fuscus</i> (grote bruine vleermuis)	11,0	690
6.	<i>Phylloscopus trochilus</i> (fitis)	11,0	1200
7.	<i>Apus apus</i> (gierzwaluw)	17,0	2550
8.	<i>Cypselurus cyanopterus</i> (vliegende vis)	34,0	1560
9.	<i>Numenius phaeopus</i> (regenwulp)	41,0	2320
10.	<i>Anas acuta</i> (pijlstaarteend)	56,0	2280
11.	<i>Olor columbianus bewicki</i> (kleine zwaan)	120,0	1880
12.	<i>Pelecanus onocrotalus</i> (witte pelikaan)	160,0	2280

Tabel 6.3

- Bekijk het spreidingsdiagram voor $\log(L)$ en $\log(v)$ dat je in het vorige onderdeel hebt gemaakt.
- Bereken de regressiecoëfficiënt van $\log(v)$ op $\log(L)$.
- Er bestaat tussen L en v dus een verband van de vorm $\log(v) = a \cdot \log(L) + b$. Laat zien dat dit betekent dat v een machts- functie is van L en stel een formule voor die machtsfunctie op.

Testen

Opgave 13

In een Amerikaans laboratorium heeft men proeven genomen waarbij gelet werd op het verband tussen de hoogte van de be- waartemperatuur F in graden Fahrenheit en de werkzaamheid W van een bepaald geneesmiddel. Bij temperaturen van 30° , 50° , 70° en 90° (Fahrenheit) werden drie porties van gelijk gewicht uit een- zelfde productie 20 dagen bewaard. Na deze periode werd op iden- tieke wijze de werkzaamheid van de porties vastgesteld. De werk- zaamheid werd uitgedrukt in percentages van de werkzaamheid zoals die was voor het bewaren.

Bewaartemperatuur F ($^\circ\text{F}$)	30	50	70	90
Werkzaamheid W (%)	39, 42, 35	32, 26, 33	19, 27, 23	14, 19, 21

Tabel 6.4

a Verwerk deze gegevens in een spreidingsdiagram en bereken de correlatiecoëfficiënt. Is er sprake van een correlatie tussen W en F ?

b Stel de vergelijking op van de regressielijn van W op F . Waarom ligt deze regressielijn meer voor de hand dan die van F op W ?

Het verband tussen de temperatuur in graden Fahrenheit F en die in graden Celsius C wordt zoals bekend gegeven door:
 $F = 1,8C + 32$.

c Stel nu een vergelijking op van de regressielijn van W op C .

d Is de correlatiecoëfficiënt tussen W en C anders dan die tussen W en F ? Verklaar je antwoord.

Uit andere experimenten is gebleken dat de werkzaamheid bij een vaste bewaar temperatuur exponentieel afhangt van de lengte van de bewaarperiode.

e Schat de gemiddelde werkzaamheid van porties die 40 dagen bij een temperatuur van 20 °C zijn bewaard.

Practicum

Met deze practica leer je hoe je de **de trendlijn** met de grafische rekenmachine tekent en berekent.

- [Trendlijn, correlatie en de TI84](#)
- [Trendlijn, correlatie en de TIInspire](#)
- [Trendlijn, correlatie en de Casio fx-CG50](#)
- [Trendlijn, correlatie en de HPprime](#)
- [Trendlijn, correlatie en de NumWorks](#)

Met het volgende practicum kun je zien hoe je **de trendlijn en de correlatiecoëfficiënt in Excel** berekent. Dat is handig als je een grote set gegevens hebt. Je treft er ook in aan hoe je de **regressielijn**, dat is de meest geschikte lijn door de puntenwolk, kunt tekenen en er door Excel de vergelijking van kunt laten opstellen. In Excel heet die lijn de 'trendlijn'. In het volgende onderdeel hoor je daar meer over.

- [Correlatie en regressie](#)

OPMERKING:

Natuurlijk is het veel mooier om een eigen dataset met gegevens van leerlingen in jouw jaargroep te gebruiken. Die moet je dan wel eerst zelf maken: statistisch onderzoek!

