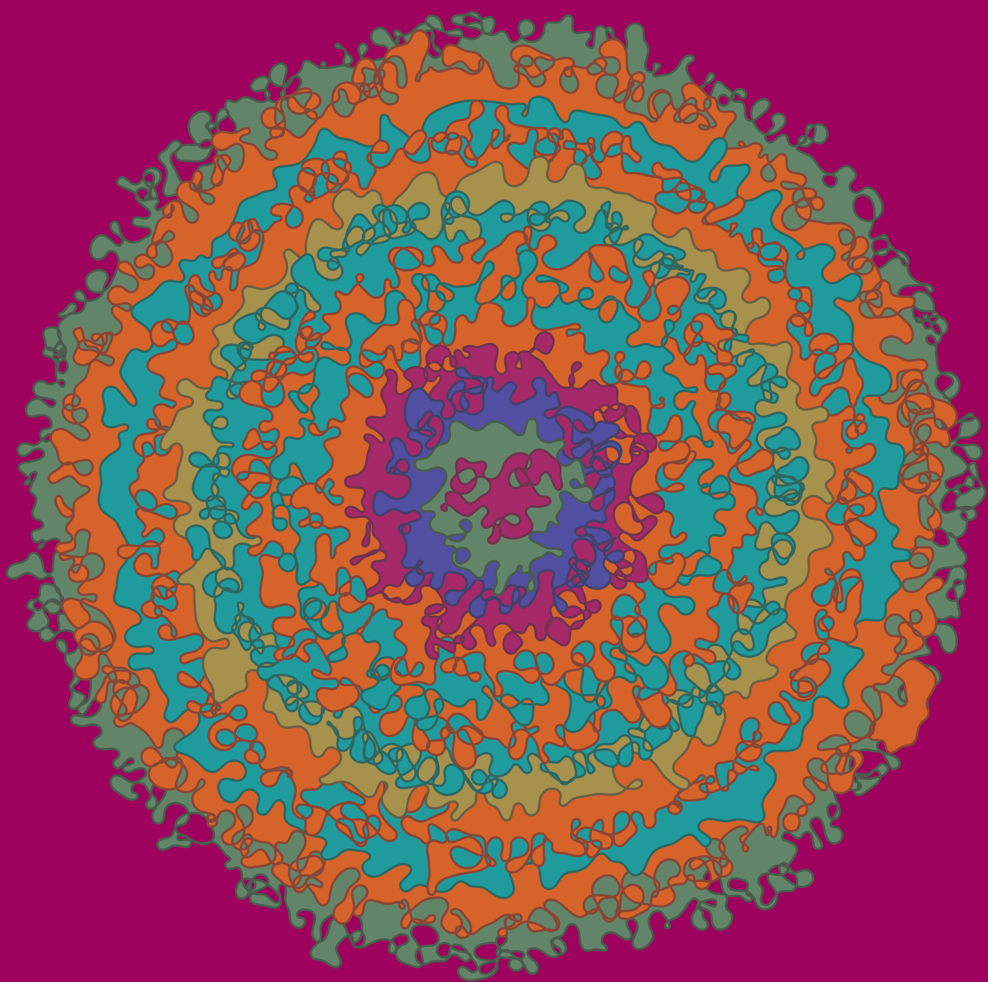
Wiskunde B

5 VWO

Katern 3

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Integraalrekening

1.1 De integraal

Inleiding

Een waterleidingmaatschappij zorgt voor veilig drinkwater. Ze slaan dit op in grote spaarbekkens. Er stroomt vrijwel voortdurend water in en ook wordt er voortdurend water aan onttrokken. Het verschil tussen *instroom* en *uitstroom* is de *stroom* in m^3/uur en afhankelijk van de tijd t in uren.
Je kunt van die stroom een grafiek maken en daarmee bepalen hoeveel water er aan het einde van een dag (ongeveer) in het spaarbekken is bijgekomen of afgegaan.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de integraal van een functie bepalen;
- de begrippen Riemann-som, ondersom en bovensom en deze berekenen.

Voorkennis

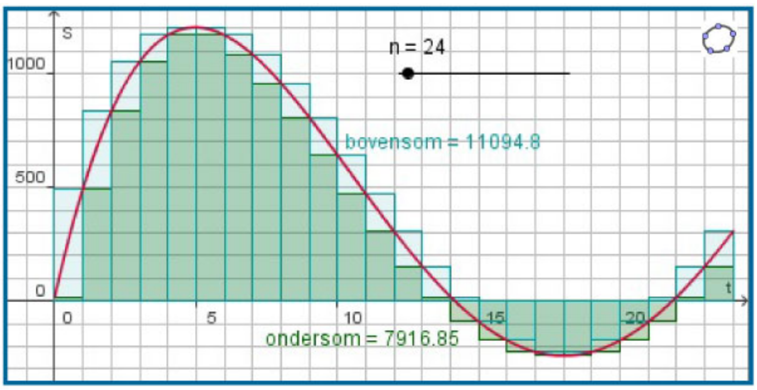
- werken met alle basisfuncties.

Verkennen

Opgave V1

In een groot spaarbekken stroomt vrijwel voortdurend water in en ook water uit. Het verschil tussen *instroom* en *uitstroom* is de *stroom* in m^3/uur, dus afhankelijk van de tijd t in uren.
Je kunt van die stroom een grafiek maken en daarmee bepalen hoeveel water er aan het einde van een dag (ongeveer) in het spaarbekken is bijgekomen of afgegaan.
Je kunt bijvoorbeeld elk uur een ondergrens en een bovengrens van de hoeveelheid *stroom* vaststellen. Positieve waarden betekenen dat er meer instroom dan uitstroom is, bij negatieve waarden is dat andersom. De bovensom is het totaal van de bovengrenzen per uur, de ondersom dat van de ondergrenzen per uur.

Bekijk de applet: Stroom in een spaarbekken



Figuur 1.2

a Hoeveel schat je dat er die dag aan m^3 water is bijgekomen?

b Hoe kun je de schatting verbeteren?

Uitleg

Bekijk de applet: Stroom in een spaarbekken

Gebruik de figuur bij **Verkennen V1**.

In een groot spaarbekken stroomt vrijwel voortdurend water in en ook water uit. Het verschil tussen *instroom* en *uitstroom* is de *stroom* in m^3/uur, dus afhankelijk van de tijd t in uren.
Je kunt van die stroom een grafiek maken en daarmee bepalen hoeveel water er aan het einde van een dag (ongeveer) in het spaarbekken is bijgekomen of afgegaan.
Je kunt bijvoorbeeld elk uur een ondergrens en een bovengrens van de hoeveelheid *stroom* vaststellen. Positieve waarden betekenen dat er meer instroom dan uitstroom is, bij negatieve waarden is dat andersom. De bovensom is het totaal van de bovengrenzen per uur, de ondersom dat van de ondergrenzen per uur.

Bekijk de grafiek van de *stroom*, het verschil tussen instroom en uitstroom, in een spaarbekken. De hoeveelheid die deze dag erbij is gekomen ligt in tussen bovensom en ondersom.

Door de tijdseenheid Δt te verkleinen, kun je bovensom en ondersom nauwkeuriger vaststellen. Ze komen dan dichter bij elkaar te liggen en je schatting wordt beter.
De ondersom is het totaal van $S_{\text{min}\,(t)} \cdot \Delta t$ waarin S_{min} steeds het minimum van S op elk deelinterval is.
De bovensom is het totaal van $S_{\text{max}\,(t)} \cdot \Delta t$.
De integraal van S is het getal waar bovensom en ondersom beide naar naderen.

