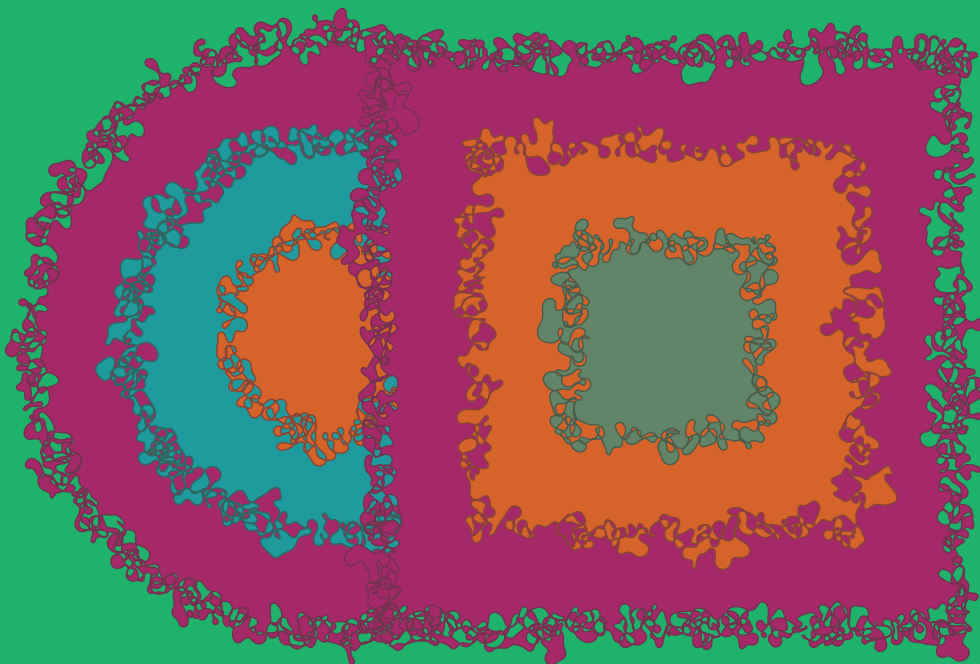


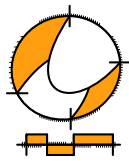
Wiskunde D

5 VWO

Katern 2

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Discrete dynamische modellen 5

- 1.1 Dynamische modellen 6
- 1.2 Webgrafieken 15
- 1.3 Differentievergelijkingen 23
- 1.4 Stelsels 31
- 1.5 Hogere orde 43
- 1.6 Totaalbeeld 51

2 Meetkunde in 3D 57

- 2.1 Vectoren in 3D 58
- 2.2 Inproduct in 3D 67
- 2.3 Lijnen en hoeken 76
- 2.4 Vlakken 86
- 2.5 Onderlinge ligging 98
- 2.6 Hoeken en afstanden 108
- 2.7 Totaalbeeld 116

Register 121

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Discrete dynamische modellen

1.1	Dynamische modellen	6
1.2	Webgrafieken	15
1.3	Differentievergelijkingen	23
1.4	Stelsels	31
1.5	Hogere orde	43
1.6	Totaalbeeld	51

1.1 Dynamische modellen

Inleiding

Een bijzonder type wiskundige modellen dat veel voorkomt is het dynamische model. Daarbij worden rekenmodellen opgesteld van de veranderingen van de situatie met de tijd. En daarmee wordt dan gerekend, of (als de situatie niet te complex is) er wordt geprobeerd één of meer formules af te leiden waarmee de toestand op elk tijdstip kan worden bepaald. Een voorbeeld van een situatie waarin een dynamisch model kan worden opgesteld is de ontwikkeling van het aantal bomen op een perceel dat voor de houtproductie is bestemd.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip dynamisch model en modelformules (recursieformules) opstellen en doorrekenen;
- diverse situaties bekijken waarin een discreet dynamisch model een goede beschrijving is.

Voorkennis

- werken met formules van rijen, directe formules en recursieformules, ook met de grafische rekenmachine;
- de somformules en de verschilformules voor rekenkundige en meetkundige rijen.

Verkennen

Opgave V1

Een bosbouwbedrijf verkoopt het hout van bomen die het zelf aanplant. Het bedrijf beschikt onder andere over een perceel waar 5000 bomen zijn geplant die inmiddels groot genoeg zijn om te worden gekapt. Om dit jaarlijks te kunnen blijven doen worden op de plek van de gekapte bomen ook weer nieuwe bomen aangeplant. Maar die hebben een aantal jaren de tijd nodig om kaprijp te worden, dus het bosbouwbedrijf kapt jaarlijks niet alle bomen, maar 15% ervan en plant er dan weer 1000 bij. Zo kan men op dit perceel jaar in jaar uit bomen kappen. Omdat er meer wordt aangeplant dan gekapt, zal het aantal bomen op dit perceel gaan toenemen, maar daar is ruimte voor.

- Onderzoek hoe het aantal bomen in de loop van de jaren gaat toenemen, bijvoorbeeld door een tabel te maken.
- Zal het aantal bomen op dit perceel de 5000 gaan overstijgen?

Uitleg

Bosbouwbedrijf van Aken verkoopt het hout van bomen die het zelf aanplant. Het bedrijf beschikt over een perceel waar 5000 bomen zijn geplant. Deze bomen zijn inmiddels groot genoeg om te kappen. Om dit jaarlijks te kunnen blijven doen worden op de plek van de gekapte bomen ook weer nieuwe bomen aangeplant. Het bosbouwbedrijf kapt jaarlijks 15% van de bomen en plant er 1000 bij. Er worden meer bomen aangeplant dan gekapt. Het aantal bomen op dit perceel zal daardoor toenemen.

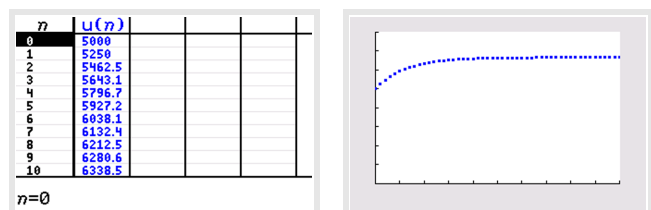
Er wordt jaarlijks gekapt en weer aangeplant, neem je daarom de tijd t in jaar. Het aantal bomen B op het perceel hangt van t af, neem $B(0) = 5000$.

Leid uit de tekst af dat:

$$B(t+1) = B(t) - 0,15 \cdot B(t) + 1000 = 0,85B(t) + 1000$$

Dit is een recursieformule van een rij getallen. Omdat B afhangt van de tijd spreek je van een dynamisch model. En omdat de tijd in stappen van $\Delta t = 1$ wordt doorlopen, is dit een discreet dynamisch model.

Met de grafische rekenmachine kun je er een tabel en een grafiek bij maken. Bekijk het **Practicum**.



Figuur 1.2

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je een voorbeeld van een discreet dynamisch model.

- Licht toe hoe de recursieformule voor $B(t)$ uit de probleemstelling is te halen.
- Waarom heet zo'n model 'dynamisch'?
- Waarom heet zo'n model 'discreet'?

Opgave 2

Bekijk nog eens het bosbouwmodel in de **Uitleg**.

- Hoeveel bedraagt de grenswaarde van het aantal bomen vanuit de recursieformule berekend?
- Het bosbouwbedrijf van Aken besluit jaarlijks minder bomen te gaan aanplanten. Wat gebeurt er met de grenswaarde als er jaarlijks maar 500 bomen worden aangeplant?
- Hoeveel bomen moeten er jaarlijks worden aangeplant om een grenswaarde van ongeveer 6000 bomen te bereiken?



Figuur 1.1

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **discreet dynamisch model** is een rekenmodel voor een praktische situatie die met vaste tijdstappen verandert. Zo'n model bestaat uit:

- variabelen die met de tijd veranderen;
- modelformules van de vorm
 $u(t+1) = u(t) + \Delta u(t)$ met gegeven $u(0)$ en $t = 0, 1, 2, 3, \dots$
 of
 $u(t) = u(t-1) + \Delta u(t)$ met gegeven $u(0)$ en $t = 1, 2, 3, 4, \dots$
 waarin u een variabele en t de tijd voorstelt;
- parameters, constanten die je nog kunt aanpassen.

De modelformules zijn vaak recursieformules (ook wel recursieve formules genoemd, het proces heet ook wel iteratie). Daarmee kan de volgende term alleen berekend worden als de vorige term bekend is. Daarom moet er altijd een beginwaarde bij de formule gegeven zijn. De nummering kan starten bij 0 of bij 1. Dit wordt altijd aangegeven.

De parameters vind je terug in de uitdrukking die $\Delta u(t)$ beschrijft. Ze zijn vaak gebaseerd op bepaalde modelaannames, bijvoorbeeld een schatting van het percentage dat verandert. Bij ingewikkelder modellen kun je ook de tijdstap nog aanpassen. Die is dan niet altijd 1, maar wordt aangegeven met Δt of dt .

Voorbeeld 1

In een zwembad is op zeker moment de chloorconcentratie 1 liter/ m^3 . Dat is te hoog en dus wordt het water verversd. Elk uur wordt 60 m^3 water vervangen door 60 m^3 schoon water. Er zit in totaal 1000 m^3 water in het zwembad.

Bereken na hoeveel uur de chloorconcentratie is gehalveerd.

Antwoord

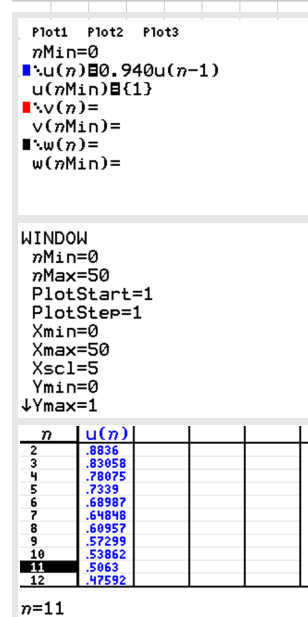
Noem de chloorconcentratie $C(t)$ waarin t de tijd in uren is en C in L/m^3 . Ga ervan uit dat het schone water zich onmiddellijk met al het badwater vermengt, zodat $C(t)$ in het hele zwembad steeds op een bepaald tijdstip hetzelfde is.

Elk uur wordt de chloorconcentratie met $\Delta C(t) = 0,060 \cdot C(t)$ verminderd.

Dan geldt de modelvergelijking:

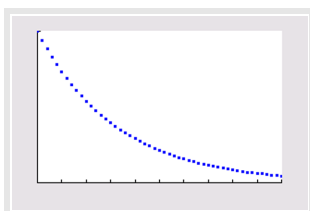
$$C(t+1) = C(t) - 0,060 \cdot C(t) = 0,940 \cdot C(t)$$

De chloorconcentratie op $t = 0$ (als het verversen van het water begint) is $C(0)$.



Figuur 1.3

Voer deze formule in op de grafische rekenmachine. Uit de grafiek of de tabel blijkt dat de halveringstijd ongeveer 11,5 uur is.



Figuur 1.4

Zie voor een uitwerking in Excel het bestand [Modelzwembad](#).

Opgave 3

Voorbeeld 1 beschrijft hoe het water van een groot zwembad wordt verversd omdat de chloorconcentratie te hoog is. Hier dient een discreet dynamisch model als benadering van het voortdurende verversingsproces (uitstromen van vuil water en instromen van schoon water).

- Waarom is dit in werkelijkheid geen discreet model?
- Stel dat je om het uur naar het verversingsproces kijkt. Leg uit waarom er het eerste uur 60 liter chloor verdwijnt. Verklaar waarom er het tweede uur 56,4 liter chloor verdwijnt.
- Leg uit waarom $\Delta C(t) = -0,060 \cdot C(t)$.
- Welke directe formule hoort bij $C(t)$?
- Je kunt op het Excel-werkblad de chloorconcentratie aanpassen. Wat gebeurt er als de concentratie twee keer zo groot wordt?

Opgave 4

Als licht door een bepaald materiaal zoals een glasplaat gaat, neemt de intensiteit ervan voortdurend af. Die afname is recht evenredig met de dikte van de gepasseerde laag materiaal. Noem de intensiteit van het licht $I(d)$ waarin d de dikte van de gepasseerde laag materiaal in meter is. Bekijk eerst wat er gebeurt in stappen van een meter.

- Laat zien dat dan geldt: $I(d + 1) = I(d) - k \cdot I(d)$, waarin k een evenredigheidsconstante is die afhangt van het materiaal.
- De tijd speelt hier schijnbaar geen rol, toch is dit een dynamisch model. Licht dit toe.
- Neem aan dat $k = 0,2$ en $I(0) = 100$. Bereken $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$, $I(4)$ en $I(5)$.
- Bereken vanaf welke dikte niet meer dan 1% van het licht doordringt.

Voorbeeld 2

Je verwarmt water tot 100 °C. Als je het in een kopje overgiet begint het af te koelen. Volgens de warmtewet van Newton is de temperatuurverandering recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving. Stel dat het kopje in een kamer staat met een temperatuur van 20 °C, hoe kun je dit afkoelingsproces dan beschrijven?

Antwoord

Noem de temperatuur $T(t)$ met T in °C en t in minuten.

Het temperatuurverschil met de omgeving is dan $T(t) - 20$.

Volgens de warmtewet van Newton is dan:

$$T(t + 1) = T(t) - c \cdot (T(t) - 20).$$

c is een parameter van het afkoelingsproces die je alleen door meten in een echt experiment kunt bepalen. Eigenlijk is ook de begintemperatuur een parameter, want waarschijnlijk is het water al bij overgieten niet meer precies 100 °C.

In [ModelAfkoelen.xls](#) kun je nagaan hoe het afkoelen verloopt als c is gemeten.



Figuur 1.5

Opgave 5

In [Voorbeeld 2](#) wordt het afkoelingsproces van kokend water beschreven.

- Bekijk niet meteen het antwoord. Probeer eerst zelf te beschrijven hoe het afkoelingsproces verloopt. Misschien ben je in de gelegenheid om metingen te verrichten aan het afkoelen van kokend water.
- Met welke starttemperatuur heb je te maken? Hoeveel bedraagt de 'eindtemperatuur'?
- Bekijk het antwoord en het Excel-werkblad. Ga er van uit dat je stapgrootte 1 minuut is. Leid de bijpassende modelformule $T(t + 1) = T(t) + c \cdot (T(t) - 20)$ af. Verklaar daarbij ook de modelformules in je Excel-werkblad.
- Als je metingen hebt kunnen verrichten, dan heb je een tabel waar een grafiek van T bij past. Probeer door aanpassen van c die grafiek met je Excel-werkblad te benaderen.
- Waarvan zal c afhangen?
- Je kunt (afhankelijk van je metingen) de stapgrootte aanpassen naar bijvoorbeeld 2 minuten. Dan moet wel de factor c kleiner worden genomen. Experimenteer daar even mee. Welke waarden voor c passen bij deze stapgrootte?

Voorbeeld 3

Als je geld leent dan moet je naast een maandelijkse aflossing ook rente betalen over je schuld. Neem aan dat je € 10000,00 leent en dat je deze schuld in twintig maanden wilt afbetalen. Per maand betaal je dan € 500,00. Over de schuld die je aan het begin van elke maand hebt, moet je 0,6% rente betalen. Je betaalt zowel je aflossing als de rente aan het eind van elke maand. Bereken hoeveel deze lening in totaal kost.

Antwoord

In deze situatie kun je een discreet dynamisch model maken bestaande uit twee modelformules.

$B(t)$ is de belasting aan het eind van maand t en $S(t)$ is de schuld aan het begin van de maand t . Neem t in maanden.

- $B(0) = 0$ en $S(0) = 10000$
- $B(1) = 0,006 \cdot 10000 + 500 = 560$ en $S(1) = 10000 - 500 = 9500$
- $B(2) = 0,006 \cdot 9500 + 500 = 557$ en $S(2) = 9500 - 500 = 9000$
- $B(3) = 0,006 \cdot 9000 + 500 = 554$ en $S(3) = 9000 - 500 = 8500$

Dit geeft: $S(t) = S(t-1) - 500$ en $B(t) = 0,006 \cdot S(t-1) + 500$

Bepaal met de grafische rekenmachine het totale bedrag:

$$\sum_{t=1}^{20} B(t) = 10630 \text{ euro.}$$

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** wordt een wijze van geld lenen en terugbetalen besproken. Er zijn twee modelformules.

- a Voer beide recursieformules op de grafische rekenmachine in. Bekijk de tabellen van beide formules.
- b Waarom kun je in dit model niet werken met een andere stapgrootte dan 1 maand?
- c Stel voor $B(t)$ een directe formule op.
- d Wat voor rij is $B(t)$?
- e Bereken het totaal te betalen bedrag met behulp van de juiste somregel.

Opgave 7

Bart leent € 750,00 om een computer te kopen. Deze schuld lost hij in vijftien maanden af in maandelijkse termijnen van € 50,00. Over de schuld die hij aan het begin van elke maand heeft, moet hij aan het eind van elke maand nog 1,2% rente betalen. Hij betaalt zowel de aflossing als de rente aan het eind van elke maand.

$B(t)$ is de betaling aan het eind van maand t en $B(0) = 0$. $S(t)$ is de schuld aan het begin van maand t en $S(0) = 750$.

- a Stel een discreet dynamisch model op voor B en S .
- b Stel een directe formule op voor $B(t)$.
- c Bereken het totale bedrag dat Bart moet betalen.

Verwerken

Opgave 8

Op 1 januari 2015 heb je een saldo van € 1240,00. Je zet dat geld op een spaarrekening. Daarnaast maak je aan het begin van elke maand € 50,00 naar die spaarrekening over, te beginnen op 1 februari 2015. Aan het eind van elke maand krijg je 0,5% rente over het saldo van dat moment. Je haalt geen geld van deze spaarrekening en doet ook geen andere stortingen.

- a Bereken het saldo op 1 april 2015.

- b Leg uit dat je het saldo K van je bankrekening t maanden na 1 januari 2015 kunt berekenen door $K(t+1) = K(t) \cdot 1,005 + 50$ met $K(0) = 1240$.
- c Bereken het saldo op 1 juli 2015.

Opgave 9

Staatsbosbeheer heeft een perceel waarop ongeveer 6000 bomen van een bepaalde soort kunnen staan. Dit perceel is bedoeld als productiebos: na een aantal jaar zijn de eerste bomen groot genoeg om te kunnen worden gekapt. Om een stabiele jaarlijkse opbrengst te hebben, kapt Staatsbosbeheer jaarlijks 18% van de bomen en plant 1000 bomen aan. Het eerste jaar zijn er 5000 bomen geplant.

- a Stel een dynamisch model op voor het aantal bomen op dit perceel.
- b Maak een tabel van het verloop van het aantal bomen van de eerste zes jaar.
- c Bepaal de grenswaarde van het aantal bomen.

Opgave 10

Je wint op zeker moment € 5000 met een prijsvraag. Je zet dit geld op 1 januari 2016 vast op een rekening met 2,4% rente per jaar. Daarnaast stort je jaarlijks € 200 op deze rekening. Het saldo S hangt af van de tijd t in jaar vanaf $t = 0$ op 1 januari 2016. Hier is sprake van een discreet dynamisch model.

- a Stel een passende recursieformule op.
- b Stel hierbij een directe formule op. Licht je formule toe.
- c Bereken met behulp van de recursieformule en de grafische rekenmachine na hoeveel jaar je meer dan € 10000 hebt gespaard op deze rekening. Controleer je antwoord met de directe formule.

Opgave 11

In 2005 leefden er in een natuurgebied 5000 konijnen. Hun aantal is in de jaren daarna telkens met 5% toegenomen.

- a Ontwerp een dynamisch groeimodel voor het aantal konijnen K waarin t het aantal jaar na 2005 is.
- b Plot met de grafische rekenmachine een grafiek van de groei van het aantal konijnen in de loop van de tijd. Van wat voor soort groei is er sprake?
- c Bereken na hoeveel jaar er voor het eerst meer dan 15000 konijnen zijn.

Deze groei van het aantal konijnen kan niet onbeperkt doorgaan. In dit natuurgebied is slechts plaats voor een beperkt aantal konijnen. Een onderzoeker heeft een aangepast groeimodel opgesteld. Daarin is $K(t+1) = c \cdot K(t)(8000 - K(t))$, waarin $K(0) = 5000$. Dit model blijkt in 2006 precies hetzelfde geschatte aantal konijnen op te leveren als het model dat je bij a hebt ontworpen en ook in de daarop volgende jaren redelijk bij dat model te passen.

- d Bereken de waarde van c .
- e Maak voor dit aangepaste groeimodel een tabel van het aantal konijnen in de loop van de tijd.

Opgave 12

Als je een kop koffie uit een koffiezetter haalt, dan is de koffie meestal gloeiend heet. Neem aan dat de koffie $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ is.

Breng je die koffie in een kamer met een binnentemperatuur van $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, dan koelt hij af. De temperatuurafname van de koffie is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

Gebruik voor de tijd (min) de variabele t en voor de temperatuur van de koffie ($^{\circ}\text{C}$) de variabele T . Neem om te beginnen een stapgrootte van $\Delta t = 1$ minuut.

- a** Stel een passende modelformule op; c is de evenredigheidsconstante.

Neem $c = 0,1$.

- b** Maak voor de eerste vijf minuten een tabel van de temperatuur van de koffie.

- c** Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van de koffie is gezakt tot onder de $50\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Opgave 13

In een gebied worden elk jaar bomen gekapt en geplant. Voor het aantal bomen B na t jaar geldt het groeimodel:

$$B(t) = (1 - c) \cdot B(t - 1) + 6000c \text{ en } B(0) = 2000$$

- a** Na een jaar zijn er in het gebied 2320 bomen. Bereken c .
- b** Bereken hoeveel bomen er elk jaar worden geplant.
- c** De boswachter beweert dat de toename van het aantal bomen per jaar recht evenredig is met het verschil tussen het aantal bomen en het maximaal aantal bomen dat in het gebied kan staan. Toon aan dat hij gelijk heeft.
- d** Stel een directe formule op voor $B(t)$.

Toepassen

Opgave 14: Medicijn toedienen

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend met een constante snelheid van 12 mg per uur. Het lichaam breekt dit medicijn af met een snelheid die evenredig is met de hoeveelheid medicijn die in het bloed aanwezig is. Noem de hoeveelheid in het bloed aanwezige medicijn $M(t)$, waarin t de tijd in uren is en $M(0) = 0\text{ mg}$.

- a** Als eerste benadering voor de waarden van $M(t)$ kun je dit proces bekijken in stappen van 1 uur. Stel hiervoor een passende modelformule op; de evenredigheidsconstante is c .
- b** Neem $c = 0,15$ en bereken de waarden van $M(t)$ voor de eerste 10 uur.
- c** Hoeveel medicijn zit er op den duur in het lichaam?
- d** Welke directe formule kun je opstellen voor $M(t)$? Leid ook uit deze directe formule af hoeveel medicijn er op den duur in het lichaam zit.

Opgave 15: Sparen voor vrije tijd

Karel heeft een prijs gewonnen en zet dit bedrag tegen een rente van 0,2% per maand op een nieuwe bankrekening. De rente wordt maandelijks aan het einde van de maand bijgeschreven. Aan het einde van elke maand stort Karel telkens hetzelfde bedrag op deze bankrekening.

Na een maand heeft hij een saldo S van € 12675,00 en na twee maanden € 12850,35.

- Stel de recursieformule voor S op.
- Als Karel meer dan € 18000,00 heeft, stort hij geen geld meer op de rekening en haalt hij aan het einde van elke maand € 1500,00 van de rekening af.

Bereken hoe vaak Karel maandelijks € 1500,00 van de bank kan halen en bereken het restbedrag dat op zijn bankrekening blijft staan.

Testen

Opgave 16

In een tank zit 100 liter water waarin 10 kg zout opgelost is. Op een bepaald ogenblik laat men aan de bovenkant 1 liter zout water per minuut naar binnen lopen. De concentratie van het binnenstromende zoute water is 50 g zout per liter. Aan de onderkant van de tank laat men 1 liter per minuut wegstromen. Na 30 minuten worden beide stromen stopgezet.

- Stel een modelformule op waarmee je de zoutconcentratie van het water in de tank kunt benaderen.
- Benader de zoutconcentratie van het water in de tank na 30 minuten.
- Schets de grafiek van de zoutconcentratie van het water in de tijd.
- Geef een directe formule voor de zoutconcentratie van het water in de tijd.

Practicum

Met de volgende practica leer je enkele technieken op de GR die bij het **werken met rijen** onontbeerlijk zijn. Vooralsnog heb je genoeg aan de eerste twee paragrafen van zo'n practicum. Je hebt dit als het goed is eerder gezien bij het onderwerp 'Rijen'.

- [Rijen met de TI84](#)
- [Rijen met de TIInspire](#)
- [Rijen met de Casio fx-CG50](#)
- [Rijen met de HP prime](#)
- [Rijen met de NumWorks](#)

Overigens kun je voor het werken met rijen vaak beter **Excel** gebruiken.

1.2 Webgrafieken

Inleiding

Je hebt gezien dat discrete dynamische modellen rijen getallen opleveren. Daarvan kun je grafieken maken om het verloop te bekijken, bijvoorbeeld of er een grenswaarde wordt benaderd. Een bijzondere manier om het verloop van zo'n rij weer te geven is de webgrafiek. Met je grafische rekenmachine kun je die maken.

Je leert in dit onderwerp

- webgrafieken maken bij rijen;
- de begrippen convergent en divergent en onderzoeken of een rij convergeert of divergeert;
- dekpunten van rijen in verband brengen met convergentie.

Voorkennis

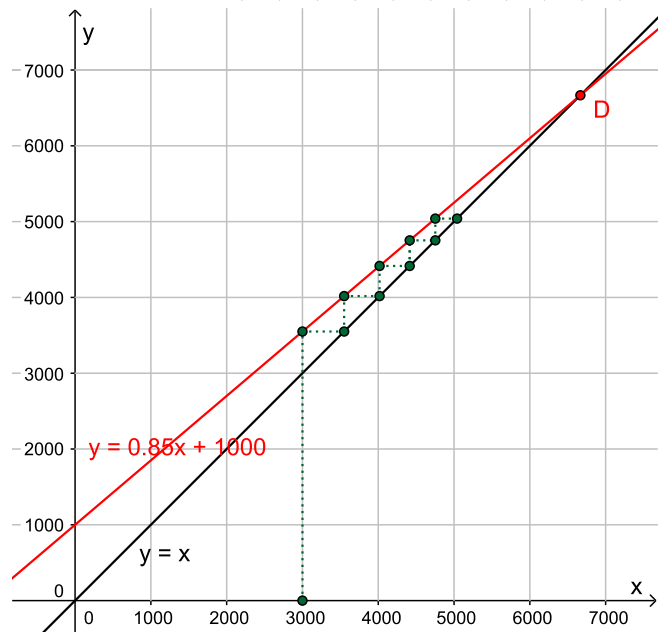
- werken met formules van rijen, directe formules en recursieformules, ook met de grafische rekenmachine;
- de somformules en de verschilformules voor rekenkundige en meetkundige rijen.

Verkennen

Opgave V1

Een bosbouwbedrijf verkoopt het hout van bomen die het zelf aanplant. Het bedrijf beschikt onder andere over een perceel waar 3000 bomen zijn geplant die inmiddels groot genoeg zijn om te worden gekapt. Om dit jaarlijks te kunnen blijven doen worden op de plek van de gekapte bomen ook weer nieuwe bomen aangeplant. Maar die hebben een aantal jaren de tijd nodig om kaprijp te worden, dus het bosbouwbedrijf kapt jaarlijks niet alle bomen, maar 15% ervan en plant er dan weer 1000 bij. Zo kan men op dit perceel jaar in jaar uit bomen kappen. Omdat er meer wordt aangeplant dan gekapt, zal het aantal bomen op dit perceel gaan toenemen, maar daar is ruimte voor.

- Leg uit hoe je in deze grafiek kunt zien hoe het aantal bomen in de loop van de jaren gaat toenemen.
- Zal het aantal bomen op dit perceel de 5000 gaan overstijgen? Leid je antwoord uit de grafiek af.



Figuur 2.1

Uitleg

Het bosbouwbedrijf van Someren verkoopt het hout van bomen die het zelf aanplant. Het bedrijf kapt jaarlijks 15% van de bomen en plant er 1000 bij. Neem de tijd t in jaar. Het aantal bomen B op het perceel hangt van t af, neem $B(0) = 3000$. De recursieformule die hier bij hoort is: $B(t) = 0,85B(t-1) + 1000$.

In de figuur in **Verkennen V1** zie je de lijnen $y = x$ en $y = 0,85x + 1000$ en de webgrafiek van $B(t)$. De lijn $y = x$ is nodig, omdat de waarden van $B(t)$ uitkomsten (y -waarden) zijn die weer worden gebruikt als invoerwaarden (x -waarden). De lijn $y = 0,85x + 1000$ is de vertaling van de recursieformule naar een xy -assenstelsel.

De webgrafiek convergeert naar het snijpunt D van beide lijnen. De x -waarde van dit snijpunt is het dekpunt van de rij, het is in dit geval de grenswaarde die de rij $B(t)$ benadert. De grenswaarde x bereken je door aan te nemen dat voor grote t geldt $B(t) \approx B(t-1) \approx x$. De recursieformule wordt $x = 0,85x + 1000$ en dit levert op $x = 6666\frac{2}{3}$.

Als een rij niet convergeert, dan is er sprake van divergentie. Tenzij iedere term in de rij een vaste waarde heeft (bijvoorbeeld: 5, 5, 5, 5, ...), dan heet de rij stationair.

Dergelijke webgrafieken kun je ook met de grafische rekenmachine maken. Bekijk het **Practicum**.

De gewone grafiek van een rij heet vanaf nu de tijdgrafiek van de rij. Vandaar dat in plaats van de n om het nummer van een term van de rij aan te duiden, meestal de t wordt gebruikt.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt het verloop van het aantal bomen op een bepaald perceel beschreven.

- Plot met de grafische rekenmachine de webgrafiek.
- Bereken na hoeveel jaar er voor het eerst meer dan 6600 bomen staan.
- Laat zien hoe je het dekpunt van deze rij berekent.

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg**. Start nu met 8000 bomen.

- Plot de webgrafiek van $B(t)$, met als begin $t = 8000$. Is er weer sprake van een convergente rij?
- Het aantal bomen $B(t)$ neemt nu af. Bereken vanaf welk jaar er minder dan 7000 bomen zijn.

Opgave 3

Gegeven is de rij $u(n) = 1,2 \cdot u(n-1) + 3$ met $u(0) = 10$.

- Plot de webgrafiek. Is er sprake van een convergente rij?
- Heeft deze rij een dekpunt? En een grenswaarde?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een discreet dynamisch model horen vaak één of meer recursieformules. Bij zo'n recursieformule kun je een **webgrafiek** maken. In zo'n webgrafiek kun je goed zien of de bijbehorende rij een grenswaarde heeft.

- Een rij die zijn grenswaarde steeds dichter benadert, heet **convergent**.
- Een rij die geen grenswaarde heeft, heet **divergent**.
- Een rij waarvan iedere term een vaste waarde heeft (bijvoorbeeld: 5,5,5,5,...), heet **stationair**.

Bij een recursieformule van de vorm $u(n) = a \cdot u(n-1) + b$ met $u(0) = c$ hoort een webgrafiek met daarin de lijnen $y = x$ en $y = ax + b$. De x -waarde van het snijpunt van beide grafieken heet het **dekpunt** van de recursieformule. Dit punt vind je door de vergelijking $x = a \cdot x + b$ op te lossen.

De directe formule voor $u(n)$ is:

$$u(n) = \frac{b}{1-a} + \left(c - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n$$

De gewone grafiek van een rij heet vanaf nu de **tijdgrafiek** van de rij. Vandaar dat in dit hoofdstuk in plaats van de n om het nummer van een term van de rij aan te duiden, meestal de t wordt gebruikt.

Voorbeeld 1

Je verwarmt een bepaalde vloeistof tot 100 °C. Als je deze vloeistof in een beker overgiet, begint hij af te koelen. Voor de temperatuur T_t met T in °C en t in minuten geldt $T_t = 0,9 \cdot T_{t-1} + 2$.

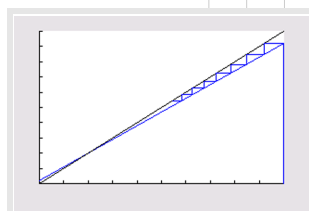
Maak een webgrafiek van dit afkoelingsproces en bereken het dekpunt van dit recursieproces. Is er sprake van convergentie?

Antwoord

Plot een mogelijke webgrafiek met de grafische rekenmachine.

