# Wiskunde D

# 5 VWO

**Katern 1**

**ConTeXt College**

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

# Inhoud

# Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

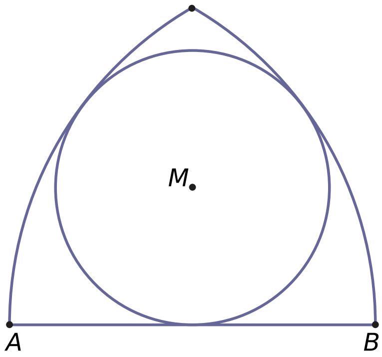
# 1

# Krommen in 2D

# 1.1 Meetkunde in 2D

## Inleiding

Een cirkel is een kromme lijn die bestaat uit alle punten die dezelfde afstand $r > 0$ hebben tot een gegeven middelpunt $M$. Hier zie je zo'n cirkel $c$ en nog twee delen van cirkels die de middelpunten $A$ en $B$ hebben en raken aan $c$, terwijl ook lijnstuk $AB$ raakt aan $c$. Als je weet hoe lang $AB$ is, kun je de straal van cirkel $c$ berekenen. Dat kun je doen door te werken met bekende meetkundige stellingen zoals de stelling van Pythagoras, maar je kunt ook de analytische meetkunde toepassen waarmee je bij wiskunde B kennis hebt gemaakt.




Figuur 1.1

### Je leert in dit onderwerp

- berekeningen in de vlakke meetkunde uitvoeren ook met behulp van analytische en/of synthetische meetkunde;
- bewijzen met behulp van analytische en/of synthetische meetkunde.

### Voorkennis

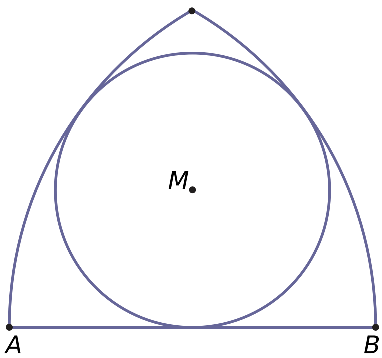
- bij vlakke meetkunde werken met assenstelsels en coördinaten, dus de beginselen van de analytische meetkunde;
- werken met vergelijkingen van cirkels en de discriminantmethode om raakpunten te berekenen.

## Verkennen

### Opgave V1

In deze figuur zie je een cirkel $c$ met middelpunt $M$. Lijnstuk $AB$ raakt deze cirkel. En er zijn twee cirkels met een straal van 8 cm die cirkel $c$ raken en middelpunten $A$ en $B$ hebben.

Bereken de straal van cirkel $c$.




Figuur 1.2

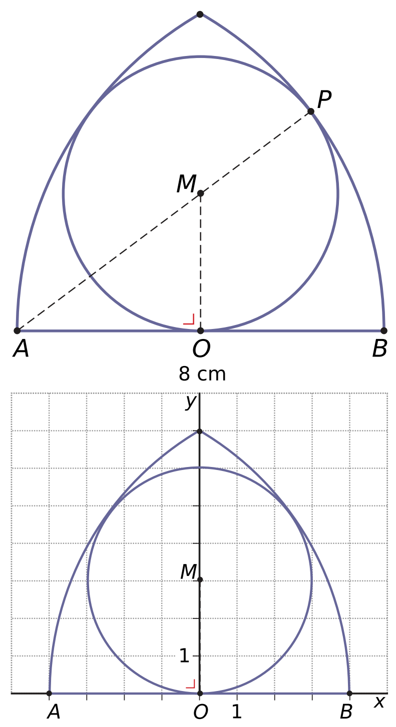
## Uitleg

Bekijk de cirkel $c$ met middelpunt $M$. Lijnstuk $AB$ raakt deze cirkel. En er zijn twee cirkelbogen met een straal van 8 cm die cirkel $c$ raken en middelpunten $A$ en $B$ hebben.

Er zijn twee manieren om de straal van cirkel $c$ te berekenen:

- Lijn $AB$ raakt $c$ in punt $O$, dus $MO \perp AB$. De lijn door $A$ en $M$ snijdt cirkel $c$ in punt $P$ en dit is tegelijk het raakpunt van $c$ en de cirkelboog met middelpunt $A$ en straal 8.
  Omdat $|AP| = 8$ en $|MP| = r$ geldt $|AM| = 8 - r$.
  Ga na dat in de rechthoekige driehoek $AOM$ geldt: $|AO| = 4$ en $|OM| = r$. Met de stelling van Pythagoras in deze driehoek krijg je $4^2 + r^2 = (8-r)^2$. Hieruit volgt $r = 3$ waarmee de vraag is beantwoord.
- Maak een assenstelsel met de $x$-as door $A$, $O$ en $B$ en de $y$-as door $O$ en $M$. Dan heb je de punten $A(-4,0)$, $B(4,0)$ en $M(0,r)$ met $r > 0$.
  Dan is $c : x^2 + (y-r)^2 = r^2$ en heeft de cirkel door $A$ met straal 8 de vergelijking $(x+4)^2 + y^2 = 64$.
  Beide cirkels moeten precies één punt gemeen hebben. Bereken dit punt door in beide vergelijkingen de haakjes weg te werken en dan met behulp van de balansmethode alle kwadraten weg te laten vallen. Er blijft dan een lineair verband over in de vorm $x = ...$ of $y = ...$ dat je in een van beide cirkelvergelijkingen invult. Hieruit volgt een kwadratische vergelijking waarvan de discriminant gelijk moet zijn aan 0. Ook op deze manier volgt $r = 3$.

Welke van beide manieren de beste is, hangt af van de situatie. Soms is het werken met eenvoudige meetkunde sneller en betekent het gebruik van analytische meetkunde omslachtig rekenwerk. Maar bij het toepassen van analytische meetkunde kun je in ieder geval altijd rekenen, ook als je niet meteen de aanpak ziet.




Figuur 1.3

### Opgave 1

Bekijk de eerste manier die in de **Uitleg** gegeven wordt om de straal van de cirkel $c$ te berekenen.

**a** Leg uit waarom punt $P$ het raakpunt van beide cirkels is.

**b** Reken na dat $r = 3$.

Bekijk vervolgens de tweede manier.

**c** Laat zien dat uit de discriminantmethode ook blijkt dat $r = 3$.

### Opgave 2

In een vierkant $ABCD$ met zijden van 8 cm zit een cirkel $c_1$ die alle vier de zijden van het vierkant raakt. Er zijn vier kleinere cirkels die precies twee zijden van het vierkant raken en ook cirkel $c_1$ raken. $c_2$ is één van die vier cirkels.

**a** Maak een tekening van de situatie en teken een mogelijke cirkel $c_2$.

**b** Bereken exact de straal van $c_2$.

Dit probleem is ook op te lossen door een assenstelsel in te voeren. Kies bijvoorbeeld punt $A$ als oorsprong van het assenstelsel, de $x$-as langs lijnstuk $AB$ en de $y$-as langs lijnstuk $AD$. Teken daarin $c_2$ zo, dat deze cirkel raakt aan beide assen.

**c** Laat zien hoe je nu de straal van $c_2$ berekent met behulp van vergelijkingen van cirkels.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

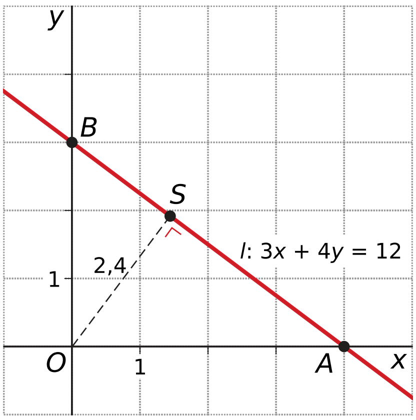
Veel meetkundige berekeningen en/of bewijzen kun je op twee manieren aanpakken:

- Een **synthetische aanpak**, waarbij je gebruikmaakt van al bekende technieken uit de vlakke meetkunde zoals de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid, congruentie en eigenschappen van bijzondere driehoeken en van cirkels. Veel daarvan ben je in het hoofdstuk 'Redeneren en bewijzen' tegengekomen.
- Een **analytische aanpak**, waarbij je gebruikmaakt van de analytische meetkunde die je bij wiskunde B hebt geleerd. Het gaat daarbij om het invoeren van een handig gekozen cartesisch assenstelsel en het werken met vergelijkingen van lijnen en cirkels en dergelijke.

### Voorbeeld 1

Geef een formule voor de afstand van punt $O(0,0)$ tot de lijn $l : ax + by = c$. Gebruik hiervoor zowel een synthetische als een analytische aanpak.

Controleer met deze formule dat de afstand van $O(0,0)$ tot de lijn $l : 3x + 4y = 12$ gelijk is aan $2{,}4$.



Figuur 1.4

Antwoord

Eerst een synthetische aanpak:

- Bereken eerst de snijpunten van $l$ met de assen: $A\left(\frac{c}{a},0\right)$ en $B\left(0,\frac{c}{b}\right)$.
  Gebruik vervolgens de gelijkvormigheid van (bijvoorbeeld) de driehoeken $OAB$ en $SAO$. Bereken eerst $|AB| = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}$. Leid uit de gelijkvormigheid vervolgens af dat de gevraagde afstand $|OS| = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ is.

Een analytische aanpak is:

- Bereken eerst de snijpunten van $l$ met de assen: $A\left(\frac{c}{a},0\right)$ en $B\left(0,\frac{c}{b}\right)$.
  Stel vervolgens een vergelijking op van de lijn door $O$ die loodrecht staat op $l$.
  Snijd deze lijn met lijn $l$ om de coördinaten van $S$ te vinden: $S\left(\frac{ac}{a^2+b^2},\frac{bc}{a^2+b^2}\right)$.

Bereken tenslotte $|OS| = \sqrt{\frac{a^2c^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}}$. Dit is te herleiden tot $|OS| = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

De afstand van $O(0,0)$ tot de lijn $l: 3x + 4y = 12$ is $\frac{12}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2{,}4$.

### Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en leid de afstand van de oorsprong tot lijn $l: ax + by = c$ af met behulp van de synthetische aanpak.

**a** Bereken de snijpunten $A$ en $B$ met de coördinaatassen en de lengte van lijnstuk $AB$.

**b** Gebruik de beschreven gelijkvormigheid om de afstand $|OS|$ van punt $O$ tot lijn $l$ te berekenen.

**c** Bereken in twee decimalen de afstand van $O$ tot de lijn $2x+3y = 6$.

### Opgave 4

Bekijk weer **Voorbeeld 1**. Leid de afstand van de oorsprong tot lijn $l: ax + by = c$ af met behulp van de analytische aanpak.

**a** Stel de vergelijking op van de lijn $OS$.

**b** Toon aan dat $S\left(\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2}\right)$ en $|OS| = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

### Opgave 5

Leid met behulp van de formule in **Voorbeeld 1** een algemene formule af voor de afstand van een punt $P(p,q)$ tot een lijn $l: ax + by = c$. Pas een translatie toe van $-p$ ten opzichte van de $y$-as en een translatie van $-q$ ten opzichte van de $x$-as om het punt $P$ naar $O$ te verplaatsen.

**a** Wat wordt na die translatie de vergelijking van lijn $l$?

**b** Gebruik de algemene formule voor de afstand van $O$ tot lijn $l$ en bereken daarmee de afstand van $P$ tot $l$.

**c** Gebruik de bij b gevonden formule om de afstand van $P(4,5)$ tot lijn $l: 2x + 3y = 6$ uit te rekenen. Rond af op twee decimalen.

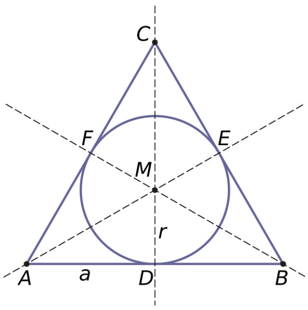
Je kunt de afstand van $P(4,5)$ tot lijn $l: 2x+3y = 6$ ook berekenen door een loodlijn door $P$ op lijn $l$ te maken en het snijpunt $S$ van $l$ en die loodlijn uit te rekenen. $|PS|$ is dan de gevraagde afstand.

**d** Bereken de afstand op deze manier en vergelijk het antwoord met c.

## Voorbeeld 2

**Bekijk de applet**

In een gelijkzijdige driehoek met zijden die een lengte van $2a$ hebben, zit een cirkel $c$ die alle drie de zijden van deze driehoek raakt. Druk de straal van deze ingeschreven cirkel uit in $a$. Gebruik zowel een synthetische als een analytische aanpak.




Figuur 1.5

Antwoord

Een synthetische aanpak:

- Het middelpunt $M$ van de cirkel is het snijpunt van de bissectrices van de hoeken van driehoek $ABC$. Deze bissectrices zijn in een gelijkzijdige driehoek ook middelloodlijnen van de zijden. Dus zijn de punten $D$, $E$ en $F$ de middens van de zijden en staan $AE$, $CD$ en $BF$ loodrecht op die zijden.
  Uit de gelijkvormigheid van bijvoorbeeld $\Delta DBC$ en $\Delta EMC$ volgt $r = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

Een analytische aanpak:

- Het middelpunt $M$ van de cirkel is het snijpunt van bissectrices van de hoeken van driehoek $ABC$. Deze bissectrices zijn in een gelijkzijdige driehoek ook middelloodlijnen van de zijden. Dus zijn de punten $D$, $E$ en $F$ de middens van de zijden en staan $AE$, $CD$ en $BF$ loodrecht op die zijden.
  Kies een assenstelsel met (bijvoorbeeld) de oorsprong in $D$, lijn $AB$ als $x$-as en lijn $DC$ als $y$-as. Bepaal dan de coördinaten van de hoekpunten van $\Delta ABC$ en daarmee die van $E$ en $F$. Stel vervolgens de vergelijking van $AE$ op en bereken het snijpunt daarvan met de $y$-as, dat is punt $M$. Deze $y$-waarde is de straal van de cirkel.

De synthetische aanpak bespaart je wat rekenwerk, maar vraagt meer inzicht. Voor de analytische aanpak geldt het tegenovergestelde.

### Opgave 6

Bekijk de manier waarop in **Voorbeeld 2** de straal van de ingeschreven cirkel van een gelijkzijdige driehoek met zijden van $2a$ wordt berekend.

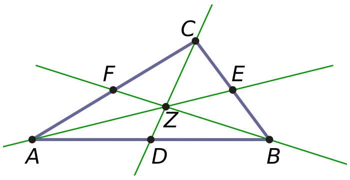
**a** Toon met behulp van de synthetische aanpak aan dat $r = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

**b** Toon met behulp van de analytische aanpak aan dat $r = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

## Voorbeeld 3

**Bekijk de applet**

De zwaartelijnen van elke driehoek verdelen elkaar in stukken waarvan de lengtes zich verhouden als $2:1$.
Bewijs dit.



Figuur 1.6

Antwoord

**Gegeven**:
$AE$, $BF$ en $CD$ zijn zwaartelijnen, dus $BE = EC$, $AF = FC$ en $AD = DB$.

$Z$ is het snijpunt van $AE$ en $BF$.

**Te bewijzen**:
$|AZ|:|ZE| = |BZ|:|ZF| = |CZ|:|ZD| = 2:1$.

**Bewijs**:
Volgens de synthetische aanpak:
$|CA| = 2 \cdot |CF|$ en $|CB| = 2 \cdot |CE|$, dus $\Delta ABC$ is gelijkvormig met $\Delta FEC$ (zhz). Dit betekent: $|AB| = 2 \cdot |FE|$ en $AB // FE$. Hieruit volgt: $\angle BAE = \angle AEF$ en $\angle ABF = \angle BFE$ (Z-hoeken). En dus is $\Delta ABZ$ gelijkvormig met $\Delta EFZ$ (hh).
Omdat $|AB| = 2 \cdot |FE|$ is $|ZB|:|FZ| = 2:1 = |ZA|:|EZ|$. De zwaartelijnen $AE$ en $BF$ verdelen elkaar dus in de verhouding $2:1$.
Eenzelfde redenering geldt voor bijvoorbeeld de zwaartelijnen $AE$ en $CD$. Hieruit volgt ook dat de zwaartelijnen door één punt gaan.
Q.e.d.

Volgens de analytische aanpak:

- Kies een assenstelsel waarvan de oorsprong in (bijvoorbeeld) $A$ zit en de $x$-as de lijn door $A$ en $B$ is.
- De hoekpunten hebben dan bijvoorbeeld de coördinaten $A(0,0)$, $B(2b,0)$ en $C(2a,2c)$.
- Bepaal hiermee de middens van de drie zijden: $D(b,0)$, $E(a+b,c)$ en $F(a,c)$.
- Stel vergelijkingen op van twee zwaartelijnen en bereken hun snijpunt (het zwaartepunt $Z$). Je vindt $Z\left(\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b, \frac{2}{3}c\right)$. Controleer dat dit zwaartepunt ook aan de vergelijking van de derde zwaartelijn voldoet.
- Bewijs de stelling door de verhouding van $|AZ|$ en $|ZE|$, van $|BZ|$ en $|ZF|$ en van $|CZ|$ en $|ZD|$ te bepalen. De verhoudingen zijn $2:1$.

### Opgave 7

Bekijk het analytische bewijs in **Voorbeeld 3** dat de zwaartelijnen van elke driehoek elkaar in stukken verdelen waarvan de lengtes zich verhouden als $2:1$.

**a** Toon aan dat $Z\left(\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b, \frac{2}{3}c\right)$.

**b** Toon aan dat $|AZ|:|ZE| = 2:1$.

## Verwerken

### Opgave 8

In vierkant $ABCD$ is een diagonaal getekend. De zijden van het vierkant zijn $4$ cm. Cirkel $c$ raakt twee zijden van het vierkant en de diagonaal.

**a** Teken een mogelijke cirkel $c$. Hoeveel van die cirkels zijn er mogelijk?

**b** Bereken exact de straal van cirkel $c$. Gebruik hiervoor congruentie.

Maak een assenstelsel met de oorsprong in $A$, de $x$-as langs $AB$ en de $y$-as langs $AD$.

**c** Bereken nog eens de straal van cirkel $c$ maar nu met behulp van analytische meetkunde.

### Opgave 9

In driehoek $ABC$ is $D$ het midden van $BC$ en $E$ het midden van $AC$. Lijn $DE$ is een middenparallel in deze driehoek. Dit betekent dat $DE//AB$.

**a** Bewijs dit met behulp van gelijkvormigheid.

**b** Bewijs dit met behulp van analytische meetkunde.

### Opgave 10

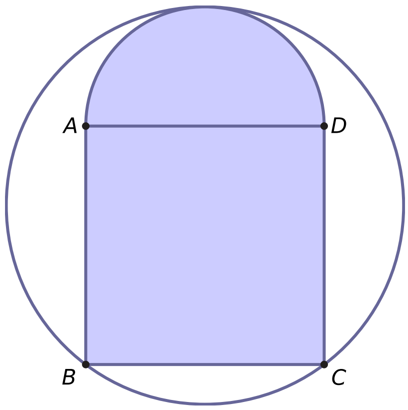
Gegeven is de lijn $l: y = -\frac{1}{2}x + p$ met $p > 0$. De lijn $m$ gaat door $O(0,0)$ en staat loodrecht op $l$. De lijnen $l$ en $m$ snijden elkaar in punt $S$. Verder is $\text{d}(O,S) = 2$. Bepaal de exacte waarde van $p$.

### Opgave 11

$ABCD$ is een vierkant met zijden van $2$ cm. Lijnstuk $AD$ is de middellijn van een halve cirkel die aan de buitenkant van het vierkant is getekend. De omgeschreven cirkel van de figuur gaat door $B$ en $C$ en raakt de halve cirkel.

**a** Bereken exact de straal van de omgeschreven cirkel met behulp van vlakke meetkunde.

**b** Bereken exact de straal van de omgeschreven cirkel met behulp van analytische meetkunde.



**Figuur 1.7**

### Opgave 12

Een gelijkbenige driehoek heeft twee zijden van $2a$ centimeter en een zijde van $2b$ centimeter. De omgeschreven cirkel van deze driehoek gaat door de drie hoekpunten ervan.

**a** Druk de straal $r$ van de cirkel uit in $a$ en $b$ met behulp van een synthetische aanpak.

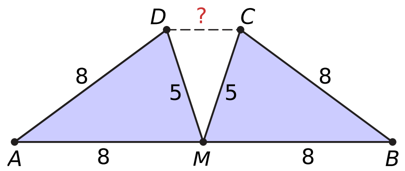
**b** Druk de straal $r$ van de cirkel uit in $a$ en $b$ met behulp van analytische meetkunde.

## Toepassen

### Opgave 13: $CD$ berekenen

Bekijk het lijnstuk $AB$ met midden $M$. De vier lijnstukken $AM$, $BM$, $BC$ en $AD$ hebben lengte 8 en de lijnstukken $DM$ en $CM$ hebben lengte 5.

Hoe lang is lijnstuk $CD$? Kies zelf een synthetische of een analytische aanpak.




Figuur 1.8

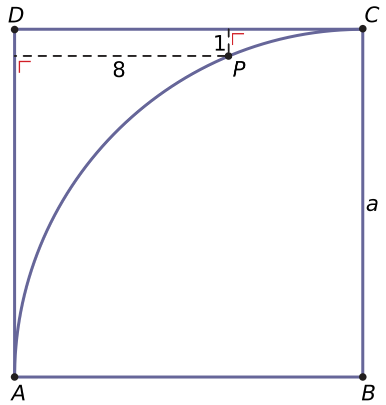
## Testen

### Opgave 14

Bekijk het vierkant $ABCD$ met een kwartcirkel met middelpunt in één van de hoekpunten. Op deze kwartcirkel ligt een punt $P$. Er geldt verder dat $\text{d}(P,AD) = 8$ en $\text{d}(P,DC) = 1$.

**a** Bereken de lengte van de zijde van het vierkant door gebruik te maken van een synthetische aanpak.

**b** Bereken nu de lengte van de zijde van het vierkant door gebruik te maken van een analytische aanpak.

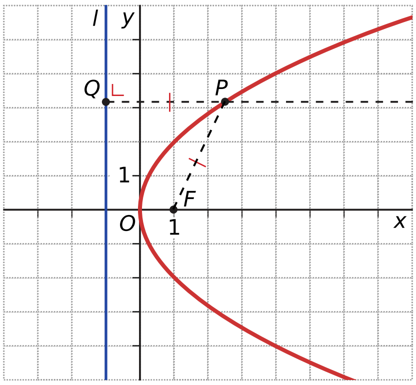



Figuur 1.9

# 1.2 Parabolen

## Inleiding

Behalve cirkels zijn er nog veel meer soorten krommen. De parabool is daarvan een voorbeeld. Hier zie je er eentje. Hij ontstaat door punt $Q$ over lijn $l$ te bewegen. Punt $P$ doorloptt dan de parabool. Maar hoe beschrijf je een parabool algebraïsch?




Figuur 2.1

**Je leert in dit onderwerp**

- parabolen te construeren vanuit een gegeven brandpunt en richtlijn;
- parabolen beschrijven met een vergelijking;
- vergelijkingen van raaklijnen aan een parabool opstellen.

**Voorkennis**

- werken met vergelijkingen van lijnen en cirkels;
- de vergelijking van de raaklijn aan een cirkel opstellen met de discriminantmethode of door loodrechte stand te gebruiken;
- snijpunten, hoeken en afstanden berekenen.

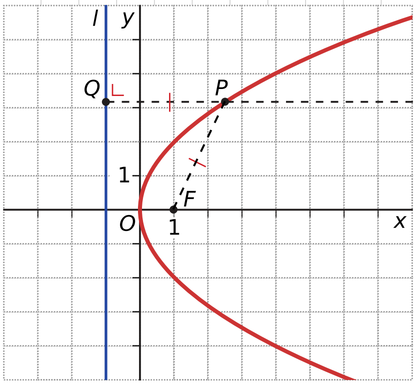
## Verkennen

### Opgave V1

Als punt $Q$ over de lijn $l$ beweegt, zie je dat punt $P$ een kromme doorloopt. Die kromme heet parabool.

**a** Wat is een parabool precies? Aan welke eigenschap moeten alle punten $P$ voldoen?

**b** Hoe zou je een vergelijking van deze parabool kunnen opstellen?




Figuur 2.2

## Uitleg 1

**Bekijk de applet**

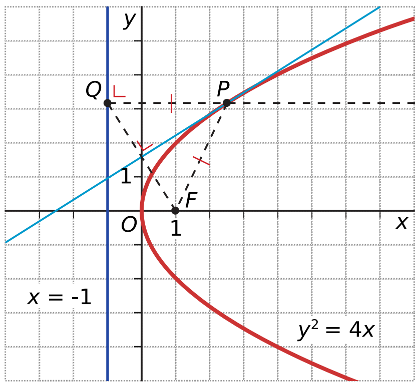
Een parabool is een kromme die bestaat uit punten $P$ die een even grote afstand hebben tot een vast punt $F$ als tot een vaste lijn $l$. Dit vaste punt $F$ heet het brandpunt (of focus), de vaste lijn heet de richtlijn van de parabool.

Construeer zo'n parabool door in elk punt $Q$ van de richtlijn een lijn te tekenen loodrecht op die richtlijn en deze lijn te snijden met de middelloodlijn van $QF$.

Om een parabool met een vergelijking te beschrijven heb je een geschikt assenstelsel nodig.

In de figuur heeft $F$ de coördinaten $(1,0)$ en geldt voor $l$ de vergelijking $x = -1$.

Je kunt nu uit $|PF| = \text{d}(P,r)$ een vergelijking voor de parabool afleiden.




Figuur 2.3

### Opgave 1

In **Uitleg 1** staat dat je de vergelijking van de parabool kunt afleiden door een geschikt assenstelsel te kiezen.

**a** Welke vergelijking heeft de parabool bij het gekozen assenstelsel?

**b** Kies het assenstelsel zo, dat de richtlijn samenvalt met de $y$-as en het brandpunt $F(2,0)$ is.
Hoe ziet in dat geval de vergelijking van de parabool eruit?

**c** Wat wordt de vergelijking van een parabool met richtlijn $x = -0,5p$ en brandpunt $F(0,5p; 0)$?

**d** Leg uit hoe je een parabool construeert als een brandpunt $F$ en een richtlijn $r$ gegeven zijn.

**e** Bewijs met behulp van congruentie dat het snijpunt $P$ van de lijn door een punt $Q$ van de richtlijn $l$ die loodrecht op $l$ staat met de middelloodlijn van $QF$ inderdaad een punt van de parabool is. Voor dat punt moet dus gelden $\text{d}(P,l) = |PF|$.

### Opgave 2

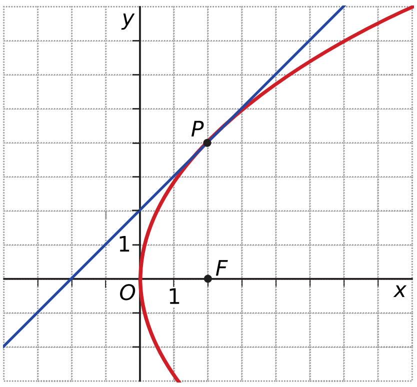
Gegeven is de richtlijn $y = 0,5p$ en het brandpunt $F(0; -0,5p)$.
Welke vergelijking heeft de parabool die hierbij hoort?

## Uitleg 2

**Bekijk de applet**

Bekijk de parabool met vergelijking $y^2 = 8x$.
Het punt $P(2,4)$ ligt op de parabool, de raaklijn in dit punt aan de parabool is getekend.
Om een vergelijking van deze raaklijn op te stellen moet je de richtingscoëfficiënt ervan weten. Bij een cirkel maak je gebruik van het feit dat zo'n raaklijn loodrecht op de straal naar het raakpunt staat, maar bij een parabool gaat dit niet.

Omdat een lijn met richtingscoëfficiënt $a$ en door $P(2,4)$ een vergelijking heeft van de vorm $y - 4 = a(x - 2)$, heeft de raaklijn aan de parabool ook die vorm. Je maakt gebruik van het gegeven dat de raaklijn alleen het punt $P$ met de parabool gemeen mag hebben. Je substitueert $y = ax - 2a + 4$ in $y^2 = 8x$ en vindt een kwadratische vergelijking die maar één oplossing mag hebben. Dus moet de discriminant van die vergelijking 0 zijn. Dit geeft $a = 1$ en dus als vergelijking van de raaklijn: $y = x + 2$.




Figuur 2.4

### Opgave 3

Bestudeer **Uitleg 2**.

**a** Waarom is het bepalen van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn bij een parabool moeilijker dan bij een cirkel?

**b** Laat zien dat een lijn met richtingscoëfficiënt $a$ en door $P(2,4)$ een vergelijking van de vorm $y - 4 = a(x - 2)$ heeft.

**c** Stel de vergelijking van de raaklijn op aan $y^2 = 8x$ in het punt $P(2,4)$.

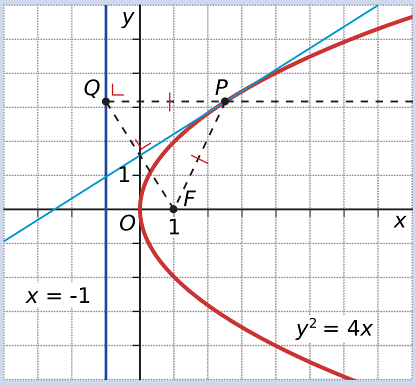
# Theorie en voorbeelden

## Om te onthouden

Een **parabool** is een kromme die bestaat uit punten $P$ die een even grote afstand hebben tot een vast punt $F$ als tot een vaste lijn $l$. Dit vaste punt $F$ heet het **brandpunt** (of focus), de vaste lijn heet de **richtlijn** van de parabool.
Construeer zo'n parabool door in elk punt $Q$ op de richtlijn een lijn te tekenen loodrecht op die richtlijn en deze lijn te snijden met de middelloodlijn van $QF$.

Kies je de assen zo, dat $F = (0{,}5p; 0)$ en $l$ de vergelijking $x = -0{,}5p$ heeft, dan is de vergelijking van de parabool $y^2 = 2px$.
De afstand van het brandpunt tot de richtlijn is $|p|$ (let op dat $p$ ook negatief kan zijn). De **top** van de parabool is nu $O(0,0)$ en de $x$-as is de **as van de parabool**.

In de figuur is het brandpunt $F(1,0)$ en de richtlijn $x = -1$. De vergelijking van de parabool is $y^2 = 4x$.




Figuur 2.5

Je kunt ook de top van de parabool van $(0,0)$ verschuiven naar $(a,b)$.
De vergelijking wordt dan $(y-b)^2 = 2p(x-a)$.