Dit veronderstelt wel dat ze inderdaad naar hetzelfde getal naderen, een belangrijke voorwaarde voor het bestaan van de integraal.
Verdeel je het interval $[0,24]$ in n gelijke deelintervallen, dan is de ondersom het totaal van
$S_{\text{min}\,(t_1)} \cdot \Delta t + S_{\text{min}\,(t_2)} \cdot \Delta t + \ldots + S_{\text{min}\,(t_n)} \cdot \Delta t$.

Dit schrijf je korter als $\underline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} S_{\text{min}\,(t_k)} \cdot \Delta t$.

En zo is de bovensom in formulevorm $\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} S_{\text{max}\,(t_k)} \cdot \Delta t$.

Als $\lim_{n \to \infty} \left(\overline{S_n} - \underline{S_n}\right) = 0$ dan bestaat de integraal. Hij wordt aangeduid als $\int_0^{24} S(t)\,dt$.

Ondersommen en bovensommen zijn met de grafische rekenmachine te bepalen.
De grafische rekenmachine kan echter ook rechtstreeks een integraal voor je benaderen.
In beide gevallen heb je dan een functievoorschrift voor S nodig.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de toename en de afname per uur van de hoeveelheid water in een spaarbekken beschreven. Er is een grafiek getekend die iets te maken heeft met de hoeveelheid water in het bekken.

a Wat stelt deze grafiek precies voor?

b Hoe kun je de totale hoeveelheid bijgekomen water aan het einde van deze dag berekenen?

c Voer die berekening uit op basis van intervallen van 1 uur.

d Voer die berekening nog eens uit op basis van intervallen van $0{,}5$ uur.

Opgave 2

De hoeveelheid water H in het spaarbekken op $t = 0$ was $H(0) = 10000$ m^3. Je hebt aan het eind van de voorgaande opgave een schatting gemaakt van $H(24) - H(0)$.

a Leg uit dat je hebt berekend: $H(24) - H(0)$.

b De grafiek is in drie delen te verdelen: twee delen waarbij *stroom* positief is en een deel waarbij *stroom* negatief is. Welk verband bestaat er tussen de schatting bij a en de oppervlakte van deze drie delen van de grafiek en de t-as?

Opgave 3

De variabele *stroom* wordt voorgesteld door de functie $f(t)$.

a Neem een tijdsinterval van $0{,}25$ uur. Bepaal de ondersom van $f(t)$ op het interval $[0{,}24]$.

b Bepaal vervolgens de bovensom van $f(t)$ op ditzelfde interval.

c Welke waarde schat je nu voor de integraal van $f(t)$ over dit interval?

d Wat stelt je antwoord bij c voor?

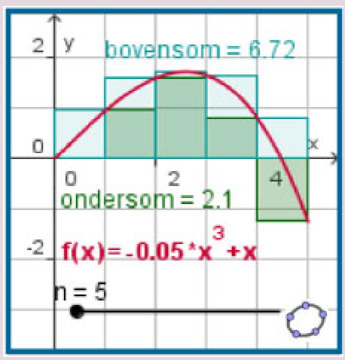
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Onder de **integraal** van een functie f op het interval $[a,b]$ versta je de som van alle waarden van $f(x_k) \cdot \Delta x$ op dit interval als Δx naar 0 nadert. Zo'n integraal benader je zo:

- Verdeel het interval $[a,b]$ in n(gelijke) deelintervallen met breedte Δx. Bij elk deelinterval maak je een rechthoek met breedte Δx en als hoogte de kleinste functiewaarde op dat deelinterval én een rechthoek met breedte Δx en als hoogte de grootste functiewaarde op dat deelinterval.
- De **ondersom** is $f_{\min(x_1)} \cdot \Delta x + f_{\min(x_2)} \cdot \Delta x + \ldots + f_{\min(x_n)} \cdot \Delta x$, wat je kortweg schrijft als $\underline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} f_{\min}(x_k) \cdot \Delta x$.



Figuur 1.3

- De **bovensom** is $f_{\max(x_1)} \cdot \Delta x + f_{\max(x_2)} \cdot \Delta x + ... + f_{\max(x_n)} \cdot \Delta x$,

  wat je kortweg schrijft als $\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} f_{\max}(x_k) \cdot \Delta x$.

Als $\lim_{n \to \infty} \left(\overline{S_n} - \underline{S_n}\right) = 0$ dan bestaat de integraal. Hij wordt aangeduid als $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

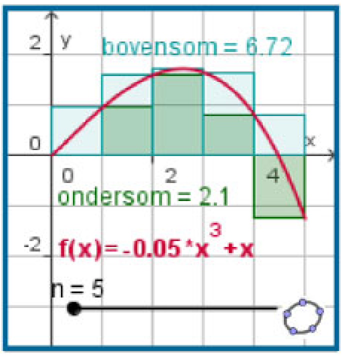
De ondersom en de bovensom noem je **Riemannsommen** en het bepalen ervan is een lastige bezigheid. De grafische rekenmachine kan ook rechtstreeks de integraal voor je benaderen. Zie het **Practicum**.

Voorbeeld 1

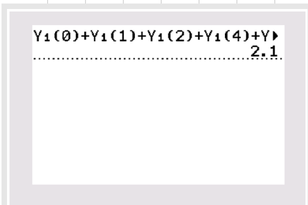
Bekijk de applet

Je ziet hier de grafiek van de functie f met $f(x) = -0{,}05x^3 + x$ op het interval [0,5].
Benader met de grafische rekenmachine de bovensom en de ondersom die in de figuur zijn aangegeven.

Benader ook de integraal $\int_0^5 f(x) \cdot dx$.



Figuur 1.4



Figuur 1.5

Antwoord

Met $n = 5$ deelintervallen van lengte 1 wordt de ondersom:
$\underline{S_5} = 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(4) + 1 \cdot f(5)$.

Voor de bovensom heb je op het derde deelinterval het maximum van f op dat interval nodig. Met je GR (of met behulp van differentiëren) vind je max.$f(2{,}58) \approx 1{,}72$. De bovensom wordt:
$\overline{S_5} \approx 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(2{,}58) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4)$.
Ga zelf na, dat je de waarden uit de figuur vindt.

De integraal kun je gemakkelijk met je GR benaderen.
Uiteraard vind je een waarde tussen ondersom en bovensom in.
Als je n verhoogt gaan onder- en bovensom de integraal benaderen.

Opgave 4

Bekijk in de **Theorie** wat de integraal van een functie over een bepaald interval voorstelt en bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je in een bepaald geval zo'n integraal benadert met behulp van Riemann-sommen.

a Controleer eerst of je ook inderdaad de in de figuur gegeven Riemann-sommen krijgt.

b Verdeel het gegeven interval in 10 gelijke deelintervallen. Bereken de ondersom en de bovensom en geef een benadering van de integraal.

c Benader de integraal met je grafische rekenmachine, bestudeer eventueel eerst het **Practicum**.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = 2x$ op het interval $[0{,}5]$.

a Teken de grafiek van de functie. Verdeel het interval $[0{,}5]$ in vijf gelijke delen en bepaal de onder- en de bovensom.

b Geef met behulp van je antwoorden bij a een schatting van de integraal van f op het interval $[0{,}5]$.

c Verdeel het interval $[0{,}5]$ in tien gelijke deelintervallen en bereken de onder- en bovensom. Geef een nauwkeuriger schatting van de integraal van f op $[0{,}5]$.

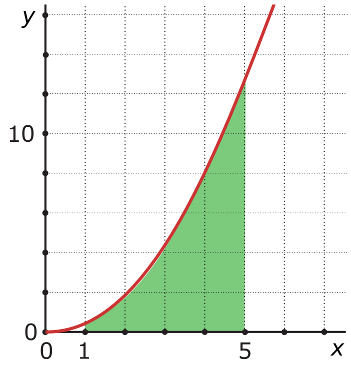
d Bereken zonder gebruik te maken van onder- en bovensommen de bedoelde integraal. Gebruik daarbij wat meetkundige kennis.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = 0{,}5x^2$.