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=0.9*u(n-1)+2
u(nMin)=100
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
w(nMin)=
```

n	u(n)
0	100
1	92
2	84.8
3	78.32
4	72.488
5	67.239
6	62.515
7	58.264
8	54.437
9	50.994
10	47.894



Figuur 2.2

In de figuur zijn twee lijnen getekend, namelijk de lijnen $y = x$ en $y = 0,9x + 2$. Het dekpunt is de x -waarde van hun snijpunt. Die bereken je door de vergelijking $x = 0,9x + 2$ op te lossen. Dit geeft $x = 20$.

Van de webgrafiek zijn de eerste zeven stappen zichtbaar. De temperatuur convergeert naar het dekpunt, dus de grenswaarde is 20 °C.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- Wat is de temperatuur van deze vloeistof tien minuten na het overgieten in de beker?
- Na hoeveel minuten is de temperatuur van deze vloeistof voor het eerst onder de $30\text{ }^{\circ}\text{C}$?
- De convergentie van T_t kun je ook afleiden uit de bijbehorende directe formule. Laat dat zien.

Voorbeeld 2

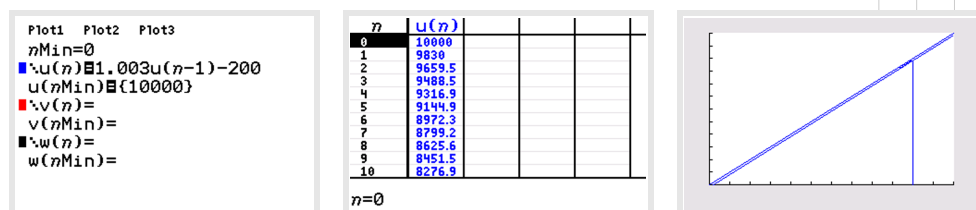
Je hebt een prijs van € 10000,00 gewonnen. Dit bedrag zet je op de bank op een speciale rekening met een maandrente van 0,3%. Je haalt er maandelijks € 200,00 af. Bereken na hoeveel maanden deze rekening leeg is.

Antwoord

Noem het saldo van elke maand $S(t)$ met t het aantal maanden na het openen van deze rekening.

Er geldt dan: $S(t) = 1,003 \cdot S(t-1) - 200$ met $S(0) = 10000$.

Plot een webgrafiek om het verloop van S in beeld te brengen.



Figuur 2.3

In de figuur zijn twee lijnen getekend, namelijk de lijnen $y = x$ en $y = 1,003x - 200$. Het dekpunt is de x -waarde van hun snijpunt. Die bereken je door de vergelijking $x = 1,003x - 200$ op te lossen. Dit geeft $x = 6666\frac{2}{3}$.

Van de webgrafiek zijn de eerste stappen zichtbaar. Het saldo convergeert niet naar het dekpunt, dit is een divergente rij. Als je de webgrafiek voortzet, blijkt dat op $t = 54$ het saldo nog maar € 50,74 bedraagt. Dat bedrag kun je nog opnemen en dan is de rekening leeg.

Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

- Bereken hoeveel het saldo bedraagt tien maanden na het openen van deze rekening.
- Bereken na hoeveel maanden het saldo voor het eerst onder de € 5000,00 is.
- De divergentie van $S(t)$ kun je ook afleiden uit de bijbehorende directe formule. Laat dat zien.

Opgave 6

Je hebt € 5000 gewonnen in een loterij. Je zet dit op 1 januari 2016 op een spaarrekening tegen 3,2% rente per jaar. Vanaf dat moment stort je telkens aan het eind van het jaar € 250 op diezelfde rekening. Je haalt er voorlopig geen geld af. Het saldo op deze rekening is $S(t)$ met $S(0) = 5000$.

- Stel voor $S(t)$ een recursieformule op.
- Plot de webgrafiek.
De rij $S(t)$ is niet convergent, maar juist divergent.
- Wat betekent dit voor die rij?
- Heeft deze rij een dekpunt? En een grenswaarde?

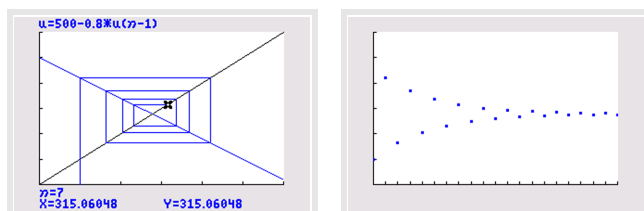
Voorbeeld 3

Een discreet dynamisch model is gegeven door $u(n) = 500 - 0,8 \cdot u(n-1)$ met $u(0) = 100$. Onderzoek met behulp van een webgrafiek en met een tijdgrafiek of deze rij convergeert.

Antwoord

Bekijk beide grafieken. Aan de webgrafiek is goed te zien dat de rij convergeert naar het dekpunt.

De tijdgrafiek laat zien dat de termen van de rij afwisselend onder en boven de grenswaarde liggen die hoort bij het dekpunt. Deze rij noem je daarom alternerend convergent.



Figuur 2.4

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit [Voorbeeld 3](#).

- Bereken het dekpunt van de rij.
- De convergentie van $u(n)$ kun je afleiden uit de bijbehorende directe formule. Laat dat zien.

Opgave 8

Een discreet dynamisch model is gegeven door $P(t) = 450 - 0,91 \cdot P(t-1)$ met $P(0) = 200$.

- Plot de tijdgrafiek van $P(t)$.
- De rij $P(t)$ is alternerend divergent. Wat betekent dit voor de rij?
- Bereken het dekpunt van deze rij. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de rij $u(n) = 0,6 \cdot u(n-1) + 14$ met $u(0) = 10$.

- Toon met behulp van de webgrafiek van $u(n)$ aan dat deze rij convergent is.
- Bereken het dekpunt.
- Hoeveel bedraagt de grenswaarde van de rij?

Opgave 10

Gegeven is de rij $u(n) = 50 - 3 \cdot u(n-1)$.

- Bereken het dekpunt.
- Is het dekpunt ook een grenswaarde van de rij?

Opgave 11

Er is een hoeveelheid $H_0 = 500$ liter van een giftige stof in het oppervlaktewater terechtgekomen. Deze stof wordt vanzelf afgebroken: er verdwijnt dagelijks zo'n 15% van deze stof.

- Stel de recursieformule op voor H_t , de hoeveelheid giftige stof na t dagen.
- Plot een webgrafiek en bekijk in hoeveel dagen de hoeveelheid minder is geworden dan 10 liter.
- Hoe kun je aan de webgrafiek zien dat de rij H_t convergent is?
- Stel vanuit de recursieve formule een directe formule op voor de rij H_t .
- Leg uit waarom je dit ook had kunnen doen zonder eerst een recursieformule te maken.

Opgave 12

Boris opent op 1 januari 2015 een spaarrekening waarop hij op de eerste van elke maand € 100,00 stort. Hij krijgt 0,4% rente per maand.

- Leid voor het saldo $S(t)$ van deze rekening een recursieve formule af. Hierbij is t de tijd in maanden.
- Waarom moet deze rij wel divergent zijn?
- Bereken het dekpunt van de rij en laat met behulp van een directe formule zien dat dit dekpunt geen grenswaarde van de rij is.

Opgave 13

Een pak melk wordt uit de koelkast gehaald en in een glas geschonken. De toename van de temperatuur per minuut is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

Voor de temperatuur T (°C) na t minuten geldt de recursieformule:

$$T(t) = T(t-1) + c \cdot (21 - T(t-1)) \text{ met } T(0) = 6$$

- Hoe hoog is de omgevingstemperatuur?
- Neem aan dat $c = 0,1$.

Maak een tijdgrafiek van de rij $T(t)$.

Waarom moet deze rij convergent zijn? Hoe zie je dat aan de tijdgrafiek?

- c Plot de webgrafiek en bepaal na hoeveel minuten de temperatuur van de melk minder dan 5°C verschilt van de kamertemperatuur.
- d Laat zien hoe de grenswaarde uit de gegeven recursieformule is af te leiden.
- e Laat zien hoe de grenswaarde uit een bijpassende directe formule is af te leiden.

Opgave 14

Waarom kun je voor de recursievergelijking

$N(t) = 0,8N(t-1) + 1,5N(t-2) + 35$ met $N(0) = 4$ en $N(1) = 8$ geen webgrafiek maken?

Toepassen

Opgave 15: Geldontwaarding

Geldontwaarding is het minder waard worden van geld. Stel dat in een bepaald land de geldontwaarding 5% per jaar bedraagt. In dat land heeft het totaal in omloop zijnde geld dit jaar een waarde van 500 miljard aan geldeenheden. De overheid brengt elk jaar 20 miljard geldeenheden extra in omloop om de economie te stimuleren.

- a Stel een passend discreet dynamisch model op voor de totale waarde $W(t)$ van het in omloop zijnde geld.
- b Bepaal met behulp van een webgrafiek of er sprake is van convergentie. Wat is het dekpunt?
- c Welke grenswaarde heeft $W(t)$?
- d De convergentie van $W(t)$ kun je ook afleiden uit de bijbehorende directe formule. Laat dat zien.

Opgave 16: Rij met variabelen

Gegeven is de convergerende rij $u(n) = a \cdot u(n-1) + b$ met $u(0) = a$ en $u(1) = 0,5$. Het dekpunt is $2a$.

Toon aan dat $a = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $b = -1 + \sqrt{2}$.

Testen

Opgave 17

Gegeven is een dynamisch model met recursieformule

$H(t) = 500 + 0,62 \cdot H(t-1)$ en $H(0) = 100$.

- a Maak een tijdgrafiek bij dit model.
- b De rij $H(t)$ is convergent. Waaraan zie je dat in de tijdgrafiek?
- c Maak een webgrafiek bij het model en bereken het dekpunt van $H(t)$.

- d** Als $H(0) = 2000$, dan is de beginwaarde hoger dan grenswaarde. Heeft dat invloed op de convergentie van de rij $H(t)$?
- e** Bereken de grenswaarde voor de rij $H(t)$ vanuit een bijpassende directe formule.

Opgave 18

Pas gezette koffie heeft een temperatuur van zo'n 80 °C. Schenk je deze koffie in een kopje en zet je dat in de kamer dan wordt de temperatuur lager totdat hij de kamertemperatuur (20 °C) benadert.

De daling van de temperatuur per minuut is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

- a** Leg uit, dat hieruit deze recursieformule is af te leiden:

$$T_{t+1} = T_t - c \cdot (T_t - 20)$$

waarin t het aantal minuten voorstelt.

Neem aan dat $c = 0,05$.

- b** Maak een tijdgrafiek van de rij T_t .
Hoe zie je aan de tijdgrafiek dat de rij T_t convergeert?
- c** Teken een webgrafiek en bepaal na hoeveel minuten de temperatuur van de koffie minder dan 1 °C verschilt van de kamertemperatuur.
- d** Laat zien hoe de grenswaarde uit de gegeven recursieve formule is af te leiden.

Practicum

Met de volgende practica leer je enkele technieken op de GR die bij het **werken met rijen** onontbeerlijk zijn. Nu gaat het vooral om de derde paragraaf van zo'n practicum.

- [Rijen met de TI84](#)
- [Rijen met de TIInspire](#)
- [Rijen met de Casio fx-CG50](#)
- [Rijen met de HP prime](#)
- [Rijen met de NumWorks](#)

1.3 Differentievergelijkingen

Inleiding

De discrete dynamische modellen die je tot nu toe bent tegengekomen hadden recursieformules van de vorm $u(t) = a \cdot u(t-1) + b$, lineaire recursieformules dus. Je spreek dan wel van lineaire differentievergelijkingen. Maar er bestaan ook kwadratische differentievergelijkingen en die hebben een belangrijke toepassing, namelijk ze beschrijven een zeer specifiek groeimodel: de logistische groei.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip differentievergelijking;
- werken met lineaire en vooral kwadratische differentievergelijkingen;
- het oplossen van een lineaire differentievergelijking van de eerste orde.

Voorkennis

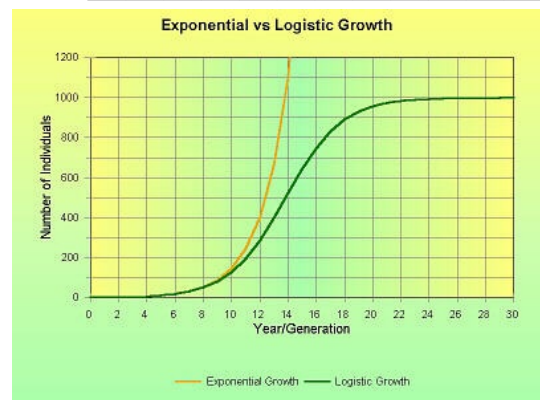
- werken met formules van rijen, directe formules en recursieformules, ook met de grafische rekenmachine;
- de somformules en de verschilformules voor rekenkundige en meetkundige rijen;
- werken met tijdgrafieken en webgrafieken, dekpunten berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier twee grafieken die te maken hebben met bevolkingsgroei.

- Welke van beide grafieken zou de tijdgrafiek kunnen zijn bij een dynamisch model met een recursieformule van de vorm $N(t) = a \cdot N(t-1)$? Licht je antwoord toe.
- Is a dan groter of kleiner dan 1?



Figuur 3.1

Uitleg

Bekijk de twee grafieken die de mogelijke groei van een populatie beschrijven.

- Bij een exponentiële groei (of verval) past een dynamisch model met een recursieformule zoals $N(t) = 1,2 \cdot N(t-1)$ met bijvoorbeeld $N(0) = 2000$.

Deze recursieformule kun je ook noteren als:

$$N(t) = N(t-1) + 0,2 \cdot N(t-1)$$

Bij elke volgende stap komt er 20% bij, het getal 0,2 is de (vaste) groeivoet van dit proces.

De recursieformule heeft de vorm van een lineaire differentievergelijking. Omdat er alleen een verband is tussen $N(t)$ en zijn directe voorganger $N(t-1)$ is dit een lineaire differentievergelijking van de eerste orde.

Er is sprake van convergentie als $0 < a < 1$ en van alternerende convergentie als $-1 < a < 0$.

- Bij exponentieel geremde groei (of verval), ook wel logistische groei genoemd, is de groei steeds meer geremd naarmate een bepaalde maximale waarde M wordt bereikt. De groeivoet is dan geen constante, maar hangt af van $N(t-1)$. De meest eenvoudige aanname is een lineair verband tussen deze groeivoet en $N(t)$. Omdat de groei steeds sterker moet worden afgeremd als M wordt benaderd, krijgt de groeivoet de vorm $0,2 \cdot \left(1 - \frac{N(t-1)}{M}\right)$. Dit geeft een recursieformule van de vorm:

$$N(t) = N(t-1) + 0,2 \cdot \left(1 - \frac{N(t-1)}{M}\right) \cdot N(t-1)$$

Er is sprake van een kwadratische differentievergelijking van de eerste orde.

Het oplossen van een differentievergelijking is het vinden van de bijbehorende directe formule.

De lineaire differentievergelijking kan met de somformule van een meetkundige rij worden opgelost.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**. Neem eerst de recursieformule $N(t) = 1,2 \cdot N(t-1)$ met $N(0) = 2000$.

- a** Laat zien dat je hieruit de directe formule $N(t) = 2000 \cdot 1,2^t$ kunt afleiden.

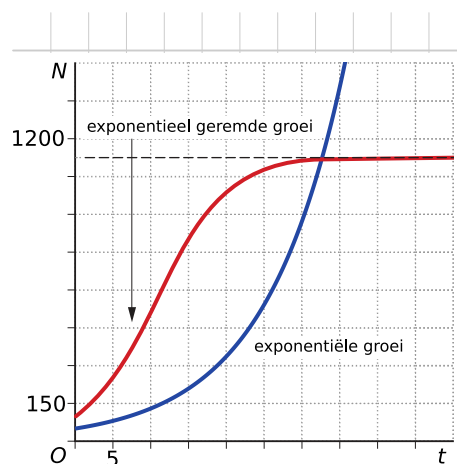
- b** Plot de bijbehorende webgrafiek en laat zien dat de rij divergeert.

Gebruik de recursieformule

$$N(t) = N(t-1) + 0,2 \cdot \left(1 - \frac{N(t-1)}{M}\right) \cdot N(t-1). \text{ Neem } M = 4000 \text{ en } N(0) = 2000.$$

- c** Plot de bijbehorende webgrafiek en laat zien dat deze rij convergeert naar $M = 4000$.

- d** De groeivoet 0,2 wordt vermenigvuldigd met een remfactor $\left(1 - \frac{N(t-1)}{M}\right)$. Laat zien dat dit een getal tussen 0 en 1 is dat steeds kleiner wordt naarmate $N(t-1)$ dichter bij M komt.



Figuur 3.2

- e Waarom is hier sprake van een kwadratische differentievergelijking?
- f Laat zien dat uit de differentievergelijking volgt dat M de evenwichtswaarde is.

Opgave 2

Onderzoek bij de differentievergelijkingen of de bijbehorende rijen convergeren of divergeren en bereken de eventuele grenswaarden.

- a $N(t) = 0,84 \cdot N(t-1) + 200$ met $N(0) = 0$
- b $N(t) = 150 + 1,4 \cdot N(t-1)$ met $N(0) = 100$
- c $N(t) = 0,5N(t-1)(6 - N(t-1))$ met $N(0) = 1$

Opgave 3

Een lineaire differentievergelijking van de eerste orde heeft als algemene vorm:

$$N(t) = a \cdot N(t-1) + b \text{ met } N(0) = d.$$

- a Laat zien dat bij een convergente lineaire differentievergelijking van de eerste orde de grenswaarde $N = \frac{b}{1-a}$ is.
- b Laat zien dat bij een convergente lineaire differentievergelijking van de eerste orde de directe formule $N(t) = \left(d - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^t + \frac{b}{1-a}$ hoort.
- c Waarom is deze rij altijd convergent als $0 < a < 1$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Er zijn enkele karakteristieke discrete dynamische modellen te onderscheiden.

- Bij exponentiële groei (of verval) past een recursieformule van de vorm:

$$N(t) = N(t-1) + c \cdot N(t-1) + b, \text{ ofwel } N(t) = a \cdot N(t-1) + b \text{ met } c = a - 1$$

Hierin is c de groeivoet en $c = a - 1$ de groeifactor.

Je kunt er een directe formule bij maken van de vorm:

$$N(t) = \left(N(0) - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^t + \frac{b}{1-a}$$

De recursieformule heeft de vorm van een **lineaire differentievergelijking van de eerste orde**.

Er is sprake van convergentie als $0 < a < 1$ en van alternerende convergentie als $-1 < a < 0$.

- Bij **geremde exponentiële groei** (ook wel **logistische groei** genoemd) past een recursieformule van de vorm:

$$N(t) = N(t-1) + c \cdot \left(1 - \frac{N(t-1)}{M}\right) \cdot N(t-1)$$

Hierin is c de groeivoet en M de grenswaarde die $N(t)$ steeds dichterbij nadert als $t \rightarrow \infty$ en c een constante is.

Nu is er sprake van een **kwadratische differentievergelijking van de eerste orde**.

Bij beide soorten differentievergelijkingen kun je zowel een tijdgrafiek als een webgrafiek maken. Of en hoe de rij convergeert, kun je aan deze grafieken zien.

Het oplossen van een differentievergelijking is het vinden van de bijbehorende directe formule.

De lineaire differentievergelijking kan met de somformule van een meetkundige rij worden opgelost.

Voorbeeld 1

Je verwarmt een bepaalde vloeistof tot 100 °C. Als je deze vloeistof in een beker overgiet, begint hij af te koelen. Voor de temperatuur $T(t)$ met T in °C en t in minuten geldt $T(t) = 0,9 \cdot T(t-1) + 2$. Laat zien dat deze differentievergelijking een exponentieel vervalproces beschrijft door de bijbehorende directe formule op te stellen. Hoe groot is de groeifactor en hoe groot is de groeivoet?

Antwoord

Bij deze lineaire differentievergelijking van de eerste orde hoort de directe formule:

$$T(t) = \left(100 - \frac{2}{1-0,9}\right) \cdot 0,9^t + \frac{2}{1-0,9} = 80 \cdot 0,9^t + 20$$

Dit is een exponentiële functie met een groeifactor van 0,9.

De groeivoet c vind je uit $c = 0,9 - 1$. De groeivoet is -0,1.

Opgave 4

Een cultuur bacteriën groeit volgens de differentievergelijking $N(t) = N(t-1) + 0,05 \cdot N(t-1)$, waarin $N(t)$ het aantal bacteriën na t dagen is. Op $t = 0$ zijn er 50 bacteriën.

- Plot bij deze bacteriegroei een tijdgrafiek.
- Toon aan dat de groei van deze bacteriën exponentieel verloopt door een bijpassende directe formule op te stellen.
- Leg uit waarom deze rij wel divergent moet zijn.

Opgave 5

Een tuinder oogst jaarlijks 40% van zijn thuja's en plant daarna weer 500 jonge thuja's. Dit jaar heeft hij in totaal ongeveer 1600 thuja's staan.

- Stel bij deze situatie een recursieformule op. Is hier sprake van een lineaire differentievergelijking van de eerste orde?
- Hoeveel is de groeivoet? En de groeifactor?
- Toon de convergentie van deze rij aan door een directe formule op te stellen en de daarbij passende grenswaarde te berekenen.

Voorbeeld 2

In een afgesloten gebied wordt van een bepaalde soort snuitkever een populatie van 20 uitgezet. Omdat hun leefgebied is begrensd, zal er sprake zijn van geremde exponentiële groei. Een onderzoeker heeft voor het aantal kevers $K(t)$ in de loop van de jaren de kwadratische differentievergelijking

$$K(t) = 2,5 \cdot \left(1 - \frac{K(t-1)}{1000}\right) \cdot K(t-1) \text{ opgesteld.}$$

Plot een bijbehorende webgrafiek en laat zo zien dat het aantal kevers convergeert. Laat ook zien dat hier sprake is van een groeivoet die kleiner wordt naarmate de populatie groeit.

Antwoord

Uit de webgrafiek blijkt de convergentie. K nadert de waarde 600.

Noteer de formule als:

$$\begin{aligned} K(t) &= 2,5 \cdot \left(1 - \frac{K(t-1)}{1000}\right) \cdot K(t-1) \\ &= 2,5K(t-1) - \frac{(K(t-1))^2}{400} \\ &= K(t-1) + 1,5K(t-1) - \frac{(K(t-1))^2}{400} \\ &= K(t-1) + 1,5 \cdot \left(1 - \frac{K(t-1)}{600}\right) \cdot K(t-1) \end{aligned}$$

De groeivoet is $1,5 \cdot \left(1 - \frac{K(t-1)}{600}\right)$ en als $K(t-1) \rightarrow 600$, dan

$$1 - \frac{K(t-1)}{600} \rightarrow 0.$$

Opgave 6

Bekijk de kwadratische differentievergelijking in **Voorbeeld 2**.

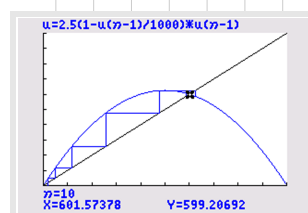
- Hoe lees je uit de herleide recursieformule de grenswaarde van de geremde groei af?
- In de webgrafiek wordt behalve de lijn $y = x$ ook een parabool getekend. Welke formule hoort er bij die parabool?
- Bereken de dekpunten van de gegeven rij. Zijn ze in overeenstemming met de grenswaarde?
- Is het aantal snuitkevers dat aan het begin wordt uitgezet van belang voor de grenswaarde die wordt bereikt?

Opgave 7

De groei van een aantal bacteriën $N(t)$ wordt bij benadering beschreven door de kwadratische differentievergelijking $N(t) = k \cdot N(t-1) \cdot (400 - N(t-1))$, waarin t het aantal dagen na $t = 0$ is en $N(0) = 50$.

Neem eerst $k = 0,005$.

- Plot bij dit groeimodel een webgrafiek en een tijdgrafiek. Naar welke waarde convergeert het aantal bacteriën?
- Herleid de recursieformule tot een vorm waarin je de veranderende groeivoet kunt aflezen. Welke waarde heeft de groeivoet?



Figuur 3.3

- c Hoe lees je uit de herleide recursieformule de grenswaarde van de geremde groei af?
- d In de webgrafiek wordt behalve de lijn $y = x$ ook een parabool getekend. Welke formule hoort er bij die parabool?
- e Bereken de dekpunten van de gegeven rij. Zijn ze in overeenstemming met de grenswaarde?
- f Wat is er aan de hand als je met 200 bacteriën begint?

Verwerken

Opgave 8

Bereken de dekpunten bij de volgende lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde. Onderzoek ook of er van convergentie sprake is.

- a $X_n = 0,5X_{n-1} + 2$ met $X_0 = 6$
- b $K(t+1) = 1,08K(t)$ met $K(0) = 2000$
- c $N_t = 5 - 0,6N_{t-1}$ met $N_0 = 0$

Opgave 9

Gegeven is de differentievergelijking $N(t+1) = 0,8 \cdot N(t) + 100$.

- a Laat zien dat het dekpunt van de bijbehorende rij niet afhangt van $N(0)$.
- b Plot de tijdgrafieken bij $N(0) = 100$, $N(0) = 500$ en $N(0) = 900$.
- c Naar welke grenswaarde convergeren al deze rijen?
- d Stel de bij $N(0) = 100$, $N(0) = 500$ en $N(0) = 900$ behorende directe formules op en toon ook daarmee de convergentie aan.

Opgave 10

Gegeven is de kwadratische differentievergelijking

$$K_t = K_{t-1} + 0,25 \cdot K_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{K_{t-1}}{100}\right)$$

met $K_0 = 20$.

- a Laat zien dat de dekpunten van de bijbehorende rij op de parabool met vergelijking $y = 1,25x - 0,0025 \cdot x^2$ liggen.
- b Bereken de twee dekpunten van de rij.
- c Bepaal met behulp van een webgrafiek of deze rij convergeert.

Opgave 11

Gegeven is de kwadratische differentievergelijking

$$N(t) = 5 \cdot N(t-1) \cdot (1 - N(t-1)) + 1.$$

Er zijn twee startwaarden waarbij de rij $N(t)$ constant is. Bereken die waarden.

Opgave 12

Voor het aantal herten in een bosrijk gebied geldt dat er sprake is van logistische groei. Onderzoekers hebben de volgende recursieformule opgesteld:

$$A_t = 1,8 \cdot A_{t-1} - a \cdot A_{t-1}^2$$

Op 1 juli 2015 waren er 4000 herten en een jaar later 4800.

- Toon aan dat $a = 0,00015$.
- Herleid de recursieformule zo, dat je de groeivoet kunt aflezen.
- Hoeveel herten zijn er in dit gebied op den duur?

Opgave 13

Gegeven is de kwadratische differentievergelijking

$$K_t = a \cdot K_{t-1} \cdot (1 - K_{t-1}) \text{ met } K_0 = 0,2.$$

- Voor welke waarde van a is de rij K_t constant?
- Voor welke exacte waarde(n) van a bestaat de rij K_t uit maar twee verschillende getallen?

Toepassen

Opgave 14: Brandnetels

Brandnetels kunnen zich in korte tijd zeer snel verspreiden. Een onderzoeker vraagt zich af hoe het groeiproces verloopt en plant daartoe op een proefveldje 25 van die planten. Na een week telt zij 15 nieuwe brandnetels en daarom vermoedt ze dat het aantal brandnetels exponentieel groeit.

- Schat de groeifactor per week g van die brandnetels.
- Voorspel het aantal brandnetels in de komende vijf weken uitgaande van het exponentiële groeimodel.

De brandnetels blijken niet te groeien volgens dit groeimodel. De reden is dat het proefveldje een beperkte oppervlakte heeft. Aan het eind van de vijftiende week lijken er evenveel brandnetels te zijn als aan het eind van de zestiende week, namelijk 225. De onderzoeker gaat daarom uit van een logistisch groeimodel met grenswaarde 225.

- Stel een geschikt logistisch groeimodel op.
- Doe nu een nieuwe voorspelling van de aantallen brandnetels in de loop van de eerste vijf weken na het planten.

Testen

Opgave 15

Iemand heeft een miljoen gewonnen in een loterij. Hij wil ervan gaan leven en zet het op een bank tegen een rente van 3% per jaar. Maandelijks haalt hij € 1500,00 van de bank voor zijn levensonderhoud.

- Stel hierbij een lineaire differentievergelijking op.
- Teken een bijpassende webgrafiek en ga na of de saldi convergeren naar een bepaalde waarde. Bereken dan die waarde.

- c Stel een directe formule op voor de rij van de saldi. Ga met behulp van die formule ook na of het saldo uiteindelijk convergeert.
- d Hoeveel kan deze gelukkige winnaar maandelijks van de bank halen zonder dat zijn geld ooit op raakt?

Opgave 16

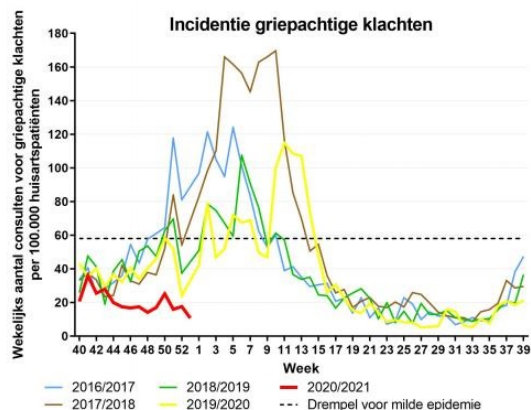
Er wordt een nieuw maandblad opgericht. Het aantal abonnees groeit in het begin sterk, van 3000 van het eerste blad tot 5670 van het tweede blad. De uitgever van het blad hoopt dat deze stijging van zo'n 90% per maand nog even door zal gaan. Noem het aantal abonnees per maand $A(t)$, het aantal abonnees van de eerste oplage is $A(0)$.

- a Stel voor het exponentiële groeimodel een recursieformule op.
- b De rij $A(t)$ is divergent. Laat dan zien door een directe formule voor deze rij op te stellen
Na verloop van tijd wordt de groei van het aantal abonnees kleiner. Er geldt in feite dat $A(t) = 1,95 \cdot A(t-1) - 0,00002 \cdot (A(t-1))^2$ met $A(0) = 3000$.
- c Maak een webgrafiek bij dit model en bereken de dekpunten van $A(t)$.
- d Hoeveel abonnees zal dit tijdschrift op den duur krijgen als de groei zo door gaat?

1.4 Stelsels

Inleiding

Bij dynamische modellen gaat het om rekenmodellen van de veranderingen van de situatie met de tijd. En daarmee wordt dan gerekend, of (als de situatie niet te complex is) er wordt geprobeerd één of meer formules af te leiden waarmee de toestand op elk tijdstip kan worden bepaald. Een voorbeeld van een situatie waarin een dynamisch model kan worden opgesteld is de ontwikkeling van een griep-epidemie. Daarbij spelen meerdere modelformules een rol. Het RIVM (Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu) houdt de ontwikkeling van het aantal griepgevallen bij.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met dynamische modellen met meerdere modelformules;
- discrete dynamische modellen met meerdere modelformules doorrekenen.

Voorkennis

- werken met (lineaire) differentievergelijkingen, tijdgrafieken en webgrafieken;
- werken met veranderingen, toenames en differentiequotiënten.

Verkennen

Opgave V1

Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt zijn er gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest maar beter zijn geworden. Alleen zieken steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is 4 dagen, daarna ben je geruime tijd immuun. Je begint op een bepaalde dag met 100000 personen waarvan er 100 ziek en 500 immuun zijn. Hoe verloopt het aantal zieken per dag? In Excel zijn twee griepmodellen gemaakt. Bekijk eerst dit [eenvoudige griepmodel](#).

- Welke modelformules worden er gebruikt voor de zieken $Z(t)$, de gezonden $G(t)$ en de personen die immuun zijn geworden $I(t)$?
- Waar vind je de in de tekst hierboven genoemde getallen terug in dit eenvoudige griepmodel? Verklaar het model in woorden.
- Zie je al meteen tekortkomingen in dit model?

Uitleg

Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt, zijn er gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest. Alleen zieken steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is vier dagen, daarna ben je geruime tijd immuun. Je begint op een bepaalde dag met 100000 personen waarvan er 100 ziek en 500 immuun zijn. Hoe verloopt het aantal zieken per dag?

In het bestand **Eenvoudig griepmodel** staan de gegevens van een griep epidemie van dag tot dag. Bedenk bij het opstellen van een wiskundig model voor het verloop van de griep met welke factoren je rekening moet houden. In dit eenvoudige griepmodel wordt gerekend met: $G(t)$ het aantal gezonde personen op zeker tijdstip t , $Z(t)$ het aantal zieken op dat tijdstip en $I(t)$ het aantal immune personen op dat tijdstip.