2.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Hypothesen en verbanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Merk op dat het nu ook nuttig is om de onderwerp 'Discrete kansmodellen' en 'Continue kansmodellen' nog een keer te bekijken. In veel opgaven worden zowel de normale verdeling als de binomiale verdeling gebruikt.

Begrippenlijst

- begrip hypothese toetsen — nulhypothese en alternatieve hypothese — fout van de eerste soort, kritiek gebied
- binomiale toets — significantieniveau — éénzijdig en tweezijdig toetsen
- normale toetsing van het gemiddelde
- tekentoets — X^2 -toets — normale toets van het verschil
- spreidingsdiagram, puntenwolk — correlatiecoëfficiënt — lineair statistisch verband
- lineaire regressie — regressielijn

Activiteitenlijst

- bij hypothese toetsen de kans op een fout van de eerste soort bepalen
- een binomiale toets uitvoeren bij gegeven significantieniveau
- een normale toets van het gemiddelde uitvoeren bij gegeven significantieniveau
- een tekentoets, een X^2 -toets en een normale verschiltoets uitvoeren
- onderzoeken of tussen twee statistische variabelen een lineair verband zou kunnen bestaan met behulp van de correlatiecoëfficiënt
- de regressielijn opstellen bij een lineair verband tussen twee statistische variabelen en het regressie-effect interpreteren

Achtergronden

In de **inductieve statistiek** probeer je om aan de hand van een steekproef informatie omtrent de gehele populatie te krijgen. Maar zo krijg je alleen beperkte informatie. De inductieve statistiek geeft methoden om daarmee uitspraken over de populatie als geheel te doen. Bekende methoden zijn hypothesen toetsen, schattingsmethoden, correlatie en regressie.

Francis Galton (1822–1911) richtte aan het Londense University College een leerstoel in de eugenetica op. De wiskundigen die deze leerstoel bezetten hebben veel voor de ontwikkeling van de mathematische statistiek betekend. Zij ontwikkelden vooral de

methoden van statistische toetsing. **Karl Pearson (1857–1936)** bedacht de chi-kwadraat-toets waarmee een antwoord kon worden gegeven op de vraag hoe goed een theoretische verdeling past bij de gevonden gegevens. Zijn opvolger **Ronald Fischer (1890–1962)** en zijn volgelingen ontwikkelden methoden die geschikt zijn voor kleine steekproeven en vonden diverse verdelingen die juist voor die situatie geschikt zijn. Verder formuleerden zij de principes van het hypothese toetsen en vonden een techniek die bekend werd als de variantieanalyse. De variantieanalyse draaide om het met wiskundige methoden scheiden van ‘echte effecten’ en ‘fouten’. Als een experiment een echt effect oplevert, blijkt uit de methode hoe sterk dit effect is in verhouding tot de fout.

Vanaf de jaren '20 van de vorige eeuw werd de statistiek voor wiskundigen een steeds volwaardiger onderwerp van onderzoek, waardoor de methoden sterk werden verfijnd en een exactere onderbouwing kregen. In 1928 publiceerden **Jerzy Neyman (1894–1981)** en **Egon Pearson (1895–1980)** (zoon van Karl Pearson) enkele geschriften waarin begrippen als ‘fout van de tweede soort’ en ‘betrouwbaarheidsinterval’ werden ingevoerd. In die tijd begon ook de industrie steeds meer de statistische methoden toe te passen, met name bij kwaliteitscontrole. Bovendien werd er gezocht naar steeds betere methoden om goede representatieve steekproeven te nemen.

Vanaf 1939 werd door **Abraham Wald (1902–1950)** de statistische beslissingstheorie ontwikkeld. Hierin werd de statistiek opgevat als een spel met de natuur als tegenstander. Hoewel dit een zeer algemene theorie is wordt hij tegenwoordig door heel veel statistici gebruikt.

Testen

Opgave 1

Een fabrikant beweert dat hoogstens 20% van de door hem geleverde producten niet deugt. Omdat de fabrikant toegeeft dat het percentage wel eens 20% zou kunnen zijn is de nulhypothese $H_0 : p = 0,2$. Om dit te toetsen kun je bijvoorbeeld een steekproef van 40 producten nemen.

- a Hoe luidt de alternatieve hypothese?
- b Wat stelt p voor?
Als significantieniveau wordt 5% genomen.
- c Wat wil dat zeggen?
- d Bij welke aantallen wordt de nulhypothese verworpen?