Omdat op $[1{,}5]$ geldt dat $f(x) \geq 0$, is de integraal $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ de oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van f de x-as en de twee lijnen $x = 1$ en $x = 5$.
Bereken de oppervlakte van V in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 1.6

Antwoord

Dit gaat rechtstreeks met de grafische rekenmachine.

Figuur 1.7

De oppervlakte van V is:

$\text{opp}(V) = \int_1^5 0{,}5x^2\,\mathrm{d}x \approx 20{,}67$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt een integraal met de grafische rekenmachine benaderd.

a Verdeel het interval $[1{,}5]$ in acht gelijke delen en bereken de onder- en de bovensom.

b Ga na, dat de waarde die de rekenmachine voor de integraal van f op het interval $[1{,}5]$ vindt tussen de ondersom en de bovensom in ligt.

c Bekijk de gegeven functie op het interval $[0{,}2]$. Bepaal met je grafische rekenmachine de integraal van f over dat interval.

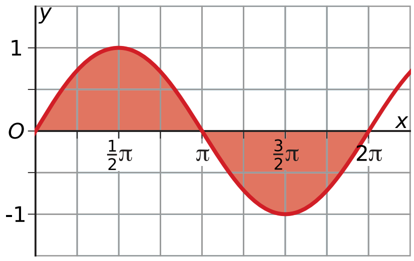
d Verdeel het interval $[0{,}2]$ in n gelijke deelintervallen. Stel een formule op voor de ondersom op dat interval.

e Gebruik de formule $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ en toon daarmee aan dat de ondersom gelijk is aan $\underline{S} = \frac{2(n-1)(2n-1)}{3n^2}$.

f Bepaal met behulp van de gevonden formule voor de ondersom de exacte waarde van de integraal van f over het interval $[0,2]$.

Voorbeeld 3

Je ziet hier de grafiek van de functie f met $f(x) = \sin(x)$ op $[0,2\pi]$. Bereken $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ en bereken de oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van f en de x-as.



Figuur 1.8

Antwoord

Met je grafische rekenmachine vind je meteen: $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Dat ligt ook voor de hand, want de standaard sinusfunctie heeft op $[\pi,2\pi]$ dezelfde functiewaarden als op $[0,\pi]$, alleen zijn ze op $[\pi,2\pi]$ negatief en op $[0,\pi]$ positief.

Wil je de gevraagde oppervlakte weten, dan moet je $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$ en $\int_{\pi}^{2\pi} -\sin(x)\,\mathrm{d}x$ optellen.

Maar je kunt sneller $2 \cdot \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ berekenen.
Je ziet dat de gevraagde oppervlakte 4 is.

Opgave 7

Het verschil tussen een integraal en de oppervlakte ingesloten door de grafiek van een functie en de x-as wordt in **Voorbeeld 3** besproken.

a Controleer zelf met je grafische rekenmachine dat $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

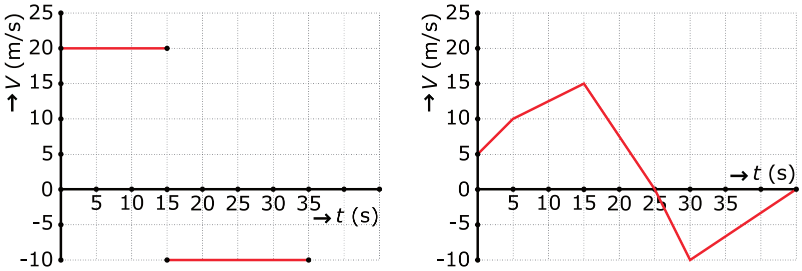
b Ga ook na dat $\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

c Hoeveel is dus $\int_0^{0{,}5\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$?

d Hoe groot is de oppervlakte ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sin(x)$, de x-as en de lijn $x = 1{,}5\pi$?

Opgave 8

De linker grafiek geeft de snelheid weer van een voorwerp dat langs een rechte weg voortbeweegt.



Figuur 1.9

a Welke betekenis heeft het feit dat de snelheid na 15 seconden negatief is geworden?

b Hoe ver is het voorwerp na 35 seconden van zijn beginpunt verwijderd?

Een ander voorwerp beweegt langs dezelfde rechte weg. De snelheid ervan verandert echter voortdurend volgens de rechter grafiek.

c Leg uit, waarom de totale afgelegde afstand vanaf $t = 0$ de integraal van de functie $v(t)$ is.

d Geef een zo goed mogelijke schatting van de totale afgelegde afstand.

Verwerken

Opgave 9

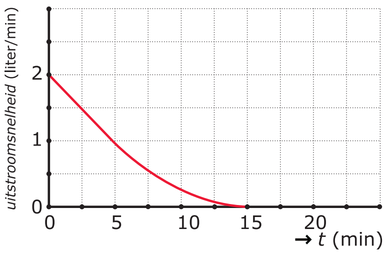
Uit een vat stroomt aan de onderkant olie. In het begin is de uitstroomsnelheid het grootst omdat dan de oliedruk op de bodem het grootst is. In de grafiek zie je hoe de uitstroomsnelheid varieert. In de eerste vijf minuten neemt de snelheid bij benadering lineair af.

a Welke betekenis heeft de oppervlakte onder deze grafiek?

b Hoeveel olie is er tijdens de eerste vijf minuten uit het vat gestroomd?

c Schat de totale uitgestroomde hoeveelheid olie. Verdeel daarvoor het interval $[5,15]$ in vier gelijke delen.

d Op welk tijdstip is er 4 liter uit het vat gestroomd?



Figuur 1.10

Opgave 10

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ op het interval $[0,9]$.

a Verdeel het interval $[1,9]$ in vier gelijke deelintervallen, en bepaal de onder- en bovensom bij deze verdeling. Geef hiermee een schatting van de oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as op het interval $[1,9]$.

b Verdeel het interval $[1,9]$ in acht gelijke intervallen en bepaal de onder- en de bovensom bij deze verdeling. Pas hiermee je schatting van de oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as op het interval $[1,9]$ aan.

Opgave 11

Bereken (alleen waar nodig met je grafische rekenmachine) de volgende integralen:

a $\int_2^5 (1 + x)\,\mathrm{d}x$

b $\int_2^5 (1 + x)^2\,\mathrm{d}x$

c $\int_{1,5}^2 \pi \cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$

d $\int_{-2}^2 1\,\mathrm{d}x$

e $\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x$

f $\int_3^5 \sqrt{2x - 6}\,\mathrm{d}x$

Opgave 12

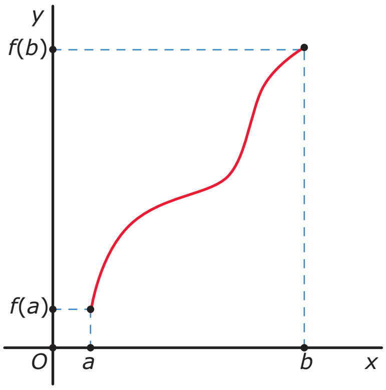
Gegeven is de functie f door $f(x) = x^2 - 8x$.

a Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as op het interval $[2,6]$.

b Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as op het interval $[6,10]$.

Opgave 13

Als een functie f overal stijgend of overal dalend is op een interval dan bestaat er een formule waarmee je het verschil tussen onder- en bovensom kunt bepalen. Die formule bepaalt de nauwkeurigheid van de benadering. Teken een stijgende functie op een interval $[a,b]$ zoals hiernaast.