Kies je de assen zo, dat $F = (0; 0{,}5p)$ en $l$ de vergelijking $y = -0{,}5p$ heeft, dan is de vergelijking van de parabool $x^2 = 2py$. De $y$-as is nu de as van de parabool. Ook nu kun je de top van $(0,0)$ naar $(a,b)$ verschuiven.

De vergelijking van een **raaklijn** aan een parabool in een punt op de kromme bepaal je met behulp van de **discriminantmethode**. Je noemt dan de richtingscoëfficiënt $a$ en stelt daarmee met de coördinaten van het gegeven punt $P(p,q)$ de vergelijking van de raaklijn op van de vorm $y - q = a(x - p)$. Dit vul je in de vergelijking van de parabool in. Bij raken zijn er twee samenvallende snijpunten, dus is de discriminant van de bijbehorende kwadratische vergelijking $0$. Zo kun je $a$ berekenen.

## Voorbeeld 1

Stel een vergelijking op van de parabool met top $T(2,1)$ en richtlijn $y = -2$.

Antwoord

Omdat de richtlijn evenwijdig is aan de $x$-as, is de as van de parabool evenwijdig aan de $y$-as.
Wanneer de top $(0,0)$ zou zijn, was de vergelijking van de vorm: $x^2 = 2py$.
De top van de parabool ligt $3$ eenheden boven de richtlijn, dus $p = 6$. De voorlopige vergelijking van de parabool is dan $x^2 = 12y$.

De parabool die gevraagd wordt, is getransleerd. Omdat de top van de parabool (en dus ook de parabool zelf) van $(0,0)$ is verschoven naar $(2,1)$ is de vergelijking $(x-2)^2 = 12(y-1)$.

### Opgave 4

Stel een vergelijking op van de parabool $p$ met richtlijn $y = 1$ en brandpunt $F(2,5)$.

### Opgave 5

De vergelijking van een parabool met richtlijn $x = -0{,}5p$ en brandpunt $F(0{,}5p; 0)$ is $y^2 = 2px$.

**a** Verschuif de top $(0,0)$ van deze parabool naar $(a,0)$. Hoe ziet de vergelijking eruit?

**b** Verschuif de top $(0,0)$ van deze parabool naar $(0,b)$. Hoe ziet de vergelijking eruit?

**c** Schrijf een vergelijking op van de parabool met brandpunt $F(4,6)$ en richtlijn $x = 3$.

### Voorbeeld 2

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de parabool $p$ met vergelijking $y^2 = 4x + 2y$ in het punt $P(2,4)$.

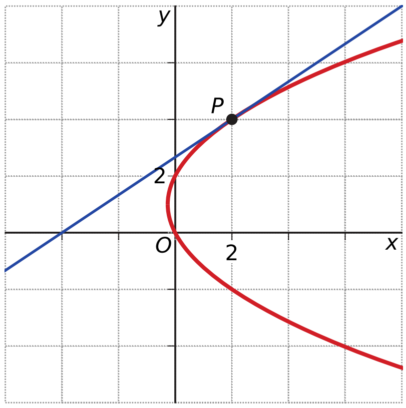
Antwoord

Het punt $P(2,4)$ ligt op de parabool.
In dat punt heeft de raaklijn de vorm $y - 4 = a(x - 2)$.

Dit herleiden tot $y = ax - 2a + 4$ en invullen in de vergelijking van de parabool geeft $(ax - 2a + 4)^2 = 4x + 2(ax - 2a + 4)$.

$P$ is een raakpunt en dus stel je de discriminant van deze kwadratische vergelijking gelijk aan 0. Hieruit volgt dat $a = \frac{2}{3}$.

De vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.



Figuur 2.6

### Opgave 6

**a** Bekijk **Voorbeeld 2**. Schrijf door kwadraat afsplitsen de vergelijking van de parabool zo, dat je er de top uit kunt aflezen.

**b** Bepaal de coördinaten van het brandpunt en de vergelijking van de richtlijn van deze parabool.

**c** Voer de berekening voor het bepalen van de richtingscoëfficiënt $a$ van de raaklijn aan de gegeven parabool in $P(2,4)$ uit. Laat zien hoe de vergelijking van die raaklijn kan worden gevonden.

**d** Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan parabool $p$ in de punten van $p$ waarvoor $x = 0$.

### Opgave 7

Ga uit van de parabool met vergelijking $y^2 = 4x$ met brandpunt $F(1,0)$. Bewijs dat voor elk punt $Q$ van de richtlijn $l$ van deze parabool geldt dat de middelloodlijn van $FQ$ een raaklijn is van de parabool.

## Voorbeeld 3

De parabool $p$ is gegeven door de vergelijking $y = 4(0{,}5x - 2)^2 + 3$. Bepaal het brandpunt en de richtlijn van deze parabool en construeer de parabool.

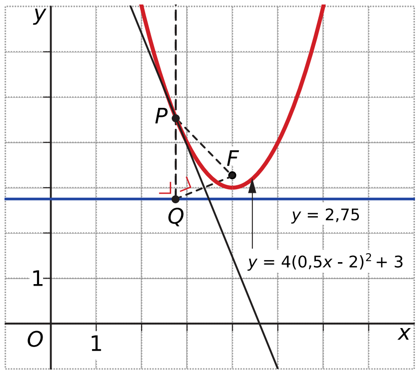
Antwoord

Deze vergelijking kun je schrijven als $(x - 4)^2 = y - 3$.

De vergelijking van de parabool heeft dus de vorm $(x - a)^2 = 2p(y - b)$ met $a = 4$, $b = 3$ en $p = 0{,}5$.

De as van zo'n parabool is evenwijdig aan de $y$-as en de top is $(4{,}3)$.
Het brandpunt ligt $0{,}25$ hoger dan de top en is dus het punt $(4; 3{,}25)$.
De richtlijn ligt $0{,}25$ lager dan de top en is dus de lijn $y = 2{,}75$.

Construeer nu de parabool door eerst de richtlijn en het brandpunt te tekenen. Neem vervolgens, zowel links als rechts van de as van de parabool een drietal punten $P$ op de richtlijn. Teken door elk van die punten $P$ een lijn evenwijdig aan de as van de parabool (dus loodrecht op de richtlijn) en snijd die lijn met de middelloodlijn van $PF$. Het snijpunt is een punt van de parabool, want het ligt even ver van $F$ als van de richtlijn. Je krijgt nu zes punten van de parabool en kunt hem dus tekenen.




Figuur 2.7

### Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt van een parabool met een gegeven vergelijking het brandpunt en de vergelijking van de richtlijn bepaald. Je kunt daarna de parabool zelf construeren.

**a** Geef de vergelijking van de parabool in de vorm $(x - a)^2 = 2p(y - b)$.

**b** Geef de bijbehorende waarden van $p$ en $b$.

**c** Waarom ligt de top van deze parabool boven de richtlijn?

**d** Geef de vergelijking van de richtlijn, de top $T$ en het brandpunt $F$.

### Opgave 9

Gegeven is de parabool met vergelijking $y = x^2 + 4x + 8$. Bepaal de richtlijn en het brandpunt van de parabool.

## Verwerken

### Opgave 10

Telkens wordt een parabool $k$ omschreven. Stel een vergelijking van $k$ op.

**a** $k$ heeft brandpunt $(-4{,}0)$ en richtlijn $x = 2$.

**b** $k$ heeft top $(0{,}2)$ en richtlijn $y = 0$.

**c** $k$ heeft brandpunt $(0{,}2)$ en top $(4{,}2)$.

**d** $k$ heeft brandpunt $(3{,}0)$, een richtlijn evenwijdig aan de $y$-as en $k$ gaat door het punt $(0{,}4)$

### Opgave 11

De parabool $k$ is gegeven door de vergelijking $x = (0{,}5y - 1)^2 - 4$.
Lijn $l$ gaat door de punten $A(0{,}2)$ en $B(3{,}0)$.

**a** Bereken van $k$ de coördinaten van het brandpunt en de vergelijking van de richtlijn. Construeer ook parabool $k$.

**b** Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van $k$ en $l$.

**c** Lijn $l$ snijdt $k$ in twee punten. Stel in elk van deze punten de vergelijking van de raaklijn aan parabool $k$ op en bereken het snijpunt van beide raaklijnen.

### Opgave 12

Gegeven zijn de parabool $p : (y - 2)^2 = -x + 3$ en de cirkel $c : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 13$.

**a** Teken beide krommen in één figuur.

**b** Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van $p$ en $c$.

**c** Bereken van beide krommen exact de coördinaten van de snijpunten met de assen.

**d** Eén van beide snijpunten van beide krommen is $A(-1{,}0)$. Stel vergelijkingen op van zowel de raaklijn aan de parabool als die aan de cirkel in punt $A$.

### Opgave 13

Een lijn $l$ met richtingscoëfficiënt $3$ raakt de parabool $p$ met vergelijking $y^2 - 8y + 6x + 10 = 0$.
Bereken de exacte coördinaten van het raakpunt $R$.

### Opgave 14

Gegeven is de parabool met vergelijking $y^2 = -4x - 4y$.

**a** Bepaal het brandpunt en de richtlijn van deze parabool.

**b** Construeer de gegeven parabool.

**c** Bereken het snijpunt van de twee raaklijnen aan de parabool in de punten $A$ en $B$ met $x$-coördinaat $-3$.

**d** Het punt $P(2,-2)$ ligt op de richtlijn van de parabool, maar niet op de parabool zelf. Stel de vergelijkingen op van de twee raaklijnen door $P$ aan de gegeven parabool. Laat ook zien dat deze raaklijnen loodrecht op elkaar staan.

### Opgave 15

Gegeven is de parabool $p$ met vergelijking $y^2 = 4x$. Lijn $l$ heeft een negatieve richtingscoëfficiënt en snijdt $p$ loodrecht in punt $B$ waarvan de $x$-coördinaat $4$ is.
Stel een vergelijking op van lijn $l$.

## Toepassen

### Opgave 16: Scheve parabool

Een parabool hoeft geen symmetrieas te hebben die evenwijdig is aan de $x$-as of de $y$-as. De symmetrieas kan ook scheef zijn. Neem bijvoorbeeld een parabool $p$ waarvan het brandpunt de oorsprong $O$ van het assenstelsel is en de richtlijn de lijn $l : x + y = 4$ is.

**a** Construeer deze parabool.

**b** Noem $Q$ een punt op de richtlijn en $P(x,y)$ het bijbehorende punt op de parabool.

Toon aan dat $|PQ|^2 = 0{,}5(x + y - 4)^2$.

**c** Bepaal een vergelijking van de parabool.

**d** Bereken de coördinaten van de punten op $p$ waarin de raaklijn evenwijdig loopt aan de $x$-as of de $y$-as.

## Testen

### Opgave 17

Een parabool $p$ is gegeven door de vergelijking $x = 4 - 0{,}1(y + 3)^2$.

**a** Bereken het brandpunt en de richtlijn van $p$ en construeer deze parabool.

**b** Stel de vergelijkingen van de raaklijnen aan de parabool in de punten op $p$ met $x = -6$ op.

**c** In welk punt van $p$ heeft de raaklijn een hellingswaarde van $-2$? Bereken de exacte coördinaten van dat punt.

### Opgave 18

De cirkel $c : (x - 12)^2 + (y - 2)^2 = 65$ en de parabool $k$ met als richtlijn de lijn $x = 1$ en brandpunt $F(5,2)$ hebben vier snijpunten.

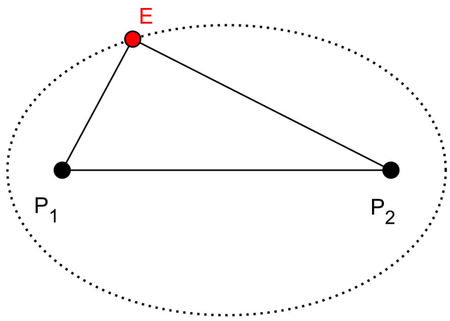
**a** Stel een vergelijking op van parabool $k$.

**b** Bereken de coördinaten van de vier snijpunten.

# 1.3 Ellipsen

## Inleiding

De technieken die je bij lijnen, cirkels en parabolen hebt geleerd zijn ook bruikbaar bij andere vlakke krommen. Een voorbeeld daarvan is de ellips, een kromme die je maakt met twee spijkers en een touwtje met een vaste lengte.




Figuur 3.1

**Je leert in dit onderwerp**

- een ellips construeren vanuit de brandpunten en richtcirkel;
- een ellips beschrijven door middel van een vergelijking;
- vergelijkingen van raaklijnen aan een ellips opstellen.

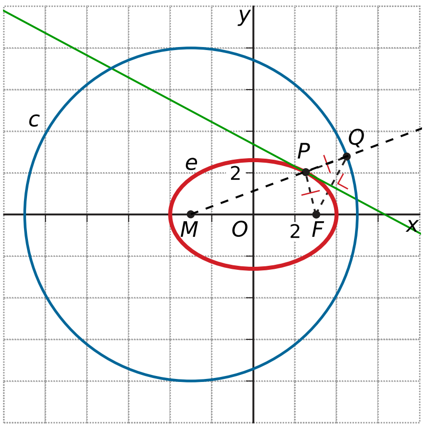
**Voorkennis**

- werken met vergelijkingen van lijnen, cirkels en parabolen;
- vergelijkingen van raaklijnen aan cirkels en parabolen opstellen;
- snijpunten en afstanden berekenen.

## Verkennen

### Opgave V1

Als punt $Q$ over cirkel $c$ beweegt doorloopt punt $P$ een kromme. Die kromme heet een ellips als de straal van de cirkel groter is dan $|MF|$, anders een hyperbool.




Figuur 3.2

**a** Welke eigenschap hebben alle punten $P$ van de ellips?

**b** Hoe zou je een vergelijking van de ellips kunnen opstellen?

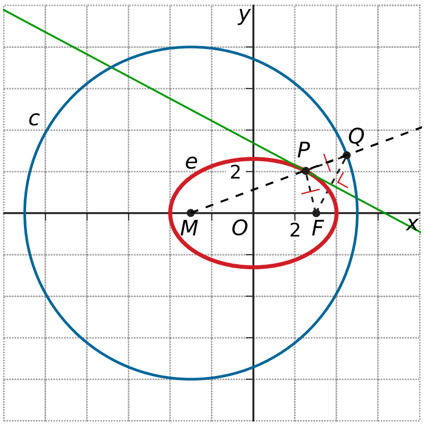
# Uitleg 1

**Bekijk de applet**

Een ellips is een kromme die bestaat uit alle punten $P$ die een even grote afstand hebben tot een vast punt $F$ als tot een vaste cirkel $c$. Je construeert die punten door steeds de middelloodlijn van $FQ$ te snijden met straal $MQ$. Dit vaste punt $F$ heet het brandpunt (of focus), de vaste cirkel heet de richtcirkel. De ellips kun je alleen construeren als $F$ binnen de cirkel ligt.

Voor de ellips in de figuur kun je afleiden dat voor elk punt $P(x,y)$ moet gelden $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

Je krijgt dezelfde ellips als de richtcirkel middelpunt $F(3,0)$ heeft en als $M(-3,0)$ het brandpunt is. De rol van de punten $M$ en $F$ is volledig verwisselbaar. Daarom zeg je wel dat zo'n ellips twee brandpunten heeft, namelijk $M$ en $F$.




Figuur 3.3

## Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe de ellips $e$ wordt geconstrueerd door punt $Q$ over de cirkel te bewegen. Uitgangspunt is dat steeds $|FP| = |PQ|$.

**a** Leg uit waarom dit betekent dat $|MP| + |PF| = 8$.

**b** Neem nu $P(x,y)$ als punt van de ellips. Welke vergelijking in $x$ en $y$ volgt nu uit $|MP| + |PF| = 8$?

**c** Leid de vergelijking van de ellips in **Uitleg 1** af.

**d** Het getal 16 kun je afleiden uit de richtcirkel door het kwadraat van de halve straal te nemen. Toon dit aan.

**e** Het getal 7 kan worden afgeleid uit het kwadraat van de halve straal van de richtcirkel en het kwadraat van de afstand van $F$ tot de oorsprong $O(0,0)$, het centrum van de ellips. Toon dit aan.

**f** De ellips heeft een horizontale as die even lang is als de straal van de richtcirkel. Hoe lang is de verticale as?

## Opgave 2

Bekijk de ellips uit **Uitleg 1**.

**a** Bewijs dat uit het feit dat punt $P$ het snijpunt van de middelloodlijn van $FQ$ en straal $MQ$ is, volgt dat $\text{d}(P,c) = |PF|$.

**b** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de ellips in het punt $P$ met $x$-coördinaat $2$ en een positieve $y$-coördinaat.

In de constructie in de uitleg lijkt het er op dat de middelloodlijn van $FQ$ de ellips raakt.

**c** Probeer dit zelf te bewijzen. (Een indirect bewijs gaat het gemakkelijkst, een analytisch bewijs is veel rekenwerk.)

Het centrum van de ellips $e$ is $(0,0)$. Je verschuift de ellips tot het centrum $(3,2)$ is. Er ontstaat een nieuwe ellips $e_2$.

**d** Stel een vergelijking op van $e_2$.

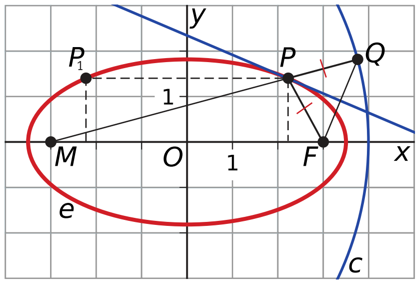
**e** Bereken van deze nieuwe ellips de exacte snijpunten met de coördinaatassen.

Bekijk nu de situatie waarin $M(0,-3)$ het middelpunt is van de richtcirkel met straal 8 en dat $F(0,3)$ het andere brandpunt is.

**f** Welke vergelijking heeft de ellips die de verzameling punten $P$ voorstelt waarvoor $|FP| = \text{d}(P,c)$?

## Uitleg 2

**Bekijk de applet**




Figuur 3.4

Bekijk de ellips met vergelijking $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

De kromme lijkt symmetrisch ten opzichte van de $x$-as en ten opzichte van de $y$-as te zijn. Maar hoe toon je dit aan?

Als de ellips symmetrisch is ten opzichte van de $y$-as, dan betekent dit dat behalve $P(x,y)$ ook zijn spiegelbeeld $P_1(-x,y)$ op de kromme moet liggen. De redenering is zo:

- $P(x,y)$ ligt op de kromme, dus voldoet aan de gegeven vergelijking van de ellips. Maar voldoet $P_1(-x,y)$ ook aan die vergelijking?
- Controleer dit door $P_1$ in te vullen: $\frac{(-x)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

  Omdat $(-x)^2 = x^2$ is dit hetzelfde als $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.
- Hieruit volgt dat $P_1$ op de ellips ligt.

Conclusie: $P(x,y)$ en $P_1(-x,y)$ voldoen beide aan de gegeven vergelijking van de kromme en is symmetrisch ten opzichte van de $y$-as.

### Opgave 3

In **Uitleg 2** wordt de symmetrie van een ellips ten opzichte van de $y$-as bewezen.

**a** Bewijs op dezelfde manier dat deze ellips symmetrisch is ten opzichte van de $x$-as.

**b** Bewijs op dezelfde manier dat deze ellips symmetrisch is ten opzichte van de oorsprong $O(0,0)$ van het assenstelsel.

# Theorie en voorbeelden

## Om te onthouden

Een **ellips** is een kromme die bestaat uit punten $P$ met gelijke afstand tot een punt $F$ als tot een cirkel $c$. Dit punt $F$ heet het **brandpunt** (of focus), de cirkel heet de **richtcirkel**. De ellips ontstaat als $F$ binnen de cirkel ligt. Kies je de assen zo, dat $F = (p,0)$ en $c$ middelpunt $M(-p,0)$ en straal $r$ heeft, dan krijg je als vergelijking voor de ellips:

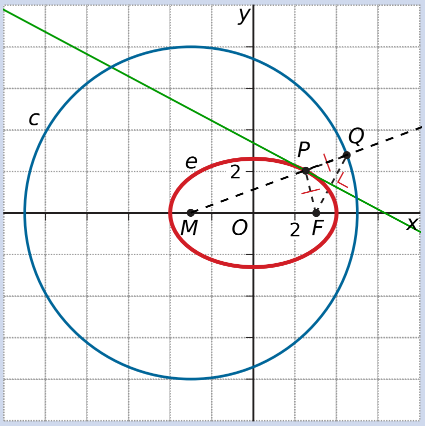
$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$$

waarin $m = 0{,}5r$ en $n^2 = (0{,}5r)^2 - p^2$.
$m$ is de helft van de lengte van het lijnstuk dat de ellips afsnijdt van de symmetrieas door beide brandpunten en $n$ is de helft van de lengte van het lijnstuk dat de ellips afsnijdt van de symmetrieas die daar loodrecht op staat. $m$ is altijd groter dan $n$; zijn beide gelijk, dan vallen de brandpunten samen en heb je een cirkel. Als $n$ groter is dan $m$, dan liggen de brandpunten op de $y$-as.

In de figuur is het brandpunt $F(3,0)$ en het middelpunt van de richtcirkel met straal 8 is $M(-3,0)$. De vergelijking van de ellips is:

$$e : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

Je kunt ook het centrum $C$ van de ellips van $(0,0)$ verschuiven naar $(a,b)$. In de vergelijking wordt $x$ dan vervangen door $x - a$ en $y$ door $y - b$. De ellips is symmetrisch ten opzichte van het centrum $C$.



Figuur 3.5

## Voorbeeld 1

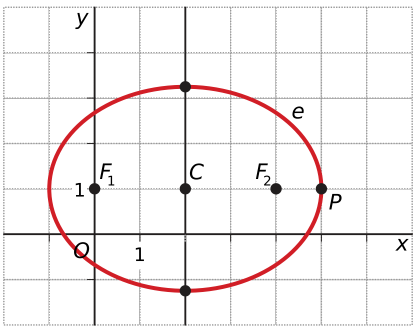
Stel een vergelijking op van de ellips met brandpunten $F_1(0,1)$ en $F_2(4,1)$ die door $P(5,1)$ gaat en construeer deze ellips.

Antwoord

Midden tussen beide brandpunten ligt het symmetriecentrum $C(2,1)$ van de ellips.
De ellips is de kromme van punten die even ver van $F_2$ als van de cirkel met middelpunt $F_1$ en straal $r$ liggen. Nu is $r = |F_1P| + |F_2P| = 5 + 1 = 6$.
De brandpunten liggen op een afstand van $p = 2$ van het centrum $C(2,1)$.
De vergelijking van de ellips is:

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2-2^2} = 1 \text{ en dus } \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1.$$

Voor de constructie van de ellips teken je eerst de brandpunten en de richtcirkel met straal 6 en middelpunt $F_1$. Neem vervolgens een viertal punten $Q$ op het eerste kwart van deze cirkel en construeer daarbij telkens het snijpunt $P$ van straal $F_1Q$ en de middelloodlijn van $F_2Q$. Je vindt zo vier punten $P$ van de ellips. Met behulp van de symmetrie van de ellips kun je daar nog meer punten van de ellips bij maken. Teken vervolgens de ellips door de punten die je hebt gevonden.



Figuur 3.6

### Opgave 4

Bekijk de ellips uit **Voorbeeld 1**.

**a** Laat zien dat de richtcirkel (met middelpunt $F_1$) een straal van 6 moet hebben.

**b** Licht nu toe hoe je de vergelijking van de ellips kunt vinden.

**c** Construeer zelf deze ellips.

### Opgave 5

Een ellips $e$ heeft de brandpunten $O(0,0)$ en $F(8,0)$ en gaat door het punt $P(4,3)$.

**a** Stel een vergelijking van een mogelijke richtcirkel van deze ellips op.

**b** Stel een vergelijking van de ellips zelf op.

**c** In welke punten zijn de raaklijnen aan de ellips horizontaal of verticaal?

### Voorbeeld 2

De brandpunten van de ellips met vergelijking $x^2+4y^2+4x-8y=16$ liggen beide op een lijn evenwijdig aan de $x$-as. Bereken hun coördinaten. Stel ook een vergelijking op van de raaklijnen aan deze ellips voor $x=0$.

Antwoord

Door kwadraat afsplitsen wordt de vergelijking
$(x+2)^2+4(y-1)^2=24$.

Dit kun je schrijven als: $\frac{(x+2)^2}{24}+\frac{(y-1)^2}{6}=1$.

Voor de straal $r$ van de richtcirkel geldt $24=(0{,}5r)^2$ en verder is $6=(0{,}5r)^2-p^2$, waarin $p$ de afstand van een brandpunt tot het symmetriecentrum $(\text{-}2,1)$ van de ellips is. Nu kun je de brandpunten bepalen:

$F_1\left(\text{-}2-\sqrt{18},1\right)$ en $F_1\left(\text{-}2+\sqrt{18},1\right)$

Voor de vergelijkingen van de raaklijnen bepaal je eerst de raakpunten door $x=0$ in de vergelijking in te voeren.
Ga na dat bij $x=0$ hoort $y=1\pm\sqrt{5}$.
De ene raaklijn heeft dan een vergelijking van de vorm $y=ax+1+\sqrt{5}$ en voor de andere geldt $y=ax+1-\sqrt{5}$.
Nu kun je de vergelijkingen van beide raaklijnen opstellen met behulp van de discriminantmethode.

Raaklijn in $\left(0,1-\sqrt{5}\right)$: $y=0{,}1x\sqrt{5}+1-\sqrt{5}$.

Raaklijn in $\left(0,1+\sqrt{5}\right)$: $y=\text{-}0{,}1x\sqrt{5}+1+\sqrt{5}$.

### Opgave 6

Bekijk de ellips met de vergelijking $x^2+4y^2+4x-8y=16$ uit **Voorbeeld 2**.

**a** Ga na dat je door kwadraat afsplitsen de vergelijking van de ellips zo kunt schrijven dat je het centrum ervan kunt aflezen.

**b** Bereken zelf de coördinaten van de brandpunten van deze ellips.

**c** Welk middelpunt heeft de richtcirkel? En hoe groot is de straal ervan?

Bestudeer de manier waarop de vergelijkingen van de raaklijnen aan de ellips voor een bepaalde waarde van $x$ kunnen worden berekend.

**d** Stel met behulp van de discriminantmethode de vergelijkingen van beide raaklijnen in de punten $\left(0,1-\sqrt{5}\right)$ en $\left(0,1+\sqrt{5}\right)$ op.

**e** Stel een vergelijking op van beide raaklijnen aan de ellips voor $x = -4$.

**f** Onderzoek of er punten op de ellips zijn waarin de raaklijn een richtingscoëfficiënt van $1$ heeft.

### Opgave 7

Een ellips heeft twee horizontale raaklijnen met vergelijkingen $y = 1$ en $y = 5$ en twee verticale raaklijnen met vergelijkingen $x = -2$ en $x = 6$.

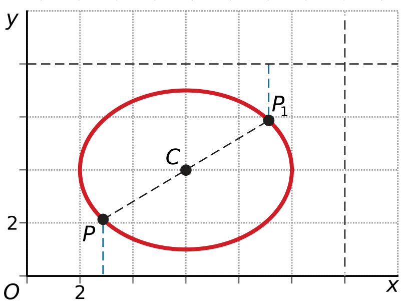
**a** Stel een vergelijking op van deze ellips.

**b** Deze ellips heeft twee raaklijnen die door $O(0,0)$ gaan. Stel daarvan vergelijkingen op. Rond de richtingscoëfficiënten af op drie decimalen.

## Voorbeeld 3

**Bekijk de applet**

De ellips $e$ met vergelijking $\frac{(x-6)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$ is symmetrisch ten opzichte van het punt $C(6,4)$. Bewijs dit.



**Figuur 3.7**

Antwoord

Om dit te bewijzen is een aantal hulplijnen getekend. Daarmee zie je wat de symmetrie ten opzichte van punt $C$ betekent. Voor elk punt $P(x,y)$ op de ellips moet ook het punt $P_1(12-x,8-y)$ op de ellips liggen.
Dit punt moet ook voldoen aan de vergelijking van de ellips. Dat kun je controleren door de coördinaten ervan in te vullen in de vergelijking:

$\frac{(12-x-6)^2}{16}+\frac{(8-y-4)^2}{9}=1$ geeft $\frac{(6-x)^2}{16}+\frac{(4-y)^2}{9}=1$

Aangezien dit hetzelfde is als de gegeven vergelijking voldoet ook $P_1$ eraan. Dit punt ligt dus ook op de ellips.

### Opgave 8

De ellips met vergelijking $\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$ is symmetrisch ten opzichte van de lijn $y=3$.

**a** Toon dit aan.

**b** Welke andere symmetrieas heeft de ellips? Bewijs ook die symmetrie.

### Opgave 9

De ellips met vergelijking $\frac{(x+2)^2}{8} + \frac{(y-3)^2}{5} = 1$ is symmetrisch ten opzichte van het punt $C(-2,3)$. Bewijs dit.

## Verwerken

### Opgave 10

Stel de vergelijking op van de ellips.

**a** $e$ is een ellips met brandpunten $(-3,2)$ en $(5,2)$ die door het punt $(1,5)$ gaat.

**b** $k$ is een ellips waarvan de richtcirkel de vergelijking $x^2 + y^2 = 9$ heeft en het brandpunt $F(0,2)$ is.

### Opgave 11

Gegeven zijn de ellips $x^2 + 4y^2 = 4x + 8y - 4$ en de parabool $(x-2)^2 = 4y$.

**a** Bereken van de ellips exact de coördinaten van de brandpunten.

**b** Bewijs de symmetrie van de ellips ten opzichte van het punt $C$ dat midden tussen beide brandpunten ligt.

**c** Bereken algebraïsch de snijpunten van beide krommen.

### Opgave 12

Een ellips heeft vergelijking $16x^2 + y^2 = 32$.

**a** Leg uit waarom de brandpunten van deze ellips op de $y$-as moeten liggen.

**b** Bereken de exacte coördinaten van de brandpunten van deze ellips.

Deze ellips heeft twee raaklijnen die door het punt $(0,8)$ gaan.

**c** Stel vergelijkingen van deze raaklijnen op.

### Opgave 13

De ellips $e$ is gegeven door de vergelijking $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$. Er zijn twee raaklijnen door $(0,2)$ die $e$ raken in de punten $A$ en $B$.

**a** Stel de vergelijkingen op van de twee raaklijnen.

**b** Bereken de exacte lengte van lijnstuk $AB$.

### Opgave 14

Elke ellips met symmetrieassen evenwijdig aan de coördinaatassen kan ontstaan uit de ellips met standaardvorm $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$.

**a** Noem een willekeurig punt op de ellips $P$. Gebruik $|F_1P| + |F_2P| = r$ en de uitdrukkingen voor $m$ en $n$ om aan te tonen dat de lengtes van de symmetrieassen $2m$ en $2n$ zijn.

