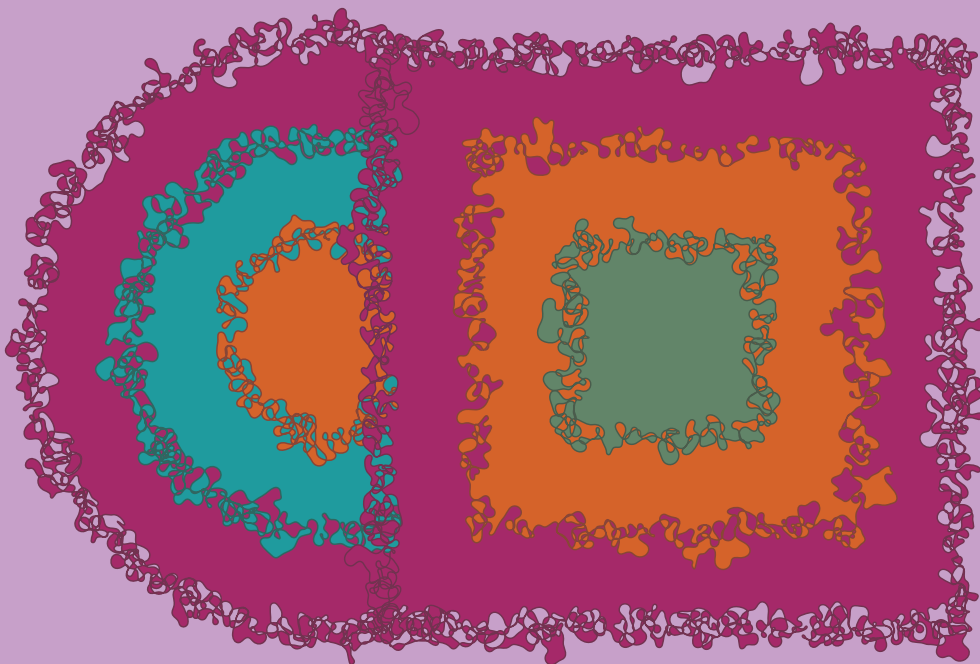


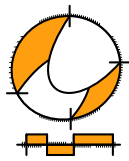
Wiskunde C

5 VWO

Katern 2

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Rijen 5

1.1 Regelmaat in rijen 6

1.2 Recursie 14

1.3 Directe formules 21

1.4 Werken met rijen 28

1.5 Totaalbeeld 38

2 Kansmodellen 43

2.1 Kansverdelingen 44

2.2 Normale verdelingen 55

2.3 Kansvariabelen optellen 67

2.4 Wortel-n-wet 74

2.5 Normaal of niet? 82

2.6 Totaalbeeld 91

Register 101

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Rijen

1.1	Regelmaat in rijen	6
1.2	Recurisie	14
1.3	Directe formules	21
1.4	Werken met rijen	28
1.5	Totaalbeeld	38

1.1 Regelmaat in rijen

Inleiding

Je kent ze wel: de rijtjes getallen met regelmaat er in.

Soms is de regelmaat eenvoudig: er komt steeds hetzelfde bij, of er wordt steeds met hetzelfde vermenigvuldigd. Maar dat hoeft echt niet altijd zo te zijn. Bekijk deze 'rij van Fibonacci' maar eens: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 33,....

Heb je door wat hier gebeurt? Misschien moet je het maar eens aan een konijn vragen.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip rij en de getallen in een rij nummeren;
- regelmaat in rijen met een lineair of een exponentieel verband bepalen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Stel, twee werknemers verdienen bij twee verschillende bedrijven allebei € 30000 per jaar (in jaar 1). Bij bedrijf A heeft de vakbond een loonsverhoging van 2% per jaar bedongen. Bij bedrijf B krijgen de medewerkers een loonsverhoging van € 700 per jaar. In beide gevallen gaan de werknemers er elk jaar op vooruit.

Bereken bij welke werkgever de werknemer per jaar het meest verdient na vijf jaar. Bereken ook wie er in die vijf jaar het meest heeft verdiend.

Uitleg 1

Een serie getallen waarin regelmaat voorkomt heet een rij. Bekijk deze rijen maar eens.

- ...,3, 7, 11, 15, 19,...
- ...,77, 70, 63, 56, 49,...
- ...,32, 64, 128, 256, 512,...
- ...,1458, 486, 162, 54, 18,...

Ieder getal in de rij heet een term. De eerste rij heeft een regelmaat van +4: bij iedere term wordt 4 opgeteld. De tweede rij heeft een regelmaat van -7, de derde rij heeft een regelmaat van $\times 2$ en de vierde rij heeft een regelmaat van $\times \frac{1}{3}$ of : 3.

Een rij met opeenvolgende termen waarbij een vast getal opgeteld of afgetrokken wordt, is een rij met een lineair verband. Een rij met opeenvolgende termen die met een vaste factor vermenigvuldigd



Figuur 1.1

of gedeeld wordt, is een rij met een exponentieel verband.

Als je de regelmaat weet, kun je vooruitrekenen. Bijvoorbeeld naar de volgende drie termen:

- ..., 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, ...
- ..., 77, 70, 63, 56, 49, 42, 35, 28, ...
- ..., 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, ...
- ..., 1458, 486, 162, 54, 18, 6, 2, $\frac{2}{3}$, ...

Als je weet hoe je vooruit moet rekenen, kun je ook achteruitrekenen.

Dan doe je precies de tegenovergestelde bewerking. Deed je bij vooruitrekenen $+4$ dan doe je bij achteruitrekenen -4 . Deed je bij vooruitrekenen $:3$ dan doe je bij achteruitrekenen $\times 3$, enzovoort.

Nu kun je de vorige drie termen van elke rij bepalen:

- ..., -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, ...
- ..., 98, 91, 84, 77, 70, 63, 56, 49, ...
- ..., 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...
- ..., 39366, 13122, 4374, 1458, 486, 162, 54, 18, ...

Opgave 1

- Bepaal de volgende drie termen van de rij: ..., 27, 31, 35, 39, ...
- Bepaal de volgende drie termen van de rij: ..., 64, 128, 256, 512, ...
- Bepaal de vorige drie termen van de rij: ..., 3, 7, 11, 15, ...
- De regelmaat van een bepaalde rij is -8 .
Hoe reken je bij deze rij vooruit en achteruit?
- De regelmaat van een bepaalde rij is $\times \frac{1}{4}$.
Hoe reken je bij deze rij vooruit en achteruit?

Opgave 2

In Nederland staan langs alle provinciale en rijkswegen hectometerpaaltjes. Na iedere hectometer (100 meter) staat er zo'n paaltje. Deze worden gebruikt om bijvoorbeeld de locatie van een ongeval precies door te kunnen geven. En op de radio hoor je vaak bij welke hectometerpaal er geflitst wordt. De palen geven de afstand aan vanaf het begin van de weg in kilometer. Achter de komma staan de hectometers aangegeven.

Bekijk de afbeelding van een hectometerpaaltje met daarop 81,0 kilometer. Gebruik in deze opgave dit paaltje steeds als uitgangspunt.



Figuur 1.2

- Ga in gedachten tien hectometerpaaltjes terug, welk getal staat erop?
- Ga in gedachten honderd hectometerpaaltjes vooruit, welk getal staat erop?
- Beschrijf de regelmaat bij vooruit- en achteruitrekenen.
- Is hier sprake van een rij met een lineair verband of een rij met een exponentieel verband?
- Welk getal moet erbij opgeteld worden om vijftig paaltjes verder te gaan?
- Hoeveel paaltjes verder staat er 105,5 kilometer?

Uitleg 2

Door rijen op een bepaalde manier te nummeren, kun je ermee doorrekenen.

Neem de rij: 3, 8, 13, 18, 23, ...

Bij deze rij is de regelmaat +5.

Je kunt deze rij getallen ook in een tabel zetten waarbij je de termen in de rij een nummer geeft. Dat kan op twee manieren. Je kunt de eerste term het nummer 0 of 1 geven.

De tabel komt er in beide gevallen zo uit te zien:

- Nummering begint bij 0:

nummer	0	1	2	3	4
term	3	8	13	18	23

Tabel 1.1

Bij nummer 4 hoort de term 23.

- Nummering begint bij 1:

nummer	1	2	3	4	5
term	3	8	13	18	23

Tabel 1.2

Bij nummer 4 hoort de term 18.

De rijen zijn hetzelfde, alleen de nummering is anders. De vijfde term is in beide gevallen 23. Ongeacht of de nummering bij 0 of bij 1 begint, de vijfde term is nog steeds het vijfde getal in de rij.

De term met nummer 0 is: u_0 of $u(0)$.

Op dezelfde manier geef je de term met nummer 3 aan met u_3 of $u(3)$.

Bekijk de eerste tabel waarbij de nummering bij 0 begint. Daar geldt: $u_2 = 13$ en $u(3) = 18$.

Bekijk de tweede tabel waarbij de nummering bij 1 begint. Daar geldt: $u_2 = 8$ en $u(3) = 13$.

De algemene notatie voor term nummer n is u_n of $u(n)$.

Opgave 3

Bekijk de rij uit **Uitleg 2**, met nummering vanaf 0.

- Wat is de derde term in de rij?
- Bepaal u_4 .
- Bepaal u_5 .

Opgave 4

Gegeven is de rij: 33, 40, 47, 54, 61, ...

- Maak een tabel bij de rij. Nummer de termen en begin de nummering bij 0.
- Bepaal $u(3)$.

- c Bepaal $u(6)$.
 d Bepaal $u(15)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In een **rij** getallen met een bepaalde regelmaat, heten de getallen **termen**.

De nummering van deze termen kun je bij 0 of bij 1 laten beginnen. Noteer de eerste term als u_0 of $u(0)$ wanneer de nummering bij 0 begint.

Noteer de eerste term als u_1 of $u(1)$ wanneer de nummering bij 1 begint.

Omschrijf de rij zelf als: u_n of $u(n)$, waarin n het nummer aangeeft. Geef daarbij aan of n bij 0 of bij 1 begint.

Je kunt twee soorten rijen onderscheiden:

Een **rij met een lineair verband** is een rij waarbij de regelmaat 'plus' of 'min' een vast getal is.

Een **rij met een exponentieel verband** is een rij waarbij de regelmaat 'keer' of 'gedeeld door' een vast getal is.

Voorbeeld 1

Gegeven is een rij met een lineair verband u_n waarbij de regelmaat -6 is.

De vierde term in de rij is 182.

Maak een tabel bij de rij met n van 0 tot en met 8 en bepaal u_0 , u_8 en u_{40} .

Antwoord

Maak een tabel met n van 0 tot en met 8.

De vierde term is 182, dus $u_3 = 182$.

Bereken de rest van de tabel door gebruik te maken van de regelmaat -6 .

Doe bij vooruitrekenen -6 en bij achteruitrekenen $+6$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	200	194	188	182	176	170	164	158	152

Tabel 1.3

Hieruit blijkt dat $u_0 = 200$ en $u_8 = 152$.

Bereken nu u_{40} . De tabel uitbreiden is veel werk. Een andere manier om dit te berekenen is als volgt:

$$u_0 = 200 = 200 - 0 \cdot 6$$

$$u_1 = 194 = 200 - 1 \cdot 6$$

$$u_2 = 188 = 200 - 2 \cdot 6$$

...

$$u_{40} = 200 - 40 \cdot 6 = -40$$

Opgave 5

Bekijk de rij in **Voorbeeld 1**.

Bepaal de eerste term, de vierde term, u_9 , u_{10} en u_{100} .

Opgave 6

Gegeven is een rij met een lineair verband u_n waarbij de regelmaat -3 is.

De vierde term in de rij is 166.

Maak een tabel bij de rij met n van 0 tot en met 8 en bepaal u_0 , u_8 en u_{50} .

Voorbeeld 2

Gegeven is een rij met een exponentieel verband u_n waarbij de regelmaat $\times -2$ is.

De vierde term in de rij is -32 .

Maak een tabel bij de rij met n van 0 tot en met 8 en bepaal u_0 , u_8 en u_{15} .

Antwoord

Maak een tabel met n van 0 tot en met 8.

De vierde term is -32 , dus $u_3 = -32$.

Bereken de rest van de tabel door gebruik te maken van de regelmaat $\times -2$.

Doe bij vooruitrekenen $\times -2$ en bij achteruitrekenen $: -2$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	4	-8	16	-32	64	-128	256	-512	1024

Tabel 1.4

Hieruit blijkt dat $u_0 = 4$ en $u_8 = 1024$.

Bereken nu u_{15} . De tabel uitbreiden is veel werk. Een andere manier om dit te berekenen is als volgt:

$$u_0 = 4 = 4 \cdot (-2)^0$$

$$u_1 = -8 = 4 \cdot (-2)^1$$

$$u_2 = 16 = -8 \cdot -2 = 4 \cdot -2 \cdot -2 = 4 \cdot (-2)^2$$

...

$$u_{15} = 4 \cdot (-2)^{15} = -131072$$

Opgave 7

Bekijk de rij in **Voorbeeld 2**.

Bepaal de eerste term, de vierde term, u_9 , u_{10} en u_{20} .

Opgave 8

Gegeven is een rij met een exponentieel verband u_n waarbij de regelmaat $\times -3$ is.

De vierde term in de rij is -27 .

Maak een tabel bij de rij met n van 0 tot en met 8 en bepaal u_0 , u_8 en u_{16} .

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is een rij met een lineair verband u_n waarvan de regelmaat $+3$ is.

De vierde term in de rij is 42.

Maak een tabel bij de rij met een nummering die begint bij 0 en bepaal u_0 , u_6 en u_{50} .

Opgave 10

Gegeven is een rij met een exponentieel verband u_n waarvan de regelmaat $\times \frac{1}{2}$ is.

De vierde term in de rij is 20000.

Maak een tabel bij de rij met een nummering die begint bij 0 en bepaal u_0 , u_6 , en u_{14} .

Opgave 11

In een laboratorium wordt een bacteriecultuur gekweekt. In het begin bevat een petrischaaltje 2000 bacteriën. Ieder kwartaal verdubbelt dit aantal. Hoeveel bacteriën zijn er na twee jaar?

Opgave 12

Gegeven zijn de eerste twee termen van een rij. Bereken de gevraagde term.

- a Rij u heeft een lineair verband met de eerste twee termen $u_1 = 6$ en $u_2 = 14$. Bereken u_{25} .
- b Rij v heeft een exponentieel verband met de eerste twee termen $v_0 = 6000000$ en $v_1 = 3000000$. Geef v_{10} .

Opgave 13

Een wolkenkrabber in New York heeft vier liften. Ze stoppen niet alle vier op iedere verdieping. Alle liften stoppen op de begane grond.

De eerste lift stopt na de begane grond alleen op de vierde, de achtste en de twaalfde verdieping, enzovoort.

De tweede lift stopt na de begane grond alleen op de eerste, de vijfde en de negende verdieping, enzovoort.

- a Stel een tabel op van de eerste tien verdiepingen waar de tweede lift stopt. De nummering begint bij 0 voor de begane grond, en dat is de nulde verdieping.
- b De derde lift stopt na de begane grond op de tweede verdieping. Waar zal deze lift daarna stoppen? Gebruik dezelfde logica als bij de eerste en de tweede lift.
- c De derde lift stopt op de 54^e verdieping. Hij is onderweg naar boven waar tien stops verder iemand op het knopje gedrukt heeft. Op welke verdieping staat deze persoon?
- d De derde lift stopt op de 78^e verdieping. Hij is onderweg naar beneden waar iemand op de tiende verdieping op het knopje gedrukt heeft. Langs hoeveel stops komt de derde lift terwijl hij onderweg is naar deze persoon?

Opgave 14

Rachid krijgt vanaf zijn vijfde verjaardag iedere week € 0,50 zakgeld van zijn ouders. Dit bedrag wordt bij elke verjaardag verhoogd met € 0,50. Als Rachid zes jaar is, krijgt hij dus iedere week € 1,00 zakgeld. Zijn ouders gaan hiermee door tot Rachid vijftien jaar oud is.

- Hoeveel euro zakgeld krijgt Rachid in totaal in het jaar dat hij vijf is?
- En als hij zes jaar oud is?
- De jaarlijkse bedragen aan zakgeld vormen de rij u_n .
Maak bij deze rij een tabel waarbij $n = 1$ hoort bij het vijfde levensjaar van Rachid.
- Rachid stopt al zijn zakgeld in een spaarpot en geeft nooit iets uit. Hoeveel zakgeld heeft hij de dag voor zijn achtste verjaardag in totaal gespaard?

Toepassen

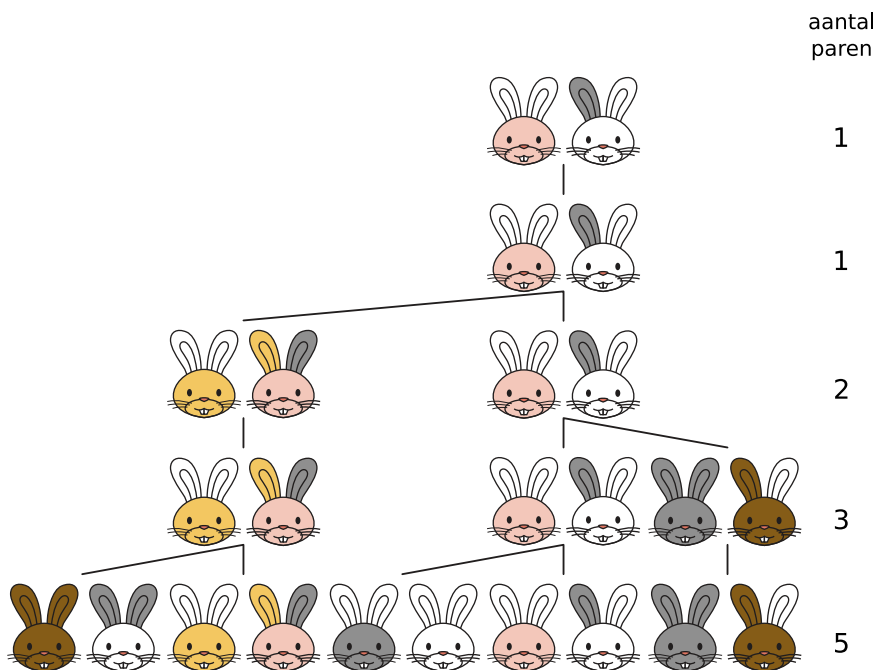
Opgave 15: De rij van Fibonacci

Fibonacci was een Italiaanse wiskundige.

In zijn boek 'Liber Abaci' stelt Fibonacci een eenvoudige vraag:

"Als een konijnenpaar elke maand een jong konijnenpaar voortbrengt, dat na twee maanden zelf ook weer een nieuw konijnenpaar voortbrengt, hoeveel konijnenparen zijn er dan na verloop van tijd, verondersteld dat ze allen in leven blijven?"

Schematisch ziet dat er als volgt uit:



Figuur 1.3

- Zet deze redenering voort.
Hoeveel konijnenparen zijn er dan vijf maanden na de start?
- Het aantal konijnenparen per maand vormt de rij u_n .
Maak van deze rij een tabel met $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

- c Er zit een bepaalde regelmaat in deze rij, maar hij is niet eenvoudig te vinden. Zoek de regelmaat.
- d Bereken de achtste en de negende term.

Opgave 16: Graankorrels op het schaakbord

Volgens een oud verhaal vroeg de **uitvinder van het schaakbord** aan de koning van India de volgende beloning voor zijn uitvinding. Hij vroeg 1 graankorrel voor het eerste veld van het schaakbord, 2 voor het tweede veld, 4 voor het derde veld, 8 voor het vierde veld, en zo het dubbele voor elk volgende veld tot en met het 64ste veld. De koning stemde hiermee in en liet zijn schatmeester uitrekenen hoeveel graankorrels de uitvinder zou krijgen. Dit bleken zoveel graankorrels te zijn dat heel India ermee bedekt kon worden met een laag van 30 cm.

- a Maak een tabel waarin je de velden nummert en het aantal graankorrels noteert. Laat de nummering lopen van 1 t/m 10.
- b Het aantal graankorrels a_n per veld vormen een rij.
Hoe groot is de twintigste term is deze rij?
- c Bepaal a_{64} .

Testen

Opgave 17

- a Bepaal de volgende drie termen van de rij:
..., 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, ...
- b Bepaal de volgende drie termen van de rij:
..., 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...
- c Bepaal de vorige drie termen van de rij: ..., 3, 7, 11, 15, 19, ...
- d De regelmaat van een bepaalde rij is -8 .
Hoe reken je bij deze rij vooruit en achteruit?
- e De regelmaat van een bepaalde rij is $\times \frac{1}{4}$.
Hoe reken je bij deze rij vooruit en achteruit?

Opgave 18

Van een rij is bekend dat $u_0 = 55$ en dat de regelmaat $+3$ is.

- a Bereken u_4 en u_{100} .
Van een andere rij is bekend dat $u_0 = 55$ en dat de regelmaat $\times 1,5$ is.
- b Bereken u_4 en u_{100} .

1.2 Recursie

Inleiding

Vaak heb je bij het voorspellen van groei- en vervalprocessen te maken met 'losse' getallen. Denk maar aan het saldo van een spaarrekening met een maandelijkse rentebijdrage, de wekelijkse tellingen van een bepaald soort vogels, etc.

Voor het berekenen van het saldo op je spaarrekening is natuurlijk van groot belang...

Je leert in dit onderwerp

- rijen met een lineair verband beschrijven met een recursieformule en handmatig termen berekenen;
- rijen met een exponentieel verband beschrijven met een recursieformule en handmatig termen berekenen.

Voorkennis

- werken met formules voor rijen en de bijbehorende nummering.



Figuur 2.1

Verkennen

Opgave V1

Je hebt een saldo van € 1240,00 en je besluit dat geld op 1 januari 2021 een spaarrekening te zetten. Verder ga je aan het begin van elke maand 50 euro naar die spaarrekening overmaken vanaf 1 februari 2021. Je krijgt aan het eind van elke maand rente van 0,5% over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.

- Hoe bereken je het saldo vanuit dat van een maand eerder?
- Hoe hoog is je saldo op 1 januari 2022?
- Wanneer is je saldo meer dan € 3000,00?

Uitleg 1

Bekijk de rij u : 2880, 2940, 3000, 3060, 3120, 3180,...

De rij begint bij 2880 en er wordt steeds 60 bij opgeteld. Deze rij is lineair. Als de nummering van de termen begint bij 0 dan is $u_0 = 2880$.

Je berekent u_1 door 60 bij u_0 op te tellen:

$$u_1 = u_0 + 60 = 2880 + 60 = 2940.$$

Je berekent u_2 door 60 op te tellen bij u_1 :

$$u_2 = u_1 + 60 = 2940 + 60 = 3000.$$

Je berekent u_n door 60 op te tellen bij u_{n-1} : $u_n = u_{n-1} + 60$.

Een formule zoals $u_n = u_{n-1} + a$ of $u(n) = u(n-1) + a$ is een voorbeeld van een recursieformule. Recursie betekent zoiets als 'doorrekenen vanuit de vorige term'.

Je berekent u_3 met behulp van de recursieformule uit u_2 :

$$u_3 = u_{3-1} + 60 = u_2 + 60 = 3000 + 60 = 3060$$

Een recursieformule heeft wel een 'beginterm' u_0 of u_1 nodig (het ligt eraan of de nummering bij $n = 0$ of $n = 1$ begint). Voor het berekenen van termen bij hoge waarden van n zal al gauw een computer (zoals een grafische rekenmachine) nodig zijn.

Opgave 1

- Waarom is in **Uitleg 1** u_n een rij met een lineair verband?
- Gebruik de recursieformule om u_4 te berekenen.
- Gebruik de recursieformule om u_6 te berekenen.
- Waarom is het niet handig om met de recursieformule handmatig de honderdste term te berekenen?

Opgave 2

Gegeven is de rij u : 604, 590, 576, 562, 548, 534,...

De recursieformule voor u_n is: $u_n = u_{n-1} - 14$.

Hierbij begint de nummering bij $n = 0$, met $u_0 = 604$.

- Bereken u_3 .
- Bereken u_6 .

Uitleg 2

Bekijk de rij v : 4, 12, 36, 108, 324, 972,...

De rij begint bij 4 en er wordt steeds vermenigvuldigd met 3. Deze rij is exponentieel.

Als de nummering van de termen begint bij 0 dan is $v_0 = 4$.

Je berekent v_1 door v_0 met 3 te vermenigvuldigen:

$$v_1 = v_0 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Je berekent v_2 door v_1 met 3 te vermenigvuldigen:

$$v_2 = v_1 \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36.$$

Je berekent v_n door v_{n-1} met 3 te vermenigvuldigen:

$$v_n = v_{n-1} \cdot 3.$$

Ook een formule zoals $v_n = v_{n-1} \cdot r$ of $v(n) = v(n-1) \cdot r$ is een recursieformule. De factor r heet de 'reden' van de rij. Hierbij kan r groter dan 1 zijn (de termen worden groter), tussen 0 en 1 liggen (de termen worden kleiner) of negatief zijn (dan springen de termen heen en weer van positief naar negatief). Ook hierbij is een beginterm nodig.

Je kunt v_3 berekenen met behulp van de recursieformule:

$$v_3 = v_{3-1} \cdot 3 = v_2 \cdot 3 = 36 \cdot 3 = 108.$$

Soms wordt in plaats van recursieformule wel van een 'recursieve formule' gesproken.

Opgave 3

- Waarom is in **Uitleg 2** v_n een rij met een exponentieel verband?
- Gegeven is de rij v_n : 3, 6, 12, 24, 48, 96, ... met $v_0 = 3$.
Stel de recursieformule op voor v_n en bereken daarmee v_6 .

Opgave 4

Gegeven is de rij $v_n : 256, 128, 64, 32, 16, 8, \dots$ en $v_0 = 256$.

- a Stel de recursieformule voor v_n op.
b Bereken v_6 .

Theorie en voorbeelden**Om te onthouden**

Je beschrijft een rij met een **recursieformule** (soms wordt 'recursieve formule' gebruikt) om de regelmaat goed weer te geven. Daarmee kan de volgende term alleen berekend worden als de vorige term bekend is. Daarom moet er altijd een beginwaarde bij de formule gegeven zijn. De nummering kan starten bij 0 of bij 1. Dit wordt altijd aangegeven.

Bij een rij met een lineair verband ontstaat elke term door bij de vorige term een vaste toename a op te tellen.

De algemene recursieformule voor een rij met een lineair verband is:

$$u_n = u_{n-1} + a \text{ of ook wel } u(n) = u(n-1) + a.$$

Bij een rij met een exponentieel verband ontstaat elke term door bij de vorige term met een vast getal r (genaamd de 'reden' of de 'groeifactor') te vermenigvuldigen.

De algemene recursieformule voor een rij met een exponentieel verband is:

$$u_n = u_{n-1} \cdot r \text{ of ook wel } u(n) = u(n-1) \cdot r.$$

Voorbeeld 1

Bekijk het begin van drie rijen:

- rij u : 10, 15, 20, 25,...
- rij v : 10, 20, 40, 80,...
- rij w : 10, 40, 90, 160,...