Figuur 1.11

a Verdeel $[a,b]$ in vier gelijke delen en teken in de grafiek de rechthoeken die horen bij de ondersom en de rechthoeken die bij de bovensom horen.

Je kunt het interval $[a,b]$ in n gelijke deelintervallen verdelen. Altijd is het verschil tussen de onder- en de bovensom gelijk aan het verschil in oppervlakte van twee rechthoeken.

b Welke rechthoeken zijn dat en hoe groot is dat verschil bij $n = 4$?

c Hoe groot is het verschil tussen onder- en bovensom bij een benadering met 10 rechthoeken? En bij n rechthoeken?

Een voorbeeld van een stijgende functie is de sinusfunctie op het interval $\left[0,\frac{1}{2}\pi\right]$.

d Voor welke waarde van n is het verschil tussen onder- en bovensom kleiner dan $0{,}0001$?

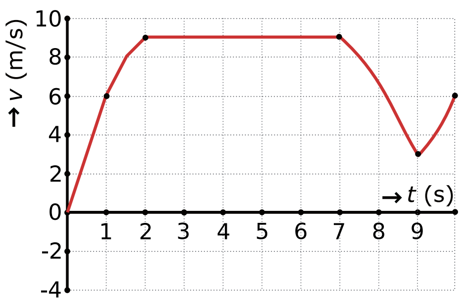
Toepassen

Opgave 14: Hardloper

Wanneer een hardloper met een constante snelheid rent, dan kun je de afgelegde afstand gemakkelijk berekenen. Je vermenigvuldigt de snelheid van de hardloper met de tijd waarin hij hardgelopen heeft.

In werkelijkheid rent een hardloper vaak niet met een constante snelheid. Hij zal bij de start eerst moeten versnellen totdat hij zijn gewenste snelheid heeft. Vroeger of later zal hij weer vertragen omdat hij moe wordt of een obstakel op zijn weg tegenkomt om misschien daarna weer te versnellen enzovoorts.

Bekijk de volgende snelheid-tijd-grafiek.



Figuur 1.12

a Hoe kun je de afgelegde afstand op het interval $[0{,}10]$ s berekenen?

b Verdeel de oppervlakte onder de snelheid-tijd grafiek op de intervallen $[0{,}2]$ en $[7{,}10]$ in kolommen met een breedte van 1 s. Om de oppervlakte van zo'n kolom te bepalen en daarmee een zo nauwkeurig mogelijke schatting te krijgen van de afgelegde weg in dat deelinterval, kun je kiezen uit verschillende snelheden die de hoogte voor de kolom bepalen.

Geef bij elke optie commentaar.

1. De laagste snelheid die je in dat interval afleest.
2. De hoogste snelheid die je in dat interval afleest.
3. De snelheid die je halverwege dat interval afleest.
4. De gemiddelde snelheid die je in dat interval afleest.

c Bepaal nu de totaal afgelegde weg van de hardloper op het interval $[0{,}10]$ als je per interval de laagste snelheid kiest om de oppervlakte van die kolom te berekenen.

Dit heet de ondersom van de afgelegde weg voor $\Delta t = 1$ s.

d Bepaal vervolgens de totaal afgelegde weg van de hardloper op het interval $[0{,}10]$ als je per interval de hoogste snelheid kiest om de oppervlakte van die kolom te berekenen.

Dit heet de bovensom van de afgelegde weg voor $\Delta t = 1$ s.

e De werkelijke afstand die de hardloper heeft afgelegd ligt tussen de waarden van de onder- en bovensom. Hoe kun je de werkelijk afgelegde afstand beter benaderen?

f Een redelijk goede benadering krijg je door de punten op de grafiek door lijnstukken te verbinden en dan de oppervlakte daaronder te berekenen.

Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie f door $f(x) = 4 - x^2$ op het interval $[-4{,}4]$.

a Verdeel dit interval in 8 gelijke deelintervallen en bereken de onder- en de bovensom van de functie.

b Bereken de integraal met behulp van je grafische rekenmachine en laat zien dat dit getal tussen de onder en de bovensom in ligt.

c Bereken de oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as op het gegeven interval.

Opgave 16

Gegeven is de derdegraads functie $f(x) = x^3$ met domein $[0{,}2]$.

a Verdeel het interval $[0{,}2]$ in vier gelijke delen en bepaal de ondersom en de bovensom van f op dit interval.

b Je kunt het interval ook in n gelijke deelintervallen verdelen. Laat zien dat dan de ondersom gelijk is aan: $\frac{16}{n^4} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^3$.

c Laat zien dat het verschil tussen boven- en ondersom gelijk is aan $\frac{16}{n}$.

d Hoe groot moet je n kiezen om zeker te weten dat de eerste drie decimalen van de integraal correct zijn?

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de grafische rekenmachine kun je integralen berekenen, bovensommen en ondersommen benaderen, en dergelijke. In dit practicum zie je hoe dat in zijn werk gaat.

- **Integralen met de TI84**
- **Integralen met de TInspire**
- **Integralen met de Casio fx-CG50**
- **Integralen met de HP-prime**
- **Integralen met de NumWorks**

1.2 Primitieven

Inleiding

Isaac Newton ontdekte al dat je integralen exact kunt berekenen door gebruik te maken van ‘omgekeerd differentiëren’. Later werd de hoofdstelling van de integraalrekening bewezen: je kunt de integraal van f op $[a,b]$ berekenen vanuit het functievoorschrift $f(x)$ door daarbij een functievoorschrift $F(x)$ te zoeken zo, dat $F'(x) = f(x)$ en dan $F(b) - F(a)$ uit te rekenen. Deze functie F noem je een primitieve van f.
Dit wordt in dit onderdeel aannemelijk gemaakt en vervolgens ga je het toepassen...

Je leert in dit onderwerp

- het begrip primitieve van een functie en primitieven van functies bepalen;
- integralen berekenen met behulp van primitiveren.

Voorkennis

- functies differentiëren;
- integralen bepalen met behulp van je grafische rekenmachine.

Verkennen

Opgave V1

De primitieve functie F van een functie f met voorschrift $f(x)$ heeft een functievoorschrift $F(x)$ zo, dat $F'(x) = f(x)$.
Je kunt zo'n primitieve vinden door ‘omgekeerd te differentiëren’.
Daarna controleer je door differentiëren of hij goed is.

a Laat zien dat $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ een primitieve is van de functie $f(x) = x^2$.

b Laat zien dat elke functie $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ een primitieve is van de functie $f(x) = x^2$.

c Welke functies zijn primitieven van $f(x) = x^5$?

d Welke functies zijn primitieven van $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x$?

Uitleg

Bekijk de applet

Je ziet hier de grafiek van de functie f met $f(t) = 0{,}5t^2$.
Op $[1,x]$ is de integraal van f gelijk aan $\int_1^x 0{,}5t^2 \, \mathrm{d}t$.
Deze integraal is een functie van x en wordt voorgesteld door $F(x)$.
Laat je x een heel klein beetje toenemen naar $x+h$, dan neemt $F(x)$ toe met: $F(x+h) - F(x) \approx f(x) \cdot h$.

Hieruit volgt: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x)$.

Laat je vervolgens h naar 0 naderen, dan vind je:

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$ en dus $F'(x) = f(x)$.