**b** Punt $P(p,q)$ is een punt van deze ellips. Bewijs dat de lijn met vergelijking $\frac{p}{m^2} \cdot x + \frac{q}{n^2} \cdot y = 1$ de raaklijn in $P$ aan deze ellips is.

## Toepassen

### Opgave 15: Scheve ellips

Een ellips hoeft geen symmetrieassen te hebben die evenwijdig zijn aan de $x$-as of de $y$-as. Neem bijvoorbeeld een ellips die ontstaat uit de richtcirkel $c : x^2 + y^2 = 25$ en brandpunt $F(2,2)$.

**a** Construeer deze ellips.

**b** Noem $Q$ een punt op de richtlijn en $P(x,y)$ het bijbehorende punt op de ellips.

Stel een vergelijking op van deze ellips.

**c** Bereken de coördinaten van de punten op $p$ waarin de raaklijn evenwijdig loopt aan de $x$-as of de $y$-as.

## Testen

### Opgave 16

Een ellips $e$ is gegeven door de vergelijking $x^2 + 8y^2 = 16$.

**a** Bereken de coördinaten van de brandpunten van $e$ en stel een vergelijking op van een mogelijke richtcirkel van $e$.

**b** Er zijn twee raaklijnen aan de ellips die door het punt $(0,2)$ gaan. Stel de vergelijking van de lijn op die door de twee raakpunten van de raaklijnen aan de ellips gaat.

**c** In welke punten van $e$ heeft de raaklijn een richtingscoëfficiënt van -2? Bereken de exacte coördinaten van die punten.

### Opgave 17

Een ellips heeft de vergelijking $\frac{x^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$. De richtcirkel van deze ellips heeft de vergelijking $x^2 + y^2 = 36$.

**a** Bepaal de brandpunten en construeer de ellips.

**b** Bewijs de symmetrie van deze ellips ten opzichte van het punt dat midden tussen brandpunt $F$ en het middelpunt van de richtcirkel ligt.

**c** Er zijn twee lijnen met vergelijking $y = ax - 2$ die de ellips raken. Bereken de mogelijke waarden van $a$ exact.

# 1.4 Hyperbolen

## Inleiding

De technieken die je bij ellipsen hebt geleerd zijn ook bruikbaar als het brandpunt buiten de richtcirkel ligt. Je krijgt dan alleen een kromme die er totaal anders uitziet en niet met een touwtje van vaste lengte en twee spijkers is te construeren. Hij heeft namelijk asymptoten. Deze kromme heet hyperbool.

### Je leert in dit onderwerp

- een hyperbool construeren;
- een hyperbool beschrijven met een vergelijking;
- een raaklijn aan een hyperbool opstellen met de discriminantmethode.

### Voorkennis

- werken met vergelijkingen van lijnen, cirkels en parabolen;
- vergelijkingen van raaklijnen aan cirkels, parabolen en ellipsen opstellen;
- snijpunten en afstanden berekenen.

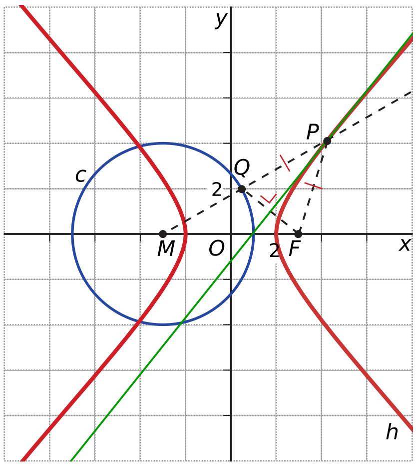
## Verkennen

### Opgave V1

Beweeg punt $Q$ over cirkel $c$ en je ziet dat punt $P$ een kromme doorloopt. Die kromme heet een hyperbool als de straal van de cirkel kleiner is dan $|MF|$.

**a** Welke eigenschap hebben alle punten $P$ van de hyperbool?

**b** Hoe zou je een vergelijking van de hyperbool kunnen opstellen?

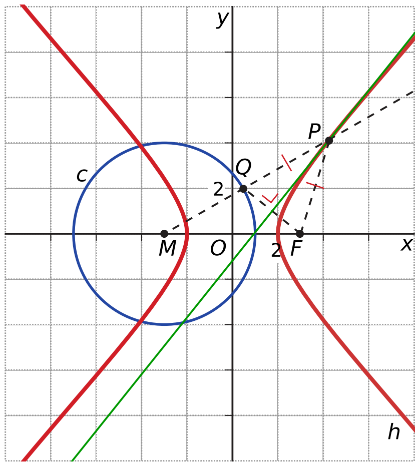



**Figuur 4.1**

# Uitleg

**Bekijk de applet**

De hyperbool $h$ is een kromme die bestaat uit alle punten $P$ die een even grote afstand hebben tot een vast punt $F$ als tot een vaste cirkel $c$. Je construeert die punten door steeds de middelloodlijn van $FQ$ te snijden met het verlengde van straal $MQ$ omdat $F$ nu buiten de cirkel ligt. Dit vaste punt $F$ heet het brandpunt (of focus), de vaste cirkel heet de richtcirkel.




Figuur 4.2

Voor elk punt $P(x,y)$ van de hyperbool moet gelden $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Je krijgt de andere tak van de hyperbool als de richtcirkel middelpunt $F(3,0)$ is en als $M(-3,0)$ het brandpunt is. De rol van de punten $M$ en $F$ is, als je beide hyperbooltakken als één figuur ziet, verwisselbaar. Daarom zeg je wel dat zo'n hyperbool twee brandpunten heeft, namelijk $M$ en $F$. Zo'n volledige hyperbool heeft dezelfde symmetrieën als de ellips en je kunt die ook op dezelfde manier aantonen.

### Opgave 1

Bekijk de constructie van de hyperbool uit de **Uitleg**.

**a** Leg uit waarom nu geldt $|MP| - |PF| = 4$.

**b** Neem $P(x,y)$ als punt van de hyperbool. Welke vergelijking in $x$ en $y$ volgt uit $|MP| - |PF| = 4$?

**c** Laat zien dat je die vergelijking kunt schrijven als $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

**d** Het getal $4$ kun je afleiden uit de richtcirkel door het kwadraat van de halve straal te nemen. Toon dit aan.

**e** Het getal $5$ worden afgeleid uit het kwadraat van de halve straal van de richtcirkel en het kwadraat van de afstand van $F$ tot de oorsprong $O(0,0)$, het centrum van de hyperbool. Toon dit aan.

### Opgave 2

Bekijk de constructie van de hyperbool uit de **Uitleg**.

**a** Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan de hyperbool die evenwijdig zijn aan de $y$-as.

**b** Er gaan twee raaklijnen aan de richtcirkel door het brandpunt $F$. Noem de raakpunten $R_1$ en $R_2$.

Waarom zijn de middelloodlijnen van $R_1F$ en $R_2F$ de asymptoten van de hyperbool? Toon ook aan dat de vergelijkingen van deze asymptoten voldoen aan $y = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot x$ en $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot x$.

Het centrum van de hyperbool $h$ is $(0,0)$. Je verschuift de hyperbool tot het centrum $(3,2)$ is. Er ontstaat een nieuwe hyperbool $h_2$.

**c** Stel de vergelijkingen op van $h_2$ en zijn asymptoten.

**d** Bereken van deze nieuwe hyperbool de exacte snijpunten met de coördinaatassen.

### Opgave 3

Bekijk de hyperbool in de **Uitleg**.

**a** Bewijs dat deze hyperbool symmetrisch is ten opzichte van de $x$-as.

**b** Bewijs op dezelfde manier dat deze hyperbool symmetrisch is ten opzichte van de oorsprong $O(0,0)$ van het assenstelsel.

**c** Welke twee symmetrieassen heeft de hyperbool met vergelijking $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$?

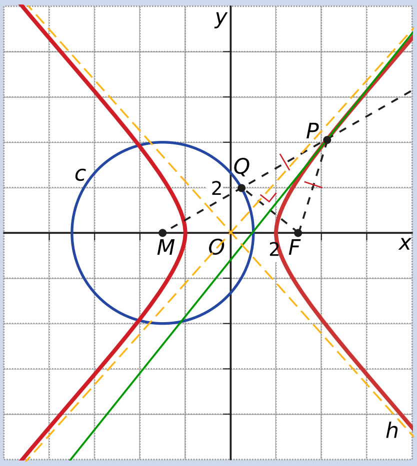
## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

**Bekijk de applet.**

De ellips en de **hyperbool** zijn krommen die bestaan uit punten $P$ met gelijke afstand tot een punt $F$ als tot een cirkel $c$. Dit punt $F$ heet het **brandpunt** (of focus), de cirkel heet de **richtcirkel**. De ellips ontstaat als $F$ binnen de cirkel ligt, de hyperbool als $F$ er buiten ligt. Kies je de assen zo, dat $F = (p,0)$ en $c$ middelpunt $M(\text{-}p,0)$ en straal $r$ heeft, dan krijg je als vergelijking voor de hyperbool $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ waarin $m = 0{,}5r$ en $n^2 = p^2 - (0{,}5r)^2$.

De hyperbool heeft twee scheve asymptoten met vergelijkingen $y = \text{-}\frac{n}{m} \cdot x$ en $y = \frac{n}{m} \cdot x$.



Figuur 4.3

In de figuur is $F(3,0)$ het brandpunt en de richtcirkel heeft een straal van 4 en middelpunt $M(\text{-}3,0)$. De vergelijking van de hyperbool is:

$$h : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

De vergelijkingen van de scheve asymptoten zijn $y = \text{-}\frac{1}{2}\sqrt{5}x$ en $y = \frac{1}{2}\sqrt{5}x$.

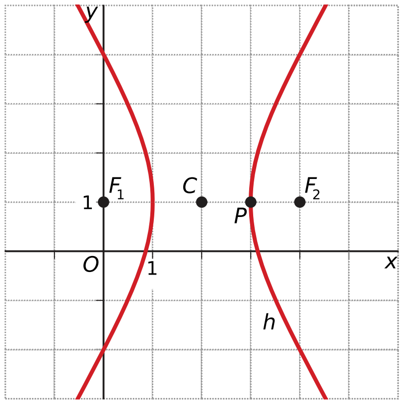
Je kunt ook het centrum $C$ van zowel de hyperbool als de ellips van $(0,0)$ verschuiven naar $(a,b)$. In hun vergelijkingen wordt dan $x$ vervangen door $x - a$ en $y$ door $y - b$. Beide krommen zijn symmetrisch ten opzichte van hun centrum $C$.

## Voorbeeld 1

Stel een vergelijking op van de hyperbool met brandpunten $F_1(0,1)$ en $F_2(4,1)$ die door het punt $P(3,1)$ gaat.

Antwoord

Midden tussen beide brandpunten ligt het symmetriecentrum $C(2,1)$ van de hyperbool.
De hyperbool is de kromme van punten die even ver van $F_2$ als van de cirkel met middelpunt $F_1$ en straal $r$ liggen. Nu is $r = |F_1P| - |F_2P| = 3 - 1 = 2$.
De brandpunten liggen een afstand van $p = 2$ van het centrum $C$.
De vergelijking van de hyperbool wordt daarom:
$\frac{(x-2)^2}{1^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2-1^2} = 1$ en $(x-2)^2 - \frac{(y-1)^2}{3} = 1$.




**Figuur 4.4**

### Opgave 4

Bekijk de hyperbool in **Voorbeeld 1**.

**a** Laat zien dat de richtcirkel (met middelpunt $F_1$) een straal van 2 moet hebben.

**b** Licht nu toe hoe je de vergelijking van de hyperbool kunt vinden.

**c** Construeer de hyperbool.

### Opgave 5

De hyperbool met vergelijking $\frac{(x-6)^2}{16} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ is symmetrisch ten opzichte van de lijn $y = 4$.

**a** Toon dit aan.

**b** Welke andere symmetrieas heeft de hyperbool? Bewijs ook die symmetrie.

## Voorbeeld 2

De brandpunten van de hyperbool met vergelijking $3x^2 - y^2 + 4y = 16$ liggen beide op een lijn evenwijdig aan de $x$-as. Bereken hun coördinaten. Stel ook een vergelijking op van de raaklijnen aan deze hyperbool voor $x = 4$.

Antwoord

Door kwadraat afsplitsen wordt de vergelijking $3x^2 - (y-2)^2 = 12$.

Dit kun je schrijven als: $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$. Bepaal de brandpunten: $F_1(-4,2)$ en $F_2(4,2)$

Ga na dat bij $x = 4$ hoort $y = -4 \vee y = 8$.
Voor een vergelijking van de raaklijn in bijvoorbeeld $(4,8)$ moet je de richtingscoëfficiënt nog berekenen. Dit kan met de discriminantmethode. Zo kun je de vergelijkingen van beide raaklijnen opstellen. Je vindt dan als raaklijnen $y = -2x + 4$ en $y = 2x$.

### Opgave 6

Bekijk de hyperbool met vergelijking $3x^2 - y^2 + 4y = 16$ in **Voorbeeld 2**.

**a** Ga na dat je door kwadraat afsplitsen de vergelijking van de hyperbool zo kunt schrijven dat je het centrum ervan kunt aflezen.

**b** Toon aan dat $F_1(-4,2)$ en $F_2(4,2)$.

**c** Geef een vergelijking van de richtcirkel.

**d** Stel zelf de vergelijkingen van de raaklijnen op aan de hyperbool voor $x = 4$.

**e** Onderzoek of er punten op de hyperbool zijn waarin de raaklijn een richtingscoëfficiënt van $1{,}5$ heeft.

### Opgave 7

Gegeven is de hyperbool $5x^2 - 20x - y^2 = 5$.

**a** Bereken exact de coördinaten van de brandpunten van de hyperbool.

**b** In welke punten is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de hyperbool gelijk aan $2{,}5$?

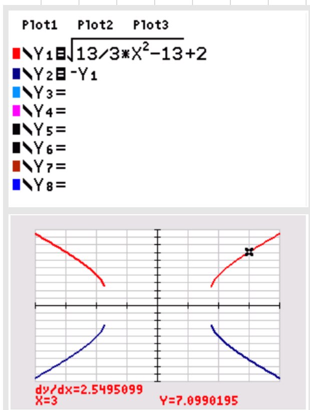
### Voorbeeld 3

In **Voorbeeld 2** zag je hoe je raaklijnen opstelt aan een hyperbool met de discriminantmethode. Er bestaat echter ook een manier om dit met behulp van differentiëren te doen.

Neem de hyperbool met vergelijking $13x^2 - 3y^2 + 12y = 51$.

Om de raaklijn in punt $P\left(3, 2 + \sqrt{26}\right)$ op te stellen herleid je de vergelijking van naar de $y = \ldots$ vorm:

$$\begin{aligned} 13x^2 - 3(y-2)^2 &= 39 \\ (y-2)^2 &= \tfrac{13}{3}x^2 - 13 \\ y &= \pm\sqrt{\tfrac{13}{3}x^2 - 13} + 2 \end{aligned}$$




Figuur 4.5

Je hebt nu de vergelijking van de kromme als combinatie van twee functies geschreven. Je kunt met je grafische rekenmachine de grafiek maken, hoewel je ziet dat die hem niet compleet weergeeft. Dat komt omdat er in de buurt van $x = \pm\sqrt{3}$ de punten van de hyperbool nogal boven elkaar liggen en dat mag bij een functie niet.

Door symmetrie zie je dat het punt $P$ op $y = \sqrt{\frac{13}{3}x^2 - 13} + 2$ ligt, dus daar reken je mee verder. De helling op $x = 3$ kun je berekenen met de afgeleide $y'$, die je kunt bepalen met je grafische rekenmachine of door $y = f(x)$ te differentiëren (daarvoor moet je wel alle differentieerregels kennen, die leer je bij wiskunde B).

Voor $x = 3$ is de helling gelijk aan $y'(3) \approx 2{,}55$.

De raaklijn in $P$ heeft de vorm $y = ax + b$ met $a \approx 2{,}55$.
Stel verder zelf de gevraagde vergelijking van de raaklijn op.

### Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**.

**a** Stel zelf de vergelijkingen op van de raaklijnen aan de hyperbool voor $x = 3$.

**b** Hoe kun je aan de functies zien waar de raaklijn aan de hyperbool verticaal is?

**c** Gebruik de gevonden functies om de raaklijnen op te stellen aan de hyperbool voor $y = 5$.

### Opgave 9

Gegeven is de hyperbool met vergelijking $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. Bepaal de raaklijnen aan de hyperbool voor $x = -4$.

## Verwerken

### Opgave 10

Stel een vergelijking op van kromme $k$.

**a** $k$ is een hyperbool die door het punt $(5,8)$ gaat en de brandpunten $(-3,2)$ en $(5,2)$ heeft.

**b** $k$ is een hyperbool waarvan de richtcirkel de vergelijking $x^2 + y^2 = 9$ heeft en het brandpunt $F(4,0)$ is.

### Opgave 11

Gegeven is de hyperbool door $x^2 - 4y^2 = 4x - 8y - 4$.

**a** Bereken van de hyperbool de coördinaten van de brandpunten.

**b** Bewijs de symmetrie van de hyperbool ten opzichte van het punt $C$ dat midden tussen beide brandpunten ligt.

### Opgave 12

Gegeven zijn de ellips $e : x^2 + 4y^2 = 16$ en de hyperbool $h : 4x^2 - y^2 = 16$.

**a** Onderzoek of beide krommen dezelfde brandpunten hebben.

**b** Toon aan dat de vier snijpunten van deze krommen een rechthoek vormen en bereken exact de oppervlakte ervan.

**c** Bereken exact de lengte van het lijnstuk dat de ellips uit elke asymptoot van de hyperbool wegsnijdt.

### Opgave 13

De hyperbool $h$ is gegeven door de vergelijking $x^2 - y^2 = 1$.

**a** Bereken de snijpunten van $h$ met de assen.

**b** Bereken de exacte coördinaten van de brandpunten van $h$.

**c** Stel exacte vergelijkingen op van de raaklijnen aan de hyperbool in de punten van $h$ die liggen op de lijn $x = 2$. Bereken ook algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van beide raaklijnen.

### Opgave 14

Elke hyperbool waarvan beide takken een horizontale symmetrieas hebben kan ontstaan uit de hyperbool met standaardvorm $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$.

**a** Je kunt de asymptoten van de hyperbool zien als lijnen die de hyperbool in het oneindige raken. Bewijs dat de lijnen $y = \frac{n}{m} \cdot x$ en $y = -\frac{n}{m} \cdot x$ twee asymptoten van deze hyperbool zijn.

**b** Punt $P(p,q)$ is een punt van deze hyperbool. Bewijs met de discriminantmethode dat de lijn met vergelijking $\frac{p}{m^2} \cdot x - \frac{q}{n^2} \cdot y = 1$ de raaklijn in $P$ aan deze hyperbool is.

### Opgave 15

Gegeven de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$ en de cirkel $x^2 + y^2 = 3$. Toon aan dat de hyperbool de cirkel niet loodrecht snijdt.

## Toepassen

### Opgave 16: Scheve hyperbool

Een hyperbool hoeft geen symmetrieassen te hebben die evenwijdig zijn aan de $x$-as of de $y$-as. Neem bijvoorbeeld een hyperbool die ontstaat uit de richtcirkel $c : x^2 + y^2 = 1$ en brandpunt $F(2,2)$.

**a** Construeer deze ellips.

**b** Noem $Q$ een punt op de richtlijn en $P(x,y)$ het bijbehorende punt op de hyperbool.

Stel een vergelijking op van deze hyperbool.

**c** Bereken de vergelijkingen van de twee asymptoten van de hyperbool.

## Testen

### Opgave 17

Gegeven is de hyperbool $h$ met vergelijking $3x^2 - y^2 - 12x + 6y = 0$.

**a** Bereken beide brandpunten en de straal van de richtcirkel van deze hyperbool.

**b** Construeer $h$.

**c** Stel exacte vergelijkingen op van de twee asymptoten van deze hyperbool.

Door de drie snijpunten van deze hyperbool met de beide coördinaatassen en door het punt $P(6,3)$ gaat een ellips $e$.

**d** Stel een vergelijking van $e$ op.

### Opgave 18

Een tak van een hyperbool $h$ wordt geconstrueerd met behulp van de richtcirkel $x^2 + (y-2)^2 = 4$ en brandpunt $F(0,5)$.

**a** Stel een vergelijking op van deze hyperbool.

**b** Bewijs de symmetrie van deze hyperbool ten opzichte van het punt dat midden tussen $F$ en het middelpunt van de richtcirkel ligt.

**c** Er zijn twee lijnen met vergelijking $y = ax + 3$ die de hyperbool raken. Bereken exact de mogelijke waarden van $a$ met de discriminantmethode.

# 1.5 Hoeken

## Inleiding

Bij veel meetkundige berekeningen spelen hoeken, afstanden en lengtes een grote rol. Denk maar eens aan het ontwerp van een gebouw of een brug of viaduct. Of aan het ontwerp van veel gebruiksvoorwerpen.
Vaak wordt daarbij gebruik gemaakt van technische tekenpakketten. Daarin stikt het van de wiskunde: programma's als AutoCAD en Adobe's Illustrator kunnen niet zonder een flinke portie ingeprogrammeerde wiskunde. De analytische aanpak is daarin onontbeerlijk; elk plaatje wordt berekend vanuit posities (coördinaten), richtingen en afstanden.
Misschien heb je bij wiskunde B al geleerd hoe je hoeken en afstanden berekent. Dan kun je met grote stappen door dit onderdeel heen.

**Figuur 5.1**

### Je leert in dit onderwerp

- de hoek tussen twee lijnen berekenen;
- de hoek tussen een lijn en een kromme of tussen twee krommen berekenen;
- gebruik maken van de loodrechte stand van twee lijnen.

### Voorkennis

- werken met vergelijkingen van (rechte en kromme) lijnen in het platte vlak;
- het hellingsgetal berekenen van een lijn door twee punten;
- snijpunten van rechte en/of kromme lijnen berekenen.

## Verkennen

### Opgave V1

Gegeven zijn de lijnen $l$: $2x + 4y = 9$ en $m$: $y = 6 + x$.

**a** Teken deze twee lijnen (in GeoGebra) en meet de hoek tussen beide.

**b** Hoe kun je deze hoek berekenen vanuit de gegeven vergelijkingen?

## Uitleg

### Bekijk de applet

Bekijk de twee lijnen $l: y = 0{,}25x + 1$ en $m: y = 0{,}5x$ in het cartesisch assenstelsel.

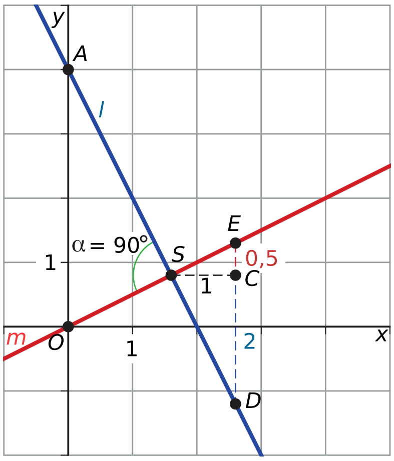
Om de hoek tussen beide lijnen te berekenen stel je bij beide eerst de hellingshoek vast.
Dat is de hoek die deze lijn maakt met de positieve $x$-as.
Daarbij kies je de hoek tussen -90° en 90°.
De hellingshoek bereken je vanuit het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, van de lijn. Daarvoor schrijf je de vergelijkingen van beide lijnen in de vorm $y = ax + b$ waarin $a$ de richtingscoëfficiënt is. Je vindt:

- $l: y = 0{,}25x + 1$ heeft een richtingscoëfficiënt van 0,25. De hellingshoek $\beta$ volgt uit $\tan(\beta) = 0{,}25$ en is dus $\beta \approx 14{,}0°$. Je noteert dit ook wel als $\arctan(0{,}25) \approx 14{,}04°$. De grafische rekenmachine kent hiervoor de functie $\tan^{-1}$.
- $m: y = 0{,}5x$ heeft een richtingscoëfficiënt van 0,5. De hellingshoek $\alpha$ volgt uit $\tan(\alpha) = 0{,}5$ en is dus $\alpha = \arctan(0{,}5) \approx 26{,}57°$.

De hoek tussen beide lijnen vind je door de twee hellingshoeken van elkaar af te trekken: $26{,}57° - 14{,}04° \approx 12{,}5°$.

Lijn $l$ is er één van de serie $l_p: y = px + 1$.

Bij $p = -2$ maken de lijnen $m$ en $l_p$ een hoek van 90°, omdat het product van de richtingscoëfficiënten van de lijnen gelijk is aan $-2 \cdot 0{,}5 = -1$.




Figuur 5.2

### Opgave 1

**a** Bereken in één decimaal de hoek tussen $l: y = \frac{1}{2}x$ en $k: x - 3y = 6$.

**b** Bereken de hoek tussen $l: y = \frac{1}{2}x$ en $k: x + 3y = 6$.

**c** Moet je bij het berekenen van de hoek tussen twee lijnen altijd de twee hellingshoeken van elkaar aftrekken?

### Opgave 2

Niet alleen rechte lijnen kunnen een hoek met elkaar maken, maar ook een lijn en een cirkel. Neem de lijn $l$: $y = x - 4$ en de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$.

**a** Bereken de snijpunten $A$ en $B$ van $l$ en $c$.

**b** Neem snijpunt $A$ en stel daarin een vergelijking op van de raaklijn aan de cirkel.

Onder de hoek tussen lijn $l$ en cirkel $c$ versta je de hoek tussen $l$ en de raaklijn in $A$.

**c** Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

**d** Waarom is de hoek tussen lijn $l$ en cirkel $c$ bij punt $B$ even groot?

### Opgave 3

Ook twee krommen kunnen hoeken met elkaar maken.

**a** Wat versta je onder de hoek tussen twee cirkels?

**b** Kun je spreken van de hoek tussen twee ellipsen? Wanneer wel en wanneer niet?

**c** Hoeveel verschillende hoeken kunnen een lijn en een parabool met elkaar maken?

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

**Bekijk de applet**

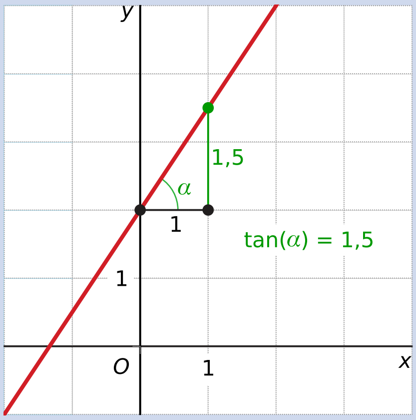
Elke rechte lijn in een cartesisch assenstelsel heeft een vergelijking van de vorm $ax + by = c$.

Dit schrijf je als $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ mits $b \neq 0$.

Elke lijn, behalve een lijn evenwijdig aan de $y$-as, heeft dus een **richtingscoëfficiënt** (ook wel **hellingsgetal**) $r = -\frac{a}{b}$ en dit is te schrijven in de vorm $y = rx + q$.

Bij de richtingscoëfficiënt $r$ hoort een **hellingshoek** $\alpha$, de hoek die de lijn met de positieve $x$-as maakt. Deze hoek ligt tussen $-90°$ en $90°$.
Er geldt: $\tan(\alpha) = r$.
Met behulp van deze hellingshoeken bereken je de hoek die twee lijnen met elkaar maken.
Er geldt:

Als voor twee lijnen $l$ en $m$ met richtingscoëfficiënten $r_l$ en $r_m$ geldt dat $r_l \cdot r_m = -1$ dan staan beide lijnen loodrecht op elkaar.
Staan omgekeerd twee lijnen $l$ en $m$ met richtingscoëfficiënten $r_l$ en $r_m$ loodrecht op elkaar, dan geldt $r_l \cdot r_m = -1$.



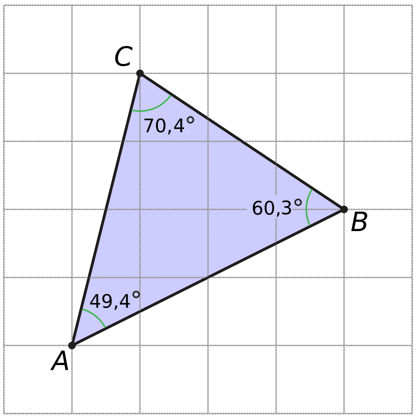
Figuur 5.3

De hoek tussen een lijn en een kromme is gelijk aan de hoek tussen deze lijn en de raaklijn aan de kromme in hun snijpunt. Als er meerdere snijpunten zijn dan kunnen er meerdere verschillende hoeken zijn.
De hoek tussen twee krommen is de hoek tussen de raaklijnen aan die krommen in hun snijpunt. Wederom, als er meerdere snijpunten zijn dan kunnen er meerdere verschillende hoeken zijn.

## Voorbeeld 1

**Bekijk de applet**

Bekijk driehoek $ABC$.
Laat zien hoe de hoeken berekend worden.



Figuur 5.4

Antwoord

Begin met een assenstelsel in te voeren. Stel dat $A$ de oorsprong is en dat de assen evenwijdig zijn aan de roosterlijnen. Lees de coördinaten af: $A(0,0)$, $B(4,2)$ en $C(1,4)$.

De richtingscoëfficiënten van de lijnen $AC$, $AB$ en $BC$, zijn respectievelijk $4$, $\frac{1}{2}$ en $-\frac{2}{3}$.

De hellingshoek van lijn $AC$ met de $x$-as is $\arctan(4) \approx 76{,}0°$. Op dezelfde manier vind je de hellingshoeken van de andere lijnen. Met behulp van deze hellingshoeken kun je de hoeken van de driehoek berekenen:

De hoek tussen de lijnen $AC$ en $AB$ is

$\arctan(4) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 49{,}4°$, dit is ook de grootte van $\angle A$.

Op dezelfde manier vind je dat

$\angle B = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 60{,}3°$.

$\angle C = 180° - \angle A - \angle B \approx 70{,}3°$

### Opgave 4

Bekijk driehoek $ABC$ in **Voorbeeld 1**.

**a** Bereken zelf in twee decimalen nauwkeurig de hoeken van de gegeven driehoek $ABC$.

**b** $\angle C$ is uitgerekend door gebruik te maken van de hoekensom van een driehoek. Je kunt deze hoek ook uitrekenen door de hoek tussen de lijnen $AC$ en $BC$ te berekenen. Laat zien dat je dan op dezelfde hoek uitkomt.

**c** Oefen als dat nodig is met andere driehoeken door in de applet de hoekpunten te verplaatsen.

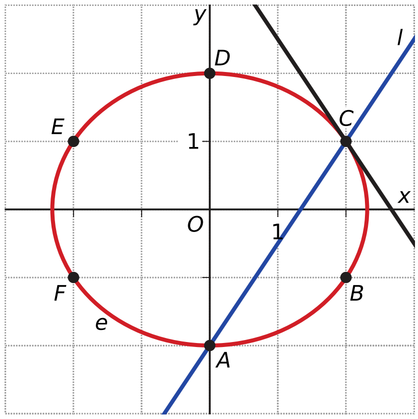
### Opgave 5

Gegeven zijn de punten $A(-1,2)$, $B(3,4)$ en $C(2,8)$. Bereken in twee decimalen de hoeken van driehoek $ABC$.