Opgave 2

De belastingdienst beweert dat wel 30% van de Nederlanders op enigerlei wijze de belasting ontduikt. Deze mening wil je toetsen met een significantieniveau van 5%.

- a Bepaal het kritieke gebied in een steekproef van 400 Nederlanders.
- b Je neemt een steekproef van 20.000 Nederlanders die belasting betalen. Bepaal ook nu het kritieke gebied.

Opgave 3

In een tijdschrift stond: "In 2009 behaalde, landelijk gezien, 75% van de kandidaten op het vwo die examen deden in het vak wiskunde A een voldoende." Een zekere vwo-school had dat jaar 66 eindexamenkandidaten waarvan er 44 examen deden in wiskunde A. Slechts 7 kandidaten behaalden een onvoldoende.

Bepaal de grootst mogelijke betrouwbaarheid waarmee je nog juist aan de uitspraak gedaan in het tijdschrift mag twijfelen.

Opgave 4

Op het etiket van een pot jam staat dat het percentage rietsuiker 12,4% is. Om dit te controleren wordt het percentage rietsuiker van 20 willekeurige potten jam bepaald.

- Formuleer de hypothesen in deze situatie. Je mag aannemen dat het percentage rietsuiker normaal verdeeld is.
- Schat met deze resultaten de standaardafwijking in het percentage rietsuiker.

Deze waarde van de standaardafwijking mag je bij de rest van deze opgave blijven gebruiken.

- Toets je hypothese met een significantieniveau $\alpha = 0,10$.
- Bij welk gemiddeld percentage zou de nulhypothese verworpen worden?

Opgave 5

Een geldstuk is zuiver als de kans op munt gelijk is aan de kans op kruis. Of dat zo is kun je onderzoeken door maar vaak genoeg met dit geldstuk te gooien.

- Is er met een significantie van 1% reden om aan te nemen dat het geldstuk niet zuiver is als 47 van de 100 keer kruis gegooit wordt?
- Stel je voor dat er 1000 keer wordt gegooit. Bij welk aantal keren kruis is er nu reden om aan te nemen dat het geldstuk niet zuiver is? Neem weer $\alpha = 0,01$.

11,9	11,1	11,4	12,6
11,6	11,4	11,7	11,8
11,8	11,8	12,4	12,5
11,7	12,3	11,3	12,2
11,9	12,6	11,7	11,8

Tabel 7.1

Opgave 6

Op 9 november 1965 viel de stroom uit in New York City, een storing die 24 uur duurde: 'The Great Blackout'. Negen maanden later schreven de kranten over een geboortenexplosie in New York. De tabel vermeldt het aantal geboorten in New York in een periode van 270 tot 290 dagen na 'The Great Blackout', in augustus 1966. Het gemiddelde aantal geboorten per dag, dat over deze periode ongeveer 435 bedraagt, blijkt echter niet zoveel hoger te liggen dan het gemiddelde over het jaar 1966 dat 430 bedraagt. Neem aan dat het aantal geboorten per dag in New York City over het gehele jaar 1966 redelijk constant is.

- a Laat zien, dat het aantal dagen in de periode van 4 tot en met 23 augustus waarop het gemiddelde boven het jaargemiddelde ligt niet significant hoog is. Neem een significantieniveau van 5%.

In de 20 dagen voorafgaande aan 4 augustus 1966 bleek op zoveel dagen het aantal geboorten kleiner te zijn dan 430, dat men van een significante afwijking kan spreken bij een significantieniveau van 5%.

- b Op hoeveel dagen was er sprake van een aantal geboorten beneden het gemiddelde?

4 augustus 1966 was een donderdag. Op de drie zondagen in de periode van 4 tot en met 23 augustus 1966 was het aantal geboorten kleiner dan 379. Neem aan dat het aantal geboorten in New York normaal is verdeeld met een gemiddelde van 430 en een standaardafwijking van 40 in de 50 weken die volgen op de periode van 4 tot en met 23 augustus 1966.

- c Toon aan, dat in twee decimalen nauwkeurig de kans dat op een willekeurig gekozen dag het aantal geboorten kleiner dan 379 is, gelijk is aan 0,10.