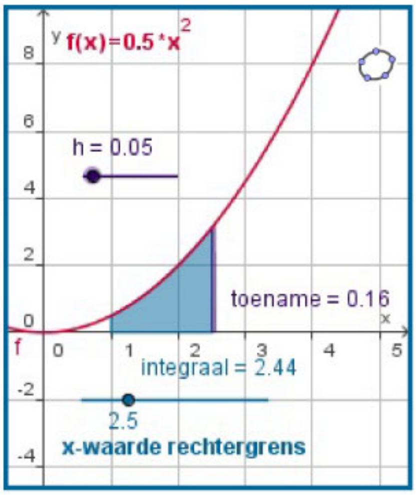
Je moet kennelijk de integraal $F(x)$ vinden vanuit zijn afgeleide $f(x) = 0{,}5x^2$. Dit betekent: terugrekenen vanuit een afgeleide.
Dat noem je **primitiveren** en de functie die je vindt heet een primitieve functie van f.

Ga na, dat $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + c$ voldoet.

Hierin is c een willekeurige constante. Een functie heeft namelijk niet één primitieve, maar een hele verzameling: een constante bijtellen verandert de afgeleide niet!

Maar omdat hier geldt $F(1) = 0$ moet $c = -\frac{1}{6}$, dus

$\int_1^x 0{,}5t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6} = F(x) - F(1)$.
Kies een waarde voor x en je kunt de integraal berekenen.



Figuur 2.1

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt verteld hoe je een integraal exact kunt berekenen door primitiveren.

a Wat is primitiveren precies?

b Leg uit waarom $F(x) = \frac{1}{6}x^3$ een primitieve is van $f(x) = 0{,}5x^2$.

c Noem nog minstens twee andere primitieve functies van f.

d Waarom is $\int_1^x 0{,}5x^2 \, \mathrm{d}x = F(x) - F(1)$?

e Bereken nu $\int_1^4 0{,}5x^2 \, \mathrm{d}x$.

f Bereken ook $\int_2^4 0{,}5x^2 \, \mathrm{d}x$.

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = 15x^4$.

a Wat stelt $\int_{-1}^x f(t) \, \mathrm{d}t$ voor?

b Toon aan dat $F'(x) = f(x)$.

c Bepaal nu zelf de juiste primitieve functie F van f.

d Wat stelt $F(2)$ voor? Bereken $F(2)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

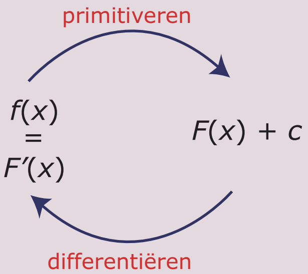
Integralen kun je in veel gevallen exact berekenen.
Daarbij maak je gebruik van de stelling:
$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$ waarbij F een functie is waarvoor geldt: $F'(x) = f(x)$.

Je vindt $F(x)$ vanuit zijn afgeleide $f(x)$. Dit betekent: terugrekenen vanuit een afgeleide. Dat noem je **primitiveren** en de functie die je vindt heet een **primitieve functie** van f. De functie f zelf heet de **integrand**.

Het vinden van primitieve functies is vaak nog niet zo eenvoudig. Met behulp van differentiëren kun je laten zien:

- Als $f(x) = x^r$ dan is $F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ voor elke reële waarde $r \neq$ -1.
- De primitieve functies van $k \cdot f(x)$ zijn $k \cdot F(x) + c$.
- De primitieve functies van $f(kx)$ zijn $\frac{1}{k} \cdot F(kx) + c$
- De primitieve functies van $f(x+k)$ zijn $F(x+k) + c$
- De primitieve functies van $f(x) + k$ zijn $F(x) + k + c$
- De primitieve functies van $f(x) + g(x)$ zijn $F(x) + G(x) + c$

Hierin is telkens c de **integratieconstante**. Elke functie f heeft oneindig veel primitieven die alleen een constante verschillen.



Figuur 2.2

Voorbeeld 1

Bepaal de primitieven van deze functies.

- $f(x) = x^4$
- $f(x) = 3x^4$
- $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 2$
- $f(x) = (3x+1)^5$
- $f(x) = \frac{2}{5x^3} = \frac{2}{5}x^{-3}$
- $f(x) = 3x\sqrt{2x}$

Antwoord

- $f(x) = x^4$ dus $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + c$
- $f(x) = 3x^4$ dus $F(x) = \frac{3}{5}x^5 + c$
- $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 2$
  dus $F(x) = 0{,}5 \cdot \frac{1}{5}x^5 - 4 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 2x + c = 0{,}1x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 2x + c$
- $f(x) = (3x+1)^5$ dus $F(x) = \frac{1}{6}(3x+1)^6 \cdot \frac{1}{3} + c = \frac{1}{18}(3x+1)^6 + c$
- $f(x) = \frac{2}{5x^3} = \frac{2}{5}x^{-3}$ dus $F(x) = -\frac{1}{5}x^{-2} + c = -\frac{1}{5x^2} + c$
- $f(x) = 3x\sqrt{2x} = 3\sqrt{2} \cdot x^{1{,}5}$ dus $F(x) = 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2{,}5}x^{2{,}5} + c = 1{,}2x^2\sqrt{2x} + c$

Opgave 3

Bekijk in de **Theorie** wat je onder een primitieve verstaat en welke regels je kunt toepassen om ze te bepalen.

a Controleer de juistheid van elke regel door differentiëren.

b In **Voorbeeld 1** worden verschillende primitieven bepaald. Probeer steeds eerst zelf de primitieve te vinden.

c Controleer alle primitieven door differentiëren.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$ op het interval $[0,5]$.

a Wat stelt $F(x) = \int_0^x f(t)\,\text{d}\,t$ voor?

b Waarom is F een primitieve van f?

c Bepaal alle mogelijke functies F met behulp van de machtsregel voor primitiveren.

d Bereken nu exact $\int_0^9 \sqrt{x}\,\text{d}\,x$.

Opgave 5

Het berekenen van de primitieven van een functie wordt ook wel 'onbepaald integreren' genoemd. Je noteert dit met een integraalteken zonder grenzen. Bepaal:

a $\int 3x^2 - 4x + 1\,\text{d}\,x$

b $\int \sqrt[3]{x}\,\text{d}\,x$

c $\int \frac{2}{x^2}\,\text{d}\,x$

d $\int \sqrt{3x}\,\text{d}\,x$

e $\int (4x-1)^2\,\text{d}\,x$

f $\int \frac{x^2-4}{x^2}\,\text{d}\,x$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie f door $f(x) = \frac{x^4-16}{2x^2}$.

Deze functie heeft een primitieve waarvan de grafiek door het punt $P(1,5)$ gaat.

Stel het functievoorschrift van die primitieve op.

Antwoord

Door uitdelen vind je: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8x^{-2}$.

Dus is $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 - 8 \cdot \frac{1}{-1}x^{-1} + c = \frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{x} + c$.

Dit is een hele verzameling primitieven. Je zoekt de primitieve die door $P(1,5)$ gaat. Voor die primitieve moet dus gelden $F(1) = 5$. Dit betekent: $\frac{1}{6} + 8 + c = 5$ en dus $c = -3\frac{1}{6}$.

De gevraagde primitieve is $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{x} - 3\frac{1}{6}$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt een primitieve berekend die aan een bepaalde randvoorwaarde voldoet.

a Bereken de primitieve F van $f(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$ waarvoor geldt $F(1) = 2$.

b Bereken de primitieve F van $f(x) = \frac{3x-4}{x^3}$ waarvoor geldt $F(1) = 2$.

c Bereken de primitieve F van $f(x) = (4x-2)^3$ waarvoor geldt $F(0) = 1$.

d Bereken de primitieve F van $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$ waarvoor geldt $F(2) = 0$.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie f door $f(x) = \frac{(x-2)(x-9)}{\sqrt{x}}$.