## Voorbeeld 2

**Bekijk de applet**

Op de ellips liggen zes roosterpunten, namelijk de punten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ en $F$. De lijn $l$ die door de punten $A$ en $C$ gaat, maakt twee verschillende hoeken met deze kromme.
Bereken die hoeken.



**Figuur 5.5**

Antwoord

Ga na dat de ellips de vergelijking $3x^2 + 4y^2 = 16$ heeft (gebruik de roosterpunten waar de ellips door gaat).
De lijn $l$ heeft als vergelijking $y = 1{,}5x - 2$ en gaat door $A(0,\text{-}2)$ en $C(2,1)$.

De hoek in $A(0,\text{-}2)$ is de hoek tussen $l$ en de raaklijn in dit punt aan de ellips. Deze raaklijn heeft de vergelijking $y = \text{-}2$ en een richtingscoëfficiënt van $0$.
Bij $l$ geldt voor richtingshoek $\alpha_l$ dat $\tan(\alpha_l) = 1{,}5$ en dus $\alpha_l \approx 56°$.
Bij de raaklijn hoort een richtingshoek $\alpha_r = 0°$.
De hoek tussen de ellips en lijn $l$ is in $A$ dus ongeveer $56°$.

De hoek in $C(2,1)$ is de hoek tussen $l$ en de raaklijn in dit punt aan de ellips. Deze raaklijn heeft de vergelijking $y - 1 = a(x - 2)$ en met de discriminantmethode vind je $a = \text{-}1{,}5$.
Bij $l$ hoort een richtingshoek van $\alpha_l \approx 56{,}3°$.
Bij de raaklijn hoort een richtingshoek $\alpha_r \approx \text{-}56{,}3°$.
$56{,}3° - \text{-}56{,}3° = 112{,}6°$, dus de hoek tussen de ellips en lijn $l$ is in $C$ ongeveer $180° - 112° = 67°$.

### Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

**a** Lijn $l$ gaat door $A$ en $C$. Stel de vergelijkingen van ellips $e$ en lijn $l$ op.

**b** Stel de vergelijking van de raaklijn aan $e$ in punt $C$ op en bereken de hoek in twee decimalen nauwkeurig tussen $l$ en $e$ in dit punt.

**c** Lijn $k$ gaat door $A$ en $B$. Stel de vergelijking van de raaklijn aan $e$ in $B$ op en bereken de hoek in graden nauwkeurig tussen $k$ en $e$ in dit punt.

### Opgave 7

Bij het opstellen van de vergelijking van een raaklijn aan een cirkel kun je gebruikmaken van het feit dat zo'n lijn loodrecht staat op de straal naar het raakpunt. Neem bijvoorbeeld de cirkel $c$: $x^2 + y^2 = 17$ en de lijn $l$: $x + 2y = 6$.

**a** Het punt $A$ is het roosterpunt dat zowel op $l$ als op $c$ ligt. Bereken de coördinaten van $A$.

**b** Bepaal de richtingscoëfficiënt van de lijn waarop de straal naar $A$ ligt.

**c** Stel de vergelijking van de raaklijn aan $c$ in $A$ op en bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen $l$ en $c$ in dit punt.

**d** Waarom kun je bij een ellips geen gebruikmaken van de loodrechte stand op een straal vanuit het symmetriecentrum van de ellips naar het raakpunt bij het opstellen van de vergelijking van een raaklijn?

## Verwerken

### Opgave 8

Bereken de hoek tussen de lijnen $l$ en $m$. Rond indien nodig af op gehele graden.

**a** $l: y = -3x + 2$ en $m: 4x - 2y = 9$

**b** $l: x + y = 6$ en $m: 3x + 4y = 8$

**c** $l: 7x - 3y = 42$ en $m: 3x + 7y = 35$

### Opgave 9

Lijn $l$ gaat door het punt $(120,31)$ en staat loodrecht op lijn $m$ met vergelijking $25x - 40y = 167$.

**a** Stel de vergelijking op van lijn $l$.

**b** Staan de lijnen $p: -30x + 20y = 33$ en $q: 2x = 100 - 3y$ loodrecht op elkaar?

### Opgave 10

Een lijn $l$ snijdt de $x$-as in $A(3,0)$ onder een hoek van $60°$. Stel de mogelijke exacte vergelijkingen op van lijn $l$.

### Opgave 11

Gegeven is driehoek $ABC$ met $A(0,2)$, $B(5,4)$ en $C(2,5)$.

**a** Bereken de drie hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.

**b** Stel een vergelijking op van lijn $p$ door $C$ loodrecht op $AB$.

**c** $D$ is het snijpunt van lijn $p$ met de lijn $AB$. Bereken exact de coördinaten van $D$.

**d** De lengte van de hoogtelijn $CD$ is de hoogte van driehoek $ABC$ als $AB$ als basis wordt genomen. Bereken de oppervlakte van driehoek $ABC$ met behulp van hoogte $CD$.

**e** Geef een andere manier waarop de oppervlakte van driehoek $ABC$ te berekenen is.

### Opgave 12

Gegeven is de parabool $p$: $y^2 = 4x + 8$ en de lijn $l$: $x - y = -2$.

**a** Bereken de twee hoeken die lijn $l$ met de parabool $p$ maakt in gehele graden.

**b** Bereken de hoek die parabool $p$ maakt met de cirkel $c$: $x^2 + y^2 = 5$ in gehele graden.

### Opgave 13

Gegeven is de cirkel $c$ met middelpunt $O(0,0)$ en straal $\sqrt{17}$. De lijn $l: -3x + 5y = p$ snijdt deze cirkel in de punten $A$ en $B$.

**a** Gegeven is dat $|AB| = \sqrt{34}$. Bepaal $p$.

**b** Neem $p = 17$. Bewijs met behulp van analytische meetkunde dat de lijn door $O$ en het midden van $AB$ loodrecht staat op $l$.

**c** Beschouw nu het algemene geval van een cirkel met straal $r$, en een lijn die de cirkel snijdt in twee punten $A$ en $B$. Bewijs met behulp van synthetische meetkunde dat de middelloodlijn van $AB$ altijd door het middelpunt van de cirkel gaat.

## Toepassen

### Opgave 14: De conchoïde van Nicomedes

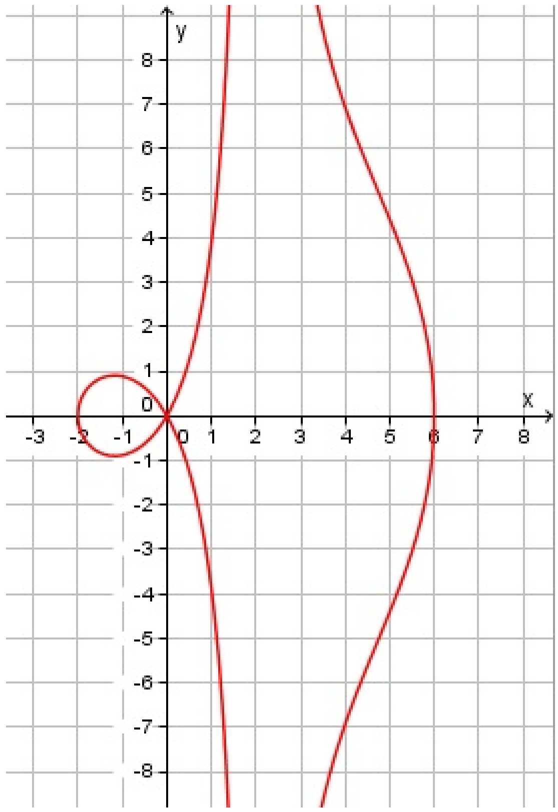
Een voorbeeld van een conchoïde is de kromme $k$ die bestaat uit alle punten $(x,y)$ die voldoen aan de vergelijking $\left(x^2 + y^2\right)(x - 2)^2 = 16x^2$.

**a** Welke waarden kunnen $x$ en $y$ aannemen?

**b** Bereken de coördinaten van snijpunten van $k$ met de assen.

**c** Bereken de coördinaten van de punten van $k$ waarin de raaklijn evenwijdig is met de $y$-as.

**d** Bereken de hoek waaronder beide raaklijnen aan $k$ in $O(0,0)$ elkaar snijden.




Figuur 5.6

### Opgave 15: Scheve parabool

Gegeven is de kromme $k$ door $(x + y)^2 = 8x$.

**a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van $k$ met de beide assen.

**b** Bereken de coördinaten van de punten van $k$ waarin de raaklijn evenwijdig is met één der assen.

**c** De lijn met vergelijking $x - y = p$ raakt $k$. Bereken $p$.

**d** Toon aan dat elke lijn met vergelijking $x + y = q$ precies één punt met $k$ gemeen heeft, maar hem niet raakt.

## Testen

### Opgave 16

Staan de lijnen $p: -30x + 20y = 33$ en $q: 2x = 100 - 3y$ loodrecht op elkaar?

### Opgave 17

Bereken de hoeken tussen de ellips $e: x^2 + 2y^2 = 8$ en de hyperbool $h: x^2 - 2y^2 = 4$ in hun snijpunten in graden nauwkeurig.

# 1.6 Totaalbeeld

## Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Krommen in 2D** doorgewerkt. Je hebt geleerd dat naast de synthetische aanpak van bewijzen in de meetkunde, ook de analytische aanpak vaak mogelijk is. En het voordeel van die aanpak is dat je vaak al snel een mogelijkheid hebt om te beginnen. Verder heb je de kegelsneden parabool, ellips en hyperbool geconstrueerd en gerekend met de bijbehorende vergelijkingen
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

## Begrippenlijst

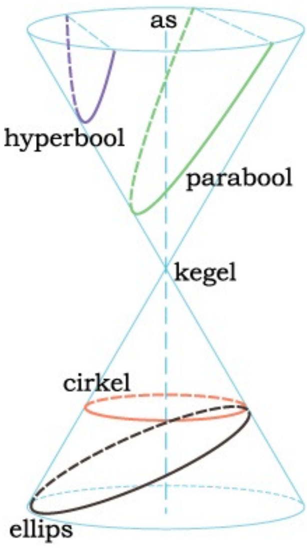
- synthetische aanpak — analytische aanpak
- parabool — brandpunt en richtlijn — vergelijking van een parabool — raaklijn aan een parabool
- ellips — brandpunten en richtcirkel — vergelijking van een ellips — raaklijn aan een ellips — lijn- en puntsymmetrie
- hyperbool — brandpunten en richtcirkel — vergelijking van een hyperbool — raaklijn aan een hyperbool — lijn- en puntsymmetrie
- hoek tussen twee lijnen — hoek tussen een lijn en een vlakke kromme en tussen twee krommen

## Activiteitenlijst

- bewijzen leveren met een synthetische en/of een analytische aanpak
- parabolen construeren — een vergelijking van een parabool opstellen — uit een vergelijking van een parabool brandpunt en richtlijn afleiden — van een raaklijn aan een parabool de vergelijking opstellen
- ellipsen construeren — een vergelijking van een ellips opstellen — uit een vergelijking van een ellips brandpunt en richtlijn afleiden — van een raaklijn aan een ellips de vergelijking opstellen
- hyperbolen construeren — een vergelijking van een hyperbool opstellen — uit een vergelijking van een hyperbool brandpunt en richtlijn afleiden — van een raaklijn aan een hyperbool de vergelijking opstellen
- hoek tussen twee lijnen berekenen — hoek tussen een lijn en een vlakke kromme en tussen twee krommen berekenen

## Achtergronden

**Apollonius van Perga (262—190 v.Chr.)** was een Grieks wiskundige, die bekend stond als 'de grote geometer', de grote meetkundige. Vooral zijn boek 'Kegelsneden' waarin de begrippen parabool, hyperbool en ellips werden geïntroduceerd, is heel erg beroemd geworden. Hij beschreef er de cirkel, de ellips, de parabool en de hyperbool in als doorsnijdingen van een vlak met een (dubbele) kegel en leidde de belangrijkste eigenschappen van deze vlakke krommen af. Later paste hij deze kennis toe op de bewegingen van hemellichamen.
Dit geschrift bestond uit acht boeken, waarvan alleen de eerste vier in het Grieks en de eerste zeven in het Arabisch zijn blijven bestaan.
In de eerste vier boeken vormen een elementaire inleiding in de basiseigenschappen van de kegelsneden. Dit werk was meestal afkomstig van werk van Euklides, Aristeus en Menaechmus. Maar sommige delen zijn verder uitgewerkt. Het gaat daar over eigenschappen van raaklijnen, brandpunten, middellijnen en over de wijze van constructie van deze krommen.
De boeken V t/m VII zijn door Apollonius geheel zelf bedacht. In boek V gaat het over normalen (dat zijn loodlijnen op raaklijnen in het raakpunt) van kegelsneden getrokken vanuit bepaalde punten.



Figuur 6.1

## Testen

### Opgave 1

Gegeven zijn de lijnen $l: y = a_1 \cdot x$ en $m: y = a_2 \cdot x$, waarbij $a_1$ en $a_2$ de richtingscoëfficiënten van de lijnen zijn.

**a** De lijn $x = 1$ snijdt lijn $l$ in punt $A$ en lijn $m$ in punt $B$. Wat zijn de coördinaten van $A$ en $B$?

**b** Stel dat de lijnen loodrecht op elkaar staan. Toon met behulp van de stelling van Pythagoras aan dat $a_1 \cdot a_2 = -1$.

**c** Stel nu dat $a_1 \cdot a_2 = -1$. Toon met behulp van de omgekeerde stelling van Pythagoras aan dat de lijnen $l$ en $m$ loodrecht op elkaar staan.

### Opgave 2

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek met zijden $2a$. Je wilt de straal van de omgeschreven cirkel van deze driehoek in $a$ uitdrukken.

**a** Doe dit met behulp van analytische meetkunde.

**b** Doe dit met behulp van een synthetische aanpak.

### Opgave 3

Gegeven is de lijn $r$: $x = 4$ en het punt $F(8,0)$.

**a** Toon aan dat de vergelijking van de parabool met $r$ als richtlijn en $F$ als brandpunt de vergelijking $y^2 = 8x - 48$ heeft.

**b** Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan deze parabool voor $x = 14$.

Door de top $T$ van deze parabool en de raakpunten die je in b hebt gevonden gaat een cirkel $c$.

**c** Bereken de hoeken die $c$ met de parabool maakt in graden nauwkeurig.

### Opgave 4

Gegeven is de ellips $e$ met vergelijking $9x^2 + 25y^2 = 225$.

**a** Bereken beide brandpunten en de straal van de richtcirkel.

**b** Stel vergelijkingen op van de twee lijnen die deze ellips raken in punten met een $x$-waarde van 3.

**c** Door de twee snijpunten van deze ellips met de $x$-as en door het punt $T(0,3)$ gaat een parabool $p$ die de ellips in $T$ raakt. Stel een vergelijking van $p$ op.

**d** Toon aan dat $p$ de ellips raakt in $T$.

### Opgave 5

Gegeven is de hyperbool $h$ met richtcirkel $c$: $x^2 + y^2 = 4$ en brandpunten $O(0,0)$ en $F(4,0)$.

**a** Stel een vergelijking op van deze hyperbool $h$.

**b** Deze hyperbool heeft twee takken, waarvan er één de cirkel $c$ snijdt. Bereken de hoek waaronder dit gebeurt in graden nauwkeurig.

**c** Bewijs dat $h$ symmetrisch is ten opzichte van het punt $C(2,0)$.

## Toepassen

### Opgave 6: De lemniscaat

**Bekijk de applet**

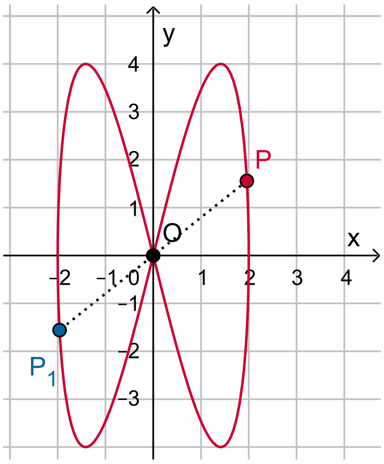
Hiernaast zie je een kromme $k$ die 'lemniscaat' heet.
Hij heeft de vergelijking $y^2 = 4x^2(4 - x^2)$.

**a** Bewijs dat de lemniscaat symmetrisch is t.o.v. de $x$-as.

**b** Bereken de coördinaten van de punten op de lemniscaat waarin de raaklijn evenwijdig is aan de $x$-as.

**c** Bereken de hellingsgetallen van de twee raaklijnen in $(0,0)$ aan de lemniscaat. Welke hoek maken deze twee raaklijnen met elkaar?

**d** De lemniscaat snijdt van de lijn $y = px$ twee lijnstukken af met een lengte van $\sqrt{15}$. Bereken $p$.




Figuur 6.2

# 2

## Discrete kansmodellen

# 2.1 Stochasten

## Inleiding

Er bestaan variabelen waarvan de uitkomst afhangt van het toeval. Voorbeelden te over waarbij je wel telkens goed moet afspreken wat je onder dit toeval (en de grootte van de kansen) moet verstaan. Neem bijvoorbeeld het 'boogschieten'. Voor iemand die zonder echt te mikken wel steeds zijn pijl ergens op de schietschijf krijgt zou je bij elke score kunnen spreken van toeval. Maar hoe stel je dit toeval vast? Kun je voor elke mogelijke score de kans erop vaststellen? En hoe dan wel?

Figuur 1.1

**Je leert in dit onderwerp**

- het begrip (discrete) stochast (toevalsvariabele) en een bijbehorende kansverdeling opstellen;
- berekenen en werken met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een discrete stochast.

**Voorkennis**

- werken met frequentieverdelingen;
- werken met gemiddelde en standaardafwijking bij frequentieverdelingen.

## Verkennen

### Opgave V1

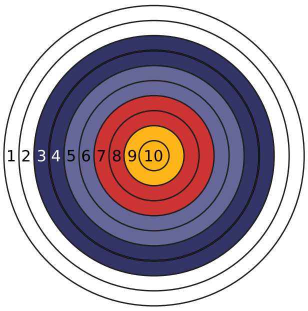
Hier zie je de indeling van een schietschijf. Het aantal punten dat je bij een schot met één pijl kunt scoren is vooral voor onervaren boogschutters van het toeval afhankelijk. Neem aan dat het aantal punten $D$ als een toevalsvariabele kan worden opgevat.

**a** Verzin een manier om hiervoor een kansverdeling op te stellen.

**b** Is er verschil tussen ervaren of onervaren boogschutters voor wat betreft de kansverdeling?

**c** Hoe bepaal je hoeveel punten je met één schot met een pijl gemiddeld kunt verwachten?

**d** Hoe zou je een wereldranglijst van beste boogschutters kunnen maken?

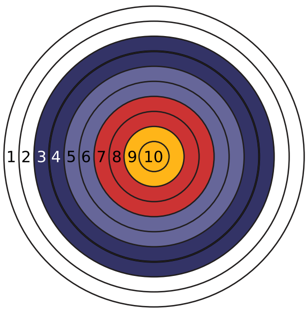



Figuur 1.2

## Uitleg

Het aantal punten dat je met boogschieten met één pijl behaalt, is een toevalsvariabele, ook wel een stochast genoemd. Omdat de stochast in dit geval geen waarden kan aannemen tussen de al gegeven waarden, spreek je van een discrete stochast.

Bij een bepaalde schutter kun je de relatieve frequentie van elke mogelijke score bepalen. Dit kun je opvatten als kansverdeling van de stochast. Je stelt de stochast vaak voor met een hoofdletter, bijvoorbeeld $X$.




Figuur 1.3

Een dergelijke kansverdeling ziet er dan zo uit:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 0,02 | 0,02 | 0,04 | 0,10 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | 0,12 | 0,15 | 0,15 | 0,08 |

**Tabel 1.1**

Als je deze kansverdeling goed bekijkt, zie je dat dit geen hele goede boogschutter is: de roos wordt maar in 8% van de gevallen geraakt en de spreiding is nogal groot.

Door in de tabel telkens de score met de relatieve frequentie te vermenigvuldigen en de uitkomsten bij elkaar op te tellen, krijg je de verwachtingswaarde van het aantal punten per schot. Je vindt dan dat de verwachtingswaarde voor deze schutter 6,22 punten per schot is. De notatie is $\text{E}(X) = 6{,}22$ of $\mu(X) = 6{,}22$.
De verwachtingswaarde is een maat voor het centrum van de verdeling.

Voor de spreiding gebruik je een maat die standaardafwijking heet:

- Bereken van elke mogelijke score het verschil met de verwachtingswaarde en neem daarvan het kwadraat.
- Vermenigvuldig de gevonden getallen met hun relatieve frequentie.
- Tel alle uitkomsten bij elkaar op. Het getal dat je krijgt heet de variantie.
- Ten slotte trek je de wortel uit de variantie.

Dat geeft de standaardafwijking, een geschikte maat voor de spreiding van de kansverdeling. Voor deze schutter geldt een standaardafwijking van ongeveer 2,56. De notatie voor de standaardafwijking is $\sigma(X) \approx 2{,}56$. Voor de variantie noteer je $\text{Var}(X)$.

Je kunt dit ook met de grafische rekenmachine berekenen. Je voert dan de kansverdeling op de grafische rekenmachine in, net als een frequentietabel. Hoe dit gaat, zie je in het **Practicum**.

## Opgave 1

Bekijk de kansverdeling van de boogschutter in de **Uitleg**.

**a** Beschrijf hoe deze kansverdeling tot stand is gekomen.

**b** Bereken zelf de verwachtingswaarde. Beschrijf wat dit getal voor de boogschutter precies betekent.

**c** Deze boogschutter schiet nu 15 keer op de roos. Hoeveel punten verwacht hij in totaal te behalen?

## Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** hoe je de standaardafwijking van de kansverdeling berekent.

**a** Laat zien dat de standaardafwijking van de kansverdeling van de boogschutter ongeveer 2,56 is.

**b** Teken een kanshistogram van deze kansverdeling. Geef zowel de verwachtingswaarde als de standaardafwijking erin aan.

**c** Waarom zal de kansverdeling van een redelijk goede boogschutter niet symmetrisch zijn?

### Opgave 3

Van een professioneel boogschutter wordt een tijd lang bijgehouden hoe hij schiet. Aan de hand van die gegevens wordt de volgende kansverdeling van zijn score per schot opgesteld:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(X = x)$ | 0,00 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,03 | 0,06 | 0,10 | 0,14 | 0,16 | 0,27 | 0,21 |

**Tabel 1.2**

Stochast $X$ stelt het aantal punten per schot voor.

Bereken van deze boogschutter de verwachte score per schot en de bijbehorende standaardafwijking. Rond zo nodig af op vier decimalen.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Een **toevalsvariabele** is een variabele waar bij elke waarde een bepaalde kans hoort dat die waarde optreedt. In plaats van toevalsvariabele zeg je ook wel **stochast**. Als het aantal mogelijke waarden dat de stochast kan aannemen eindig is of oneindig veel ‘losse’ waarden zonder tussenwaarden zijn (bijvoorbeeld $0,1,2,...$), spreek je van een **discrete stochast**.

Bij stochast $X$ met waarden $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ hoort een **kansverdeling**, een tabel met kansen $\text{P}(X = x_i)$ waarbij $x = 1,2,...,n$. Als alle kansen gelijk zijn, spreek je van een **uniforme kansverdeling**.

Een kansverdeling kan worden beschreven door:

- de **verwachtingswaarde** (of verwachting) van de stochast, notatie $\text{E}(X)$ of $\mu(X)$:
  $\text{E}(X) = x_1 \cdot \text{P}(X = x_1) + x_2 \cdot \text{P}(X = x_2) + ... + x_n \cdot \text{P}(X = x_n)$
  of korter:
  $$\text{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \text{P}(X = x_i)$$
- de **standaardafwijking** (of standaarddeviatie) van $X$, notatie $\sigma(X)$:
  de **variantie** van $X$ is de verwachtingswaarde van de kwadraten van de verschillen $x_i - \text{E}(X)$, en de standaardafwijking is de wortel uit de variantie. In formulevorm:
  $$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \text{E}(X))^2 \cdot \text{P}(X = x_i) \text{ en } \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

## Voorbeeld 1

$X$ is het aantal punten dat je bij boogschieten bij elk schot kunt behalen. Bekijk in de tabel voor speler $A$ een kansverdeling van $X$.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x)$ | 0,02 | 0,02 | 0,04 | 0,10 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | 0,12 | 0,15 | 0,15 | 0,08 |

**Tabel 1.3**

Bereken bij deze kansverdeling de verwachtingswaarde en de standaardafwijking.

Antwoord

In de figuur staat de uitwerking met behulp van Excel.

| Boogschieten: score speler A | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| nummer | score | kans | | | |
| *i* | *x* | P(*X*=*x*) | *x*·P(*X*=*x*) | (*x* - E(*X*))^2 | (*x* - E(*X*))^2 · P(*X*=*x*) |
| 1 | 0 | 0,02 | 0,00 | 38,6884 | 0,773768 |
| 2 | 1 | 0,02 | 0,02 | 27,2484 | 0,544968 |
| 3 | 2 | 0,04 | 0,08 | 17,8084 | 0,712336 |
| 4 | 3 | 0,10 | 0,30 | 10,3684 | 1,03684 |
| 5 | 4 | 0,09 | 0,36 | 4,9284 | 0,443556 |
| 6 | 5 | 0,11 | 0,55 | 1,4884 | 0,163724 |
| 7 | 6 | 0,12 | 0,72 | 0,0484 | 0,005808 |
| 8 | 7 | 0,12 | 0,84 | 0,6084 | 0,073008 |
| 9 | 8 | 0,15 | 1,20 | 3,1684 | 0,47526 |
| 10 | 9 | 0,15 | 1,35 | 7,7284 | 1,15926 |
| 11 | 10 | 0,08 | 0,80 | 14,2884 | 1,143072 |
| | | E(*X*) = | 6,22 | Var(*X*) = | 6,5316 |
| | | | | σ(*X*) = | 2,555699513 |

**Figuur 1.4**

## Opgave 4

Voor een andere boogschutter is stochast $Y$ het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Bekijk de kansverdeling van $Y$.

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(Y = y)$ | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,03 | 0,04 | 0,06 | 0,05 | 0,11 | 0,20 | 0,21 | 0,24 |

**Tabel 1.4**

**a** Bereken de verwachtingswaarde van $Y$.

**b** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de standaardafwijking van $Y$.

**c** Vergelijk de twee frequentieverdelingen van de boogschutter uit het voorbeeld en deze boogschutter. Welk van beide boogschutters is de betere schutter? En hoe zie je dat aan de verwachtingswaarden en de standaardafwijkingen?

## Voorbeeld 2

Stochast $X$ stelt het aantal ogen voor op het vlak dat boven komt na het werpen met een gewone dobbelsteen. Stel een kansverdeling voor $X$ op en bepaal de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $X$.

Antwoord

De kansverdeling van $X$ heet uniform, omdat alle kansen gelijk zijn.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(X = x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

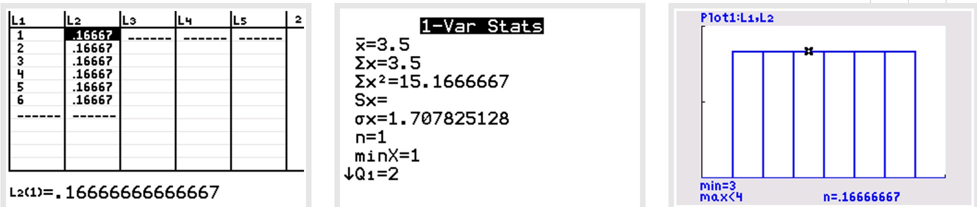
**Tabel 1.5**

$$\text{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + \ldots + 6) = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \frac{1+6}{2} = 3{,}5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{(1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+\ldots+(6-3{,}5)^2}{6}} = \sqrt{\frac{17{,}5}{6}} \approx 1{,}71$$

Je kunt dit ook met de grafische rekenmachine berekenen. Je voert dan de kansverdeling op de grafische rekenmachine in, net als een frequentietabel. Hoe dit gaat, zie je in het **Practicum**.

Met behulp van de rekenmachine vind je ook dat $\text{E}(X) = 3{,}5$ en $\sigma_X \approx 1{,}71$.




**Figuur 1.5**

### Opgave 5

In **Voorbeeld 2** staat de kansverdeling bij het werpen met één dobbelsteen. Je ziet hoe je met de hand de verwachtingswaarde en de standaardafwijking kunt uitrekenen.

**a** Licht de berekening voor $\text{E}(X)$ toe. Denk aan de somformule voor rekenkundige rijen.

**b** Reken na dat de standaardafwijking een exacte waarde heeft van $\sqrt{\frac{17{,}5}{6}}$.

### Opgave 6

Stochast $Y$ stelt het aantal ogen voor op het vlak dat boven komt na het werpen met een achtvlaksdobbelsteen. Bepaal zowel met de hand als met de grafische rekenmachine de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $Y$.

## Voorbeeld 3

Stochast $X$ stelt het aantal ogen voor op het vlak dat boven komt na het werpen met twee dobbelstenen. Stel een kansverdeling voor $X$ op en bepaal de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $X$.

Antwoord

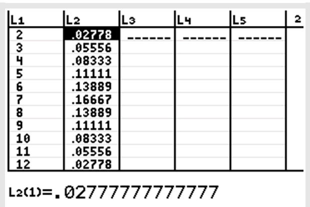
De kansverdeling van $X$ maak je vanuit het overzicht van alle $36$ mogelijkheden.

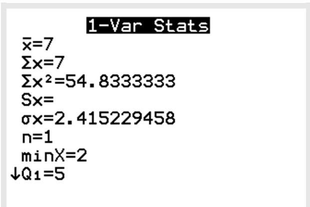
| $x$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $8$ | $9$ | $10$ | $11$ | $12$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(X = x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Tabel 1.6

Deze kansverdeling voer je op de grafische rekenmachine in, net als een frequentietabel.

Je vindt: $\text{E}(X) = 7$ en $\sigma(X) \approx 2{,}42$. Ga dat na.




Figuur 1.6

### Opgave 7

Bekijk de kansverdeling in **Voorbeeld 3**.

**a** Licht de kansen in deze kansverdeling toe.

**b** Vergelijk de verwachtingswaarde en de standaardafwijking met die van het werpen met één dobbelsteen. Wat valt je op?

## Verwerken

### Opgave 8

Een loterij bestaat uit zeshonderd loten met de nummers 1 tot en met 600. Elk lot heeft een even grote kans om getrokken te worden.