In de 50 zondagen die volgen op de periode van 4 tot en met 23 augustus 1966 blijken er 10 zondagen te zijn met een aantal geboorten kleiner dan 379.

- d Is het aantal zondagen met een geboorte kleiner dan 379 significant hoog? Neem $\alpha = 5\%$.

dag	aantal geboorten
04/08	448
05/08	466
06/08	377
07/08	344
08/08	448
09/08	438
10/08	455
11/08	468
12/08	462
13/08	405
14/08	377
15/08	451
16/08	497
17/08	458
18/08	429
19/08	434
20/08	410
21/08	351
22/08	467
23/08	508

Tabel 7.2

Opgave 7

In 1947 hielden de wiskundigen Freudenthal en Sittig een statistisch onderzoek ten behoeve van een nieuw maatsysteem voor vrouwenkleding in opdracht van het warenhuis De Bijenkorf. Zij lieten daarbij een grote verscheidenheid aan lichaamsmaten opmeten van 5001 vrouwen. Zij vonden onder andere een sterke correlatie tussen de 'taille' (de omtrek van het lichaam gemeten ter hoogte van de navel) en de 'bovenwijdte' (de omtrek van het lichaam gemeten ter hoogte van de borst). De gevonden correlatiecoëfficiënt bedroeg ongeveer 0,9058.

In hun rapport 'De juiste maat' geven zij voor de bovenwijdte b een gemiddelde van 97,99 cm met een standaardafwijking van 10,12 cm en voor de taille t een gemiddelde van 80,45 cm met een standaardafwijking van 10,80 cm.

- Welke betekenis heeft deze hoge correlatie tussen b en t voor een spreidingsdiagram van deze twee variabelen?
- Stel de vergelijking op van de regressielijn van b op t met de constanten in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken met behulp van deze regressielijn de gemiddelde bovenwijdte van een vrouw met een taille van 90 cm.
- Waarom zal er in dit geval maar een klein regressie-effect zijn?

Toepassen

Bij een **statistisch onderzoek** zoek of verzamel je data zodat je een uitspraak kunt doen over je onderzoeksvraag en een betrouwbare en begrijpelijke onderbouwing kunt geven. Bij de rapportage respecteer je altijd de privacy van deelnemers en verwerk je de gegevens altijd anoniem.

Bij een onderzoek is het essentieel dat je een goede **onderzoeksvraag** hebt. Hierbij zoek je betrouwbare **data**. Deze data verwerk je tot een overzichtelijk geheel. Ze vormen de onderbouwing van het antwoord op je onderzoeksvraag.

Je trekt **conclusies** die je onderbouwt met tabellen, grafieken, statistische maten en redeneringen.

Verwerk alles in een mooi rapport, een heldere presentatie of een overzichtelijke poster.

Het is gebruikelijk een goed onderzoek te beëindigen met een **kritische reflectie**.

Opgave 8: Statistisch onderzoek: CBS in de klas

Via **Leren met het CBS** kun je een databestanden vinden om statistisch onderzoek mee te doen.

- Kies één van de beschikbare databestanden en bedenk daarbij een goede onderzoeksvraag.
- Voer het onderzoek uit, maak geschikte tabellen en diagrammen, bereken passende centrum- en spreidingsmaten en trek conclusies. Formuleer een antwoord op je onderzoeksvraag.

Opgave 9: Chicago marathon 2016

Elke grote stad kent een marathon. Zo ook de stad Chicago. De resultaten van de Chicago Marathon 2016 (ruim 40000 atleten) staan in **dit Excel-document**. Je kunt nu aan de slag met grafieken maken, statistische maten berekenen, groepen vergelijken.

- Formuleer een geschikte onderzoeksvraag.
- Voer een eigen statistisch onderzoek uit met deze gegevens.



Figuur 7.1

Opgave 10: Examenresultaten van een school

In het bestand **HAVO examenresultaten** vind je de eindexamenresultaten van de HAVO afdeling van een grote scholengemeenschap in NL.