Een dag later zit je op tijdstip $t + 1$. De modelformules zijn hier:

- $G(t + 1) = G(t) - 0,2 \cdot Z(t)$
- $Z(t + 1) = Z(t) - 0,25 \cdot Z(t) + 0,2 \cdot Z(t)$
- $I(t + 1) = I(t) + 0,25 \cdot Z(t)$

Hieruit blijkt dat gemiddeld 20% van het aantal zieken gezonde mensen ook ziek maakt. Ook blijkt dat (omdat de ziekte gemiddeld vier dagen duurt) er dagelijks ongeveer een kwart van de zieken immuun wordt. Dit is slechts een eenvoudig model.

Voor het werkelijke verloop van de griep houd je bijvoorbeeld ook rekening met de kans dat een zieke een gezond iemand ontmoet, de incubatietijd van het virus (de tijd tussen de besmetting en het echt ziek worden) en de vatbaarheid van mensen voor griep.

Dit levert meteen ingewikkelder modelformules op. Wel hebben ze nog steeds dezelfde structuur. Omdat je een dag later op tijdstip $t + 1$ zit, zien alle modelformules er zo uit: $u(t + 1) = u(t) + \Delta u(t)$. Hierin is u een variabele van het model. Je hebt bijvoorbeeld de volgende modelformules:

- $G(t + 1) = G(t) - 0,0002 \cdot G(t) \cdot 0,05 \cdot Z(t)$
- $Z(t + 1) = Z(t) - 0,25 \cdot Z(t) + 0,0002 \cdot G(t) \cdot 0,05 \cdot Z(t)$
- $I(t + 1) = I(t) + 0,25 \cdot Z(t)$

Dit is een stelsel differentievergelijkingen die met elkaar samenhangen.

Het bestand **Verbeterd griepmodel** heeft drie variabelen. Alle constanten erin zijn gebaseerd op aannames. Het zijn in feite parameters van het model, dus getallen die je nog kunt aanpassen. Door die parameters aan te passen kun je het model meer op de werkelijkheid laten lijken.

Opgave 1

Bekijk de beschrijving van het eenvoudige griepmodel in de **Uitleg**.

- a** Beschrijf de drie modelformules in woorden. Vertel ook hoe groot in dit model de kans is dat een zieke iemand anders ziek maakt. Leg zo uit hoe het model in elkaar zit.

- b** Welke startwaarden zijn er aangenomen? Kennelijk is dit model alleen enigszins bruikbaar als er al zieken zijn. Waaraan zie je dat?
- c** Reken met de modelformules het aantal zieken, gezonde mensen en immune personen op $t = 1$ en $t = 2$ handmatig na.
- d** Wat voor invloed heeft het verkleinen van het aantal gezonde mensen op $t = 0$ op het verloop van het aantal zieken?

Opgave 2

Bekijk het verbeterde griepmodel in de [Uitleg](#).

- a** De kans dat iemand ziek wordt hangt niet alleen af van het aantal zieken, maar ook van het aantal gezonde mensen. Waarom is dat?
- b** Hoe zit het in dit model met het aantal zieken dat weer beter, dus immuun wordt?
- c** Reken met de modelformules het aantal zieken, gezonde mensen en immune personen op $t = 1$ en $t = 2$ handmatig na.

Theorie en voorbeelden

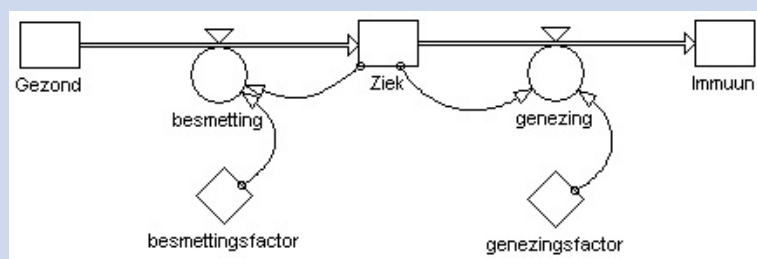
Om te onthouden

Een discreet dynamisch model bestaat vaak uit een heel **stelsel differentievergelijkingen** die met elkaar samenhangen. Er zijn:

- variabelen die met de tijd veranderen;
- meerdere modelformules van de vorm $u(t) = u(t - 1) + \Delta u(t)$, waarin u de variabele en t de tijd voorstelt en $\Delta u(t)$ afhangt van u ;
- parameters, constanten die je nog kunt aanpassen.

Die parameters vind je terug in de uitdrukkingen die $\Delta u(t)$, $\Delta v(t)$, ..., beschrijven. Ze zijn vaak gebaseerd op bepaalde modelaannames, bijvoorbeeld een schatting van het percentage dat verandert. Bij ingewikkelder modellen kun je ook de tijdstap aanpassen. Die is dan niet altijd 1, maar wordt aangegeven met Δt of dt .

Bekijk hier een eenvoudig griepmodel.



Figuur 4.2

Voorbeeld 1

In een bepaalde regio vertrekt elke tien jaar $\frac{1}{5}$ deel van de bevolking van het platteland P naar de stad S en $\frac{1}{20}$ deel van de stad naar het platteland.

Stel hierbij dit dynamisch model op:

- $S(t) = 0,95 \cdot S(t-1) + 0,2 \cdot P(t-1)$
- $P(t) = 0,05 \cdot S(t-1) + 0,8 \cdot P(t-1)$

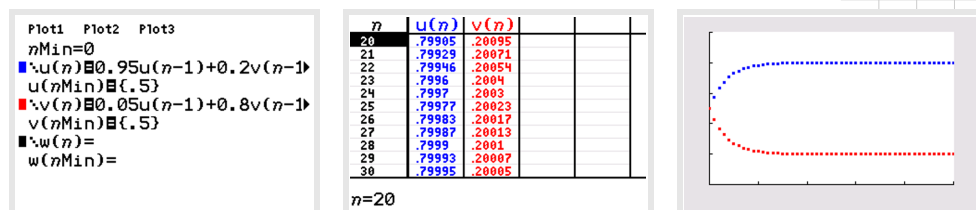
Hierbij is t de tijd in tien jaar.

Er is sprake van een gesloten systeem. Dit kun je zien aan dat zowel de coëfficiënten van $S(t-1)$ als die van $P(t-1)$ samen 1 zijn.

Onderzoek met behulp van een tijdgrafiek van $S(t)$ en $P(t)$ of er een evenwichtstoestand ontstaat voor wat betreft de verdeling van de bevolking van deze regio over stad en platteland. Laat ook zien hoe je die evenwichtstoestand kunt berekenen vanuit de modelvergelijkingen.

Antwoord

Voer de modelformules in op de grafische rekenmachine of in Excel in. Begin bijvoorbeeld met een verdeling van 50% op het platteland en 50% in stedelijke gebieden. Hieruit blijkt dat $S(t)$ en $P(t)$ in dit model naar een evenwicht toegroeien.



Figuur 4.3

Je kunt de grenswaarden voor $S(t)$ en $P(t)$ ook uit de modelformules afleiden door gebruik te maken dat voor die grenswaarden geldt $S(t) = S(t-1) = S$ en $P(t) = P(t-1) = P$. Dit geeft een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden om op te lossen, waarbij ook nog moet gelden dat $S(t) + P(t) = 1$ voor elke t .

Uit $S = 0,95S + 0,2P$, $P = 0,05S + 0,8P$ en $S + P = 1$ volgt $S = 0,8$ en $P = 0,2$.

Uiteindelijk zal $\frac{4}{5}$ deel van de bevolking in de stad wonen en $\frac{1}{5}$ deel op het platteland.

Opgave 3

Bekijk het verstedelijkingsmodel in [Voorbeeld 1](#).

- Waarom moet gelden dat $S(t) + P(t) = 1$ voor elke t ?
- Plot de tijdgrafiek van $S(t)$ en $P(t)$ met verschillende beginwaarden. Welke grenswaarden benaderen ze? Hangen die waarden af van de beginwaarden die worden gekozen?
- Laat zie hoe je deze grenswaarden voor $S(t)$ en $P(t)$ berekent uit de modelformules.

- d Hoe zou je dit verstedelijkingsmodel kunnen uitbreiden en wel rekening houden met toestroom van buiten de regio?

Opgave 4

In een stadswijk met 12000 inwoners zijn twee supermarkten: Super en Markt. Sommige mensen uit de wijk hebben een voorkeur voor Super, anderen voor Markt en nog weer anderen wisselen af en toe van supermarkt. In de tabel is van een representatieve steekproef van 1500 mensen uit deze wijk die één keer per week naar de supermarkt gaan, bijgehouden naar welke supermarkt ze zijn geweest.

		week 2	
		Super	Markt
week 1	Super	545	266
	Markt	258	431

Tabel 4.1

Ga ervan uit dat het gedrag in de loop van de komende weken hetzelfde blijft.

- a Bereken hoeveel procent van de mensen in deze wijk die één per week naar de supermarkt gaan, blijft terugkomen bij Super.
- b $S(t)$ is het aantal wekelijkse supermarktgangers van deze steekproef naar Super en $M(t)$ het aantal wekelijkse supermarktgangers van deze steekproef naar Markt.

Waarom moet gelden $S(t) + M(t) = 1500$ voor elke t ?

- c Stel voor $S(t)$ en $M(t)$ recursieformules op en onderzoek met de grafische rekenmachine of ze naar bepaalde grenswaarden toe groeien.
- d Hoe kun je deze grenswaarden vanuit de modelformules berekenen?

Voorbeeld 2

In de economie wordt als typerend model voor vraag een aanbod de zogenaamde 'varkenscyclus' gebruikt. Hierbij gaat het erom dat het aanbod $q_A(t)$ (van varkens op de varkensmarkt) op een bepaald tijdstip t afhangt van de prijs $p(t - 1)$ van een periode eerder. De vraag $q_V(t)$ wordt echter bepaald door de prijs van dit moment $p(t)$.

Verdere modelaannames zijn:

- Als de prijs toeneemt, neemt de vraag af.
- Als de prijs toeneemt, neemt het aanbod toe.
- Zowel vragers als aanbieders reageren onmiddellijk op elke prijsverandering.
- Alles wat wordt aangeboden wordt meteen verkocht.

Hierbij passen modelformules zoals: $q_A(t) = p(t - 1) - 25$ en $q_V(t) = 400 - 1,5p(t)$.

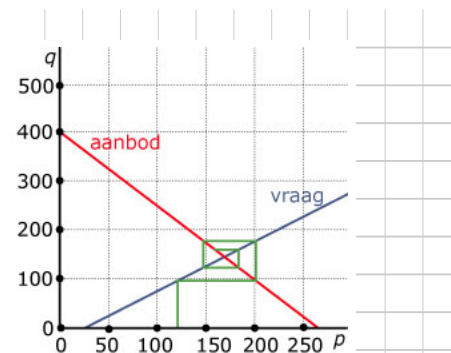
Reken dit model door met een startprijs $p(0) = 120$ en zoek de prijs waarbij vraag en aanbod elkaar in evenwicht houden.

Antwoord

Breng dit model in beeld door de lijnen $q_A = p - 25$ en $q_V = 400 - 1,5p$ in één assenstelsel te tekenen. Start bij $p(0) = 120$, bepaal eerst q_A en bepaal dan bij welke prijs q_V even groot is. Bepaal bij die $p(1)$ weer q_A en herhaal het voorgaande.

Om dit model op de grafische rekenmachine in te voeren, stel je voor $p(t)$ een differentievergelijking op uitgaande van $q_A = q_V$. Deze wordt: $p(t - 1) - 25 = 400 - 1,5p(t)$.

Dit geeft $p(t) = 283\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot p(t - 1)$ en hieruit blijkt hoe de rij $p(t)$ convergeert naar een evenwichtsprijs.



Figuur 4.4

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** tref je een economisch model aan dat de varkenscyclus wordt genoemd. Er zijn twee modelvergelijkingen gegeven.

- Leg uit dat beide modelvergelijkingen voldoen aan de eerste twee aannames.
- Laat met een tijdgrafiek zien dat de rij $p(t)$ convergeert.
- Stel een directe formule op voor $p(t)$ en bereken daarmee de grenswaarde die $p(t)$ nadert.

Bekijk de grafiek in het voorbeeld waarin de prijsontwikkeling is aangegeven.

- Waarom is dit niet de webgrafiek van de rij $p(t)$?
- Hoe kun je uit de oorspronkelijke modelformules de grenswaarde van $p(t)$ berekenen?

Opgave 6

Een dynamisch vraag- en aanbodmodel wordt gegeven door $q_A(t) = 2 + p(t - 1)$ en $q_V(t) = 16 - \frac{4}{3}p(t)$ met t in maanden. q_A stelt de aangeboden hoeveelheid van een bepaald artikel voor en q_V is de op de handelsmarkt gevraagde hoeveelheid van ditzelfde artikel. Neem $p_0 = 3$.

- Waarom komt in de formule voor de vraag $p(t)$ voor en in die voor het aanbod $p(t - 1)$?
- Stel een recursieformule op voor $p(t)$ uitgaande van $q_A = q_V$ en laat met een tijdgrafiek zien dat de rij $p(t)$ convergeert.
- Stel een directe formule op voor $p(t)$ en bereken daarmee de grenswaarde die $p(t)$ nadert.
- Teken een grafiek waarin je de prijsontwikkeling aangeeft met behulp van de grafieken van $q_A = 2 + p$ en $q_V = 16 - \frac{4}{3}p$.

Voorbeeld 3

In veel natuurgebieden is er sprake van een wisselwerking tussen de roofdieren en hun prooi, zoals vossen en konijnen. Modellen die zo'n wisselwerking bestuderen heten 'roofdier-prooi-modellen'. De Italiaanse wiskundige Vito Volterra en de Amerikaanse wiskundige Alfred J. Lotka ontwierpen in 1925-1926 een dynamisch model voor dergelijke wisselwerkingen. Als $P(t)$ het aantal prooidieren en $R(t)$ het aantal roofdieren op tijdstip t is, zien de vergelijkingen er in discrete vorm als volgt uit:

- $P(t) = P(t-1) + (a - b \cdot R(t-1)) \cdot P(t-1)$
- $R(t) = R(t-1) - (c - d \cdot P(t-1)) \cdot R(t-1)$

Hierin zijn a , b , c en d positieve getallen.

Neem $a = 0,20$, $b = 0,0015$, $c = 0,1$ en $d = 0,0002$. Ga verder uit van $P(0) = 600$ dieren en $R(0) = 100$ dieren. De tijd t is in maanden.

Plot met de grafische rekenmachine een grafiek waarin je het aantal prooidieren uitzet tegen het aantal roofdieren voor deze 120 maanden. Hoe zie je aan deze grafiek dat dit model periodiek is met een zekere stijgingstrend?

Antwoord

Voer in:

$$u(n) = u(n-1) + (0,2 - 0,0015 \cdot v(n-1)) \cdot u(n-1) \text{ en}$$

$$u(n \text{ Min}) = \{600\}.$$

$$v(n) = v(n-1) - (0,1 - 0,0002 \cdot u(n-1)) \cdot v(n-1) \text{ en}$$

$$u(n \text{ Min}) = \{100\}.$$

Venster: $[0,150] \times [0,300]$.

Kies voor de fasegrafiek, zie het [Practicum](#).

De grafiek ziet eruit als een langzaam naar buiten spiralerende kromme.

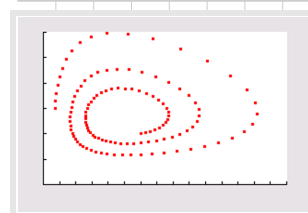
Opgave 7

Bekijk het roofdier-prooi-model in [Voorbeeld 3](#).

- Waarom komt in de formule voor het aantal roofdieren een minteken voor $(c - d \cdot P(t-1)) \cdot R(t-1)$?
- Voer de recursieformules in op de grafische rekenmachine en plot een tijdgrafiek voor de eerste 120 maanden.
- Na hoeveel maanden heeft het aantal prooidieren voor het eerst een maximale waarde bereikt? Waardoor wordt de daling van het aantal prooidieren daarna veroorzaakt?
- Ga na dat het model periodiek is met een zekere stijgingstrend.



Figuur 4.5



Figuur 4.6

Opgave 8

In een afgesloten gebied leven konijnen en vossen. Voor de groeifactor van het aantal konijnen geldt $g_k = 1,15 - 0,01 \cdot V(t)$ en voor de groeifactor van het aantal vossen geldt $g_v = 0,70 + 0,0002 \cdot K(t)$. Hierin is $K(t)$ het aantal konijnen in jaar t en $V(t)$ het aantal vossen in jaar t . Neem aan dat $V(0) = 20$ en $K(0) = 2500$ dieren.

- Licht toe dat hierbij het roofdier-prooi-model past dat in **Voorbeeld 3** is beschreven.
- Welke twee modelformules kun je op grond hiervan opstellen voor het verloop van de aantallen dieren van deze twee soorten?
- Voer de recursieformules in op de grafische rekenmachine en plot een tijdgrafiek voor de eerste 70 maanden.
- Na hoeveel jaar heeft het aantal vossen voor het eerst een maximale waarde bereikt? Wat betekent dit voor het aantal konijnen daarna?
- Is dit model voor beide diersoorten op den duur gunstig?

Verwerken

Opgave 9

In een bepaalde regio vertrekt elke tien jaar $\frac{1}{6}$ deel van de bevolking van het platteland P naar de stad en $\frac{1}{15}$ deel van de stad S naar het platteland.

Ga ervan uit dat er niemand uit de regio vertrekt en er ook niemand van buitenaf in de regio komt wonen.

- Stel een discreet dynamisch model op bij deze situatie.
- Waarom is er hier sprake van een gesloten systeem?
- Toon met behulp van een tijdgrafiek aan dat er sprake is van een evenwichtstoestand.
- Welk deel van de bevolking zal uiteindelijk in de stad wonen?

Opgave 10

Gegeven zijn de volgende recursieformules:

- $u(t) = u(t-1) + (0,08 - 0,0015 \cdot v(t-1)) \cdot u(t-1)$
- $v(t) = v(t-1) - (0,2 - 0,00048 \cdot u(t-1)) \cdot v(t-1)$

met $u(0) = 600$ en $v(0) = 50$.

Bereken handmatig $u(3)$ en $v(3)$.

Opgave 11

Een bepaalde soort dieren kun je verdelen in jonge dieren en volwassen dieren. De volwassen dieren hebben jaarlijks gemiddeld zo'n 0,4 nakomelingen. Van de jonge dieren wordt jaarlijks ongeveer 25% volwassen. Van de volwassen dieren sterft jaarlijks zo'n 35%. In een bepaald jaar zijn er 40 jonge en 90 volwassen dieren.

- Stel voor deze diersoort een discreet dynamisch model op.
- Bereken het aantal jonge dieren tien jaar later.

- c Er is nu geen sprake van een evenwichtstoestand waarin beide generaties naar een bepaalde grenswaarde naderen. Bij welk sterftepercentage van de volwassen dieren is dit wel het geval?

Opgave 12

In een dynamisch vraag-en-aanbodmodel gelden de volgende modelformules: $q_A(t) = 30 + 0,5p(t-1)$ en $q_V(t) = 80 - 2p(t)$. Hierin is t de tijd in maanden en q de hoeveelheid. Er geldt verder $p(0) = 1$ geldeenheid.

- a In dit vraag-en-aanbodmodel is sprake van een vertraging aan de aanbodzijde. Waaraan zie je dit?
- b Laat de prijsontwikkeling op deze markt zien in een figuur waarin q is uitgezet tegen p .
- c Stel een differentievergelijking op voor $p(t)$ uitgaande van $q_A = q_V$ en plot hierbij een tijdgrafiek.
- d Toon aan dat $p(t)$ alternerend convergeert naar een evenwichtsprijs.

Opgave 13

De meeste zeesterren zijn roofdieren, vaak eten ze schelpdieren zoals mosselen. In een bepaald kustgebied hangen de aantallen zeesterren $Z(t)$ en schelpdieren $S(t)$ dan ook van elkaar af. Hoe meer schelpdieren, hoe beter het aantal zeesterren kan groeien, maar die groei van het aantal zeesterren zorgt dan weer voor een afname van het aantal schelpdieren.

Een biologe heeft in een bassin 600 zeesterren en 4000 schelpdieren uitgezet die door deze zeesterren worden gegeten. Zij wil daarmee onderzoeken hoe het verband tussen $Z(t)$ en $S(t)$ verloopt. Bekend is dat de schelpdieren zich zonder de aanwezigheid van de zeesterren vermeerderen met 26% per jaar in hun normale leefomstandigheden. Verder vermindert het aantal zeesterren met 40% per jaar als ze in het bassin worden geplaatst, want er moeten eerst voldoende prooien zijn om het aantal roofdieren te laten toenemen.

Op grond van deze overwegingen wordt het volgende groeimodel opgesteld en nader onderzocht:

$$S(t) = S(t-1) + (0,26 - p \cdot Z(t-1)) \cdot S(t-1)$$

$$Z(t) = Z(t-1) - (0,40 - q \cdot S(t-1)) \cdot Z(t-1)$$

Na een jaar blijkt het aantal zeesterren te zijn afgenomen tot 432 exemplaren en het aantal schelpdieren te zijn gestegen tot 4704 exemplaren.

- a Welke waarden moeten p en q hebben?
- b Hoeveel zeesterren zijn er tien jaar nadat de biologe haar dieren heeft uitgezet?
- c Plot met de grafische rekenmachine een tijdgrafiek van dit dynamisch model voor de eerstkomende vijftig jaar. Hoe ontwikkelen beide populaties zich? Welk probleem doet zich voor?
- d Plot met de grafische rekenmachine ook een grafiek waarin je Z uitzet tegen S .

Opgave 14

In een plaats met 100000 inwoners breekt de griep uit. Er geldt:

- $G_t = G_{t-1} - 0,000005Z_{t-1}G_{t-1}$
- $Z_t = Z_{t-1} - 0,25Z_{t-1} + 0,000005Z_{t-1}G_{t-1}$
- $I_t = I_{t-1} + 0,25Z_{t-1}$

Hierin is G_t het aantal gezonde mensen (mensen die geen griep hebben), Z_t het aantal zieken (mensen die griep hebben) en I_t het aantal immuun geworden mensen nadat ze de griep hebben gehad. Neem aan dat $Z_0 = 100$ en $I_0 = 0$ en dat t in dagen is.

- Maak een tabel. Hoeveel dagen na het uitbreken van deze epidemie is het aantal zieken het grootst?
- Hoeveel mensen zijn er op het moment dat het aantal zieken het grootst is weer beter geworden van deze griep?
- Hoe kun je uit deze formules aflezen hoeveel dagen iemand gemiddeld van deze griep ziek is?

Het getal 0,000005 ontstaat door de kans dat iemand die besmet is ook daadwerkelijk ziek wordt te vermenigvuldigen met het percentage gezonde mensen dat dagelijks in contact komt met een zieke en daardoor besmet raakt.

- Bij deze variant van de griep is de kans dat iemand die is besmet ook ziek wordt 0,00001. Hoeveel procent van de gezonde mensen raakt dan gemiddeld per dag besmet en wat gebeurt er met het maximale aantal zieken op een dag als dit percentage groter wordt?

Toepassen

Opgave 15: Macro-economisch model

Economen gebruiken een grote hoeveelheid variabelen om de economie van een bepaald land te beschrijven, zoals:

- de effectieve vraag EV
- de particuliere investeringen I
- de particuliere consumptie C
- het nationaal inkomen Y
- de belastinginkomsten B
- de overheidsuitgaven O

Uiteraard kun je nog meer variabelen invoeren. Tussen al deze variabelen bestaat een verband dat wordt beschreven in een zogenaamd macro-economisch model.

De effectieve vraag is bijvoorbeeld vaak gelijk aan de som van de particuliere consumptie, de particuliere investeringen en de overheidsuitgaven: $EV = C + I + O$.

Bekijk als voorbeeld een macro-economisch model waarin de overheid geen rol speelt:

- $EV_t = C_t + I_t$
- $C_t = 0,6 \cdot Y_{t-1} - 9$
- $I_t = 29$
- $Y_t = EV_t$

Bij de variabelen EV , C , I en Y gaat het om miljarden euro. De tijd t is in jaar.

- a Waaraan zie je dat de particuliere consumptie afhangt van het nationaal inkomen van het voorgaande jaar?
- b Laat zien dat het nationaal inkomen in dit model naar een bepaalde grenswaarde toegroeit door een bijpassende directe formule op te stellen.
Naar welke waarde groeit het nationaal inkomen?

Opgave 16: Vraag- en aanbodmodel voor kaas

Op een zeker moment t bedraagt de prijs van een bepaalde soort kaas € 7,00 per kilo. In periode $t + 1$ wordt dan zo'n 750000 kg van die kaas aangeboden. Daardoor daalt de prijs in die periode naar € 4,50 per kilo. De aangeboden hoeveelheid loopt daarom in de volgende periode $t + 2$ weer terug naar 375000 kg. Hierdoor stijgt de prijs in deze periode naar € 6,50.

- a Stel hierbij een dynamisch vraag- en aanbodmodel op.
- b Bereken de evenwichtsprijs die ontstaat door een directe formule op te stellen voor de prijs $p(t)$.
- c Komt deze prijs overeen met het snijpunt van de vraag- en de aanbodlijn die bij dit model past?

Testen

Opgave 17

In een onderzoek onder 15000 huishoudens is gebleken dat 32% van deze huishoudens die in Nederland op vakantie gaan een jaar later naar het buitenland op vakantie gaan, de rest blijft ook een jaar later in Nederland. Echter van de huishoudens die dit jaar in het buitenland vakantie vieren, blijft jaarlijks 85% een jaar later ook naar het buitenland gaan, alleen de overige 15% gaat een jaar later in Nederland op vakantie.

- a Stel hierbij een dynamisch model op, noem het aantal huishoudens dat in Nederland op vakantie gaat $N(t)$ en de buitenlandgangers $B(t)$. Neem t in jaren.

Dit jaar gingen er van deze groep 9000 huishoudens binnen Nederland op vakantie, de rest ging naar het buitenland.

- b Hoeveel waren dat er 10 jaar later?
- c Stel bij dit rekenmodel een directe formule op voor $N(t)$. Laat daarmee zien dat het aantal huishoudens dat in Nederland vakantie blijft vieren convergeert naar een bepaalde grenswaarde.

Opgave 18

Een roofdier-prooi-model wordt beschreven door de formules:

$$P_t = P_{t-1} + (0,38 - a \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$$

$$R_t = R_{t-1} - (0,10 - b \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$$

Op $t = 0$ is het aantal prooidieren $P_0 = 600$ en het aantal roofdieren $R_0 = 200$. Een maand later op $t = 1$ zijn er $P_1 = 570$ prooidieren en $R_1 = 204$ roofdieren.

- a Laat zien dat dit betekent dat $a = 0,00215$ en $b = 0,0002$.

- b** Voer de bijbehorende recursieformules in op de grafische rekenmachine en maak een tijdgrafiek voor de eerste 100 maanden.
- c** Plot voor de eerste 100 maanden met de grafische rekenmachine een grafiek waarin je het aantal roofdieren uitzet tegen het aantal prooidieren.
- d** Als $P_t = P_{t-1} = P$ en $R_t = R_{t-1} = R$, dan is het aantal prooidieren en het aantal roofdieren in stabiel evenwicht. Bereken de waarden P en R . Welke betekenis hebben deze waarden?
- e** Hoeveel roofdieren zijn er wanneer het aantal prooidieren voor het eerst na de start van deze tellingen een maximum bereikt?

Practicum

Met de volgende practica leer je enkele technieken op de GR die bij het **werken met rijen** onontbeerlijk zijn. Nu gaat het vooral om de vierde paragraaf van zo'n practicum.

- [Rijen met de TI84](#)
- [Rijen met de TIInspire](#)
- [Rijen met de Casio fx-CG50](#)
- [Rijen met de HP prime](#)
- [Rijen met de NumWorks](#)

1.5 Hogere orde

Inleiding

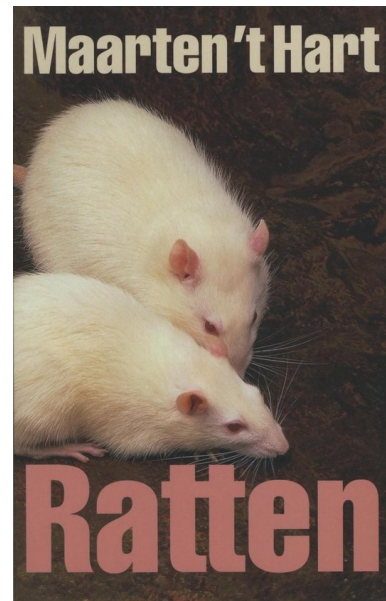
In zijn boek 'Ratten' beschrijft Maarten 't Hart de nakomelingen van een paartje ratten. Hij vraagt zich af hoeveel nakomelingen een rattenpaar zou hebben na een jaar als elk vruchtbaar paartje om de 40 dagen 6 nakomelingen krijgt, 3 mannetjes en 3 vrouwtjes die dus 3 paartjes vormen. Elk rattenpaar krijgt pas na 120 dagen voor het eerst nakomelingen, maar is dan een vruchtbaar paartje geworden. Hij kwam tot 1808 ratten, een heel rattenleger...

Je leert in dit onderwerp

- kennismaken met (lineaire) differentievergelijkingen van hogere orde en de oplossing ervan.

Voorkennis

- werken met formules van rijen, directe formules en recursieformules;
- werken veranderingen, toenames en differentiequotiënten.



Figuur 5.1

Verkennen

Opgave V1

Uit 'Ratten' van Maarten 't Hart:

Ook over de hoeveelheid nakomelingen van een rattenpaar in een jaar worden zeer verschillende getallen verstrekt. In het volgende hoofdstuk zal ik de schaarse gegevens van onderzoek over de vruchtbaarheid van ratten in de natuur bespreken, maar het is misschien wel aardig hier een schatting te maken van het aantal nakomelingen van 1 paar, uitgaande van de meest optimale omstandigheden. Daartoe gebruik ik de volgende gegevens. Gemiddeld is het aantal jongen per worp te stellen op zes; van deze 6 behoren er 3 tot het vrouwelijk geslacht. Gemakshalve stel ik de periode tussen twee bevallingen op veertig dagen. Als nu een vrouwtje op 1 januari bevalt van 6 jongen, is dat vrouwtje 40 dagen later opnieuw in staat om 6 jongen ter wereld te brengen. De vrouwtjes van de eerste worp van 6 jongen zijn zelf na 120 dagen in staat nakomelingen voort te brengen, daarna steeds weer om de 40 dagen. Als ik er dan van uit ga dat er bij elke worp steeds 3 vrouwtjes zijn en als ik alle nakomelingen optel van alle vrouwtjes in 1 jaar, dan kom ik op 1808 ratten op 1 januari van het volgende jaar, het oorspronkelijke paar meegerekend. Dit is een fictief getal: er is sterfte, moeders verwerpen soms hun jongen, vrouwtjes komen soms lange tijd niet in de oestrus. Niettemin geeft dit getal enig idee van het leger ratten dat na een jaar ontstaan kan zijn...

Tabel 5.1

Laat zien hoe 't Hart aan dat totaal van 1808 is gekomen.

Uitleg

De rij van Fibonacci is: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Elke term van deze rij (behalve de eerste twee) ontstaat door de twee voorgaande op te tellen. De bijpassende recursieformule is:

$$u(t) = u(t-1) + u(t-2) \text{ met } u(0) = 1 \text{ en } u(1) = 1$$

In deze lineaire recursieformule worden de voorgaande term en de term die aan de voorgaande voorafgaat gebruikt, daarom is dit een lineaire differentievergelijking van de tweede orde.

Het probleem met recursieformules is dat de rij vanaf het begin moet worden opgebouwd. Het is niet eenvoudig om de directe formule in dit geval te vinden. Als je naar deze rij kijkt, dan zie je dat er sprake is van een snelle groei. Het ligt daarom voor de hand om te veronderstellen dat een directe formule de vorm $u(t) = a \cdot g^t$ zou kunnen hebben, met $a \neq 0$ en $g \neq 0$. Vul je dit in de recursieformule in, dan krijg je: $a \cdot g^t = a \cdot g^{t-1} + a \cdot g^{t-2}$

Beide zijden vermenigvuldigen met g^2 geeft $a \cdot g^{t+2} = a \cdot g^{t+1} + a \cdot g^t$ en hieruit volgt $g^2 = g + 1$. Met de abc-formule vind je: $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee g = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Je vindt twee waarden voor g en a kan kennelijk van alles zijn (ongelijk aan 0). Maar directe formules zoals $u(t) = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$ of

$u(t) = a \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$ leveren niet de gewenste rij van Fibonacci op.

Je krijgt de juiste rij door een combinatie van beide te proberen:

$u(t) = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$, waarin je a en b berekent vanuit de gegeven startwaarden.

Deze directe formule is de oplossing van de differentievergelijking.

Opgave 1