Stochast $X$ is het lotnummer van een lot.

**a** Waarom is de kansverdeling voor $X$ uniform verdeeld?

**b** Bereken $\text{E}(X)$.

### Opgave 9

De eigenaar van een ijssalon verdient € 300,00 op een zonnige dag. Als het niet zonnig is, heeft hij een verlies van € 60,00. De kans dat het zaterdag een zonnige dag wordt, is $0{,}3$.

Hoeveel bedraagt de winstverwachting van de ijsverkoper op zaterdag?

### Opgave 10

Iemand heeft de tijd $t$ (seconde) gemeten die een groot aantal proefpersonen nodig had, om op een foto een bepaald voorwerp te herkennen. De resultaten staan in de tabel.

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(T = t)$ | 0,04 | 0,08 | 0,15 | 0,28 | 0,25 | 0,17 | 0,02 | 0,01 |

**Tabel 1.7**

De relatieve frequenties kun je opvatten als de kansen dat het voorwerp na zo veel seconden werd gevonden.

**a** Hoe groot is de kans dat het voorwerp door een willekeurige proefpersoon na drie seconden wordt herkend? En hoe groot is de kans dat hij er langer over doet?

**b** Hoeveel tijd verwacht je dat een proefpersoon nodig heeft om het voorwerp te herkennen? Welke standaardafwijking hoort daarbij? Rond af op twee decimalen.

**c** Hoe groot is de kans dat de herkenningstijd die een proefpersoon nodig heeft meer dan een standaardafwijking van de verwachtingswaarde afwijkt?

### Opgave 11

In een vaas zitten twee witte en drie rode balletjes. Uit deze vaas worden zonder teruglegging balletjes getrokken, net zolang tot er een wit balletje wordt getrokken.

Hoe groot zijn de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal benodigde trekkingen $A$?

### Opgave 12

Hoeveel meisjes mag je in een gezin met drie kinderen verwachten, als de kans op de geboorte van een meisje $48\%$ is?

### Opgave 13

In een suikerfabriek staan twee machines voor het vullen van pakken suiker. Bij het afstellen op $1$ kg blijken beide machines (machine 1 en 2) inderdaad pakken te vullen van ongeveer $1$ kg. Toch komen er behoorlijke afwijkingen voor. De relatieve frequentieverdeling van de gewichten $x$ in de tabel geeft dat weer.

| $x$ | 970 | 980 | 990 | 1000 | 1010 | 1020 | 1030 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X_1 = x)$ | 0,04 | 0,07 | 0,12 | 0,18 | 0,25 | 0,29 | 0,05 |
| $P(X_2 = x)$ | 0,00 | 0,00 | 0,15 | 0,30 | 0,35 | 0,20 | 0,00 |

**Tabel 1.8**

Hierbij correspondeert $X_1$ met machine 1 en $X_2$ met machine 2.

Deze frequentieverdelingen kun je opvatten als kansverdelingen.

**a** Toon aan dat beide kansverdelingen dezelfde verwachtingswaarde hebben. Hoe groot is die verwachting?

**b** Welk bezwaar heb je wanneer als maat voor de spreiding het verschil tussen de grootste en de kleinste waarde wordt genomen?

**c** Een andere maat voor de spreiding is de standaardafwijking. Wat kun je, puur op basis van de beide kanshistogrammen, al zeggen over het verschil in de beide standaardafwijkingen?

**d** Bereken de standaardafwijking voor de stochasten $X_1$ en $X_2$. Rond af op één decimaal.

**e** Hoeveel procent van de pakken suiker wijkt minder dan de standaardafwijking van het gemiddelde af? Bereken dit percentage voor beide machines afzonderlijk.

## Toepassen

### Opgave 14: Schijn bedriegt

In een speelhal kun je het volgende spel spelen. In een vaas zitten $7$ ballen: $4$ witte en $3$ zwarte. Een speler doet willekeurig een greep van drie ballen uit de vaas. Voor elke witte bal in zijn greep ontvangt hij € 1,00 (en voor een zwarte bal ontvangt hij niets). De inzet die de speler aan de speelhal moet betalen is € 1,75 per spel.

Per keer spelen ontvangt een speler dus $0$, $1$, $2$ of $3$ euro. De kansen op deze vier mogelijkheden zijn achtereenvolgens: $\frac{1}{35}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{18}{35}$ en $\frac{4}{35}$.

**a** Toon aan dat de kans op € 2,00 inderdaad $\frac{18}{35}$ is.

Iemand besluit het spel zestien keer te spelen. Hij maakt in een spel winst als hij meer dan € 1,75 ontvangt. De kans dat hij ten minste tien keer winst zal maken is groter dan $\frac{1}{2}$.

Het lijkt dus voor een speler wel gunstig om het spel te spelen.

**b** Toon aan dat de speelhal op de lange termijn toch winst zal maken met dit spel.

**(bron: eindexamen vwo wiskunde B1, eerste tijdvak 2008)**

### Opgave 15: Chuck-a-luck

Bij het kansspel ‘Chuck-a-luck’ wordt met drie dobbelstenen gegooid. Stel dat je bij zo'n worp met drie dobbelstenen speelt op het aantal vijven. Komt er één vijf voor, dan krijg je de inleg terug. Komen er twee vijven voor, dan krijg je twee keer je inleg terug. Komen er drie vijven voor, dan krijg je maar liefst tien keer je inleg terug.

**a** Stochast $A$ is het aantal vijven bij het werpen met drie dobbelstenen. Stel een bijbehorende kansverdeling op.

**b** Een andere stochast is de uitbetaling $U$ per ingelegde euro per worp. Stel ook een daarbij passende kansverdeling op.

**c** Welke verwachtingswaarde en welke standaardafwijking heeft $U$? Rond af op twee decimalen.

**d** Ga je veel verdienen aan dit spel? Licht je antwoord toe.

## Testen

### Opgave 16

Je werpt vier keer met een zuivere dobbelsteen. Stochast $X$ stelt het aantal zessen voor dat daarbij bovenkomt.

**a** Stel de kansverdeling van $X$ op.

**b** Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $X$.

### Opgave 17

Twee op papier even sterke tennissers hebben de finale bereikt van hun clubkampioenschap. Ze moeten onderling in een partij, waarbij het gaat om drie gewonnen sets, uitmaken wie zich clubkampioen van dat jaar mag noemen. Winnaar van de finale is dus diegene die het eerst $3$ sets op zijn naam brengt. Stochast $T$ stelt het aantal te spelen sets voor.

**a** Stel een kansverdeling voor $T$ op.

**b** Bereken $\text{E}(T)$. Wat stelt dat getal in dit verband voor?

## Practicum

Met de volgende practica kun je **het invoeren van kansverdelingen (als frequentieverdelingen) van de grafische rekenmachine** doornemen. Je kunt er dan ook diagrammen bij maken en de verwachtingswaarde (gemiddelde) en de standaardafwijking bepalen.

- **Statistiek met de TI84**
- **Statistiek met de TInspire**
- **Statistiek met de Casio fx-CG50**
- **Statistiek met de HPprime**
- **Statistiek en de NumWorks**

# 2.2 Stochasten optellen

## Inleiding

Bij het spel ‘darts’ is het aantal punten dat je scoort bij het werpen met een pijltje een stochast. Met behulp van statistieken kun je voor een speler een bijpassende kansverdeling maken. Maar in het spel gooi je per beurt met drie darts. Hoe kun je de kansverdeling voor een beurt opstellen vanuit de kansverdeling voor één worp? Op deze manier winstkansen berekenen is nog heel ingewikkeld, want het spel gaat om gewonnen ‘sets’, waarbij elke set weer bestaat uit ‘legs’ die elk uit een vooraf onbekend aantal beurten bestaan. Zoek de spelregels maar eens op.

**Figuur 2.1**

### Je leert in dit onderwerp

- >kansverdelingen opstellen voor de som van twee of meer stochasten;
- regels voor de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som van stochasten.

### Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij een stochast;
- verwachtingswaarde en standaardafwijking bij een kansverdeling berekenen.

## Verkennen

### Opgave V1

Gooi je met een dobbelsteen dan is het aantal ogen dat bovenkomt een stochast $X$. Gooi je met twee dobbelstenen, dan heb je voor de som van het aantal ogen dat bovenkomt te maken met een stochast $Y = X + X = 2X$. Je hebt al in de voorbeelden van de voorgaande paragraaf de bijbehorende kansverdelingen gemaakt.

**a** Laat zien dat in dit geval $\text{E}(2X) = 2 \cdot \text{E}(X)$, dat $\text{Var}(2X) = 2 \cdot \text{Var}(X)$ en dat $\sigma(2X) = \sqrt{2} \cdot \sigma(X)$.

Iemand ontwerpt een dobbelstenensimulator die je via internet kunt spelen. Alleen zorgt hij er voor (maar dat is niet zichtbaar) dat de tweede dobbelsteen altijd precies 1 oog meer aangeeft dan de eerste, behalve als de eerste 6 ogen heeft, dan heeft de tweede 1 oog. Noem nu $X$ het aantal ogen op de eerste dobbelsteen en $Y$ dat op de tweede.

**b** Stel een kansverdeling op voor $X + Y$ en onderzoek hoe het zit met $\text{E}(X + Y)$ en $\sigma(X + Y)$.

# Uitleg

Iemand speelt een spel waarbij de eindscore wordt berekend door de scores van twee afzonderlijke kansspellen bij elkaar op te tellen. Bij het eerste spel kan hij 2, 4 of 6 punten verdienen, bij het tweede spel 0 of 10 punten. $X$ is de stochast voor het aantal punten bij het eerste spel en $Y$ die voor het tweede spel. Op grond van voorgaande resultaten heeft hij deze kansverdelingen opgesteld:

| $x$ | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| $\text{P}(X = x)$ | 0,20 | 0,30 | 0,50 |

| $y$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $\text{P}(Y = y)$ | 0,40 | 0,60 |

**Tabel 2.1**

Ga ervan uit dat de uitkomst van het eerste spel geen invloed heeft op de uitkomst van het tweede spel. Dit betekent dat $X$ en $Y$ onafhankelijke stochasten zijn.

Bij de eindscore past dan deze kansverdeling:

| $x + y$ | 2 | 4 | 6 | 12 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(X + Y = x + y)$ | 0,08 | 0,12 | 0,20 | 0,12 | 0,18 | 0,30 |

**Tabel 2.2**

Je kunt nu zelf nagaan dat $\text{E}(X) = 4{,}6$ en $\text{E}(Y) = 6$ en $\text{E}(X + Y) = 10{,}6$.

Hier geldt dus dat de verwachtingswaarde van $X + Y$ gelijk is aan de som van de afzonderlijke verwachtingswaarden.

Ook kun je nagaan dat $\text{Var}(X) = 2{,}44$ en $\text{Var}(Y) = 24$ en $\text{Var}(X + Y) = 26{,}44$.

Ook de variantie van $X + Y$ is gelijk aan de som van de afzonderlijke varianties.
Omdat $(\sigma(X))^2 = \text{Var}(X)$ moet gelden

$(\sigma(X + Y))^2 = \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2$. En dus $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$.

## Opgave 1

In de **Uitleg** wordt het verband besproken tussen de verwachtingswaarden en de standaardafwijkingen van $X$, $Y$ en $X + Y$.

**a** Bereken zelf de verwachtingswaarden van $X$, $Y$ en $X + Y$ en ga na dat $\text{E}(X + Y) = \text{E}(X) + \text{E}(Y)$.

**b** Bereken zelf de standaardafwijkingen van $X$, $Y$ en $X + Y$ en ga na dat $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$.

**c** Waarom wordt deze manier van optellen van standaardafwijkingen wel ‘pythagorisch optellen’ genoemd?

## Opgave 2

Iemand gooit twee keer een muntje op, en wil een kansverdeling opstellen voor het aantal keren dat hij kop gooit. Noem $X$ de waarde van de eerste toss en $Y$ die van de tweede, met $X = Y = 1$ als er kop wordt gegooid en $X = Y = 0$ bij munt.

**a** Stel de kansverdelingen op voor $X$, $Y$ en $X + Y$.

**b** Bereken de standaardafwijkingen van $X$, $Y$ en $X + Y$ en controleer dat $\sigma(X + Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Vaak heb je met de som van een aantal stochasten te maken. Zo kun je vanuit een kansverdeling voor stochast $X$ met waarden $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ en een kansverdeling voor stochast $Y$ met waarden $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ ook een kansverdeling maken voor $X + Y$ door kansen te berekenen bij alle waarden $x_i + y_j$.

Je hebt te maken met **onafhankelijke stochasten** als $\text{P}\left(X = x_i \text{ en } Y = y_j\right) = \text{P}(X = x_i) \cdot \text{P}\left(Y = y_j\right)$ voor elke $x_i$ en elke $y_j$.

Er geldt: $\text{E}(X + Y) = \text{E}(X) + \text{E}(Y)$

Ook geldt als $X$ en $Y$ onafhankelijk zijn:

$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Omdat $(\sigma(X))^2 = \text{Var}(X)$ geldt voor onafhankelijke stochasten $X$ en $Y$:

$(\sigma(X + Y))^2 = (\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2$

En dus geldt voor onafhankelijke stochasten $X$ en $Y$:

$\sigma(X + Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$

### Voorbeeld 1

Voor boogschutter A is stochast $X$ het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(X = x)$ | 0,02 | 0,02 | 0,04 | 0,10 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | 0,12 | 0,15 | 0,15 | 0,08 |

**Tabel 2.3**

Voor boogschutter B is stochast $Y$ het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt.

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(Y = y)$ | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,03 | 0,04 | 0,06 | 0,05 | 0,11 | 0,20 | 0,21 | 0,24 |

**Tabel 2.4**

Beide boogschutters vormen een team en hun scores worden opgeteld. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $X + Y$.

Antwoord

Beide stochasten zijn onafhankelijk.

$\text{E}(X) = 6{,}22$ en $\text{Var}(X) = (\sigma(X))^2 = 6{,}5316$

Verder $\text{E}(Y) = 7{,}59$ en $\text{Var}(Y) = (\sigma(Y))^2 = 5{,}9419$.

Dan is $\text{E}(X + Y) = 6{,}22 + 7{,}59 = 13{,}81$ en
$\sigma(X + Y) = \sqrt{6{,}5316 + 5{,}9419} \approx 3{,}53$.

## Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** de kansverdelingen voor de twee boogschutters.

**a** Controleer de berekende verwachtingswaarden en standaardafwijkingen.

**b** Bereken de kans dat beide schutters samen één punt scoren.

**c** Het maken van de kansverdeling voor $X + Y$ is een tijdrovende bezigheid. Welke waarden kan $X + Y$ aannemen?

**d** Bereken $\text{P}(X + Y = 2)$.

## Opgave 4

Anneke en Bas doen een behendigheidsspelletje waarbij ze ofwel hun inleg van € 1,00 kwijt zijn, ofwel de inleg plus € 5,00 terugkrijgen. $A$ is de winst van Anneke en $B$ de winst van Bas. In de tabel staan de kansverdelingen van hun winst.

| $a$ | -1 | 5 | | $b$ | -1 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(A = a)$ | 0,6 | 0,4 | | $\text{P}(B = b)$ | 0,7 | 0,3 |

**Tabel 2.5**

De uitkomsten van $A$ en $B$ zijn onafhankelijk.

**a** Bereken exact de verwachtingswaarden en standaardafwijkingen van $A$ en $B$.

**b** Bereken exact $\text{E}(A + B)$ en $\sigma(A + B)$ met behulp van de antwoorden uit a.

**c** Stel de kansverdeling voor $A + B$ op en bereken met behulp hiervan $\text{E}(A + B)$ en $\sigma(A + B)$. Controleer dat je hetzelfde antwoord krijgt als bij b.

## Voorbeeld 2

Voor boogschutter A is stochast $X$ het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(X = x)$ | 0,02 | 0,02 | 0,04 | 0,10 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | 0,12 | 0,15 | 0,15 | 0,08 |

**Tabel 2.6**

Bij elke schotbeurt worden drie pijlen op het doel afgevuurd en de scores opgeteld. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor elke schotbeurt.

Antwoord

Elke afgeschoten pijl beweegt onafhankelijk van de andere twee, dus bij elke schotbeurt hoort de stochast $S = X + X + X = 3X$.

De verwachtingswaarde per schotbeurt is daarom:

$\text{E}(3X) = \text{E}(X + X + X) = \text{E}(X) + \text{E}(X) + \text{E}(X) = 3 \cdot \text{E}(X)$

De standaardafwijking per schotbeurt is:

$\sigma(3X) = \sigma(X + X + X) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(X)^2 + \sigma(X)^2} =$

$\sqrt{3 \cdot \sigma(X)^2} = \sqrt{3} \cdot \sigma(X)$

Dit betekent dat voor elke schotbeurt geldt: $\text{E}(3X) = 3{\cdot}6{,}22 = 18{,}66$ en $\sigma(3X) \approx \sqrt{3} \cdot 2{,}56 \approx 4{,}43$ punten.

### Opgave 5

In **Voorbeeld 2** worden de kansverdelingen voor $X$ en $3X$ vergeleken.

**a** De kansverdeling voor $3X$ is erg omvangrijk. Wat zijn de eerste twee en wat zijn de laatste twee waarden?

**b** Bereken $\text{P}(3X = 1)$.

**c** Hoe kun je nagaan dat $\text{E}(3X) = 3 \cdot \text{E}(X)$ en $\sigma(3X) = \sqrt{3} \cdot \sigma(X)$ zonder van de optelregels gebruik te maken?

### Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** nog eens de kansverdeling voor boogschutter A. Stel je voor dat het aantal punten van elke ring 2 hoger is. De stochast wordt dan $X + 2$.

**a** Waarom is $\text{E}(X + 2) = \text{E}(X) + 2$?

**b** Waarom is $\sigma(X + 2) = \sigma(X)$?

### Voorbeeld 3

Iemand gooit 20 keer met een onzuivere munt. De verwachtingswaarde voor het aantal keren kop is 13. Bereken hoe groot de standaardafwijking is van de kansverdeling voor het aantal keren kop.

Antwoord

Noem het aantal keren kop per keer gooien $X$, dan heeft $X$ een waarde van 0 of 1. Zeg dat de kans op kop gelijk is aan $p$, dan hoort daar deze kansverdeling bij:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $1$ |
| $\text{P}(X = x)$ | $1 - p$ | $p$ |

**Tabel 2.7**

En daarbij hoort $\text{E}(X) = p$ en $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Er wordt 20 keer onafhankelijk van elkaar met een munt gegooid en je verwacht 13 keer kop. Dus $\text{E}(20X) = 20 \cdot p = 13$ en hieruit volgt $p = 0{,}65$ en $\sigma(X) = \sqrt{0{,}35 \cdot 0{,}65} = \sqrt{0{,}2275}$.

De standaardafwijking van het aantal keren kop bij 20 keer gooien is $\sigma(20X) = \sqrt{20} \cdot \sqrt{0{,}2275} \approx 2{,}13$ keer kop.

### Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je dat stochast $X$ staat voor het aantal keren kop als je met een onzuivere munt gooit.

**a** Laat zien dat $\text{E}(X) = p$ en dat $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

**b** Hoe groot zijn de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor het aantal keren kop als je 60 keer met de onzuivere munt gooit? Rond indien nodig af op twee decimalen.

### Opgave 8

Iemand gooit met tien dobbelstenen. Hoeveel ogen verwacht hij in totaal? Met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op twee decimalen.

## Verwerken

### Opgave 9

Je werpt met een zuivere dobbelsteen en een zuivere viervlaksdobbelsteen. $X$ is het aantal ogen op de gewone dobbelsteen, $Y$ het aantal ogen op de viervlaksdobbelsteen.

Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $X + Y$.

### Opgave 10

Elk weekend verkoopt Iris op marktjes haar zelfgemaakte sieraden. Gemiddeld is haar weekendomzet € 63,00 met een standaardafwijking van € 2,07.

Hoeveel bedraagt de verwachte omzet in een jaar met $52$ weekenden? Welke standaardafwijking hoort daarbij?

### Opgave 11

Als je een lot koopt in de staatsloterij is de kans dat er op dat lot een prijs valt $0{,}14$. Stel je voor dat je met een groep medeleerlingen tien staatsloten hebt gekocht.

Op hoeveel loten verwacht je een prijs? Met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op twee decimalen.

### Opgave 12

Bekijk de twee kansverdelingen. De stochasten $X$ en $Y$ zijn onafhankelijk van elkaar.

| $x_i$ | $0$ | $1$ | | $y_j$ | $5$ | $10$ | $15$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(X = x_i)$ | $0{,}15$ | $0{,}85$ | | $\text{P}(Y = y_j)$ | $0{,}25$ | $0{,}40$ | $0{,}35$ |

**Tabel 2.8**

**a** Maak een kansverdeling voor $Y - X$.

**b** Laat zien dat $\text{E}(Y - X) = \text{E}(Y) - \text{E}(X)$.

**c** Laat ook zien dat $\sigma(Y - X) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$. Reken met de niet afgeronde standaardafwijkingen.

### Opgave 13

Stel dat een dobbelsteen aan één kant verzwaard is. De kans om 6 te gooien is daardoor niet meer $\frac{1}{6}$ maar $\frac{1}{4}$ geworden.

**a** Je gooit $250$ keer met deze dobbelsteen. Hoeveel keer 6 mag je verwachten?

**b** Welke standaardafwijking hoort daarbij? Rond af op twee decimalen.

**c** Veronderstel dat de kansen om $1$ tot en met $5$ te gooien met deze dobbelsteen gelijk zijn. Wat is de verwachtingswaarde van het aantal ogen als je tien keer met deze dobbelsteen gooit?

### Opgave 14

Bij een kansspel moet je met een onzuivere munt en een zuivere viervlaksdobbelsteen gooien. Als je kop gooit, krijg je € 1,00 en als je munt gooit niks. Voor de viervlaksdobbelsteen krijg je het aantal ogen in euro uitbetaald.

De inleg is € 3,00.

**a** Hoe groot is de kans op kop als per spel het verwachte verlies € 0,20 is?

**b** Bereken de standaardafwijking van de uitbetaling. Rond af op twee decimalen.

## Toepassen

### Opgave 15: Schoolexamen

Voor een bepaald onderdeel uit het schoolexamen moeten twee practicumtoetsen gemaakt worden. De toetsen zijn op die school door de jaren heen zodanig met elkaar te vergelijken, dat de school van het cijferbeeld betrouwbaar statistisch materiaal heeft verkregen.

| | 2e toets | | |
|---|---|---|---|
| 1e toets | 5 | 6 | 7 |
| 4 | 10 | 5 | 0 |
| 5 | 11 | 5 | 2 |
| 6 | 8 | 14 | 7 |
| 7 | 3 | 13 | 12 |
| 8 | 0 | 4 | 6 |

**Figuur 2.2**

De tabel laat zien dat bijvoorbeeld $\frac{13}{100} = 13\%$ van alle deelnemers aan beide toetsen voor de eerste toets een $7$ haalde en voor de tweede een $6$. Stochast $A$ is het cijfer dat een willekeurige leerling op grond van deze statistiek voor de eerste toets behaalt. Stochast $B$ is het cijfer dat diezelfde leerling voor de tweede toets behaalt. Stochast $C = \frac{1}{2}(A + B)$.

**a** Stel de kansverdelingen voor $A$ en $B$ op.

**b** Welke betekenis heeft stochast $C$?

**c** Bereken de verwachtingswaarde van stochast $C$. Rond af op één decimaal.

**d** Bereken $\sigma(C)$. Rond af op twee decimalen. Leg uit waarom je in dit geval de standaardafwijking niet met de somregel voor twee stochasten kunt berekenen.

### Opgave 16: Kaartspel

Bij een kaartspel geldt de volgende puntentelling:

- alle kaarten zonder plaatjes zijn ieder 0 punten waard
- een boer is 1 punt waard
- een vrouw is 2 punten waard
- een heer is 3 punten waard
- een aas is 4 punten waard

Bij dit spel pak je met terugleggen kaarten van de stapel en tel je de punten bij elkaar op. De verwachtingswaarde van het aantal punten is 10. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de standaard-afwijking van het aantal punten.

**Figuur 2.3**

### Opgave 17: Bridge

Voordat je bij het kaartspel Bridge kunt gaan bieden, geef je de 13 kaarten die je in je hand hebt ieder een waarde:

- alle kaarten zonder plaatjes zijn ieder 0 punten waard
- een boer is 1 punt waard
- een vrouw is 2 punten waard
- een heer is 3 punten waard
- een aas is 4 punten waard

Je kunt alleen een openingsbod doen als het totale aantal punten van jouw hand kaarten minimaal 13 is.

**a** Is het verwachte aantal punten van een hand met 13 kaarten ook een geldig openingsbod?
Ga uit van de theoretische situatie dat iedere kaart in je hand uit een nieuw pak kaarten is gekozen.

**b** Bereken de standaardafwijking van het aantal punten per hand kaarten.

**c** Leg uit hoe je de kans op een openingsbod zou kunnen berekenen en laat zien waarom dit een enorme berekening wordt.
NB: Je hoeft deze kans dus niet te berekenen (tenzij je dat natuurlijk zelf leuk vindt!)

## Testen

### Opgave 18

Als je met twee geldstukken gooit dan kun je 0, 1 of 2 maal kruis gooien.

**a** Bereken de kans op elk aantal. Je mag aannemen dat de munten zuiver zijn.

**b** Bereken met deze kansen de verwachtingswaarde van het aantal keer kruis.

**c** Bereken met deze kansen de standaardafwijking van het aantal keer kruis.

**d** Bereken het verwachte aantal kruis als je 10 keer gooit met twee geldstukken.

**e** Bereken de standaardafwijking van het verwachte aantal kruis als je 10 keer gooit met twee geldstukken.

### Opgave 19

Stel dat je aan de kopzijde van een geldstuk iets hebt afgeslepen. De kans op munt is daardoor niet meer gelijk aan de kans op kop.

Er wordt met deze munt geworpen. Op de lange duur blijft in ongeveer één op de drie keer gooien munt boven komt.

**a** Je werpt nu 100 keer met dit geldstuk. Hoeveel keer kop mag je verwachten? Rond af op gehelen.

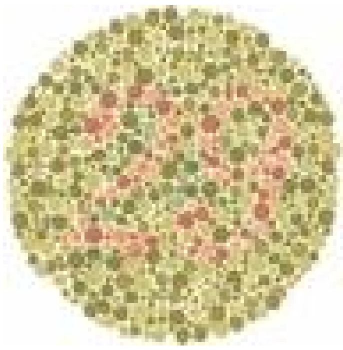
**b** Welke standaardafwijking hoort daarbij?

**c** Beredeneer of dat de standaardafwijking van dit geldstuk groter of kleiner zou zijn dan die van een normaal geldstuk.

# 2.3 Binomiale stochasten

## Inleiding

Plaatjes zoals dit worden gebruikt om te onderzoeken of iemand kleurenblind is. Kleurenblindheid komt voor bij 8% van de westerse mannen en 0,4% van de westerse vrouwen. Via de website **www.kleurenblindheid.nl** kun je er meer over te weten komen. Of iemand kleurenblind is kun je niet aan zijn uiterlijk zien, dus je kunt je bijvoorbeeld afvragen hoe groot de kans is dat er kleurenblinden in jouw klas zitten. En hoeveel je er dan verwacht...



**Figuur 3.1**

### Je leert in dit onderwerp

- het begrip Bernoulli-experiment;
- binomiale stochasten en de bijbehorende kansverdelingen opstellen;
- rekenen met binomiale kansen;
- regels voor de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een binomiale stochast.

### Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij stochasten;
- verwachtingswaarde en standaardafwijking bij een kansverdeling berekenen;
- de regels voor de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van de som van meerdere stochasten.

## Verkennen

### Opgave V1

Lees de tekst van de Inleiding nog eens.

**a** Hoe groot is de kans dat in een klas van de 10 jongens er 2 kleurenblind zijn?

**b** Hoe groot is de kans dat in een klas van 10 jongens en 15 meisjes 2 leerlingen kleurenblind zijn?

**c** Hoeveel kleurenblinden verwacht je in zo'n klas?

## Uitleg

Kleurenblindheid komt voor bij 8% van de westerse mannen. Of iemand kleurenblind is kun je niet aan zijn uiterlijk zien, dus iedere westerse man die je tegenkomt (en verder niet kent) heeft voor jou een kans van 0,08 om kleurenblind te zijn. Vraag je een willekeurige westerse man of hij kleurenblind is of niet, dan doe je een kansexperiment met precies twee uitkomsten: 0 als hij niet kleurenblind is en 1 als dit wel het geval is.

Zo'n kansexperiment heet een Bernoulli-experiment naar de Zwitserse wiskundige **Jakob Bernoulli (1654—1705)**.
De bijbehorende kansverdeling is:

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\text{P}(X = x)$ | 0,92 | 0,08 |

**Tabel 3.1**

Vraag je 10 westerse mannen naar kleurenblindheid dan voer je het Bernoulli-experiment 10 keer uit: je herhaalt 10 keer hetzelfde experiment. De bijbehorende stochast is $K = 10X$ en de kans dat er 2 kleurenblinden bij zijn is:

$\text{P}(K = 2) = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8 \cdot \binom{10}{2}$

waarin $\binom{10}{2}$ het aantal mogelijke combinaties van 2 uit 10 voorstelt.
Dit getal is het aantal mogelijke takken in de bijbehorende kansboom van 10 lagen met 2 kleurenblinden en 8 niet-kleurenblinden.

Een complete kansverdeling van $K$ ziet er zo uit:

- $\text{P}(K = 0) = 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{10} \cdot \binom{10}{0}$
- $\text{P}(K = 1) = 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^9 \cdot \binom{10}{1}$
- $\text{P}(K = 2) = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8 \cdot \binom{10}{2}$
- ...
- $\text{P}(K = 10) = 0{,}08^{10} \cdot 0{,}92^0 \cdot \binom{10}{10}$

Bij deze kansverdeling kun je eenvoudig de verwachting en de standaarddeviatie berekenen, bijvoorbeeld zo:
$\text{E}(K) = \text{E}(10X) = 10 \cdot \text{E}(X) = 10 \cdot 0{,}08 = 0{,}8$
en
$\sigma(K) = \sigma(10X) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X) \approx \sqrt{10} \cdot 0{,}27 \approx 0{,}86$.

## Opgave 1

Bekijk de stochast $X$ in de **Uitleg**.

**a** Laat zien, dat $\text{E}(X) = 0{,}08$ en $\sigma(X) \approx 0{,}86$.

**b** Nu is $K = 10X$. Leg uit waarom $K$ de som van 10 onafhankelijke Bernoulli-experimenten is.

**c** Bereken $\text{P}(K = 4)$.

## Opgave 2

Je werpt met twee dobbelstenen en bepaalt na de worp de som van het aantal bovenliggende ogen. De stochast $X$ geeft aan of het aantal ogen zeven is of niet:

- $X = 0$ betekent dat je geen zeven ogen gooit.
- $X = 1$ betekent dat je zeven ogen gooit.