Welke van deze rijen horen bij een lineair verband? Stel een daarbij passende recursieformule op, beginnend bij $n = 0$.

Antwoord

Bekijk de verschillen tussen de termen om te onderzoeken of de termen in de rij een lineair verband hebben. Als het verschil tussen de termen steeds eenzelfde getal is, is het een lineaire rij. Dit is alleen het geval bij rij u .

De recursieformule voor rij u is te vinden door vast te stellen:

- $u(0) = 10$
- Het verschil tussen twee opvolgende termen is steeds +5.

De recursieformule is: $u(n) = u(n-1) + 5$ met $u(0) = 10$.

Opgave 5

Welke van de rijen horen bij een lineair verband? Geef van elke rij met een lineair verband de recursieformule, beginnend bij $n = 0$.

- a 5, 14, 23, 32, 41,...
- b 320, 160, 80, 40,...
- c 10, 2, -6, -14,...
- d 1, 4, 9, 16,...
- e 1, 3, 9, 27,...
- f $5, 5\sqrt{3}, 15, 15\sqrt{3}, 45, \dots$

Voorbeeld 2

Bekijk het begin van drie rijen:

- rij u : 10, 15, 20, 25,...
- rij v : 10, 20, 40, 80,...
- rij w : 10, 40, 90, 160,...

Welke van deze rijen horen bij een exponentieel verband? Stel een daarbij passende recursieformule op, beginnend bij $n = 0$.

Antwoord

Deel steeds een term door de vorige term om na te gaan of de termen in de rij een exponentieel verband hebben. Komt daar steeds hetzelfde getal r uit, dan is het een rij met een exponentieel verband. Hier is dat de rij v . Ga na dat $80 : 40 = 40 : 20 = 20 : 10 = 2$.

De recursieformule voor rij v is te vinden door vast te stellen:

- $v(0) = 10$
- De reden is $r = 2$.

De gevraagde recursieformule is: $v(n) = v(n-1) \cdot 2$ met $v(0) = 10$.

Opgave 6

Welke van de rijen horen bij een exponentieel verband? Geef van elke rij met een exponentieel verband de recursieformule, beginnend bij $n = 0$.

- a 5, 14, 23, 32, 41,...
- b 320, 160, 80, 40,...
- c 10, 2, -6, -14,...
- d 1, 4, 9, 16,...
- e 1, 3, 9, 27,...
- f 2, 6, 18, 54,...
- g $5, 5\sqrt{3}, 15, 15\sqrt{3}, 45, \dots$

Opgave 7

Frank, wiskundig programmeur, maakt van een zich herhalend aan/uit-signaal (dus: aan, uit, aan, uit, ...) een rij s . 'Aan' geeft Frank waarde 1, en 'uit' geeft hij waarde -1.

- a Veronderstel dat het signaal op 'uit' begint. Laat zien hoe s eruitziet. Is s een rij met een lineair verband of een rij met een exponentieel verband, of geen van beide?

- b** Geef een recursieformule voor de afzonderlijke termen s_n van rij s . Begin bij s_0 .

Verwerken

Opgave 8

Bekijk de rij 2, 5, 8, 11, 14, ... met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- a** Is dit een rij met een lineair verband of een rij met een exponentieel verband?
- b** Schrijf de volgende vijf termen op.
- c** Beschrijf de rij met een recursieformule.

Opgave 9

Bekijk de rij 2, 6, 18, 54, 162, ... met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- a** Is dit een rij met een lineair verband of een rij met een exponentieel verband?
- b** Schrijf de tiende term op.
- c** Beschrijf de rij met een recursieformule.

Opgave 10

Van een aantal rijen met een bepaalde regelmaat is het begin gegeven. Stel telkens een recursieformule op. Begin de nummering bij $n = 0$.

- a** u : 6, 11, 16, 21, ...
- b** v : 1024, 512, 256, 128, 64, 32, ...
- c** w : 13, 8, 3, -2, -7, ...

Opgave 11

Van een rij met een lineair verband is de derde term 10 en de zevende term 22. Bepaal een recursieformule voor de rij. Geef duidelijk de nummering aan.

Opgave 12

Sara zet een deel van haar geld op een spaarrekening. Op deze rekening krijgt ze 3,1% rente. Deze rente wordt elk jaar verrekend. Stel dat Sara c euro op haar rekening zet en het daar laat staan zonder er iets op te storten of van op te nemen. De rij R geeft het verloop van het bedrag op de spaarrekening weer, met R_n het bedrag na n jaar.

- a** Geef een recursieformule (in termen van c) voor het verloop van R_n , met $n = 0, 1, 2, \dots$
- b** Neem $c = 1000$. Sara haalt aan het begin van het vierde jaar al het geld van de rekening. Hoe groot is haar winst?

Opgave 13

Kim zet op 1 januari 2015 een bedrag van € 1240,00 op een spaarrekening. Ze maakt aan het begin van elke maand € 50,00 naar die spaarrekening over, te beginnen op 1 februari 2015. Ze krijgt aan het eind van elke maand 0,5% rente over het saldo van dat moment. Ze haalt geen geld van deze spaarrekening en ze doet ook geen andere stortingen.

Stel een recursieformule op voor het saldo S met de tijd t in maanden. Neem $t = 0$ op 1 januari 2015.

Toepassen

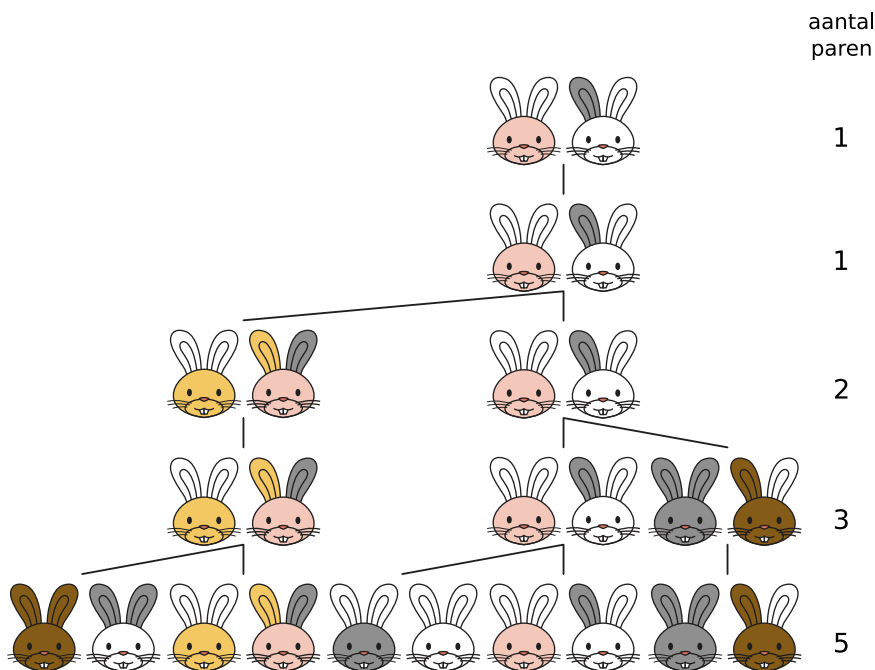
Opgave 14: De rij van Fibonacci (2)

Fibonacci was een Italiaanse wiskundige.

In zijn boek 'Liber Abaci' stelt Fibonacci een eenvoudige vraag:

"Als een konijnenpaar elke maand een jong konijnenpaar voortbrengt, dat na twee maanden zelf ook weer een nieuw konijnenpaar voortbrengt, hoeveel konijnenparen zijn er dan na verloop van tijd, verondersteld dat ze allen in leven blijven?"

Schematisch ziet dat er als volgt uit:



Figuur 2.2

- Je neemt $a_0 = 1$. Hoe bereken je het aantal konijnenparen a_n ?
- Welke recursieformule past bij deze rij?
- Bereken met de recursieformule het aantal konijnenparen als $n = 12$.

Opgave 15: Kikkerplaag

Bij een plas leven kikkers. Zonder invloeden van buitenaf zou de hoeveelheid kikkers jaarlijks verdubbelen.

- Stel dat er geen invloeden zijn van buitenaf. Op 1 januari 2016 zijn er 200 kikkers. Stel een recursieformule op voor de hoeveelheid kikkers per jaar $k(t)$, met $t = 0$ op 1 januari 2016.
- Als er meer dan 100000 kikkers zijn, is er sprake van een kikkerplaag. Aan het begin van welk jaar is er een kikkerplaag? Hoeveel kikkers zijn er dan?

Testen

Opgave 16

De rij $t_0, t_1, t_2, \dots$ is gegeven door de recursieformule $t_n = t_{n-1} + 2$ met $t_0 = 1$.

- Schrijf de eerste twaalf termen op.
- Bereken de 100-ste term.
- Welk nummer heeft de term 299?

Opgave 17

Bij de volgende beginstukken van rijen ligt het vervolg voor de hand. Geef bij elk geval een recursieformule bij nummering vanaf 0.

- 4, 8, 12, 16, 20,...
- $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$
- 1, -2, 4, -8, 16, -32,...
- $\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, \dots$

1.3 Directe formules

Inleiding

Vaak heb je bij het voorspellen van groei- en vervalprocessen te maken met 'losse' getallen. Denk maar aan het saldo van een spaarrekening met een maandelijkse rentebijschrijving, de wekelijkse tellingen van een bepaald soort vogels, etc.

Je hebt tot nu toe gezien hoe je deze aantallen door middel van recursie kunt opbouwen vanuit een startbedrag. Maar liever wil je een formule die direct het aantal op een bepaald moment geeft.

Je leert in dit onderwerp

- termen van een rij via een directe formule berekenen;
- rijen met een lineair verband en rijen met een exponentieel verband beschrijven met een directe formule.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen.



Figuur 3.1

Verkennen

Opgave V1

Je hebt op 1 januari 2021 een saldo van € 1240,00.

En je besluit dat geld in een oude sok te bewaren. Verder stop je daar aan het begin van elke maand 50 euro bij in, te beginnen op 1 februari 2021. Je haalt voorlopig geen geld uit je sok en je stopt er ook geen andere bedragen in.

- a** Hoe hoog is je saldo na 40 stortingen?

Je hebt op 1 januari 2021 een saldo van € 1240,00.

En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten tegen 0,1% rente per maand, die voor het eerst op 1 februari 2021 wordt bijgeschreven. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je stort er ook geen andere bedragen op.

- b** Hoe hoog is je saldo na 40 maanden?

Uitleg

Bekijk de rijen getallen:

u : 2880, 2940, 3000, 3060, 3120, 3180,...

a : 4, 12, 36, 108, 324, 972,...

Alle termen kunnen berekend worden vanuit de voorgaande term. Door de letter n te nemen voor het nummer van de gevraagde term, ontstaat een algemene formule.

Voor rij u met een lineair verband geldt:

$$u_0 = 2880$$

$$u_1 = u_0 + 60 = 2880 + 60 = 2940$$

$$u_2 = u_1 + 60 = (2880 + 60) + 60 = 2880 + 2 \cdot 60 = 2880 + 120 = 3000$$

$$u_3 = u_2 + 60 = (2880 + 2 \cdot 60) + 60 = 2880 + 3 \cdot 60 = 2880 + 180 = 3060$$

$$u_n = 2880 + n \cdot 60 = 2880 + 60n$$

Voor rij a met een exponentieel verband geldt:

$$a_0 = 4$$

$$a_1 = a_0 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$a_2 = a_1 \cdot 3 = (4 \cdot 3) \cdot 3 = 4 \cdot 3^2 = 36$$

$$a_3 = a_2 \cdot 3 = (4 \cdot 3^2) \cdot 3 = 4 \cdot 3^3 = 108$$

...

$$a_n = 4 \cdot 3^n$$

De vorige term hoeft niet bekend te zijn om de volgende te berekenen. Alleen de eerste term u_0 is nodig. De formule $u_n = 2880 + 60n$ en $a_n = 4 \cdot 3^n$ heten 'directe formules'. Met alleen de eerste term kan direct iedere andere term berekend worden.

Je kunt met de directe formule heel snel de honderdste term berekenen.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je bij rijen die een lineair of een exponentieel verband beschrijven een directe formule kunt maken.

- Wat is het voordeel van een directe formule?
- Bereken de honderdste term u_{99} .
- Bereken de honderdste term a_{99} .

Opgave 2

Gegeven is de rij u : 5, 7, 9, 11, 13, ...

- Stel een directe formule op voor deze rij.
- Bereken u_{80} .

Gegeven is de rij v : 2, 10, 50, 250, 1250, ...

- Stel een directe formule op voor deze rij.
- Bereken a_{12} .

Opgave 3

Bekijk de volgende rijen:

- u : 455, 451, 447, 443, 439, 435, ...
- a : 3, -6, 12, -24, 48, -96, ...

- Stel directe formules op voor beide rijen.
- Bereken van beide rijen de zevende term.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Naast een recursieformule om de regelmaat in een rij weer te geven, kan de rij vaak ook beschreven worden met een **directe formule**, waarmee elke term direct berekend kan worden.

De algemene directe formule voor een rij met een lineair verband met beginterm u_0 en regelmaat $+a$ is: $u_n = u_0 + a \cdot n$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Voor een rij met een exponentieel verband met beginterm v_0 en regelmaat $\times r$ is de algemene formule: $v_n = v_0 \cdot r^n$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Het getal r heet de **reden** van de exponentiële rij.

Opmerkingen:

1. Net als bij recursieformules begin je de formule soms niet bij $n = 0$, maar bij $n = 1$.
2. Als u_0 de eerste term is, is u_{10} de elfde term.

Voorbeeld 1

Bekijk het begin van drie rijen:

- rij u : 4, 7, 13, 22,...
- rij v : 4, 8, 16, 32,...
- rij w : 4, 7, 10, 13,...

Welke van deze rijen is een rij met een lineair verband? Stel een daarbij passende directe formule op.

Antwoord

De enige rij met een herhalend verschil tussen de termen is w , dat is de enige lineaire rij.

Bepaal de directe formule voor rij w door vast te stellen dat:

- $w(0) = 4$
- Het verschil tussen twee opvolgende termen steeds $+3$ is.

De gevraagde directe formule is: $w(n) = 4 + 3n$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Opgave 4

Welke van de rijen hebben een lineair verband? Geef van elke rij met een lineair verband de directe formule, beginnend bij $n = 0$.

- a** 5, 3, 1, -1,...
- b** 12, 24, 48, 96,...
- c** 1, -1, 1, -1,...
- d** 1, 1, 2, 3,...
- e** 1, 4, 16, 64,...
- f** 2, 5, 8, 11,...

Voorbeeld 2

Bekijk het begin van drie rijen:

- rij u : 4, 7, 13, 22,...
- rij v : 4, 8, 16, 32,...
- rij w : 4, 7, 10, 13,...

Welke van deze rijen is een rij met een exponentieel verband? Stel een daarbij passende directe formule op.

Antwoord

De enige rij met een vaste reden is rij v , dat is de enige exponentiële rij. Ga na dat $32 : 16 = 16 : 8 = 8 : 4 = 2$.

Bepaal de directe formule voor rij v door vast te stellen dat:

- $v(0) = 4$
- de reden is $r = 2$

De gevraagde directe formule wordt: $v(n) = 4 \cdot 2^n$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Opgave 5

Welke van de rijen hebben een exponentieel verband? Geef van elke rij met een exponentieel verband de directe formule, beginnend bij $n = 0$.

- a** 5, 3, 1, -1,...
- b** 12, 24, 48, 96,...
- c** 1, -3, 9, -27,...
- d** 1, 1, 2, 3,...
- e** 1, 4, 16, 64,...
- f** 2, 5, 8, 11,...

Opgave 6

Celdeling is het biologische proces waardoor cellen zich vermenigvuldigen. Als je begint met één cel die zich in tweeën splitst, dan zijn er twee cellen. Beide cellen splitsen zich vervolgens weer in tweeën, dan zijn het er vier. Dit herhaalt zich zodat je acht cellen krijgt, dan zestien, enzovoort.

Stel dat celsplitsing eens per dag plaatsvindt.

- a** Er is hier sprake van een rij die beschreven wordt met een exponentieel verband. Geef de directe formule voor het aantal cellen a_n per dag, met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ (De eerste dag krijgt nummer 0.)
- b** Hoeveel cellen zijn er op de dertigste dag?

Verwerken**Opgave 7**

Bekijk de rij 55, 42, 29, 16, 3, ... met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- a** Schrijf de volgende vijf termen op.
- b** Beschrijf de rij met een directe formule.

Opgave 8

Bekijk de rij $0,5; -1,5; 4,5; -13,5; 40,5; \dots$ met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- a Schrijf de tiende term op.
- b Beschrijf de rij met een directe formule.

Opgave 9

Bekijk de rijen. Het begin is gegeven. Stel directe formules op. Begin de nummering bij $n = 0$.

- a u : 5, 10, 15, 20,...
- b v : 6561, 2187, 729, 243,...
- c w : 3, -3, 3, -3,...

Opgave 10

Van een rij met een lineair verband is de negende term 35 en de zeventiende term 99. Bepaal een directe formule voor de rij. Geef de nummering aan.

Opgave 11

Gegeven is de recursieformule $u(n) = u(n-1) - 35$ met $u(0) = 663$. Schrijf de recursieformule als directe formule en bereken de vijfde, tiende en vijftiende term. Schrijf de berekeningen op.

Opgave 12

Marieke zet geld op een spaarrekening. Op deze rekening ontvangt ze 2,5% rente. Deze rente wordt na elk jaar verrekend. Stel dat Marieke c euro op haar rekening zet en het daar laat staan zonder iets te storten of op te nemen. De rij R geeft het verloop van het bedrag op de spaarrekening weer, met R_n het bedrag na n jaar.

- a Geef een directe formule (in termen van c) voor het verloop van R_n , met $n = 0, 1, 2, \dots$
- b Neem $c = 1500$. Marieke haalt aan het begin van het tiende jaar al het geld van de rekening. Wat is haar winst?

Opgave 13

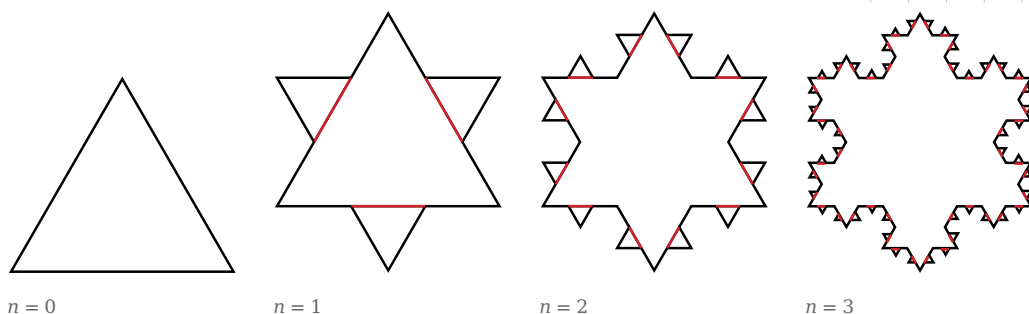
Anton en Bert huren elk een winkelpand. In 2012 moesten ze beiden € 20000 per jaar aan huur betalen. De huur voor Anton wordt jaarlijks verhoogd met € 1000; die van Bert wordt jaarlijks verhoogd met 4%.

- a Stel een directe formule op voor de huur a_n van Anton in jaar n met $n = 0, 1, 2, \dots$
- b Stel een directe formule op voor de huur b_n van Bert in jaar n met $n = 0, 1, 2, \dots$
- c Wie betaalt er in 2024 de meeste huur?

Toepassen

Opgave 14: De Koch sneeuwvlok

Bekijk de figuur met de eerste vier stappen in het maken van een zogenaamde ‘Koch sneeuwvlok’. Deze vorm is één van de eerste ‘fractals’ die door de wiskundige **Helge von Koch (1870–1924)** beschreven werd. Een fractal is een vorm met een herhalend patroon dat er altijd hetzelfde uitziet.



Figuur 3.2

In dit geval begin je met een gelijkzijdige driehoek, en voeg je aan iedere zijde een kleinere gelijkzijdige driehoek toe. Als je oneindig lang doorgaat met kleinere driehoekjes toevoegen (zoals je in de figuur een paar stappen ziet gebeuren), zal het patroon tot in de oneindigheid op dezelfde manier doorgaan.

Bekijk de figuur met $n = 0$ bij de eerste stap, $n = 1$ bij de tweede stap, enzovoort. Stel dat de gelijkzijdige driehoek bij $n = 0$ zijden van lengte 1 heeft. De toegevoegde driehoekjes hebben telkens een zijde van $\frac{1}{3}$ de lengte van de grotere driehoek waar ze aan bevestigd worden.

- De lengte van een zijde van de sneeuwvlok na n stappen beschrijft een rij met een regelmaat. Noem de lengte van een zijde van de sneeuwvlok na n stappen Z_n .
Geef de eerste vier termen van Z_n .
- Geef een directe formule voor Z_n .
- Noem het aantal zijden van de sneeuwvlok na n stappen a_n .
Geef de eerste vier termen van a_n .
- Geef een directe formule voor a_n .
De omtrek van de Koch sneeuwvlok is A_n .
- Geef een directe formule voor A_n .
De oppervlakte van de Koch sneeuwvlok wordt niet oneindig groot.
- Leg uit, waarom de omtrek wel oneindig groot wordt.

1.4 Werken met rijen

Inleiding

Als je echt met rijen wilt werken is een grafische rekenmachine erg nuttig. Nu ga je vooral zien hoe je dat kunt doen. Verder is het vaak handig om het totaal van alle termen van een rij samen te weten. Daarvoor bestaan formules die je niet echt hoeft te onthouden, maar waar je wel mee moet kunnen rekenen.

Je leert in dit onderwerp

- rijen nummeren vanaf 0 of vanaf 1;
- formules voor rijen invoeren op de grafische rekenmachine en ermee werken, zoals termen van de rij optellen.

Voorkennis

- werken met directe formules en recursieformules;
- grafieken van functies/rijen tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de beroemde wiskundige **Carl Friedrich Gauss**. Over hem gaat het verhaal dat hij als 11-jarig jongetje door zijn leraar de (in de ogen van de leraar) vervelende opdracht kreeg om de getallen 1 t/m 100 op te tellen.

Waarop de kleine Carl na enig nadenken zei: "Het antwoord is 5050".

- Hoe vond hij dit zo snel uit zijn hoofd?
- En wat heeft dit met de titel van dit onderdeel te maken?



Figuur 4.1

Uitleg 1

In een theater zijn 35 rijen met stoelen. Op de eerste rij staan 30 stoelen, op de tweede rij 32, op de derde rij 34, enzovoort.

Er komen dus steeds twee stoelen per rij bij. Daarom vormen de aantallen stoelen per rij een rij met een lineair verband: 30, 32, 34, 36,...

Je kunt de rijen met stoelen nummeren vanaf 0 en daarbij formules opstellen voor het aantal stoelen a op rij n :

- recursieformule:
$$a_n = a_{n-1} + 2 \text{ met } a_0 = 30$$
- directe formule:
$$a_n = 30 + 2 \cdot n \text{ met } n = 0, 1, 2, \dots$$

Het ligt hier voor de hand om de nummering van de rij bij 1 te beginnen in plaats van bij 0, omdat de eerste rij stoelen dan hoort bij $n = 1$ en de tweede rij bij $n = 2$, enzovoort.

- recursieformule:
 $a_n = a_{n-1} + 2$ met $a_1 = 30$
- directe formule:
 $a_n = 30 + 2 \cdot (n - 1)$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

Je ziet dat de twee recursieformules gelijk zijn en dat alleen het nummer van de beginterm verschilt.

De directe formule met nummering vanaf 1 verschilt op één plaats van de directe formule met nummering vanaf 0. Bij nummering vanaf 0 gebruik je n en bij nummering vanaf 1 gebruik je $n - 1$.

Hetzelfde verschil geldt voor de directe formule van een rij met een exponentieel verband.

Opgave 1

Gebruik de informatie uit **Uitleg 1**.

- Waarom is het logischer om de nummering bij 1 te beginnen?
- Laat zien dat het aantal stoelen op rij 1 inderdaad 30 is met de formule: $a_n = 30 + 2(n - 1)$ met $n = 1, 2, 3, \dots$
- Bereken met deze formule het aantal stoelen op rij 20.
- Hoe ziet de recursieformule er uit wanneer de nummering bij 0 begint?
- Stel de directe formule op wanneer de nummering bij 0 begint.
- Bereken met die formule ook het aantal stoelen op rij 20. Is het aantal hetzelfde als bij c?

Opgave 2

De rij v begint zo: ..., 4, -8, 16, -32, ...

- Geef de eerste term van v .
- Geef de recursieformule van v_n met $n = 0, 1, 2, \dots$
- Geef de recursieformule van v_n met $n = 1, 2, 3, \dots$
- Geef de directe formule van v_n met $n = 0, 1, 2, \dots$
- Geef de directe formule van v_n met $n = 1, 2, 3, \dots$

Uitleg 2

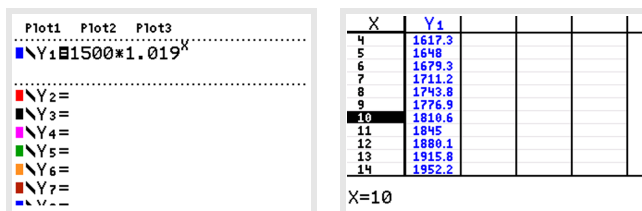
Sofie zet € 1500 op een bankrekening met 1,9% rente per jaar.

- Sofie stort geen geld meer op haar rekening. Wat is haar saldo na tien jaar?
- Sofie stort elk jaar € 500,00 op haar rekening. Wat is dan haar saldo na tien jaar?

Om het antwoord op de eerste vraag te vinden kun je een directe formule opstellen. Door deze in te voeren op de grafische rekenmachine is het antwoord af te lezen.

De directe formule is exponentieel met beginwaarde 1500 en groei-factor 1,019 per jaar, dus: $u_n = 1500 \cdot 1,019^n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$ Voer deze formule in de grafische rekenmachine in en lees in de tabel

de waarde voor $n = 10$ af. Als Sofie geen geld op haar rekening stort, is haar saldo na tien jaar: € 1810,60.

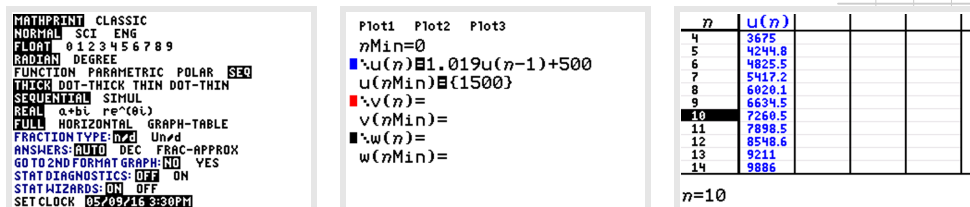


Figuur 4.2

Bij het antwoord op de tweede vraag is een recursieformule gemakkelijker op te stellen, omdat er sprake is van zowel een groeifactor als een lineair verband.

De recursieformule is: $u_n = 1,019 \cdot u_{n-1} + 500$ met $u_0 = 1500$.