Hiermee kun je op zoek gaan naar bijvoorbeeld

- of er is verschil tussen de natuurkunderesultaten bij leerlingen met wiskunde A en leerlingen met wiskunde B;
- of er verschillen zijn tussen jongens en meisjes bij een bepaald vak;
- of er een correlatie is tussen de cijfers bij maatschappijwetenschappen en geschiedenis;
- en nog veel meer.

- a Formuleer een geschikte onderzoeksvraag.
- b Voer een eigen statistisch onderzoek uit met deze gegevens.

Examen

Opgave 11: Basketballen

Jaarlijks controleert de materiaalcommissaris of de ballen van Flits voldoen aan de eisen die de basketbalbond stelt. Deze zijn:

De omtrek van de bal mag niet minder bedragen dan 75 cm en niet meer dan 78 cm. Het gewicht mag niet minder zijn dan 600 g en niet meer dan 650 g.

Bij zo'n controle komt hij tot de ontdekking dat het gewicht van de ballen klopt, maar dat de omtrek van 15 ballen niet in orde is. Omdat hierbij ook een redelijk aantal nieuwe ballen is, stelt hij zich in verbinding met de leverancier: het bedrijf Balfa. Dit bedrijf beweert dat het dagelijks 125 ballen produceert, waarvan de omtrek normaal verdeeld is met een gemiddelde van 76,5 cm en een standaarddeviatie van 0,70 cm. Neem aan dat deze gegevens juist zijn.

- a Toon aan dat men kan verwachten dat 4 ballen in de dagproductie niet voldoen aan de eisen die de bond stelt aan de omtrek.
- b Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat in een aselechte steekproef van 5 door Balfa gemaakte ballen, elke bal voldoet aan de eisen die de bond stelt aan de omtrek.

Op grond van de eigen gegevens beweert de verkoper van Balfa dat gemiddeld hoogstens één op de twintig ballen niet aan alle eisen van de bond voldoet. De materiaalcommissaris heeft zo zijn twijfels. Zij spreken met elkaar af de bewering van de verkoper te toetsen door middel van een aselechte steekproef van 15 stuks bij een significantieniveau van 5%. Indien het resultaat de verkoper in het ongelijk stelt, krijgt Flits de 15 nieuwe ballen uit de steekproef gratis.

X is het aantal ballen in de steekproef dat niet voldoet aan de eisen van de bond.

- c Bereken de kleinste waarde van X waarbij Flits de ballen gratis krijgt.

(bron: examen wiskunde A vwo 1990, tweede tijdvak)

Opgave 12: Kwaliteitscontrole

In een fabriek worden plastic zakken gevuld met suiker. De vulmachine staat afgesteld op 510 gram. Neem aan dat het gewicht van de zakken suiker normaal verdeeld is met een gemiddelde μ van 510 gram en een standaardafwijking σ van 4 gram.

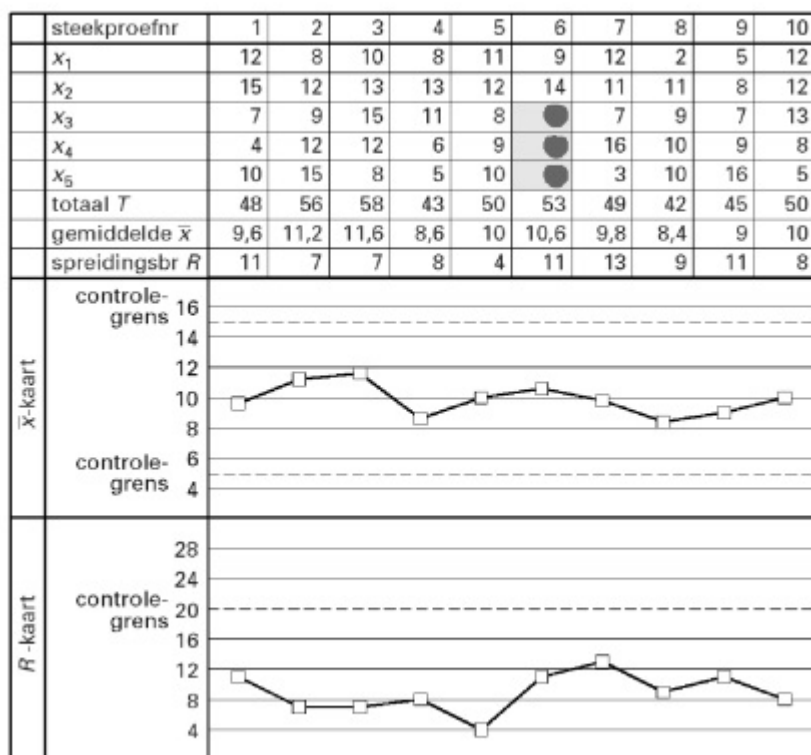
- a Bereken hoeveel procent van alle zakken een gewicht minder dan 500 gram zal hebben.