**a** Stel een kansverdeling voor $X$ op.

**b** Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $X$ exact.

Je gooit nu twaalf keer met twee dobbelstenen. Je let op het aantal keren $A$ dat je zeven ogen gooit.

**c** Hoe groot is de kans dat je drie keer zeven ogen gooit, dus hoe groot is $\text{P}(A = 3)$?

**d** Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $A$. Rond zo nodig af op vier decimalen.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Een **Bernoulli-experiment** is een kansexperiment met precies twee uitkomsten: ‘succes’ of ‘mislukking’. Daarbij hoort een stochast $B$ die de waarden 0 en 1 heeft. Je kunt er daarom de volgende kansverdeling bij opstellen:

| $b$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\text{P}(B = b)$ | $1 - p$ | $p$ |

**Tabel 3.2**

Als je een Bernoulli-experiment $n$ keer herhaalt en stochast $X$ stelt het aantal successen daarbij voor, dan heeft $X$ een **binomiale kansverdeling**. Een binomiaal kansexperiment bestaat dus uit $n$ gelijke onafhankelijke experimenten met elk precies twee uitkomsten.

De kans op $k$ successen is $\text{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$. Ook nu is $p$ de kans op succes en verder is $0 \leq k \leq n$.

De variabelen $n$ en $p$ noem je de **parameters** van de binomiale verdeling.

Als bijvoorbeeld $n = 8$ en $p = 0{,}3$ dan noteer je ook wel voor de kans op $k$ successen:
$\text{P}(X = k | n = 8 \text{ en } p = 0{,}3)$

Voor een binomiaal verdeelde stochast met parameters $n$ en $p$ geldt dat

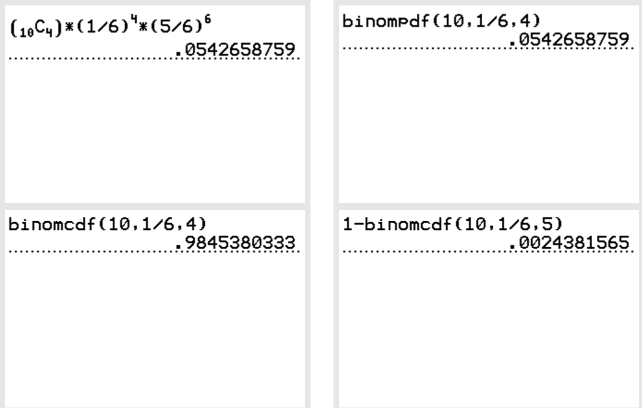
- de **verwachtingswaarde** is: $\text{E}(X) = n \cdot p$
- de **variantie** is: $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$
- de **standaardafwijking** is: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

### Voorbeeld 1

Je gooit met tien dobbelstenen.

- Hoe groot is de kans dat er 4 zessen boven komen te liggen?
- Hoe groot is de kans dat er hoogstens 4 zessen boven komen te liggen?
- Hoe groot is de kans dat er minstens 6 zessen boven komen te liggen?

Antwoord




**Figuur 3.2**

Het aantal zessen dat boven komt, is een binomiale stochast $X$ met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.

De eerste gevraagde kans is: $\text{P}\left(X = 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right)$.

Je kunt deze kans zelf berekenen:

$\text{P}\left(X = 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right) =$

$= \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}0543$

De grafische rekenmachine kan deze kans ook in één keer voor je berekenen, zie het **Practicum**.

De grafische rekenmachine is zeker handig als je de kans op hoogstens $4$ zessen wilt weten. Want in plaats van de kansen voor $X = 0{,}1{,}2{,}3$ en $4$ afzonderlijk te berekenen en dan op te tellen, kan de grafische rekenmachine dit in één keer. Je gebruikt dan de cumulatieve binomiale verdeling.

De kans op hoogstens $4$ zessen is:

$\text{P}\left(X \leq 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}9845$

De kans op minstens $6$ zessen is:

$\text{P}\left(X \geq 6 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right) = 1 - \text{P}\left(X \leq 5\right) \approx 0{,}0024$

## Opgave 3

In **Voorbeeld 1** wordt met tien dobbelstenen geworpen en let je op het aantal zessen $X$ dat boven komt.

**a** Waarom is $X$ een binomiale stochast?

**b** Bereken $\text{P}\left(X = 6\right)$. Bereken deze kans met de hand en met behulp van de grafische rekenmachine. Rond af op vier decimalen.

**c** Bereken de kans dat er hoogstens $6$ zessen boven komen te liggen. Rond af op vier decimalen.

**d** Bereken de kans dat er minstens $4$ zessen boven komen te liggen. Rond af op vier decimalen.

## Opgave 4

Er wordt 30 keer met een zuivere dobbelsteen gegooid. Bereken in vier decimalen de kans dat er:

**a** precies 5 keer een zes wordt geworpen;

**b** bij alle worpen een oneven aantal ogen boven komt;

**c** bij hoogstens 10 worpen een 1 of 2 boven komt.

## Opgave 5

Neem aan dat stochast $X$ binomiaal verdeeld is. Bepaal de volgende kansen in vier decimalen.

**a** $\text{P}(X \leq 8 | n = 15 \text{ en } p = 0{,}15)$

**b** $\text{P}(X < 9 | n = 55 \text{ en } p = 0{,}35)$

**c** $\text{P}(42 \leq X \leq 54 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}45)$

**d** $\text{P}\left(X \leq 2 \text{ of } X \geq 5 | n = 8 \text{ en } p = \frac{1}{3}\right)$

**e** $\text{P}(X \geq 10 | n = 16 \text{ en } p = 0{,}005)$

## Voorbeeld 2

Je gooit met 10 dobbelstenen. Stochast $X$ geeft het aantal zessen aan dat boven komt te liggen. Stel een kansverdeling op voor $X$ en bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking.

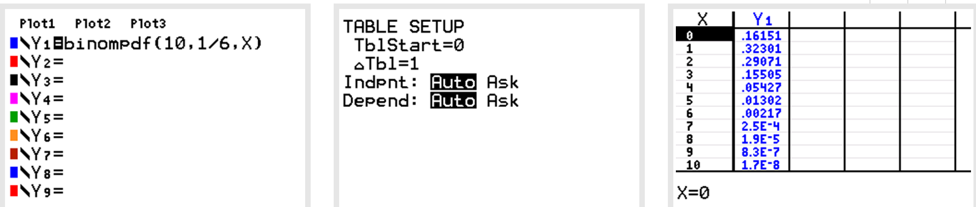
Antwoord

$X$ is een binomiale stochast met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.

Bepaal nu de kansen voor $X = 0,1,2,3,...,10$.

Het gaat om kansen van de vorm $\text{P}\left(X = x | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right)$.

Voer dit op de grafische rekenmachine als functie in, dan maakt de grafische rekenmachine de kansverdeling voor je. Zie het **Practicum**.




**Figuur 3.3**

De verwachtingswaarde is $\text{E}(X) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{6} = 1\frac{2}{3}$ zessen.

De standaardafwijking is $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 1{,}18$ zessen.

## Opgave 6

Je gooit met 12 dobbelstenen. Stochast $X$ geeft het aantal dobbelstenen dat met twee ogen of minder boven komt te liggen.

**a** Hoe stel je een kansverdeling op voor $X$?

**b** Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van stochast $X$. Rond indien nodig af op vier decimalen.

### Opgave 7

Erwin is een ervaren boogschutter, die één op de vier keer in de roos schiet. Bij een wedstrijd schiet Erwin vijf keer op een doelwit. Voor ieder schot in de roos krijgt hij $10$ punten, voor elk ander schot krijgt hij $0$ punten.

**a** Stel een kansverdeling op voor het aantal punten dat Erwin kan halen. Rond af op vier decimalen.

**b** Bereken de verwachtingswaarde en standaardafwijking van het aantal punten dat Erwin kan halen exact.

### Opgave 8

Bepaal telkens de juiste waarde(n) van $a$. Rond indien nodig af op drie decimalen.

**a** $\text{P}(X = 3 | n = a \text{ en } p = 0{,}25) < 0{,}25$

**b** $\text{P}(X \geq a | n = 7 \text{ en } p = 0{,}30) > 0{,}20$

**c** $\text{P}(X = 5 | n = 17 \text{ en } p = a) < 0{,}20$

### Voorbeeld 3

Uit onderzoek blijkt dat 8% van de westerse mannen kleurenblind is. Je vraagt vijftig willekeurig gekozen westerse mannen of ze kleurenblind zijn. Hoeveel kleurenblinde mannen verwacht je in je steekproef aan te treffen? Hoe groot is de kans dat je meer dan vier kleurenblinde mannen in je steekproef aantreft?

Antwoord

Stel stochast $K$ is het aantal kleurenblinde mannen in de steekproef. $K$ kun je opvatten als een binomiaal verdeelde stochast met parameters $n = 50$ en $p = 0{,}08$.

De verwachtingswaarde is: $\text{E}(K) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}08 = 4$ mannen.
De standaardafwijking is:
$\sigma(K) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{50 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92} \approx 1{,}9$ mannen.

De kans op $X > 4$ kun je zo opschrijven:
$\text{P}(K > 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08)$.
Deze kans is gelijk aan: $1 - \text{P}(K \leq 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08) \approx 0{,}3710$.

De grafische rekenmachine kan die kans snel voor je berekenen.

### Opgave 9

In **Voorbeeld 3** worden kansen berekend dat er in een groep van $50$ mannen een bepaald aantal kleurenblind is. Rond de volgende kansen steeds af op vier decimalen.

**a** Bereken de kans op precies $6$ kleurenblinden in de groep van $50$.

**b** Bereken de kans op minstens $6$ kleurenblinden in de groep van $50$.

**c** Bereken de kans op minstens $6$ en hooguit $9$ kleurenblinden in de groep van $50$.

### Opgave 10

Een aantal mensen wordt ieder jaar ingeënt tegen griep. Van een bepaalde entstof weet men dat acht van de tien mensen geen griep krijgen. Een huisarts vaccineert vier patiënten A, B, C en D met deze entstof.

**a** Hoeveel patiënten zullen naar verwachting geen griep krijgen?

**b** Bepaal de kans dat hooguit één van de vier patiënten griep krijgt.

**c** Bepaal de kans dat de patiënten A en B geen griep krijgen en C en D wel.

**d** Bepaal de kans dat twee van de vier patiënten griep krijgen. Hoe had je dat makkelijk uit c kunnen afleiden?

## Verwerken

### Opgave 11

Neem aan dat stochast $X$ binomiaal verdeeld is. Bepaal de volgende kansen in vier decimalen.

**a** $\text{P}(X \leq 6 | n = 20 \text{ en } p = 0{,}45)$

**b** $\text{P}(X > 8 | n = 15 \text{ en } p = 0{,}35)$

**c** $\text{P}(X \geq 46 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}55)$

**d** $\text{P}(X \leq 5 | n = 25 \text{ en } p = 0{,}25)$

**e** $\text{P}(X < 16 | n = 30 \text{ en } p = 0{,}45)$

### Opgave 12

Je gooit met vijf viervlaksdobbelstenen. Stochast $X$ geeft het aantal vieren aan dat boven komt te liggen.

**a** Stel de kansverdeling op voor $X$. Rond de kansen af op vier decimalen.

**b** Bereken $\text{E}(X)$ en $\sigma(X)$. Rond indien nodig af op twee decimalen.

### Opgave 13

$X$ is een binomiaal verdeelde toevalsvariabele. Bepaal telkens de juiste waarde van $x$. Rond indien nodig af op twee decimalen.

**a** $\text{P}(X \leq x | n = 100 \text{ en } p = 0{,}35) \approx 0{,}1236$

**b** $\text{P}(X \leq x | n = 18 \text{ en } p = 0{,}45) < 0{,}7473$

**c** $\text{P}\left(X > x | n = 12 \text{ en } p = \frac{1}{3}\right) < 0{,}1777$

**d** $\text{P}(X \leq 3 | n = 15 \text{ en } p = x) > 0{,}2$

**e** $\text{P}(X \geq 10 | n = 50 \text{ en } p = x) < 0{,}2$

### Opgave 14

Een volledig kaartspel bestaat uit $52$ kaarten, van elke kleur (ruiten, harten, klaveren en schoppen) evenveel. Uit zo'n kaartspel wordt zes keer een kaart getrokken: er wordt gekeken of het een hartenkaart is of niet. De kaart die je trekt, wordt steeds in het spel teruggestopt alvorens een nieuwe kaart te nemen. Het spel kaarten wordt voor iedere trekking geschud.

**a** Waarom is hier sprake van een binomiaal kansmodel?

**b** Hoe groot is de kans op hoogstens drie hartenkaarten? Geef je antwoord in vier decimalen.

**c** Hoe groot is de kans dat je meer dan drie hartenkaarten trekt? Geef je antwoord in vier decimalen.

**d** Waarom is er geen sprake van een binomiaal kansmodel als je de getrokken kaarten niet teruglegt?

### Opgave 15

Van een grote populatie is bekend dat $35\%$ een bepaalde eigenschap heeft. Uit deze populatie wordt heel erg vaak een willekeurige groep van $100$ mensen gekozen. Gemiddeld wordt er in ongeveer $12\%$ van die steekproeven $x$ of minder mensen met die eigenschap aangetroffen.

**a** Hoe groot is $x$?

Van een andere populatie is bekend dat een zesde deel een bepaalde eigenschap heeft. Uit deze populatie wordt een steekproef getrokken. De kans dat in deze steekproef hoogstens drie mensen worden aangetroffen met die eigenschap is ongeveer $0{,}768$.

**b** Bepaal de grootte van de steekproef.

### Opgave 16

Van een binomiaal verdeelde stochast $X$ weet je dat de verwachtingswaarde $2\frac{2}{3}$ is. De standaardafwijking is $1\frac{1}{3}$.

Bereken $\text{P}(X = 4)$. Rond af op vier decimalen.

## Toepassen

### Opgave 17: Meerkeuzetoets

Een meerkeuzetoets bestaat uit $50$ vragen, elk met vier mogelijke antwoorden, waarvan er slechts één juist is.

De docente die deze toets heeft gemaakt wil de normering ervan vaststellen. De cijfers worden tot op één decimaal nauwkeurig berekend; het laagst mogelijke cijfer is 1,0 en het hoogst mogelijke 10,0. Zij wil bij het vaststellen van het cijfer het gokken van antwoorden zo min mogelijk belonen.

**a** Ze zou er daartoe voor kunnen kiezen om het aantal verwachte goede antwoorden bij zuiver gokken niet te belonen. Verder werkt ze met een vast aantal punten per vraag.

Welke normering zou ze dan het best kunnen hanteren?

**b** Zij kan ook besluiten dat bij willekeurig invullen de kans op het cijfer 4,0 of hoger bij benadering niet meer dan 3% mag zijn. Voor hoeveel goede antwoorden wordt dan het cijfer 4,0 gegeven?

Ga er nu van uit dat er een zuiver lineaire puntenverdeling wordt gehanteerd:

- bij 0 tot 5 vragen goed krijg je een 1,0;
- bij 6 vragen goed krijg je een 1,2;
- bij 7 vragen goed krijg je een 1,4;
- ...
- bij 50 vragen goed een 10,0.

**c** Je weet op 30 vragen het goede antwoord en besluit de rest van de vragen op goed geluk in te vullen. Welk cijfer kun je verwachten?

**d** Bereken, in de situatie bij c, de kans dat je een 7,6 of meer scoort. Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

**e** Bij $n$ zeker goede antwoorden en de overige vragen willekeurig invullen is de kans op minstens 7,0 groter dan 90%. Bereken $n$.

### Opgave 18: Geometrische kansverdeling

Als je een Bernoulli-experiment $n$ keer herhaalt en stochast $X$ stelt het aantal successen daarbij voor, dan heeft $X$ een binomiale kansverdeling. Je kunt ook een Bernoulli-experiment net zo vaak uitvoeren totdat je één keer succes hebt. Hoe vaak je dan het experiment moet uitvoeren is afwachten. De bijbehorende stochast heeft dan een geometrische verdeling. In deze opgave zie je daar een voorbeeld van.

Bij het spel ‘Mens erger je niet’ moet je eerst met een dobbelsteen een zes hebben gegooid, voordat je een pion op het speelveld mag plaatsen.

Stochast $X$ stelt het aantal keren gooien voordat je een pion op het speelveld mag plaatsen voor.

**a** Bereken $\text{P}(X = 5)$. Rond af op vier decimalen.

**b** Toon aan dat $\text{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$.

**c** Toon aan dat $\frac{1}{6} \cdot \text{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$.

**d** Bereken de verwachtingswaarde van $X$.

## Testen

### Opgave 19

Je werpt 10 keer met een zuiver geldstuk. Stochast $K$ geeft het aantal keren kruis bij deze worpen.

**a** Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van stochast $K$.

Stochast $L$ geeft het aantal keren kruis als je 1000 keer gooit.

**b** Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $L$.

### Opgave 20

Een test bestaat uit $15$ vierkeuzevragen. Slechts bij $5$ van deze vragen kun je met zekerheid het goede antwoord aangeven. Je besluit de $10$ andere vragen op goed geluk een antwoord aan te geven.

**a** Hoe groot is de kans dat je $12$ vragen van de test het goede antwoord hebt gegeven?

**b** Hoe groot is de kans dat je meer dan $5$ vragen goed beantwoordt?

**c** Hoeveel vragen van de test mag je verwachten goed te beantwoorden?

### Opgave 21

In het casino mag je voor € 10,00 met tien zuivere dobbelstenen werpen. Voor iedere dobbelsteen waar je minder dan $4$ ogen mee gooit krijg je € 2,00 uitbetaald.

Hoe groot is de kans dat je winst maakt bij dit spel?

## Practicum

Met de volgende practica kun je **het werken met kansverdelingen op de grafische rekenmachine** doornemen. Vooralsnog heb je alleen de binomiale kansverdeling nodig, alleen de eerste drie onderdelen van het gewenste practicum.

- **Kansverdelingen met de TI84**
- **Kansverdelingen met de TInspire**
- **Kansverdelingen met de Casio fx-CG50**
- **Kansverdelingen met de HP-prime**
- **Kansverdelingen met de NumWorks**

# 2.4 Niet-binomiaal

## Inleiding

Het binomiale kansmodel is erg overzichtelijk: er zijn maar twee mogelijkheden ‘succes’ of ‘mislukking’ en het gaat om herhaling van steeds dezelfde kanssituatie. Maar natuurlijk bestaan ook discrete stochasten waarbij geen herhaling plaatsvindt. Denk in het vaasmodel aan een trekking zonder teruglegging.

**Je leert in dit onderwerp**

- het begrip hypergeometrische stochast en de bijbehorende kansverdeling opstellen;
- regels voor de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van deze stochasten;
- trekken zonder terugleggen binomiaal benaderen.

**Voorkennis**

- het vaasmodel;
- een kansverdeling opstellen bij een vaasmodel;
- de regels voor de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van de som van meerdere stochasten.

## Verkennen

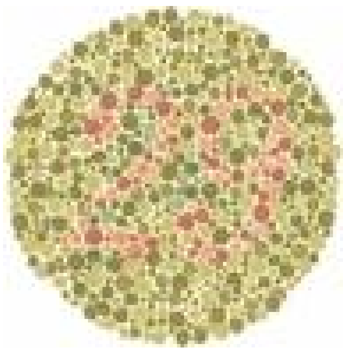
### Opgave V1

In een groep van $25$ mannen zijn $2$ leden van die groep kleurenblind. Je trekt aselect een steekproef van vier mannen uit deze groep.

**a** Hoe groot is de kans dat daarbij één kleurenblinde man zit?

Van alle westerse mannen is een proportie van 8% kleurenblind. Je trekt aselect een steekproef van vier mannen uit deze groep.

**b** Hoe groot is de kans dat daarbij één kleurenblinde man zit?



Figuur 4.1

## Uitleg 1

In een groep van $30$ personen hebben $10$ mensen een bepaalde eigenschap en de rest niet. Uit die groep wordt aselect een steekproef van $5$ getrokken. Stochast $M$ is het aantal mensen met deze eigenschap in de steekproef.

Wil je nu een kansverdeling voor $M$ opstellen, bedenk dan dat het hier gaat om trekking zonder teruglegging. Dit betekent dat de kansen afhankelijk van elkaar zijn en dat een binomiaal kansmodel niet mogelijk is. $M$ is nu een hypergeometrische stochast. De kans op bijvoorbeeld $M = 2$ kun je zo berekenen:

$$\text{P}(M = 2) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{20}{28} \cdot \frac{19}{27} \cdot \frac{18}{26} \cdot \binom{5}{2} \approx 0{,}3600$$

Deze kans kun je ook uitrekenen door het aantal gunstige mogelijkheden en het totale aantal mogelijkheden te tellen met behulp van combinaties:

$$\text{P}(M=2) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{20}{3}}{\binom{30}{5}}$$

Ga na dat je de volgende kansverdeling krijgt:

| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(M=m)$ | 0,1088 | 0,3400 | 0,3600 | 0,1600 | 0,0295 | 0,0018 |

**Tabel 4.1**

Je kunt met behulp van de tabel en de grafische rekenmachine de verwachtingswaarde en de standaardafwijking berekenen.
Je vindt $\text{E}(M) \approx 1{,}667$ en $\sigma(M) \approx 0{,}979$.

Kennelijk gaat $\text{E}(M) = 5 \cdot \frac{10}{30} = 1\frac{2}{3} \approx 1{,}667$ ook hier op, maar dit geldt niet voor de formule die bij de binomiale verdeling voor de standaardafwijking geldt:

$$\sigma(M) \neq \sqrt{\frac{10}{30}\left(1 - \frac{10}{3}\right)} \approx 0{,}471$$

Dit komt doordat het gaat om zonder terugleggen en de kans op succes niet $\frac{10}{30}$ blijft, nadat je één of meer trekkingen hebt gedaan.

### Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** de kansverdeling van stochast $M$ die het aantal mensen met een bepaalde eigenschap in een steekproef uit een kleine populatie van 30 personen weergeeft.

**a** Reken de kansen uit de kansverdeling van stochast $M$ na.

**b** Bereken $\text{E}(M)$ en $\sigma(M)$. Rond af op vier decimalen.

**c** Waarom is hier geen sprake van een binomiale kansverdeling?

## Uitleg 2

In een groep van 30000 personen hebben 10000 personen een bepaalde eigenschap en de rest niet. Uit die groep wordt aselect een steekproef van 5 getrokken.
Stochast $M$ is het aantal mensen met deze eigenschap in deze steekproef.

Wil je nu een kansverdeling voor $M$ opstellen, bedenk dan opnieuw dat het hier gaat om trekking zonder terugleggen. Dit betekent dat de kansen afhankelijk van elkaar zijn en dat een binomiaal kansmodel niet mogelijk is.
De kans op $M = 2$ is:

$$\text{P}(M=2) = \frac{10000}{30000} \cdot \frac{9999}{29999} \cdot \frac{20000}{29998} \cdot \frac{19999}{29997} \cdot \frac{19998}{29996} \cdot \binom{5}{2} \approx 0{,}3292$$

Nu verschilt een breuk als $\frac{9999}{29999}$ vrijwel niet van $\frac{10000}{30000} = \frac{1}{3}$.

Daarom kun je als je een kleine steekproef uit een heel grote populatie trekt, toch het binomiale kansmodel gebruiken. Hoewel het eigenlijk niet om onafhankelijke kansen gaat.

$\text{P}(M = 2) \approx \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \binom{5}{2} \approx 0{,}3292$

Je ziet dat beide kansen bij benadering gelijk zijn aan elkaar. Daarom wordt in de praktijk bij een steekproef uit een veel grotere populatie waarbij het gaat om het wel of niet hebben van een bepaalde eigenschap, gewoon het binomiale kansmodel gebruikt.

### Opgave 2

Bekijk in **Uitleg 2** de kansverdeling van stochast $M$ die het aantal mensen met een bepaalde eigenschap in een steekproef uit een grote populatie van $30000$ personen weergeeft.

**a** Bereken $\text{P}(M = 3)$ en $\text{P}(M = 4)$. Benader deze kansen ook met behulp van het binomiale kansmodel. Rond in beide gevallen af op vier decimalen.

**b** Bereken $\text{E}(M)$ en $\sigma(M)$. Rond af op drie decimalen.

**c** Waarom kun je de kansverdeling van $M$ heel goed benaderen door een binomiale kansverdeling?

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Heel vaak is in een bepaalde kanssituatie helemaal geen sprake van een binomiale stochast. Er is dan geen sprake van een herhaling van onafhankelijke Bernoulli-experimenten (succes of mislukking).

Een belangrijk geval is de **hypergeometrische stochast**. Daarbij gaat het om een **populatie** van $N$ elementen waarvan er $a$ een bepaalde eigenschap hebben. Je trekt daaruit zonder terugleggingeen **steekproef** van $n$ elementen. De hypergeometrische stochast $X$ is dan het aantal elementen in de steekproef dat deze eigenschap heeft. De kans op $X = x$ is:

$\text{P}(X = x) = \frac{a}{N} \cdot \frac{a-1}{N-1} \cdot \ldots \cdot \frac{N-a}{N-x} \cdot \frac{N-a-1}{N-x-1} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{x}$

Met behulp van combinaties kun je dit ook uitrekenen:

$$\text{P}(X = x) = \frac{\binom{a}{x} \cdot \binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Voor de verwachtingswaarde geldt: $\text{E}(X) = n \cdot \frac{a}{N}$. De standaardafwijking van $X$ kun je nu alleen uit de kansverdeling zelf halen. Daarom bepaal je in de praktijk zowel $\text{E}(X)$ als $\sigma(X)$ met behulp van de grafische rekenmachine.

Bij een **kleine steekproef uit een heel grote populatie** kun je toch wel het binomiale kansmodel gebruiken, hoewel het eigenlijk niet om onafhankelijke kansen gaat. Dat komt omdat dan breuken als $\frac{a}{N}$ en $\frac{a-1}{N-1}$ vrijwel gelijk zijn. In de praktijk wordt bij een steekproef uit een heel veel grotere populatie waarbij het gaat om het wel of niet hebben van een bepaalde eigenschap, gewoon het binomiale kansmodel gebruikt.

## Voorbeeld 1

In een klas zitten 12 jongens en 9 meisjes. Daaruit wordt een aselecte steekproef van vier personen gekozen. Stochast $M$ is het aantal meisjes in de steekproef.

Stel een kansverdeling op voor $M$ en bepaal de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $M$.

Antwoord

Bij de steekproef gaat het om trekking zonder terugleggen van vier elementen uit een populatie van 21. $M$ is een hypergeometrische stochast.

De kans op bijvoorbeeld $M = 3$ is:

$\mathrm{P}(M = 3) = \frac{9}{21} \cdot \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{12}{18} \cdot 4 \approx 0{,}1684$

De complete kansverdeling wordt:

| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(M = m)$ | 0,0827 | 0,3308 | 0,3970 | 0,1684 | 0,0211 |

**Tabel 4.2**

Met de grafische rekenmachine vind je dan: $\mathrm{E}(M) \approx 1{,}71$ en $\sigma(M) \approx 0{,}91$.

## Opgave 3

In **Voorbeeld 1** gaat het om een steekproef van 4 uit een populatie van 21 personen. $M$ is het aantal meisjes in de steekproef.

**a** Waarom is $M$ geen binomiale stochast?

**b** Bereken in vier decimalen de kans dat er minstens 3 meisjes in de steekproef voorkomen.

## Opgave 4

In een vaas zitten twee witte en drie rode balletjes. Uit deze vaas worden zonder teruglegging balletjes getrokken, totdat er een wit balletje wordt getrokken.

Bereken algebraïsch de verwachting, de variantie en de standaardafwijking van het aantal benodigde trekkingen.

### Opgave 5

Een gezelschap bestaat uit zes mannen en zeven vrouwen. Op een buurtfeest moet op aselecte wijze een team van vier personen uit de groep samengesteld worden om aan een spel deel te nemen.

**a** Welk kansmodel moet je gebruiken om de kans op een bepaald aantal mannen in de groep te berekenen?

**b** Noem $M$ het aantal mannen in de geselecteerde groep en bereken $\text{P}(M < 2)$. Rond af op vier decimalen.

**c** Onder de mannen en vrouwen zitten $2$ jongens en $4$ meisjes jonger dan 16 jaar. Noem $J$ het aantal jongens in je geselecteerde groep. Is $J$ hypergeometrisch verdeeld? Waarom wel of niet?

**d** Bereken $\text{P}(J < 2)$ exact.

**e** Bereken $\text{E}(J)$ en $\sigma(J)$ exact.

### Voorbeeld 2

Op een scholengemeenschap zitten $1200$ jongens en $900$ meisjes. Daaruit wordt een aselecte steekproef van vier personen getrokken. Stochast $M$ is het aantal meisjes in de steekproef. Stel een kansverdeling op voor $M$ en bepaal de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $M$. Laat zien dat je kansen vrijwel hetzelfde zijn als je een binomiaal kansmodel gebruikt.

Antwoord

Bij de steekproef gaat het om trekking zonder terugleggen van vier elementen uit een populatie van $2100$. $M$ is een hypergeometrische stochast.

De kans op bijvoorbeeld $M = 3$ is:

$$\text{P}(M = 3) = \frac{900}{2100} \cdot \frac{899}{2099} \cdot \frac{898}{2098} \cdot \frac{1200}{2097} \cdot 4 \approx 0{,}1798$$

Dit is vrijwel gelijk aan $\left(\frac{900}{2100}\right)^3 \cdot \frac{1200}{2100} \cdot 4 \approx 0{,}1799$.

Je kunt de kansen goed benaderen met een binomiaal kansmodel:

| $m$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(M = m)$ | $0{,}1066$ | $0{,}3199$ | $0{,}3599$ | $0{,}1799$ | $0{,}037$ |

**Tabel 4.3**

Nu vind je met behulp van een binomiale verdeling:

$$\text{E}(M) = 4 \cdot \frac{900}{2100} = \frac{12}{7} \text{ en } \sigma(M) = \sqrt{4 \cdot \frac{900}{2100} \cdot \frac{1200}{2100}} \approx 0{,}9897.$$

### Opgave 6

In **Voorbeeld 2** gaat het om een steekproef van $4$ uit een populatie van $2100$ personen. $M$ is het aantal meisjes in de steekproef.

**a** Waarom is $M$ nog steeds geen binomiale stochast? Waarom kun je $M$ nu wel goed benaderen met een binomiale stochast?

**b** Bereken de kans dat er minstens $3$ meisjes in de steekproef voorkomen, met $M$ als hypergeometrische stochast en als binomiale benadering. Rond af op vier decimalen.