V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as. Bereken de oppervlakte van dit vlakdeel met behulp van primitieven in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Eerst de functie herschrijven:

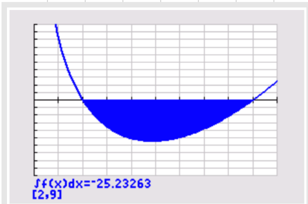
$f(x) = \frac{x^2-11x+18}{x^{0,5}} = x^{1,5} - 11x^{0,5} + 18x^{-0,5}$.

De primitieve van f is:

$F(x) = \frac{1}{2,5}x^{2,5} - \frac{11}{1,5}x^{1,5} + \frac{18}{0,5}x^{0,5} + c = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{22}{3}x\sqrt{x} + 36\sqrt{x} + c$.

Kijkend naar de grafiek van f constateer je dat het gaat om de integraal van f op het interval $[2,9]$. Alleen zijn dan alle functiewaarden negatief en daarom de uitkomst ook.

De gevraagde oppervlakte is $\int_2^9 -f(x)\,\mathrm{d}x = -F(9) - -F(2) \approx 25{,}23$.



Figuur 2.3

Opgave 7

Bestudeer **Voorbeeld 3**.

a Ga na dat de primitieven F van de gegeven functie f juist zijn.

b Je moet nu $\int_2^9 -f(x)\,\mathrm{d}x$ berekenen. Bepaal de functie G waarvoor $G(x) = -F(x)$ waarvoor geldt $G(2) = 0$.

c Bereken met behulp van het antwoord van b de gewenste integraal.

d Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - x^2$ op het interval $[-4,4]$.

a Bepaal de primitieve F van f waarvoor geldt $F(-4) = 0$.

b Bereken met behulp van de primitieve die je bij a hebt gevonden de integraal van f op het gegeven interval.

c Is deze integraal gelijk aan de oppervlakte van de gebieden ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = -4$ en $x = 4$? Licht je antwoord toe.

Verwerken

Opgave 9

Voor $x \geq 0$ is gegeven de functie $F(x) = \int_0^x \left(t^3 - 4t\right) \mathrm{d}\,t$.

a Welke betekenis heeft de functiewaarde $F(2)$? Bereken $F(2)$ exact.

b Bereken de extremen van F.

c Voor welke x geldt $F''(x) = 0$?

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van F voor die waarde van x.

Opgave 10

Bereken de primitieven van f.

a $f(x) = (3x - 2)^4$

b $f(x) = x\left(1 + x^2\right)$

c $f(x) = \left(1 + x^2\right)^2$

d $f(x) = \frac{4}{(2x+1)^2}$

Opgave 11

Bekijk de voorgaande opgave. Bepaal in elk van de gevallen de primitieve functie F waarvoor $F(0) = 1$.

Opgave 12

Bereken de volgende onbepaalde integralen:

a $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\,x$

b $\int (3x - 2)^{11} \mathrm{d}\,x$

c $\int \left(x^2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\right) \mathrm{d}\,x$

d $\int 3(3x + 5)^4 \mathrm{d}\,x$

Opgave 13

Gegeven is de functie f met $f(x) = 6x - 3x^2$.
Je wilt de oppervlakte uitrekenen van het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

a Om welke integraal gaat het dan?

b $F(x) = \int_0^x f(t) \mathrm{d}\,t$. Stel een voorschrift op voor F.

c Bereken met behulp van F de gewenste oppervlakte.

d Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

Toepassen

Opgave 14: Eenparig versnelde beweging

Een bekende wet uit de natuurkunde is $F = m \cdot a$.
Hierin is F de kracht in N (newton) die op een massa m in kg wordt uitgeoefend. Die kracht veroorzaakt een versnelling a in m/s^2.
Als de kracht constant hetzelfde is (en de massa ook), dan krijg je een constante versnelling en neemt de snelheid dus met de tijd steeds gelijkmatig toe.

a Laat zien dat uit $a(t) = a$ door primitiveren volgt $v(t) = v(0) + a \cdot t$.

b Is het logisch dat $v(t)$ een primitieve is van $a(t)$?

c Welke functies zijn primitieven van $v(t)$?

d Wat stelt de primitieve van $v(t)$ voor in de natuurkunde?

Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $f(x) = \sqrt{4 - x}$.
Je wilt de oppervlakte uitrekenen van het gebied ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as.

a Om welke integraal gaat het dan?

b $F(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$. Stel een voorschrift op voor F.

c Bereken met behulp van F de gewenste oppervlakte.

d Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

Opgave 16

Bepaal de primitieve F van de functie f waarvoor $F(0) = 1$ als

a $f(x) = \sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$

b $f(x) = \frac{3}{(3x+4)^2}$

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het primitiveren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.3 Integreren

Inleiding

Het berekenen van integralen door middel van primitiveren noem je wel integreren. Omdat primitiveren weinig anders is dan terugrekenen vanuit een afgeleide, spelen bij het integreren de differentieerregels een belangrijke rol. Bijvoorbeeld kun je er de somregel voor integralen uit afleiden en een regel die vaak de substitutieregel wordt genoemd. En uit de productregel leid je de methode van partieel integreren af. Met name deze laatste methode is geen verplichte leerstof voor vwo, je vind er iets over bij de Toepassingen in het Totaalbeeld van dit onderwerp.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip integreren en de hoofdstelling van de integraalrekening;
- een paar belangrijke integreerregels;
- integreren toepassen bij het berekenen van oppervlaktes onder de grafiek van een functie.

Voorkennis

- alle differentieerregels gebruiken
- eenvoudige functies primitiveren;
- integralen bepalen met behulp van je grafische rekenmachine.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de functie f met $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^3}$.

Je kunt met je GR gemakkelijk de integraal van f op het interval $[-1,1]$ berekenen, uitkomst 0. Verder kun je de oppervlakte berekenen van het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = -1$ en $x = 1$. Het gaat daarbij echter om benaderingen...

Probeer nu met behulp van primitiveren aan te tonen dat de oppervlakte van V exact $\frac{3}{8}$ is.

TIP: Denk aan de kettingregel voor differentiëren.

Uitleg

Onder integreren versta je het berekenen van een integraal met behulp van primitiveren. Je maakt daarbij gebruik van de hoofdstelling van de integraalrekening, die zegt dat: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ waarin F een primitieve van f is. Let er wel op dat de functie f geen verticale asymptoten mag hebben op het interval $[a,b]$.

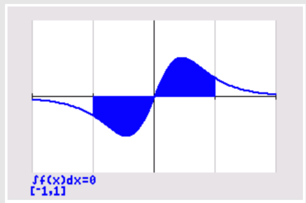
Meestal noteer je $F(b) - F(a)$ als $[F(x)]_a^b$.
De kunst hierbij is natuurlijk het vinden van $F(x)$ door 'omgekeerd differentiëren', door omkeren van de differentieerregels...

Bekijk de functie f met $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^3}$.

Je kunt met je GR gemakkelijk de integraal van f op het interval $[-1,1]$ berekenen, uitkomst 0. Verder kun je de oppervlakte berekenen van het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = -1$ en $x = 1$. Het gaat daarbij echter om benaderingen...
Wil je die oppervlakte exact bepalen, dan moet je een primitieve vinden van $f(x) = x(1 + x^2)^{-3}$.
Het vinden van die primitieve kan door terugrekenen vanuit de kettingregel. Je moet dan herkennen, dat $x = \frac{1}{2} \cdot 2x$ en dat $2x$ de afgeleide is van $g(x) = 1 + x^2$.

Dus is $x(1 + x^2)^{-3} = \frac{1}{2}(g(x))^{-3} \cdot g'(x)$ en is een primitieve $F(x) = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}(g(x))^{-2}$.

De oppervlakte van V is: $2 \cdot \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left[-\frac{1}{4}(1 + x^2)^{-2}\right]_0^1 = \frac{3}{8}$.