Om de kwaliteit van het vulproces te bewaken, wordt elk uur een aselechte steekproef van 5 zakken suiker genomen. Van elke zak noteert men het gewicht. Ook wordt van de steekproef het totale gewicht T berekend.

- b Bereken de kans dat het totale gewicht van de steekproef minder is dan 2525 gram.

Verder bepaalt men van elke steekproef het gemiddelde gewicht $\bar{x}$ en de spreidingsbreedte R (dat is het verschil tussen de grootste en de kleinste meting). Men noteert al deze gegevens op een controlekaart, de $\bar{x}/R$ -kaart. Op de $\bar{x}/R$ -kaart hieronder staan de meetresultaten van 10 steekproeven. Iedere steekproef bestaat uit 5 zakken. Op de controlekaart worden de afwijkingen van 500 gram bij ieder van deze 5 zakken genoteerd als x_1 , x_2 , x_3 , x_4 en x_5 . Zo heeft de derde zak van de tweede steekproef een gewicht van 509 gram. Dit is genoteerd als 9.

Het gemiddelde van de eerste steekproef is 509,6 gram. Dit wordt dan genoteerd als 9,6. De spreidingsbreedte van de eerste steekproef is $515 - 504 = 11$ gram.



Figuur 7.2

Bij steekproef nummer 6 zijn enkele gegevens onleesbaar gewor-

den.

- c Welke getallen kunnen hier bijvoorbeeld gestaan hebben? Licht je antwoord toe.

Bij de controle van het vulproces met behulp van de $\bar{x}/R$ -kaart let men erop of $\bar{x}$ of R de zogeheten controlegrenzen overschrijden. Deze controlegrenzen zijn in de grafieken met stippellijnen aangegeven. Zodra bij een steekproef een van deze grenzen overschreden wordt, slaat men alarm.

Op een gegeven moment slaat men alarm bij een steekproef, terwijl met de waarde van $\bar{x}$ niets mis is.

- d Wat zouden de vijf gewichten in deze steekproef bijvoorbeeld kunnen zijn? Licht je antwoord toe.

De zakken zijn bedrukt met het bedrijfslogo. Soms is dit logo onscherp afgedrukt. Volgens de afdeling Verpakkingen heeft 5% van de zakken een onscherp logo. Een werknemer van die afdeling vermoedt echter dat dit percentage hoger is dan 5%. Er wordt een steekproef getrokken van 50 zakken. Op 6 van de 50 zakken is het bedrijfslogo onscherp.

- e Onderzoek of de 6 zakken met het onscherpe bedrijfslogo voldoende aanleiding zijn om de werknemer in het gelijk te stellen. Neem als significantieniveau $\alpha = 0,025$.

(bron: examen wiskunde A vwo 2001, eerste tijdvak, opgave 3)

Opgave 13: Vakkenkeuze

In het voorjaar van 1994 zijn bij een onderzoek naar vakkenkeuze 344 jongens en 493 meisjes ondervraagd die toen eindexamen havo deden. Nederlands was voor iedereen verplicht. Havo-leerlingen moesten naast Nederlands nog ten minste 5 andere vakken kiezen. In deze tabel is te zien door hoeveel procent van de ondervraagden de andere vakken zijn gekozen.