## Voorbeeld 3

Je hebt gelezen dat op dit moment $23\%$ van alle Nederlandse meisjes van $12$ tot en met $18$ jaar rookt. Je weet dat deze groep meisjes uit ongeveer $450000$ personen bestaat. Je vraagt $80$ jou onbekende Nederlandse meisjes uit die leeftijdscategorie of ze roken. Hoe groot is de kans dat minstens $20$ daarvan roken?

Antwoord

Hier is sprake van een steekproef uit een hele grote populatie. Hoewel in feite sprake is van een hypergeometrische stochast, kun je het aantal rokende meisjes $M$ in de steekproef opvatten als binomiale stochast.

De gevraagde kans is daarom:

$\text{P}(M \geq 20 | n = 80 \text{ en } p = 0{,}23) = 1 - \text{P}(X \leq 19) \approx 0{,}3768$

### Opgave 7

In **Voorbeeld 3** gaat het om het berekenen van kansen dat een bepaald aantal meisjes in een steekproef van $80$ uit een populatie van $450000$ meisjes rookt.

**a** Hoe moet je $\text{P}(M = 15)$ eigenlijk berekenen?

**b** Waarom kun je in dit geval heel goed met een binomiaal kansmodel werken?

**c** Neem nu een steekproefgrootte van $3$ en bereken $\text{P}(M = 1)$. Doe dit zowel als hypergeometrische stochast als met een binomiale benadering. Rond af op vier decimalen.

**d** Beargumenteer in welke algemene situatie(s) het niet meer geoorloofd is om een binomiale benadering te gebruiken voor een hypergeometrische stochast.

### Opgave 8

Van alle leerlingen uit het basisonderwijs is bekend dat $90\%$ rechtshandig is. Hoe groot is de kans dat je in een willekeurig gekozen groep van $30$ kinderen minder dan $25$ rechtshandigen aantreft? Rond af op vier decimalen.

## Verwerken

### Opgave 9

In een klas zitten $8$ jongens en $12$ meisjes. Daaruit wordt een aselecte steekproef van $3$ personen getrokken. Stochast $J$ is het aantal jongens in de steekproef.

**a** Stel de kansverdeling voor $J$ op. Rond de kansen af op vier decimalen.

**b** Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $J$. Rond af op één decimaal.

### Opgave 10

In een doos zitten 20 uiterlijk allemaal dezelfde bonbons. Vijf bonbons hebben echter een roomvulling en de andere een caramelvulling. Uit de doos worden vier bonbons genomen.

**a** Hoe groot is de kans dat er precies één bonbon met een roomvulling uit wordt gehaald? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

**b** Hoe groot is de kans dat er twee of meer bonbons met roomvulling uit de doos worden gehaald? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

**c** Hoe groot is de kans dat de vier er uitgenomen bonbons op één na allemaal een roomvulling hebben? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

### Opgave 11

Een partij van 1000 blikken met groente heeft lange tijd in een magazijn gelegen. Je mag aannemen dat van 10% van de blikken de uiterste verkoopdatum verstreken is. Je kiest aselect 8 blikken uit de partij en controleert de verkoopdatum. Je vraagt je af hoe groot de kans is dat je in die steekproef drie blikken aantreft die te oud zijn.

**a** Bereken deze kans met behulp van de hypergeometrische kansverdeling. Rond af op vier decimalen.

**b** Bereken deze kans ook met het binomiale kansmodel. Rond af op vier decimalen. Hoe groot is het verschil tussen beide berekeningen?

**c** Benader in drie decimalen de kans dat je maximaal 3 blikken gekozen hebt waarvan de uiterste verkoopdatum verstreken is.

### Opgave 12

Een grote partij wijnflessen wordt gekeurd door uit de partij een aselecte steekproef van 20 flessen te nemen. Elke fles wordt nauwkeurig onderzocht op gebreken. Wordt er in de steekproef meer dan één fles gevonden met een gebrek, dan wordt de hele partij afgekeurd. Anders wordt de hele partij goedgekeurd.

**a** 5% van de hele partij flessen heeft gebreken. Hoe groot is de kans dat de partij wordt goedgekeurd? Rond af op vier decimalen.

**b** Acht afnemers nemen ieder afzonderlijk een steekproef van 20 flessen uit deze grote partij.

Hoeveel afnemers keuren de partij naar verwachting af? Rond af op gehelen.

### Opgave 13

Bij het spel hartenjagen krijgt elke speler 13 kaarten toegedeeld. Als een speler van één kleur vier kaarten krijgt en van de andere drie kleuren ieder drie kaarten, wordt dat een vlakke verdeling genoemd.
Bereken de kans op een vlakke verdeling. Rond af op vier decimalen.

### Opgave 14

In een vaas zitten vijf balletjes genummerd 2, 4, 6, 8 en 10. Er worden zonder teruglegging twee balletjes uit de vaas getrokken. Stochast $V$ is het verschil van de nummers van de twee balletjes.

**a** Stel de kansverdeling voor $V$ op.

**b** Bereken zonder grafische rekenmachine de verwachtingswaarde, de variantie en de standaardafwijking van $V$.

## Toepassen

### Opgave 15: Politieke partij

Het bestuur van een politieke partij bestaat uit 20 personen, waarvan $40\%$ jonger is dan 28 jaar. Door het lot worden $4$ personen aangewezen om deel te nemen aan een buitenlandse reis.

**a** Hoeveel personen van de groep van $4$ zijn naar verwachting jonger dan 28 jaar?

**b** Bepaal de kans dat drie van de vier personen jonger zijn dan 28 jaar. Rond af op vier decimalen.

Tijdens een landelijke bijeenkomst van diezelfde partij zijn $n$ leden aanwezig, met $n > 20$. Van deze leden is $40\%$ jonger dan 35 jaar. Door het lot worden $3$ personen aangewezen om deze landelijke groepering te vertegenwoordigen.

**c** Toon aan dat de kans dat twee van de drie afgevaardigden jonger zijn dan 35 jaar gelijk is aan: $\frac{0{,}72n(0{,}4n-1)}{(n-2)(n-1)}$

**d** Geef de binomiale benadering van de gevraagde kans in c. Vanaf welke $n$ is het verschil tussen de eigenlijke kans en de binomiale benadering kleiner dan $0{,}001$?

### Opgave 16: Steaks

Van een lading van meer dan $20$ steaks is bekend dat er twee bedorven zijn. Er worden willekeurig vijf steaks uit de lading gekozen. Twee ervan blijken bedorven. Wat is de minimale grootte van de lading steaks zodanig dat de kans op deze hypergeometrisch verdeelde gebeurtenis hooguit $0{,}25\%$ verschilt met de binomiale benadering?

## Testen

### Opgave 17

In een vaas zitten $12$ rode en $18$ gele balletjes. Joran neemt een greep van $4$ balletjes uit de vaas. Stochast $G$ is het aantal gele balletjes in de greep van $4$ balletjes.

**a** Leg uit waarom stochast $G$ niet binomiaal verdeeld is.

**b** Maak de kansverdeling van stochast $G$.

**c** Hoeveel gele balletjes kan Joran in zijn greep van $4$ balletjes verwachten?

**Opgave 18**

Neem aan dat $98\%$ van de Nederlandse bevolking een ziektekostenverzekering hebben.

Hoe groot is de kans dat bij een groep van $20$ Nederlanders zich hoogstens twee personen bevinden die geen ziektekostenverzekering hebben?

**Opgave 19**

Bij de Lotto moet je zes getallen raden. In een ronddraaiende trommel zitten $41$ balletjes met daarop de getallen $1$ tot en met $41$. Zesmaal wordt een balletje getrokken om de uitslag te verkrijgen.

**a** Hoe groot is de kans dat er zes even nummers worden getrokken?

**b** Als er twee even nummers zijn getrokken, hoe groot is dan nog de kans dat de volgende vier balletjes ook een even nummer hebben?

**c** Hoe groot is de kans, dat elk van de zes getrokken getallen kleiner is dan $15$?

Jos heeft de nummers 5, 10, 15, 20, 25 en 30 op zijn formulier aangekruist.

**d** Hoe groot is de kans dat hij ze alle zes goed heeft?

# 2.5 Poissonverdeling

## Inleiding

Behalve binomiale en hypergeometrische kansmodellen bestaan er nog vele andere discrete kansmodellen. In deze paragraaf maak je kennis met een ander veel voorkomende discreet kansmodel: het Poissonverdeelde kansmodel.
Dit kansmodel is bedacht door **Siméon Poisson (1781—1840)**.

**Figuur 5.1** **Siméon Poisson**

### Je leert in dit onderwerp

- werken met discrete stochasten die Poisson verdeeld zijn
- de bijbehorende kansverdelingen opstellen
- regels voor de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van die stochasten.

### Voorkennis

- een kansverdeling opstellen bij een stochast;
- de verwachting, de variantie en standaardafwijking berekenen op basis van een kansverdeling;
- eventueel (maar niet noodzakelijk): de somformule van een rekenkundige reeks
- eventueel (maar niet noodzakelijk): rekenen met het natuurlijke getal $e$

## Verkennen

### Opgave V1

Een loterij bestaat uit zeshonderd briefjes met de nummers 1 t/m 600. Je koopt een lootje.

**a** Hoeveel bedraagt de verwachtingswaarde van het lotnummer?

De loterij verdeelt bij elke trekking flink wat troostprijzen.

In de gemeente PolderWei ontvangt men per trekking gemiddeld 3 van deze troostprijzen.

**b** Hoe groot is de kans dat PolderWei meer dan 3 troostprijzen ontvangt bij de volgende trekking?

## Uitleg

Een klein bedrijf krijgt dagelijks gemiddeld 3 telefoontjes. Hoe groot is de kans dat dit bedrijf op een dag 4 telefoontjes krijgt?

De stochast $X$ staat voor het aantal telefoontjes dat het bedrijf op een dag binnenkrijgt. Ga ervan uit dat er 8 uur op een dag telefoontjes binnen kunnen komen, dat er voldoende medewerkers aanwezig zijn om alles af te handelen en dat de telefoontjes onafhankelijk van elkaar en willekeurig binnenkomen.

- Verdeel de dag in 8 uren. De kans is $\frac{3}{8}$ dat er in een uur een telefoontje binnenkomt. De verwachtingswaarde van het aantal telefoontjes op een dag is $\frac{3}{8} \cdot 8 = 3$.

  Neem $n = 8$ en $p = \frac{3}{8}$ en bereken de kans op 4 telefoontjes:

  $\binom{8}{4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^4 \approx 0{,}2112$

  $\text{Var}(X) = 8 \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) = 1{,}875$

- Verdeel de dag in 480 minuten. De kans is $\frac{3}{480}$ dat er in een minuut een telefoontje binnenkomt. De verwachtingswaarde van het aantal telefoontjes op een dag is $\frac{3}{480} \cdot 480 = 3$.

  Neem $n = 480$ en $p = \frac{3}{480}$ en bereken de kans op 4 telefoontjes:

  $\binom{480}{4} \cdot \left(\frac{3}{480}\right)^4 \cdot \left(\frac{477}{480}\right)^{476} \approx 0{,}1686$

  $\text{Var}(X) = 480 \cdot \frac{3}{480} \cdot \left(1 - \frac{3}{480}\right) = 2{,}98125$

Je kunt de dag in nog kleinere tijdsintervallen verdelen. Hoe kleiner de tijdsintervallen, hoe kleiner de kans op ‘succes’ in zo'n tijdsinterval. In theorie kan er meer dan één keer ‘succes’ zijn in een tijdsinterval, maar deze kans is nog veel kleiner en wordt daarom verwaarloosd. Je hebt nu te maken met $n$ tijdsintervallen, met telkens dezelfde kans $p$ op ‘succes’. Om te bepalen wat de kans is dat er 4 telefoontjes op een dag binnenkomen, moet je $n$ naar oneindig laten gaan en $p$ naar nul, maar zodanig dat $n \cdot p = 3$. Het blijkt dan dat $\text{P}(X = 4) \approx 0{,}1680$ en dat $\text{Var}(X) = 3$.

Een kansverdeling die voldoet aan deze situatie wordt een Poissonverdeling genoemd. Deze kansverdeling is ontdekt door Siméon Poisson.

Stel dat het bedrijf gemiddeld $\lambda$ telefoontjes op een dag binnenkrijgt, dan kun je de volgende formule gebruiken:

$\text{P}(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \text{e}^{-\lambda}$, waarbij $\text{e} = 2{,}718...$

Het getal e kun je net zoals $\pi$ vinden op de grafische rekenmachine.

Verder geldt: $\text{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda$

Kansen bij een Poissonverdeling kunnen ook met de grafische rekenmachine berekend worden, bekijk daarvoor het **Practicum**.

**Opgave 1**

Bekijk de **Uitleg** over een bedrijf dat gemiddeld $3$ telefoontjes op een dag binnenkrijgt.

**a** Controleer met de formule dat P $(X = 4) \approx 0{,}1680$.

**b** Bereken de kans dat er op een dag $5$ telefoontjes binnenkomen. Rond af op vier decimalen.

**c** Bereken de kans dat er meer dan $1$ telefoontje op een dag binnenkomt. Rond af op vier decimalen.

**d** Voor het bepalen wat de kans is dat het bedrijf in een werkweek $16$ telefoontjes binnenkrijgt, kun je ook de formule uit de uitleg gebruiken. Alleen nu is $\lambda$ gelijk aan het gemiddeld aantal telefoontjes in een werkweek.

Bereken in vier decimalen de kans dat het bedrijf in een werkweek $16$ telefoontjes binnenkrijgt.

**Opgave 2**

Bekijk de **Uitleg** over de Poissonverdeling.

**a** Verdeel de dag in seconden en benader de kans van P $(X = 4)$.

**b** Verdeel de dag in $n$ tijdsintervallen en zorg dat $np = 3$ met $p$ de kans op succes.

Toon aan dat de kans op $4$ telefoontjes op een dag als je dit binomiaal benadert, gelijk is aan: P $(X = 4) = \binom{n}{4} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n-4}$

**c** Je mag aannemen dat $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n-4} = \text{e}^{-3}$.

Toon aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{4} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n-4} = \frac{3^4}{4!} \cdot \text{e}^{-3}$.

**d** Toon aan dat Var $(X) = 3$. Gebruik daarvoor de variantie van een binomiaal verdeelde stochast.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Een discrete stochast $X$ heeft een **Poissonverdeling** met parameter $\lambda$ (lambda), als er verwacht wordt dat een bepaalde relatief zeldzame gebeurtenis gemiddeld $\lambda$ keer voorvalt in een bepaalde tijdsperiode. Voorwaarden zijn wel dat de gebeurtenissen:

- niet tegelijk kunnen optreden
- onafhankelijk van elkaar optreden
- willekeurig voorkomen

De laatste voorwaarde betekent dat als je de tijdsperiode in gelijke delen verdeelt, de kans dat een gebeurtenis in elk tijdsdeel voorvalt dan even groot is.

Een tijdsperiode kan ook een lengte, afstand, oppervlakte, enzovoort zijn.

Er geldt:

- $\text{P}(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \text{e}^{-\lambda}$
- $\text{E}(X) = \lambda$ en $\text{Var}(X) = \lambda$

In deze paragraaf mag je ervan uitgaan dat de gebeurtenissen (bij benadering) een Poissonverdeling hebben, tenzij anders vermeld.

## Voorbeeld 1

Gemiddeld komen er wereldwijd 60 vulkaanuitbarstingen per jaar voor.

Wat is in drie decimalen de kans dat er in een week twee vulkaanuitbarstingen plaatsvinden?

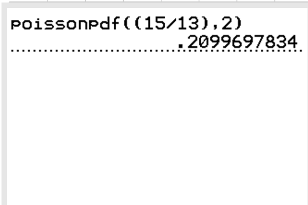
Antwoord

Stochast $X$ is het aantal vulkaanuitbarstingen per week en je mag voor $X$ de Poissonverdeling gebruiken. Opmerking: of je in werkelijkheid $X$ als Poissonverdeling mag beschouwen is afhankelijk van verschillende complexe factoren, waar verder niet op wordt ingegaan.

Als je uitgaat van 52 weken in een jaar, dan is het gemiddelde aantal vulkaanuitbarstingen per week gelijk aan $\lambda = \frac{60}{52} = 1\frac{2}{13}$.

$$\text{P}\left(X = 2 | \lambda = 1\tfrac{2}{13}\right) = \frac{\left(1\frac{2}{13}\right)^2}{2!} \cdot \text{e}^{-1\frac{2}{13}} \approx 0{,}210$$

Dit kun je ook met de grafische rekenmachine uitrekenen.




Figuur 5.2

## Opgave 3

In **Voorbeeld 1** is gegeven dat er gemiddeld 60 vulkaanuitbarstingen per jaar zijn en dat dit Poissonverdeeld is.

**a** Waarom mag je het gemiddelde per jaar delen door 52 om het gemiddelde per week te krijgen?

**b** Hoe groot is de kans dat er 7 vulkaanuitbarstingen in een maand zijn?

## Opgave 4

Tijdens mooie herfstdagen komen er gemiddeld 7 klanten per uur een ijsje kopen bij een snackbar.

**a** Waarom kun je het aantal klanten per uur bij deze snackbar tijdens mooie herfstdagen behandelen als een Poissonverdeelde stochast?

**b** Hoe groot is de kans dat er op een zomerse herfstdag minder dan 7 klanten per uur een ijsje kopen bij de snackbar? Rond af op vier decimalen.

**c** Hoe groot is de kans dat er tijdens zo'n mooie herfstdag in twee uur tijd 7 klanten een ijsje kopen bij de snackbar? Rond af op vier decimalen.

**d** Hoe groot is de standaardafwijking van het aantal klanten per uur op een mooie herfstdag? Rond af op twee decimalen.

### Voorbeeld 2

Een secretaresse maakt gemiddeld één typefout op een bladzijde tekst.

Bereken de kans dat de secretaresse op een bladzijde meer dan vijf typefouten maakt.

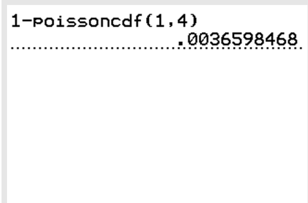
Antwoord

Noem $X$ het aantal typefouten dat de secretaresse op een bladzijde maakt. Je mag voor $X$ de Poissonverdeling gebruiken.

$\text{P}(X > 5 | \lambda = 1) = 1 - \text{P}(X \leq 4)$

Je kunt $\text{P}(X \leq 4)$ met de hand uitrekenen, maar met de grafische rekenmachine gaat dat sneller.

Je vindt $\text{P}(X > 5) \approx 0{,}004$.



Figuur 5.3

### Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je dat een secretaresse gemiddeld $1$ typefout op een bladzijde tekst maakt.

**a** Bereken in vier decimalen de kans dat de secretaresse minder dan $4$ typefouten op een bladzijde maakt.

**b** Bereken in vier decimalen de kans dat de secretaresse op vijf bladzijden tekst minstens 6 typefouten maakt.

### Opgave 6

Van een softwareprogrammeur is bekend dat zij gemiddeld per $500$ regels code $3$ bugs (softwarefoutjes) veroorzaakt. Haar opdrachtgever geeft haar de opdracht om een stuk software te schrijven dat $500$ regels code zal bevatten.

**a** Hoe groot is de kans dat er helemaal geen bugs in zullen zitten? Rond af op vier decimalen.

**b** Hoeveel bugs verwacht je als de programmeur $4$ stukken code van ieder $500$ regels maakt?

**c** Hoe groot is de kans dat er in totaal meer dan $3$ bugs in de $4$ stukken code staan? Rond af op vier decimalen.

## Verwerken

### Opgave 7

Waarom is bij de volgende situaties een Poissonverdeling niet zo geschikt om te gebruiken?

1. Het aantal klanten dat in een restaurant binnenkomt.
2. Het aantal eieren dat een kip legt.

### Opgave 8

Bij de balie van de gemeente komen tussen 10:00 en 11:00 uur gemiddeld $6$ bezoekers per vijf minuten.

**a** Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal bezoekers per vijf minuten tussen 10:00 en 11:00 uur. Rond af op twee decimalen.

**b** Bereken de kans dat er tussen 10:10 en 10:15 uur precies $6$ bezoekers komen. Rond af op vier decimalen.

**c** Bereken de kans dat er tussen 10:25 en 10:30 uur meer dan $4$ bezoekers komen. Rond af op vier decimalen.

### Opgave 9

Tussen 1960 en 1980 werden er gemiddeld $2$ grienden (een walvissoort) per decennium aan de Nederlandse kusten gevonden.

**a** Waarom kun je uitgaan van een Poissonverdeelde stochast $G$ voor het aantal grienden per decennium? Welke verwachtingswaarde heeft $G$?

Beargumenteer je antwoorden.

**b** Maak de kansverdeling voor stochast $G$, het aantal grienden dat per decennium aan de Nederlands kust werd gevonden in de jaren tussen 1960 en 1980.

Geef de kansen voor de waarden $G = 0$ tot en met $G = 6$. Bereken $\text{P}(G \geq 7)$.

### Opgave 10

De vader van Jelle belegt iedere ochtend een heel stokbrood met een hagelslagsoort waarin ook een aantal gele chocoladesterretjes zitten. Hij maakt er lunchpakketjes voor zijn kinderen van. Iedere ochtend tellen ze met elkaar de gele chocoladesterretjes die op het stokbrood terechtkomen.

Tot hun verbazing bevat het belegde stokbrood op een dag in helemaal geen gele chocoladesterretjes.

**a** Hoeveel gele chocoladesterretjes strooit vader 's ochtends gemiddeld op het stokbrood als de kans op helemaal geen geel chocoladesterretje kleiner is dan $1$%?

In de loop van de tijd blijkt het aantal gele chocoladesterretjes op het stokbrood te dalen naar gemiddeld $2$ stuks.

**b** Hoe groot is de kans dat Jelles vader op een ochtend toch meer dan $4$ gele chocoladesterretjes op het stokbrood strooit? Rond af op vier decimalen.

### Opgave 11

Het aantal klanten $K$ dat per kwartier aan de balie van een klantenservice verschijnt, is een Poissonverdeelde stochast. De kans dat er in een kwartier slechts $1$ klant aan de balie staat, is afgerond $0{,}0027$.
Bereken de kans dat er in een minuut meer dan $1$ klant bij de balie komt. Rond af op vier decimalen.

### Opgave 12

De toepassing waardoor de Poissonverdeling echt bekendheid kreeg, is uitgevoerd aan het einde van de 19e eeuw. De statisticus Ladislaus Bortkiewicz gebruikte de Poissonverdeling bij zijn onderzoek naar dodelijke ongelukken in het Pruisische leger die veroorzaakt werden door een trap van een paard. In een periode van 20 jaar hebben 10 Pruisische legerkorpsen jaarlijks aan de legerleiding gemeld hoeveel manschappen er waren omgekomen door de trap van een paard. Dat levert deze, ondertussen beroemde, frequentietabel op.

| aantal doden door trap van paard per melding | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\geq 5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| frequentie | 109 | 65 | 22 | 3 | 1 | 0 |

**Tabel 5.1**

Toon aan dat deze frequentieverdeling bij benadering overeenkomt met een Poissonverdeling.

## Toepassen

### Opgave 13: Poissonverdeling als limietgeval

Je hebt gezien dat je de Poissonverdeling kunt zien als een soort limiet geval van de binomiale verdeling. Stel dat stochast $X$ Poissonverdeeld is met parameter $\lambda$. Gebruik verder $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \text{e}$.

**a** Toon aan dat uit de gegeven limiet volgt dat: $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \text{e}^{-x}$

**b** Toon aan dat $\text{P}(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \text{e}^{-\lambda}$.

Maak gebruik van dat $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \text{e}^{-x}$.

**c** Toon aan dat $\text{Var}(X) = \lambda$.

## Testen

### Opgave 14

De redactie van de dagelijkse krant PolderJournaal is trots op het feit dat ze gemiddeld slechts 2 typefouten per dag maken.

**a** Bereken, zonder gebruik te maken van de Poissonfuncties op de grafische rekenmachine, de kans dat er een PolderJournaal wordt gedrukt zonder typefout.

Controleer je antwoord door deze kans ook met de Poissonfunctie op de grafische rekenmachine te berekenen.

**b** Hoe groot is de kans dat er een PolderJournaal wordt gedrukt met meer dan 2 typefouten?

**c** Hoeveel typefouten zijn er te verwachten in vijf verschillende PolderJournaals?

### Opgave 15

In een fabriek voor diepvriespizza's strooit een machine olijven over de pizza's.

Wat blijkt, na vele steekproeven? Ongeveer één op de $13$ pizza's heeft precies $1$ olijf van de machine gekregen.

Wat is de standaardafwijking van het aantal olijven per pizza?

## Practicum

Je hebt al gezien hoe je met je grafische rekenmachine met de binomiale kansverdeling kunt werken. Er zijn echter nog veel meer soorten kansverdelingen. De zogenaamde ‘normale verdeling’ ga je nog tegenkomen.

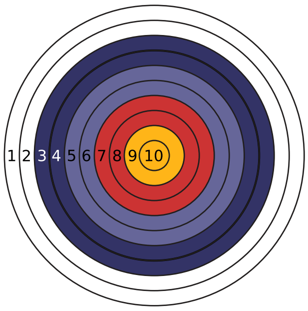
Hier hebben we het over de **Poissonverdeling**.
Op dezelfde plaats waar je de binomiale verdeling vindt, tref je ook de Poissonverdeling aan.
De Poissonverdeling heeft echter maar één parameter, namelijk $\lambda$.
Hier zie je bijvoorbeeld hoe P$(X = 4|\lambda = 3)$ wordt berekend op de TI-84. Op andere machines gaat dit op een vergelijkbare wijze.


Figuur 5.4

# 2.6 Wortel-n-wet

## Inleiding

Je hebt al eerder gezien dat je een kansverdeling kunt opstellen voor het boogschieten met één pijl op deze roos. Maar meestal schiet je vaker, bijvoorbeeld 20 keer, en kijk je naar het totaal aantal punten of het gemiddelde aantal punten. En hoe zit het dan met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking?




Figuur 6.1

**Je leert in dit onderwerp**

- werken met een herhaling van steeds dezelfde stochast;
- regels voor de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een herhaling van stochasten;
- regels voor de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het gemiddelde van een herhaling van stochasten.

**Voorkennis**

- een kansverdeling opstellen bij een stochast;
- de regels voor de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van de som van twee stochasten.

## Verkennen

### Opgave V1

Een boogschutter schiet 20 keer op de roos (0, 1, 2, ..., 10 punten te behalen).

Haar kansverdeling per schot is:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(X = x)$ | 0,02 | 0,02 | 0,04 | 0,10 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | 0,12 | 0,15 | 0,15 | 0,08 |

Tabel 6.1

Je kent de regels voor de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som van twee stochasten.

**a** Hoeveel punten verwacht deze schutter in totaal te scoren? En welke standaardafwijking hoort er bij dit totaal?

**b** Hoeveel punten verwacht zij gemiddeld per schot te scoren? En welke standaardafwijking hoort daar bij?

## Uitleg

Een boogschutter schiet 20 keer op de roos ($0, 1, 2, \ldots, 10$ punten te behalen).

Haar kansverdeling per schot is:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(X = x)$ | 0,02 | 0,02 | 0,04 | 0,10 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | 0,12 | 0,15 | 0,15 | 0,08 |

**Tabel 6.2**

De stochast $X$ is het aantal punten dat de boogschutter behaalt met één keer schieten, stochast $T$ is het aantal punten bij 20 herhalingen.

De verwachtingswaarde per schot is $6{,}22$ punten met een standaardafwijking van ongeveer $2{,}56$ punten. Omdat elk schot onafhankelijk is van het voorgaande, kun je zowel de optelregel voor verwachtingswaarden als die voor varianties toepassen: $\text{E}(T) = \text{E}(X + X + \ldots + X) = \text{E}(X) + \text{E}(X) + \ldots + \text{E}(X) = 20 \cdot \text{E}(X)$
en
$\text{Var}(T) = \text{Var}(X + X + \ldots + X) =$
$\text{Var}(X) + \text{Var}(X) + \ldots + \text{Var}(X) = 20 \cdot \text{Var}(X)$.

Dus bij het totaal van 20 schoten is:

- de verwachtingswaarde $\text{E}(T) \approx 20 \cdot 6{,}22 = 124{,}4$ punten
- de standaardafwijking

  $\sigma(T) = \sqrt{20 \cdot \text{Var}(x)} = \sqrt{20 \cdot (\sigma(X))^2} = \sqrt{20} \cdot \sigma(X) \approx 11{,}45$ punten

Voor het gemiddelde aantal punten per schot deel je deze getallen door 20. De verwachtingswaarde wordt dan weer 6,22. Maar de standaardafwijking wordt ongeveer $\frac{11{,}45}{20} \approx 0{,}57$ en dus veel kleiner dan bij één schot.
Dit heet de wortel-n-wet.

### Opgave 1

In de **Uitleg** is $X$ het aantal punten dat je per schot kunt behalen bij het boogschieten op een roos. Schiet je tien keer op die roos, dan heb je het over de stochast $T$.

**a** Controleer dat $\text{E}(X) = 6{,}22$ en $\sigma(X) \approx 2{,}56$.

**b** Hoeveel punten verwacht je te halen als je tien keer op die roos schiet? En met welke standaardafwijking?

**c** Hoeveel punten verwacht je gemiddeld per schot te halen als je tien keer op die roos schiet? Met welke standaardafwijking?

**d** Ligt het voor de hand dat de standaardafwijking kleiner wordt naarmate de boogschutter vaker op de roos schiet?

### Opgave 2

$X$ stelt het aantal ogen voor dat boven komt bij het werpen met een dobbelsteen.

**a** $T$ stelt het aantal ogen voor als je met twee dobbelstenen werpt. Maak een kansverdeling van $T$ en bereken $\text{E}(T)$ en $\sigma(T)$. Rond indien nodig af op twee decimalen.

**b** Welk verband is er tussen $\text{E}(X)$ en $\text{E}(T)$ en tussen $\sigma(X)$ en $\sigma(T)$?

**c** $\overline{X}$ is het gemiddelde aantal ogen per worp als je met twee dobbelstenen werpt. Bereken $\text{E}\left(\overline{X}\right)$ en $\sigma\left(\overline{X}\right)$. Rond af op twee decimalen.

**d** Welk verband is er tussen $\text{E}(X)$ en $\text{E}\left(\overline{X}\right)$ en tussen $\sigma(X)$ en $\sigma\left(\overline{X}\right)$?