Voor een recursieformule kun je ook de grafische rekenmachine gebruiken, bekijk het [Practicum](#). Je ziet: als Sofie elk jaar € 500,00 op haar rekening stort, is haar saldo na tien jaar: € 7260,50.



Figuur 4.3

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit [Uitleg 2](#).

- Ga uit van de situatie dat Sofie geen jaarlijkse stortingen doet. Wat is haar saldo na twintig jaar?
- Ga uit van de situatie dat Sofie jaarlijks € 500,00 stort. Wat is haar saldo na twintig jaar?

Opgave 4

Gerrit heeft op 1 januari 2020 € 100000 op een spaarrekening. De spaarrekening heeft een jaarrente van 2,8%. Aan het eind van ieder jaar haalt Gerrit er € 4000 af.

- Stel de recursieformule op, met n in jaar en $n = 0, 1, 2, \dots$
- In het hoeveelste jaar is het saldo voor het eerst negatief?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Rijen zoals u_n kunnen op twee manieren genummerd worden: vanaf $n = 0$ of vanaf $n = 1$.

	recursieformule	directe formule
lineair verband nummering vanaf $n = 0$	$u_n = u_{n-1} + a$ met $u_0 = b$	$u_n = u_0 + a \cdot n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
lineair verband nummering vanaf $n = 1$	$u_n = u_{n-1} + a$ met $u_1 = b$	$u_n = u_1 + a \cdot (n - 1)$ met $n = 1, 2, 3, \dots$
exponentieel verband nummering vanaf $n = 0$	$u_n = u_{n-1} \cdot r$ met $u_0 = b$	$u_n = u_0 \cdot r^n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
exponentieel verband nummering vanaf $n = 1$	$u_n = u_{n-1} \cdot r$ met $u_1 = b$	$u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

Tabel 4.1

Een opgestelde formule voor een rij kun je invoeren op de grafische rekenmachine. Hiermee kun je bijvoorbeeld snel waarden aflezen, of vergelijkingen en ongelijkheden met rijen oplossen. Directe formules kun je vaak invoeren als functie van x . Maar voor het rekenen met rijen heb je op de grafische rekenmachine een speciale 'mode' of een speciaal menu. Bekijk in het **Practicum** hoe dat op de verschillende rekenmachines gaat.

Voorbeeld 1

Bekijk de rijen.

u : 78, 72, 66, 60, 54,...

v : 4, 12, 36, 108, 324,...

Geef voor beide rijen de directe formule en de recursieformule, met $n = 0, 1, 2, \dots$ en met $n = 1, 2, 3, \dots$

Antwoord

- Rij u is lineair met beginterm 78 en regelmaat -6 .
De directe formule voor u is:
 $u_n = 78 - 6n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$ of
 $u_n = 78 - 6(n - 1)$ met $n = 1, 2, 3, \dots$
De recursieformule is:
 $u_n = u_{n-1} - 6$ met $u_0 = 78$ wanneer $n = 0, 1, 2, \dots$ of met $u_1 = 78$ wanneer $n = 1, 2, 3, \dots$
- Rij v is exponentieel met beginterm 4 en groeifactor 3.
De directe formule voor v is:
 $v_n = 4 \cdot 3^n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
 $v_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ met $n = 1, 2, 3, \dots$
De recursieformule is:
 $v_n = v_{n-1} \cdot 3$ met $v_0 = 4$ wanneer $n = 0, 1, 2, \dots$ of met $v_1 = 4$ wanneer $n = 1, 2, 3, \dots$

Opgave 5

Bekijk rij p : 12, 28, 44, 60, 76,...

Geef de directe formule en de recursieformule van p , met $n = 0, 1, 2, \dots$ en ook met $n = 1, 2, 3, \dots$

Opgave 6

Bekijk rij q : 1202; 601; 300,5; 150,25; 75,125; ...

Geef de directe formule en de recursieformule van q , met $n = 0, 1, 2, \dots$ en ook met $n = 1, 2, 3, \dots$

Voorbeeld 2

Verzekeringsmaatschappijen A en B bieden allebei een zorgverzekering. De verzekering van maatschappij A kost € 85,00 en die van B € 90,00. De prijs neemt bij beide verzekeraars jaarlijks toe. De prijs van A lineair met € 2,00 per jaar, de andere prijs exponentieel met 1,6% per jaar.

Stel een formule op voor de prijs van de zorgverzekering bij maatschappij A en B, en verantwoord de keuze voor de nummering van de rijen. De zorgverzekering bij maatschappij A is in eerste instantie goedkoper. Na verloop van tijd is deze verzekering duurder. Na hoeveel jaar is de zorgverzekering bij maatschappij A weer voordeliger dan die bij B?

Antwoord

Bij verzekeringsmaatschappij A noem je de rij jaarlijkse prijzen a , en bij B noem je die b . De directe formules zijn:

$$a_n = 85 + 2n \text{ met } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 90 \cdot 1,016^n \text{ met } n = 0, 1, 2, \dots$$

Tel vanaf $n = 0$, zodat je goed uitkomt met de uitspraak: 'De prijs na n jaar is...'

Voer beide rijen in op de grafische rekenmachine en bekijk de tabel. Hieruit blijkt dat $a_n < b_n$ voor $n \geq 31$. Na 31 jaar is zorgverzekering A weer voordeliger dan B.

Je kunt ook werken met de recursieformules:

$$a_n = a_{n-1} + 2 \text{ met } a_0 = 85 \text{ (of } a_1 = 85 \text{ als je vanaf } n = 1 \text{ wilt tellen)}$$

$$b_n = 1,016b_{n-1} \text{ met } b_0 = 90 \text{ (of } b_1 = 90)$$

Hier is alleen de invoer anders; de tabel is verder hetzelfde.

Opgave 7

Verzekeringsmaatschappij C biedt een zorgverzekering aan met een premie van € 88,00. Jaarlijks wordt de prijs verhoogd. Dit doen ze door de premie met 2,7% te laten toenemen, maar er daarna ook weer € 1,50 van af te trekken.

Onderzoek na hoeveel jaar de premie duurder is dan € 100,00.

Opgave 8

Voor een experiment nemen Willem en Linda een groot vel papier van 1 m^2 . Willem knipt dit meteen in twee helften. Vervolgens neemt hij één van de helften, en halveert deze weer. Zo gaat hij alsmaar door. Intussen houdt Linda twee rijen bij. Rij p is de oppervlakte van één van de helften papier die Willem in zijn handen heeft (m^2), en rij q is het aantal stukken papier dat er in totaal ligt.

- Stel een directe formule op voor p en q en licht je keuze voor de nummering toe.
- Na hoeveel keer knippen is de oppervlakte van één van de velletjes kleiner dan 1 cm^2 ?
- Na hoeveel keer knippen is de gemiddelde oppervlakte van alle velletjes kleiner dan $0,23 \text{ m}^2$?

Voorbeeld 3

Er zijn situaties waarbij je een deel van de termen van een rij bij elkaar wilt optellen. Bijvoorbeeld bij het berekenen van een geldsom die bestaat uit een aantal betalingen met rente. Je grafische rekenmachine kan dit voor je doen, bekijk het [Practicum](#).

Bekijk de rijen:

p : 30, 32, 34, 36, ...

q : 5, 10, 20, 40, ...

Bereken voor beide rijen de som van de eerste tien termen.

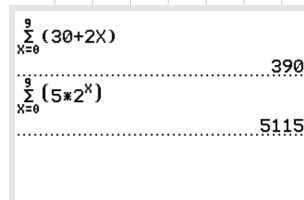
Antwoord

- Rij p heeft een lineair verband. De regelmaat is $+2$ en de beginterm is 30.
De termen van rij p zijn te beschrijven met:
 $p_n = 30 + 2n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
Voor de gevraagde som moet je de termen vanaf $n = 0$ tot en met $n = 9$ optellen.
De grafische rekenmachine geeft 390.
- Rij q heeft een exponentieel verband. De groeifactor is 2 en de beginterm is 5.
De termen van rij q zijn te beschrijven met:
 $q_n = 5 \cdot 2^n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
Voor de gevraagde som moet je de termen vanaf $n = 0$ tot en met $n = 9$ optellen.
De grafische rekenmachine geeft 5115.

Opgave 9

In [Voorbeeld 3](#) zie je hoe je met de grafische rekenmachine de som van een aantal termen van een rij kunt bepalen.

- Bereken $100 + 150 + 200 + 250 + \dots + 900$.
- Bereken $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$.
- Bereken $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 128$.



Figuur 4.4

Opgave 10

Voor hun hypotheek betalen Robin en Fleur een maandelijks bedrag. Dit bedrag neemt iedere maand met een bepaald percentage af, omdat de hypotheekschuld ook steeds kleiner wordt. De eerste maand betalen ze € 900,00; dit bedrag neemt maandelijks met 0,3% af. Zo betalen ze hun hypotheek in de loop van dertig jaar af.

Wat is het totale bedrag dat Robin en Fleur betaald hebben?

Verwerken**Opgave 11**

Geef bij de formules de eerste vijf termen van de bijbehorende rij.

a $u_n = 66 - 12n$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

b $v_n = 152 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

Opgave 12

Stel bij de rijen een recursieformule op met $n = 1, 2, 3, \dots$

a p : 199, 405, 611, 817, ...

b q : 5; 9; 16,2; 29,16; ...

Opgave 13

Bekijk de rijen u , v en w .

- u : 11, 5, -1, -7, ...
- v : 4, 12, 36, 108, ...
- w : 5, -5, 5, -5, ...

a Geef directe formules voor u_n , v_n en w_n met $n = 0, 1, 2, \dots$

b Geef directe formules voor u_n , v_n en w_n met $n = 1, 2, 3, \dots$

Opgave 14

In een stad worden huizen gebouwd. Daardoor ontstaan woonplekken: een woonplek is een vestigingsplek voor één individu. Noem het totale aantal woonplekken in de stad over de loop van de jaren W_t en het aantal inwoners I_t . Zowel W_t als I_t zijn in duizendtallen, en t is in tientallen jaren. $W_0 = 30$ en $I_0 = 30$. Elke tien jaar groeit de huisvesting in de stad met 5000 woonplekken, en de bevolking groeit elke tien jaar met 9%. Stel dat $t = 0$ in 1900, in welk jaar raakt de stad dan overbevolkt?

Opgave 15

In een theater zijn 30 rijen met stoelen. Op de eerste rij staan 40 stoelen, op de tweede rij 42, op de derde rij 44, enzovoort. Het aantal stoelen A op rij n is te berekenen met de formule $A(n) = 40 + 2(n - 1)$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

Hoeveel stoelen staan er in dit theater?

Opgave 16

Johan koopt een huis voor € 240000. Hij sluit daarvoor bij een bank een hypotheek af. Hij spreekt met de bank af dat hij deze hypotheek in dertig jaar volledig aflost in even grote bedragen per jaar. Daarbovenop moet hij de bank jaarlijks rente betalen over zijn schuld die hij dat jaar nog heeft. Het rentepercentage wordt voor dertig jaar vastgezet op 4%. Het moment waarop hij het geld leent is $t = 0$, met t in jaar, en zijn aflossing begint een jaar later.

- Hoeveel moet Johan op $t = 1$ aan de bank betalen aan aflossing en rente?
- Hoe groot is dat bedrag op $t = 2$? En op $t = 3$?
- Waarom heet dit een lineaire hypotheek?
- Stel een directe formule op voor de te betalen bedragen per jaar B_t .
- Bereken hoeveel Johan in totaal aan de bank betaalt voor zijn huis.

Toepassen

Leonardo van Pisa, beter bekend als Fibonacci, was een Italiaans wiskundige in de renaissance. Zijn bekendste vondst is de zogenoemde 'rij van Fibonacci', een rij waarbij elke term ontstaat door de voorgaande twee op te tellen.

De recursieformule die de rij van Fibonacci beschrijft is: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ met $F_0 = F_1 = 1$.

Hier zie je hoe je zo'n rij kunt invoeren in de grafische rekenmachine. Let op het invoeren van de beginwaarden.

Je kunt nu de rij $Q_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$ met $n \geq 1$ bekijken.

Merk op dat Q_n steeds dichterbij een bepaalde waarde komt te liggen, naarmate n groter wordt.

Opgave 17: De rij van Fibonacci

- Voer de recursieformule voor de rij van Fibonacci in op de grafische rekenmachine en bereken de eerste acht termen.
- Bereken ook F_{10} , F_{20} en F_{30} .
Bekijk de rij $Q_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$ met $n \geq 1$.
- Bereken van Q_n de eerste zeven termen.
- Bereken $Q_{10} = \frac{F_{10}}{F_9}$, $Q_{20} = \frac{F_{20}}{F_{19}}$ en $Q_{30} = \frac{F_{30}}{F_{29}}$. Rond af op drie decimalen.

Welk beroemde getal lijkt de rij Q_n te benaderen?