Bekijk de rij van Fibonacci in de **Uitleg**. De recursieformule is $u(t) = u(t-1) + u(t-2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 1$.

a Plot de tijdgrafiek van de rij van Fibonacci met $u(n \text{ Min}) = \{1, 1\}$.

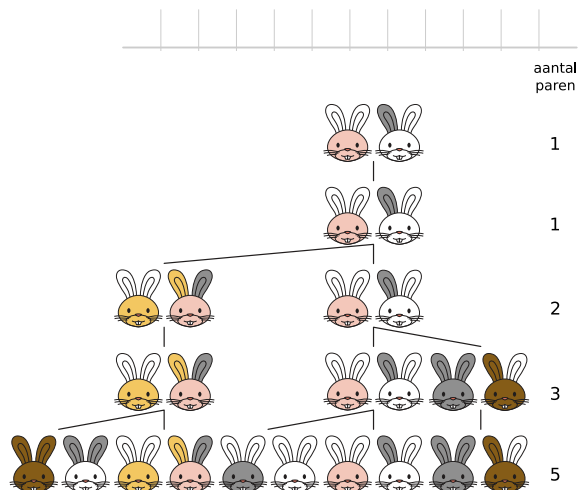
b Wat is de twintigste term van de rij?

In de uitleg wordt geprobeerd een directe formule bij deze lineaire differentievergelijking van de tweede orde te maken.

c Laat zien dat $u(t) = a \cdot g^t$ leidt tot $g^2 = g + 1$.

d Laat zien hoe je hieruit g berekent.

e Leg uit dat $u(t) = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$ geen goede rij oplevert.



Figuur 5.2

- f Bekijk nu $u(t) = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$. Bereken a en b vanuit de twee startwaarden en noteer de juiste directe formule voor de rij van Fibonacci.

Opgave 2

De rij $u(t) = 2 \cdot u(t-1) + 3 \cdot u(t-2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 2$ is ook een lineaire differentievergelijking van de tweede orde.

- Maak deze rij met de grafische rekenmachine.
- Op dezelfde manier als voor de rij van Fibonacci kun je door $u(t) = a \cdot g^t$ te substitueren mogelijke waarden van g vinden. Welke waarden zijn dat?
- Stel vervolgens een geschikte directe formule op voor deze rij.

Opgave 3

De rij $u(n) = a \cdot u(n-1) + b \cdot u(n-2)$ is de algemene vorm van een lineaire differentievergelijking van de tweede orde. Er zijn ook twee startwaarden nodig, bijvoorbeeld $u(0)$ en $u(1)$.

- In de **Uitleg** wordt gesuggereerd dat hierbij een directe formule past van de vorm $u(n) = p \cdot (g_1)^n + q \cdot (g_2)^n$ waarin g_1 en g_2 de oplossingen zijn van de vergelijking $g^2 = ag + b$. Bewijs dat dit waar is door deze uitdrukking voor $u(n)$ te substitueren in de recursieformule.
- In het bewijs wordt verondersteld dat de vergelijking $g^2 = ag + b$ twee oplossingen heeft. Is dat altijd het geval? Wanneer niet?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een recursieformule van de vorm $u(t) = a \cdot u(t-1) + b \cdot u(t-2)$ noem je een **lineaire differentievergelijking van de tweede orde**. De bijbehorende directe formule vind je door:

- $u(t) = g^t$ te substitueren in de recursieformule;
- de **karakteristieke vergelijking** $g^2 = ag + b$ op te lossen.

Als deze karakteristieke vergelijking twee verschillende oplossingen g_1 en g_2 heeft, dan is $u(t) = p \cdot (g_1)^t + q \cdot (g_2)^t$ de oplossing van de lineaire differentievergelijking. De waarden van p en q vind je uit de twee gegeven startwaarden van de rij.

Heeft de karakteristieke vergelijking maar één oplossing, dan ga je anders te werk. De oplossing is dan:

$u(t) = (p + q \cdot t) \cdot g^t$, waarin je p en q kunt berekenen uit de startwaarden.

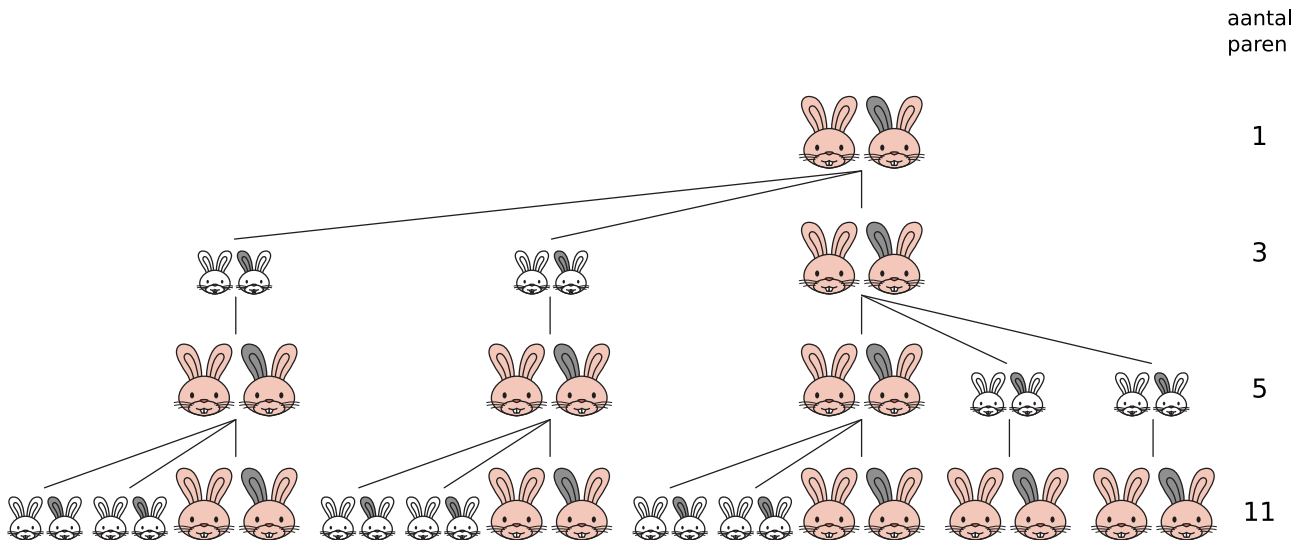
Als de karakteristieke vergelijking geen reële oplossingen heeft, dan kun je voorlopig geen directe formule vinden.

Je zegt ook wel dat de directe formule een oplossing is van de differentievergelijking.

Voorbeeld 1

De rij van Fibonacci is vooral bekend geworden om zijn voorbeeld met de voortplanting van konijnen. Een variant op zijn voorbeeld kent de volgende aannames:

- Gemiddeld krijgt elk paar konijnen na een maand precies vier jongen, twee vrouwtjes en twee mannetjes die daarom precies twee paartjes vormen.
- Een pasgeboren vrouwtjeskonijn kan een maand lang geen nakomelingen produceren.



Figuur 5.3

Ga ervan uit dat je met één konijnenpaartje start, dat na een maand twee paren nakomelingen heeft (gemiddeld). Stel een lineaire differentievergelijking van de tweede orde op voor dit voortplantingsmodel. Bepaal daarbij een directe formule, dus de oplossing van deze differentievergelijking.

Antwoord

Maak eerst een tabel voor de eerste maanden, houd de paartjes die voor jongen kunnen zorgen en de paren die dit niet kunnen goed uit elkaar.

maand	vruchtbare paren	jonge paren	totaal
0	1		1
1	1	2	3
2	3	2	5
3	5	6	11
4	11	10	21

Tabel 5.2

Je vindt de lineaire differentievergelijking:

$$K(t) = K(t-1) + 2 \cdot K(t-2) \text{ met } K(0) = 1 \text{ en } K(1) = 3.$$

Voor een directe formule begin je met het substitueren van $K(t) = g^t$. Dit geeft de karakteristieke vergelijking $g^2 = g + 2$ met oplossing $g = 2 \vee g = -1$.

De oplossing van de differentievergelijking heeft dan de vorm $K(t) = p \cdot 2^t + q \cdot (-1)^t$.

Met behulp van de startwaarden vind je $p = \frac{4}{3}$ en $q = -\frac{1}{3}$.

De bijbehorende directe formule is $K(t) = \frac{4}{3} \cdot 2^t - \frac{1}{3} \cdot (-1)^t$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1** en het model van de voortplanting van konijnen.

- a Maak bij de recursieformule een tabel met de grafische rekenmachine.
- b Leid zelf de startwaarden van de directe formule af.
- c Maak ook bij de directe formule een tabel met de grafische rekenmachine. Ga na dat die tabel hetzelfde is als die bij de recursieve formule.

Opgave 5

Los de lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde op.

- a $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 1$
- b $P(t) = 5P(t-1) - 4P(t-2)$ met $P(0) = 5$ en $P(1) = 8$

Opgave 6

Los de lineaire differentievergelijking van de tweede orde exact op.

$v(n) = v(n-1) + 5v(n-2)$ met $v(0) = 1$ en $v(1) = 2$

Voorbeeld 2

Je wilt de lineaire differentievergelijking $u(t) = 4u(t-1) - 4u(t-2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 1$ oplossen.

De karakteristieke vergelijking die hierbij hoort, heeft nu slechts één oplossing g . Laat dat zien en ga ook na dat de oplossing van deze differentievergelijking de vorm $u(t) = (p + q \cdot t) \cdot g^t$ heeft, waarin je p en q kunt berekenen uit de startwaarden.

Antwoord

Begin voor een directe formule met het substitueren van $u(t) = g^t$. Dit geeft de karakteristieke vergelijking $g^2 = 4g - 4$ met oplossing $g = 2$.

De oplossing van de differentievergelijking kan dan niet de vorm $u(t) = p \cdot 2^t$ hebben, want deze vorm voldoet niet aan beide startwaarden.

Een oplossing van de vorm $u(t) = (p + q \cdot t) \cdot 2^t$ is wel mogelijk. $u(0) = p = 1$ en $u(1) = (p + q) \cdot 2 = 1$ geeft $p = 1$ en $q = -0,5$.

De bijbehorende directe formule is $u(t) = (1 - 0,5t) \cdot 2^t$.

Ga met de grafische rekenmachine na dat deze rij hetzelfde is als de rij die is gegeven door de oorspronkelijke recursieformule.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** welke vorm de oplossing heeft van een lineaire differentievergelijking van de tweede orde als de bijbehorende karakteristieke vergelijking maar één oplossing heeft.

- a Laat zien dat de karakteristieke vergelijking bij de gegeven recursieformule precies één oplossing heeft.
- b Laat ook zien dat de gevonden oplossing inderdaad voldoet aan de differentievergelijking door haar in te vullen.
- c Ga met de grafische rekenmachine na dat beide rijen hetzelfde opleveren.

Opgave 8

Welke van de volgende lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde kun je oplossen? Geef in dat geval de oplossing.

- a $u_n = 3u_{n-1} - 2,25u_{n-2}$ met $u_0 = 2$ en $u_1 = 4,5$
- b $a(t) = 4a(t-1) - 5a(t-2)$ met $a(0) = 5$ en $a(1) = 8$
- c $V(t) = V(t-1) + 0,5V(t-2)$ met $V(0) = 2$ en $V(1) = 1 + 2\sqrt{3}$

Verwerken

Opgave 9

Bekijk de twee lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde. Los beide op.

- a $K(t) = 4K(t-1) + 5K(t-2)$ met $K(0) = 10$ en $K(1) = 20$
- b $u_n = 2u_{n-1} + 2u_{n-2}$ met $u_0 = 2$ en $u_1 = 2$

Opgave 10

Niet alle lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde hebben reële oplossingen. Bepaal van het volgende drietal de directe formule als dit kan.

- a $H(t) = 4H(t-1) - 5H(t-2)$ met $H(0) = 10$ en $H(1) = 20$
- b $K(t) = 4K(t-1) + 5K(t-2)$ met $K(0) = -10$ en $K(1) = 10$
- c $u(t) = 6u(t-1) - 9u(t-2)$ met $u(0) = 2$ en $u(1) = 4$

Opgave 11

In een afgesloten gebied leven konijnen. Elke maand krijgt een vruchtbaar vrouwtje gemiddeld zes jongen, drie vrouwtjes en drie mannetjeskonijnen. Deze jonge vrouwtjes kunnen in de eerste maand geen jongen voortbrengen, maar worden vruchtbaar vanaf hun tweede maand.

- a Maak een tabel van de eerste zes maanden voor het aantal vrouwtjes afkomstig van één vruchtbaar vrouwtje. Splits deze tabel op in vruchtbare en niet-vruchtbare vrouwtjes.
- b Stel een lineaire differentievergelijking van de tweede orde op voor het aantal vrouwtjes afkomstig van één vruchtbaar vrouwtje.
- c Bepaal de bijbehorende directe formule.

Opgave 12

Gegeven is de directe formule $u_t = 2^t + 3 \cdot 4^t$.

- Waarom is $(g - 2)(g - 4) = 0$ een mogelijke bijbehorende karakteristieke vergelijking?
- Stel een recursieformule op die hoort bij de directe formule.

Opgave 13

Gegeven is de lineaire differentievergelijking $u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 2$.

- Toon aan dat $u_n = -4u_{n-4}$.
- Bereken u_{16003} .

Opgave 14

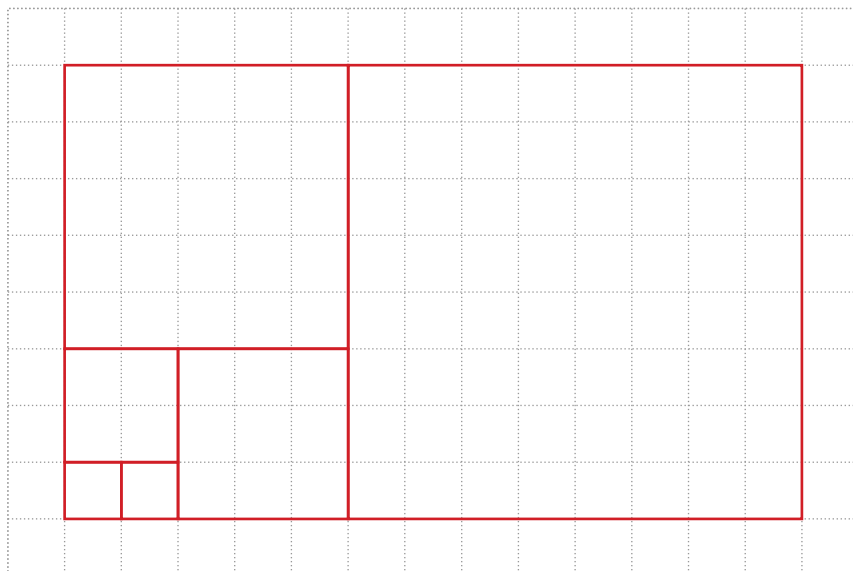
Een rij is gegeven door $u(n) = 6u(n-1) - 11u(n-2) + 6u(n-3)$ met $u(0) = 1$, $u(1) = 4$ en $u(2) = 12$.

- Bereken de waarden $u(3)$ en $u(4)$.
- Onderzoek of je deze differentievergelijking op dezelfde wijze als een differentievergelijking van de tweede orde kunt oplossen.

Toepassen

Opgave 15: Vierkantjes aanleggen

Bekijk de figuur. Tegen een vierkantje van 1 bij 1 wordt nog zo'n vierkantje aangelegd om een rechthoekje van 2 bij 1 te krijgen. Daar wordt weer een vierkant van 2 bij 2 aangelegd. Je krijgt dan een rechthoek van 2 bij 3. Vervolgens wordt daar een vierkant van 3 bij 3 aangelegd, je krijgt dan een rechthoek van 5 bij 3, enzovoort.



Figuur 5.4

- Welke rij vormen de lengtes van de opeenvolgende vierkanten?
- Met welke lineaire differentievergelijking van de tweede orde kun je die rij $f(n)$ beschrijven?

- c Maak een nieuwe rij waarin je telkens twee opvolgende waarden van de rij van Fibonacci die je bij a hebt gevonden, op elkaar deelt: $v(n) = \frac{f(n)}{f(n-1)}$. Geef daarvan de eerste acht termen.
- d De rij $v(n)$ convergeert. Laat dit zien met de grafische rekenmachine. Bepaal ook de grenswaarde in drie decimalen nauwkeurig.
- e Bereken exact naar welk getal rij $v(n)$ convergeert.
- f De exacte waarde van de grenswaarde van $f(n)$ wordt de 'gouden snede' genoemd.
- Zoek naar de betekenis van de gulden snede in de kunst en architectuur. Bekijk waar de rij van Fibonacci en de gulden snede in de natuur voorkomen.

Opgave 16: Differentievergelijking van de derde orde

Een rij is gegeven door $u(n) = u(n-1) + u(n-2) + u(n-3)$ met $u(0) = u(1) = u(2) = 1$.

Dit is een voorbeeld van een lineaire differentie vergelijking van de derde orde.

- a Schrijf de eerste 10 waarden van deze rij op.
- b Onderzoek of je deze differentievergelijking op dezelfde wijze als een differentievergelijking van de tweede orde kunt oplossen.
- Een andere rij is gegeven door $u(n) = 6u(n-1) - 8u(n-2) + 6u(n-3)$ met $u(0) = 1$, $u(1) = 4$ en $u(2) = 12$.
- c Onderzoek of je deze differentievergelijking op dezelfde wijze als een differentievergelijking van de tweede orde kunt oplossen.

Testen

Opgave 17

Je ziet hier een aantal lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde. Welke zijn oplosbaar? Bepaal in dat geval de exacte oplossing.

- a $u(t) = -2u(t-1) + 8u(t-2)$ met $u(0) = 2$ en $u(1) = -2$
- b $v(t) = -2v(t-1) - v(t-2)$ met $v(0) = 1$ en $v(1) = 2$
- c $w(t) = -2w(t-1) - 8w(t-2)$ met $w(0) = 1$ en $w(1) = 1$

Opgave 18

De koningin van de honingbij (*Apis Mellifica*) legt zowel bevruchte als onbevruchte eitjes. Uit de onbevruchte eitjes groeien darren (mannetjesbijen), uit de bevruchte eitjes groeien vrouwtjesbijen. Eén van die vrouwtjesbijen krijgt heel veel voedsel en wordt de nieuwe koningin, de overige zijn de werksters. Een dar heeft dus één ouder (een moeder). In het tweede geslacht heeft een dar twee voorouders (één grootmoeder en één grootvader, beide van moeders kant). In het derde geslacht heeft hij drie voorouders (twee overgrootmoeders en één overgrootvader).

- a Hoeveel voorouders heeft een dar in het tiende geslacht?
- b Hoeveel van die voorouders zijn darren, hoeveel zijn koninginnen?

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Discrete dynamische modellen** door-
gewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet
wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan
genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- dynamisch model — discreet dynamisch model — modelformules
— parameter
- webgrafiek en tijdgrafiek — convergente en divergente rij
— dekpunt
- differentievergelijking, oplossing ervan — lineaire differentie-
vergelijking van de eerste orde — kwadratische differentiever-
gelijking van de eerste orde — logistische groei
- stelsels differentievergelijkingen
- lineaire differentievergelijking van de tweede orde
— karakteristieke vergelijking

Activiteitenlijst

- een discreet dynamisch model beschrijven met recursieformu-
les
- de webgrafiek van een rij maken — dekpunt(en) berekenen
— convergentie/divergentie onderzoeken
- lineaire differentievergelijking van de eerste orde onderzoeken
en oplossen — kwadratische differentievergelijking van de eer-
ste orde onderzoeken
- werken met stelsels differentievergelijkingen
- lineaire differentievergelijking van de tweede orde doorrekenen
en oplossen

Achtergronden

Een heel bijzondere differentievergelijking is de logistische diffe-
rentievergelijking

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

met parameter r in $[0,4]$ en een beginwaarde x_0 .

Deze differentievergelijking is bestudeerd door de Amerikaanse
mathematisch fysicus **Mitchell Feigenbaum (1944–2019)**.

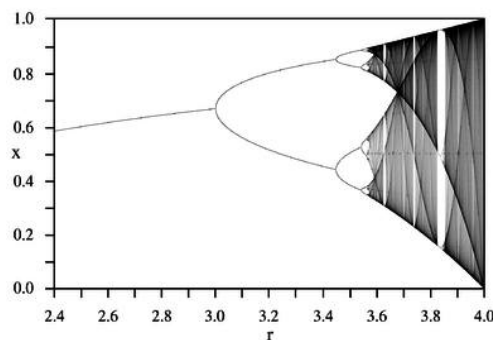


Figuur 6.1

De logistische differentievergelijking vertoont het volgende bijzondere gedrag:

1. Tot $r = 3$ convergeert de rij naar het dekpunt $1 - \frac{1}{r}$.
2. Voor $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3,44949$ oscilleert de rij tussen twee waarden zonder te convergeren.
3. Voor $3,44949 < r \leq 3,54409$ is er een cyclus van vier waarden waartussen de rij heen en weer springt.
4. Na ongeveer 3,54409 wordt het een cyclus van acht waarden en vervolgens steeds weer een verdubbeling. Dit proces heet bifurcatie. In de figuur zie je er een weergave van. Het verloop van de iteraties wordt steeds chaotischer.

Dit gedrag is ook in andere situaties verder onderzocht in de chaostheorie.



Figuur 6.2 bron: Wikipedia

Testen

Opgave 1

Onderzoek bij de differentievergelijkingen of de bijbehorende rijen convergeren of divergeren en bereken de eventuele grenswaarden.

Geef ook bij de lineaire differentievergelijkingen een directe formule.

- $u(t) = 5 + 1,4u(t-1)$ met $u(0) = 4$
- $H_{t+1} = 2,6 \cdot H_t \cdot (1 - H_t)$ met $H_0 = 0,4$
- $v(n) = -0,85v(n-1) + 2$ met $v(0) = 8$

Opgave 2

Een populatie vissen in een meertje wordt bij benadering voorspeld door het logistische groeimodel. De differentievergelijking luidt:

$$V(t) = V(t-1) + 0,4 \cdot V(t-1) \cdot \left(1 - \frac{V(t-1)}{2000}\right)$$

waarin $V(t)$ het aantal vissen als functie van de tijd in jaar voorstelt. De periode van dit model is 1 jaar. Op $t = 0$ zijn er 50 van deze vissen in het meertje.

- Plot de webgrafiek bij deze differentievergelijking.
- Ontstaat er een evenwichtssituatie? Zo ja, hoeveel vissen zullen er dan op de lange duur in dit meertje zitten?
- Plot een tijdgrafiek voor $V(t)$ als $V(0) = 10$. Doe hetzelfde voor $V(0) = 100$. Welk verschil is er tussen beide grafieken?

Opgave 3

Een viskwekerij heeft een bepaald bassin waarin maximaal 5000 meervallen kunnen leven. De kweker zet daarin 1000 meervallen uit. Het aantal meervallen zal dan groeien, maar omdat er maximaal 5000 meervallen in het bassin kunnen leven, zal de groei afnemen naarmate het aantal meervallen dichterbij de 5000 komt. De kweker veronderstelt daarom dat de toename van het aantal meervallen per jaar recht evenredig is met het verschil tussen het aantal meervallen en het maximale aantal van 5000: $\Delta N_t = c \cdot (5000 - N_t)$, waarin N_t het aantal meervallen na t jaar is.

- Toon aan dat de veronderstelling van de kweker leidt tot een groeimodel met als bijbehorende differentievergelijking: $N_{t+1} = (1 - c) \cdot N_t + 5000c$
- Na een jaar zijn er ongeveer 1600 meervallen in het bassin. Bereken c .
- Vanaf welk moment neemt het aantal meervallen minder snel toe?
- Is er nu sprake van een logistisch groeimodel?

Opgave 4

Bekijk de lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde. Welke zijn oplosbaar? Bepaal in dat geval de exacte oplossing.

- $u(t) = u(t - 1) + 6u(t - 2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 1$
- $v(t) = v(t - 1) - 6v(t - 2)$ met $v(0) = 2$ en $v(1) = 8$
- $w(t) = 6w(t - 1) - 9w(t - 2)$ met $w(0) = 4$ en $w(1) = 5$

Opgave 5

In een bepaald prooi-roofdier-model gelden de formules $P(t) = P(t - 1) + (0,20 - a \cdot R(t - 1)) \cdot P(t - 1)$ en $R(t) = R(t - 1) - (0,10 - b \cdot P(t - 1)) \cdot R(t - 1)$. Op $t = 0$ is het aantal prooidieren $P(0) = 4500$ en het aantal roofdieren $R(0) = 300$. Een maand later op $t = 1$ zijn die aantallen $P(1) = 4725$ en $R(1) = 297$.

- Laat zien dat dit betekent dat $a = 0,0005$ en $b = 0,00002$.
- Als $P(t) = P(t - 1) = P$ en $R(t) = R(t - 1) = R$, dan is het aantal prooidieren en het aantal roofdieren in stabiel evenwicht. Bereken de waarden P en R . Welke betekenis hebben deze waarden?
- Hoeveel roofdieren zijn er wanneer het aantal prooidieren voor het eerst na de start van deze tellingen een maximum bereikt?

Opgave 6

Een bedrijf wil reclame maken via de lokale omroep. Deze omroep heeft elk uur een reclameblok waarin de reclame van dit bedrijf kan worden opgenomen. Om 6:00 uur 's ochtends begint de eerste uitzending. Er worden dan zo'n 18000 mensen bereikt van de 500000 die dagelijks op deze omroep afstemmen. Men denkt elk uur zo'n extra 5% van de tot dan toe nog niet bereikte mensen de reclame te kunnen laten horen.

- Stel een discreet dynamisch model op voor $B(t)$, het aantal mensen dat t uur na aanvang van de reclameblokken is bereikt.
- Hoeveel mensen hebben op zijn laatst om 12:00 uur de reclame gehoord?
- Stel een directe formule op voor de rij $B(t)$.
- Het laatste reclameblok is om 23:00 uur. Hoeveel mensen hebben in de loop van deze dag de reclame gehoord?

Toepassen

Opgave 7: Macro-economische modellen

Economen gebruiken een grote hoeveelheid variabelen om de economie van een bepaald land te beschrijven, zoals:

- de effectieve vraag EV ;
- de particuliere investeringen I ;
- de particuliere consumptie C ;
- het nationaal inkomen Y ;
- de belastinginkomsten B ;
- de overheidsuitgaven O .

Uiteraard kun je nog meer variabelen invoeren. Tussen al deze variabelen bestaat een verband dat wordt beschreven in een zogenaamd macro-economisch model.

De effectieve vraag is bijvoorbeeld vaak gelijk aan de som van de particuliere consumptie, de particuliere investeringen en de overheidsuitgaven: $EV = C + I + O$.

Hier zie je als voorbeeld een macro-economisch model waarin de overheid geen rol speelt.

- $EV_t = C_t + I_t$
- $C_t = 0,6 \cdot Y_{t-1} - 9$
- $I_t = 29$
- $Y_t = EV_t$

Bij de variabelen EV , C , I en Y gaat het om miljarden euro. De tijd t is in jaren.

- Waarom zie je dat de particuliere consumptie afhangt van het nationaal inkomen van het voorgaande jaar?
- Laat zien dat uit deze modelformules volgt: $Y_t = 0,6 \cdot Y_{t-1} + 20$.
- Laat zien dat het nationaal inkomen in dit model naar een bepaalde grenswaarde toegroeit door een bijpassende directe formule op te stellen.

Een ander macro-economisch model luidt als volgt:

- $C_t = 0,8(Y_{t-1} - B_{t-1})$
- $I_t = 30$
- $B_t = \frac{1}{3}Y_t - 400$
- $O_t = 10$
- $Y_t = C_t + I_t + O_t$

Bij de variabelen C , Y , B , I en O gaat het om miljarden euro. De tijd t is in jaren. Neem aan dat $Y_0 = 1200$.

- d** Beschrijf dit model in woorden en stel voor Y_t zowel een differentievergelijking als een directe formule op. Wat gebeurt er op de lange duur met het nationaal inkomen?

Opgave 8: Nationaal inkomen

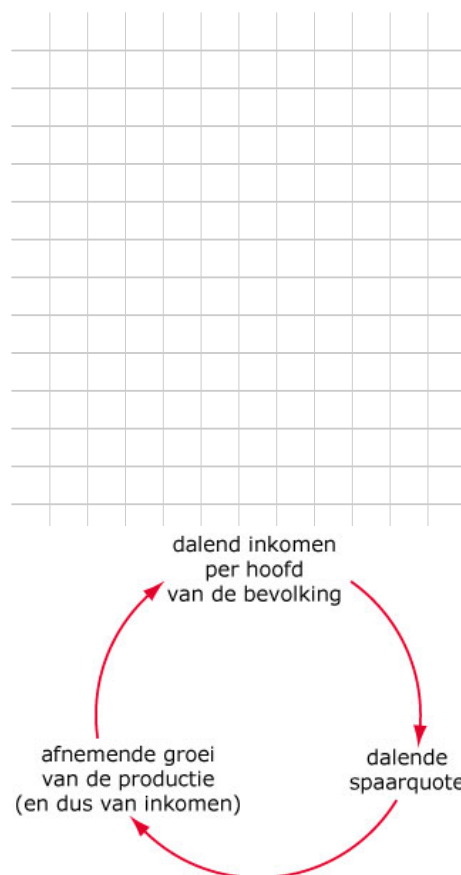
In de afgelopen 20 jaar is het wereldinkomen (het totale inkomen van alle mensen samen) sneller gegroeid dan de wereldbevolking. Dat betekent dat het gemiddeld inkomen per hoofd van de bevolking is gestegen. In de theorie van de economische groei spelen de kapitaalgoederen een belangrijke rol. Bij kapitaalgoederen kun je bijvoorbeeld denken aan machines. De kapitaalgoederen hebben een grote invloed op de productie. Hier zie je een eenvoudig model voor economische groei:

- $I_t = S_t$.
 I_t zijn investeringen in jaar t ; S_t zijn besparingen in jaar t . De investeringen zijn steeds gelijk aan de besparingen.
- $I_t = K_{t+1} - K_t$.
 K_t is hoeveelheid kapitaalgoederen in jaar t . De investeringen leiden uitsluitend tot uitbreiding van de kapitaalgoederen.
- $S_t = s \cdot Y_t$.
 Y_t is het nationaal inkomen in jaar t . De besparingen zijn steeds een vast gedeelte van het nationaal inkomen; s heet de spaarquote.
- $K_t = k \cdot Y_t$.
De hoeveelheid kapitaalgoederen is gelijk aan k keer de productiecapaciteit. Omdat wordt aangenomen dat de productiecapaciteit volledig wordt benut, is de productiecapaciteit gelijk aan het nationaal inkomen; k heet de kapitaalcoëfficiënt.

Kies $s = 0,3$, $k = 2$ en $K_0 = 200$. Alle bedragen zijn steeds in miljoenen dollars.

- a** Toon aan dat volgens het model geldt: $K_{t+1} = 1,15 \cdot K_t$.
- b** Voor welke t geldt dat het nationaal inkomen Y_t voor het eerst boven de 1 miljard dollar komt? Licht je antwoord toe.
- De spaarquote en de kapitaalcoëfficiënt bepalen de groei van het nationaal inkomen. Ontwikkelingslanden hebben lage gemiddelde inkomens en kunnen nauwelijks sparen: s is laag. In de figuur zie je dat dit leidt tot een vicieuze cirkel van armoede.
- c** Toon aan dat ook volgens het model geldt: als s afneemt, dan neemt de groei van het nationaal inkomen af.

(bron: voorbeeldexamen vwo wiskunde A1,2 uit 1998)



Figuur 6.3

2

Meetkunde in 3D

2.1	Vectoren in 3D	58
2.2	Inproduct in 3D	67
2.3	Lijnen en hoeken	76
2.4	Vlakken	86
2.5	Onderlinge ligging	98
2.6	Hoeken en afstanden	108
2.7	Totaalbeeld	116

2.1 Vectoren in 3D

Inleiding

Het werken met coördinaten en vectoren in meetkundige situaties is vooral zo handig omdat je het snel kunt uitbreiden van een twee dimensionaal Oxy -assenstelsel naar een driedimensionaal $Oxyz$ -assenstelsel.

Je leert in dit onderwerp

- werken met coördinaten en vectoren in een driedimensionaal cartesisch assenstelsel;
- afstand tussen twee punten berekenen in 3D;
- ruimtelijke figuur in een 3D cartesisch assenstelsel tekenen.

Voorkennis

- werken in een cartesisch assenstelsel in 2D;
- met vectoren rekenen in 2D.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel.

Punt F heeft de coördinaten $(4,2,3)$.

Je ziet: eerst de x -coördinaat, dan de y -coördinaat en tenslotte de z -coördinaat.

Zo is vector $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Schrijf de coördinaten van alle andere hoekpunten van balk $OABC.DEFG$ op.
- Schrijf de kentallen van de vectoren $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{EG}$ en $\overrightarrow{AG}$.
- Hoe bereken je de lengte van $\overrightarrow{OF}$?
- Hoe zou je de afstand van punt A tot punt G berekenen?

Uitleg 1

In de ruimte kun je elk punt van coördinaten voorzien door een x -as, een y -as en een z -as loodrecht op elkaar te zetten en van dezelfde schaalverdeling te voorzien. Het snijpunt van de drie assen is O . Je hebt dan een driedimensionaal cartesisch assenstelsel, ook wel aangeduid met $\mathbb{R}^3$.

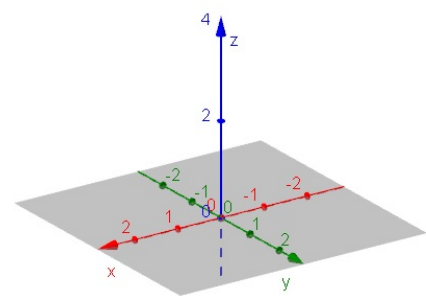
Hier zie je een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel met balk $OABC.DEFG$.

Punt F heeft de coördinaten $(4,2,3)$.

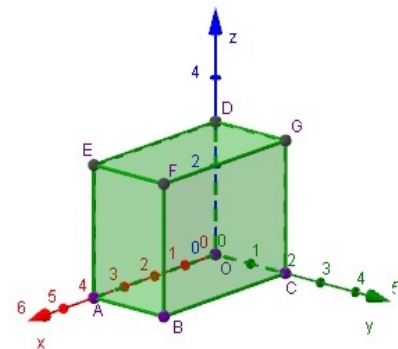
Je ziet eerst de x -coördinaat, dan de y -coördinaat en tenslotte de z -coördinaat.

De coördinaten van enkele andere hoekpunten zijn:

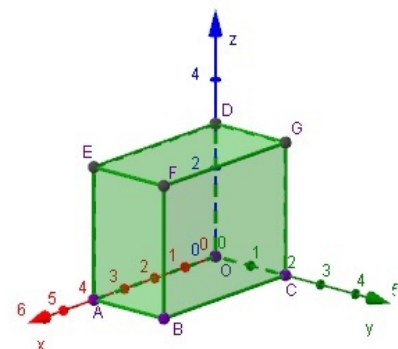
$O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $B(4,2,0)$ en $D(0,0,3)$.



Figuur 1.1 Zie figuurapplet.



Figuur 1.2 Zie figuurapplet.



Figuur 1.3 Zie figuurapplet.

In een 3D assenstelsel kun je ook werken met vectoren, alleen in plaats van twee componenten heb je nu drie componenten. Zo geldt voor de vector die van O naar F gaat:

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verder heb je bijvoorbeeld de vectoren:

$$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ook het midden van een lijnstuk kun je op dezelfde manier berekenen als in een gewoon tweedimensionaal assenstelsel. Ga na dat voor het midden M van lijnstuk BF geldt:

$$M\left(\frac{4+4}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = M(4; 2; 1,5)$$

De lengte van $\overrightarrow{OF}$ kan worden berekend door de stelling van Pythagoras uit te breiden naar drie dimensies:

$$|\overrightarrow{OF}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{29}.$$

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Werken met coördinaten en vectoren in drie dimensies is in veel gevallen een eenvoudige uitbreiding van het werken in twee dimensies.

- Beschrijf de vectoren $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DF}$ en $\overrightarrow{DB}$ met kentallen.
- Bereken het midden N van lijnstuk EG . Laat zien dat N ook het midden van lijnstuk DF is.
- Laat zien door twee keer de stelling van Pythagoras in een rechthoekige driehoek toe te passen hoe de lengte van $\overrightarrow{OF}$ wordt berekend.
- Bereken de lengtes van de vectoren $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{EC}$ en $\overrightarrow{DF}$.

Opgave 2

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je afstanden tussen twee punten kunt berekenen in 3D.

- Bereken de afstand tussen de punten B en D .
 M is het midden van BF en N is het midden van EG .
- Bereken $|\overrightarrow{MN}|$.

Opgave 3

Waar liggen in een 3D cartesisch assenstelsel alle punten (x, y, z) waarvoor geldt:

- De x -coördinaat is 4 (dus $x = 4$).
- De z -coördinaat is 0 (dus $z = 0$).
- De y -coördinaat is hetzelfde als de z -coördinaat (dus $y = z$).