**e** $S$ stelt het aantal ogen voor als je met drie dobbelstenen werpt, en $\overline{X}$ het gemiddelde aantal ogen per worp als je met drie dobbelstenen werpt. Bereken $\text{E}(S)$, $\sigma(S)$, $\text{E}\left(\overline{X}\right)$ en $\sigma\left(\overline{X}\right)$, zonder een kansverdeling op te stellen. Rond indien nodig af op twee decimalen.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Heb je te maken met $n$ onafhankelijke gelijke kansexperimenten, elk met dezelfde stochast $X$, dan geldt voor de som $T$ van deze $n$ stochasten:

- $\text{E}(T) = n \cdot \text{E}(X)$
- $\sigma(T) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

Voor het bewijs hiervan kun je zowel de optelregel voor verwachtingswaarden als die voor varianties toepassen:

$\text{E}(T) = \text{E}(X + X ... + X) = \text{E}(X) + \text{E}(X) + ... + \text{E}(X) = n \cdot \text{E}(X)$

$\text{Var}(T) = \text{Var}(X + X + ... + X) = \text{Var}(X)+\text{Var}(X)+...+\text{Var}(X) = n \cdot \text{Var}(X)$

Omdat de standaardafwijking gelijk is aan de wortel van de variantie geldt dat:
$\sigma(T) = \sqrt{\text{Var}(T)} = \sqrt{n \cdot \text{Var}(X)} = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

Je noemt deze stelling de **wortel-n-wet**.

Voor de kansverdeling die hoort bij het gemiddelde $\overline{X}$ van $n$ onafhankelijke gelijke kansexperimenten elk met stochast $X$ geldt daarom:

- $\text{E}\left(\overline{X}\right) = \frac{n \cdot \text{E}(X)}{n} = \text{E}(X)$
- $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma(X)}{n} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

## Voorbeeld 1

Op doosjes paperclips van een bepaald merk staat: circa 100 stuks. Door tellingen is gebleken dat er in deze doosjes gemiddeld 104,3 paperclips zitten met een standaardafwijking van 3,5. Je haalt 10 doosjes van die paperclips. Hoeveel paperclips mag je dan in totaal verwachten en met welke standaardafwijking? En wat zijn de verwachtingswaarde en standaardafwijking van het gemiddelde aantal paperclips per doosje?

Antwoord

Neem aan dat het aantal paperclips $X$ in elk doosje niet afhangt van het aantal in de andere doosjes. Dan geldt voor het totaal aantal paperclips $T$ in 10 doosjes:

- $\text{E}(T) = 10 \cdot \text{E}(X) = 10 \cdot 104{,}3 = 1043$
- $\sigma(T) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X) = \sqrt{10} \cdot 3{,}5 \approx 11{,}1$

Je verwacht daarom 1043 paperclips met een standaardafwijking van ongeveer 11,1.

Voor het gemiddelde aantal per doosje $\overline{X}$ geldt:

- $\text{E}\left(\overline{X}\right) = 104{,}3$
- $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma(10X)}{10} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sigma(X)}{10} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{10}} \approx 1{,}1$

### Opgave 3

In een doosje paperclips zitten gemiddeld 104,3 paperclips met een standaardafwijking van 3,5. Je koopt 5 van die doosjes paperclips.

**a** Hoeveel paperclips $T$ mag je in totaal verwachten in de 5 doosjes samen? Met welke standaardafwijking? Rond af op twee decimalen.

**b** Wat is de verwachtingswaarde en standaardafwijking van het gemiddelde aantal paperclips per doosje? Rond indien nodig af op twee decimalen.

### Opgave 4

In een fabriek worden pakken met 1 kg meel gevuld. De vulmachine is afgesteld op een gemiddeld vulgewicht van 1002 gram met een standaardafwijking van 4 gram. De pakken worden op hun beurt verpakt met een plastic folie in pakketten van 10 pakken.

**a** Bereken het gemiddelde van het gewicht $G$ van deze pakketten en de standaardafwijking ervan. Rond indien nodig af op twee decimalen.

**b** Welke verwachtingswaarde en standaardafwijking gelden voor één willekeurig pak meel uit zo'n pakket? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Op een pallet worden 100 pakketten geplaatst.

**c** Welk gewicht verwacht je dat op het pallet geplaatst is en welke standaardafwijking geldt hiervoor? Rond indien nodig af op twee decimalen.

**d** Welke verwachtingswaarde en standaardafwijking gelden voor een pak meel dat uit een pallet genomen wordt? Rond indien nodig af op twee decimalen.

## Voorbeeld 2

Voor een onderzoek wordt geteld hoeveel mannen en vrouwen er in het bestuur van studieverenigingen in Nederland zitten. Studenten kunnen meedoen met het onderzoek door te laten zien dat ze in een bestuur zitten en dan te zeggen of ze een man of vrouw zijn.

Na 500 antwoorden van studenten gekregen te hebben wordt de stochast $B$ gemaakt voor de kansverdeling van het geslacht van een bestuurslid, waarbij $B = 0$ als het bestuurslid een man is, en $B = 1$ als het een vrouw is. Er blijkt dat $\sigma(\overline{B}) = 0{,}4899$. Verder is bekend dat er meer mannelijke bestuursleden zijn, dan vrouwelijke.

Bepaal de kansverdeling van $B$. Rond af op één decimaal.

Antwoord

$B$ is binomiaal verdeeld, je ziet hiernaast de kansverdeling:

| | | |
|---|---|---|
| $b$ | $0$ | $1$ |
| $P(B = b)$ | $p$ | $1 - p$ |

**Tabel 6.3**

Nu is $\sigma(B) = \sqrt{np(1-p)}$.

En dus geldt : $\sigma(\overline{B}) = \frac{\sqrt{np(1-p)}}{\sqrt{n}} = \sqrt{p(1-p)} = 0{,}4899$.

Deze vergelijking oplossen geeft:

$$\begin{aligned} p(1-p) &= 0{,}4899^2 \\ -p^2 + p - 0{,}4899^2 &= 0 \end{aligned}$$

Met de abc-formule vind je $p \approx 0{,}4 \vee p \approx 0{,}6$.

Omdat $p > 0{,}5$ moet gelden dat $p \approx 0{,}6$.

### Opgave 5

Er zitten veel meer mannen dan vrouwen bij de brandweer. Dit wordt nader onderzocht.

De stochast $B$ staat voor het geslacht van iemand bij de brandweer: $B = 0$ als de persoon een man is en $B = 1$ als de persoon een vrouw is.

Na een steekproef van $1000$ brandweermensen is er geconstateerd dat $\sigma(\overline{B}) = 0{,}1706$.

**a** Stel een kansverdeling voor $B$ op in twee decimalen nauwkeurig.

**b** Hoeveel vrouwen deden er mee met het onderzoek?

## Verwerken

### Opgave 6

Voor een loterij kunnen lootjes worden gekocht op rollen van 200 stuks. Een rol heeft een lengte van 12 m met een standaardafwijking van 8 mm. Een lootje is twee keer zo lang als dat die breed is.

**a** Welke afmetingen hebben de lootjes gemiddeld?

**b** Wat is de standaardafwijking van de lengte van één lootje? Rond af op vier decimalen.

Neem aan dat de standaardafwijking van de breedte van een lootje ook de helft is van die van de lengte.

**c** De lootjes zijn ook te koop op vellen van $10$ lootjes in de breedte en $5$ in de lengte. Welke standaardafwijkingen hebben de lengte en de breedte van zo'n vel? Rond af op vier decimalen.

### Opgave 7

Jenna en Iris spelen een zelfbedacht spel met knikkers. Ze pakken het wetenschappelijk aan: op basis van heel vaak spelen hebben ze berekend dat de volgende kanstabel bij het spel hoort:

| $k$ | -2 | -1 | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(K = k)$ | 0,0032 | 0,1634 | 0,3456 | 0,2473 | 0,2405 |

**Tabel 6.4**

Stochast $K$ is het aantal knikkers winst/verlies per keer dat het spel gespeeld wordt.

**a** Hoe groot is het verwachte aantal knikkers winst/verlies na $35$ keer spelen? Welke standaardafwijking hoort daarbij? Rond af op twee decimalen.

**b** Hoeveel bedraagt het gemiddelde aantal knikkers per spel dat je verwacht na $35$ keer spelen?

Geef ook de bijbehorende standaardafwijking. Rond af op twee decimalen.

### Opgave 8

In een doos zitten vijf balletjes met daarop de getallen 2, 3, 5, 7 en 12.

**a** Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor het getal dat je krijgt bij het aselect trekken van één balletje. Rond af op twee decimalen.

**b** Je trekt twee balletjes met teruglegging. Bepaal van de gemiddelden van de tweetallen de verwachtingswaarde en de standaardafwijking. Rond indien nodig af op twee decimalen.

**c** Welk verband bestaat er tussen de verwachtingswaarden die je bij a en b hebt berekend?

**d** Laat zien dat je de standaardafwijking bij b ook had kunnen vinden door de standaardafwijking van a te delen door $\sqrt{2}$.

**e** In een andere doos zitten vijf balletjes met daarop de getallen 4, 6, 10, 14 en 24. Hieruit trek je ook twee balletjes met teruglegging.

Bepaal het gemiddelde $H$ van de getalcombinaties. Bepaal $E(H)$ en $\sigma(H)$, zonder een kansverdeling op te stellen. Rond af op twee decimalen.

### Opgave 9

Een bepaald type dvd-recorder wordt in dozen verpakt die een gemiddelde hoogte van $10$ cm hebben met een standaardafwijking van $4$ mm. Bij een groothandel wordt een aantal van deze dozen in een magazijn opgeslagen.

**a** Er worden $15$ dozen op elkaar geplaatst. Bereken de verwachtingswaarde van de hoogte van de stapel dozen en geef de bijbehorende standaardafwijking. Rond af op twee decimalen.

**b** Bij het vervoer van deze dozen gebruikt men een vrachtwagen met een hoogte van $2{,}5$ m en een standaardafwijking van $1{,}9$ cm. Bij het beladen van deze vrachtwagen maakt men stapels van $n$ dozen. De dozen hebben weer een gemiddelde hoogte van $10$ cm maar een standaardafwijking van $0{,}38$ cm. Hoeveel dozen mogen er maximaal op elkaar gestapeld worden?

### Opgave 10

Een marktkoopman slaat een lading van $600$ appels in, om later te verkopen. De ervaring leert dat $8\%$ van de appels uiteindelijk niet te verkopen is, om wat voor reden dan ook.

**a** Op een dag legt de koopman $100$ appels voor de verkoop neer. Neem aan dat er genoeg vraag naar is. Wat is de kans dat de koopman minder dan $85$ appels kan verkopen? Rond af op vier decimalen.

**b** Hoeveel appels mag de man verwachten dat hij die dag verkoopt? Met welke standaardafwijking? Rond zo nodig af op twee decimalen.

**c** Hoeveel appels verwacht de koopman dat uiteindelijk van zijn totale hoeveelheid verkocht kunnen worden? Met welke standaardafwijking moet hij rekening houden?

### Opgave 11

Jochem voert een onderzoek uit naar de leeftijd van mensen met een vaste telefoonverbinding.

Hij maakt een binomiale stochast $X$ bij het hebben van een vaste telefoon. Hierbij is $X = 0$ als de persoon jonger dan 50 jaar is, en $X = 1$ als de persoon 50 jaar of ouder is. Na een enquête onder $500$ mensen met een vaste telefoon en wat rekenwerk, komt hij op $\sigma(\overline{X}) = 0{,}0179$.

Bereken de kans dat een willekeurige persoon met een vaste telefoon 50 jaar of ouder is. Rond af op één decimaal. Als het goed is krijg je twee antwoorden: beredeneer uit de context welke de juiste is.

## Toepassen

### Opgave 12: Draaiwielen op de kermis

Op de kermis staan twee (zuivere) draaiwielen. Het ene draaiwiel is in drie even grote sectoren verdeeld met daarop de nummers 1, 2 en 3. Het andere draaiwiel is in twee even grote sectoren verdeeld met daarop de nummers 10 en 20. De regels zijn als volgt.

- Als je € 2,50 inzet, krijgen beide draaiwielen een zet.
- Je krijgt niets als het eerste draaiwiel bij nummer 1 stopt.
- Je krijgt € 6,00 als beide draaiwielen op hun hoogste nummer stoppen.
- Je krijgt € 3,00 bij elke andere combinatie van de nummers.

Mila doet $12$ keer mee. Ze verdient hiermee € 5,50.

Bereken hoeveel standaardafwijkingen dit bedrag afwijkt van de verwachte winst na $12$ keer spelen. Beargumenteer hiermee of haar winst wel of niet uitzonderlijk hoog is.

### Opgave 13: Leeftijdsverdeling

Een vereniging heeft $500$ leden. Manon heeft bij een bijeenkomst aan de leden de leeftijd gevraagd. De stochast $X$ kan de volgende waarden aannemen:

$X = 0$ als de ondervraagde persoon jonger dan 40 jaar is, $X = 1$ als de persoon tussen de 40 en 60 jaar is en $X = 2$ als de persoon 60 jaar of ouder is.

Manon heeft berekend dat $\text{E}\left(\overline{X}\right) = 1{,}7$ en $\text{Var}\left(\overline{X}\right) = 0{,}00062$.

Stel de kansverdeling op voor $X$.

## Testen

### Opgave 14

In een doos zitten vier kaartjes met daarop de getallen 3, 7, 11 en 15.

**a** Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor het getal bij het trekken van één kaartje uit de doos.

**b** Bereken vanuit de bijbehorende kansverdeling de verwachtingswaarde van de som van de getallen van twee getrokken kaartjes bij trekken met terugleggen. Bereken voor deze som ook de standaardafwijking.

**c** Welk verband bestaat er met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking die je bij a hebt berekend?

**d** Bereken vanuit de bijbehorende kansverdeling de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het gemiddelde van de getallen op twee getrokken kaartjes. Welk verband bestaat er nu met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking die je bij a hebt berekend?

**e** Trek met teruglegging drie kaartjes uit de doos. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som en van het gemiddelde van de getallen op de drie getrokken kaartjes.

### Opgave 15

In de maand december zijn er kerstzegels verkrijgbaar. Ze worden in een bepaald jaar aangeboden op een velletje van vier bij vijf zegels. De afmetingen van de velletjes (zonder rand) zijn $15{,}5$ bij $15{,}5$ cm met een standaardafwijking van $0{,}75$ mm in beide richtingen.

Bereken de afmetingen en de standaardafwijkingen van deze zegels.

Figuur 6.2

# 2.7 Totaalbeeld

## Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Discrete kansmodellen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

## Begrippenlijst

- stochast = toevalsvariabele — discrete stochast — kansverdeling — verwachtingswaarde — variantie — standaardafwijking
- onafhankelijke stochasten
- Bernoulli-experiment — binomiale stochast — parameters van een binomiale stochast
- hypergeometrische stochast
- poissonverdeling
- wortel-n-wet

## Activiteitenlijst

- bij een discrete stochast een kansverdeling karakteriseren door verwachtingswaarde en standaardafwijking
- verwachtingswaarde en standaardafwijking van de som en het product van twee stochasten bepalen
- binomiale kansen berekenen — een binomiale kansverdeling opstellen
- kansen berekenen bij trekking zonder terugleggen — deze kansen benaderen met binomiale kansen
- kansen berekenen met de poissonverdeling
- de wortel-n-wet voor de som van $n$ dezelfde stochasten toepassen

## Achtergronden

De 'Ars Conjectandi' van **Jakob Bernoulli (1654—1704)** was één van de eerste leerboeken over kansrekening. Daarin zette Bernoulli het kansbegrip en de hele basiskansrekening helder op een rijtje. En hij voegt er zijn eigen bijdragen zoals Bernoulli-experimenten, wet van de grote aantallen, etc., aan toe. Het boek werd in 1712 gepubliceerd.

In 1718 verscheen van **Abraham de Moivre (1667—1754)** 'The Doctrine of Chance', een boek over kansrekening waarin de eerste definitie van statistische onafhankelijkheid verschijnt, naast de aanpak van allerlei problemen op het gebied van dobbelen en andere kansspelen. Hij bestudeerde ook sterftetabellen en werkte aan de theorie van de wiskunde rond levensverzekeringen.
Vanaf 1720 onderzocht De Moivre problemen zoals hieronder beschreven.

Uit een vaas met uitsluitend zwarte en witte schijven trek je $1000$ keer een schijf die je telkens teruglegt. De kans op een zwarte schijf is $\frac{1}{5}$. De verwachtingswaarde is dat je $1000 \cdot \frac{1}{5} = 200$ keer een zwarte schijf trekt. Hoe groot is nu de kans dat het aantal zwarte schijven dat je trekt maximaal $1$ (of $2$, of $3$, of ...) van de verwachte $200$ verschilt?

Dit zijn typisch problemen die een binomiale kansverdeling betreffen.
Bij de bestudering van het geval dat de kans op een zwarte en een witte schijf even groot is ontdekte De Moivre dat een bijpassende kansverdeling een histogram heeft dat netjes klokvormig is. De kansverdeling waarbij zo'n klokvormige grafiek past is later de ‘normale verdeling’ genoemd.

## Testen

### Opgave 1

Een verzekeringsmaatschappij legt zich toe op het verzekeren van inboedels. Uit intern onderzoek is komen vast te staan dat de maatschappij kan verwachten dat één op de $10000$ verzekerden een claim van € 200.000 zal indienen; dat één op de $1000$ verzekerden een claim zal indienen van € 50.000; dat één op de $50$ een claim zal indienen van € 2500 en dat de andere verzekerden alleen premie zullen betalen.

**a** Hoeveel moet de maatschappij gemiddeld per polis uitbetalen?

De maatschappij wil op elke polis ongeveer $10\%$ van de te verwachten uitbetaling winst maken.

Het gemiddelde verzekerde bedrag per polis is € 80.000.

**b** Welke premie per € 1000 verzekerd bedrag moet de maatschappij vragen?

### Opgave 2

Uit onderzoek blijkt dat ongeveer $46{,}7\%$ van de West-Europeanen bloedgroep O heeft. Je bekijkt de gegevens van een aselecte steekproef van $50$ West-Europeanen.

**a** Hoe groot is de kans dat in deze steekproef minstens $30$ personen bloedgroep O hebben? Rond af op vier decimalen.

**b** Hoeveel personen met bloedgroep O verwacht je in deze steekproef? Met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op vier decimalen.

Je bekijkt nu de gegevens van $10$ aselecte steekproeven, stuk voor stuk van $50$ West-Europeanen.

**c** Hoeveel personen met bloedgroep O verwacht je in totaal in deze $10$ steekproeven? Met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op vier decimalen.

**d** Hoeveel personen met bloedgroep O verwacht je gemiddeld per steekproef in deze $10$ steekproeven? Met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op vier decimalen.

### Opgave 3

Een tuincentrum verkoopt tulpenbollen in zakken van gemiddeld $40$ stuks met een standaardafwijking van $1{,}5$. Een tuinman koopt $8$ van deze zakken.

**a** Hoeveel tulpenbollen mag hij in totaal verwachten en met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op vier decimalen.

**b** Hoeveel tulpenbollen mag de tuinman per zak gemiddeld verwachten en met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op vier decimalen.

In een gemiddelde week gebruikt de tuinman $2$ zakken tulpenbollen. Veronderstel dat hij vijf dagen per week werkt.

**c** Je mag ervan uitgaan dat het aantal bloembollen dat de tuinman per week gebruikt Poissonverdeeld is. Wat is de kans dat hij op een gegeven dag meer dan $20$ tulpenbollen gebruikt? Rond af op vier decimalen.

### Opgave 4

Bij een loterij die elke week gehouden wordt, krijgt elke deelnemer één formulier. Op dit formulier staan de getallen 1 tot en met 19. De deelnemer moet drie getallen aankruisen en vervolgens zijn formulier inleveren. Als alle formulieren ingeleverd zijn, worden aselect drie winnende getallen gekozen. Een deelnemer ontvangt een prijs als hij tenminste twee winnende getallen aangekruist heeft.

**a** Toon aan dat, afgerond op drie decimalen, de kans op een prijs gelijk is aan $0{,}051$.

Het loterijbestuur neemt aan dat deze kans precies gelijk is aan $0{,}05$. Het laat zo veel deelnemers toe dat de kans op vier of meer prijzen per week kleiner is dan $0{,}01$.

**b** Hoe groot is het maximaal toelaatbare aantal deelnemers?

### Opgave 5

Je werpt met twee zuivere dobbelstenen.
De stochast $X$ is de som van de aantallen ogen die met de twee stenen gegooid worden.
De stochast $Y$ is het product van deze aantallen.

**a** Welke kans is groter: $\text{P}(X = 6)$ of $\text{P}(Y = 6)$? Hoe groot zijn die kansen?

**b** Bereken de kans dat in $20$ worpen $5$ keer een totaal aan $7$ ogen gegooid wordt. Rond af op vier decimalen.

Twee personen A en B maken de volgende afspraak:

- A betaalt € 3,00 aan B als $Y$ gelijk is aan een even getal.
- A ontvangt € 9,00 van B als $Y$ gelijk is aan een oneven getal.

**c** Gebruik de verwachte winst van persoon A om te beargumenteren of dat deze afspraak wel of niet eerlijk is.

**d** Bereken de kans dat A na $10$ worpen meer geld van B ontvangen heeft dan hij aan B betaald heeft. Rond af op vier decimalen.

### Opgave 6

Op de Salomonseilanden heeft ongeveer $8$% van de bevolking van nature blond haar in combinatie met een donkere huidskleur. De kans dat in een aselecte steekproef van $125$ Salomonseilanders zich meer dan $5$ van nature blonde mensen bevinden, kun je op meerdere manieren berekenen/benaderen.

Stochast $B$ is het aantal van nature blonde mensen in een aselecte steekproef van $125$ Salomonseilanders.

**a** Met welke twee discrete kansmodellen kan stochast $B$ benaderd worden?

Beargumenteer je antwoord.

**b** Benader de gevraagde kans op beide manieren. Rond af op vier decimalen.

## Toepassen

### Opgave 7: Sinterklaascadeautjes

In de laatste week voor sinterklaas staat bij de ingang van een groot winkelbedrijf een grote draaiende trommel. Daarin zitten $1000$ onderling niet te onderscheiden pakjes. De Goede Sint heeft in een aantal een cadeautje ter waarde van € 1,00 gestopt. Alle andere pakjes bevatten een cadeautje van € 9,00. De totale inhoud van $1000$ pakjes is telkens € 3000,00 waard. Er is een ingenieus systeem bedacht dat ervoor zorgt dat wanneer er een pakje uit de trommel genomen wordt er onmiddellijk weer een pakje met dezelfde cadeauwaarde in terugkomt.

**a** Je neemt één pakje. Toon aan dat de kans dat daarin een cadeautje van € 1,00 zit $0{,}75$ is.

**b** Stel, je kunt dit niet aantonen. In plaats daarvan neem je $20$ pakjes. De kans om hierbij $4$ pakjes van € 9,00 aan te treffen is $0{,}1897$. Hoe groot is de kans op een pakje van € 1,00 als je één pakje neemt?

**c** Bereken de kans dat een greep van $20$ pakjes minstens $14$ een cadeau van € 1,00 bevat.

**d** Bereken de kans op een pakje van € 9,00 als je twee pakjes neemt.

**e** Hoeveel pakjes moet je uit de mand halen, wil de kans dat één van die pakjes er een van € 9,00 is, $35{,}6$% bedragen?

Bij de trommel staat Piet die de bezoekers aanspoort om tegen betaling van € 5,00 één pakje uit de trommel te nemen.

**f** Laat zien dat het winkelbedrijf op $1000$ pakjes € 2000,00 winst maakt.

**g** Stel je voor dat je $50$ pakjes koopt. Bereken de kans dat je $52$% van het betaalde bedrag in de vorm van cadeautjes terugverdient.

**h** Bereken de kans dat de waarde van je pakjes kleiner is dan het bedrag dat je hebt betaald als je drie pakjes koopt.

## Opgave 8: Pijnstillers

Van een pijnstiller is bekend dat, wanneer je er één pil van inneemt, de kans dat je binnen een half uur geen pijn meer voelt $0{,}6$ is. Het middel wordt door $50$ mensen met pijn gebruikt, ze nemen allen één pil.

**a** Wat is de kans dat binnen een half uur van deze $50$ mensen er minstens $40$ geen pijn meer voelen?

**b** Hoe groot is de kans dat $25$ tot $45$ mensen binnen een half uur geen pijn meer voelen?

Een andere fabrikant van pijnstillers maakt via een landelijke reclameactie bekend een betere pijnstiller gevonden te hebben. Deze fabrikant beweert dat de kans om binnen een half uur geen pijn meer te voelen $0{,}8$ is. De reclamecodecommissie wil die bewering onderzoeken.
Het middel wordt daartoe aan $50$ willekeurig gekozen mensen met pijn gegeven. De reclamecodecommissie besluit geen actie tegen de fabrikant te ondernemen als van de $50$ mensen die het nieuwe middel kregen, er $37$ binnen een half uur geen pijn meer voelen.

**c** Bereken de kans dat de commissie geen actie tegen de fabrikant zal ondernemen terwijl hun pijnstiller in feite helemaal niet beter is. De kans dat pijn verdwijnt dankzij dit middel, net als voor het concurrerende medicijn, is dus $0{,}6$.

## Opgave 9: Kansspelen

Gokken is ‘in’. Er bestaat tegenwoordig een grote hoeveelheid **kansspelen**. Het aanbod loopt van simpele Krasloten tot de keurige Staatsloterij en de spelen in het chique Casino. Verder kan er meegespeeld worden aan de Postcodeloterij, de Bankgiroloterij, de Duitse Lotto, etc. Allemaal mogelijkheden om in één klap binnen te zijn.

Belangrijk bij kansspelen is ‘de verwachte winst’. Om dat getal exact te bepalen moet je de kansverdeling weten. Soms kun je die beredeneren, maar je kunt ook het spel vele keren spelen en de gemiddelde winst bepalen. Dat getal is een schatting voor de verwachting. Dat vele malen spelen van een spel kun je simuleren. Je werkt dan met toevalsgetallen, getallen die volstrekt aselect uit een bepaald interval worden gekozen. Ze hebben dus alle dezelfde kans om gekozen te worden. Je weet al hoe je die met je grafische rekenmachine kunt genereren. Maar je kunt daarvoor ook een spreadsheetprogramma gebruiken.

Onderzoek eerst een paar kleine kansspelen.

**a** Het gooispel:
Je geeft iemand € 10,00. Die ben je kwijt. Vervolgens werp je met een dobbelsteen tot je een $6$ gooit. Je ontvangt € 0,00 als je meteen een $6$ gooit; € 1,00 als dat bij de tweede worp lukt, € 2,00 bij de derde worp, € 4,00 bij de vierde worp, enzovoort.

**b** Het knipspel:
Dit keer moet je vooraf € 25,00 betalen. Daarna wordt een touwtje van $10$ cm lengte volstrekt willekeurig in drie stukken geknipt. Als je met die drie stukken een scherphoekige driehoek kunt vormen

dan ontvang je € 100,00. Lukt dat niet dan ontvang je niets. Het knippen kun je simuleren met toevalsgetallen.

Bekijk vervolgens één of meer van de grotere kansspelen en analyseer ze. De spelregels zijn vaak via internet te vinden. Die heb je nodig voor een goede analyse van het spel. Zie:

- **De Staatsloterij**
- **De Postcodeloterij**
- **De Lotto**
- **De Vriendenloterij**
- **Roulette spelen**
- etc.

**c** Bepaal ook nu je winstkansen.

## Examen

### Opgave 10: Verscheidenheid van achternamen

In Engeland krijgen kinderen die uit een huwelijk worden geboren van oudsher de achternaam van de vader. Dit betekent dat in een gezin zonder trouwende zoons de achternaam niet aan een volgende generatie wordt doorgegeven. Dit kan tot gevolg hebben dat een achternaam uitsterft.
Men wil de invloed van het bovenstaande op de verscheidenheid van achternamen nagaan door middel van een computersimulatie. Omdat vooral de effecten op de langere termijn van belang zijn, besluit men te kijken naar het aantal getrouwde zoons per gezin.
Indien bijvoorbeeld Henry Streamer en Jane Woolf drie getrouwde zoons krijgen, rekent de computer in de volgende generatie verder met drie gezinnen onder de naam Streamer.
De kansen op $0,1,2,...$ trouwende zoons ontleent men aan een uitgebreid onderzoek naar de stambomen van Engelse families. Men komt tot de conclusie dat de kans op 7 of meer trouwende zoons per gezin verwaarloosbaar klein is.
In de tabel zijn de overige kansen af te lezen. Hierbij is $X$ het aantal trouwende zoons per gezin:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x)$ | 0,3172 | 0,3643 | 0,2093 | 0,0801 | 0,0234 | 0,0048 | 0,0009 |

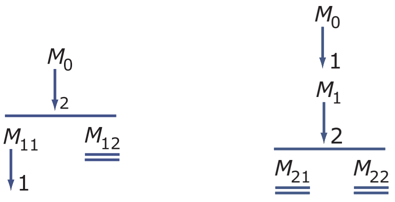
**Tabel 7.1**

Een programmeur maakt een computerprogramma waarin hij deze kansverdeling verwerkt en wel zo dat voor elk gezin de kans op bijvoorbeeld drie trouwende zoons gelijk is aan $0,0801$. Men maakt verder gebruik van de onderstaande symbolen met de daarbij vermelde betekenis.

| | |
|---|---|
| $M \downarrow x$ | man $M$ trouwt en krijgt $x$ trouwende zoons ($1 \le x \le 6$). |
| $\underline{\underline{M}}$ | man $M$ krijgt geen trouwende zoons. |

**Tabel 7.2**

In de linkerfiguur hieronder zie je dat man $M_0$ twee trouwende zonen krijgt: $M_{11}$ en $M_{12}$; $M_{11}$ (de oudste van de twee) krijgt één trouwende zoon en $M_{12}$ geen trouwende zoon.




**Figuur 7.1**

**a** Toon aan dat de kans op het optreden van de situatie van de linkerfiguur ongeveer gelijk is aan $0{,}024$.

**b** Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans op het optreden van de situatie van de rechterfiguur.

Neem aan dat tijdens de simulatie een zekere generatie precies twee gezinnen voorkomen met de naam ‘Wendling’.

**c** Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat de naam ‘Wendling’ in de volgende generatie als gezinsnaam verdwenen zal zijn.

**d** Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat in de volgende generatie meer dan één gezin met de naam ‘Wendling’ voorkomt.

Als proef start men de computersimulatie met een beginpopulatie van $20$ gezinnen met allemaal verschillende namen en stopt men zodra de eerstvolgende generatie gevonden is. $X$ is het aantal namen dat in de eerstvolgende generatie niet terug komt.

**e** Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat dan in de eerstvolgende generatie precies $15$ verschillende gezinsnamen zullen voorkomen.

**f** Bereken in drie decimalen nauwkeurig de verwachtingswaarde van $X$.

**(bron: examen wiskunde A vwo 1989, tweede tijdvak, opgave 3)**

# Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1



www.math4all.nl