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=u(n-1)+u(n-2)
u(nMin)=1,1
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
w(nMin)=
```

Figuur 4.5

Opgave 18: De somformule van Gauss

Je hebt gezien dat je grafische rekenmachine de termen van een rij voor je kan optellen. Maar bij rijen met een lineair verband bestaat daarvoor een formule.

Stel je voor dat je $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$ wilt berekenen.

- a** Zet de optelling twee keer in tegengestelde volgorde onder elkaar en tel ze op:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 97 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 + \\ \hline \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots \end{array}$$

Welke uitkomsten vind je onder de optelstreep?

- b** Bedenk dat je bij a alle termen dubbel hebt geteld.

Hoe bereken je nu de som van de rij?

- c** Bekijk de formule:

$$\text{som} = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term}).$$

Leg uit waarom deze formule past bij de berekening bij a en b.

- d** Bereken $100 + 150 + 200 + 250 + \dots + 900$.

Testen

Opgave 19

Bereken $1024 + 1022 + 1020 + \dots + 4 + 2$.

Opgave 20

Iemand huurt een appartement voor € 6600,00 per jaar. Jaarlijks wordt de huur met 1,5% verhoogd.

- a** Geef een recursieformule voor de rij $H(t)$ van zijn/haar jaarlijkse huurbedragen.
- b** Geef ook een directe formule voor deze jaarlijkse huurbedragen.
- c** Hoeveel bedragen de totale huurkosten over de eerste 10 jaar?

Opgave 21

Samir koopt een nieuwe PC. Hij leent daartoe op 1 januari 2010 € 800 van de bank. Hij moet dit terugbetalen in 16 maandelijkse termijnen. Maar de bank vraagt rente: elke maand 1% over het bedrag dat op dat moment nog niet is afgelost.

- a** Hoeveel moet hij op 1 maart 2010 aan de bank betalen?
- b** Stel voor de rij met te betalen bedragen een directe formule $B(t)$ op. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010 en geef aan welke waarden t aanneemt.
- c** Bereken hoeveel Samir in totaal aan de bank betaalt voor zijn PC.

Practicum

In de volgende practica kun je zien hoe je **rijen** op de grafische rekenmachine kunt invoeren als je een recursieformule of een directe formule hebt. Bekijk alleen de onderdelen die gaan over rijen met directe formules en recursief gegeven rijen. Bekijk vooral ook hoe je de termen van een rij kunt optellen.

- [Rijen met de TI84](#)
- [Rijen met de TIInspire](#)
- [Rijen met de Casio fx-CG50](#)
- [Rijen met de HP prime](#)
- [Rijen met de NumWorks](#)



1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Rijen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- rij — termen van een rij — lineair verband — exponentieel verband
- recursie en recursieformule
- directe formule
- som van termen

Activiteitenlijst

- rijen beschrijven — lineaire verbanden en exponentiële verbanden herkennen
- een rij beschrijven met een recursieformule
- een rij beschrijven met een directe formule
- werken met rijen en de grafische rekenmachine, o.a. de som van een aantal termen berekenen

Achtergronden

Leonardo van Pisa (1170–1250) (bijgenaamd Fibonacci) was één der eersten die over rijen schreef. In zijn boek 'Liber Abaci' beschreef hij een model voor de ontwikkeling van een populatie konijnen.

Hij ging uit van één paar konijnen, en nam aan:

- elk paar is na zijn tweede levensmaand volwassen;
- elke maand komt er per volwassen paar een paar jongen bij;
- er gaan geen konijnen dood.

De vraag die hij wilde beantwoorden was: hoeveel paren konijnen zijn er aan het eind van één jaar?

Het aantal konijnen dat je onder deze aannames per maand hebt geeft de rij: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,...

Dit is de beroemde **rij van Fibonacci**.

De bijbehorende recursieformule is $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 1$ voor $n = 2, 3, 4, 5, \dots$

Een bijpassende directe formule is niet eenvoudig te vinden, maar hij bestaat wel.

De rij van Fibonacci komt op veel plaatsen voor. Onder andere in de spiralen in de bloem van een zonnebloem en in de schubben op een dennenappel. Maar ook de beroemde 'Gulden Snede' heeft met de rij van Fibonacci te maken. Op het internet bestaan heel veel sites over deze rij, zoek maar eens.



Figuur 5.1

Testen

Opgave 1

Gegeven is de rij u_n waarbij de regelmaat +6 is.

De vierde term in de rij is 55.

- Vormen de termen in rij u_n een lineair verband of een exponentieel verband? Licht je antwoord toe.
- Maak een tabel bij de rij met een nummering die begint bij 0.
- Bepaal $u(8)$.
- Stel een directe formule en een recursieformule op. Begin de nummering bij $n = 0$.

Opgave 2

Gegeven is de rij u_n waarbij de regelmaat $\times \frac{1}{4}$ is.

De derde term in de rij is 10000.

- Vormen de termen in rij u_n een lineair verband of een exponentieel verband? Licht je antwoord toe.
- Maak een tabel bij de rij met een nummering die begint bij 1.
- Bepaal $u(9)$. Rond af op twee decimalen.
- Stel een directe formule en een recursieve formule op. Begin de nummering bij $n = 1$.

Opgave 3

Gegeven zijn de rijen $a(n)$: 7, 14, 28, 56, 112,... en $b(n)$: 5, 8, 11, 14, 17,...

- Vormen de termen in rijen $a(n)$ en $b(n)$ een lineair verband of een exponentieel verband? Licht je antwoord toe.
- Stel bij beide rijen zowel de directe formule als de recursieformule op. Begin de nummering bij $n = 0$.
- Bereken de som van de eerste honderd termen van rij $b(n)$.

Opgave 4

De rij $t_0, t_1, t_2, \dots$ is gegeven door de directe formule $t_n = n^2 + n$.

- Schrijf de eerste tien termen op.
- Bepaal de kleinste n waarvoor $t_n > 1000$.

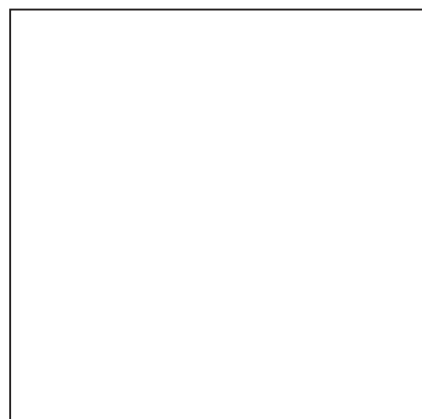
Opgave 5

Gegeven is de rij A_n : 8, 12, 16, 20, 24,... met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

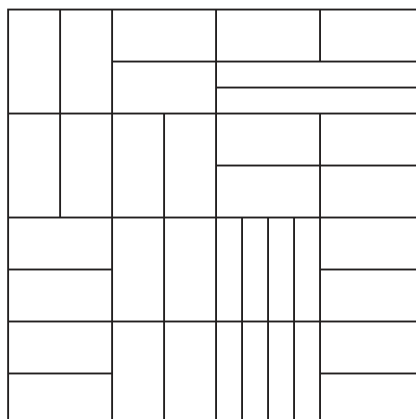
- Is dit een rij met een lineair verband of een rij met een exponentieel verband?
- Stel een recursieformule voor A_n op.
- Stel een directe formule voor A_n op.

Opgave 6

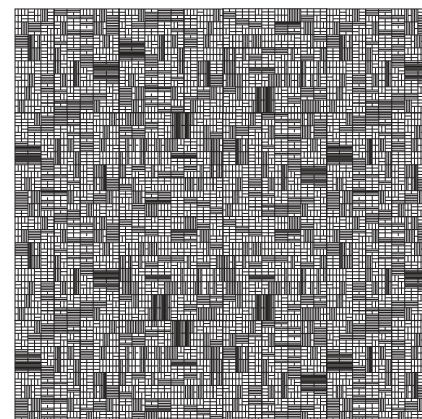
Bekijk de figuren met enkele delen van de totstandkoming van een kunstwerk van Pavel Rudolf.



$n = 0$



$n = 5$



$n = ?$

Figuur 5.2

Het kunstwerk is gemaakt volgens een bepaald proces: 'halvering van vlakken'.

De kunstenaar is begonnen met een vierkant van 24 bij 24 centimeter: zie $n = 0$ in de figuur. Dat vierkant heeft hij in twee even grote rechthoeken verdeeld. Beide rechthoeken heeft hij weer in twee even grote delen verdeeld, enzovoort. Bij elke volgende fase heeft hij elke rechthoek (of vierkant) met een horizontale of een verticale lijn in twee gelijke delen verdeeld. De keuze voor een horizontale of verticale lijn is per rechthoek willekeurig door de kunstenaar gemaakt.

Er is zo een serie plaatjes ontstaan. Elk volgend plaatje bestaat uit steeds meer rechthoeken. Bij het tweede plaatje in de figuur hoort $n = 5$.

Voor het aantal rechthoeken A_n in het n -de plaatje geldt de volgende recursieve formule:

$$A_n = 2 \cdot A_{n-1} \text{ met } A_0 = 1.$$

- a** Het derde plaatje in de figuur (met $n = ?$) bestaat uit 8192 rechthoeken.

Bereken welke waarde van n bij het derde plaatje in figuur 1 hoort.

- b** De oppervlakte per rechthoek wordt bij elke fase steeds kleiner. Ga weer uit van een vierkant van 24 bij 24 centimeter met $n = 0$. Bereken vanaf welke waarde van n de oppervlakte per rechthoek kleiner dan 1 cm^2 is.

(naar: examen wiskunde C in 2012, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 7: Hypotheekvormen

Iemand wil € 240.000 lenen van een bank, om een huis te kopen of een zaak te beginnen. De bank wil 5% rente per jaar hebben en de lening moet in 30 jaar worden terugbetaald. Hoe ga je zo'n schuld aflossen? Twee bekende methoden zijn:

Lineair afbetalingssysteem

Een lineair afbetalingssysteem, waarbij je elk jaar $\frac{1}{30}$ ste deel van de schuld terugbetaald en jaarlijks rente betaalt over de nog uitstaande restschuld.

Stel je leent op 1-1-2010 ($t = 0$ in jaren) en je betaalt voor het eerst op 31-12-2010.

- Je betaalt dus op $t = 1$: $8000 + 0,05 \cdot 240000$ euro.
- Je betaalt op $t = 2$: $8000 + 0,05 \cdot 232000$ euro.

Enzovoorts...

In jaar t betaal je: $B(t) = 8000 + 0,05 \cdot (240000 - 8000(t - 1))$ euro. $B(t)$ is een rekenkundige rij, dus je berekent je totale kosten voor deze lening als de som van deze rij.

Annuïteiten afbetalingssysteem

Een afbetalingssysteem met annuïteiten, waarbij je elk jaar evenveel betaalt, rente en aflossing samen (in het begin veel rente en weinig aflossing, later andersom). Natuurlijk betaal je ook nu rente over je restschuld.

Noem de annuïteit A , je leent op 1-1-2010 en betaalt op 31-12 van elk jaar.

- Je restschuld op $t = 1$ is: $240000 \cdot 1,05 - A$ euro.
- Je restschuld op $t = 2$: $240000 \cdot 1,05^2 - A \cdot 1,05 - A$ euro.

Na t jaar is je restschuld:

$S(t) = 240000 \cdot 1,05^t - A \cdot 1,05^{t-1} - A \cdot 1,05^{t-2} - \dots - A$. Je hebt alles afbetaald als dit samen 0 is. Hieruit bereken je de annuïteit en je totale kosten.

- Bij een lineair afbetalingssysteem betaal je elk jaar evenveel aflossing en rente over de restschuld. Maak hierbij een tabel van jaarlijks te betalen bedragen en bereken het totaalbedrag dat je hiervoor kwijt bent als de situatie zich verder niet wijzigt.
- Bij een afbetalingssysteem gebaseerd op annuïteiten betaal je elk jaar een vast bedrag. Bereken de grootte van dit bedrag en het totaalbedrag dat je hiervoor kwijt bent als de situatie zich verder niet wijzigt.

Examen

Opgave 8: DISK

Een hobbycomputerclub geeft elke maand het tijdschrift DISK uit, waarop alleen eigen leden zich kunnen abonneren. Gedurende lange tijd is het aantal abonnees gelijk aan 90. Omdat de computerclub maar liefst 5400 leden telt, heeft men besloten een reclamecampagne te starten om meer leden te werven voor een abonnement op DISK. De campagne heeft succes: al na één maand zijn er 17 nieuwe abonnees, een maand later hebben zich weer nieuwe abonnees aangemeld en wel 21. De tabel geeft dit verloop voor de eerste maanden weer.

n (maandnummer)	0	1	2	3	4
A_n (aantal nieuwe abonnees in deze maand)		17	21	25	
N_n (totale aantal abonnees na deze maand)	90	107	128	153	

Tabel 5.1

De eerste drie maanden geldt voor A_n de formule: $A_n = 4n + 13$. Neem aan dat deze formule ook geldt voor alle volgende maanden.

- a** Bereken het totale aantal abonnees na zes maanden.
- b** Met behulp van de formule voor A_n kan een formule worden opgesteld voor het totale aantal abonnees N_n . Deze formule kan geschreven worden als $N_n = 2n^2 + b \cdot n + c$.

Bereken b en c .

- c** Als het totale aantal abonnees zo blijft toenemen, zal DISK op zeker moment meer dan 1000 abonnees hebben.

Laat zien dat er dan na 18 maanden voor het eerst meer dan 1000 abonnees zullen zijn.

(naar: examen vwo C in 2007, tweede tijdvak)

Opgave 9: Ureum-gehalte

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 g toeneemt. Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo verversd worden dat de wettelijke norm van 2 g ureum per m^3 water niet overschreden wordt. In een model gaan we er van uit dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken en dat de verversing van het water 's nachts plaatsvindt. Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 m^3 verversd wordt (dus 3% van het totaal). We beginnen de eerste dag met 0 g ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 g ureum in het water. Na het verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 g ureum over.

- a** Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 g ureum in het water zit.
- b** In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

- c** Toon aan dat voor de hoeveelheid ureum (notatie U_n) aan het begin van de n de dag geldt $U_n = 0,8 \cdot U_{n-1} + 400$.

Hiermee wordt aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm voldaan. Maar in de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden.

- d** Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(bron: examen wiskunde A havo van voor 1990)

2

Kansmodellen

2.1	Kansverdelingen	44
2.2	Normale verdelingen	55
2.3	Kansvariabelen optellen	67
2.4	Wortel-n-wet	74
2.5	Normaal of niet?	82
2.6	Totaalbeeld	91

2.1 Kansverdelingen

Inleiding

Een bedrijf is geïnteresseerd in de tijd die nodig is om een klant te helpen, de transactietijd. Je kunt die tijd in klassen indelen (bijvoorbeeld van hele minuten) en zo bijhouden hoeveel minuten een transactie duurt. Je maakt dan een kansverdeling voor de variabele transactietijd t . Maar de transactietijd kan in feite elke (positieve) reële waarde aannemen. Door steeds kleinere tijdsintervallen te nemen kun je een kansverdeling voor deze continue kansvariabele opstellen, benaderen.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip kansvariabele en bijbehorende synoniemen toevalsvariabele en statistische variabele;
- het begrip kansverdeling bij een continue variabele, in het bijzonder de normale verdeling;
- werken met (de vuistregels van) een normale kansverdeling.

Voorkennis

- de vuistregels voor klokvormige frequentieverdelingen
- centrummaten (met name gemiddelde en mediaan) en spreidingsmaten (met name de standaardafwijking)

Verkennen

Opgave V1

Een bedrijf heeft door tellingen een frequentieverdeling opgesteld voor de tijd die nodig is om een klant te helpen. Voor deze transactietijd (in minuten) geldt:

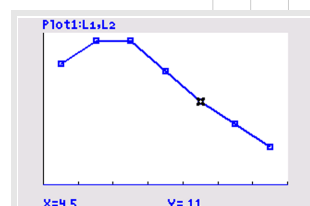
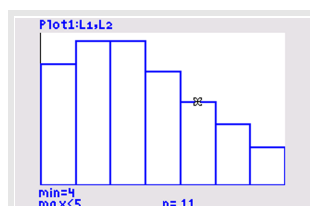
t (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(T = t)$	0,16	0,19	0,19	0,15	0,11	0,08	0,05	0,04	0,03	0,01

Tabel 1.1

Je kunt dit opvatten als een kansverdeling voor de variabele T . T kan in feite elke (positieve) reële waarde aannemen. Door steeds kleinere tijdsintervallen te nemen kun je een kansverdeling voor deze continue variabele benaderen. Het lijndiagram laat dit al een beetje zien. (Merk op dat voor de juiste figuren de klassenmiddens van elke minuut moeten worden ingevoerd in de grafische rekenmachine.)

L1	L2	L3	L4	L5	2
.5	.16				
1.5	.19				
2.5	.19				
3.5	.15				
4.5	.11				
5.5	.08				
6.5	.05				

L2(8)=					



Figuur 1.2

- Hoe groot is de kans dat een klant hoogstens 4 minuten transactietijd kost?
- Hoe geef je die kans in het staafdiagram weer? En in het lijndiagram?
- Hoe bepaal je de kans dat een klant minder dan 4,75 minuten transactietijd kost?

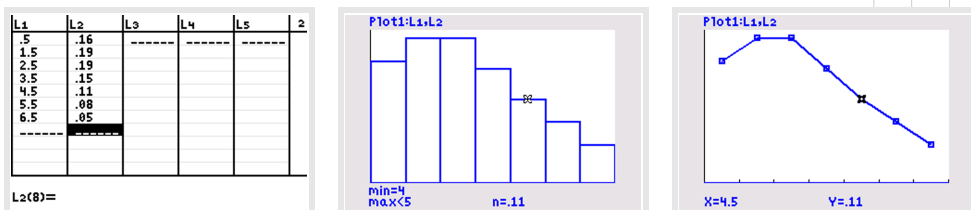
Uitleg 1

Een bedrijf noemt de tijd die nodig is om een klant te helpen de transactietijd. Het bedrijf heeft door tellen de relatieve frequenties van die transactietijd vastgesteld.

t (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(T = t)$	0,16	0,19	0,19	0,15	0,11	0,08	0,05	0,04	0,03	0,01

Tabel 1.2

Vat dit op als een kansverdeling voor de statistische variabele T . De kansverdeling kun je invoeren op de grafische rekenmachine om er vervolgens een histogram of een lijndiagram bij te maken.



Figuur 1.3

- De kans dat een klant hoogstens vier minuten transactietijd kost, is dan:
 $P(T \leq 4) = 0,16 + 0,19 + 0,19 + 0,15 = 0,69$
Dit is de oppervlakte van de eerste vier staafjes van het histogram.
Het is ook de oppervlakte onder het lijndiagram vanaf $t = 0$ tot $t = 4$.
- De kans dat een klant hoogstens 4,75 minuten transactietijd kost, kun je benaderen door de oppervlakte te schatten onder het lijndiagram die de middens van de bovenkanten van de staafjes verbindt vanaf $t = 0$ tot $t = 4,75$.

T kan in werkelijkheid elke positieve waarde aannemen. Door meer metingen te doen, kun je een kansverdeling voor deze variabele opstellen met heel veel staafjes, zelfs zo veel staafjes dat de middens van hun bovenkanten een vloeiende kromme vormen.

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** de tabel met de relatieve frequentie van de transactietijd.

- Hoe groot is de kans op een transactietijd van twee minuten?
- Hoe groot is de kans op een transactietijd van meer dan acht minuten?

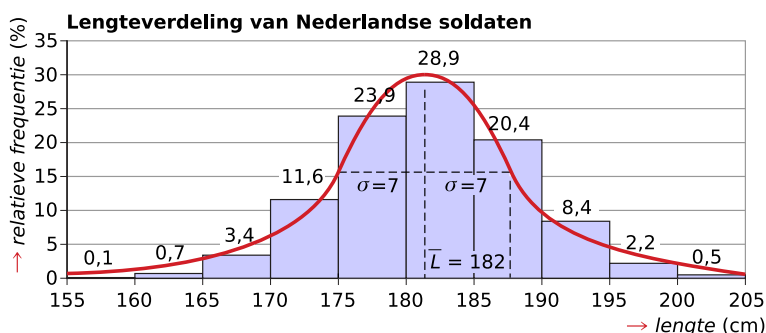
Opgave 2

Bekijk de diagrammen van de relatieve frequentieverdeling van de transactietijd in **Uitleg 1**.

- Waarom kun je T hier opvatten als discreet?
- Waarom is T in werkelijkheid een continue variabele?
- Hoe moet het bijbehorende kanshistogram er ongeveer uitzien als je T continu neemt?
- Als je T als discrete variabele opvat, hoeveel seconden heb je dan maximaal gewacht als je in de klasse $T = 3$ minuten valt?
- Bepaal de kans $P(T \leq 3)$ als je T als discrete variabele opvat.
- Schat de kans $P(T \leq 3)$ in het geval je T opvat als continue variabele.

Uitleg 2

Bekijk het histogram van de verdeling van de lichaamslengte van een groep soldaten.



Figuur 1.4

De lichaamslengte L lijkt discreet door de indeling in klassen. In werkelijkheid is de lichaamslengte een continue toevalsvariabele. In de figuur is een passende kromme getekend die de continue verdeling van de lichaamslengte L benadert. De benadering wordt beter als je meer klassen maakt.

De grafiek heeft een klokvormige frequentieverdeling die wordt bepaald door gemiddelde $\bar{L} = 182$ en standaardafwijking (ook wel standaarddeviatie genoemd) $\sigma(L) = 7$. L is normaal verdeeld. Het gemiddelde van een normale verdeling wordt μ (spreek uit 'mu') genoemd. Er geldt:

- het hoogste punt van elke normale verdeling zit bij μ .
- een maat voor de spreiding is de standaardafwijking σ .
- elke normale verdeling is symmetrisch ten opzichte van μ in het midden.
- hoe verder je bij μ vandaan gaat (naar links of naar rechts), hoe dichter de hoogte van de normale verdeling bij 0 komt.

Kansen bepaal je door de bijpassende oppervlakte onder de grafiek te schatten. De totale oppervlakte onder deze kromme is altijd 1 of 100%.

Je kunt ook de al bekende vuistregels voor de normale verdeling gebruiken om kansen te benaderen. Van de oppervlakte onder de normaalkromme:

- ligt ongeveer 68% tussen $X = \mu - \sigma$ en $X = \mu + \sigma$
- ligt ongeveer 95% tussen $X = \mu - 2\sigma$ en $X = \mu + 2\sigma$
- ligt ongeveer 100% tussen $X = \mu - 3\sigma$ en $X = \mu + 3\sigma$

Opgave 3

Bekijk de relatieve frequentieverdeling van de lengtes van een groep soldaten op een kazerne in [Uitleg 2](#).

- Waarom is L een continue toevalsvariabele?
- Welk percentage hoort bij het hele gebied onder de kromme?
- Een klokvormige verdeling is symmetrisch. Waarom volgt uit die symmetrie dat $P(L \leq 182) = 0,5$?
- Hoeveel is $P(175 \leq L \leq 189)$.
- Hoeveel is $P(L \leq 189)$.
- Maak een schatting van $P(L \leq 174)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een statistische variabele waarvan de frequenties afhangen van het toeval hoort een frequentieverdeling. Bij relatieve frequenties spreek je van een **kansverdeling**.

Bij een discrete variabele kun je die weergeven door een histogram.

Bij een continue variabele kun je die weergeven door een vloeiende kromme door (de middens van) de bovenkanten van zeer veel denkbeeldige dunne staafjes.

Bij een continue variabele is de kans gelijk aan de oppervlakte op een interval onder die vloeiende kromme. De totale oppervlakte onder deze kromme is altijd 1 of 100%.

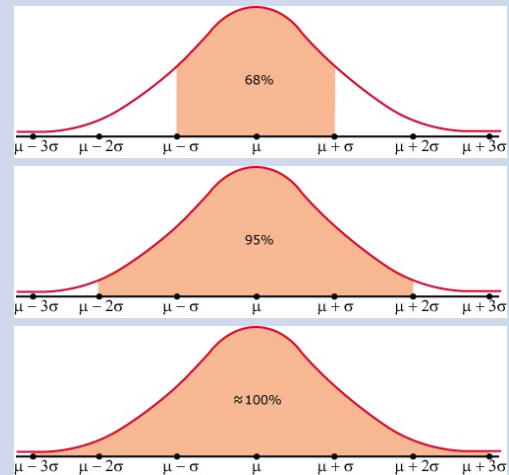
[Bekijk de applet.](#)

Een veelvoorkomende kansverdeling is de **normale verdeling**, de verdeling in de vorm van een klok.

Van deze kansverdeling wordt de vorm, de **normaalkromme**, volledig bepaald door het gemiddelde $\mu = \bar{X}$ en de standaardafwijking (of standaarddeviatie) σ .

Voor een normaal verdeelde variabele X geldt:

- het hoogste punt zit bij $X = \mu$.
- de spreiding is de standaardafwijking σ .
- er is symmetrie ten opzichte van de lijn $X = \mu$.
- de hoogte komt steeds dichterbij 0 als X verder van μ af ligt.
- van de oppervlakte onder de normaalkromme ligt:
ongeveer 68% tussen $X = \mu - \sigma$ en $X = \mu + \sigma$
ongeveer 95% tussen $X = \mu - 2\sigma$ en $X = \mu + 2\sigma$
ongeveer 100% tussen $X = \mu - 3\sigma$ en $X = \mu + 3\sigma$



Figuur 1.5

Opmerking: het woord normaal in 'normale verdeling' zegt iets over de vorm van de verdeling. De bovenstaande eigenschappen mag je dan gebruiken.

Voorbeeld 1

In een callcenter is de transactietijd T de tijd die nodig is om een klant te woord te staan. T is een continue kansvariabele.

Waarom zal T niet normaal verdeeld zijn?

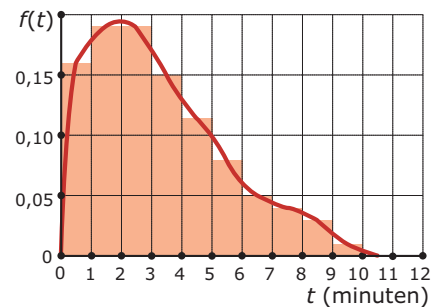
Hoe zou je $P(T \leq 4,5)$ kunnen bepalen?

Antwoord

De bijbehorende kansverdeling zal niet symmetrisch zijn: de kans op een kleine transactietijd is veel groter dan die op een grote.

Schat de oppervlakte onder de kromme om $P(T \leq 4,5)$ te bepalen, bijvoorbeeld door de staafjes met een klassenbreedte van 1 te gebruiken.

Dan vind je $P(T \leq 4,5) \approx 0,73$.



Figuur 1.6

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- Waarom is de transactietijd niet normaal verdeeld?
- Hoe groot is de kans op meer dan tien minuten transactietijd?
- Laat zien, hoe je $P(T \leq 4,5)$ kunt bepalen.

Opgave 5

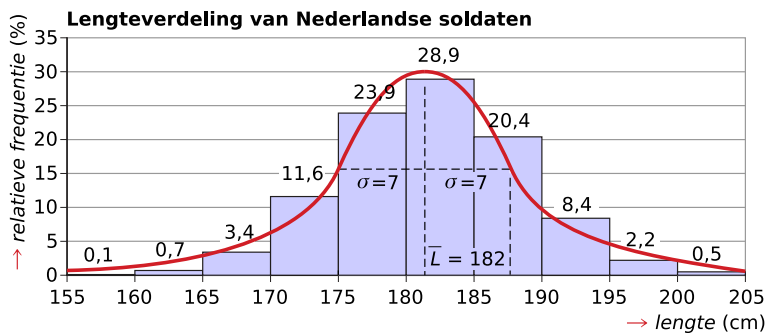
Het lijkt misschien dat in de praktijk bij vrijwel alle continue statistische variabelen een normale verdeling past. Dat is niet het geval: in veel situaties is een verdeling niet symmetrisch. In welke van de volgende gevallen is de verdeling niet symmetrisch?

- het vulgewicht van machinaal gevulde pakken suiker
- de armlengte van volwassen mannen
- het gewicht van volwassen mannen

- d het inkomen van alle Nederlanders
- e de wachttijd bij een helpdesk

Voorbeeld 2

Bekijk de applet



Figuur 1.7

Bekijk de normaalkromme bij een toevalsvariabele L . Bij elke waarde van L wordt de oppervlakte van het gebied links van die waarde onder de kromme berekend. Voor elke normale toevalsvariabele L geldt bij benadering:

- 68% van de waarden die L kan aannemen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$;
- 95% van de waarden die X kan aannemen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.

Controleer de eerste vuistregel voor de variabele L met $\mu(L) = 182$ en $\sigma(L) = 7$.

Antwoord

Tussen $182 - 7 = 175$ en $182 + 7 = 189$ zitten twee hele staven en $\frac{4}{5}$ van de daaropvolgende staaf. Dat is $23,9 + 28,9 + \frac{4}{5} \cdot 20,4 = 69,12\%$. Dat is ongeveer 68%.

Controleer op dezelfde manier de tweede vuistregel: 95% zit tussen $182 - 14$ en $182 + 14$.

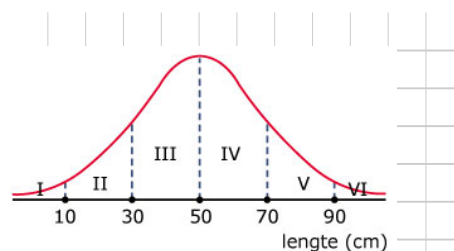
Opgave 6

In **Voorbeeld 2** worden de vuistregels gecontroleerd voor een normale verdeling met $\mu = 182$ en $\sigma = 7$.

- a Controleer de tweede vuistregel zelf.
- b Hoeveel procent hoort er volgens de vuistregels bij het gebied tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu - \sigma$?
- c Teken een normaalkromme met $\mu = 170$ en $\sigma = 10$. Met grenzen $\mu - 2\sigma$, $\mu - \sigma$, μ , $\mu + \sigma$ en $\mu + 2\sigma$ kun je het gebied onder de normaalkromme in zes delen verdelen. Zet in elk van die delen het juiste percentage.
- d Hoeveel procent zit er in het gebied tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$?

Opgave 7

De lengtes van de buxusplanten bij een plantenkweker zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van 50 cm en een standaardafwijking van 20 cm. De normaalkromme geeft de lengteverdeling weer. De buxusteler verdeelt de planten in zes categorieën van 20 cm.