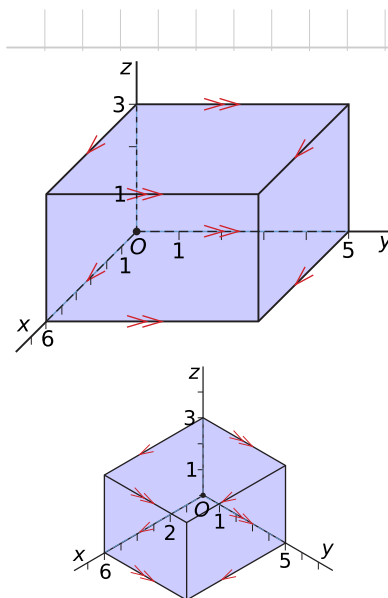
Uitleg 2

Het werken met coördinaten en vectoren kan handig zijn bij het uitvoeren van berekeningen in een balk met ribben van 6, 5 en 3. Je wilt daarom deze balk in een 3D-assenstelsel tekenen.

Bijvoorbeeld kun je op gewoon roosterpapier de y -as naar rechts, de z -as omhoog en de x -as schuin 'naar voren' tekenen. De maatstreepjes op de x -as neem je iets dichterbij elkaar dan die op de andere twee assen, om de figuur beter te laten lijken. Zie de eerste figuur.

Een andere manier is om zowel de x -as als de y -as schuin naar voren te tekenen. Dan teken je de maatstreepjes op de y -as ook dichterbij elkaar. Zie de tweede figuur.

Bekijk in de figuren hoe je van evenwijdigheid gebruikmaakt om een keurige parallelprojectie te krijgen. Natuurlijk mag je zelf kiezen welke de ribben van 6, welke die van 5 en welke die van 3 worden. Het is handig om ervoor te zorgen dat drie ribben op de assen komen te liggen, zodat één van de hoekpunten $O(0,0,0)$ wordt.



Figuur 1.4

Opgave 4

In **Uitleg 2** zie je hoe je een balk in een 3D cartesisch assenstelsel kunt weergeven.

- Wat is daarvan het voordeel?
- Bereken de lengte van de lichaamsdiagonaal van de balk.
- Teken dezelfde balk in een nieuw assenstelsel, maar neem nu als hoekpunten $O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$ en $C(0,8,0)$.
- Schrijf de coördinaten van de andere hoekpunten van de balk op.
- Bereken de lengte van vector $\overrightarrow{AG}$, ofwel $|\overrightarrow{AG}|$.

Opgave 5

Bekijk **Uitleg 2**.

- Teken in een assenstelsel de balk $ABCD.EFGH$ met $A(5,2,0)$, $C(0,6,0)$, $D(0,2,0)$ en $G(0,6,4)$. Bedenk eerst wat de coördinaten van de overige hoekpunten zijn.
- Bereken de lengte van vector $\overrightarrow{BH}$, ofwel $|\overrightarrow{BH}|$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In de ruimte kun je elk punt van coördinaten voorzien door een x -as, een y -as en een z -as loodrecht op elkaar te zetten en van dezelfde schaalverdeling te voorzien. Hun snijpunt is de oorsprong $O(0,0,0)$. Je hebt dan een **driedimensionaal (3D) cartesisch assenstelsel** gemaakt dat wordt aangeduid met $\mathbb{R}^3$.

Een **punt** P heeft in $\mathbb{R}^3$ de coördinaten (x, y, z) .

Een **vector** $\vec{v}$ heeft in $\mathbb{R}^3$ drie kentallen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$. Je kunt met

vectoren op dezelfde wijze rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen met een getal) als je in $\mathbb{R}^2$ gewend bent.

De **lengte** van vector $\vec{v}$ is: $|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$.

Als $P(x_P, y_P, z_P)$ en $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ dan is $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$.

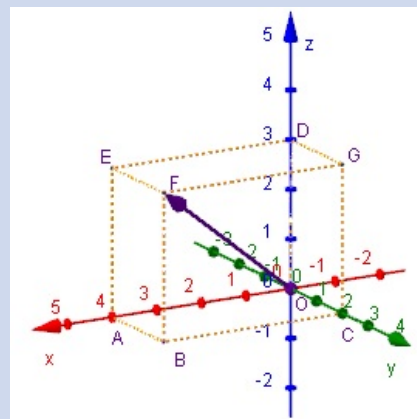
En de lengte van vector $\overrightarrow{PQ}$ is:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}.$$

Het midden M van lijnstuk PQ is $M\left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}, \frac{z_P + z_Q}{2}\right)$.

Een figuur zoals je hier ziet is een **parallelprojectie**, hetgeen betekent dat lijnen die in werkelijkheid parallel zijn, dat ook in de figuur zijn. In een parallelprojectie zit elk midden van een lijnstuk in de figuur ook echt in het midden van dat lijnstuk.

Opmerking: met de lengte van bijvoorbeeld een lijnstuk PQ wordt zowel de notatie $|\overrightarrow{PQ}|$ als $|PQ|$ gebruikt.



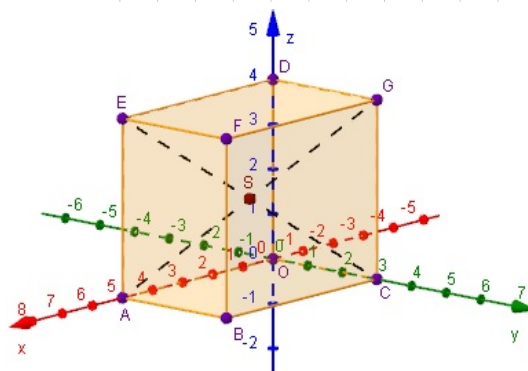
Figuur 1.5 Zie figuurapplet.

Voorbeeld 1

Je ziet hier in een 3D cartesisch assenstelsel een balk $OABC.DEFG$ met $A(5,0,0)$, $C(0,3,0)$ en $D(0,0,4)$. De lijnstukken AG en CE snijden elkaar in punt S . Bereken de lengte van lijnstuk ES .

Antwoord

Deze lengte kun je eenvoudig meetkundig berekenen door rechthoek $ACGE$ te tekenen en daarin de stelling van Pythagoras toe te passen. Je moet dan wel inzien, dat $ACGE$ een rechthoek is en in een vlakke afbeelding van een ruimtelijke figuur zijn rechte hoeken niet altijd duidelijk. Rekenen met coördinaten en vectoren gaat daarentegen bijna altijd goed zonder rechte hoeken te herkennen.



Figuur 1.6 Zie figuurapplet.

Lees uit de figuur af dat $A(5,0,0)$, $C(0,3,0)$, $G(0,3,4)$ en $E(5,0,4)$. Verder is S het midden van bijvoorbeeld AG . (In een parallelprojectie zoals deze figuur zit elk midden van een lijnstuk ook echt in de figuur in het midden van dat lijnstuk.) En dus is $S(2,5; 1,5; 2)$.

Hieruit volgt $\overrightarrow{ES} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1,5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

En dus is de lengte van ES :

$$|\overrightarrow{ES}| = \sqrt{(-2,5)^2 + (1,5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12,5}.$$

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Reken de coördinaten van S na en bereken de lengte van $\overrightarrow{AS}$.
 M is het midden van BF .
- Bereken de lengte van SM .
- Bereken de afstand van het midden N van OM tot punt E .
- P ligt op CG zo, dat $PG : PC = 1 : 3$.
Bereken exact de afstand P tot punt S .

Opgave 7

Bekijk de balk in **Voorbeeld 1**. P ligt op CG zo, dat $PG : PC = 1 : 3$.
Bereken de afstand P tot punt S .

Voorbeeld 2

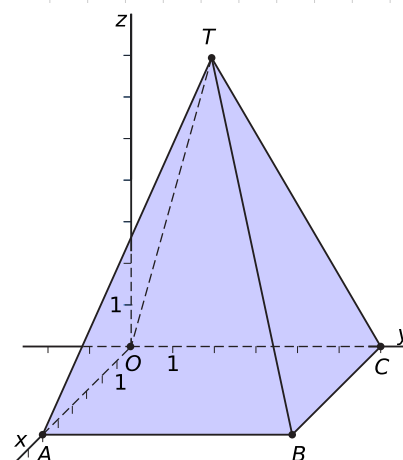
Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $T.OABC$ met $OA = 6$ en $TS = 8$, waarbij S het snijpunt van OB en AC is. Geef de coördinaten van de overige hoekpunten en teken deze piramide in een 3D cartesisch assenstelsel.

Antwoord

$O(0,0,0)$, $A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$, $C(0,6,0)$ en $T(3,3,8)$.

Teken in een 3D-assenstelsel eerst het grondvlak $OABC$.

Teken beide diagonalen van het grondvlak om S te bepalen en ga van daaruit 8 naar boven om T te vinden. (T ligt recht boven S omdat de piramide regelmatig is.)



Figuur 1.7

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**. Verder is M het midden van AT en N het midden van BC .

- Geef de coördinaten van M en N en bereken de lengte van $\overrightarrow{MN}$.
- Bereken de hoek tussen de ribben AB en AT ofwel $\angle TAB$.

Opgave 9

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is de hoogte 4 en het grondvlak $ABCD$ een vierkant met $A(0,0,0)$ en $C(2,4,0)$.

- Bepaal de coördinaten van alle andere hoekpunten.
- Teken de piramide.

Voorbeeld 3

Je ziet hier een 3D cartesisch assenstelsel waarin ook negatieve coördinaten voorkomen. De getekende figuur is een regelmatig achthvlak (octaëder) met $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $E(0,0,3)$ en $F(0,0,-3)$. M is het midden van ED .

Bereken de lengte van FM .

Antwoord

Een zuiver meetkundige aanpak is waarschijnlijk het snelst. Bijvoorbeeld met de stelling van Pythagoras in een geschikte driehoek. Maar je kunt ook gewoon gaan rekenen zonder echt de figuur te gebruiken.

M ligt midden tussen $D(0,-3,0)$ en $E(0,0,3)$ en is daarom $M(0;-1,5;1,5)$.

En dus is de lengte van FM :

$$|\overrightarrow{FM}| = \sqrt{(0-0)^2 + (-1,5-0)^2 + (1,5-(-3))^2} = \sqrt{22,5}.$$

Opgave 10

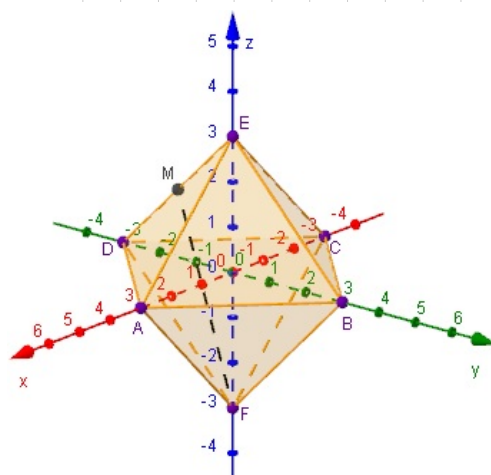
Bekijk **Voorbeeld 3**.

- Bereken exact de lengte van BM .
- Bereken exact de lengte van CM .
 N is het midden van BF .
- Bereken exact de lengte van MN .

Opgave 11

Van de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is $A(2,-2,0)$, $B(2,2,0)$ en $T(0,0,4)$.

- Teken deze piramide in een 3D cartesisch assenstelsel. Geef de coördinaten van C en D .
- Bereken exact de lengtes van de vier opstaande ribben van de piramide.
Punt P ligt op BT zo, dat $|BP| : |PT| = 3 : 1$.
- Bereken exact $|\overrightarrow{DP}|$.



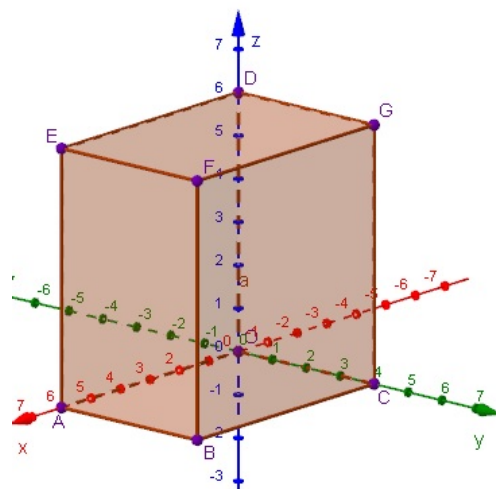
Figuur 1.8 Zie figuurapplet.

Verwerken

Opgave 12

Je ziet hier balk $OABC.DEFG$ met $A(6,0,0)$, $C(0,4,0)$ en $D(0,0,6)$.

- Geef de coördinaten van de overige hoekpunten van deze balk.
 M is het midden van AB en N is het midden van CG .
- Bepaal de kentallen van $\overrightarrow{MN}$ en de lengte van lijnstuk MN .
 P is het midden van MN .
- Hoe ver ligt P exact van punt F ?



Figuur 1.9 Zie figuurapplet.

Opgave 13

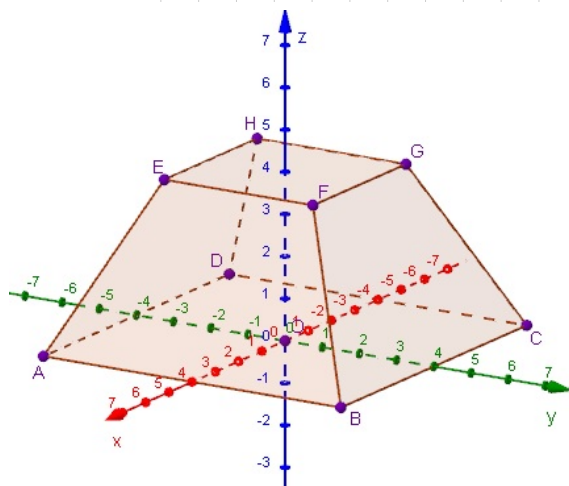
Gegeven is in een cartesisch 3D-assenstelsel de regelmatig vierzijdige piramide $T.ABCD$ met $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$ en $T(0,0,8)$.

- Maak een tekening van deze piramide in een 3D assenstelsel.
- Punt P ligt op CT zo, dat $|CP| : |PT| = 3 : 1$. Bereken exact de lengte van AP .
- Je kunt de grootte van $\angle APB$ berekenen met behulp van de cosinusregel in $\triangle ABP$. Laat zien hoe dat gaat.

Opgave 14

Je ziet hier een afgeknotte regelmatig vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$ met $|AB| = 8$ en $|EF| = 4$. Verder hebben alle punten in het bovenzvlak $EFGH$ een z -coördinaat van 4.

- Lees de coördinaten van alle hoekpunten van deze afgeknotte piramide uit de figuur af.
- Bereken exact de lengtes van de opstaande ribben van deze afgeknotte piramide.
- Bereken exact de totale buitenoppervlakte van deze afgeknotte piramide.
- Bereken in graden nauwkeurig de grootte van $\angle EGC$.



Figuur 1.10 Zie figuurapplet.

Opgave 15

Gegeven is in een 3D cartesisch assenstelsel de kubus $ABCD.EFGH$ met $A(4,0,0)$, $D(0,3,0)$ en AE evenwijdig aan de z -as. B en D liggen aan dezelfde kant van de x -as.

- Teken de kubus in een assenstelsel.
- Bereken de lengte van AG .
- Bepaal de coördinaten van het punt M waar alle vier de lichaamsdiagonalen van de kubus doorheen gaan.

Opgave 16

Van de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is gegeven dat $A(3,0,0)$, $D(0,-3,0)$ en $T(0,0,5)$.

- Teken deze piramide in een 3D-assenstelsel.
- Verder is gegeven dat P het midden van AB is en Q het midden van CT .

Geef de kentallen van de vector $\overrightarrow{PQ}$ en bereken in twee decimalen nauwkeurig de lengte van deze vector.

- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van driehoek ABT .

Opgave 17

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ is het viervlak $ABC.D$ gegeven door

$A(4,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,-4,0)$ en $D(0,0,8)$.

M is het midden van AD en N is het midden van BD .

De punten P en Q liggen zo op de z -as dat de driehoeken MNP en MNQ gelijkzijdig zijn.

Bereken de z -coördinaten van P en Q .

Toepassen**Opgave 18: Tetraëder**

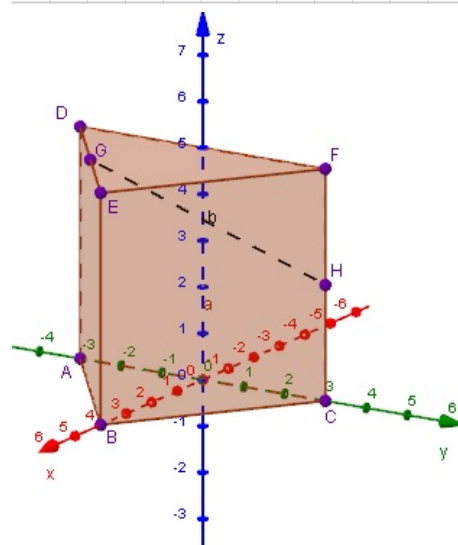
Een tetraëder is een regelmatig viervlak. Dat is een piramide waarvan alle vier de vlakken (inclusief het grondvlak) gelijkzijdige driehoeken zijn. Van het tetraëder $C.OAB$ is gegeven dat $A(6,0,0)$ en dat het grondvlak OAB in het xy -vlak ligt.

Bereken exact de coördinaten van de top C van dit tetraëder

Testen**Opgave 19**

Je ziet hier prisma $ABC.DEF$. Alle punten in het bovenvlak DEF hebben een z -coördinaat van 5. De coördinaten van de hoekpunten kun je uit de figuur aflezen.

- Schrijf van alle hoekpunten de coördinaten op.
 G is het midden van DE en H dat van CF .
- Bereken de afstand tussen beide punten.
- Bereken de grootte van $\angle GHB$ in graden nauwkeurig.



Figuur 1.11 Zie figuurapplet.

Opgave 20

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ zijn alle zijden even lang. Het grondvlak $ABCD$ is een vierkant in het xy -vlak met $A(4,1,0)$ en $B(7,4,0)$.

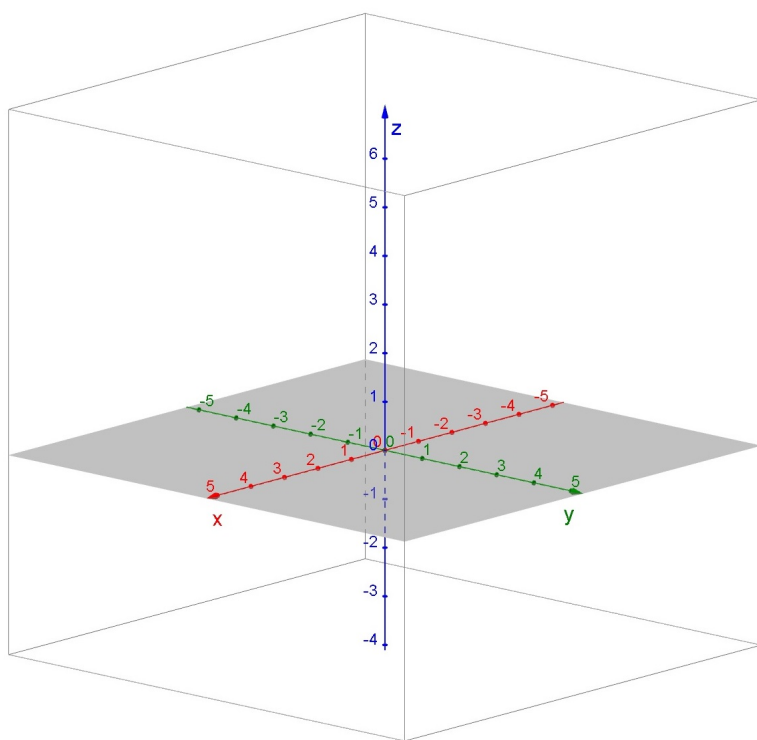
Bepaal de coördinaten van alle andere hoekpunten van de piramide en teken hem in een cartesisch 3D-assenstelsel.

Practicum: GeoGebra VI

Je hebt bij het onderwerp 'Analytische meetkunde' leren werken met GeoGebra.

Je kunt dit programma ook gebruiken bij het werken in een cartesisch 3D-assenstelsel $Oxyz$.

Je kiest dan in GeoGebra voor '3D graphics' of wel het '3D tekenvenster'. Je krijgt dan (na wat draaien en de letters bij de assen plaatsen) dit te zien.

**Figuur 1.12**

Hierin kun je allerlei 3D-figuren maken. Het is vaak handig om eerst de coördinaten van de hoekpunten in te voeren via de invoerbalk onderaan.

2.2 Inproduct in 3D

Inleiding

Hier zie je condenssporen van vliegtuigen. Als een vliegtuig met een constante snelheid en een vaste koers beweegt ontstaan ze bij mooi weer in hogere luchtlagen. Door de 'bewegende' snelheidsvector ontstaan er lijnen in de lucht. Soms lijken ze loodrecht op elkaar te staan. Hoe kun je bepalen welke hoek twee vectoren met elkaar maken?



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- het inproduct van twee vectoren in 3D berekenen;
- de hoek tussen twee vectoren berekenen met behulp van het inproduct;
- het begrip richtingsvector van een lijn en daarmee de hoek tussen twee lijnen berekenen.

Voorkennis

- met vectoren rekenen in 2D, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met coördinaten en vectoren in een 3D assenstelsel;
- hoeken en afstanden van punten berekenen in 3D.

Verkennen

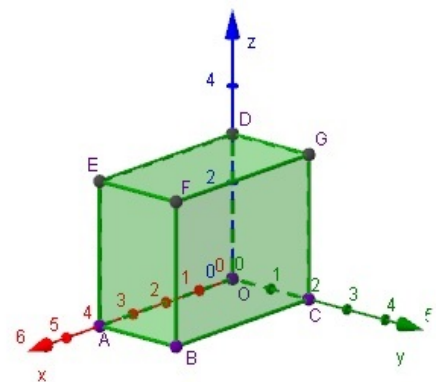
Opgave V1

Hier zie je een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel.

Punt F heeft de coördinaten $(4,2,3)$.

Zo is vector $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- a** Bereken de hoek tussen $\overrightarrow{OF}$ en $\overrightarrow{OB}$.
- b** Bereken de hoek tussen $\overrightarrow{OF}$ en $\overrightarrow{EG}$.



Figuur 2.2 Zie figuurapplet.

Uitleg

Hier zie je een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel.

Punt F heeft de coördinaten $(4, 2, 3)$.

$$\text{Zo is } \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Je ziet dat ook in 3D geldt: $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF}$, controleer maar met hun kentallen.

Je kunt met vectoren in 3D precies net zo rekenen als met vectoren in 2D. Je kunt ze optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal door dit met de corresponderende kentallen te doen. Ook het inproduct van twee vectoren blijft op dezelfde manier geldig, er komt alleen een extra kental bij:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$$

Als je bovenstaande herschrijft tot: $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$, dan kun

je de hoek tussen de twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ berekenen.

De hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{EO}$ en $\overrightarrow{EF}$ is precies 90° . Met het inproduct kun je dit narekenen:

$$\overrightarrow{EO} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft: } \overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{EF} = -4 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + -3 \cdot 0 = 0.$$

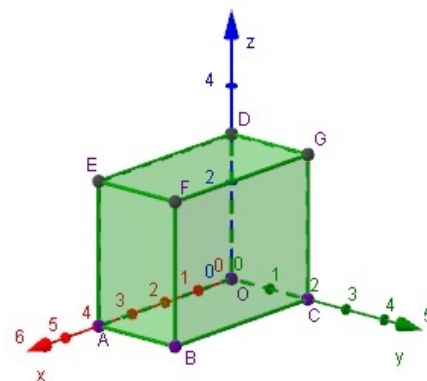
En dus is $\cos(\angle(\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EF})) = 0$ en daarom $\angle(\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EF}) = 90^\circ$.

Ook lijnen maken een hoek met elkaar, neem bijvoorbeeld de hoek tussen de lijnen AC en AG . Deze hoek wordt bepaald door de richtingen van beide lijnen. De richting van lijn AC wordt bepaald door $\overrightarrow{AC}$ en de richting van lijn AG wordt bepaald door $\overrightarrow{AG}$. Dergelijke vectoren noem je richtingsvectoren. De hoek tussen de twee lijnen is dus hetzelfde als de hoek tussen de twee bijbehorende richtingsvectoren, maar dan wel altijd de scherpe hoek.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. De vectoren $\overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{BF}$ staan loodrecht op elkaar.

- Laat dit zien met behulp van het inproduct.
- Ga door berekening na dat de vectoren $\overrightarrow{OD}$ en $\overrightarrow{DF}$ loodrecht op elkaar staan.
- Laat ook zien dat $\overrightarrow{OD}$ en $\overrightarrow{DB}$ niet loodrecht op elkaar staan.



Figuur 2.3 Zie figuurapplet.

Opgave 2

Elk ruimtelijk cartesisch assenstelsel kent drie eenheidsvectoren:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a** Laat zien dat $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$, $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$ en $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$.
- b** Laat ook zien, dat $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$, $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$ en $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$.

Neem $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$ en

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y + b_z \cdot \vec{e}_z.$$

- c** Laat zien dat het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ inderdaad $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$ is door haakjes uitwerken.

Opgave 3

Bekijk weer de **Uitleg**.

- a** Neem $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AF}$.
Gebruik het inproduct om de hoek φ tussen deze twee vectoren in graden nauwkeurig te berekenen.
- b** Neem $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{DB}$.
Deze vectoren hebben geen gemeenschappelijk aangrijpingspunt. Toch maken ze een hoek met elkaar. Gebruik het inproduct om de hoek φ tussen deze twee vectoren in graden nauwkeurig te berekenen.

Opgave 4

In de **Uitleg** staat dat de richting van lijn AC wordt bepaald door $\overrightarrow{AC}$ en de richting van lijn AG wordt bepaald door $\overrightarrow{AG}$.

- a** Waarom zijn $\overrightarrow{CA}$ en $\frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ ook goede richtingsvectoren voor lijn AC ?
- b** Gebruik $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AG}$ om de hoek tussen de lijnen AC en AG te berekenen.
- c** Gebruik $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{AG}$ om de hoek tussen de lijnen AC en AG te berekenen. Waarom is deze hoek eigenlijk niet de goede hoek?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder het **inproduct** of **inwendig product** van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ versta je $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is.

Als beide vectoren in een cartesisch assenstelsel zitten, dan kun je

ze met hun kentallen beschrijven: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$.

In dat geval is het inproduct te berekenen door de overeenkomstige kentallen te vermenigvuldigen en het resultaat op te tellen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\text{Je kunt nu met behulp van } \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ berekenen.

Belangrijk is nog dat van twee onderling loodrechte vectoren het inproduct altijd 0 is omdat de hoek tussen beide 90° is.

De hoek tussen twee lijnen is gelijk aan de scherpe hoek tussen een vector op de éne lijn en een vector op de andere lijn. Zo'n vector noem je een **richtingsvector** van de lijn.

Als je in de formule voor $\cos(\varphi)$ absoluutstrepen zet om $\vec{a} \cdot \vec{b}$, dan heb je direct de scherpe hoek. De hoek tussen twee vectoren kan wel stomp zijn.

Voorbeeld 1

Je ziet hier in een 3D cartesisch assenstelsel een balk $OABC.DEFG$ met $A(5,0,0)$, $C(0,3,0)$ en $D(0,0,4)$.

Bereken de hoek φ tussen de vectoren $\vec{EF}$ en $\vec{AG}$.

Antwoord

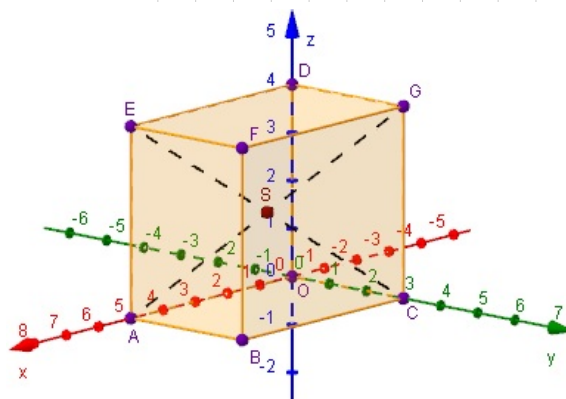
Ga na, dat de hoek tussen $\vec{EF}$ en $\vec{AG}$ hetzelfde is als de hoek tussen $\vec{AB}$ en $\vec{AG}$. Je kunt dan de gevraagde hoek beter zien.

$$\text{Verder is } \vec{EF} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{AG} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Hun inproduct is $9 = 3 \cdot \sqrt{50} \cdot \cos(\varphi)$.

Voor de hoek φ tussen beide vectoren geldt: $\cos(\varphi) = \frac{9}{3 \cdot \sqrt{50}}$.

En dus is $\varphi = \angle(\vec{EF}, \vec{AG}) \approx 65^\circ$.



Figuur 2.4 Zie figuurapplet.

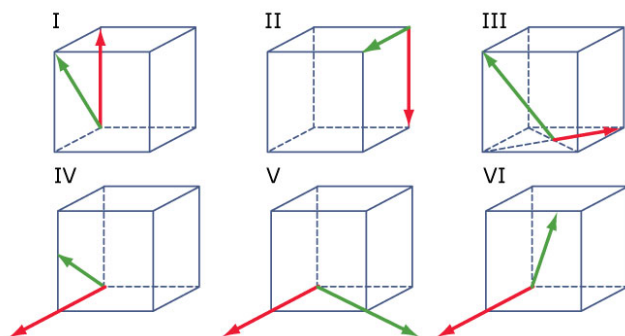
Opgave 5

In **Voorbeeld 1** bereken je de hoek tussen twee vectoren met behulp van het inproduct.

- Bereken op dezelfde manier de hoek tussen $\overrightarrow{ED}$ en $\overrightarrow{EC}$
- Laat zien dat $\overrightarrow{DG}$ en $\overrightarrow{BF}$ loodrecht op elkaar staan.
- De vectoren $\overrightarrow{DG}$ en $\overrightarrow{BF}$ maken een rechte hoek met elkaar, maar hebben geen gemeenschappelijk aangrijpingspunt. Hoe kun je die rechte hoek dan toch zichtbaar maken?

Opgave 6

Je ziet hier zes keer een kubus met daarin twee vectoren $\vec{a}$ (rood) en $\vec{b}$ (groen) getekend. De ribben van de kubus zijn steeds 4 cm. Als een vector langer is dan het lijnstuk waar hij op ligt, dan is hij precies twee keer zo lang als dat lijnstuk. In situatie VI eindigt de groene vector op de bovenste ribbe van het voorvlak.



Figuur 2.5

Bereken in elke getekende situatie het inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Opgave 7

De punten $A(4,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(-4,0,0)$, $D(0,-4,0)$ en $T(0,0,6)$ zijn de hoekpunten van een piramide. Punt M is het midden van ribbe AT .

- Bereken de hoek tussen $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OM}$ op twee manieren: met behulp van het inproduct en met behulp van een geschikte rechthoekige driehoek. Geef je antwoord in graden nauwkeurig.
- Bereken de grootte van $\angle ATC$ in graden nauwkeurig.
- Laat met behulp van het inproduct van vectoren zien dat vierhoek $ABCD$ een vierkant is.

Voorbeeld 2

Je ziet hier in een 3D cartesisch assenstelsel een balk $OABC.DEFG$ met $A(5,0,0)$, $C(0,3,0)$ en $D(0,0,4)$.

Bereken de hoek tussen de lijnen AG en EC .

Antwoord

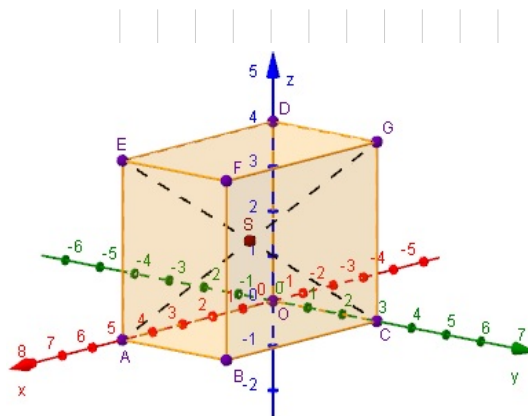
Ga na, dat de hoek tussen AG en EC hetzelfde is als de hoek tussen de richtingsvectoren $\overrightarrow{AG}$ en $\overrightarrow{EC}$.

Verder is $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Hun inproduct is $18 = \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} \cdot \cos(\varphi)$.

Voor de hoek φ tussen beide vectoren geldt: $\cos(\varphi) = \frac{18}{50}$.

En dus is $\varphi = \angle(AG, EC) \approx 69^\circ$.



Figuur 2.6 Zie figuurapplet.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je de hoek tussen twee lijnen kunt bepalen met behulp van het inproduct van twee richtingsvectoren van die lijnen.

- a Wat is een richtingsvector van een lijn?
- b Bereken met behulp van het inproduct de hoek φ tussen de lijnen AF en AG .

Ook lijnen die elkaar helemaal niet snijden kunnen toch wel een hoek ten opzichte van elkaar maken. Neem bijvoorbeeld de lijnen OB en EF .

- c Waarom snijden deze lijnen elkaar niet? Hoe zou je hun onderlinge hoek toch zichtbaar kunnen maken?
- d Bereken de onderlinge hoek φ van de lijnen OB en EF met behulp van het inproduct van hun richtingsvectoren.

Opgave 9

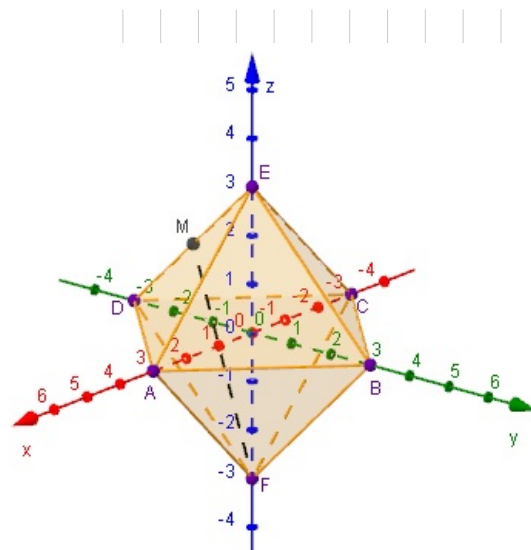
De punten $A(4,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(-4,0,0)$, $D(0,-4,0)$ en $T(0,0,6)$ zijn de hoekpunten van een piramide. Punt M is het midden van ribbe AT .

- a Bereken de hoek tussen de lijnen AT en BT . Geef je antwoord in graden nauwkeurig.
- b Hoe groot is de hoek tussen de lijnen AT en OM ?
- c Bereken de hoek tussen de lijnen AT en BC . Geef je antwoord in graden nauwkeurig.

Opgave 10

Je ziet hier een regelmatig achthvlak (octaëder) met $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $E(0,0,3)$ en $F(0,0,-3)$. M is het midden van ED .

Bereken de hoek die de lijnen FM en BE met elkaar maken. Rond af op één decimaal.



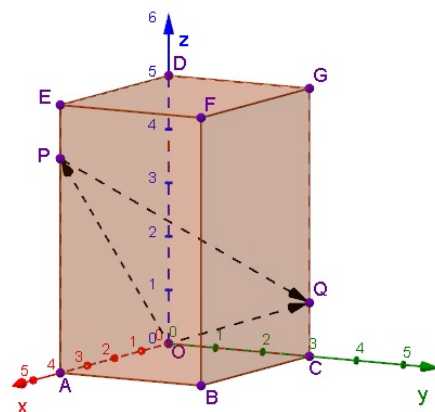
Figuur 2.7 Zie figuurapplet.

Verwerken

Opgave 11

Van de balk $OABC.DEFG$ zijn de lengtes van de ribben $|OA| = 4$, $|OC| = 3$ en $|OD| = 5$. Punt P ligt op ribbe AE zo, dat $|EP| = 1$. Punt Q ligt op ribbe CG zo, dat $|CQ| = 1$.

- Laat met behulp van hun kentallen zien, dat $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$.
- Bereken $\angle POQ$ in graden nauwkeurig.



Figuur 2.8 Zie figuurapplet.

Opgave 12

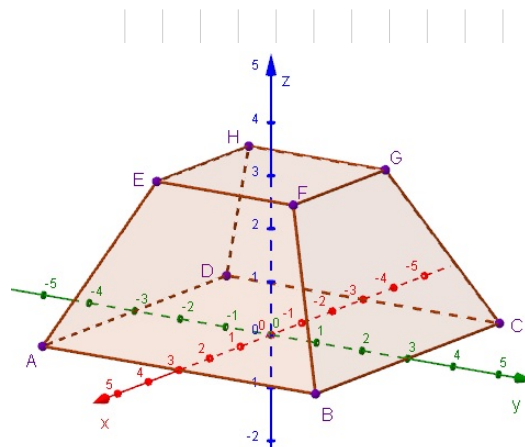
Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is de top $T(0,0,4)$ en zijn $A(2,-2,0)$ en $B(2,2,0)$ gegeven. M is het midden van AT en N is het midden van DT .

- Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen AT en CM met behulp van het inproduct van hun richtingsvectoren.
- Bereken in graden nauwkeurig de hoeken van vierhoek $BMNC$. Laat zien dat deze vierhoek een symmetrisch trapezium is.
- Bereken exact de oppervlakte van vierhoek $BMNC$.

Opgave 13

Hier zie je een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$ met $A(3, -3, 0)$ en $E(1, 5; -1, 5; 3)$.

- Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de lijnen AE en CG met elkaar maken.
- Bereken de hoeken van het voorvlak $ABFE$.



Figuur 2.9 Zie figuurapplet.

Opgave 14

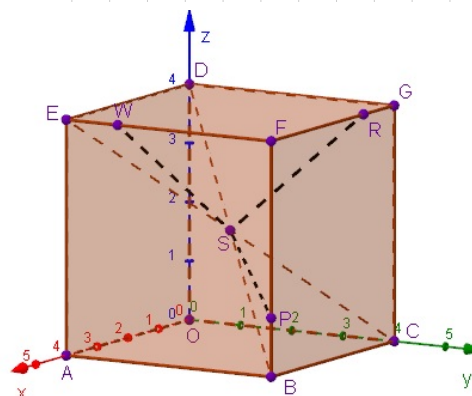
Gegeven is de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Geef vier verschillende vectoren die loodrecht staan op $\vec{v}$.
- Bereken voor welke p de vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ p \end{pmatrix}$ loodrecht staat op $\vec{v}$.

Opgave 15

Hier zie je een kubus $OABC.DEFG$ met ribben van 4 cm. Verder is gegeven $|EW| = |BP| = |GR| = 1$ cm. S is het midden van de kubus.

Toon aan dat P , R , S en W hoekpunten zijn van kubus $PQRS.TUVW$.



Figuur 2.10 Zie figuurapplet.

Opgave 16

Gegeven is de balk $OABC.DEFG$ met $A(5, 0, 0)$, $C(0, 7, 0)$ en $E(5, 0, 4)$.

Verder is punt $P(3, 7, 4)$ en punt $Q(0, 3, 4)$.

- Teken de balk en de punten P en Q .
- Op de ribbe AB ligt punt R zo, dat $\angle(QP, PR) = 60^\circ$. Bereken de coördinaten van punt R . Rond indien nodig af op twee decimalen.

Testen

Opgave 17

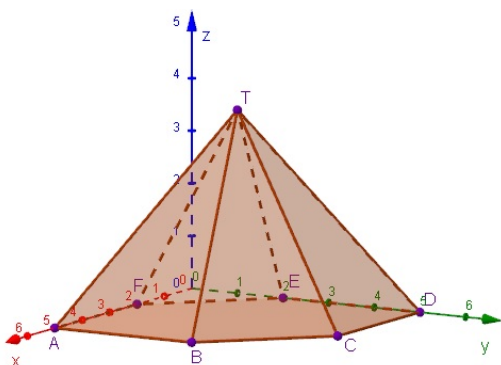
- a Bereken met behulp van het inproduct de hoek tussen de vectoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in graden nauwkeurig.}$$

- b Voor welke a staan de vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar?

Opgave 18

De punten $A(5,0,0)$, $B(5,3,0)$, $C(3,5,0)$, $D(0,5,0)$, $E(0,2,0)$, $F(2,0,0)$ en $T(2,5;2,5;4)$ zijn de hoekpunten van de piramide $T.ABCDEF$.



Figuur 2.11 Zie figuurapplet.

- a Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de vectoren $\overrightarrow{AT}$ en $\overrightarrow{CT}$ met elkaar maken.
- b Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen BT en BD .

2.3 Lijnen en hoeken

Inleiding