Vakkenkeuze van jongens en meisjes op havo		
vak	jongens (in %)	meisjes (in %)
Duits	31,1	46,7
Engels	98,8	97,6
Frans	10,2	38,5
Aardrijkskunde	19,2	28,2
Geschiedenis	25,3	30,2
Economie	60,2	47,9
Handelswetenschappen	43,0	29,8
Wiskunde A	43,3	62,3
Wiskunde B	54,7	22,3
Biologie	23,5	45,2
Natuurkunde	57,6	17,0
Scheikunde	42,2	24,5
Tekenen	7,0	15,2
Maatschappijleer	2,9	4,5
Muziek	0,9	3,4
Handenarbeid	2,3	4,9
Textiele werkvormen	0,0	0,4
Spaans	0,0	0,6

Tabel 7.3

- a** Toon aan dat van de ondervraagde leerlingen meer meisjes dan jongens economie deden.

De meeste leerlingen hadden naast Nederlands 5 vakken gekozen. Sommige leerlingen hadden naast Nederlands 6 vakken gekozen. Geen van de leerlingen had naast Nederlands meer dan 6 vakken gekozen.

- b** Bereken hoeveel procent van de ondervraagde meisjes een extra vak deed.

Bij het onderzoek werd ook gevraagd of je, als je opnieuw zou mogen kiezen, weer precies hetzelfde vakkenpakket gekozen zou hebben. De onderzoekers vermoedden dat ten minste de helft van de kandidaten ontevreden was over hun huidige pakket. Een onderwijsdeskundige was het daar niet mee eens. Kort voor het onderzoek beweerde hij dat minder dan de helft van alle havo-eindexamenkandidaten achteraf liever een ander pakket gekozen zou hebben.

Neem aan dat de groep van 837 ondervraagde leerlingen een aselechte steekproef vormt uit alle havo-eindexamenkandidaten. Van deze groep zouden 359 leerlingen een ander pakket gekozen hebben, zo bleek uit het onderzoek.

- c Onderzoek of bij een significantieniveau van 1% het onderzoeksresultaat voldoende aanleiding geeft om de onderwijsdeskundige gelijk te geven.

(bron: examen wiskunde A vwo 2001, tweede tijdvak, opgave 1, gedeelte)

Opgave 14: Stoppen met roken

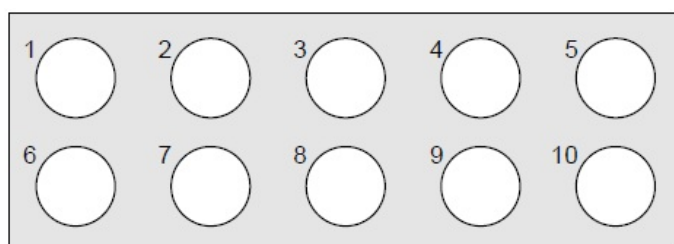
Veel mensen beginnen op jonge leeftijd met roken en proberen daar op latere leeftijd weer mee op te houden. Dat lukt niet altijd. Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) publiceert regelmatig cijfers waarmee het rookgedrag van Nederlanders kan worden bestudeerd. In de tabel vind je enkele getallen.

rokers en aantallen sigaretten		
jaar	2001	2005
aantal Nederlanders, in miljoenen	16,0	16,3
percentage rokers	33,3%	29,5%
gemiddeld aantal sigaretten per roker per jaar	4526	4271

Tabel 7.4

- a Bereken met hoeveel procent het totale aantal gerookte sigaretten in 2005 is afgenomen ten opzichte van 2001.

Er zijn veel hulpmiddelen om minder te gaan roken of er zelfs helemaal mee te stoppen. Eén daarvan is het gebruik van tabletten van het merk Fumostop. Om na te gaan of Fumostop een middel is dat inderdaad helpt, wordt het volgende onderzoek uitgevoerd. Uit alle zware rokers wordt aselekt een groep van 18 proefpersonen gekozen. Elke proefpersoon krijgt 10 tabletten die uiterlijk niet van elkaar verschillen. De tabletten zijn verpakt in doordrukstrips met bij elk tablet een nummer.



Figuur 7.3

Elke proefpersoon moet 10 dagen lang iedere dag bij het opstaan één willekeurig gekozen tablet innemen, het nummer van dat tablet noteren en bijhouden hoeveel sigaretten hij die dag rookt. Wat de proefpersonen niet weten maar de onderzoekers wel, is dat 5 van de tabletten inderdaad van het merk Fumostop zijn. De andere 5 tabletten bevatten geen enkele werkzame stof. We geven de 'echte' tabletten aan met F en de andere tabletten met NF. Aan de genoteerde tabletnummers kunnen de onderzoekers zien wanneer

de F- en de NF-tabletten ingenomen zijn.