**Figuur 1.8**

- Bepaal bij benadering hoeveel procent van de planten tot elke categorie behoren.
- Hoeveel procent van de planten is groter dan 70 cm?
- Hoeveel procent van de planten heeft een lengte tussen 30 en 90 cm?
- Hoeveel procent van de planten is minstens 30 cm lang?

Verwerken**Opgave 8**

Een supermarkt verkoopt spliterwten in pakken van 500 gram. Veel klanten vermoeden dat in minstens een derde van de pakken te weinig spliterwten zitten. Zij dienen een klacht in bij de directie. Een consumentenorganisatie wordt gevraagd de klacht te onderzoeken. Zij neemt een steekproef van 100 pakken. Het gemiddelde gewicht van de pakken blijkt 502 gram met een standaardafwijking van 8 gram. Verder blijkt het gewicht van de pakken spliterwten normaal verdeeld te zijn.

- Maak een klokvormige kromme bij de verdeling van de pakken spliterwten.
- Ongeveer hoeveel pakken uit de steekproef wijken meer dan één keer de standaardafwijking af van het gemiddelde?
- Ongeveer hoeveel pakken uit de steekproef hebben een gewicht van minder dan 510 gram?
- Kun je bepalen hoeveel procent van de pakken meer weegt dan 511 gram?
- Maak een schatting van het percentage van de pakken dat minder weegt dan 500 gram. Worden de klagers in het gelijk gesteld?

Opgave 9

In een fabriek worden kilopakken suiker machinaal gevuld. Volgens de Europese norm mag niet meer dan 2,5% van de pakken suiker minder dan 1000 gram bevatten, maar deze fabriek lijkt daar moeite mee te hebben.

Bekijk de vulgewichten van dertig pakken suiker uit deze fabriek.

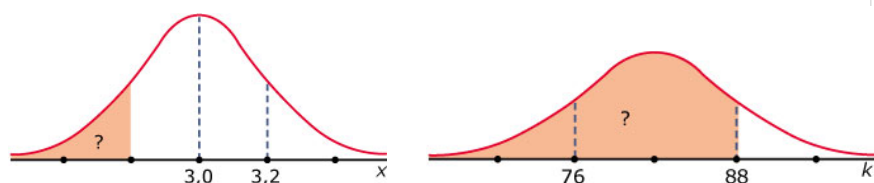
998,3	994,9	1003,5	999,6	1001,0	1001,1
997,9	1003,0	999,5	999,4	991,7	998,0
1001,8	997,8	999,3	995,1	1000,0	998,8
996,3	999,9	999,5	998,6	999,0	1001,5
1000,8	1001,4	998,1	997,5	995,3	998,2

Tabel 1.3

- Hoeveel procent van deze pakken suiker is lichter dan 1000 gram?
- Maak een histogram van de vulgewichten uit de tabel. Gebruik klassen met een klassenbreedte van 1 gram. Laat zien dat de fabrikant met een beetje goede wil kan beargumenteren dat de vulgewichten van deze machine bij benadering een symmetrische klokvormige verdeling hebben.
- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van deze vulgewichten in één decimaal.

Opgave 10

Bekijk de twee normale verdelingen. Ga er van uit dat de gegeven waarden passen bij de vuistregels.



Figuur 1.9

- Geef bij elk van deze normaalkrommen de waarden van μ en σ .
- Bepaal het percentage dat hoort bij het met een vraagteken aangegeven gebied.

Opgave 11

Een maat voor iemands intelligentie is het intelligentiequotiënt (IQ). Dat is de score op een intelligentietest vergeleken met die van leeftijdsgenoten. Het IQ is normaal verdeeld met een gemiddelde van 100 en een standaardafwijking van 15.

- Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ tussen 85 en 115?
- Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van meer dan 130?
- Hoe groot is de kans dat het IQ van een willekeurige voorbijganger minder is dan 130?
- Met welk IQ behoort je tot de mensen die de 16% laagste scores hebben?

Opgave 12

Van twee leeftijdsgroepen zijn de scores voor een test verzameld. De scores van beide groepen zijn bij benadering normaal verdeeld. Bekijk de gemiddelden en de standaardafwijkingen in het overzicht.

- Hoe groot ongeveer is de kans dat een 12-jarige beter scoorde dan een gemiddelde 16-jarige?
- Schets de twee bijbehorende normaalkrommen langs één horizontale as en geef speciale aandacht aan de tophoogten van de twee krommen. Zijn ze even hoog? Zo nee, welke ligt hoger?

	12-jarigen	16-jarigen
aantal tests	500	800
μ	48	56
σ	8	12

Tabel 1.4

Opgave 13

De firma Sanove fabriceert stukken zeep. De stukken zeep worden machinaal gemaakt. De machine is zo ingesteld dat het gewicht van de stukken zeep normaal verdeeld is met een gemiddelde van 93 gram en een standaardafwijking van 1,4 gram.

Het kan gebeuren dat de machine niet goed functioneert. Dan hebben te veel stukken zeep niet het gewenste gewicht. De afdeling Quality Control (QC) van Sanove gebruikt verschillende manieren om dit te controleren. Eén van deze manieren heet de 2_{2s} -regel.

Bij de 2_{2s} -regel wordt per dag drie keer aselekt een stuk zeep gekozen. De machine wordt opnieuw ingesteld zodra die dag twee keer 'achter elkaar' het gewicht van een stuk zeep meer dan twee keer de standaardafwijking afwijkt van het gemiddelde. Als van de eerste twee gecontroleerde stukken zeep het gewicht meer dan twee keer de standaardafwijking van het gemiddelde afwijkt, vindt die dag geen derde controle plaats.

Er is een kans dat QC de machine opnieuw laat instellen terwijl de machine in orde is. Hoe groot is deze kans ongeveer?

Toepassen

Opgave 14: Kilopakken suiker vullen

In een fabriek worden kilopakken suiker machinaal gevuld. Volgens de Europese norm mag niet meer dan 2,5% van de pakken suiker minder dan 1000 gram bevatten. Bekijk het bestand [met de vulgewichten van honderd pakken suiker](#).

- Maak een histogram van de vulgewichten van machine 1. Gebruik klassen met een klassenbreedte van 1 gram. Laat zien dat de vulgewichten van deze machine bij benadering een symmetrische klokvormige verdeling hebben.
- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van deze vulgewichten in gehele grammen nauwkeurig.
- Hoeveel procent van de pakken suiker is volgens dit histogram lichter dan 1000 gram?
- Je kunt het histogram benaderen door een normaalkromme met het zojuist berekende gemiddelde en de standaardafwijking.
Hoeveel procent van de pakken is lichter dan 1000 gram volgens deze normale verdeling?
- Hoeveel procent van de vulgewichten wijkt volgens de vuistregels van de normale verdeling minder dan één standaardafwijking van het gemiddelde af? Klopt dat met deze frequentieverdeling?

Opgave 15: Lichaamslengtes van 5001 vrouwen

Open het bestand [Enkele lichaamsafmetingen van 5001 vrouwen uit 1947](#). Hierin zie je o.a. een tabel met lichaamslengtes in cm van de 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

- Bereken met Excel de gemiddelde lichaamslengte en de standaardafwijking.

- b** Teken met Excel een histogram van de lichaamslengtes en benader dit met een normaalkromme waarin je gemiddelde en standaardafwijking aangeeft.

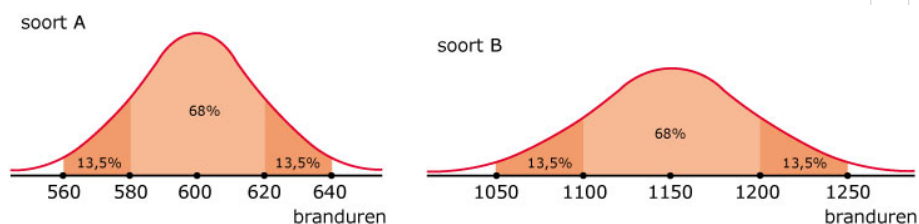
Neem nu verder aan dat de lichaamslengte L van vrouwen normaal is verdeeld met de eerder berekende waarden voor het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ .

- c** Is statistische variabele L een discrete of een continue statistische variabele?
Beargumenteer je antwoord.
- d** 95% van de lichaamslengtes zit tussen $\mu - a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a ?
- e** Welke minimale lengte hebben de 16% grootste lichaamslengtes?

Testen

Opgave 16

Van twee soorten lampen is de levensduur van 500 exemplaren gemeten. Het aantal branduren blijkt vrijwel normaal verdeeld te zijn. Bekijk de bijpassende normaalkrommen. Enkele percentages zijn gegeven.



Figuur 1.10

Van soort A is het gemiddelde $\mu_A = 600$ branduren en de standaardafwijking $\sigma_A = 20$ uur.

- a** Hoeveel procent van de lampen van soort A brandt minder dan 600 uur?
- b** Hoeveel procent van de lampen van soort A brandt minder dan 620 uur?
- c** Hoeveel is het gemiddeld aantal branduren van de lampen van soort B? En hoeveel is de standaardafwijking van de lampen van soort B?
Beargumenteer je antwoord.
- d** Waarom heeft de normale verdeling bij soort B een top die minder hoog is dan die van de normale verdeling van soort A?
- e** Ongeveer hoeveel procent van de lampen van soort B brandt langer dan 1250 uur?

Opgave 17

Bij een groep van 1000 mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

- a** Maak een normaalkromme bij de bloeddrukverdeling van deze groep mannen.

2.2 Normale verdelingen

Inleiding

Bij heel veel continue toevalsvariabelen blijkt een mooie symmetrische klokvormige kromme te horen. Dat geldt voor het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, e.d.

De beroemde wiskundige Gauss (1777–1855) vond er een formule voor. Sinds die tijd spreek je van een ‘Gausskromme’ of ook wel ‘normaalkromme’. Het vulgewicht van pakken suiker is bijvoorbeeld ongeveer normaal verdeeld.

Je leert in dit onderwerp

- een normale kans berekenen;
- een grenswaarde berekenen bij een gegeven linker- of rechtergrens, kans, gemiddelde en standaardafwijking;
- het gemiddelde of de standaardafwijking van een normale kansvariabele berekenen.

Voorkennis

- het begrip continue kansvariabele;
- de normaalkromme;
- de vuistregels voor de normaalkromme gebruiken;
- kansrekenen.

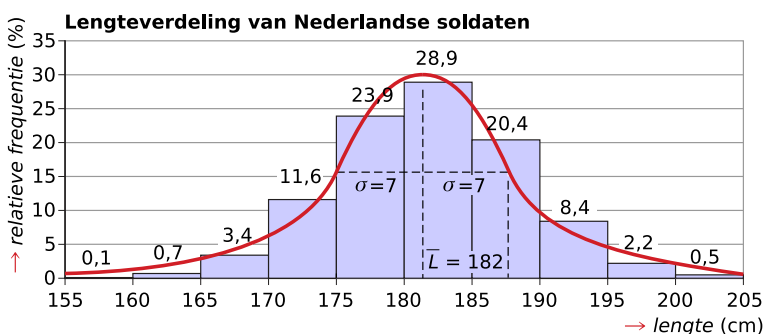


Figuur 2.1

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de lengteverdeling van een groep soldaten op een bepaalde kazerne.



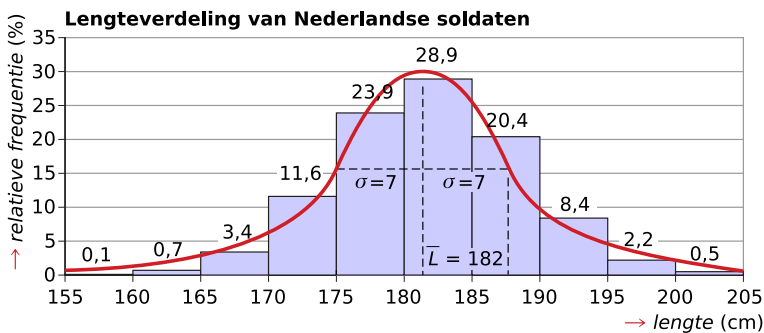
Figuur 2.2

Bij de lengte L hoort een normaalkromme met gemiddelde $\mu(L) = 182$ en standaardafwijking $\sigma(L) = 7$ cm.

- Wat stelt $P(L < 175)$ in dit voorbeeld voor?
- Waarom kun je deze kans uit de figuur gemakkelijk berekenen maar $P(L < 171)$ veel minder makkelijk?
- Wat kun je zeggen van $P(L = 175)$?

Uitleg

Bekijk de figuur met de lengteverdeling van een groep soldaten op een kazerne. Bij de lengte L (cm) hoort een normaalkromme met een gemiddelde van 182 centimeter en een standaardafwijking van 7 centimeter. Anders gezegd: L is een normaal verdeelde kansvariabele.



Figuur 2.3

Bedenk wel dat de gegevens van de soldaten op hele lengtes zijn afgerond. Als je vraagt naar het percentage soldaten met een lengte van 180 centimeter, dan moet je goed afspreken wat je bedoelt: precies 180 centimeter, of afgerond 180 centimeter.

Vanaf nu hanteer je de afspraak dat je bij normale verdelingen geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk is dat dit moet. Dit betekent dat:

$$P(162 < L < 178) = P(162 \leq L < 178) =$$

$$P(162 < L \leq 178) = P(162 \leq L \leq 178) \text{ als } L \text{ normaal verdeeld is.}$$

De 'normale kans' dat een soldaat van deze kazerne tussen de grenswaarden 165 en 180 centimeter lang is, gegeven dat $\mu(L) = 182$ en $\sigma(L) = 7$, noteer je als:

$$P(165 \leq L < 180 | \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$$

| betekent: 'gegeven dat'.

In de figuur is dit het gebied onder de normaalkromme tussen de linkergrenswaarde $L = 165$ en de rechtergrenswaarde $L = 180$. Je hebt de grafische rekenmachine of Excel nodig om dergelijke kansen te kunnen berekenen: de vuistregels zijn te beperkt.

Bekijk het [Practicum](#).

Opgave 1

Bekijk het histogram van de lengteverdeling van de soldaten in de [Uitleg](#).

- Hoeveel is $P(165 \leq L < 180)$ volgens het histogram? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.
- Bepaal $P(165 \leq L < 180 | \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$ met de grafische rekenmachine.
- Bereken de kans dat een soldaat tussen 166 en 177 centimeter lang is.
- Bereken hoeveel procent van de soldaten kleiner dan 166 centimeter is.

- e Bereken hoeveel procent van de soldaten langer dan 192 centimeter is.

Opgave 2

Bekijk de lengteverdeling van de soldaten in de [Uitleg](#).

- a Controleer de vuistregels met behulp van de grafische rekenmachine.
- b Hoeveel procent van de soldaten heeft volgens de normaalkromme een lengte die minder dan drie standaardafwijkingen van het gemiddelde afwijkt?
Noteer je antwoord met één decimaal.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Continue kansvariabelen zoals het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, en dergelijke zijn vaak **normaal verdeeld**. Je spreekt dan van een **normale kansvariabele** of **normale statistische variabele**.

De wiskundige Gauss (1777–1855) vond een formule voor de grafiek van de bijpassende normaalkromme of gausskromme. In de grafische rekenmachine is de formule voor die normaalkromme geprogrammeerd. Daarmee kun je de normaalkromme schetsen en de bijbehorende kansen berekenen, ook als die niet met de vuistregels zijn te bepalen.

De kans die wordt weergegeven door de gekleurde oppervlakte noteer je als:

$$P(165 \leq L < 180 \mid \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$$

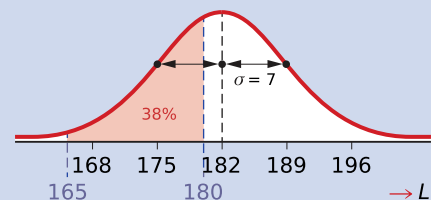
| betekent: 'gegeven dat'.

Omdat $P(L = 165) = 0$ is die kans hetzelfde als $P(165 < L < 180)$.

Als je wilt berekenen wat de kans is dat iemand afgerond een lengte heeft van 165 centimeter, dan moet je $P(164,5 < X < 165,5)$ berekenen.

Hanteer de afspraak dat je bij een normale verdeling geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk in de vraagstelling naar voren komt dat dit moet.

Hoe je dit op de grafische rekenmachine of in Excel invoert, zie je in het [Practicum](#).



Figuur 2.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

De lengte L van een groep soldaten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 182$ centimeter en een standaardafwijking van $\sigma = 7$ centimeter.

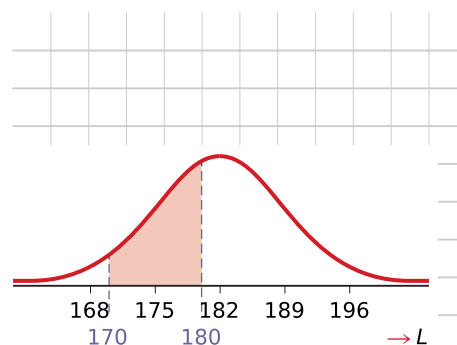
Bereken $P(170 < L < 180)$, $P(L < 180)$, $P(L = 180)$ en bereken het percentage soldaten dat langer is dan 1,75 meter.

Antwoord

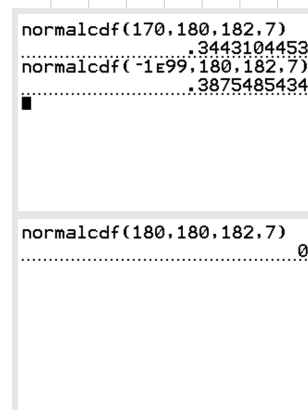
Al deze kansen zijn met de grafische rekenmachine te vinden.

Bekijk het **Practicum**.

- $P(170 < L < 180) \approx 0,3443$
- $P(L < 180) \approx 0,3875$
- $P(L = 180) = 0$
- 'Bereken het percentage soldaten dat langer is dan 1,75 meter' kun je vertalen naar:
 $P(L > 175 | \mu = 182 \text{ en } \sigma = 7) \approx 0,8413$. Dat is gelijk aan ongeveer 84,13%.



Figuur 2.5



Figuur 2.6

Opgave 3

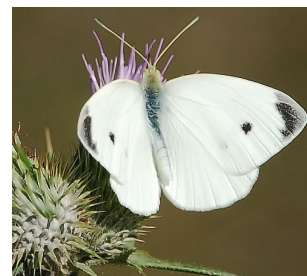
Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- Wat betekent $P(162 < L < 178)$ in dit verband?
- Hoeveel procent van de soldaten heeft een lengte tussen 171 en 178 centimeter?
- Hoeveel procent van de soldaten heeft een lengte van precies 171 centimeter?
- Hoeveel procent van de soldaten van deze kazerne heeft een lengte vanaf $\mu - 1,5 \cdot \sigma$ tot $\mu + 1,5 \cdot \sigma$?

Opgave 4

Bioloog Peter Adriaanse heeft van 1000 koolwitjes de spanwijdte van de vleugels gemeten. Hij vond dat deze spanwijdte ongeveer normaal is verdeeld met een gemiddelde van 5,2 centimeter en een standaardafwijking van 0,8 centimeter.

- Hoeveel procent van de gemeten koolwitjes had een spanwijdte van meer dan 6 centimeter?
- Hoeveel van de gemeten koolwitjes hadden een spanwijdte tussen de 5 en de 6 centimeter?
- Hoe groot is de kans op een koolwitje met een spanwijdte van minstens 6,5 centimeter?



Figuur 2.7

Opgave 5

Het gewicht G van een bepaalde appelsoort is normaal verdeeld met een gemiddelde van 150 gram en een standaardafwijking van 17 gram.

- Hoe groot is de kans dat een appel van deze soort minder dan 140 gram weegt?
- Hoeveel procent van deze appels heeft een gewicht dat minder dan 10 gram afwijkt van het gemiddelde?
Een groenteboer heeft nog 340 van deze appels.
- Hoeveel daarvan zijn lichter dan 120 gram?
Een klant koopt een zak met vijf appels van de groenteboer.
- Wat is de kans dat minstens vier appels lichter zijn dan 120 gram?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Normale verdeling

De lengte L van een groep soldaten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu(L) = 182$ cm en een standaardafwijking van $\sigma(L) = 7$ cm.

Welke lengtes hebben de 20% langste soldaten in deze groep?

Antwoord

Vertaal deze vraag in: bereken grenswaarde g als $P(L > g) = 0,20$.

De grafische rekenmachine heeft hiervoor een speciale functie. Die stelt je in staat om vanuit een gegeven kans de grenswaarde terug te vinden. Alleen is die functie ingesteld op 'kleiner-of-gelijk'-kansen.

Omdat $P(L > g) = 0,20$ betekent dat $P(L < g) = 1 - P(L > g) = 0,80$ kun je die functie hier toch gebruiken.

De uitkomst is: $g = 187,9$.

De 20% langste soldaten zijn 187,9 cm of langer.

Opgave 6

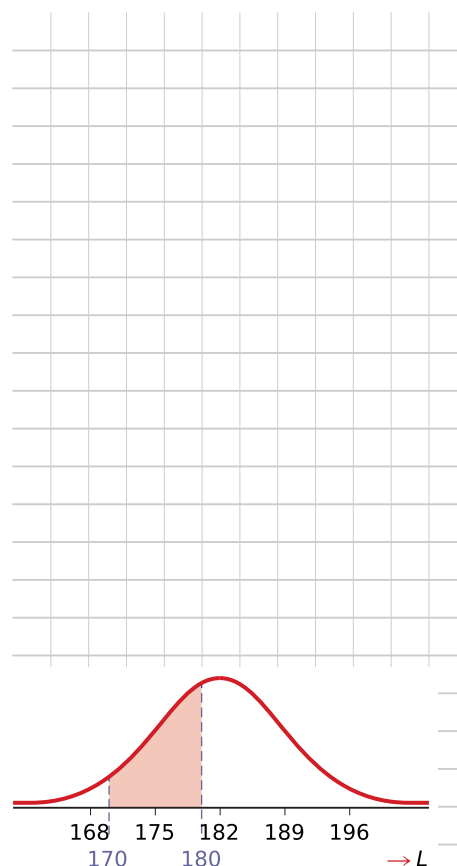
Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

- Welke lengtes hebben de 20% kleinste soldaten in deze groep?
- 10% van de soldaten zit boven het gemiddelde, maar is toch niet langer dan a centimeter. Bereken a .

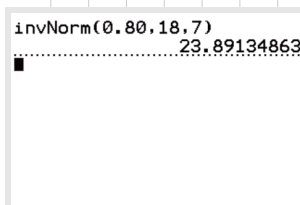
Opgave 7

Ga uit van de normaal verdeelde lengtes van de soldaten. De gemiddelde lengte is 182 centimeter en de standaardafwijking is 7. Men besluit voor deze 1200 soldaten T-shirts aan te schaffen in drie maten: S (small), M (medium) en L (large). Deze maten worden zo gemaakt dat elke maat precies voor $\frac{1}{3}$ deel van de soldaten geschikt is.

- Voor welke lengtes is maat S geschikt?
- Voor welke lengtes is maat M geschikt?



Figuur 2.8



Figuur 2.9

Voorbeeld 3

In een suikerfabriek is het vulgewicht van kilopakken suiker ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Maar ongeveer 25% van de pakken bevat minder dan 1000 gram.

De fabrikant wil dat niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat.

Hij kan dit bijvoorbeeld bewerkstelligen door het gemiddelde vulgewicht μ te verhogen, maar dat is een te dure oplossing.

De fabrikant kan dit ook voor elkaar krijgen door de vulmachine nauwkeuriger te laten werken: hij verkleint de standaardafwijking σ .

Bekijk de applet.

Hoe bereken je de aangepaste μ of σ ?

Antwoord

De toevalsvariabele X is het gewicht van een pak suiker uit de suikerfabriek.

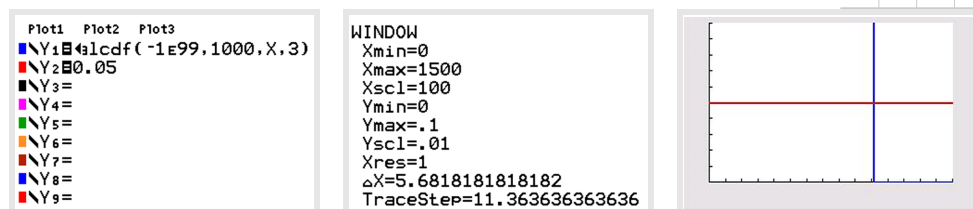
Los op:

$P(X < 1000 | \mu = x \text{ en } \sigma = 3) = 0,05$ voor de aanpassing van het gemiddelde of

$P(X < 1000 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = x) = 0,05$ voor de aanpassing van de standaardafwijking.

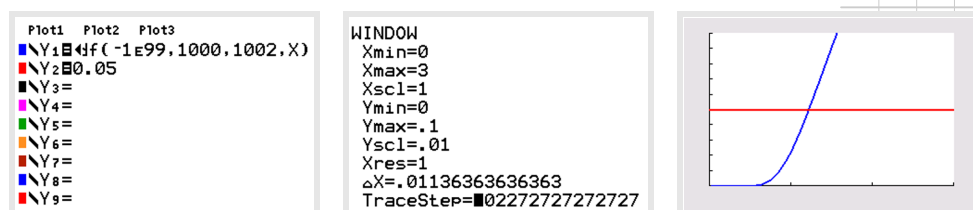
Om te zien hoe je dit doet, bekijk je het **Practicum**.

Voor y_1 voer je de uitdrukking links van het isgelijktteken in, met de variabele x als gemiddelde of als standaardafwijking. De horizontale lijn is de lijn $y_2 = 0,05$.



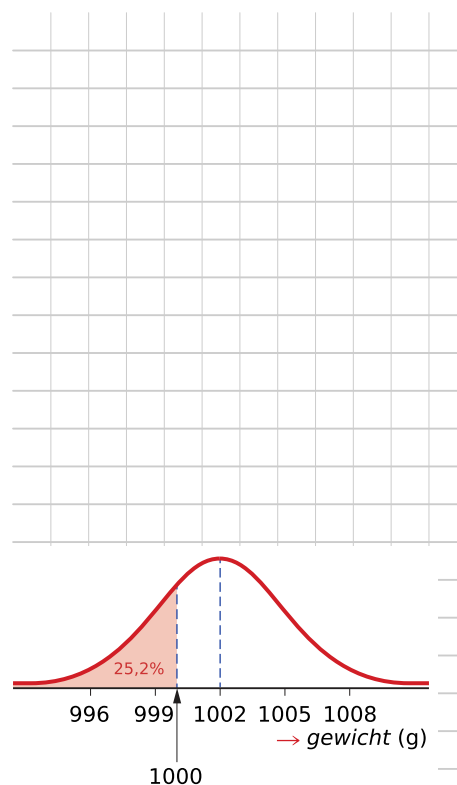
Figuur 2.11

Als de standaardafwijking gelijk blijft (3 gram), dan moet het gemiddelde toenemen van 1002 gram naar 1004,9 gram om aan de nieuwe eis te kunnen voldoen.



Figuur 2.12

Als het gemiddelde gelijk blijft (1002 gram), dan moet de standaardafwijking afnemen van 3 gram naar 1,22 gram om aan de nieuwe eis te kunnen voldoen.



Figuur 2.10

Opgave 8

Gebruik de gegevens van de suikerfabriek in **Voorbeeld 3**.

- Waarom is dit voor de fabrikant een dure oplossing?
- Wat verandert er aan de normaalkromme van de suikerpakken en wat blijft er gelijk als het gemiddelde vulgewicht groter wordt?
- Bereken met de grafische rekenmachine in drie decimalen na wat de nieuwe standaardafwijking moet worden als niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram mag bevatten.
- Welke mogelijke voor- en nadelen heeft deze oplossing voor de fabrikant?
- Wat verandert er aan de normaalkromme van de suikerpakken en wat blijft er gelijk als de standaardafwijking van het vulgewicht kleiner wordt?

Opgave 9

- De eisen worden aangescherpt: niet meer dan 2,5% van de pakken suiker mag minder dan 1000 gram wegen. Welk gemiddeld vulgewicht moet je dan hanteren?
- Is het mogelijk om te eisen dat 0% van de pakken te licht is? Licht je antwoord toe.

Verwerken

Opgave 10

Bereken de volgende kansen. Rond af op vier decimalen.

- $P(L < 174 | \mu(L) = 178 \text{ en } \sigma(L) = 5)$
- $P(3 < X < 5 | \mu(X) = 4,3 \text{ en } \sigma(X) = 1,2)$
- $P(Y > 1200 | \mu(Y) = 1180 \text{ en } \sigma(Y) = 113)$

Opgave 11

Een vulmachine vult kilopakken rijst. Het ingestelde vulgewicht van de machine komt overeen met het gemiddelde gewicht van de pakken rijst. De gewichten zijn normaal verdeeld. Het gemiddelde gewicht van een pak rijst is 1010 gram en de standaardafwijking is 9 gram.

- Hoeveel procent van de pakken weegt minder dan 1000 gram?
- Hoeveel procent van de pakken weegt meer dan 1000 gram?
- Hoe groot is de kans op een pak dat meer dan 5 gram te zwaar is?
- Hoeveel procent van de pakken is meer dan 20 gram te licht?
- Hoe groot is de kans op een pak dat tussen de 1005 en de 1015 gram weegt?

Opgave 12

Een bakker bakt kerststollen van 1000 gram.

- Hoeveel bedraagt de standaardafwijking als het gemiddelde gewicht 1000 gram is en 5% van de stollen minder weegt dan 900 gram?

- b** Als de standaardafwijking van de stollen 60 gram is, hoeveel procent van de stollen weegt dan minder dan 900 gram?
- c** Hoe groot is het gemiddelde gewicht van de stollen bij een standaardafwijking van 65 gram als 5% van de stollen minder weegt dan 900 gram?
- d** Hoe groot is het gewicht van de 3% zwaarste kerststollen als het gemiddelde gewicht 1000 gram is en de standaardafwijking 62,5 gram?

Opgave 13

Bij de serieproductie van een bepaald type auto wordt het plaatsen van het stuur door mensen gedaan. Deze handeling kost gemiddeld 55 seconden. De handelingstijd T blijkt ongeveer normaal te zijn verdeeld rond dit gemiddelde met een standaardafwijking van 4 seconden.

Er worden in een bepaalde maand 1200 van deze auto's geproduceerd.

- a** Schat het aantal auto's waarbij het langer dan 60 seconden heeft geduurd om het stuur te plaatsen.
- b** Hoeveel tijd hebben de 3% snelste handelingstijden gekost?
De fabrikant van deze auto's onderzoekt of een machine de mens kan vervangen. De gemiddelde afhandelingstijd is dan ook 55 seconden, maar de standaardafwijking wordt veel kleiner. Nu duurt maar 1% van alle afhandelingstijden meer dan 60 seconden.
- c** Welke standaardafwijking geldt voor deze machine?

Opgave 14

Twee hardlopers op de 400 meter trainen samen. Op basis van vele wedstrijden gaat de trainer uit van een normaal verdeeld snelheidsverschil tussen deze twee van gemiddeld 0 m/s met een standaardafwijking van 0,205 m/s.

De laatste zes wedstrijden die deze twee hardlopers samen hebben gelopen, geven de volgende snelheden.

loper A	9,2	9,2	8,8	8,9	8,8	8,5
loper B	9,2	9,0	9,0	8,9	8,7	9,1

Tabel 2.1

Zoals je uit de gegevens kunt afleiden, bleef het snelheidsverschil bij de eerste vijf wedstrijden binnen een marge van één standaardafwijking rondom het gemiddelde snelheidsverschil, uitgaande van de eerder beschreven normale verdeling van het snelheidsverschil.

- a** Bereken de procentuele kans dat bij vijf wedstrijden achter elkaar het snelheidsverschil beperkt blijft tot maximaal één standaardafwijking rondom het gemiddelde snelheidsverschil. Kan dit een reden voor de trainer zijn om te twijfelen aan de juistheid van het normaal verdeelde model voor het snelheidsverschil?

De laatste van de zes wedstrijden springt eruit met een groot verschil in snelheid.

- b** Bereken de procentuele kans op minimaal een dergelijk snelheidsverschil, uitgaande van de eerder beschreven normale verdeling van het snelheidsverschil. Kan dit een reden voor de trainer zijn om te twijfelen aan de juistheid van het normaal verdeelde model voor het snelheidsverschil?
- c** Vergelijk het gemiddelde snelheidsverschil en de bijbehorende standaardafwijking van de gekozen normale verdeling en die van de gegevens van de zes wedstrijden met elkaar en leg uit wat dit voor de hardlopers kan betekenen.