Hier zie je opnieuw condenssporen van vliegtuigen. Als een vliegtuig met een constante snelheid en een vaste koers beweegt ontstaan ze bij mooi weer in hogere luchtlagen. Door de 'bewegende' snelheidsvector ontstaan er lijnen in de lucht. Zo krijg je een meer dynamische beschrijving van rechte lijnen...



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- hoe je met een plaatsvector en een richtingsvector lijnen kunt beschrijven en vectorvoorstellingen van lijnen opstellen;
- snijpunten van lijnen en hoeken tussen lijnen berekenen;
- de afstand van een punt tot een lijn berekenen.

Voorkennis

- met vectoren rekenen, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met stelsels vergelijkingen.

Verkennen

Opgave V1

Een foton A beweegt door de ruimte ten opzichte van een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel. De positie van A op tijdstip t is gegeven

door $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \\ 2t \end{pmatrix}$. De eenheid van het assenstelsel is in cm.

- In welke punten zit A op $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ en $t = 3$?
- Hoe komt het dat deze eindpunten allemaal op dezelfde rechte lijn liggen?
- Waarom heeft elke vector $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \\ 2t \end{pmatrix}$ dezelfde richting?
- Het licht (een foton dus) beweegt met ongeveer $3 \cdot 10^8$ m/s? In welke tijdseenheid is t dus uitgedrukt?

Een tweede foton B beweegt volgens de vector $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3t + 1 \\ 4t \\ 2t + 2 \end{pmatrix}$.

- Hoe ziet de baan van foton B er uit? Waar zit dit foton op $t = 0$?

Uitleg 1

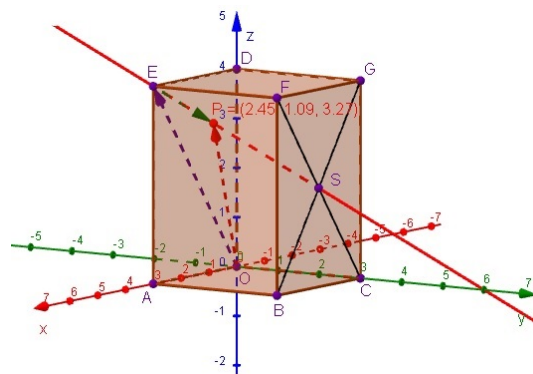
Je ziet hier een balk $OABC.DEFG$ met punt S als snijpunt van BG en CF . Er is een lijn getrokken door de punten E en S . Punt P is een punt dat over deze lijn beweegt.

Bij elk punt P hoort een plaatsvector (of steunvector)

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + t \cdot \overrightarrow{ES}$$

Dus met kentallen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



Figuur 3.2 Zie figuurapplet.

Dit noem je een vectorvoorstelling van de lijn waar P op ligt.

$\overrightarrow{ES} = \vec{r}$ is een richtingsvector en $\overrightarrow{OE} = \vec{p}$ is een plaatsvector van de lijn.

Je kunt bijvoorbeeld ook $\overrightarrow{OS}$ als plaatsvector en $\overrightarrow{SE}$ als richtingsvector kunnen kiezen. En zo zijn er meer mogelijkheden: de plaatsvector is een vector vanuit O naar een punt op de lijn, de richtingsvector is een vector tussen twee punten op de lijn.

Elk punt P op de lijn heeft coördinaten $(x, y, z) = (3 - 1,5t; 3t; 4 - 2t)$, hierin is t de parameter. Het is niet mogelijk om in 3D een lijn te beschrijven door middel van een vergelijking, alleen door een vectorvoorstelling of een parametervoorstelling.

Als je binnen één context/opgave een tweede lijn, bijvoorbeeld lijn BG wilt beschrijven, moet je een andere letter voor de parameter gebruiken (vaak worden ook wel de griekse letters λ en μ gebruikt).

De hoek tussen twee lijnen is de hoek tussen hun richtingsvectoren (wel altijd de scherpe hoek). Die bereken je met het inproduct.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Bekijk wat een vectorvoorstelling van een lijn is.

- a Waarom is $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ook een vectorvoorstelling van

de getekende lijn? Welke vectoren zijn dan de plaatsvector en de richtingsvector?

- b En is $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ook een geschikte vectorvoorstelling?

Licht je antwoord toe.

- c Waarom kun je een lijn in 3D niet beschrijven met een vergelijking?
- d Hoe zien de vectorvoorstellingen van de assen er uit?

Opgave 2

Bekijk de figuur in **Uitleg 1**.

- a Stel een vectorvoorstelling op van de lijn BG .
- b Bereken de hoek die de lijnen SE en BG met elkaar maken.
- Je ziet in de figuur dat de lijnen ES en BG elkaar in S snijden.

- c Laat zien, dat punt S zowel aan de vectorvoorstelling van ES als aan die van BG voldoet.

Je kunt de coördinaten van S ook krijgen door de x -waarden, de y -waarden en de z -waarden van beide lijnen gelijk te stellen. Je krijgt dan drie vergelijkingen met daarin twee onbekende parameters.

- d Bereken die parameters vanuit twee van de gevonden vergelijkingen. Controleer dat de gevonden waarden ook aan de derde vergelijking voldoen en dat je de coördinaten van S krijgt.

Uitleg 2

Gegeven is de balk $OABC.DEFG$ met $A(3,0,0)$, $C(0,3,0)$ en $D(0,0,4)$.

Verder is S het snijpunt van de lijnstukken CF en BG .

Je wilt de afstand van O tot de lijn door de punten E en S berekenen.

Deze afstand wordt genoteerd als $d(O, ES)$.

Een mogelijke vectorvoorstelling van ES is:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Elk punt P voldoet aan de parametervoorstelling $(x, y, z) = (3 - 1,5t; 3t; 4 - 2t)$.

De (kortste) afstand van O tot lijn ES schrijf je als $d(O, ES)$.

Die afstand is de kortste lengte van $\overrightarrow{OP}$.

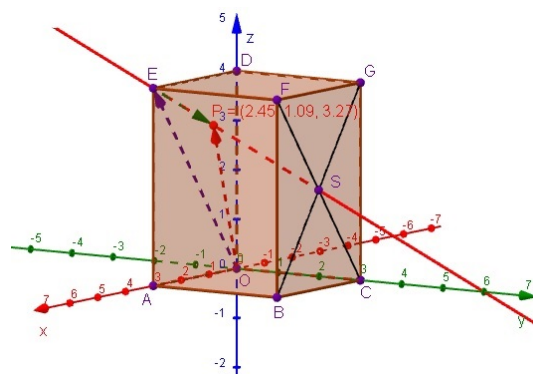
Nu is $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 - 1,5t \\ 3t \\ 4 - 2t \end{pmatrix}$ zo kort mogelijk als deze vector loodrecht op

ES staat.

Dat betekent $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{ES} = 0$.

En dus komt de vraag naar de afstand van O tot lijn ES neer op het berekenen van die waarde van t waarvoor dit het geval is en vervolgens het berekenen van de bijbehorende lengte van $\overrightarrow{OP}$.

De waarde van t waarvoor dit geldt is $\frac{50}{61}$ en de bijbehorende lengte van $\overrightarrow{OP}$ ongeveer 3,84.



Figuur 3.3 Zie figuurapplet.

Opgave 3

Bekijk [Uitleg 2](#).

- a Ga na dat $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ook een mogelijke vectorvoorstelling van de lijn ES is.

- b Je kunt de waarde van t waarbij de minimale afstand optreedt exact berekenen uit het inproduct van $\overrightarrow{OP}$ en $\overrightarrow{ES}$. Laat dat zien.
- c Reken na dat de afstand van O tot de lijn ES ongeveer 3,84 is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De plaats van een willekeurig punt P dat over een rechte lijn l beweegt kun je beschrijven door middel van twee vectoren:

- de **plaatsvector** (of **steunvector**) $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ vanuit O naar een vast punt van de lijn;
- een **richtingsvector** $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$ tussen twee punten van de lijn.

Door t te variëren, wijst er naar elk punt $P(x, y, z)$ van lijn l een

$$\text{vector} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}.$$

Dit noem je een **vectorvoorstelling van de lijn l** .

De richtingsvector kun je vergroten of verkleinen of de andere kant op laten wijzen.

Voor elk punt P geldt $(x, y, z) = (p_x + t \cdot r_x, p_y + t \cdot r_y, p_z + t \cdot r_z)$, dit noem je een **parametervoorstelling van de lijn**.

Onder de **hoek tussen twee lijnen** versta je de scherpe hoek die beide lijnen met elkaar maken. Je kunt die hoek berekenen door de hoek tussen beide richtingsvectoren te berekenen. Als die hoek α is, is de hoek tussen beide lijnen de kleinste van de hoeken α en $180^\circ - \alpha$. De hoek tussen bijvoorbeeld de lijnen l en m wordt ook wel genoteerd als $\angle(l, m)$.

Het **snijpunt van twee lijnen** bereken je door de x -, de y - en de z -waarden van hun parametervoorstellingen aan elkaar gelijk te stellen.

De **afstand van een punt tot een lijn** bereken je door de lengte van de vector $\overrightarrow{AP}$ vanuit het gegeven punt A naar een variabel punt P op de lijn te minimaliseren (de vector $\overrightarrow{AP}$ staat dan loodrecht op die lijn). De afstand tussen bijvoorbeeld het punt P en een lijn l wordt ook wel genoteerd als $d(P, l)$.

Voorbeeld 1

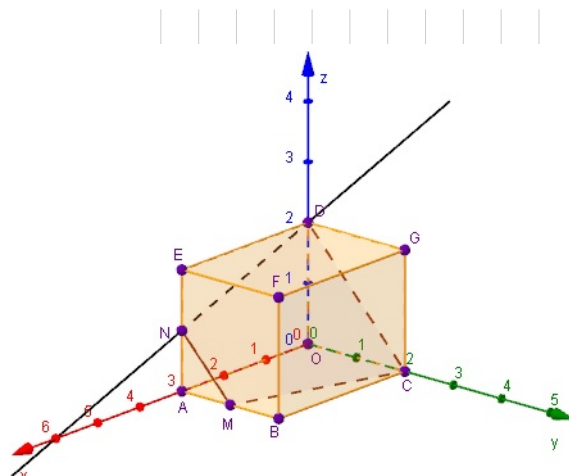
Je ziet hier een balk $OABC.DEFG$ met $A(3,0,0)$, $C(0,2,0)$ en $D(0,0,2)$. Verder is M het midden van AB en N dat van AE .

Stel een vectorvoorstelling op van lijn DN en van lijn l door E en evenwijdig met DN .

Antwoord

Lees eerst de coördinaten af: $D(0,0,2)$ en $N(3,0,1)$. Bepaal vervolgens een steunvector en een richtingsvector:

- steunvector: $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- richtingsvector: $\overrightarrow{DN} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



Figuur 3.4 Zie figuurapplet.

Een vectorvoorstelling van lijn DN wordt dan: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

De lijn door $E(3,0,2)$ is evenwijdig met DN en heeft dus dezelfde richtingsvector.

Dus wordt een vectorvoorstelling van l : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Je kunt ook een andere steunvector en richtingsvector nemen.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je een vectorvoorstelling maakt van een lijn door twee gegeven punten.

- Maak zelf een vectorvoorstelling van lijn CM .
- Ga na dat punt M voldoet aan de vectorvoorstelling van CM .
- Welk punt van CM heeft een x -coördinaat van 2?
- Stel een vectorvoorstelling op van lijn BD .

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je een vectorvoorstelling maakt van een lijn door een gegeven punt en evenwijdig met een andere lijn.

- Maak een vectorvoorstelling van lijn m door F evenwijdig met CN .
Voor elk punt in het xz -vlak geldt $y = 0$.
- Bereken het snijpunt van m met het xz -vlak.
- Bereken de snijpunten van m met de twee andere coördinaatvlakken.
- Laat zien dat m geen snijpunt met één van de coördinaatassen heeft.

Voorbeeld 2

Je ziet hier een balk $OABC.DEFG$ met $A(3,0,0)$, $C(0,2,0)$ en $D(0,0,2)$. Verder is M het midden van AB en N dat van AE .

Bereken het snijpunt S van de lijnen DN en CM . Welke hoek maken beide lijnen met elkaar?

Antwoord

Stel eerst van beide lijnen een vectorvoorstelling op:

$$\bullet \quad DN : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad CM : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denk om het kiezen van twee verschillende parameters!

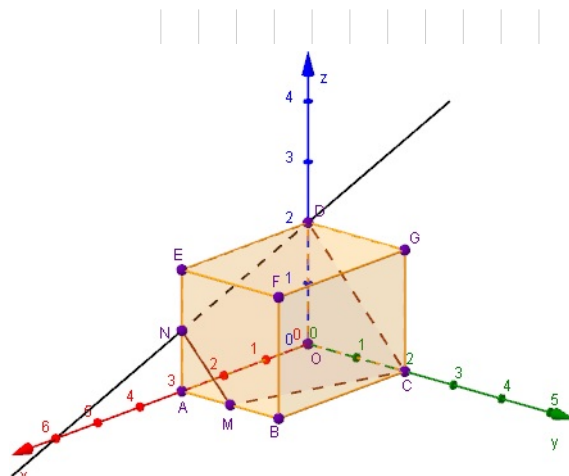
Voor het snijpunt moet gelden: $3t = 3p$, $0 = 2 - p$ en $2 - t = 0$.

De laatste twee vergelijkingen geven $p = 2$ en $t = 2$. Die waarden voldoen ook aan de eerste vergelijking, dus er is inderdaad een snijpunt. Het is $S(6,0,0)$.

De hoek die beide lijnen met elkaar maken, bereken je met behulp van het inproduct van hun richtingsvectoren.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos(\angle(DN, CM))$$

Dus $\cos(\angle(DN, CM)) = \frac{9}{10}$. Dit geeft $\angle(DN, CM) \approx 26^\circ$.



Figuur 3.5 Zie figuurapplet.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt verteld hoe je het snijpunt van twee lijnen berekent en de hoek tussen twee lijnen kunt berekenen.

- Bereken nu zelf het snijpunt van de lijnen DM en CN .
- Bereken ook de hoek tussen de twee lijnen DM en CN .

Opgave 7

Bekijk weer **Voorbeeld 2**.

- Laat zien dat de lijnen DN en BC geen snijpunt hebben.
- Laat zien dat de lijnen DN en AC geen snijpunt hebben.

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de punten $A(1,1,2)$, $B(0,6,3)$ en $P(9,13,4)$.

Bereken de afstand van punt P tot lijn AB .

Antwoord

Een mogelijke vectorvoorstelling van lijn AB is:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Een willekeurig punt Q op lijn AB heeft coördinaten $(1-t, 1+5t, 2+t)$.

$$\text{Nu is } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-t-9 \\ 1+5t-13 \\ 2+t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8-t \\ -12+5t \\ -2+t \end{pmatrix}.$$

Je zoekt het punt Q , zodat $\overrightarrow{PQ}$ loodrecht staat op $\overrightarrow{AB}$. Er moet dus gelden dat $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8-t \\ -12+5t \\ -2+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Dit geeft $27t = 54$ en dus $t = 2$.

$$\text{Dus } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } d(P, AB) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{104}.$$

$$\text{Dus } d(P, AB) = \sqrt{104}.$$

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**.

- Waarom moet gelden dat $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$?
- Reken na dat $t = 2$.
- Reken na dat $\sqrt{104}$ de afstand van P tot lijn AB is.
- Bereken de afstand van B tot lijn AP . Rond af op twee decimalen.

Opgave 9

Gegeven zijn de punten $K(3,3,0)$, $L(0,0,4)$ en $M(3,-1,2)$.

Lijn l gaat door de punten L en M .

Bereken exact de afstand van punt K tot lijn l .

Opgave 10

Gegeven zijn de lijnen $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en

$$m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

- Waarom lopen de lijnen l en m evenwijdig?
- Bereken de afstand van lijn l tot lijn m . Rond af op twee decimalen.

Verwerken**Opgave 11**

Gegeven is de kubus $OABC.DEFG$ met $A(3,0,0)$, $C(0,3,0)$ en $D(0,0,3)$.

Punt P ligt op AE zo, dat $AP = 2$.

- Teken de kubus en geef de coördinaten van P .
- Beschrijf $\overrightarrow{CP}$ met kentallen en bereken exact de lengte van $\overrightarrow{CP}$.
- Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door C en P .
- Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de lijnen CP en AG elkaar snijden.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van CP en AG .

Opgave 12

Gegeven is de kubus $OABC.DEFG$ met $A(a,0,0)$, $C(0,a,0)$ en $D(0,0,a)$.

M is het snijpunt van OB en AC .

Bewijs dat GM en CE loodrecht op elkaar staan.

Opgave 13

De afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$ heeft hoekpunten $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$, $D(-4,-4,0)$ en $E(3,-3,3)$.

- Geef de coördinaten van de hoekpunten F , G en H .
- Welke coördinaten heeft de top van piramide $T.ABCD$ waaruit deze afgeknotte piramide is ontstaan?
- Bereken het snijpunt van de lijnen AG en BH .
- Bereken de hoek waaronder de lijnen AG en BH elkaar snijden.
- Bereken de afstand van punt O tot lijn AE in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken de afstand van punt B tot lijn AE in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 14

De punten $A(4,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(-4,0,0)$, $D(0,-4,0)$ en $T(0,0,4)$ zijn de hoekpunten van de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$. M is het midden van ribbe TC .

- Bereken exact de lengte van vector $\overrightarrow{DM}$.
- Bereken de hoek tussen DM en CT .
- In de figuur kun je een vlieger $APMQ$ tekenen, waarbij PQ evenwijdig loopt aan de y -as. Bereken de coördinaten van de punten P en Q .
- Bereken exact de oppervlakte van deze vlieger.

Opgave 15

Bereken, indien mogelijk, de coördinaten van het snijpunt van de lijnen:

$$\text{a} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Opgave 16

Gegeven zijn de punten $O(0,0,0)$, $A(1,2,1)$, $B(b,b+1,b+2)$ en $C(-1,4,-3)$.

Bereken de waarde van b als gegeven is dat de lijnen OA en BC elkaar snijden. Geef ook de coördinaten van dat snijpunt.

Toepassen**Opgave 17: Afgeknotte balk**

De punten $A(4,0,0)$, $B(4,3,0)$, $C(0,3,0)$, $D(0,0,5)$, $E(4,0,4)$ en $G(0,3,3)$ bepalen een afgeknotte balk $OABC.DEFG$.

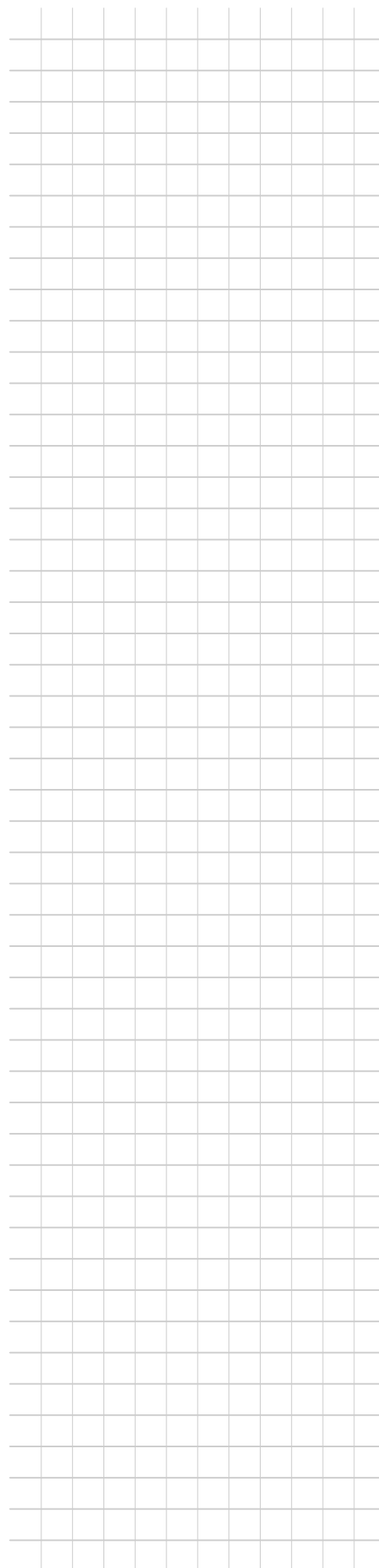
- Welke coördinaten moet punt F hebben? Licht je antwoord toe.
- Bereken in graden nauwkeurig de hoeken van vierhoek $DEFG$.
- Bereken het snijpunt S van de lijnen DF en OB .
- Bereken de afstand van punt F tot lijn DE in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken de oppervlakte van vierhoek $DEFG$ in twee decimalen nauwkeurig.

Testen

Opgave 18

De zeshoekige piramide $T.ABCDEF$ wordt gegeven door $A(5,1,0)$, $B(5,3,0)$, $C(3,5,0)$, $D(1,5,0)$, $E(1,3,0)$, $F(3,1,0)$ en $T(3,3,4)$.

- a Stel van de lijnen AT en CT een vectorvoorstelling op.
- b Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder AT en CT elkaar snijden.
- c Bereken het snijpunt van de lijnen CE en AF .
- d Bereken de afstand van punt A tot lijn DT .

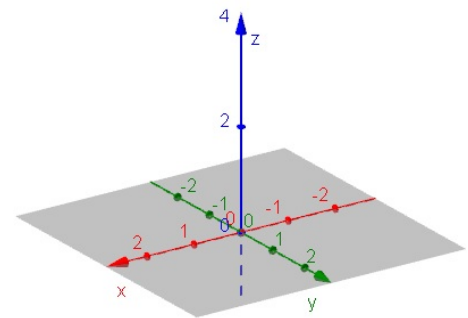


2.4 Vlakken

Inleiding

Ook vlakken in de ruimte kun je beschrijven met vectorvoorstellingen. Alleen heb je dan twee parameters nodig. Je kunt echter een vlak in de ruimte ook door middel van een vergelijking beschrijven. En dat geldt niet alleen voor platte vlakken, maar voor allerlei oppervlakken...

Het werken met vergelijkingen van vlakken blijkt vaak handiger te zijn dan het gebruiken van parametervoorstellingen.



Figuur 4.1 Zie figuurapplet.

Je leert in dit onderwerp

- een vectorvoorstelling van een vlak opstellen;
- het begrip normaalvector en de normaalvector van een vlak opstellen;
- een vectorvoorstelling van een vlak omzetten in een vergelijking en omgekeerd;
- het snijpunt van een lijn en een vlak berekenen;
- de afstand van een punt tot een vlak berekenen.

Voorkennis

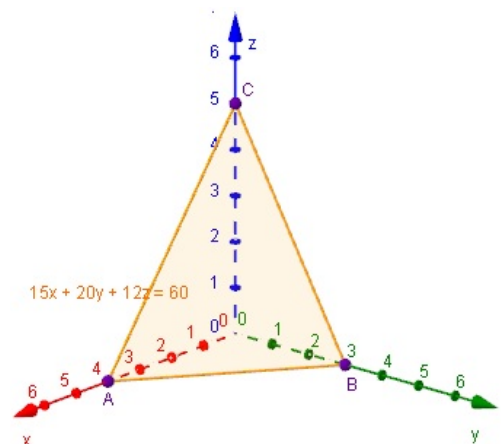
- met vectoren rekenen in 3D, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met vectorvoorstellingen van lijnen in 3D.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een vlak door de drie punten A , B en C . De vergelijking van het vlak staat er bij.

- Controleer dat deze drie punten aan de vergelijking voldoen.
- Kun je de vergelijking eenvoudiger schrijven?
- Bekijk wat er met de vergelijking gebeurt als je één of meer van de drie gegeven punten verschuift over de as.
- Welke (heel eenvoudige) vergelijking hoort er bij het Oxy -vlak?
- Waarom kun je de lijn AB niet met één vergelijking beschrijven, denk je?
- Wat stelt $x + y = 4$ in deze situatie voor?



Figuur 4.2 Zie figuurapplet.

Uitleg 1

Je ziet hier een balk $OABC.DEFG$ met $A(3,0,0)$, $C(0,2,0)$ en $D(0,0,2)$. Verder is M het midden van AB en N dat van AE .

In de vorige paragraaf heb je gezien dat een vectorvoorstelling van een lijn bepaald wordt door een steunvector en een richtingsvector. Zo is een vectorvoorstelling van lijn DN bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Je kunt ook een vectorvoorstelling van een vlak geven, alleen dan heb je naast een steunvector twee richtingsvectoren nodig.

Voor elk punt P in het vlak $MCDN$ geldt: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + p \cdot \overrightarrow{DN} + q \cdot \overrightarrow{DC}$

(waarbij in dit geval $\overrightarrow{OD}$ de steunvector is en $\overrightarrow{DN}$ en $\overrightarrow{DC}$ de richtingsvectoren).

Een vectorvoorstelling van dit vlak is daarom

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dus is $P(x,y,z) = (3p, 2q, 2-p-2q)$. Hieruit volgt: $p = \frac{1}{3}x$ en

$$q = \frac{1}{2}y.$$

Substitueer je dit in $z = 2 - p - 2q$, dan vind je de vergelijking $x + 3y + 3z = 6$.

Een vlak is in $\mathbb{R}^3$ dus met één vergelijking te beschrijven. Ga zelf na, dat de coördinaten van M inderdaad aan de vergelijking voldoen.

Je kunt vlak $MCDN$ bijvoorbeeld ook met de volgende steunvector en richtingsvectoren aangeven:

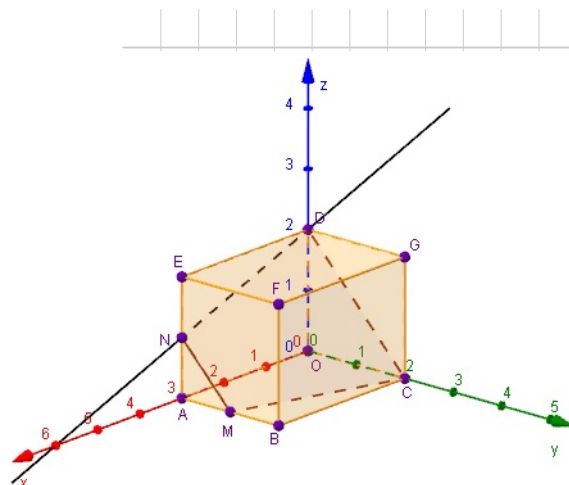
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + u \cdot \overrightarrow{CM} + v \cdot \overrightarrow{CD}.$$

De twee richtingsvectoren moeten in ieder geval in het vlak liggen en niet evenwijdig lopen (geen veelvoud van elkaar zijn).

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

- Controleer dat M in het vlak met vergelijking $x + 3y + 3z = 6$ ligt.
- Stel aan de hand van $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + u \cdot \overrightarrow{CM} + v \cdot \overrightarrow{CD}$ een vectorvoorstelling op van vlak $MCDN$.
- Stel van het vlak EFC een vectorvoorstelling en een vergelijking op.



Figuur 4.3 Zie figuurapplet.

Opgave 2

Bekijk weer **Uitleg 1**. Je ziet een vectorvoorstelling van lijn DN .

- Laat zelf zien dat alle punten op die lijn voldoen aan $x + 3z = 6$.
- Noem een paar punten die niet op lijn DN liggen, maar wel aan deze vergelijking voldoen.
- Om de punten op de lijn DN te beschrijven heb je behalve $x + 3z = 6$ nog een vergelijking nodig. Welke bijvoorbeeld?

Uitleg 2

In **Uitleg 1** zag je dat de vectorvoorstelling van vlak $MCDN$ gegeven wordt door:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Je hebt gezien dat je dit vlak ook kunt beschrijven door de vergelijking $x + 3y + 3z = 6$. Het bijzondere aan deze vergelijking is dat de coëfficiënten voor de x , y en z een vector vormen die loodrecht staat op beide richtingsvectoren van het vlak $MCDN$.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ staat loodrecht op } \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$\vec{n}$ staat daarom loodrecht op vlak $MCDN$ en wordt wel de normaalvector van dit vlak genoemd.

Je kunt ook met behulp van de normaalvector de richtingsvectoren van het vlak bepalen. Daarvoor moet je twee verschillende, niet evenwijdige of in elkaars verlengde liggende, vectoren bepalen die loodrecht staan op de normaalvector.

De normaalvector is handig bij het berekenen van de afstand van een punt tot een vlak.

Stel, je wilt de afstand berekenen van punt O tot vlak $MCDN$. Dit is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van punt O tot aan het vlak.

Eerst stel je een vectorvoorstelling op van lijn l door O loodrecht op het vlak:

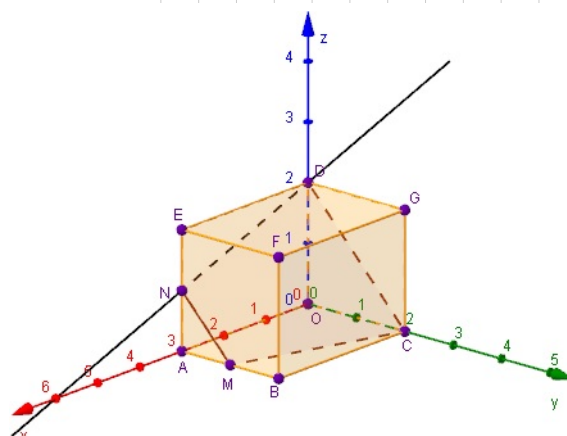
$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Voor de richtingsvector gebruik je een normaalvector van het vlak.

Bepaal vervolgens het snijpunt S van lijn l met het vlak.

Je vindt $S\left(\frac{6}{19}, \frac{18}{19}, \frac{18}{19}\right)$.

De afstand van O tot vlak $MCDN$ is $|OS| = \frac{6}{19}\sqrt{19} \approx 1,38$.



Figuur 4.4 Zie figuurapplet.

Opgave 3Bestudeer **Uitleg 2**.

- a Controleer dat de normaalvector $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ inderdaad loodrecht staat

op beide richtingsvectoren.

Andersom kun je de normaalvector van het vlak ook rechtstreeks uit de richtingsvectoren afleiden. Bekijk de vectorvoorstelling van vlak $MCDN$ nogmaals.

De richtingsvectoren zijn $\overrightarrow{DN} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Neem aan dat de normaalvector van het vlak $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ is. Deze nor-

maalvector moet loodrecht staan op elk van de twee richtingsvectoren, dus hun inproduct moet 0 zijn.

- b Welke twee vergelijkingen in a , b en c levert dit op? Controleer dat $a = 1$, $b = 3$ en $c = 3$ hier inderdaad aan voldoen.
- c Stel nu zelf een vergelijking van het vlak $MCDN$ op.
- d Maak op bovenstaande manier ook een vergelijking van vlak EFC .

Opgave 4

In **Uitleg 2** staat dat je met behulp van de normaalvector de afstand kunnen berekenen van het punt O tot het vlak $MCDN$ door de lijn l door O en loodrecht op het vlak te snijden met het vlak $MCDN$.

- a Stel een vectorvoorstelling op van lijn l .
- b Bereken het snijpunt S van lijn l met vlak $MCDN$.
- c Reken na dat $d(O, MCDN) \approx 1,38$.
- d Bereken in twee decimalen de afstand van punt B naar het vlak $MCDN$.

Opgave 5

Een normaalvector van een vlak kun je berekenen door gebruik te maken van het uitwendig product van beide richtingsvectoren. Het uitwendig product (of uitproduct) van twee vectoren stelt je in staat om snel een normaalvector van een vlak te berekenen.

Het uitproduct van twee vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ is

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Met behulp van het inproduct kun je nagaan dat de vector $\vec{a} \times \vec{b}$ loodrecht op zowel $\vec{a}$ als $\vec{b}$ staat. Het uitproduct is dus een nor-

maalvector van twee gegeven vectoren. Zo kun je het uitproduct van twee richtingsvectoren gebruiken om de normaalvector van een vlak te vinden.

- a Laat met behulp van het inproduct zien, dat het uitproduct $\vec{a} \times \vec{b}$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ een vector is die inderdaad loodrecht op zowel $\vec{a}$ als $\vec{b}$ staat.
- b Vlak V gaat door de punten $P(3,4,8)$, $Q(6,1,5)$ en $R(1,5,4)$. Stel met behulp van het uitproduct een vergelijking van dit vlak op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In $\mathbb{R}^3$ heeft

- elke **lijn** een **vectorvoorstelling** van de vorm $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r}$;
- elk **vlak** een **vectorvoorstelling** van de vorm $\vec{x} = \vec{p} + u \cdot \vec{r}_1 + v \cdot \vec{r}_2$.

Hierin is telkens $\vec{p}$ een **plaatsvector** (of **steunvector**) en zijn $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ **richtingsvectoren**.

Met de vector $\vec{x}$ wordt een vector vanuit O naar een willekeurig punt $P(x, y, z)$ op de lijn of in het vlak bedoeld. Een lijn wordt bepaald door twee punten, een vector tussen beide punten is een mogelijke richtingsvector. Een vlak wordt bepaald door drie punten (als die niet op één lijn liggen); twee vectoren vanuit één van die punten naar de beide andere punten zijn mogelijke richtingsvectoren.

Elk vlak in $\mathbb{R}^3$ heeft ook een vergelijking van de vorm $ax + by + cz = d$.

De **normaalvector** van dit vlak is $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Deze vector staat loodrecht op het vlak en dus op beide richtingsvectoren van het vlak.

De normaalvector is handig bij het berekenen van afstanden.

Een normaalvector van een vlak kun je berekenen met het **uitproduct** van beide richtingsvectoren.

Het uitproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ is

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Deze vector $\vec{a} \times \vec{b}$ staat loodrecht op zowel $\vec{a}$ als $\vec{b}$ en is daarom de normaalvector van het vlak waar $\vec{a}$ en $\vec{b}$ de richtingsvectoren zijn.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een balk $OABC.DEFG$ met $A(4,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $D(0,0,8)$.

Verder is $M(0,6,4)$ en $N(0,3,8)$.

Stel een vectorvoorstelling op van vlak $ENMB$.

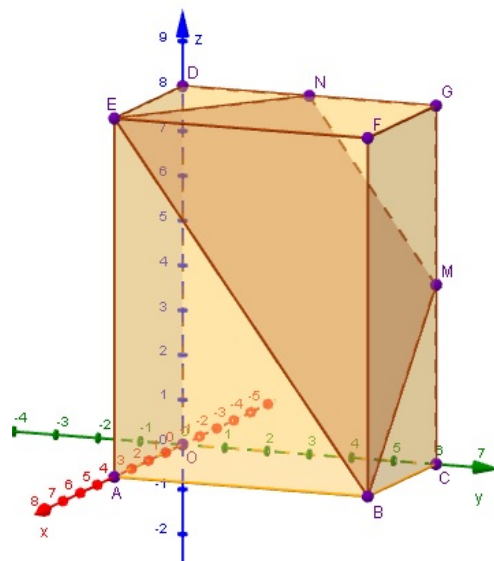
Antwoord

Een vectorvoorstelling van een vlak bestaat uit een steunvector en twee richtingsvectoren (die niet evenwijdig lopen).

Elk punt P van vlak $ENMB$ is bijvoorbeeld te schrijven als:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + p \cdot \overrightarrow{EB} + q \cdot \overrightarrow{EN}.$$

$$\text{Dus vlak } ENMB: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Figuur 4.5 Zie figuurapplet.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a Stel een vectorvoorstelling op van vlak ANF .