Figuur 3.1

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de hoofdstelling van de integraalrekening genoemd, maar niet bewezen. Een volledig bewijs hiervan valt ook buiten de leerstof voor het vwo. Maar enige toelichting is wel mogelijk.
Je weet uit het voorgaande onderdeel dat als $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ geldt $F'(x) = f(x)$. Dat dit alleen opgaat voor mooie brave functies (aaneengesloten grafieken zonder verticale asymptoten) is niet ter sprake gekomen.

a Waarom moet $F(a) = 0$?

b Leg uit waarom $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

c Bereken met behulp van de hoofdstelling voor de integraalrekening $\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

d Welk probleem doet zich voor als je $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ wilt berekenen? Wat doet je grafische rekenmachine hiermee?

Opgave 2

Bestudeer hoe in de **Uitleg** $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$ wordt berekend door primitiveren.

a Controleer de gevonden primitieve door differentiëren.

b Bereken op dezelfde manier $\int_0^1 6x(1 + x^2)^3\,\mathrm{d}x$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder **integreren** versta je het berekenen van een integraal met behulp van primitiveren. Je maakt daarbij gebruik van de **hoofdstelling van de integraalrekening**, die zegt dat: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ waarin F een primitieve van f is. Let er wel op dat de functie f geen verticale asymptoten mag hebben op het interval $[a,b]$.
Meestal noteer je $F(b) - F(a)$ als $[F(x)]_a^b$.
De kunst hierbij is natuurlijk het vinden van $F(x)$ door primitiveren, door 'omgekeerd differentiëren'.
Uit de differentieerregels kun je de volgende **integreerregels** afleiden:

- de **constante-regel**:
  $\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- de **somregel**:
  $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- de **substitutieregel** (omgekeerde kettingregel):
  $\int_a^b (f(g(x)) \cdot g'(x))\,\mathrm{d}x = [F(g(x))]_a^b$

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2$.
Bereken met behulp van integreren de integraal van f op het interval $[0,3]$ en de oppervlakte van het vlakdeel begrensd door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 3$.

Antwoord

Bij het primitiveren gebruik je in feite twee integreerregels: de constante-regel en de somregel. Maar waarschijnlijk let je daar nauwelijks op, een functie zoals dit is eenvoudig te primitiveren:

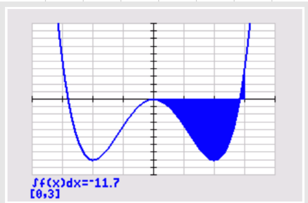
$$F(x) = 0{,}5 \cdot \tfrac{1}{5}x^5 - 4 \cdot \tfrac{1}{3}x^3 + c = \tfrac{1}{10}x^5 - \tfrac{4}{3}x^3 + c.$$

De gevraagde integraal is: $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + c\right]_0^3 = \text{-}11{,}7.$

Voor het berekenen van de gewenste oppervlakte moet je nu de grafiek van f bekijken. Want bij een integraal leveren gebieden met negatieve functiewaarden ook een negatieve uitkomst op. In dit geval zie je dat er zowel een gebied met negatieve als een gebied met positieve functiewaarden is. Je berekent dus eerst de nulpunten van f. Ga na dat dat dit $\left(\text{-}\sqrt{8},0\right)$, $(0,0)$ en $\left(\sqrt{8},0\right)$ zijn.
Voor de oppervlakte tel je nu twee integralen bij elkaar op:

$$\text{opp}(V) = \int_0^{\sqrt{8}} \text{-}f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{8}}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ga zelf na dat de oppervlakte wordt: $\text{opp}(V) = \frac{125}{15}\sqrt{8} - 11{,}7$.



Figuur 3.2

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

a Bereken de integraal van f over het interval $[1,3]$.

b Welke integreerregels heb je nu gebruikt? Bekijk eventueel **Voorbeeld 1**.

c Heb je met de integraal uit a de oppervlakte van een gebied berekend? Waarom?

Breng de grafiek van f in beeld zo, dat je het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as kunt zien.

d Welke nulpunten heeft f?

e Bereken de oppervlakte van het beschreven gebied. Bekijk eventueel **Voorbeeld 1**.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 2\frac{1}{4}$.

a Bereken de nulpunten van de functie f. Breng de grafiek van de functie in beeld.

b Bereken de oppervlakte van het gebied V dat ingesloten is door de grafiek van f en de x-as.

c De raaklijn aan de grafiek van f in het punt van f met x-coördinaat 3, de y-as en de grafiek van f sluiten een gebied in. Bereken de oppervlakte daarvan.

Opgave 5

De integraal $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$ kun je zien als de oppervlakte van een bepaald gebied.

a Welke vorm heeft dat gebied? Breng het in beeld met je grafische rekenmachine.

b Bepaal deze oppervlakte met de grafische rekenmachine.

c Waarom kun je deze oppervlakte niet exact berekenen met behulp van de tot nu toe genoemde integreerregels?

d Bereken de exacte oppervlakte van dit gebied met behulp van meetkundige kennis.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.
Bereken met behulp van integreren de oppervlakte van het vlakdeel begrensd door de grafiek van f en de x-as.

Antwoord

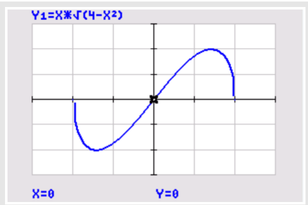
Voor het primitiveren van f kun je terugrekenen vanuit de kettingregel.
Herken, dat de afgeleide van $g(x) = 4 - x^2$ is $g'(x) = -2x$.

Omdat $x = -\frac{1}{2} \cdot -2x$, kun je f schrijven als: $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot g'(x) \cdot (g(x))^{0,5}$.

En dus is $F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1,5} \cdot (g(x))^{1,5} + c = -\frac{1}{3}(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2} + c$.

Met behulp van de grafiek zie je dat de gevraagde oppervlakte is:

$$opp(V) = 2 \cdot \int_0^2 f(x)\, \mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{3}(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2} + c \right]_0^2 = \tfrac{16}{3}$$



Figuur 3.3

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt bij het integreren ook gebruik gemaakt van de substitutieregel.

a Loop het voorbeeld na.

b Bereken $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$.

c Bereken de exacte oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ en de x-as.

Opgave 7

De integraal $\int_1^9 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$ kun je op twee manieren exact berekenen.

a Doe dit eerst door van de substitutieregel gebruik te maken.

b Je kunt dit ook doen door de deling uit te voeren. Laat zien dat je dan hetzelfde krijgt.

Verwerken

Opgave 8

Bereken de volgende integralen exact en controleer de antwoorden met de grafische rekenmachine.

a $\int_0^1 \frac{3}{(2x+1)^4}\, \mathrm{d}x$

b $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\, \mathrm{d}x$

c $\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x^4}\, \mathrm{d}x$

d $\int_{-3}^{1} -\frac{2}{\sqrt{3-2x}}\, \mathrm{d}x$

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5(x - 4)\left(x^2 - 4\right)$.

a Breng de grafiek van deze functie zo in beeld dat alle karakteristieken duidelijk te zien zijn.

b Bereken de oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

c De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$, de y-as en de grafiek van f sluiten een vakdeel W in. Bereken de oppervlakte daarvan.