Gebruik daarbij in ieder geval:

- een schets met beide normaalkrommen boven één horizontale as van snelheidsverschillen;
- het verschil in de kans op een groter snelheidsverschil dan 0,6 m/s.

De trainer past vanwege de uitkomsten van de laatste zes wedstrijden de standaardafwijking van de gekozen normale verdeling aan: zij wil daarmee haar (voorspellings)model beter laten aansluiten op de werkelijkheid. Ze blijft ervan uitgaan dat de beide hardlopers gemiddeld even snel zijn, maar de standaardafwijking kiest zij zo, dat de kans op een snelheidsverschil dat groter is dan 0,6 m/s maximaal vier procent is.

- d** Bereken de nieuwe standaardafwijking in drie decimalen.

Opgave 15

De accu van een tablet van het merk Sampel gaat gemiddeld 2,60 jaar mee met een standaardafwijking van 0,32 jaar. De tableteigenaars zijn hiermee niet tevreden en daarom wil Sampel de productiestraat van deze accu's aanpassen.

Er zijn aanpassingen mogelijk die de gemiddelde levensduur zullen verhogen: per extra levensweek zijn de kosten hiervan € 0,01 per tablet.

Andere aanpassingen zorgen voor een kleinere standaardafwijking, maar deze aanpassingen kosten per extra levensweek € 0,02 per tablet.

Sampel wil de productiestraat zodanig aanpassen dat de kans dat de accu meer dan twee jaar meegaat minstens 97,5% wordt. Echter: de totale extra kosten per tablet door de aanpassingen mogen niet hoger zijn dan 1,4 eurocent.

Onderzoek of er mogelijkheden zijn voor Sampel om de productiestraat zodanig aan te passen dat aan beide voorwaarden wordt voldaan.

Toepassen

Opgave 16: Kniehoogtes van 5001 vrouwen

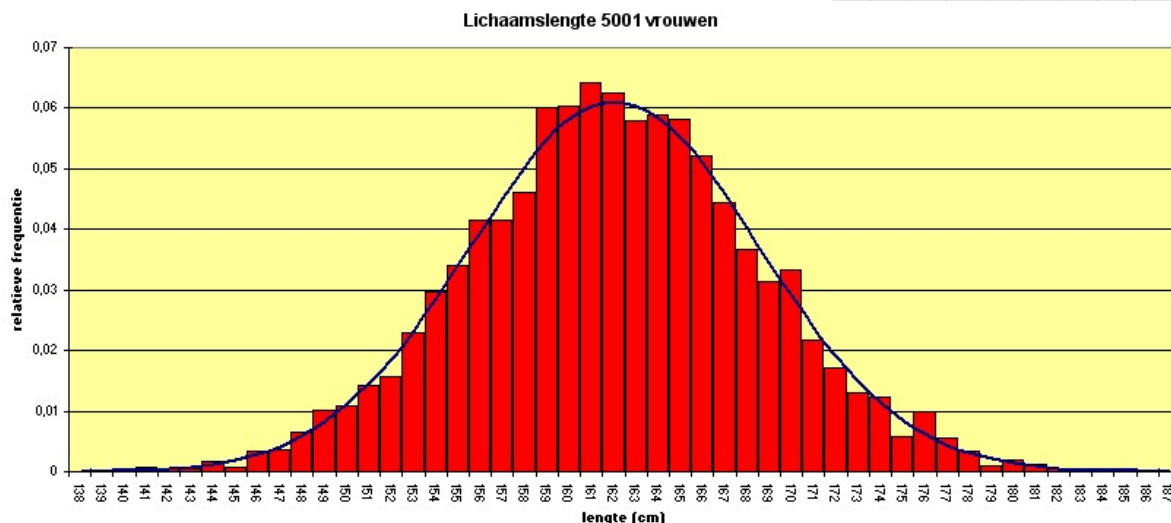
Open het bestand **Enkele lichaamsafmetingen van 5001 vrouwen uit 1947**.

Hierin zie je een tabel met kniehoogtes in cm van de 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

- Bereken met Excel (of een ander statistiekprogramma) de gemiddelde kniehoogte en de standaarddeviatie.
- Teken een histogram en benader dit met een normaalkromme. Lukt dit in jouw ogen goed genoeg om aan te nemen dat K , de kniehoogte van de vrouwen, normaal verdeeld is?
Neem aan dat de kniehoogte K van de vrouwen inderdaad normaal is verdeeld met de eerder berekende waarden voor het gemiddelde μ en de standaarddeviatie σ .
- 90% van de kniehoogtes zit tussen $\mu - a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a ? Rond af op één decimaal.
- Welke minimale lengte hebben de 20% grootste kniehoogtes?

Opgave 17: Lengtes van 5001 vrouwen

Volgens het onderzoek van Freudenthal en Sittig uit 1947 waren de lengtes van vrouwen die bij de Bijenkorf winkelden normaal verdeeld met een gemiddelde van 162 cm en een standaarddeviatie van 6,5 cm. Ga bij het beantwoorden van de onderstaande vragen steeds uit van die normale verdeling als model voor de lichaamslengte van deze 5001 vrouwen.



Figuur 2.13

- Hoeveel procent van deze vrouwen was langer dan 170 cm?
- Hoeveel procent van deze vrouwen had een lengte tussen 160 en 170 cm?
- Hoe groot is de kans dat een vrouw die je toen bij de Bijenkorf tegen kon komen 160 cm lang was? (Neem aan dat alle lengtes op gehele cm zijn afgerond.)

- d Hoe lang waren de 10% kleinste vrouwen?
- e En hoe lang waren de 10% langste vrouwen?

Opgave 18: Zwangerschap

In het 'Moeders voor moeders babyboek' staat dat 75% van de zwangere vrouwen bevalt tussen 14 dagen vóór en 14 dagen na de uitgerekende datum. Bij het bepalen van deze uitgerekende datum gaat men uit van een zwangerschap van 40 weken. De zwangerschapsduur is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 280 dagen.

Met behulp van deze gegevens kun je berekenen dat de bijbehorende standaardafwijking, afgerond op één decimaal, gelijk is aan 12,2 dagen.

In 2002 vonden er in Nederland 199205 bevallingen plaats. Van een aantal van deze bevallingen duurde de zwangerschap minder dan 36 weken.

- a Bereken bij hoeveel bevallingen dit het geval was.
De standaardafwijking kan nauwkeuriger worden bepaald.
- b Bereken deze standaardafwijking in twee decimalen.

(naar: examen VWO wiskunde A 1,2 uit 2005, 2e tijdvak)

Testen

Opgave 19

Een zakje Cup-a-soup moet 17 g bevatten. Het gewicht van zakjes is normaal verdeeld. De vulmachine is zo ingesteld dat het vulgewicht 19 g bedraagt met een standaardafwijking van 1,5 g. Het vulgewicht komt overeen met het gemiddelde gewicht.

- a Hoe groot is de kans dat een zakje minder dan 17 g weegt?
- b Hoe groot is de kans dat een zakje Cup-a-Soup meer dan 17 g weegt?
- c Hoeveel weegt 90% van deze zakjes op zijn hoogst?
- d Hoeveel weegt 90% van deze zakjes op zijn minst?



Figuur 2.14

Opgave 20

Bij een groep van 1000 mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

- a Hoeveel mannen hebben een bloeddruk die meer dan drie keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?
- b Hoeveel procent van de mannen heeft een bloeddruk van meer dan 150?
- c Hoeveel bedraagt de bloeddruk van de 10% mannen met de hoogste bloeddruk?

Opgave 21

Het vulvolume V van een pak melk is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,02 liter en een standaardafwijking van 0,015 liter. De consument verwacht 1 liter melk te kopen.

- a** Hoeveel procent van de melkpakken bevat minder dan 1 liter melk?

Het percentage dat je bij a hebt gevonden, wordt door de supermarkt die deze pakken verkoopt als te hoog bevonden. De supermarkt verlangt van de fabrikant dat het vulvolume wordt verhoogd, totdat maximaal 1% van de pakken minder dan 1 liter melk bevat.

- b** Bereken het vulvolume dat de fabrikant dan moet instellen. Geef het antwoord in milliliter nauwkeurig

Practicum

Met de volgende practica kun je zien hoe je normale kansen berekent met de **grafische rekenmachine**. Doe alleen de onderdelen die betrekking hebben op de normale verdeling.

- [Kansverdelingen met de TI84](#)
- [Kansverdelingen met de TIInspire](#)
- [Kansverdelingen met de Casio fx-CG50](#)
- [Kansverdelingen met de HP-prime](#)
- [Kansverdelingen met de NumWorks](#)

Maar je kunt ook heel goed normale kansen berekenen met behulp van **Excel**. Bekijk daartoe het practicum:

- [Normale verdeling](#)

2.3 Kansvariabelen optellen

Inleiding

Een reistraject bestaat uit een tramreis gevolgd door een busreis. Op beide vervoersmiddelen zul je even moeten wachten voordat ze aankomen: hoe lang zal je wachttijd gemiddeld zijn op dit totale reistraject?

Je kunt dat berekenen met een kansverdeling voor de totale wachttijd. Uit deze kansverdeling volgen regels voor het optellen van beide wachttijden. Dan blijkt je de gemiddelde totale wachttijd en de bijbehorende standaardafwijking ook zonder kansverdeling eenvoudig en snel te kunnen berekenen.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip som/verschil van twee of meer kansvariabelen;
- regels voor de verwachting en de standaardafwijking van de som en het verschil van onafhankelijke statistische variabelen.

Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij een statistische variabele;
- verwachting en standaardafwijking bij een kansverdeling berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Een reiziger gaat heen met de tram en terug met de bus. Op de tram hoeft hij maximaal twee minuten te wachten en op de bus terug maximaal drie minuten. Ga ervan uit dat de wachttijd voor de tram onafhankelijk is van de wachttijd voor de bus.

Voor de wachttijden, in hele minuten, van deze reiziger op de tram (T) en de bus (B) gelden de kansverdelingen hiernaast.

- Maak een kansverdeling van de totale wachttijd $T + B$ op dit traject.
- Kun je zeggen dat de verwachtingswaarde van $T + B$ gelijk is aan de som van de verwachtingswaarde van T en die van B ? En hoe zit dat met de standaardafwijkingen?

t	0	1	2
$P(T = t)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b	0	1	2	3
$P(B = b)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabel 3.1

Uitleg

Een reiziger gaat heen met de tram en terug met de bus. Op de tram hoeft hij maximaal twee minuten te wachten en op de bus terug maximaal drie minuten. Ga ervan uit dat de wachttijd voor de tram onafhankelijk is van de wachttijd voor de bus.

Voor de wachttijden, in hele minuten, van deze reiziger op de tram (T) en de bus (B) gelden de kansverdelingen hiernaast.

t	0	1	2
$P(T = t)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b	0	1	2	3
$P(B = b)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabel 3.2

Bij de totale wachttijd past deze kansverdeling:

$t + b$	0	1	2	3	4	5
$P(T + B = t + b)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

Tabel 3.3

Voor het gemiddelde (de verwachting) geldt: $\bar{T} = 1$, $\bar{B} = 1,5$ en $\overline{T + B} = 2,5$.

Je kunt de gemiddelden optellen.

Maar standaardafwijkingen kun je niet zomaar optellen. Dat komt omdat de standaardafwijking de wortel is uit opgetelde kwadraten van afwijkingen. En kwadraten kun je wel optellen, maar als je dan worteltrekt dan krijg je de wortel uit die kwadraten die je hebt opgeteld.

Omdat $(\sigma(T + B))^2 = (\sigma(T))^2 + (\sigma(B))^2$ geldt voor de standaardafwijking:

$$\sigma(T + B) = \sqrt{(\sigma(T))^2 + (\sigma(B))^2}$$

Deze optelregels gelden voor zowel discrete als continue variabelen, mits de variabelen onafhankelijk zijn.

Opgave 1

Bekijk de kansverdelingen in de [Uitleg](#).

- Beschrijf hoe $P(T + B = 5)$ wordt berekend.
- Welke aanname is bij het berekenen van de kansverdeling van $T + B$ gedaan?

Opgave 2

- Bereken de verwachtingswaarden van T , B en $T + B$ en ga na dat $\overline{T + B} = \bar{T} + \bar{B}$.
- Bereken de standaardafwijkingen van T , B en $T + B$ en ga na dat $\sigma(T + B) = \sqrt{(\sigma(T))^2 + (\sigma(B))^2}$.

Opgave 3

Een karamelreep en een kokosreep worden als duo verkocht. Het gemiddelde gewicht van de karamelreep is 25 gram met een standaardafwijking van 1,1 gram. Het gemiddelde gewicht van de kokosreep is 55 gram met een standaardafwijking van 1,8 gram.

- Hoeveel bedraagt het gemiddelde gewicht van de twee repen samen? En welke standaardafwijking hoort daarbij?
- Hoe groot is de kans dat de twee repen samen minder dan 77,5 gram wegen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Vaak heb je met de **som van een aantal kansvariabelen** te maken. Als de kansvariabelen X en Y **onafhankelijk** van elkaar zijn, geldt voor $X + Y$:

- voor het gemiddelde (de verwachting): $\mu(X + Y) = \mu(X) + \mu(Y)$
- voor de standaardafwijking: $\sigma(X + Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$

Het maakt hierbij niet uit of de variabelen X en Y discreet of continu zijn.

Soms heb je ook met het **verschil van twee onafhankelijke kansvariabelen** X en Y te maken. Dan geldt:

- voor het gemiddelde (de verwachting): $\mu(X - Y) = \mu(X) - \mu(Y)$
- voor de standaardafwijking: $\sigma(X - Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$

Bijzonder is dat zowel de som als het verschil van meerdere onafhankelijke normaal verdeelde kansvariabelen zelf ook weer een normaal verdeelde kansvariabele is.

Voorbeeld 1

Het gewicht van een zak aardappelen is normaal verdeeld. Een supermarkt verkoopt zakken aardappelen met verschillende gewichten:

- zakken van 500 gram met een standaardafwijking van 30 gram.
- zakken van 1 kilo met een standaardafwijking van 54 gram.
- zakken van 1,5 kilo met een standaardafwijking van 80 gram.

Voor een aardappelsoufflé is minimaal 1450 gram aardappel nodig, anders stort de soufflé in.

Welke aankoop is de beste keuze: een zak aardappelen van 1,5 kilo of de combinatie van een zak aardappelen van 1 kilo en een zak van 500 gram?

Antwoord

De gewichten van een zak aardappelen van 1500 gram, van 1 kilo en van 500 gram hebben niets met elkaar te maken: de gewichten zijn onafhankelijk van elkaar.

De kans op minstens 1450 gram aardappelen in een zak aardappelen met een gemiddeld gewicht van 1,5 kilo is ongeveer gelijk aan 72%.

De kans op minstens 1450 gram aardappelen bij de combinatie van een zak van 1 kilo en een zak van 500 gram kun je berekenen met behulp van het gemiddelde van de twee zakken samen, C met de bijbehorende standaardafwijking:

$$\mu(C) = 1000 + 500 = 1500 \text{ gram en } \sigma(C) = \sqrt{54^2 + 30^2}.$$

De gevraagde kans voor deze combinatie blijkt ongeveer 79%.

De combinatie van een zak aardappelen van 1 kilo plus een zak aardappelen van 500 gram is de beste keuze.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Reken zelf de twee percentages in het voorbeeld na.
- Maak met je grafische rekenmachine de normaalkromme van het gewicht van een zak aardappelen van (gemiddeld) 1500 gram en de normaalkromme van toevalsvariabele C , het gewicht van de combinatie van een zak aardappelen van 1 kilo en een zak van 500 gram.
- Bereken de kans op minstens 1450 gram aardappelen in de combinatie van drie zakken aardappelen van elk 500 gram en vergelijk je antwoord met de twee percentages in het voorbeeld.
Welk van de drie mogelijkheden geeft uiteindelijk de grootste kans op minstens 1450 gram aardappelen?

Voorbeeld 2

De diameter M van een bepaald soort moeren is normaal verdeeld met $\mu(M) = 13,20$ en $\sigma(M) = 0,10$ millimeter.

Bij deze moeren horen bouten waarvan de diameter B ook normaal is verdeeld: $\mu(B) = 13,05$ en $\sigma(B) = 0,10$ millimeter.

Deze bouten passen nog in de moeren als hun diameter maximaal 0,25 millimeter kleiner is dan die van de moeren.

Hoeveel procent van de bouten past niet?

Antwoord

Kijk naar het verschil $V = M - B$ van de diameter van een bout en een moer. Dit verschil is ook normaal verdeeld met

- $\mu(V) = \mu(M - B) = \mu(M) - \mu(B) = 13,20 - 13,05 = 0,15$ mm.
- $\sigma(V) = \sigma(M - B) = \sqrt{(\sigma(M))^2 + (\sigma(B))^2} = \sqrt{0,10^2 + 0,10^2} \approx 0,14$ mm.

De bouten passen als $0 \leq V \leq 0,25$.

De kans hierop is $P(0 \leq V \leq 0,25 | \mu = 0,15 \text{ en } \sigma = 0,14) \approx 0,62$.

Conclusie: 38% van de bouten past niet in de moeren.

Opgave 5

Gebruik de gegevens van machinaal geproduceerde moeren en bijbehorende bouten uit **Voorbeeld 2**.

- Bereken in vier decimalen de kansen op:
 - een bout en een moer die passen.
 - een bout en een moer die niet passen.
- Leg uit waarom een bout en een moer passen als $V \leq 0,25$.
- Leg uit waarom een bout en een moer niet passen als $V < 0$.



Figuur 3.1

Opgave 6

Het bedrijf in **Voorbeeld 2** produceert meer bouten en moeren in diverse afmetingen.

Voor een ander type bout met bijpassende moer geldt: de diameter van de moer is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,10 millimeter en een standaardafwijking van 0,05 millimeter. De diameter van de bout is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,05 millimeter en een standaardafwijking van 0,03 millimeter.

De bouten passen in de moeren als het verschil van de diameter van de moer en de bout minder dan 0,02 millimeter is.

- Hoeveel procent van deze bouten past niet in de bijbehorende moer?
- Hoeveel procent van deze bouten is te dik voor een moer?

Verwerken

Opgave 7

Elk weekend verkoopt Iris op de markt haar zelfgemaakte sieraden. Gemiddeld is haar weekendomzet € 63,00 met een standaardafwijking van € 2,07. Maar tijdens weekenden met festiviteiten verdient ze gemiddeld € 97,00 met een standaardafwijking van € 2,46.

Wat is de verwachte omzet nadat Iris een gewoon weekend en een feestweekend op de markt heeft gestaan? Welke standaardafwijking hoort daarbij?

Opgave 8

Perry en Kyra doen als duo mee aan een wedstrijd. Zij moeten, ieder voor zich, een atletiekparcours vol hindernissen doorlopen.

Tijdens de trainingen hebben ze hun gegevens bijgehouden. Zo blijkt Perry gemiddeld 11,5 minuten over dit parcours te doen, met een standaardafwijking van 0,8 minuten. Kyra doet er gemiddeld 10,5 minuten over, maar haar standaardafwijking is 1 minuut.

Ga ervan uit dat de parcouurstijden van Perry en Kyra normaal verdeeld zijn.

- Hoe groot is de kans dat Perry en Kyra in deze wedstrijd als duo tussen de 20 en de 21 minuten scoren?
- Hoe groot is de kans dat Perry tijdens deze wedstrijd meer dan 1 minuut sneller is dan Kyra?

Opgave 9

Bas zit in een kunstklas en is bezig met een 39 meter lange draadfiguur van ijzerdraad en koperdraad. Bij de bouwmarkt koopt hij van beide metalen een rol draad. De lengte van een rol metaal draad is normaal verdeeld.

Een rol koperdraad is gemiddeld 10 meter lang, met een standaardafwijking van 9 centimeter. Een rol ijzerdraad is gemiddeld 30 meter lang en heeft een standaardafwijking van 13 centimeter.

- Wat is de te verwachten totale lengte van de door Bas gekochte rollen ijzer- en koperdraad samen? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

De kans dat Bas minder dan de benodigde 39 meter draad heeft gekocht, zal heel klein zijn.

- b Laat zien dat deze kans inderdaad bijzonder klein is.

Opgave 10

Bekijk de twee kansverdelingen op basis van klassenmiddens. De statistische variabelen (kansvariabelen) X en Y zijn onafhankelijk van elkaar.

x	1	2		y	5	10	15
$P(X = x)$	0,15	0,85		$P(Y = y)$	0,25	0,40	0,35

Tabel 3.4

Laat zien dat:

- a $\overline{X + Y} = \overline{X} + \overline{Y}$
- b $\sigma(X + Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$
- c $\overline{Y - X} = \overline{Y} - \overline{X}$
- d $\sigma(Y - X) = \sqrt{(\sigma(Y))^2 + (\sigma(X))^2}$

Opgave 11

Het paard is, samen met de koe ons zwaarste huisdier. Deze opgave gaat over paarden van twee verschillende rassen: de arabier en het Friese paard.

Een arabier weegt gemiddeld 450 kilo met een standaardafwijking van 50 kilo. Een Fries paard weegt gemiddeld 600 kilo met een standaardafwijking van 85 kilo.

Omdat er op paardenstoeterijen steeds meer machinaal wordt gewerkt en paarden daardoor in en op machines staan, is hun gewicht alleen daarom al van belang voor paardenfokkers en -trainers.

- a Hoe groot is de kans dat een willekeurige arabier en een willekeurig Fries paard samen meer dan 1200 kilo wegen?
- b Hoe groot is de kans dat de gewichten van een willekeurige arabier en een willekeurig Fries paard minder dan 75 kilo van elkaar verschillen?
- c Hoe groot is de kans dat in een groep van acht willekeurige Friese paarden er minstens één is die minder weegt dan een gemiddelde arabier?

Toepassen

Opgave 12: Gegevens van leerlingen

Gebruik het bestand [Gegevens 154 leerlingen](#). Bekijk de tabel met gegevens van 154 meisjes en jongens.

- a Onderzoek in hoeverre de lichaamslengte van de meisjes en de lichaamslengte van de jongens (bij benadering) normaal verdeeld zijn.

Ga ervan uit dat de lichaamslengtes van deze meisjes en jongens normaal verdeeld zijn met de gemiddelden en standaardafwijkingen zoals je die in a hebt berekend.

- b** Hoeveel procent van de jongens is langer dan het gemiddelde meisje in deze groep?
- c** Wat is de kans dat een willekeurige jongen uit deze groep langer is dan een willekeurig meisje uit deze groep?

Opgave 13: Schoonmaakmiddelen

Een fabrikant van schoonmaakmiddelen heeft één filiaal in Nederland, speciaal voor de Nederlandse markt. De afzet van dit Nederlandse filiaal blijkt jaar in jaar uit heel stabiel met een gemiddelde van 24850 liter. De kans op een jaar waarin er meer dan 25000 liter schoonmaakmiddel wordt besteld is slechts 8%, zo heeft de administratieve afdeling berekend.

De afzet wisselt per kwartaal; de kwartaalafzetten zijn volgens de administratieve afdeling onafhankelijk van elkaar. Zowel in het eerste als in het vierde kwartaal van een jaar wordt gemiddeld 6250 liter afgezet met een standaardafwijking van 61 liter. Maar in het tweede kwartaal wordt ieder jaar duidelijk meer schoonmaakmiddel afgenomen en in het derde kwartaal juist veel minder. De administratieve afdeling heeft ondertussen ook kunnen achterhalen dat er in het derde kwartaal jaarlijks gemiddeld 5625 liter wordt besteld met een standaardafwijking van 52 liter.

Hoeveel schoonmaakmiddel wordt er jaarlijks gemiddeld in het tweede kwartaal afgenomen en met welke standaardafwijking?

Testen

Opgave 14

Literpakken melk worden machinaal gevuld. Zo'n pak heeft een inhoud die normaal is verdeeld met een gemiddelde van 1,010 liter en een standaardafwijking van 0,006 liter. De vulmachine staat ingesteld op het vullen van gemiddeld 1,005 liter melk in zo'n pak met een standaardafwijking van 0,004 liter. Ook dit vulvolume is normaal verdeeld.

- a** In hoeveel procent van gevallen gaat bij het vullen melk verloren?
- b** Het gemiddelde vulvolume kan worden ingesteld. Hoeveel moet dit bedragen opdat in niet meer dan 1% van de gevallen melk verloren gaat bij het vullen van een pak?

2.4 Wortel-n-wet

Inleiding

Als je iedere dag hetzelfde reistraject naar school aflegt en daarbij dagelijks een tijd moet wachten op je bus, zou je ook willen weten welke gemiddelde tijd je wekelijks of maandelijks in totaal op je bus naar school moet wachten.

In deze paragraaf leer je dat er handige rekenregels zijn voor de totale wachttijd op de bus en voor de bijbehorende standaardafwijking.

Je zult ook zien dat de standaardafwijking van de gemiddelde wachttijd per dag op je bus naar school afhangt van de hoeveelheid dagen dat je deze bus naar school neemt, hoe vreemd dat misschien in eerste instantie ook lijkt!

Je leert in dit onderwerp

- de wortel-n-wet gebruiken voor het berekenen van de verwachtingswaarden en de standaardafwijking van (het gemiddelde) van een herhaling van kansvariabelen.

Voorkennis

- een kansverdeling opstellen bij een kansvariabele;
- de regels voor de verwachting en de standaardafwijking van de som van verschillende kansvariabelen.

Verkennen

Opgave V1

Een scholier gaat regelmatig met de bus naar school. Hij hoeft altijd maar maximaal drie minuten op de bus te wachten. Voor de wachttijd T , in hele minuten, geldt de volgende kansverdeling:

t	0	1	2	3
$P(T = t)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabel 4.1

Deze week gaat de betreffende scholier 5 keer met de bus.

- Hoeveel wachttijd verwacht hij in totaal? En hoeveel gemiddeld per keer?
- Bereken de standaardafwijking van zijn totale wachttijd? Hoeveel bedraagt die standaardafwijking dan gemiddeld per keer?

Uitleg

Een scholier gaat regelmatig met de bus naar school. Hij hoeft altijd maar maximaal drie minuten op de bus te wachten. Voor de wachttijd T , in hele minuten, geldt de volgende kansverdeling:

t	0	1	2	3
$P(T = t)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabel 4.2

Hieruit volgt dat $\bar{T} = 1,5$, $\text{Var}(T) = 1,25$ en $\sigma(T) = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Om de gemiddelde wachttijd en de bijbehorende standaardafwijking te berekenen als de scholier vijf keer met de bus gaat, hoef je niet eerst een kansverdeling te maken. Je kunt de optelregels voor de som van onafhankelijke variabelen gebruiken. Als Z de totale wachttijd van de scholier is als hij vijf keer met de bus gaat, dan geldt:

- $\bar{Z} = \bar{T} + \bar{T} + \bar{T} + \bar{T} + \bar{T} = 5 \cdot \bar{T} = 7,5$
- $\sigma(Z) = \sqrt{(\sigma(T))^2 + (\sigma(T))^2 + (\sigma(T))^2 + (\sigma(T))^2 + (\sigma(T))^2} = \sqrt{5 \cdot (\sigma(T))^2} = \sqrt{6,25} = 2,5$

De standaardafwijking van Z is $\sqrt{5 \cdot (\sigma(T))^2} = \sqrt{5} \cdot \sigma(T)$.