- b Beschrijf het vlak met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Opgave 7

Gegeven is het vlak met vergelijking $W: -2x + 4y - 3z = 5$.

Geef een vectorvoorstelling van vlak W .

Opgave 8

Gegeven zijn de punten $A(-1,3,5)$, $B(2,-6,2)$, $C(-5,15,1)$ en $D(0,2,-2)$.

- a Waarom bestaat er geen vlak door de punten A , B en C ?
- b Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van het vlak V door de punten A , B en D .

Voorbeeld 2

Je ziet hier weer de balk $OABC.DEFG$ met $A(4,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $D(0,0,8)$.

Verder is $M(0,6,4)$ en $N(0,3,8)$.

Stel een vergelijking op van vlak $ENMB$ en laat zien dat het snijpunt S van de lijnen EM en BN in vlak $ENMB$ ligt.

Antwoord

Een vectorvoorstelling van $ENMB$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Een normaalvector $\vec{n}$ van vlak $ENMB$ bepaal je met behulp

van het uitproduct van $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - (-4) \cdot 3 \\ -4 \cdot (-4) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 - 3 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Je neemt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Door ook nog het punt $(4,0,8)$ in te vullen, vind je de vergelijking van het vlak, namelijk:

$$ENMB: 3x + 4y + 3z = 36$$

Voor het snijpunt S van de lijnen EM en BN stel je de vectorvoor-

stellingen van EM : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en BN : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

aan elkaar gelijk.

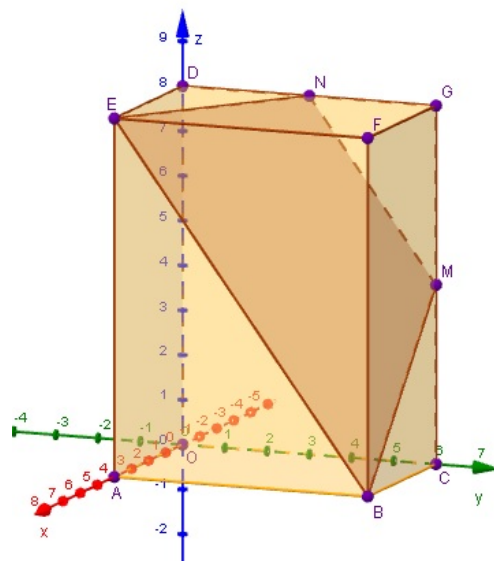
Dit geeft snijpunt $S(\frac{4}{3}, 4, \frac{16}{3})$.

Dit punt S voldoet aan de vergelijking van vlak $ENMB$ en ligt dus in het vlak.

Opgave 9

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je het snijpunt van twee lijnen kunt berekenen en dan controleren dat dit snijpunt inderdaad in het vlak ligt dat door beide lijnen gaat.

- Stel de vectorvoorstellingen van de lijnen EM en BN aan elkaar gelijk en laat zien dat $S(\frac{4}{3}, 4, \frac{16}{3})$ inderdaad het snijpunt is van EM en BN .
- Vul de coördinaten van S in de vergelijking van V in en laat zien dat het klopt.
- In welk punt snijdt het vlak $ENMB$ de lijn FG ?



Figuur 4.6 Zie figuurapplet.

Opgave 10

Gegeven is het vlak $V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a Stel een vergelijking op van vlak V .

b Laat zien dat het snijpunt S van lijn $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en lijn

$$m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ in vlak } V \text{ ligt.}$$

c Bereken de waarde van p als gegeven is dat punt $P(2, p, \frac{1}{2})$ in vlak V ligt.

Opgave 11

Gegeven zijn de punten $A(3,0,1)$, $B(0,5,0)$ en $C(0,2,6)$.

Omdat de punten veel 'nullen' bevatten, is er nog andere (handigere) manier om een vergelijking van een vlak V door de punten A , B en C op te stellen.

a Hoe luidt de algemene vergelijking van een vlak?

b Vul de coördinaten van de punten A , B en C in de algemene vergelijking van een vlak in.

Je krijgt drie vergelijkingen met vier onbekenden.

c Door nu slim één waarde te kiezen, liggen de andere drie waarden vast. Doe dit.

Geef ook een vergelijking van vlak V en controleer of de punten A , B en C inderdaad in vlak V liggen.

d Stel nu op dezelfde manier een vergelijking op van een vlak door de punten $A(-2,0,3)$, $B(0,4,0)$ en $C(6,1,0)$.

Voorbeeld 3

Gegeven is piramide $T.OABC$ met $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$ en $T(4,0,4)$.

M is het midden van AT .

Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn CM en vlak OBT .

Antwoord

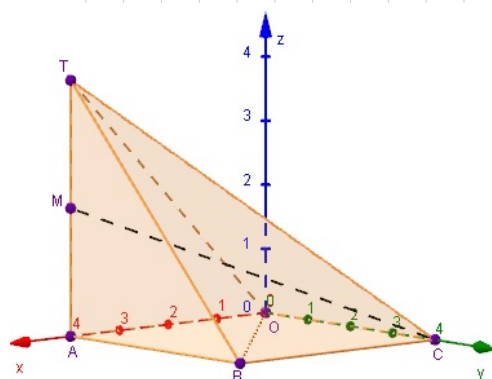
Ga na dat

$$CM: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$OBT: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Met behulp van het uitproduct van beide richtingsvectoren vind je een normaalvector van vlak OBT .

Een vergelijking van OBT is $x - y - z = 0$.



Figuur 4.7 Zie figuurapplet.

Het punt $(4t, 4 - 4t, 2t)$ is een willekeurig punt van lijn CM .

Dit punt ligt in vlak OBT als het voldoet aan de vergelijking $x - y - z = 0$.

Dit betekent: $4t - (4 - 4t) - 2t = 0$. Je vindt: $t = \frac{2}{3}$.

Het snijpunt van CM en OBT is: $S\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Opgave 12

In **Voorbeeld 3** wordt het snijpunt van lijn CM en een vlak OBT berekend.

- Laat zien hoe je van vlak OBT een vergelijking opstelt en bereken daarmee zelf dit snijpunt.
- Je kunt dit snijpunt ook berekenen zonder een vergelijking van vlak OBT te maken. Je kunt namelijk gewoon met beide vectorvoorstellingen werken.
Bereken ook op deze manier de coördinaten van het snijpunt.
- Bereken het snijpunt S van lijn OM en vlak BCT .
- Geef een voorbeeld van een lijn die vlak BCT niet snijdt. Toon door berekening aan dat die lijn het vlak inderdaad niet snijdt.

Opgave 13

Gegeven is de lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en het vlak

$$V: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Bereken de coördinaten van het snijpunt S van lijn l en vlak V door de vectorvoorstellingen aan elkaar gelijk te stellen.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt S van lijn l en vlak V door gebruik te maken van een vergelijking van vlak V .

Voorbeeld 4

Gegeven is weer piramide $T.OABC$ met $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$ en $T(4,0,4)$.

M is het midden van AT .

Bereken de afstand van A tot vlak OBT , ofwel $d(A, OBT)$.

Antwoord

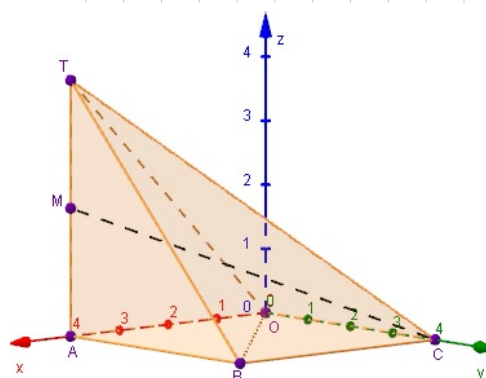
De vergelijking van vlak OBT is in **Voorbeeld 3** gevonden:

$$x - y - z = 0.$$

Een loodlijn door A op dit vlak heeft daarom de vectorvoorstelling:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Snijd deze loodlijn met vlak OBT om het punt in vlak OBT te vinden dat het dichtst bij A ligt.



Figuur 4.8 Zie figuurapplet.

Een punt $(4 + p, -p, -p)$ van deze loodlijn ligt in OBT als $4 + p - (-p) - (-p) = 0$, dus als $p = -\frac{4}{3}$.

Dit geeft het snijpunt $S\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ van de loodlijn door A met vlak OBT .

De lengte van $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ is nu de gevraagde afstand.

$$\text{Dus } d(A, OBT) = |\overrightarrow{AS}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{48}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 2,31.$$

Opgave 14

In **Voorbeeld 4** zie je hoe je de afstand van een punt tot een vlak kunt berekenen.

Bereken exact de afstand van punt T tot vlak BCM .

Opgave 15

Bekijk nogmaals **Voorbeeld 4**. Je wilt de afstand berekenen van lijn AB tot vlak OCT .

- Waarom loopt de lijn AB evenwijdig met vlak OCT ?
- De afstand van een lijn en een vlak die evenwijdig aan elkaar lopen, bereken je door een willekeurig punt te nemen van die lijn en de afstand te berekenen tot het vlak.
Bereken op deze manier exact de afstand van lijn AB tot het vlak OCT .

Verwerken

Opgave 16

Gegeven is de balk $OABC.DEFG$ met $A(6,0,0)$, $C(0,4,0)$ en $D(0,0,4)$.

Punt P is het midden van AE en punt Q is het midden van DG .

- Stel een vectorvoorstelling van lijn PQ op.
- Stel een vectorvoorstelling van vlak ACD op.
- Stel een vergelijking van vlak ACD op.
- Toon aan dat lijn PQ evenwijdig is met vlak ACD .
- Bereken de afstand van punt F tot vlak ACD in twee decimalen nauwkeurig.
- Onderzoek of de lijnen PQ en BG elkaar snijden.

Opgave 17

- Gegeven is vlak V met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Stel een vergelijking van vlak V op.

- Gegeven is vlak W met vergelijking $2x + 4y - z = 10$.
Stel een vectorvoorstelling van vlak W op.

Opgave 18

Gegeven is de kubus $OABC.DEFG$ met $A(4,0,0)$, $C(0,4,0)$ en $D(0,0,4)$.

Punt P is het midden van EF .

Het vlak V gaat door punt G en staat loodrecht op lijn OP .

- Stel een vergelijking op van vlak V .
- Stel een vectorvoorstelling op van vlak V .
- Bereken de snijpunten van vlak V met de ribben van de kubus.
- Je kunt nu vlak V in de kubus tekenen. Stel vectorvoorstellingen op van de snijlijnen van vlak V met de kubus.
- Bereken de snijpunten van vlak V met de drie coördinaatassen.
- Bereken de afstand van punt P tot vlak V .

Opgave 19

Hier wordt de positie van een punt P in de ruimte beschreven. Omdat de coördinaten van P nog variabelen bevat, beschrijft het punt een lijn of een vlak. Bepaal in het geval dat P een lijn beschrijft een vectorvoorstelling van die lijn en bepaal in het geval dat P een vlak beschrijft een vergelijking van dat vlak.

- $P = (1 + p + q, p + 2q, p)$
- $P = p(2, 1, -3) + q(-4, -2, 6)$
- $P = (1 - p + 3q, 4 - p + q, -1 + 2p - 4q)$
- $P = (1, 0, 1) + p(2, -3, 4) + q(-1, 0, 0)$
- $P = (1 - p, 2 + p, 0)$

Opgave 20

Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $T.OABC$ met $A(4,0,0)$, $C(0,4,0)$ en $T(2,2,6)$. Punt P is het midden van ribbe OT .

- Het vlak V door A , B en P snijdt ribbe CT in punt Q . Bereken de coördinaten van Q .
- Toon aan dat vierhoek $ABQP$ een trapezium is.
- Bereken exact oppervlakte van vierhoek $ABQP$.
- Bereken exact de afstand van T tot vlak $ABQP$.

Opgave 21

De punten $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(-6,0,0)$, $D(0,-6,0)$ en $T(0,0,6)$ bepalen een regelmatig vierzijdige piramide $T.ABCD$. Punt P is het midden van AT en punt Q ligt op BT zo, dat $|BQ| : |QT| = 1 : 2$.

- Welke coördinaten moet punt Q hebben? Licht je antwoord toe.
- Het vlak V door P , Q en D snijdt ribbe BC in punt R . Bereken de coördinaten van R .
- Bereken de afstand van punt O tot vlak V . Rond af op twee decimalen.
- S is het snijpunt van V met lijn AC . Bereken exact de lengte van lijnstuk PS .

Toepassen

Opgave 22: Afstandsformule punt tot vlak

Stel in een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel een algemene formule op voor de afstand van punt O tot het vlak V gegeven door $ax + by + cz = d$.

Stel ook een algemene formule op van de afstand van $P(p_1, p_2, p_3)$ tot dit vlak V .

Opgave 23: Zwaartepunt driehoek

$\triangle ABC$ is gegeven door $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ en $C(0, 0, c)$.

- a Geef de coördinaten van het zwaartepunt Z van deze driehoek.
- b Bereken de afstand van O tot Z .

Testen

Opgave 24

De afgeknotte balk $OABC.DEFG$ wordt gegeven door $A(8, 0, 0)$, $B(8, 6, 0)$, $C(0, 6, 0)$, $D(0, 0, 10)$, $E(8, 0, 8)$ en $G(0, 6, 6)$.

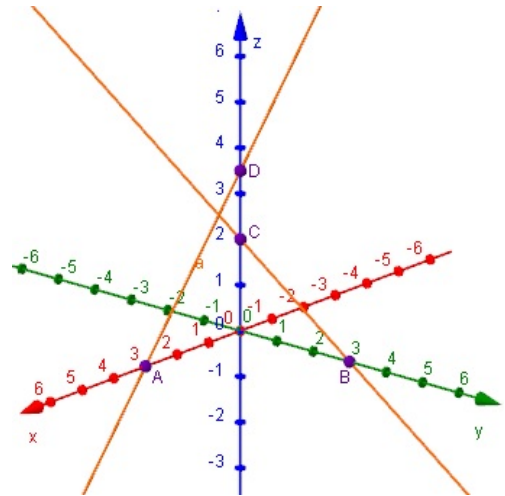
- a Bereken het snijpunt S van de lijnen EG en DF .
- b Stel een vergelijking op van het bovenvlak $DEFG$.
- c Bereken de coördinaten van het snijpunt van vlak $DEFG$ met lijn OB .
Het vlak $DEFG$ en het Oxy -vlak hebben een lijn gemeenschappelijk die de x -as in P en de y -as in Q snijdt.
- d Bereken de lengte van PQ .
- e Bereken de afstand van punt A tot vlak $DEFG$.

2.5 Onderlinge ligging

Inleiding

Zijn dit twee snijdende lijnen? Of kruisen ze elkaar? En wat versta je ook alweer onder 'kruisende lijnen'? En hoe bepaal je hun kortste onderlinge afstand? En hoe kunnen vlakken ten opzichte van elkaar liggen?

Over dergelijke vragen gaat dit onderdeel...



Figuur 5.1 Zie figuurapplet.

Je leert in dit onderwerp

- onderzoeken hoe punten, lijnen en vlakken t.o.v. elkaar liggen;
- snijpunten van lijnen en/of vlakken berekenen;
- de snijlijn van twee vlakken bepalen.

Voorkennis

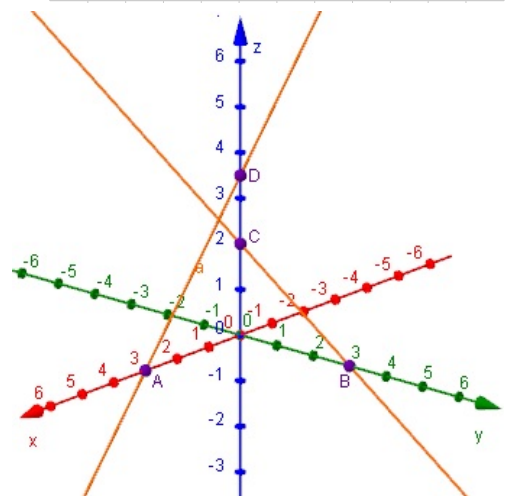
- met vectoren rekenen in 3D, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met vectorvoorstellingen van lijnen en vlakken in 3D.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt je afvragen of de twee lijnen AD en BC een snijpunt hebben.

- Wat zijn kruisende lijnen?
- Welke mogelijkheden zijn er voor de onderlinge ligging van twee lijnen?
- Kun je een manier beschrijven om de hoek te vinden die deze lijnen met elkaar maken?
- Welke mogelijkheden zijn er voor de onderlinge ligging van twee vlakken?
- Welke mogelijkheden zijn er voor de onderlinge ligging van een lijn en een vlak?



Figuur 5.2 Zie figuurapplet.

Uitleg 1

Gegeven zijn de punten $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,2)$ en $D(0;0;3,5)$.

In de figuur lijkt het dat de lijnen AD en BC elkaar snijden, maar als je de assen zo zou tekenen tot je precies langs een lijn kunt kijken zie je dat dit niet zo is. Ze zijn ook niet evenwijdig aan elkaar. Dit zijn daarom twee kruisende lijnen. Dat beide lijnen elkaar niet snijden kun je ook berekenen door hun vectorvoorstellingen aan elkaar gelijk te stellen.

$$\bullet \quad AD : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad BC : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

De coördinaten moeten aan elkaar gelijk zijn, dus:

$$\begin{pmatrix} 3 - 3p \\ 0 \\ 5p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3q \\ 2 - 2q \end{pmatrix}$$

Dit geeft drie vergelijkingen die strijdig met elkaar zijn. De lijnen AD en BC snijden elkaar dus niet.

De hoek die de lijnen AD en BC met elkaar maken is de hoek tussen hun beide richtingsvectoren. Daarvoor gebruik je het inproduct van beide richtingsvectoren.

Je vindt dan dat de hoek ongeveer 75° is. (Denk eraan dat je scherpe hoek neemt.)

Opgave 1

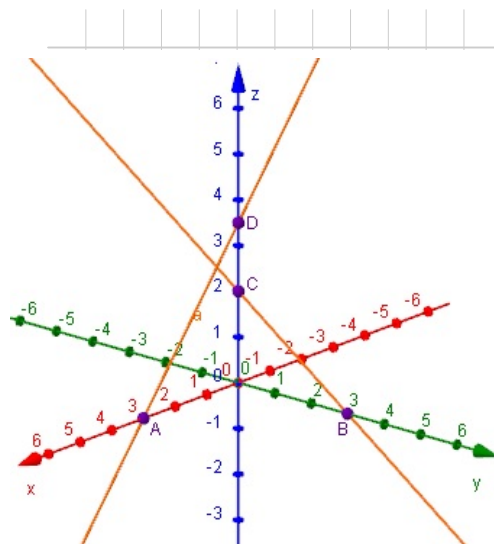
In **Uitleg 1** wordt besproken hoe je onderzoekt of twee lijnen elkaar snijden.

- Laat zien dat de lijnen AD en BC elkaar niet snijden.
- Beide lijnen lopen niet evenwijdig aan elkaar. Hoe zie je dat?
- Bereken de hoek φ die de lijnen AD en BC uit de uitleg met elkaar maken.

Opgave 2

Gegeven zijn de punten $A(2,3,5)$ en $B(-2,1,1)$ en lijn AB . Verder zijn gegeven de punten $C(0,-2,1)$ en $D(0,0,2)$ en lijn CD .

- Onderzoek of de lijnen AB en CD elkaar snijden, evenwijdig zijn, of elkaar kruisen.
- Onderzoek of de lijnen AC en BD elkaar snijden, evenwijdig zijn, of elkaar kruisen.
- Geef een mogelijke vectorvoorstelling van de lijn door C en evenwijdig met AB .
- Bereken de hoek φ die de lijnen AC en BD met elkaar maken.



Figuur 5.3 Zie figuurapplet.

Uitleg 2

Door de punten $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$ en $C(0,0,2)$ gaat het vlak ABC . Door de punten $D(5,0,0)$ en $E(0,0,5)$ gaat lijn DE .

Je wilt weten of lijn DE het vlak ABC snijdt en zo ja, in welk punt.

Je stelt daartoe een vergelijking van vlak ABC op en een vectorvoorstelling van lijn DE :

- Vlak ABC : $2x + 2y + 3z = 6$

- Lijn DE : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Als P een punt op de lijn is, geldt $P(5-t, 0, t)$ en dit vul je in de vergelijking van het vlak in. Je krijgt $t = -4$ en dus het snijpunt $S(9, 0, -4)$.

Je kunt ook een vectorvoorstelling opstellen van een lijn door D die evenwijdig loopt met het vlak. Dit kun je als volgt bepalen:

Bepaal een normaalvector van het vlak. Kies nu als richtingsvector van de evenwijdige lijn een vector die loodrecht staat op de normaalvector. De lengte van zo'n richtingsvector is niet van belang, dus je kunt altijd één van de drie kentallen 1 nemen. De richtings-

vector van zo'n lijn wordt dan bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ en moet voldoen

aan $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$. Dit geeft nog allerlei mogelijke combinaties van

a en b ; er zijn immers nog oneindig veel mogelijke lijnen door D die evenwijdig zijn met vlak ABC .

Opgave 3

Bestudeer **Uitleg 2**.

- Ga na dat een vergelijking van ABC gegeven wordt door $2x + 2y + 3z = 6$ en voer zelf de berekening van het snijpunt S van lijn DE en vlak ABC nogmaals uit.
- Stel de vectorvoorstellingen van minstens twee lijnen door D op die evenwijdig lopen met het vlak ABC .

Opgave 4

Gebruik de punten die in **Uitleg 2** zijn gegeven. V is het vlak door D en E dat evenwijdig loopt met de y -as.

- Bereken het snijpunt T van vlak V met lijn AB .
De vlakken ABC en V hebben een snijlijn.
- Stel een vectorvoorstelling op van deze snijlijn. (Probeer twee punten van de snijlijn te vinden.)

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **onderlinge ligging** van punten, lijnen en vlakken:

- Punt P ligt op lijn l : de coördinaten van punt P voldoen aan de vectorvoorstelling van lijn l .
- Punt P ligt in vlak V : de coördinaten van punt P voldoen aan de vergelijking (of vectorvoorstelling) van vlak V .
- Lijn l snijdt lijn m : beide vectorvoorstellingen hebben een gemeenschappelijk punt.
- Lijn l is evenwijdig lijn m : beide richtingsvectoren zijn elkaars veelvoud (beide lijnen kunnen dan ook samenvallen).
- Lijn l kruist lijn m : beide vectorvoorstellingen hebben geen gemeenschappelijk punt en de richtingsvectoren zijn geen veelvoud van elkaar.
- Lijn l ligt in vlak V : de vectorvoorstelling van lijn l voldoet aan de vergelijking van vlak V .
- Lijn l snijdt vlak V : de vectorvoorstelling van lijn l levert bij substitutie in de vergelijking van vlak V één snijpunt op.
- Lijn l is evenwijdig met vlak V : de richtingsvector van lijn l staat loodrecht op de normaalvector van vlak V en de vectorvoorstelling van lijn l levert bij substitutie in de vergelijking van vlak V geen snijpunt op.
- Vlak V snijdt vlak W : de normaalvectoren van beide vlakken zijn geen veelvoud van elkaar en door combineren van beide vergelijkingen vind je een snijlijn.
- Vlak V is evenwijdig met vlak W : de normaalvectoren van beide vlakken zijn elkaars veelvoud (beide vlakken kunnen dan ook samenvallen).

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de punten $A(3,0,2)$, $B(0,2,0)$ en $P(2; 1; 1,5)$.

Lijn l gaat door de punten A en B .

Onderzoek of P op lijn l ligt en zo nee, bereken de afstand van P tot l , ofwel $d(P, l)$.

Antwoord

Een vectorvoorstelling van lijn l is:

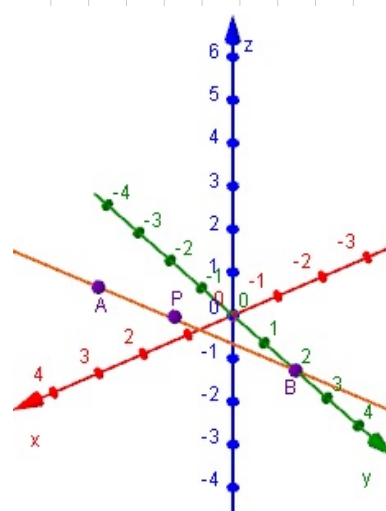
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Als P op l ligt, dan is er een waarde van t waarvoor geldt $(2; 1; 1,5) = (3t, 2 - 2t, 2t)$.

Ga zelf na dat zo'n waarde van t niet bestaat.

Punt Q is een punt op lijn l .

De afstand van P tot lijn l is de lengte van de vector $\overrightarrow{PQ}$, waarbij met Q op lijn l ligt, zo dat $\overrightarrow{PQ}$ loodrecht staat op l .



Figuur 5.4 Zie figuurapplet.

Het punt Q is te schrijven als $(3t, 2 - 2t, 2t)$. Nu moet $\overrightarrow{PQ}$ loodrecht staan op de richtingsvector $\overrightarrow{AB}$.

Dus moet het inproduct van die vectoren 0 zijn:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3t - 2 \\ 1 - 2t \\ 2t - 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Dit geeft } t = \frac{11}{17} \text{ en dus } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} \\ -\frac{5}{17} \\ \frac{7}{34} \end{pmatrix}.$$

Nu kun je de afstand van P tot l berekenen:

$$d(P, l) = \left| \overrightarrow{PQ} \right| \approx 0,36$$

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je nagaat of een punt op een lijn ligt.

- Reken na dat $t = \frac{11}{17}$ en $d(P, l) \approx 0,36$
- Onderzoek of het punt $R(12, -6, 8)$ op lijn l ligt.
- Onderzoek of lijn OP lijn l snijdt.
- Bereken de afstand $d(R, AP)$.

Opgave 6

$$\text{Gegeven is lijn } l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Onderzoek of punt $S(9, 5; -0, 5; 10)$ op lijn l ligt.
- Bereken de afstand van punt $P(1, 0, 0)$ tot lijn l . Rond af op twee decimalen.

Voorbeeld 2

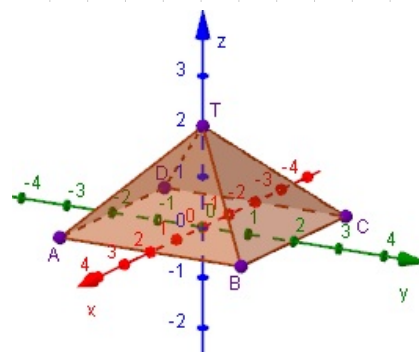
$T.ABCD$ is een regelmatige vierzijdige piramide met $A(2, -2, 0)$, $B(2, 2, 0)$ en $T(0, 0, 2)$. Laat zien dat lijn AB en lijn CT elkaar kruisen en bereken de hoek die ze met elkaar maken.

Antwoord

Vectorvoorstellingen van de lijnen AB en CT zijn:

$$AB: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$CT: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Figuur 5.5 Zie figuurapplet.

Beide lijnen zijn niet evenwijdig want hun richtingsvectoren zijn geen veelvoud van elkaar. Ze snijden of kruisen elkaar dus. Voor een snijpunt moeten er waarden van p en q bestaan waarvoor $(2, p, 0) = (-2 + q, 2 + q, q)$.

Ga na dat dergelijke waarden van p en q niet bestaan. De twee lijnen kruisen elkaar dus.

Hun onderlinge hoek wordt bepaald door de hoek tussen beide richtingsvectoren. Deze kun je berekenen met behulp van het inproduct:

$$1 = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(\varphi), \text{ dus } \varphi = \angle(AB, CT) \approx 55^\circ$$

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**. Laat M het midden zijn van CT en N het midden van DT .

- Laat met een berekening zien dat de lijnen BM en AN elkaar snijden.
- Bereken de hoek tussen de lijnen BM en AN in graden nauwkeurig.

Opgave 8

Gegeven zijn de lijnen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ en

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Bereken de waarde van a waarvoor de lijnen l en m elkaar snijden.
- Neem voor $a = 4$. Bereken de hoek tussen de lijnen l en m .

Voorbeeld 3

Gegeven piramide $T.OABC$ met $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$ en $T(4,0,4)$.

M is het midden van AT .

Stel een vectorvoorstelling op van de snijlijn van de vlakken BCT en OCM .

Antwoord

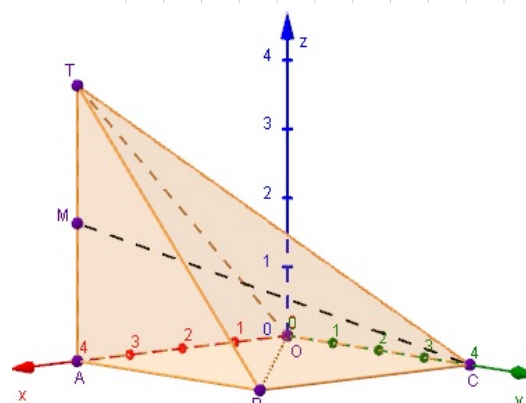
Stel hiervoor eerst de vergelijkingen op die bij de vlakken horen. Deze zijn:

$$BCT: y + z = 4 \text{ en } OCM: x - 2z = 0.$$

Om een vectorvoorstelling van de snijlijn op te stellen, zoek je twee punten die aan beide vergelijkingen voldoen. Neem bijvoorbeeld de punten $P(4,2,2)$ en $Q(6,1,3)$.

Een vectorvoorstelling van de snijlijn is dan:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Figuur 5.6 Zie figuurapplet.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** staat dat je op zoek moet gaan naar twee punten die in beide vlakken liggen.

- a** Zoek nu zelf twee andere punten R en S die ook aan beide vergelijkingen (van de twee vlakken) voldoen en stel hiermee een vectorvoorstelling van de snijlijn op. Ga na dat deze lijn dezelfde lijn is als in het voorbeeld.

P is het midden van OT .

- b** Bereken het snijpunt van lijn BP en vlak ACT .
- c** Geef een mogelijke lijn die evenwijdig is met vlak OCM en door het punt B gaat.

Opgave 10

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de snijlijn van twee vlakken kunt bepalen.

- a** Stel vectorvoorstellingen van de vlakken BCT en OCM op.

Je kunt ook de snijlijn bepalen door beide vectorvoorstellingen aan elkaar gelijk te stellen. Je krijgt dan drie vergelijkingen met vier onbekenden. Je kunt dan drie van deze onbekenden allemaal uitdrukken in de vierde en zo de vectorvoorstelling van de snijlijn opstellen.

- b** Laat zien hoe dit gaat.
- c** Geef een vectorvoorstelling van de snijlijn van de vlakken BCT en OCT door twee punten te zoeken die in beide vlakken liggen.

Verwerken**Opgave 11**

Gegeven zijn de lijnen l en m en vlak V :

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V : x - 2y + 2z = 4$$

- a** Bereken de coördinaten van het snijpunt P van lijn l en vlak V .
- b** Bereken exact de afstand van $A(1,2,3)$ tot V .
- c** Vlak W is evenwijdig met lijn m en lijn l ligt in W .
Bereken de snijlijn van V en W .
- d** Op m ligt een punt P zo, dat $\overrightarrow{AP} \perp V$. Bereken de coördinaten van P .

Opgave 12

Gegeven is het viervlak $C.OAB$ met $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$ en $C(0,0,6)$.

Punt N is het midden van AB en M dat van OA .

Punt Z is het zwaartepunt van $\triangle ABC$.

- Geef vectorvoorstellingen van de lijnen CN en OZ .
- Vlak BCM snijdt OZ in punt S . Bereken de coördinaten van S .
- Toon aan dat het punt S de lijn OZ zo verdeelt dat $|OS| : |SZ| = 3 : 1$.
- Bereken exact de afstand van punt A tot vlak BCM .

Opgave 13

Een kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribben van 6 cm. Punt M is het midden van ribbe BF . Voor de volgende berekeningen kun je de kubus in een cartesisch assenstelsel $Oxyz$ plaatsen.

- Teken de kubus en punt M . Kies A in de oorsprong.
- Bereken de afstand van punt E tot vlak AMH .
- Vlak V gaat door AE en staat loodrecht op vlak AMH . Stel een vectorvoorstelling op van de snijlijn van vlak V met vlak AMH .
- Bereken exact de afstand van het midden N van ribbe CG tot lijn AG .

Opgave 14

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het snijpunt van AC en BD de oorsprong van een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel. Verder is $A(4, -4, 0)$, $B(4, 4, 0)$ en $T(0, 0, 12)$. P ligt op AB zo, dat $|AP| : |PB| = 1 : 3$.

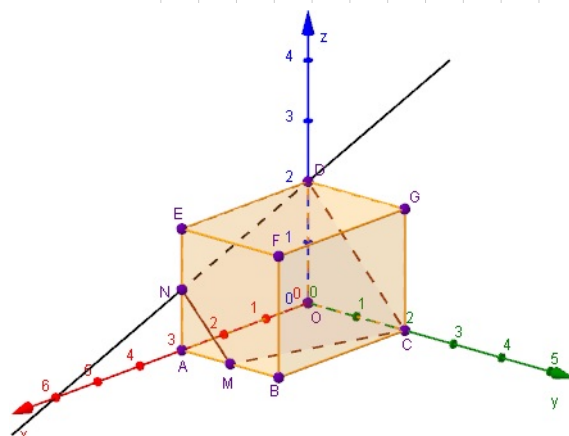
Vlak V is het vlak door P en evenwijdig aan vlak BCT .

- Stel een vectorvoorstelling van V op.
- Bepaal de coördinaten van het snijpunt van lijn AT en vlak V .
- Geef een vectorvoorstelling van de snijlijn van V en vlak DCT .

Opgave 15

Bekijk de balk $OABC.DEFG$ met $A(3,0,0)$, $C(0,2,0)$ en $D(0,0,2)$. Verder is M het midden van AB en N dat van AE .

- Onderzoek of de lijnen DB en CN een snijpunt hebben.
- De vlakken $DNMC$ en GEF snijden elkaar volgens een lijn l . Maak een vectorvoorstelling van die lijn door de twee vectorvoorstellingen van de vlakken aan elkaar gelijk te stellen.
- Je kunt ook een vectorvoorstelling van l maken door twee punten op te zoeken die aan beide vergelijkingen van de vlakken voldoen. Bepaal ook op die manier een vectorvoorstelling van l .
- Bereken de snijpunten van l met de vlakken $ABFE$ en $BCGF$.



Figuur 5.7 Zie figuurapplet.

Opgave 16

Gegeven is lijn $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en vlak $V : 2x - 5y + z = 10$.

- Toon aan dat lijn l evenwijdig is met vlak V .
- Geef een vectorvoorstelling van een lijn die vlak V snijdt.
- Geef een vergelijking van een vlak dat evenwijdig is met vlak V .

Opgave 17

Gegeven zijn de lijnen $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en

$$m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Laat zien dat de lijnen l en m elkaar snijden.
- Laat zien dat het punt $A(5,1,6)$ op lijn l en het punt $B(1,4,7)$ op lijn m even ver van het snijpunt liggen.
- Geef de twee vergelijkingen van de vlakken waarvoor geldt dat alle punten in die vlakken even ver van lijn l als van lijn m liggen.

Toepassen**Opgave 18: Schaduw**

Een regelmatige vierzijdige piramide $T.OABC$ heeft een grondvlak van 4 cm bij 4 cm en een hoogte van 5 cm en staat in een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel.