Nico is één van de 18 proefpersonen. De mogelijkheid bestaat dat hij om de dag een F-tablet inneemt, waarmee bedoeld wordt dat hij de ene dag een F-tablet en de andere dag een NF-tablet inneemt.

- b** Bereken de kans dat hij om de dag een F-tablet inneemt.

De proefpersonen kiezen hun tabletten iedere dag dus volledig ase-lect. Het kan dus gebeuren dat een proefpersoon de eerste dag een van de tabletten met nummer 1 of nummer 2 kiest.

- c** Bereken hoe groot de kans is dat 6 of meer proefpersonen op de eerste dag van het onderzoek een van de tabletten met nummer 1 of 2 kiezen.

De onderzoekers vermoeden dat het gebruik van F-tabletten leidt tot het roken van minder sigaretten. Om dat na te gaan, wordt van elke proefpersoon bijgehouden hoeveel sigaretten hij in totaal heeft gerookt op de vijf dagen met een F-tablet en op de vijf dagen met een NF-tablet. Het resultaat vind je in de tabel hieronder.

aantal sigaretten									
proefpersoon	1	2	3	4	5	6	7	8	9
bij gebruik van F-tabletten	106	90	109	72	103	118	124	103	89
bij gebruik van NF-tabletten	112	108	132	92	96	120	145	129	101
proefpersoon	10	11	12	13	14	15	16	17	18
bij gebruik van F-tabletten	87	92	145	101	100	97	112	104	101
bij gebruik van NF-tabletten	104	127	138	124	121	139	100	93	118

Tabel 7.5

- d** Onderzoek met behulp van een tekentoets of er voldoende aanleiding is om het vermoeden van de onderzoekers te bevestigen. Neem hierbij als significantieniveau 5%.

Van de mensen die in 2006 rookten, rookte 24,5% per dag 20 sigaretten of meer. Rokers rookten toen gemiddeld 11,4 sigaretten per dag. Tine wil onderzoeken of het aantal sigaretten per dag normaal verdeeld zou kunnen zijn. Ze bedenkt de volgende aanpak: "Als er sprake is van een normale verdeling, dan kan ik de bijbehorende standaardafwijking berekenen. Daarna kan ik nagaan of die waarde - in combinatie met dat gemiddelde 11,4 - tot een conclusie leidt."

- e** Bereken die standaardafwijking en toon daarmee aan dat het aantal sigaretten dat een roker per dag in 2006 rookte, niet normaal verdeeld kan zijn.

(bron: examen wiskunde A vwo 2010, eerste tijdvak)

z-waarde 36

a

alternatieve hypothese 64, 81

b

benaderen met een normale stochast 46

beslissingsvoorschrift 64

binomiale stochast 46

bovengrenzen 36

c

causaal verband 100

centrale limietstelling 46

chi-kwadraat toets 90

continue stochast 9

continuïteitscorrectie 46

correlatiecoëfficiënt 100

f

fout van de eerste soort 64

h

hypothese 64

hypothesen toetsen 64

k

kansdichtheidsfunctie 9

kritiek gebied 81

kritieke gebied 64, 72

l

lineair statistisch verband 100

linkszijdige toets 72

n

normaal waarschijnlijkheidspapier 36

normaalkromme 16

normale kansen 16

normale kansverdeling 17

normale stochast 17

normale toets van het gemiddelde 81

nulhypothese 64, 81

o

onbetrouwbaarheidsdrempel 72

overschrijdingskans 73

p

puntenwolk 100

r

rechtszijdige toets 72

regressiecoëfficiënt 110

regressielijn 110

regressie-effect 111

s

significantieniveau 72

significantieniveau α 81

spreidingsdiagram 100

standaard normaalkromme 27

standaardiseren 27, 36

t

tekentoets 90

ten onrechte verwerpen 64

trendlijn 110

tweezijdige toets 72

v

verschiltoets voor gemiddelden 90

vrijheidsgraden 90

w

wortel n wet 27

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

11. Continue kansmodellen

12. Hypothesen en verbanden



www.math4all.nl