Om de gemiddelde wachttijd per keer te berekenen als de scholier vijf keer met de bus gaat, deel je het gemiddelde van Z door 5. Het gemiddelde is 1,5. De bijbehorende standaardafwijking wordt $\frac{2,5}{5} = 0,5$. Ga na dat dit hetzelfde is als $\frac{\sigma(Z)}{\sqrt{5}}$. Dit is niet dezelfde standaardafwijking als de scholier maar één keer met de bus gaat. Dit heet de wortel-n-wet.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

- Leg uit waarom het handig is dat je de genoemde optelregels kunt gebruiken.
- Leg uit waarom er sprake is van vijf 'onafhankelijke' statistische variabelen.

Opgave 2

Stel dat de scholier twintig keer met de bus gaat en dat M de totale wachttijd (min) is.

- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van M .
- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking per keer.

Opgave 3

In een doosje theezakjes zitten twintig zakjes thee. Ieder theezakje weegt gemiddeld 1,75 gram met een standaardafwijking van 0,085 gram.

- Hoeveel is het gemiddelde nettogewicht in een ongeopend doosje theezakjes? En hoe groot is de bijbehorende standaardafwijking?
- Hoe groot is het gemiddelde gewicht van een theezakje uit een nog ongeopend doosje? En wat is de bijbehorende standaardafwijking?
- Welk verband bestaat er tussen de twee standaardafwijkingen die je net hebt berekend?

Ondertussen zijn er al zes theezakjes gebruikt.

- Hoe groot is het gemiddelde nettogewicht van het doosje met de overgebleven theezakjes? En hoe groot is de bijbehorende standaardafwijking?
- Hoe groot is het gemiddelde gewicht van een theezakje uit het doosje waar al zes theezakjes uit gebruikt zijn? En hoe groot is de bijbehorende standaardafwijking?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Heb je te maken met n onafhankelijke gelijke kansvariabelen X , dan geldt voor kansvariabele S , de som van deze n kansvariabelen:

- $\bar{S} = n \cdot \bar{X}$ of, als X normaal verdeeld is: $\mu(S) = n \cdot \mu(X)$
- $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

Dit heet de **wortel-n-wet**.

Voor de kansverdeling die hoort bij het gemiddelde $\bar{X}$ van n onafhankelijke gelijke kansvariabelen X geldt:

- $\mu(\bar{X}) = \frac{\bar{S}}{n} = \frac{n \cdot \bar{X}}{n} = \bar{X}$ of, als X normaal verdeeld is:
 $\mu(\bar{X}) = \frac{\mu(S)}{n} = \frac{n \cdot \mu(X)}{n} = \mu(X)$
- $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(S)}{n} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma(X)}{n} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Voorbeeld 1

Op doosjes paperclips van een bepaald merk staat: circa 100 stuks. Door tellingen is gebleken dat in deze doosjes het aantal paperclips normaal is verdeeld met gemiddeld 104,3 paperclips en een standaardafwijking van 3,5. Je haalt tien doosjes van die paperclips. Hoeveel paperclips verwacht je dat er totaal in de doosjes zitten en met welke standaardafwijking?

En hoeveel is de verwachtingswaarde van de gemiddelde inhoud van 10 doosjes en hoe groot is de standaardafwijking van de gemiddelde inhoud van 10 doosjes?



Figuur 4.1

Antwoord

Neem aan dat het aantal paperclips X in elk doosje niet afhangt van het aantal in de andere doosjes.

Het totale aantal paperclips in 10 doosjes is S . Dan geldt:

- $\mu(S) = 10 \cdot \mu(X) = 10 \cdot 104,3 = 1043$
- $\sigma(S) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X) = \sqrt{10} \cdot 3,5 \approx 11,1$

De verwachting is 1043 paperclips met een standaardafwijking van ongeveer 11.

Voor het gemiddelde inhoud van 10 doosjes $\bar{X}$ geldt:

- $\mu(\bar{X}) = \frac{\mu(S)}{10} = \bar{X} = 104,3$
- $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sqrt{10} \cdot \sigma(X)}{10} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{10}} \approx 1,1$

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je koopt vijf van die doosjes paperclips.

- Hoeveel paperclips verwacht je dat er totaal in de vijf doosjes zitten?
- Welke standaardafwijking heeft het aantal paperclips in deze vijf doosjes samen?

Opgave 5

Bekijk nogmaals **Voorbeeld 1**. Je koopt vijf van die doosjes paperclips.

- Hoeveel paperclips verwacht je dat er gemiddeld in een doosje zitten?
- Welke standaardafwijking heeft het gemiddelde aantal paperclips per doosje in deze steekproef van vijf doosjes?

Opgave 6

In een fabriek worden pakken met 1 kilo meel gevuld. De vulmachine is afgesteld op een gemiddeld vulgewicht van 1002 gram met een standaardafwijking van 4 gram. De pakken worden op hun beurt verpakt met een plastic folie in pakketten van 10 pakken.

- Bereken het gemiddelde gewicht van deze pakketten.
- Welke standaardafwijking geldt voor het gewicht van deze pakketten?
- Welk verwachtingswaarde en standaardafwijking geldt voor het gemiddelde van de pakken meel uit zo'n pakket?
Op een pallet worden 100 pakketten geplaatst.
- Welk gewicht verwacht je dat op het pallet is geplaatst en welke standaardafwijking geldt hiervoor?
- Welke verwachtingswaarde en standaardafwijking gelden voor een pak meel dat uit een pallet wordt genomen?

Verwerken

Opgave 7

Het gewicht van een glas is 50 gram met een standaardafwijking van 2,8 gram.

De glazen worden in doosjes van zes verpakt.

- Wat is het gemiddelde gewicht van zo'n doosje?
- Welke standaardafwijking hoort daarbij? Geef je antwoord in gram en rond af op één decimaal.

Opgave 8

Jenna en Iris spelen een zelfbedacht spel met knikkers. Op basis van heel vaak spelen hebben ze berekend dat de volgende kans tabel bij het spel hoort:

k	-2	-1	0	2	3
$P(K = k)$	0,0032	0,1634	0,3456	0,2473	0,2405

Tabel 4.3

Kansvariabele K is het aantal knikkers winst/verlies per keer dat het spel wordt gespeeld.

- Hoe groot is het verwachte aantal knikkers winst/verlies na 35 keer spelen?
Welke standaardafwijking hoort daarbij?
- Wat is het gemiddelde aantal knikkers per spel dat je verwacht na 35 keer spelen?
Geef ook de bijbehorende standaardafwijking.

Opgave 9

Een bepaald type dvd-recorder wordt in dozen verpakt die een gemiddelde hoogte van 10 centimeter hebben met een standaardafwijking van 4 millimeter. Bij een groothandel wordt een aantal van deze dozen in een magazijn opgeslagen.

- Er worden 15 dozen op elkaar geplaatst. Bereken de verwachtingswaarde van de hoogte van de stapel dozen en geef de bijbehorende standaardafwijking.
- Bij het vervoer van deze dozen gebruikt men een vrachtwagen met een hoogte van 2,5 meter en een standaardafwijking van 1,9 centimeter. Bij het beladen van deze vrachtwagen wil men stapels maken van 25 dozen. Welke standaardafwijking voor de hoogte mag een doos dan hebben?
- Zal het altijd lukken om 25 dozen op elkaar te stapelen in een vrachtwagen? Leg uit waarom.

Opgave 10

Voor de dagproductie geldt dat het gemiddelde gewicht van een pak suiker 1002 gram is met een standaardafwijking van 3 gram. Je trekt een steekproef van tien pakken suiker uit die dagproductie.

- Welk gemiddelde gewicht zal de totale hoeveelheid suiker T in die steekproef hebben? En welke standaardafwijking hoort daarbij?
- Bereken de kans dat het totale gewicht in de steekproef meer is dan 10 kilo.
- Welk gemiddelde gewicht zullen de pakken suiker in de steekproef hebben? En welke standaardafwijking hoort daarbij?
- Bereken de kans dat het gemiddelde gewicht van de pakken in de steekproef meer is dan 1 kilo.

Opgave 11

Een groenteboer verkoopt bakjes met fruit. Er zijn bakjes aardbeien van 300 gram met een standaardafwijking van 10 gram. Er zijn bakjes bramen van 200 gram met een standaardafwijking van 8 gram. En er zijn bakjes frambozen van 100 gram met een standaardafwijking van 5 gram.

Els maakt jam met deze drie soorten fruit. Ze heeft ook geleisuiker nodig. De juiste verhouding is 1 kilo suiker op 1 kilo fruit.

Els koopt één bakje aardbeien, twee bakjes bramen en drie bakjes frambozen.

- Hoeveel gram fruit verwacht Els te kopen? En welke standaardafwijking hoort daarbij?
- Een pak geleisuiker van 1 kilo heeft een standaardafwijking van 12 gram.

Bereken de kans dat Els te weinig suiker heeft in verhouding tot het fruit dat ze heeft.

Toepassen

Opgave 12: Preiplanten kweken

Een tuinder zaait zaadjes voor preiplanten. In een doosje zitten tien zakjes met zaadjes. Uit één zakje zaadjes komen bij de tuinder gemiddeld twintig preiplanten op, met een standaardafwijking van 3,2.

- Hoeveel preiplanten kweekt de tuinder gemiddeld met één doosje zaadjes?
En welke standaardafwijking hoort daarbij?
- De tuinder zaait de zaadjes uit drie doosjes.
Bereken de kans dan er minder dan 580 preiplantjes opkomen.
De tuinder vindt deze kans te groot. Hij besluit de omstandigheden in zijn kas zo aan te passen dat er gemiddeld meer preiplanten opkomen. De standaardafwijking blijft gelijk.
- Bereken wat het nieuwe gemiddelde per zakje moet worden zodat de kans op minder dan 580 opkomende plantjes kleiner is dan 1%. Rond je antwoord af op gehele getallen.

Opgave 13: Gewicht raden

Op de kermis is er een spelletje waarbij je het gewicht moet raden van een zak met kauwgomballen. Je legt € 10,00 in. Als je het gewicht op 0,5 gram nauwkeurig raadt, win je € 50,00. Als je het gewicht op 1 gram nauwkeurig raadt, win je € 25,00. En anders win je niets.

Kyra heeft voorkennis. Ze weet dat één kauwgombal 5 gram weegt, met een standaardafwijking van 0,1 gram. In de zak zitten 55 kauwgomballen en de zak weegt niets.

Bepaal de verwachtingswaarde van de winst van Kyra.

Testen

Opgave 14

In een doos zitten vier kaartjes met daarop de getallen 3, 7, 11 en 15.

- a Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor het getal bij het trekken van één kaartje uit de doos.
- b Bereken vanuit de bijbehorende kansverdeling de verwachtingswaarde van de som van de getallen van twee getrokken kaartjes bij trekken met terugleggen. Bereken voor deze som ook de standaardafwijking.
- c Welk verband bestaat er met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking die je bij a hebt berekend?
- d Bereken vanuit de bijbehorende kansverdeling de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het gemiddelde van de getallen op twee getrokken kaartjes. Welk verband bestaat er nu met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking die je bij a hebt berekend?
- e Trek met teruglegging drie kaartjes uit de doos. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som en van het gemiddelde van de getallen op de drie getrokken kaartjes.

Opgave 15

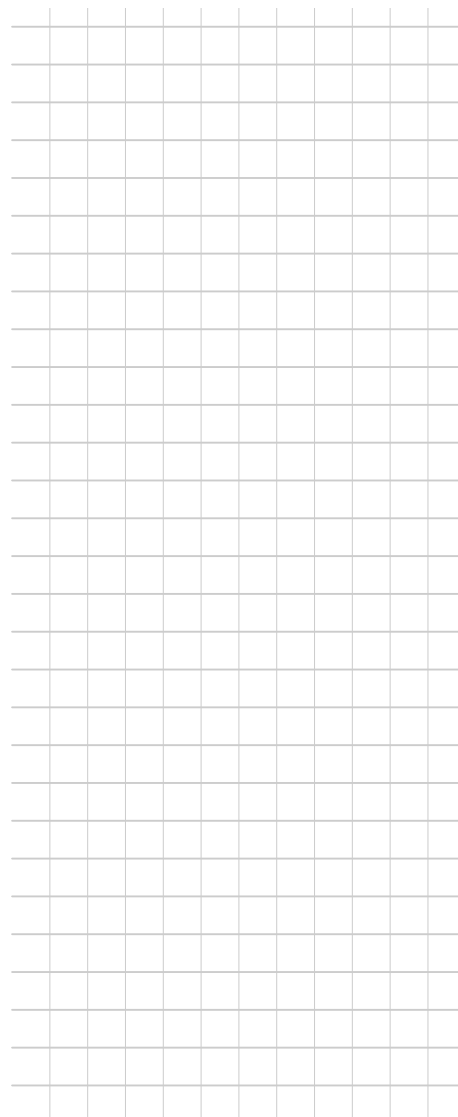
In de maand december zijn er kerstzegels verkrijgbaar. Ze worden in een bepaald jaar aangeboden op een velletje van twee blokken met twee bij vijf zegels. De afmetingen van de blokken (zonder rand) zijn 15,5 bij 7,75 cm met een standaardafwijking van 0,75 mm in beide richtingen.

Bereken de afmetingen en de standaardafwijkingen van deze zegels.

Decemberzegels
2015



Figuur 4.2



2.5 Normaal of niet?

Inleiding

Als je de gewichten van zo'n 1000 aselekt gekozen vrouwen uit de leeftijdsgroep van 20– < 30 jaar meet, krijg je ongeveer een klok-vormige frequentieverdeling. Maar mag je nu zeggen dat er sprake is van een normale kansverdeling?

Er bestaat normaal-waarschijnlijkheidspapier. Op dat papier wordt een cumulatief relatief frequentiepolygoon een rechte lijn als er van een normale kansverdeling sprake is. Met behulp van de vuistregels kun je vanaf dat papier dan het gemiddelde en de standaardafwijking aflezen.

Je leert in dit onderwerp

- normaal-waarschijnlijkheidspapier gebruiken om te bepalen of een frequentieverdeling normaal verdeeld is;
- gemiddelde en standaardafwijking van een normaal verdeelde kansvariabele aflezen van normaal-waarschijnlijkheidspapier.

Voorkennis

- werken met normale kansverdelingen;
- kansen berekenen bij normale kansverdelingen;
- grenswaarden terugzoeken bij normale kansen;
- een cumulatief frequentiepolygoon maken bij een frequentietabel of histogram.

Verkennen

Opgave V1

Bij een landelijk onderzoek zijn de gewichten bepaald van 1000 aselekt gekozen volwassen vrouwen van 20– < 30 jaar, zie tabel. De frequentieverdeling lijkt op die van een normale kansverdeling. Kun je nu zonder meer een normale kansverdeling als rekenmodel gebruiken voor deze groep vrouwen?

- a Ga na of deze frequentieverdeling voldoet aan de vuistregels voor een normale verdeling.
- b Is het voldoen aan de vuistregels voldoende reden om te concluderen dat een normale verdeling een bruikbaar rekenmodel is?

Tijdens het onderzoek wordt ook de gewichten van vrouwen uit andere leeftijdsklassen verzameld.

De ene leeftijdsklasse kent net wat hogere gewichten dan de andere: bij de ene is b.v. gewichtsklasse 35– < 40 leeg en zijn de twee extra klassen 105– < 110 en 110– < 115 benodigd.

- c Vanwege ergonomische redenen willen de onderzoekers per leeftijdsklasse weten hoeveel standaardafwijkingen een gewicht van 78,5 kg afligt van het gemiddelde gewicht in die leeftijdsklasse.

Hoe kunnen ze dat voor elkaar krijgen?



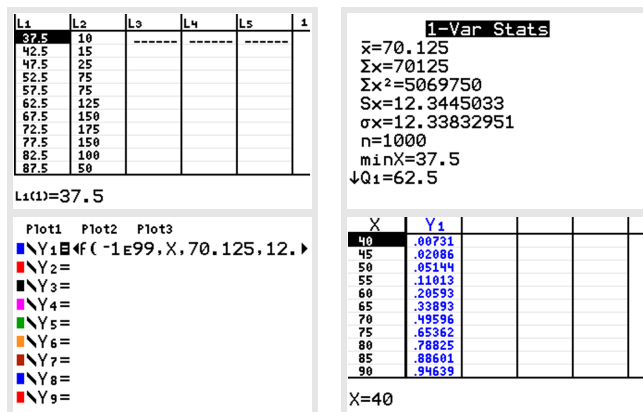
Figuur 5.1

gewicht	frequentie
35-<40	10
40-<45	15
45-<50	25
50-<55	75
55-<60	75
60-<65	125
65-<70	150
70-<75	175
75-<80	150
80-<85	100
85-<90	50
90-<95	25
95-<100	15
100-<105	10

Figuur 5.2

Uitleg

Bij een landelijk onderzoek zijn de gewichten bepaald van 1000 aselekt gekozen volwassen vrouwen van 20– < 30 jaar, zie tabel. De frequentieverdeling lijkt op die van een normale verdeling met $\mu(L) = 70,125$ en $\sigma(L) = 12,338$. Kun je nu zonder meer een normale verdeling als rekenmodel gebruiken voor deze groep vrouwen?



Figuur 5.4

Zet je op **normaal waarschijnlijkheidspapier** kansen van de vorm $P(L \leq 40 | \mu = 70,125 \text{ en } \sigma = 12,338)$ uit, dan krijg je een rechte lijn. Elke zuivere cumulatieve normale verdeling wordt op normaal waarschijnlijkheidspapier een rechte lijn.

Maak je van de gegeven frequentieverdeling een cumulatieve relatieve frequentieverdeling en zet je die uit op normaal waarschijnlijkheidspapier, dan zou je een rechte lijn moeten krijgen (je zet de cumulatieve relatieve frequenties uit tegen de rechter klassengrenzen). Je zult zien, dat de cumulatieve relatieve frequentieverdeling en de normale verdeling goed overeenkomen! Kennelijk zijn deze gewichten ongeveer normaal verdeeld!

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg**. Neem (print) een aantal bladen normaal waarschijnlijkheidspapier. Ga uit van een normale verdeling met $\mu = 70,125$ en $\sigma = 12,338$.

- Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de waarden van $P(L \leq g)$ bij deze normale verdeling voor $g = 40, 45, 50, \dots, 105$. Denk er om dat alle kansen als percentages moeten worden gegeven.
- Wordt je grafiek een rechte lijn?
- Waar in je figuur vind je μ terug? Kun je ook σ terugvinden?

Opgave 2

Neem nu de tabel met de werkelijke gewichten van de 1000 vrouwen.

- Maak hierbij een tabel met cumulatieve relatieve frequenties.
- Zet deze cumulatieve relatieve frequenties uit tegen de bovengrenzen van elke klasse op het normaal waarschijnlijkheidspapier waar de normale verdeling van de vorige opgave op staat.

gewicht	frequentie
35-<40	10
40-<45	15
45-<50	25
50-<55	75
55-<60	75
60-<65	125
65-<70	150
70-<75	175
75-<80	150
80-<85	100
85-<90	50
90-<95	25
95-<100	15
100-<105	10

Figuur 5.3

- c Verschilt je grafiek veel van de grafiek van de normale verdeling? Waarom moet je de bovengrenzen van de klassen gebruiken?
- d Kun je concluderen dat de gewichten van deze 1000 vrouwen normaal zijn verdeeld?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Zet je bij een normaal verdeelde kansvariabele X met verwachting $\mu(X)$ en standaardafwijking $\sigma(X)$ op **normaal-waarschijnlijkheidspapier** kansen van de vorm $P(X \leq g)$ uit tegen g , dan krijg je een rechte lijn. Elke zuivere cumulatieve normale kansverdeling wordt op normaal-waarschijnlijkheidspapier een rechte lijn. Zet daarbij de cumulatieve relatieve frequenties uit tegen de **bovengrenzen** van de klassen.

Vaak liggen op het normaal-waarschijnlijkheidspapier de punten van de cumulatieve relatieve frequentieverdeling niet precies op een rechte lijn. Trek dan een rechte lijn die zo goed mogelijk bij de getekende punten past. Je benadert op die manier de frequentieverdeling door de normale kansverdeling die bij die lijn hoort. Schat de verwachtingswaarde door af te lezen welk getal er bij 50% hoort.

Omdat één van de twee vuistregels zegt dat bij een normale verdeling 68% in het interval $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ligt, is bij 84% de waarde van $\mu + \sigma$ af te lezen. Bepaal zo σ .

Voorbeeld 1

Bekijk de tabel met de diameters (millimeter) van machinaal geproduceerde moeren. Ga na dat deze diameters normaal zijn verdeeld en bereken het gemiddelde en de standaardafwijking.

Antwoord

De grafische rekenmachine geeft $\bar{M} \approx 13,20$ en $\sigma(M) \approx 0,10$ waarin M de diameter van een moer voorstelt.

Op normaal-waarschijnlijkheidspapier verschillen de cumulatieve relatieve frequentieverdeling vanuit de tabel en de cumulatieve normale kansverdeling met $\mu(M) = 13,20$ en $\sigma(M) = 0,10$ vrijwel niet van elkaar. Maak beide op een blad normaal-waarschijnlijkheidspapier.

Conclusie: M is normaal verdeeld met $\mu(M) = 13,20$ en $\sigma(M) = 0,10$.

Opgave 3

Bekijk de tabel met diameters van machinaal geproduceerde moeren in **Voorbeeld 1**.

- a Reken het gemiddelde en de standaardafwijking na.
- b Teken op normaal-waarschijnlijkheidspapier de cumulatieve normale verdeling bij dit gemiddelde en deze standaardafwijking.



diameter	percentage
12,8-<12,9	0,1
12,9-<13,0	2,1
13,0-<13,1	13,6
13,1-<13,2	34,1
13,2-<13,3	34,0
13,3-<13,4	13,6
13,4-<13,5	2,0
13,5-<13,6	0,1

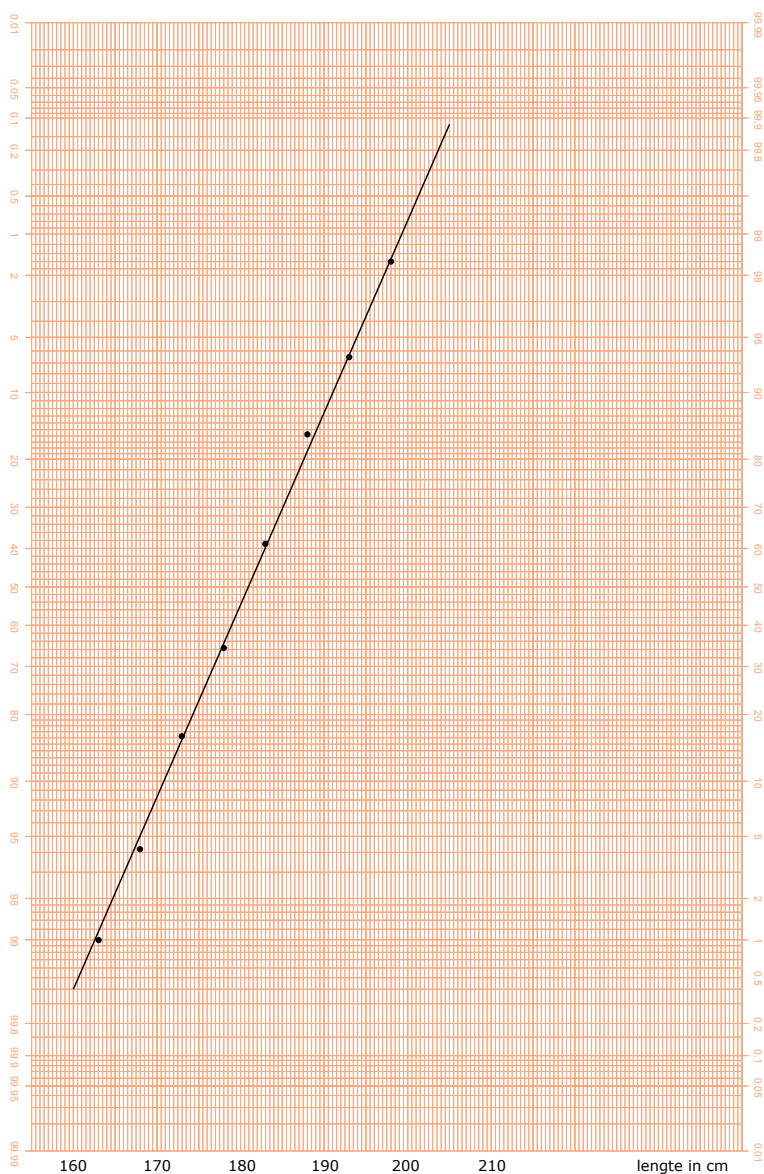
Figuur 5.5

- c Teken op hetzelfde papier de cumulatieve relatieve frequentieverdeling van de moeren.
- d Ga na dat de verdelingen van b en c redelijk goed overeenkomen.

Voorbeeld 2

De lengteverdeling van Nederlandse mannen boven de twintig jaar is bij benadering klokvormig. In deze figuur op normaal waarschijnlijkheidspapier zie je hoe deze kansverdeling wordt benaderd door een rechte lijn.

Bepaal vanuit de figuur het gemiddelde en de standaardafwijking van de lengte X van de Nederlandse man in centimeter.



Figuur 5.6

Antwoord

Op de lengteverdeling van Nederlandse mannen boven de twintig jaar zijn de lengtes bij 50% en 84% af te lezen:

- bij 50% zit de gemiddelde lengte van $\mu \approx 181$ cm.
- bij 84% zit volgens de vuistregels $\mu + \sigma \approx 189$ cm.

Dit geeft een gemiddelde van ongeveer 181 cm met een standaardafwijking van $189 - 181 = 8$ cm.

Opgave 4

Wanneer een cumulatieve relatieve frequentieverdeling op normaal-waarschijnlijkheidspapier vrijwel een rechte lijn oplevert, is er sprake van een normale kansverdeling. In **Voorbeeld 2** zie je hoe je dan het gemiddelde en de standaardafwijking van de kansverdeling uit de figuur afleest.

Ga na dat de in het voorbeeld vermelde waarden inderdaad correct zijn.

Opgave 5

In een fabriek worden kilopakken suiker machinaal gevuld. Volgens de Europese norm mag niet meer dan 2,5% van de pakken suiker minder dan 1000 gram bevatten. Gebruik het bestand **De vulgewichten van honderd pakken suiker**.

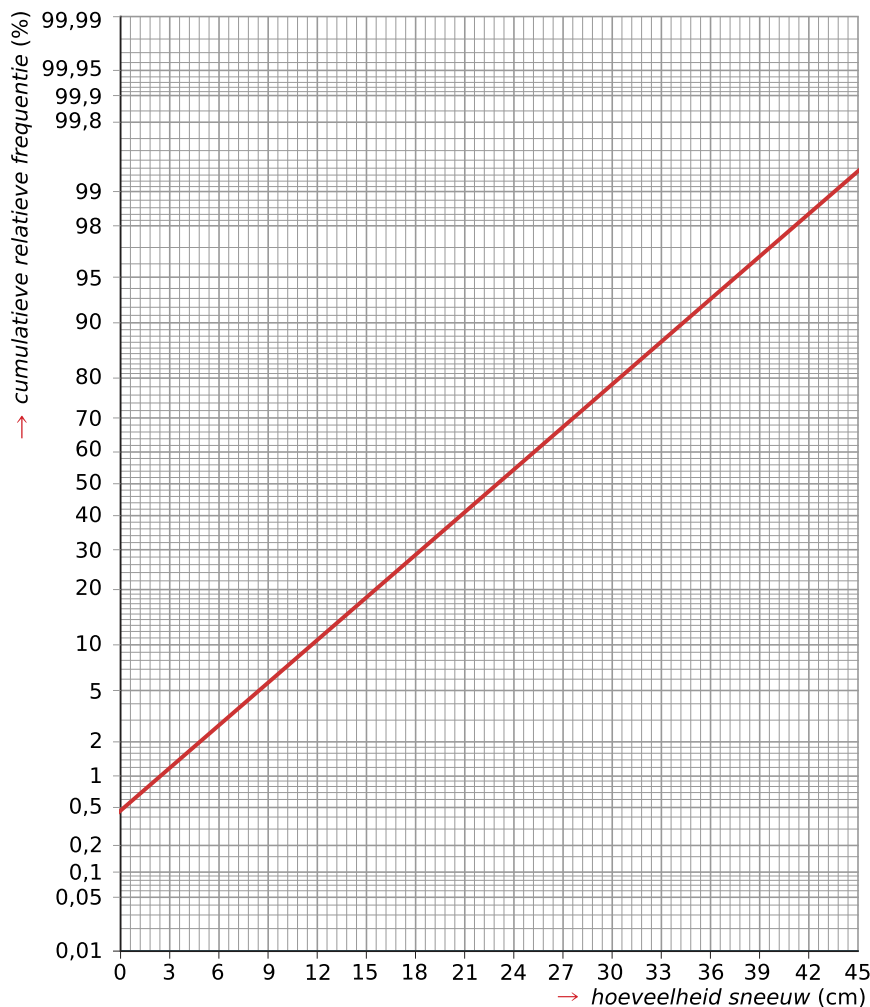
- Maak een tabel met cumulatieve relatieve frequenties van deze vulgewichten. Gebruik klassen met een klassenbreedte van 1 gram.
- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van deze vulgewichten in één decimaal.
- Teken op normaal-waarschijnlijkheidspapier de cumulatieve relatieve frequentieverdeling.
- Zijn de vulgewichten (bij goede benadering) normaal verdeeld? Zo ja, trek dan de rechte lijn die hoort bij deze normale verdeling.
- Laat zien dat het gemiddelde vulgewicht en de bijbehorende standaardafwijking die je uit de figuur afleest, overeenkomen met de berekende waarden.
- Welke vulgewichten hebben de 10% zwaarste pakken suiker? Lees je antwoord uit de figuur af.

Verwerken

Opgave 6

In een noordelijk gelegen stad sneeuwt het in het winterseizoen regelmatig.

Van de hoeveelheid sneeuw die afgelopen winter per dag dat het sneeuwde viel, is een grafiek op normaal-waarschijnlijkheidspapier gemaakt.



Figuur 5.7

- a Leg uit hoe je uit deze grafiek kunt aflezen hoeveel procent van de dagen dat het sneeuwde er meer dan 18 centimeter sneeuw per dag viel.
- b Leg uit waarom de hoeveelheid sneeuw die per sneeuwdag viel normaal verdeeld is en bepaal de gemiddelde hoeveelheid sneeuw die per sneeuwdag viel. Bepaal ook de bijbehorende standaardafwijking.

Opgave 7

Bekijk de tabel met de bloeddruk in mm Hg (millimeter kwikdruk) van een groep mannen en een groep vrouwen.

- Bereken van beide groepen de gemiddelde bloeddruk en de standaardafwijking van de bloeddruk.
- Welke klassenindeling is hier gehanteerd?
- Laat met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier zien dat de bloeddruk van de mannen niet normaal is verdeeld.
- Trek een rechte lijn die de verdeling zo goed mogelijk benadert. Doe dat en lees het gemiddelde en de standaardafwijking af die bij die lijn passen. Wijken de waarden veel af van de berekende waarden?
- Is de bloeddruk van de vrouwen wel normaal verdeeld?

Bloeddruk 150 personen in mm Hg		
	mannen	vrouwen
bloeddruk	frequentie	frequentie
105	2	1
110	4	3
115	6	5
120	16	15
125	15	12
130	6	6
135	7	7
140	7	7
145	7	8
150	2	5
155	1	3
160	1	2
165	1	1
	75	75

Figuur 5.8

Opgave 8

Bekijk de cumulatieve relatieve frequentiepolygoon en de bijbehorende tabel van het aantal levendgeborenen vergeleken met de leeftijd van de moeder.

klasse	abs. freq.	rel. freq.	cum. rel. freq.
15 – 19 jaar	2182	0,011246	0,011246
20 – 24 jaar	17383	0,089595	0,100842
25 – 29 jaar	49344	0,254328	0,35517
30 – 34 jaar	79001	0,407186	0,762356
35 – 39 jaar	39665	0,204441	0,966797
40 – 44 jaar	6225	0,032085	0,998882
45 – 49 jaar	217	0,001118	1
totaal	194017	1	

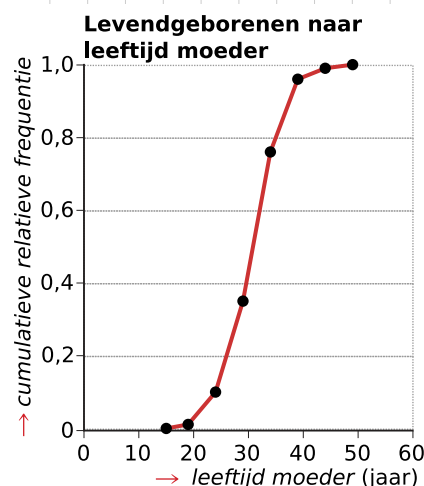
Tabel 5.1

Leg uit hoe je aan deze gegevens kunt zien of deze verdeling normaal verdeeld is. Zo ja, bepaal dan het gemiddelde en de standaardafwijking.

Opgave 9

Marieke moet zowel een taaltoets als een rekentoets maken om voor haar vervolgstudie in aanmerking te komen. Bij de taaltoets haalt ze 62 punten en voor de rekentoets haalt ze 70 punten. De scores voor de taaltoets zijn normaal verdeeld met een gemiddelde score van 55 punten en een standaardafwijking van 8 punten. De scores voor de rekentoets zijn ook normaal verdeeld met een gemiddelde van 55 punten en een standaardafwijking van 14 punten.

Je ziet dat Marieke bovengemiddeld gescoord heeft. Welke toets heeft zij het beste gemaakt?



Figuur 5.9

Beantwoord deze vraag op twee manieren:

1. met behulp van grafieken op een blad normaal-waarschijnlijkheidspapier;
2. op (een) andere, zelf te bedenken manier(-en).

Toepassen

Opgave 10: Vogels die voedsel zoeken

Vogels die hun voedsel in bomen en struiken zoeken, doen dat vaak bij voorkeur op een specifieke hoogte. Gedurende een winter zijn in een bos voedselzoekende vogels geobserveerd. In de tabel staat de verdeling over verschillende hoogtes van 400 waarnemingen bij pimpelmezen.

hoogte (meter)	< 1,5	1,5 – 3	3 – 5	5 – 7	7 – 10	10 – 15	> 15