Punt A is het punt $(4,0,0)$.

Op de z -as is een lichtbron opgehangen in het punt $L(0,0,8)$. De piramide is ondoorzichtig. Door de lichtbron ontstaat er een schaduw op de grond.

- Bereken de oppervlakte van deze schaduw.
- Bereken de afstand van L tot ribbe OT in mm decimalen nauwkeurig.

Testen**Opgave 19**

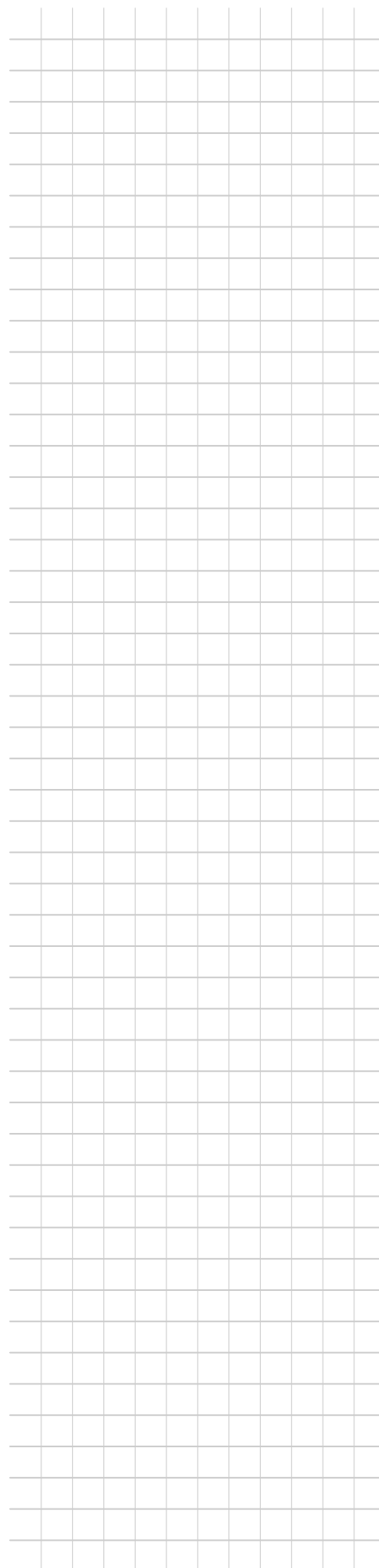
Een regelmatige vierzijdige piramide $T.OABC$ heeft een grondvlak van 4 cm bij 4 cm en een hoogte van 5 cm en staat in een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel. Punt A is het punt $(4,0,0)$. Punt E is het snijpunt van de lijnen AC en OB . Punt D is het midden van TC .

- Laat door berekening zien dat de lijnen ED en AB elkaar kruisen.
- Bereken de hoek die de lijnen ED en AB met elkaar maken.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn BD met vlak OAT .
- Bereken de afstand van punt B tot vlak OAT .

Opgave 20

Gegeven zijn de punten $P(8, -1, 0)$ en $Q(4, -3, 6)$.

Geef een vectorvoorstelling van de verzameling van alle punten die gelijke afstand tot P en Q hebben.



2.6 Hoeken en afstanden

Inleiding

Je hebt al veel situaties voorbij zien komen waarin je hoeken en afstanden moest berekenen. Maar bijvoorbeeld de hoek tussen twee vlakken, de afstand tussen een lijn en een vlak, de afstand tussen twee kruisende lijnen zijn nog niet aan bod geweest. En die zou je natuurlijk niet willen missen...

Je leert in dit onderwerp

- de afstand tussen twee lijnen, tussen een lijn en een vlak, of tussen twee vlakken berekenen;
- de hoek tussen een lijn en een vlak berekenen;
- de hoek tussen twee vlakken berekenen.

Voorkennis

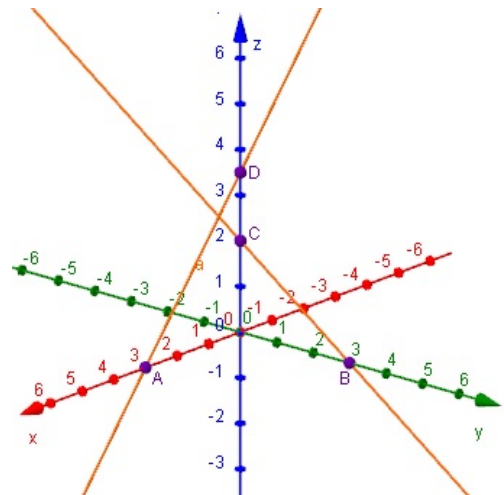
- met vectoren rekenen in 3D, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met vectorvoorstellingen van lijnen en vlakken en vergelijkingen van vlakken in 3D.

Verkennen

Opgave V1

De twee lijnen AD en BC hebben geen snijpunt, het zijn kruisende lijnen.

- Wat versta je onder de kortste onderlinge afstand van twee lijnen?
- Kun je een manier beschrijven om de kortste onderlinge afstand van twee lijnen te berekenen?



Figuur 6.1 Zie figuurapplet.

Uitleg 1

Gegeven zijn weer de lijnen AD en BC , waarbij $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,2)$ en $D(0;0;3,5)$. Zoals je in de vorige paragraaf hebt gezien, zijn dit twee kruisende lijnen (ze zijn niet evenwijdig met elkaar en ze snijden elkaar ook niet).

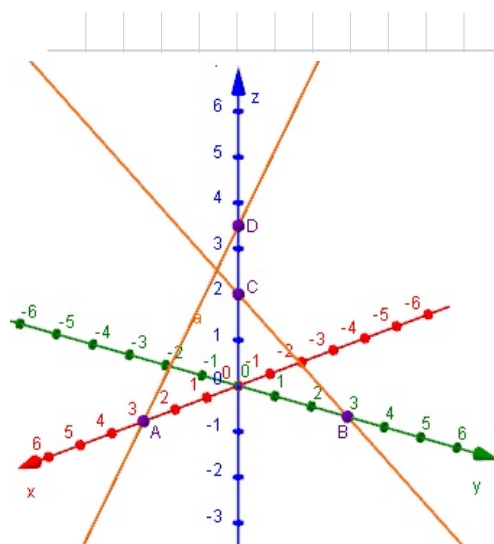
Hun kortste onderlinge afstand is de lengte van de vector die zowel loodrecht staat op lijn AD als op lijn BC . Deze zie je als je precies langs bijvoorbeeld lijn BC kijkt.

De andere lijn zie je dan in een vlak V liggen.

V is een vlak waar AD in ligt en dat evenwijdig is met BC .

Een vectorvoorstelling van V is dus te schrijven als:
 $\vec{OA} + p \cdot \vec{AD} + q \cdot \vec{BC}$.

De kortste onderlinge afstand tussen de lijnen is dan hetzelfde als de afstand van een willekeurig punt van lijn BC tot dit vlak V .



Figuur 6.2 Zie figuurapplet.

Opgave 1

In **Uitleg 1** wordt besproken hoe je de kortste onderlinge afstand van twee kruisende lijnen berekent. Maar lijnen kunnen elkaar ook snijden of evenwijdig lopen.

- Als twee lijnen elkaar snijden, hoe groot is dan hun onderlinge afstand?
- Hoe bereken je de afstand tussen twee evenwijdige lijnen?

Opgave 2

Bereken, op de manier zoals in **Uitleg 1** staat, de afstand tussen de kruisende lijnen AD en BC . Rond af op één decimaal.

Uitleg 2

Hier zie je vlak V door A , B en C en lijn l door A en D . Ook de normaalvector van het vlak in punt A is getekend. De lijn en het vlak snijden elkaar in punt A , maar onder welke hoek?

Ook nu is het belangrijk om vanuit een goede hoek naar de figuur te kijken. Je moet namelijk precies langs het vlak kijken (je ziet het vlak dan als lijn). Maar zelfs dan zijn er nog meerdere hoeken mogelijk. Je moet ook loodrecht op het vlak door de lijn AD en de normaal kijken.

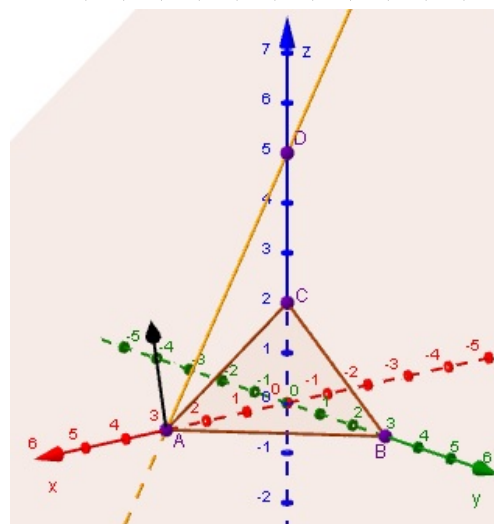
De hoek die de lijn l en vlak V met elkaar maken is dan te zien. Het is de hoek tussen lijn l en zijn loodrechte projectie AD' waarbij D' in vlak ABC ligt.

Deze hoek is samen met de hoek tussen lijn l en de normaalvector precies 90° .

Je berekent de hoek tussen lijn l en vlak V door de hoek φ tussen de richtingsvector van de lijn en de normaalvector van het vlak te berekenen.

De gevraagde hoek is dan het complement daarvan, dus $90^\circ - \varphi$.

Met andere woorden: $\angle(l, V) = 90^\circ - \angle(\vec{rv}_l, \vec{n}_V)$



Figuur 6.3 Zie figuurapplet.

Zo kun je ook inzien dat de hoek tussen twee vlakken V en W gelijk is aan de hoek tussen de normaalvectoren van die twee vlakken. Met andere woorden: $\angle(V, W) = \angle(\vec{n}_V, \vec{n}_W)$. Vectorrekening blijkt nu heel erg handig te zijn. Want om die hoeken in een figuur te herkennen is vaak nog een hele klus.

Opgave 3

In **Uitleg 2** zie je dat de hoek tussen een lijn en een vlak wordt berekend door de hoek tussen de normaalvector van het vlak en de richtingsvector van de lijn te berekenen.

Gegeven zijn de punten $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,2)$, $D(0,0,5)$ en $E(1,5; 1,5; 0)$.

- Bereken eerst een normaalvector van het vlak ABC . Bepaal ook een richtingsvector van lijn ED .
- Bereken nu de hoek tussen vlak ABC en lijn ED in graden nauwkeurig.

Opgave 4

Gegeven zijn de punten $P(5,0,0)$, $Q(0,5,0)$, $R(0,0,5)$ en $S(10,4, -5)$ en het vlak $V : 2x + 3y + 4z = 12$.

- Welke van deze punten liggen in vlak V ?
- Bereken de kortste onderlinge afstand van de lijnen PQ en RS . Rond af op twee decimalen.
- Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de lijnen PQ en RS met elkaar maken.
- Bereken het snijpunt van lijn PQ met vlak V .
- Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder lijn PQ het vlak V snijdt.
- Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de vlakken PQR en V .

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Afstanden in $\mathbb{R}^3$ bereken je zo:

- De **afstand tussen twee punten** A en B is de lengte van hun verbindingsvector: $d(A, B) = |\vec{AB}|$.
- De **afstand van een punt tot een lijn** is de lengte van de loodrechte verbindingsvector van het punt P tot een willekeurig punt op de lijn l .
- De **afstand van een punt tot een vlak** bereken je door een lijn door het punt P loodrecht op het vlak V met dat vlak te snijden. De afstand van het snijpunt S tot punt P is dan de gevraagde afstand.
- De **afstand tussen twee lijnen** bereken je door een vlak V door lijn l evenwijdig met lijn m te maken. De afstand van een willekeurig punt op lijn m tot dit vlak V is de gevraagde afstand.

- De **afstand van een lijn tot een vlak** heeft alleen betekenis als de lijn l evenwijdig is met het vlak V . De afstand van een willekeurig punt op lijn l tot vlak V is dan de gevraagde afstand.
- De **afstand tussen twee vlakken** heeft alleen betekenis als vlak V evenwijdig is met het vlak W . De afstand van een willekeurig punt op vlak V tot vlak W is dan de gevraagde afstand.

Hoeken in $\mathbb{R}^3$ bereken je zo:

- De **hoek tussen twee vectoren** bereken je met hun inproduct.
- De **hoek tussen twee lijnen** bereken je door de hoek tussen hun richtingsvectoren te berekenen. De gevraagde hoek is dan de daarbij passende scherpe hoek.
- De **hoek tussen een lijn en een vlak** is het complement van de hoek tussen een richtingsvector van de lijn en een normaalvector van het vlak.
- De **hoek tussen twee vlakken** is gelijk aan de hoek tussen normaalvectoren van beide vlakken.

Voorbeeld 1

$T.ABCD$ is een regelmatige vierzijdige piramide met $A(2, -2, 0)$, $B(2, 2, 0)$ en $T(0, 0, 2)$. Laat zien dat lijn AB en lijn CT elkaar kruisen en bereken hun kortste onderlinge afstand.

Antwoord

$$AB: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$CT: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

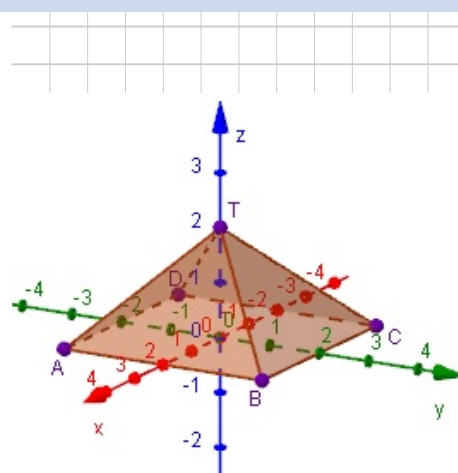
Beide lijnen zijn niet evenwijdig want hun richtingsvectoren zijn geen veelvoud van elkaar. Ze snijden of kruisen elkaar dus. Voor een snijpunt moeten er waarden van p en q bestaan waarvoor $(2, p, 0) = (-2 + q, 2 - q, q)$.

Ga na dat dergelijke waarden van p en q niet bestaan. De twee lijnen kruisen elkaar dus.

Hun kortste onderlinge afstand is de afstand van een punt van AB (bijvoorbeeld $(2, 0, 0)$) tot een vlak waar CT in ligt en dat evenwijdig is met AB . Hier is dat vlak CDT . Een vergelijking van dit vlak is $x - z = -2$ (ga zelf na). Stel nu lijn m door $(2, 0, 0)$ en loodrecht op vlak CDT op en snijd deze met hetzelfde vlak CDT .

$$\text{Dus } m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ snijden met } x - z = -2 \text{ geeft } 2 + r + r = -2.$$

Hieruit volgt dat $r = -2$. Door deze waarde in te vullen in m krijg je het punt $(0, 0, 2)$, dit punt ligt het dichtst bij punt $(2, 0, 0)$. De afstand tussen deze twee punten is dan $\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Dit is de afstand van lijn AB tot lijn CD .



Figuur 6.4 Zie figuurapplet.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** wordt de (kortste) afstand tussen twee kruisende lijnen berekend.

- Maak de beschreven werkwijze duidelijk in een eigen tekening.
- Hoe groot is de afstand van lijn AD tot vlak BCT ?
- M is het midden van AB . Waarom heeft het vragen naar de afstand tussen lijn DM en vlak BCT geen betekenis?

Opgave 6

Gegeven zijn de lijnen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ en

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Laat zien dat de lijnen l en m elkaar kruisen.
- Bereken de afstand tussen de lijnen l en m . Rond af op twee decimalen.

Voorbeeld 2

$T.ABCD$ is een regelmatige vierzijdige piramide met $A(2, -2, 0)$, $B(2, 2, 0)$ en $T(0, 0, 2)$.

Bereken de hoek die lijn CT maakt met vlak ABT .

Bereken ook de hoek die de vlakken ABT en BCT met elkaar maken.

Antwoord

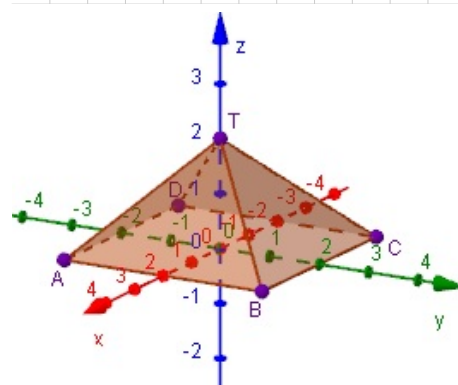
$$CT: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } ABT: x + z = 2.$$

Om de hoek die CT maakt met ABT te bepalen, bereken je eerst de hoek φ tussen een richtingsvector van de lijn en een normaalvector van het vlak met behulp van het inproduct:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\varphi) \text{ geeft } \varphi \approx 35^\circ.$$

De hoek tussen lijn CT en vlak ABT is ongeveer $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

De hoek tussen de vlakken ABT en BCT is de hoek tussen beide normaalvectoren van die vlakken. Ga zelf na, dat de hoek tussen beide vlakken 60° is. (De normaalvectoren van beide vlakken kun je uit de figuur aflezen.)



Figuur 6.5 Zie figuurapplet.

Opgave 7

Omdat de hoek tussen een lijn en een vlak, of die tussen twee vlakken, vaak lastig te zien is in een figuur wordt in **Voorbeeld 2** getoond hoe je ze met behulp van de normaalvectoren van het vlak kunt berekenen.

- Loop de berekening van de hoek tussen CT en vlak ABT na. Kun je die hoek ook in de figuur aangeven? Hoe dan?
- Laat met een berekening zien, dat de hoek tussen de vlakken ABT en BCT inderdaad 60° is. Waar zit die hoek in de figuur?
- Het is nuttig als je in 'eenvoudige' gevallen zelf de gevraagde hoek kunt zien. Welke hoek is de hoek tussen CT en vlak $ABCD$? Hoe groot is die hoek?
- Welke hoek is de hoek tussen de vlakken ABT en $ABCD$? Hoe groot is die hoek?

Opgave 8

Gegeven zijn twee vlakken en een lijn:

$$V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$W : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Bereken de hoek tussen de twee vlakken V en W .
- Bereken de hoek tussen lijn l en vlak V .
- Bereken de hoek tussen lijn l en vlak W .

Verwerken**Opgave 9**

Een kubus $ABCD.DEFG$ heeft ribben van 6 cm. Punt M is het midden van ribbe BF . Voor de volgende berekeningen kun je de kubus in een cartesisch assenstelsel $Oxyz$ plaatsen.

- Hoe groot is de afstand tussen de lijnen AM en GH ?
- Bereken exact de afstand tussen de lijnen BE en AG .

Opgave 10

Gegeven zijn de lijnen l en m en vlak V :

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V : x - 2y + 2z = 4$$

- Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen l en V .
- Bereken de afstand tussen l en m . Rond af op twee decimalen.

Opgave 11

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het snijpunt van AC en BD de oorsprong van een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel. Verder is $A(4, -4, 0)$, $B(4, 4, 0)$ en $T(0, 0, 12)$. P ligt op AB zo, dat $|AP| : |PB| = 1 : 3$.

V is het vlak door P en evenwijdig aan vlak BCT .

- Bereken de hoek die de vlakken ADT en V met elkaar maken in graden nauwkeurig.
- Bereken de afstand tussen de vlakken V en BCT . Rond af op twee decimalen.

Opgave 12

Een regelmatige vierzijdige piramide $T.OABC$ heeft een grondvlak van 4 cm bij 4 cm en een hoogte van 5 cm en staat in een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel. Punt A is het punt $(4, 0, 0)$. Punt E is het snijpunt van de lijnen AC en OB . Punt D is het midden van TC .

- Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de lijnen ED en AB met elkaar maken.
- Bereken in graden nauwkeurig de hoek die lijn BD maakt met vlak OBT .
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn BD met vlak OAT en bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen BD en OAT .
- Bereken de afstand tussen de lijnen OD en TE . Rond af op twee decimalen.

Opgave 13

Gegeven is de balk $OABC.DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 8, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Punt P is het midden van ribbe EF .

- Bereken exact de afstand van punt P tot vlak AGC .
- Bereken exact de afstand van punt P tot lijn GB .
- Op ribbe EF ligt een punt M zo, dat de afstand van M tot vlak AGC gelijk is aan 2.
Bereken exact de coördinaten van M .
- Bestaat er een punt N op ribbe EF zo, dat de afstand van dit punt tot lijn GB gelijk is aan 2? Verklaar je antwoord.

Opgave 14

Gegeven zijn de punten $A(-6,24,7)$, $B(-1,21,3)$, $C(-6,18,-1)$ en $D(-11,21,3)$.

Het vlak V heeft vergelijking $4x + y + 6z = 2$. Vierkant $ABCD$ is het grondvlak van een piramide $T.ABCD$ waarvan de top T in vlak V en op de middelloodlijn van AC loodrecht op vlak $ABCD$ ligt.

Bereken de hoogte van deze regelmatige vierzijdige piramide en bereken de lengte van ribbe AT . Rond af op twee decimalen.

Toepassen**Opgave 15: Kruisende lijnen**

De hoek tussen twee kruisende lijnen l en m is 60° . De loodrechte snijlijn van l en m snijdt l in A en m in B . Op l ligt punt P zo, dat $AP = 2$. Op m ligt punt Q zo, dat $BQ = 4$ en $PQ = 6$.

Bereken exact de lengte van lijnstuk AB en de afstand van AB tot PQ .

Er zijn twee mogelijkheden!

Testen**Opgave 16**

Een regelmatige vierzijdige piramide $T.OABC$ heeft een grondvlak van 4 cm bij 4 cm en een hoogte van 5 cm en staat in een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel. Punt A is het punt $(4,0,0)$. Punt E is het snijpunt van de lijnen AC en OB . Punt D is het midden van TC .

- a Bereken de hoek die de lijnen ED en AB met elkaar maken.
- b Bereken de hoek die lijn BD maakt met vlak OBT .
- c Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn BD met vlak OAT en bereken de hoek tussen BD en OAT .
- d Bereken de afstand tussen de lijnen OD en TE .

2.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Vectoren in 3D** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- 3D cartesisch assenstelsel — coördinaten en vectoren in 3D
- inproduct van vectoren — hoek tussen vectoren — hoek tussen lijnen
- plaatsvector — richtingsvector — vectorvoorstelling van een lijn — afstand van een punt tot een lijn
- vectorvoorstelling van een vlak — uitproduct van vectoren — normaalvector en vergelijking van een vlak
- snijdende, evenwijdige en kruisende lijnen — snijdende en evenwijdige vlakken
- hoek tussen lijn en vlak — hoek tussen twee vlakken — afstand tussen twee lijnen — afstand van een punt tot een vlak

Activiteitenlijst

- werken met coördinaten en vectoren in 3D — werken met kentallen — afstand tussen twee punten, lengte van een vector berekenen
- inproduct van vectoren berekenen — hoek tussen vectoren berekenen
- vectorvoorstellingen van lijnen opstellen — hoeken tussen lijnen berekenen — afstand van een punt tot een lijn berekenen
- vectorvoorstellingen en vergelijkingen van vlakken in 3D opstellen
- onderzoeken of lijnen evenwijdig zijn, elkaar snijden, elkaar kruisen — snijpunt van twee lijnen en van lijn met vlak berekenen — onderzoeken of twee vlakken evenwijdig zijn of elkaar snijden — snijlijn van twee vlakken bepalen
- hoeken en afstanden berekenen

Achtergronden

Sir William Rowan Hamilton (1805—1865) was een Ierse wiskundige, natuurkundige en astronoom die belangrijke bijdragen leverde aan de ontwikkeling van de optica, dynamica en algebra.

Hamilton was de eerste die het begrip **vector** introduceerde. Hij werkte vooral in drie dimensies en voor hem was een vector een pijl vanuit de oorsprong van een driedimensionaal assenstelsel naar een punt in de ruimte.

Hamilton werd in het bijzonder bekend door de door hem bedachte **quaternionen**, een uitbreiding van de complexe getallen.



Figuur 7.1

Testen

Opgave 1

Een driezijdige piramide $T.ABC$ is gegeven door $A(0, -3, 0)$, $B(4, -3, 0)$, $C(0, 3, 0)$ en $T(0, 0, 3)$.

- a Toon aan dat de vlakken ABT en ACT loodrecht op elkaar staan.
- b Bereken de afstand tussen de lijnen BT en AC .
- c Bereken in graden nauwkeurig de hoek die vlak BCT maakt met lijn AB .

Opgave 2

Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ door $T(0, 0, 6)$, $A(3, 3, 0)$, $B(-3, 3, 0)$, $C(-3, -3, 0)$ en $D(3, -3, 0)$.

Verder zijn gegeven de punten $E(-3, 9, 0)$ en $F(1, -1, 4)$.

- a Teken deze piramide.
- b Toon aan, dat E op het verlengde van CB ligt.
- c Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn EF en vlak TAB .
- d Bereken de lengte van de loodrechte projectie van lijnstuk BF op vlak $ABCD$.

Vlak V gaat door A en F en is evenwijdig aan BD . V snijdt ribbe BT in punt G .

- e Bereken de coördinaten van G .
Op ribbe AD ligt een punt H zo, dat de cosinus van de hoek tussen OH en CT gelijk is aan $\frac{2}{\sqrt{15}}$.
- f Bereken de coördinaten van H .

Opgave 3

Gegeven zijn de punten $P(8, -1, 0)$ en $Q(4, -3, 6)$.

Geef een vectorvoorstelling van de verzameling van alle punten die gelijke afstand tot P en Q hebben.

Opgave 4

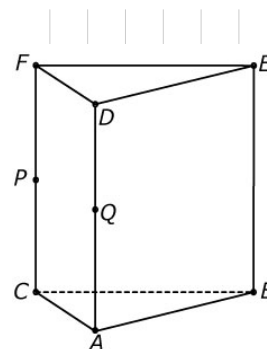
De zeshoekige piramide $T.ABCDEF$ wordt gegeven door $A(5, 1, 0)$, $B(5, 3, 0)$, $C(3, 5, 0)$, $D(1, 5, 0)$, $E(1, 3, 0)$, $F(3, 1, 0)$ en $T(3, 3, 4)$.

- a Stel van de lijnen AT en CT een vectorvoorstelling op.
- b Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder AT en CT elkaar snijden.
- c Bereken het snijpunt van de lijnen CE en AF .
- d Bereken in twee decimalen de afstand van punt A tot lijn DT .

Opgave 5

In dit rechte driezijdige prisma $ABC.DEF$ geldt: $AC = AB = 5$ en $AD = BC = 6$. Punt P is het midden van CF en punt Q is het midden van AD .

- Teken het prisma in een cartesisch coördinatenstelsel $Oxyz$ zo, dat O het midden van BC is, punt A op de x -as ligt en B en C op de y -as liggen. Teken ook de punten P en Q . (De eenheden op de assen passen bij de gegeven lengtes.)
- Toon aan dat de lijnen BF en DP elkaar loodrecht kruisen.
- Bepaal de coördinaten van het punt K op lijn AP zo, dat $|KF| = |KB|$.
- Toon aan dat driehoek BDK een gelijkbenige driehoek is.
- Bereken de coördinaten van punt L op BF zo, dat de inhoud van piramide $L.ABC$ gelijk is aan 10.



Figuur 7.2

Opgave 6

Een afgeknotte balk $ABCD.EFG$ is in een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel gegeven door $A(6,0,0)$, $B(0,0,-6)$, $C(-6,0,0)$, $D(0,0,6)$, $E(0,6,-6)$, $F(-6,6,0)$ en $G(0,6,6)$.

- Teken deze afgeknotte balk.
Punt M is het midden van AG en punt N is het midden van AE .
- Bereken de hoek die de lijnen MN en MF met elkaar maken.
Een lijn door C snijdt de lijn AF en de lijn GN . Het snijpunt met GN is punt P .
- Bereken de lengte van CP .
Het vlak door de punten C , M en N snijdt ribbe DG in Q en ribbe BE in R .
- Bereken de coördinaten van Q en R .

Opgave 7

Kubus $OABC.DEFG$ is in een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel gegeven door de punten $A(6,-8,0)$, $C(8,6,0)$ en $D(0,0,10)$. P is het punt $(0,0,15)$.

- Teken de kubus.
- Bereken de coördinaten van de punten op lijn AG die een afstand van $\sqrt{8}$ hebben tot het diagonaalvlak $OBFD$.
 M is het midden van AE en N dat van CG . Het vlak V gaat door P , M en N .
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van dit vlak met de ribben van de kubus.
Teken nu het deel van dit vlak dat binnen de kubus ligt.
- Bereken in graden nauwkeurig de hoek die dit vlak maakt met het grondvlak $OABC$ van de kubus.
- Het vlak met vergelijking $x = p$, met $0 \leq p \leq 6$, snijdt de kubus volgens een rechthoek met een oppervlakte van 10. Bereken p .

Toepassen

Opgave 8: Octaëder

Een octaëder is een regelmatig achthoekig vlak. Alle ribben van zo'n achthoekig vlak zijn even lang. De figuur bestaat uit acht gelijkzijdige driehoeken.

- Bereken de hoek tussen twee grensvlakken die een ribbe van het achthoekig vlak gemeenschappelijk hebben.
- Onderzoek welke mogelijke hoeken de ribben van de octaëder met elkaar kunnen maken.

Opgave 9: Drievlakkenstelling

Gegeven is de piramide $T.OABC$ met $A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$, $C(0,6,0)$ en $T(3,3,12)$. Verder zijn gegeven de punten $P(2,2,8)$, $Q(5,1,4)$ en $R(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 6)$.

- Laat zien dat de punten P , Q en R op ribben van de piramide liggen.
- Teken de piramide en deze drie punten.

De drievlakkenstelling gaat over de onderlinge ligging van drie vlakken. Het is een belangrijke stelling omdat bij ruimtelijke figuren met platte grensvlakken in de hoekpunten minstens drie vlakken bij elkaar komen.

Als van drie vlakken er geen twee evenwijdig zijn, hebben ze drie snijlijnen. Die drie snijlijnen gaan door één punt of ze zijn evenwijdig.

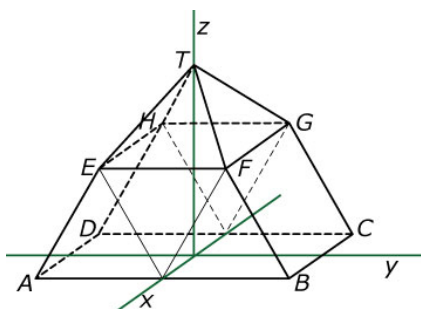
Zijn precies twee van de drie vlakken evenwijdig, dan hebben de drie vlakken twee evenwijdige snijlijnen. Zijn alle drie de vlakken evenwijdig, dan zijn er geen snijlijnen.

Bij constructies van doorsneden wordt deze drievlakkenstelling veel gebruikt.

- Vlak PQR snijdt ook het grondvlak $OABC$ van de piramide. Leg uit hoe je met behulp van de drievlakkenstelling de snijlijn van PQR en $OABC$ kunt tekenen.
- Je kunt deze snijlijn ook berekenen. Gebruik de vergelijkingen van de vlakken PQR en $OABC$ om een vectorvoorstelling van de snijlijn van beide te vinden. Ga na, dat je dezelfde lijn krijgt als bij c.
- Teken de complete doorsnede van vlak PQR met de piramide (dus alle snijlijnen met de grensvlakken).

Opgave 10: Spelen met Polydron

Misschien ken je Polydron wel, bouw materiaal voor ruimtelijke figuren bestaande uit aan elkaar te klikken vierkanten, driehoeken, vijfhoeken, etc. Hier zie je een vierkant en een gelijkzijdige driehoek van Polydron. Met 4 van deze vierkanten en 10 van deze gelijkzijdige driehoeken maak je de figuur hieronder. Hij is in een assenstelsel geplaatst waardoor de hoekpunten van grondvlak $ABCD$ (dat uit twee vierkanten bestaat) de coördinaten $A(3, -6, 0)$, $B(3, 6, 0)$, $C(-3, 6, 0)$ en $D(-3, -6, 0)$ hebben.



Figuur 7.4

- Bepaal nu zelf de coördinaten van de hoekpunten E , F , G , H en T .
- Toon aan dat vierkant $BCGF$ en driehoek FGT niet in één vlak liggen en bereken de hoek die ze met elkaar maken.
- Onderzoek of de lijnen BF en GT elkaar snijden. Snijden ze elkaar niet, bereken dan hun kortste onderlinge afstand.
- Bereken de hoek die de lijnen CE en ET met elkaar maken.
- Het vlak door E , C en T snijdt nog meer ribben van de figuur. Welke ribben?

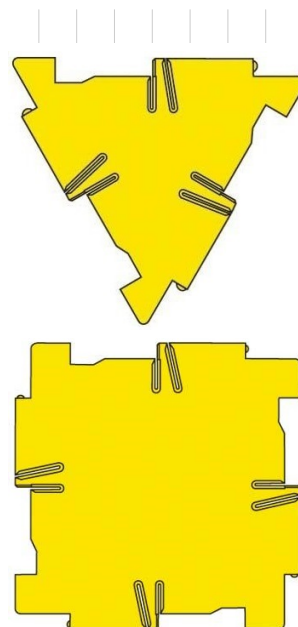
Examen

Opgave 11: Vlak in piramide

Ten opzichte van een cartesisch assenstelsel $Oxyz$ zijn gegeven de punten $A(12, 0, 0)$, $C(0, 12, 0)$ en $T(12, 12, 0)$. Deze punten zijn hoekpunten van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ met T als top.

- Teken in een ruimtelijke figuur de doorsnede van de piramide en het vlak met vergelijking $y = 8$. Geef een duidelijke toelichting, bijvoorbeeld door berekening van de snijpunten van dit vlak met alle ribben van de piramide.
- Bereken de oppervlakte van deze doorsnede.
De lijn AE snijdt het vlak met vergelijking $y = 8$ in het punt S .
- Bereken de coördinaten van S .
Op de ribbe BT ligt een punt F zo, dat de som van de lengten van de lijnstukken AF en FE minimaal is.
- Bereken $AF + FE$.

(bron: examen wiskunde B havo 1985, eerste tijdvak)



Figuur 7.3

a

afstand tussen twee lijnen

110

afstand tussen twee punten

110

afstand tussen twee vlakken

111

afstand van een lijn tot een

vlak 111

afstand van een punt tot een

lijn 79, 110

afstand van een punt tot een

vlak 110

c

convergent 17

d

dekpunt 17

discreet dynamisch model 8

divergent 17

driedimensionaal cartesisch

assenstelsel 61

g

geremde exponentiële groei

25

h

hoek tussen een lijn en een

vlak 111

hoek tussen twee lijnen 79,

111

hoek tussen twee vectoren

111

hoek tussen twee vlakken

111

i

inproduct 70

inwendig product 70

k

karakteristieke vergelijking

45

kwadratische differentiever-

gelijking van de eerste orde

25

l

lengte 61

lijn 90

lineaire differentievergelijking

van de eerste orde 25

lineaire differentievergelijking

van de tweede orde 45

logistische groei 25

n

normaalvector 90

o

onderlinge ligging 101

p

parallelprojectie 61

parametervoorstelling 79

plaatsvector 79, 90

punt 61

r

richtingsvector 70, 79

richtingsvectoren 90

s

snijpunt van twee lijnen 79

stationair 17

stelsel differentievergelijkingen

33

steunvector 79, 90

t

tijdgrafiek 17

u

uitwendig product 90

v

vector 61

vectorvoorstelling 79, 90

vlak 90

w

webgrafiek 17

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

9. Discrete dynamische modellen

10. Meetkunde in 3D



www.math4all.nl