aantal waarnemingen	24	26	51	72	122	92	13

Tabel 5.2

Toon met behulp van normaal-waarschijnlijkheidspapier aan dat de waargenomen hoogtes bij benadering normaal verdeeld zijn. Lees uit de tekening af hoe groot het gemiddelde en de standaardafwijking van deze verdeling zijn. Geef beide antwoorden in decimeter. Licht je werkwijze toe.

(naar: examen vwo wiskunde A in 2002, eerste tijdvak)

Opgave 11: Tennisballenfabrikant

Een tennisballenfabrikant produceert drie typen tennisballen: Yellow, Silver en Gold. Van elk type is de diameter (bij benadering) normaal verdeeld. De fabrikant geeft de diameter van een tennisbal op in inches.

De fabrikant heeft bij 400 tennisballen van het type Yellow de diameters laten opmeten. Bekijk het resultaat in de tabel.

diameter (inch)	< 2,4	2,4 – < 2,5	2,5 – < 2,6	2,6 – < 2,7	2,7 – < 2,8	≥ 2,8
aantal waarnemingen	1	4	98	232	63	2

Tabel 5.3

- a Zet de gegevens uit op normaal-waarschijnlijkheidspapier en toon daarmee aan dat de waargenomen diameters van Yellow inderdaad bij benadering normaal verdeeld zijn.
- b Uit de tekening die je bij a hebt gemaakt kun je aflezen hoe groot het gemiddelde en de standaardafwijking van de diameter van een bal van het type Yellow is.
Bepaal het gemiddelde en de standaardafwijking van de diameter van een bal van het type Yellow. Licht je antwoord toe.

Bij officiële wedstrijden mag een tennisbal niet te groot en ook niet te klein zijn. In de spelregels staat daarover het volgende: 'Bij alle proeven ter bepaling van de omvang moet een omvangmeter gebruikt worden. De omvangmeter bestaat uit een metalen plaat.

In de plaat zitten twee cirkelvormige openingen met een diameter van respectievelijk 2,575 inch en 2,700 inch. De bal mag niet door zijn eigen gewicht door de kleine opening vallen, maar moet wel door zijn eigen gewicht door de grootste opening vallen.'

Van het type Gold is de diameter (bij benadering) normaal verdeeld met een gemiddelde van 2,620 inch en een standaardafwijking van 0,048 inch.

De tennisballenfabrikant krijgt de opdracht 1200 tennisballen van het type Gold te leveren die gebruikt kunnen worden bij officiële wedstrijden.

- c Bereken hoeveel tennisballen de fabrikant naar verwachting moet produceren om aan deze opdracht te voldoen.

(naar: examen vwo wiskunde A in 2008, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 12

Hier zie je een tabel met kniehoogtes in cm van 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

- a Bereken de gemiddelde kniehoogte en de standaarddeviatie.
- b Teken op normaal-waarschijnlijkheidspapier de bijbehorende cumulatieve relatieve frequentieverdeling.
- c Ga na, dat de gemiddelde kniehoogte en de standaardafwijking die je uit de figuur kunt aflezen overeenkomen met de berekende waarden.
- d Zijn de kniehoogtes bij benadering normaal verdeeld?
- e 60% van de kniehoogtes zit tussen $\mu - a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a ? Lees je antwoord uit de figuur af.
- f Welke minimale lengte hebben de 15% grootste kniehoogtes? Lees je antwoord uit de figuur af.

Statistisch onderzoek 1947			
De Bijenkorf - Amsterdam			
5001 vrouwen met leeftijd > 18 jr.			
mouw- lengte	frequentie	knie- hoogte	frequentie
49	3	34	1
50	11	35	3
51	22	36	19
52	53	37	34
53	89	38	76
54	163	39	178
55	250	40	313
56	405	41	495
57	519	42	632
58	660	43	738
59	578	44	675
60	653	45	665
61	560	46	466
62	421	47	343
63	260	48	195
64	159	49	88
65	106	50	45
66	52	51	18
67	18	52	12
68	15	53	2
69	3	54	3
70	0		5001
71	1		
	5001		

Figuur 5.10

Practicum

Hier vind je een **leeg blad normaal-waarschijnlijkheidspapier** in drie kleuren.

- **normaal waarschijnlijkheidspapier (paars)**
- **normaal waarschijnlijkheidspapier (oranje)**
- **normaal waarschijnlijkheidspapier (grijs)**

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Kansmodellen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- continue kansvariabele — normale verdeling, normaalkromme — vuistregels
- kansen bij een normaal verdeelde variabele berekenen
- toevalsvariabelen optellen en aftrekken
- de wortel-n-wet voor een steekproef uit een normale verdeling
- normaal-waarschijnlijkheidspapier

Activiteitenlijst

- een normale verdeling herkennen — eigenschappen van de normaalkromme
- kansen berekenen bij een normale toevalsvariabele — grenswaarden berekenen bij gegeven normale kansen — μ of σ berekenen bij een normaal verdeelde variabele
- μ en σ berekenen bij de som of het verschil van twee kansvariabelen
- de wortel-n-wet toepassen
- met behulp van normaal-waarschijnlijkheidspapier onderzoeken of een statistische variabele normaal verdeeld is en gemiddelde en standaardafwijking ervan aflezen

Achtergronden

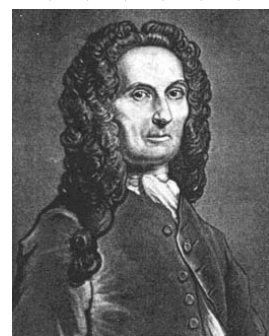
In 1718 publiceerde **Abraham de Moivre (1667–1754)** 'The Doctrine of Chance', een boek over kansrekening waarin de eerste definitie van statistische onafhankelijkheid verschijnt, naast de aanpak van allerlei problemen op het gebied van dobbelen en andere kansspelen.

Bij de bestudering van herhaalde trekkingen (met teruglegging) van een schijf uit een vaas met alleen zwarte en witte schijven waarbij de kans op een zwarte en een witte schijf even groot is, ontdekte De Moivre dat een bijpassende kansverdeling een histogram heeft dat netjes klokvormig is. Later werd dit probleem gesimuleerd met het **bord van Galton** waarin balletjes naar beneden vallen op een aantal rijen met pinnen.

De Moivre bestudeerde ook sterftetabellen en werkte aan de theorie van de wiskunde rond levensverzekeringen.

In 1733 leidt hij een formule voor de normaalverdeling af.

De Duitse wiskundige **Carl Friedrich Gauss (1777–1854)** toonde aan dat de verdeling van meetfouten de normaalverdeling was en de bijbehorende verdelingskromme heet naar hem dan ook de



Figuur 6.1 Abraham de Moivre

gausskromme. In 1812 publiceerde de Franse wiskundige **Pierre-Simon Laplace (1749–1827)** over deze onderwerpen het boek 'Théorie analytique des probabilités', wat tientallen jaren lang als standaardwerk over waarschijnlijkheidsrekening was.

Testen

Opgave 1

Bloeddruk wordt gemeten in mm Hg (spreek uit: millimeter kwik). Bij een groep van duizend mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

- a Hoeveel van de mannen hebben naar schatting een bloeddruk van minder dan 141 mm Hg?
- b Hoeveel mannen hebben naar schatting een bloeddruk die meer dan twee keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?
- c Maak op basis van de normaalkromme een schatting van het percentage mannen dat een bloeddruk heeft van meer dan 150 mm Hg en vergelijk dat met het daadwerkelijke percentage mannen met een dergelijke bloeddruk.

Opgave 2

In een fabriek worden sokken machinaal vervaardigd. De gemiddelde lengte van een sok blijkt 47 centimeter te zijn. De lengte van de sokken is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 0,2 centimeter. De sokken worden in paren verkocht. In de fabriek worden paren gevormd door willekeurig twee sokken bij elkaar te stoppen.

- a Als één sok een lengte heeft van 46,5 centimeter, hoe groot is dan de kans dat het lengteverschil met de andere sok van het paar meer dan 0,7 centimeter is?
- b Wat is de kans dat als de eerste sok een lengte heeft van 49,5 centimeter, het lengteverschil met de andere sok van het paar meer dan 0,7 centimeter is? Waarom is deze kans niet gelijk aan de kans uit a?
- c Wat kun je zeggen over de lengte van de 5% kortste sokken? Rond af op één decimaal.

De fabrikant vindt dat te veel sokken een lengte hebben die je bij c hebt berekend. Hij past daarom de standaardafwijking aan zodat nog maar 4% van de sokken korter is dan die lengte, in plaats van 5%. Het gemiddelde blijft gelijk.

- d Bereken de nieuwe standaardafwijking. Rond af op twee decimalen.
- e Wat gebeurt er met de normaalkromme van de soklengte als de standaardafwijking van 0,2 wijzigt in de standaardafwijking die je bij d hebt berekend?

Opgave 3

In een fabriek verpakt een machine in kleine zakjes poedermelk voor in de koffie. Elk van die zakjes hoort 3 gram melkpoeder te bevatten. De fabrikant heeft zijn machine zo afgesteld dat het vulgewicht van deze zakjes normaal is verdeeld met een gemiddelde van 3,1 gram en een standaardafwijking van 0,06 gram.

- a** Hoeveel procent van de zakjes melkpoeder die deze machine produceert, is te licht?

De fabrikant voldoet hiermee niet aan de richtlijnen van de Europese Unie. Die schrijven voor dat niet meer dan 1% van de zakjes poedermelk minder dan 3 gram mag bevatten.

- b** De fabrikant besluit om iets meer melkpoeder in de zakjes te doen. Op welk gemiddelde vulgewicht moet hij de machine instellen om aan de richtlijn van de EU te voldoen? Ga ervan uit dat de standaardafwijking van de verdeling van de vulgewichten hetzelfde blijft.

- c** Je koopt een doosje met daarin twintig zakjes van het melkpoeder dat nog het oorspronkelijke gemiddelde van 3,1 gram heeft.

Hoeveel gram melkpoeder verwacht je gemiddeld per zakje in het doosje met twintig zakjes? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

- d** Hoe groot is de kans dat je in totaal minder dan $20 \cdot 3 = 60$ gram melkpoeder hebt gekocht?

Licht je antwoord toe met behulp van je kennis over de normaal-kromme.

Opgave 4

In een bedrijf wordt onder andere margarine geproduceerd. Het eindproduct wordt via een vulmachine in kuipjes gegoten, die volgens het opschrift een inhoud hebben van 500 gram. De gewichten van de gevulde kuipjes blijken normaal verdeeld te zijn. De standaardafwijking is ongeacht het vulgewicht waarop de vulmachine ingesteld staat steeds 4 gram. Het gemiddelde gewicht van zo'n kuipje is gelijk aan het vulgewicht waarop de machine is ingesteld.

De kuipjes worden verpakt in kartonnen dozen waarvan het gewicht normaal verdeeld is. Het gemiddelde gewicht van zo'n doos is 400 gram met een standaardafwijking van 15 gram. In één doos gaan twintig kuipjes.

- a** Het gewicht van de volle dozen is ook weer normaal verdeeld. Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het gewicht van een volle doos margarinekuipjes.

De keuringsdienst van waren gaat regelmatig na of de fabriek wel voldoende margarine in de kuipjes doet. Daartoe neemt de dienst één volgepakte doos uit de dagproductie en weegt die. Als het totale gewicht meer dan 50 gram naar beneden afwijkt van het gemiddelde, krijgt de fabrikant een boete.

- b** Hoe groot is de kans op een boete als de fabrikant het vulgewicht van 500 gram aanhoudt?

Natuurlijk zou de keuringsdienst van waren ook de twintig kuipjes zonder de bijbehorende doos kunnen wegen. Ook nu wordt een boete gegeven als 50 gram minder dan het gemiddelde gemeten zou worden.

- c Waarom is deze controle eerlijker dan de eerste?

Na verloop van tijd veranderen de eisen die de keuringsdienst van waren stelt. In het vervolg zullen honderd kuipjes op hun gewicht worden gecontroleerd. Daarbij mag er maximaal één zijn die minder dan 495 gram weegt.

- d Hoe groot is nu de kans op een boete, aangenomen dat de fabrikant de machine nog steeds op 500 gram heeft ingesteld?

Opgave 5

Een schroefas van een schip verbindt de motor met de schroef. Deze as wordt op een of meer plaatsen ondersteund door een lager. Dit lager is een bronzen bus waarvan de binnendiameter zo goed mogelijk passend wordt gemaakt om de diameter van de as en waarin zich goed geoliede kogels bevinden die het draaien van de as mogelijk maken.

Er wordt gestreefd naar een binnendiameter van 15,0 millimeter van de bussen (en dus de lagers) en naar een diameter van 14,9 millimeter voor de assen. Na fabricage zijn zowel de binnendiameter van de lagers als de diameters van de assen normaal verdeeld:

- Voor de assen geldt: $\mu = 14,9$ mm en $\sigma = 0,1$ mm.
- Voor de lagers geldt: $\mu = 15,0$ mm en $\sigma = 0,1$ mm.

Assen met een diameter groter dan 15,1 millimeter en lagers met een binnendiameter kleiner dan 14,8 millimeter worden na een test afgekeurd.

- a Hoeveel procent van de assen en hoeveel procent van de lagers zal worden afgekeurd na een test?
- b Bereken de diameter waarvoor geldt: de kans op een as met die diameter is gelijk aan de kans op een lager met die binnendiameter.

Uit een grote hoeveelheid, die evenveel assen als lagers bevat, neem je willekeurig een as en een lager.

- c Hoe groot is de kans dat de lager niet om de as past?



Figuur 6.2

Opgave 6

Op een doos waar een spel in is verpakt, staat vermeld dat de gemiddelde speelduur van een spelletje 20 minuten is. Tijdens de vakantie houden vier vrienden bij hoelang elk spel duurt. Bekijk hun gegevens in de tabel.

De vrienden willen onderzoeken of de speelduur van een spelletje normaal verdeeld is.

- Laat met behulp van normaal-waarschijnlijkheidspapier zien dat de gegevens in de tabel bij benadering normaal verdeeld zijn en bepaal het gemiddelde en de standaardafwijking van de speelduur.
- Bij een andere variant van het spel wordt met meer kaarten gespeeld. Dit heeft invloed op de speelduur van het spel. De speelduur is dan bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 25 minuten en een standaardafwijking van 9 minuten. De vier spelers spelen op deze manier twee spellen. Bereken de kans dat één spel langer dan 20 minuten en één spel korter dan 20 minuten duurt.

(naar: examen vwo wiskunde A in 2013, tweede tijdvak)

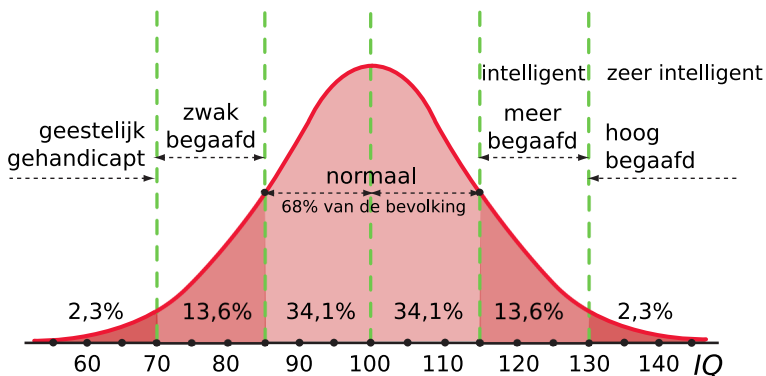
speelduur (min)	frequentie
0– < 5	3
5– < 10	13
10– < 15	39
15– < 20	44
20– < 25	32
25– < 30	11
30– < 35	8

Tabel 6.1

Toepassen

Opgave 7: Intelligentiequotiënt

In het begin van de vorige eeuw werd er veel waarde gehecht aan het zogenaamde **intelligentiequotiënt (IQ)** van met name kinderen. In 1904 werd de psycholoog **Alfred Binet (1857–1911)** door de Franse overheid gevraagd een test te ontwerpen om 'slimme' van 'domme' kinderen te onderscheiden.



Figuur 6.3

Binet ontwierp een intelligentietest waarmee hij de intelligentieleeftijd van een kind vaststelde. Wanneer de intelligentieleeftijd wordt gedeeld door de werkelijke leeftijd (en met 100 vermenigvuldigd) dan krijg je het IQ. Dit IQ is normaal verdeeld met een gemiddelde dat op 100 is gesteld. Zo is de Stanford-Binet intelligentieschaal ontwikkeld. Bekijk de normale verdeling van de IQ's zoals Binet die aantrof.

- Welk gemiddelde en welke standaardafwijking heeft het IQ volgens de Stanford-Binet-schaal?
- Is het IQ afhankelijk van je leeftijd?

- c Hoeveel procent van de mensen heeft een minder dan normale intelligentie?
- d Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van boven de 140?
- e Welk IQ heeft de meest intelligente 10% van de bevolking volgens de Stanford-Binet-schaal?

Opgave 8: Zwangerschap

De zwangerschapsduur bij mensen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 266 dagen en een standaarddeviatie van 16 dagen.

- a Bij een premature geboorte wordt het kind minstens drie weken voor het gemiddelde geboren. Hoe groot is de kans daar op?
- b In 7% van de gevallen duurt een zwangerschap zo lang dat de geboorte moet worden ingeleid. Vanaf welke zwangerschapsduur gebeurt dit dus?
- c In 1973 beweerde een vrouw dat ze 310 dagen zwanger was geweest omdat op de dag van de bevalling haar man al 310 dagen als marinier van huis was. Hoe groot is de kans op een zwangerschap van minstens 310 dagen?

Examen

Opgave 9: Cakemeel

In een fabriek worden pakken met cakemeel gevuld. Op zo'n pak wordt vermeld: 'Inhoud 500 gram'. Veronderstel dat de inhoud per pak normaal verdeeld is met een gemiddelde van 500 g en met een standaarddeviatie van 4 g.

- a Bereken in één decimaal het percentage pakken dat minder dan 495 g cakemeel bevat.
Volgens de fabrikant betekent de vermelding 'Inhoud 500 gram' dat slechts 25% van de pakken minder dan 500 g inhoud heeft. Als een pak een inhoud van minder dan 500 g heeft, spreekt hij van ondergewicht. Veronderstel bij de volgende drie vragen dat de fabrikant gelijk heeft en dat de standaarddeviatie van de normaal verdeelde inhoud 4 g bedraagt.
- b Bereken in één decimaal de gemiddelde inhoud per pak.
In een rek van een kruidenierswinkel staan 20 pakken cakemeel afkomstig van bovengenoemde fabriek. Daarvan hebben er 5 een ondergewicht. Een klant neemt aselekt 3 pakken uit het rek.
- c Bereken in twee decimalen de kans dat geen van deze 3 pakken een ondergewicht heeft.
- d Een banketbakker koopt 16 pakken rechtstreeks van de fabriek. Bereken in drie decimalen de kans dat hij minder dan 8000 g cakemeel heeft gekocht.

(bron: examen wiskunde A vwo 1986, eerste tijdvak)

Opgave 10: Zeepoeder

Een grootwinkelbedrijf heeft in zijn assortiment een eigen merk zeepoeder. Het bedrijf beschikt over een vulmachine met een vulcapaciteit van 7536 kg per dag. Van de door de machine gevulde pakken is het gewicht normaal verdeeld, met een standaardafwijking van 40 g ongeacht de inhoud. De keuringsdienst van waren eist dat, op één decimaal, slechts 4,0% van de in de handel gebrachte pakken minder mag bevatten dan op de pakken vermeld staat. Het bedrijf brengt zeepoeder op de markt in kleine pakken, waarop vermeld staat dat zij 1 kg zeepoeder bevatten. De vulmachine is ingesteld op 1070g per pak.

- a Onderzoek of aan de eis van de keuringsdienst van waren wordt voldaan.

De bedrijfsleiding overweegt om naast de kleine pakken met opschrift 1 kg ook gezinspakken met opschrift 2,5 kg op de markt te brengen.
- b Op hoeveel gram per pak moet de vulmachine ingesteld worden voor de gezinspakken om aan de eis van de keuringsdienst van waren te voldoen?
- c Neem aan dat het aantal geproduceerde kleine pakken twee maal zo groot is als het aantal gezinspakken. Hoeveel gezinspakken kunnen er dan maximaal per dag worden geproduceerd?

(bron: examen wiskunde A vwo 1984, eerste tijdvak)

Opgave 11: Bewaking

Een zekere bank wordt 's nachts intensief bewaakt. Meerdere malen per nacht doet één van de bewakers een ronde door het gebouw. Op zo'n ronde moet hij zich op vijftien plaatsen melden door een speciale code in te toetsen in een meldkastje. De computer in de controlekamer registreert de tijdstippen waarop dit gebeurt. Ook schrijft de procedure voor dat de tijdstippen van vertrek en terugkomst worden geregistreerd. De kastjes zijn zodanig op de route geplaatst dat de zestien loopafstanden vrijwel even lang zijn. Uit overzichten over langere tijd blijkt dat, in het geval dat er niets bijzonders valt op te merken, de lengte van de tijdsintervallen tussen twee opeenvolgende meldingen van de bewaker vrijwel normaal verdeeld is met een gemiddelde van 3,6 minuten en een standaarddeviatie van 0,7 minuten. In het geval dat een melding langer dan vijf minuten uitblijft, wordt een bewaker in de controlekamer automatisch gewaarschuwd dat er mogelijk iets aan de hand is. De bewaker heeft zich zojuist gemeld bij het vijfde kastje.

- a Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de volgende melding langer dan 5,0 minuten uitblijft.
- b Veronderstel dat de lengtes van de 16 tijdsintervallen bij een ronde door het gebouw onder normale omstandigheden onafhankelijk van elkaar zijn. Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de totale tijd van een ronde door het gebouw langer is dan 60,0 minuten.

Tijdens zo'n ronde kijkt de bewaker wel enige keren in de gang naar de kluis, maar hij gaat er niet in. In de gang naar de kluis is namelijk een alarminstallatie aangebracht die in directe verbinding staat met de meldkamer op het hoofdbureau van de politie. In het plafond zijn (onzichtbaar) vijf roterende sensoren aangebracht. 's Nachts gaat het alarm automatisch af zodra minstens één van deze sensoren geactiveerd wordt. De sensoren werken geheel onafhankelijk van elkaar. Voor elke sensor afzonderlijk geldt dat de kans op alarm (de detectiekans) in het geval dat iemand 's nachts de sensor passeert, gelijk is aan 0,45.

- c Toon met een berekening aan dat de kans dat het alarm bij de politie afgaat als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, ongeveer gelijk is aan 95%.

De directie vindt deze kans te klein. Zij wil de sensorinstallatie zo laten verbeteren dat de kans op alarm als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, groter is dan 99,5%. Volgens de chef van de beveiliging kan dit op twee manieren bereikt worden:

- Het aantal sensoren met een detectiekans van 0,45 wordt uitgebreid; per bij te plaatsen sensor kost dit € 8000,00.
 - Een aantal van de aanwezige sensoren wordt omgeruild tegen een nieuw type met een detectiekans van 0,80; per in te ruilen sensor kost dit € 9000,00.
- d Bereken hoeveel men minimaal moet uitgeven om de sensorinstallatie zodanig te verbeteren dat aan de wens van de directie wordt voldaan.

(bron: examen wiskunde A vwo 1991, tweede tijdvak)

Opgave 12: Lengte van vrouwen

In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceert. Deze fabriek nam alleen personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm. De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen omdat ze niet aan deze eis voldeden. De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van deze aanstellingsvoorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van volksgezondheid. Neem aan dat de lengte van de Amerikaanse vrouwen in de betreffende leeftijdsgroep normaal verdeeld is met een gemiddelde μ en standaarddeviatie σ .

- a Stel, uitgaande van het genoemde percentage, een verband op tussen μ en σ .
Neem aan dat $\mu = 160,4$ cm.
- b Toon aan dat $\sigma \approx 7,2$ cm.

Stel je voor dat de groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 cm V wordt genoemd. Voor de mediaan (m) van de lengte van de vrouwen van V geldt dat 50% van de vrouwen uit V langer is dan m .

- c Toon aan dat $m \approx 172,6$, uitgaande van $\mu = 160,4$ cm en $\sigma = 7,2$ cm.

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91% sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte van volwassenen was volgens hem in de periode 1948-1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselekt gekozen groep van 10.000 vrouwen in de leeftijd 18 tot 65 jaar werden 1243 vrouwen aangetroffen met een lengte van meer dan 172,6 cm.

- d Als je aanneemt dat de standaardafwijking niet is veranderd, wat is dan de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens dit recente onderzoek?

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk wel was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen. Stel dat voor 1972 gold: $\mu = 164,0$ cm en $\sigma = 7,2$ cm.

- e Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.

(bron: examen wiskunde A vwo 1990, eerste tijdvak)

b

bovengrens **84**

d

directe formule **23**

k

kansvariabelen, som van **69**

kansvariabelen, verschil van
69

kansverdeling **47**

n

normaalkromme **48**

normaal-waarschijnlijkheidspapier **84**

normale kansvariabele **57**

normale statistische variabele
57

normale verdeling **57**

o

onafhankelijk **69**

r

recursieformule **16**

reden, groeifactor **23**

rij **9**

rij met een exponentieel verband **9**

rij met een lineair verband **9**

t

termen **9**

v

verdeling, normale **48**

w

wortel-n-wet **76**

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

9. Rijen

10. Kansmodellen



www.math4all.nl