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 3x - x^3$.

a Bereken de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

b Het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as op het interval $\left[0,\sqrt{3}\right]$ wordt door de lijn $x = p$ verdeeld in twee gebieden met gelijke oppervlakte.
Bereken p in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 11

Bereken de volgende onbepaalde integralen:

a $\int -\frac{(x-3)(x+1)}{x^4} \, \mathrm{d}x$

b $\int (2x+5)^3 \sqrt{2x+5} \, \mathrm{d}x$

c $\int x^2 \sqrt{6 - x^3} \, \mathrm{d}x$

d $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x$

Opgave 12

Een heel eenvoudig voorbeeld van een functie die je wel kunt differentiëren, maar niet primitiveren is $f(x) = \frac{1}{x}$.

a Welk probleem doet zich voor als je deze functie met de machtsregel wilt primitiveren?

b Bereken $\int_1^4 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$.

c Waarom heeft $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ geen betekenis? Zou je toch een waarde aan deze integraal kunnen toekennen? En zo ja, wat is dan je redenering?

Testen

Opgave 13

Bereken de volgende integralen exact en controleer je antwoorden met de grafische rekenmachine.

a $\int_0^1 \sqrt[5]{3x+1} \, \mathrm{d}x$

b $\int_1^4 \frac{2x^2-1}{x^2} \, \mathrm{d}x$

c $\int_{-1}^1 \frac{4x}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x$

Opgave 14

Gegeven is de functie f door $f(x) = -2x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as in twee decimalen nauwkeurig.

Practicum

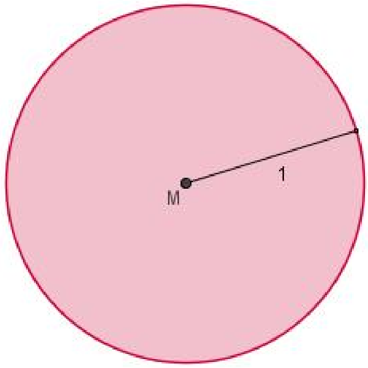
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **integreren en oppervlakte berekenen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.4 Oppervlakte en lengte

Inleiding

Al in de tijd van de Oude Grieken was het berekenen van de exacte omtrek en de exacte oppervlakte van een cirkel een ‘hot item’. Zij ontwikkelden daar methoden voor, maar pas in de 17de eeuw bedachten Isaac Newton en Gottfried Wilhelm Leibniz er onafhankelijk van elkaar een structurele methode voor. Dit was het begin van de integraalrekening.
En hebben zij dan het probleem van het berekenen van de omtrek en de oppervlakte van de cirkel ook opgelost?



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- oppervlaktes ingesloten door lijnen en grafieken van functies berekenen;
- de lengte van een deel van de grafiek van een functie berekenen.

Voorkennis

- integralen bepalen met behulp van primitiveren;
- integralen bepalen met behulp van je grafische rekenmachine.

Verkennen

Opgave V1

Als je een cirkel met straal 1 in een xy-assenstelsel plaatst met middelpunt M in de oorsprong, dan geldt voor elk punt op deze cirkel $x^2 + y^2 = 1$.
Je kunt daarom de cirkel beschrijven met twee functievoorschriften.

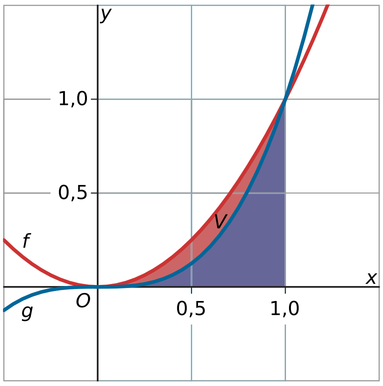
a Welke twee functievoorschriften?

b Hoe kun je nu de oppervlakte van deze cirkel bepalen met behulp van integreren?

c Ga na, dat de oppervlakte van de cirkel (ongeveer) gelijk is aan π.

d En kun je iets verzinnen voor het berekenen van de omtrek van deze cirkel?

Uitleg 1



Figuur 4.2

Je ziet hier het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van $f(x)=x^2$ en $g(x)=x^3$.
De oppervlakte van dit vlakdeel vind je door de integraal van f op $[0,1]$ en de integraal van g op $[0,1]$ van elkaar af te trekken:

opp $(V)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Vanwege de somregel voor integreren kun je dit schrijven als:

opp $(V)=\int_0^1 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$.

Je krijgt dan:

opp $(V)=\int_0^1 \left(x^2-x^3\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{12}$

Deze wijze van oppervlakteberekening kun je heel algemeen toepassen.
Geldt op een bepaald interval $[a,b]$ dat $f(x)\geq g(x)$, dan is de oppervlakte van het vlakdeel V dat door beide grafieken wordt ingesloten op dat interval gelijk aan:

opp $(V)=\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$

Of de grafieken onder of boven de x-as liggen, maakt daarbij niet uit.

Opgave 1

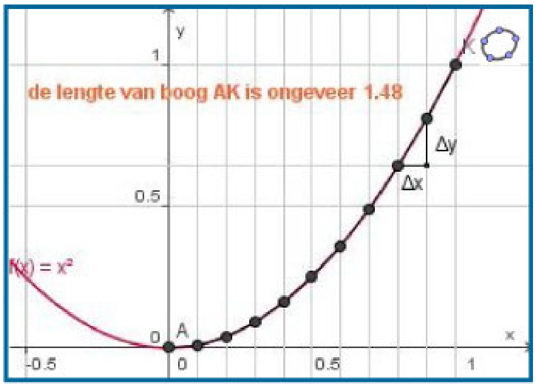
In **Uitleg 1** zie je hoe je de oppervlakte kunt berekenen van het gebied ingesloten door de grafieken van $f(x)=x^2$ en $g(x)=x^3$.

a Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $x=2$.

b Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $y=2$.

Uitleg 2

Bekijk de applet.



Figuur 4.3

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van $f(x)=x^2$ en $g(x)=x^3$.

Wil je ook de omtrek van V berekenen, dan moet je de lengte van de grafiek van f op $[0,1]$ en die van de grafiek van g op $[0,1]$ optellen. Maar hoe bereken je zo'n lengte?

De lengte L van de grafiek van f op $[0,1]$ wordt benaderd door dit interval op te delen in deelintervallen met een breedte van Δx. Op elk deelinterval heeft de grafiek een beginpunt en een eindpunt, het lijnstukje tussen beide benadert de grafiek steeds beter naarmate Δx naar 0 nadert. Als je de lengtes van al die lijnstukjes optelt, krijg je een benadering van L:

$$L\approx\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y_k)^2}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$$

Laat je nu Δx steeds dichter naar 0 naderen, dan nadert $\frac{\Delta y_k}{\Delta x}$ naar $f'(x_k)$.

De Riemannsom gaat dan over in: $L = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\text{d}\,x$.

Omdat $f'(x) = 2x$ wordt dit: $L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,\text{d}\,x = 1{,}47894...$.

Opgave 2

Bestudeer hoe in **Uitleg 2** de lengte van een grafiek met behulp van integreren kan worden berekend.

a Waar komt de uitdrukking $(\Delta x)^2 + (\Delta y_k)^2$ in de Riemannsom vandaan?

b Controleer zelf de benadering van de lengte van de grafiek van $f(x) = x^2$ op het interval $[0{,}1]$ door met behulp van de grafische rekenmachine de bijbehorende integraal te berekenen.

c Bereken de lengte van de grafiek van $g(x) = x^3$ op het interval $[0{,}1]$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het berekenen van oppervlaktes en lengtes kun je gebruik maken van integralen (neem telkens aan dat f op $[a{,}b]$ bestaat en differentieerbaar is):

- Geldt op $[a{,}b]$ dat $f(x) \geq 0$, dan is de oppervlakte van het vlakdeel V tussen de grafiek van f en de x-as op dat interval gelijk aan:

  $\text{opp}\,(V) = \int_a^b f(x)\,\text{d}\,x$

  Is $f(x) \leq 0$ op $[a{,}b]$, dan is: $\text{opp}\,(V) = \int_a^b \text{-}f(x)\,\text{d}\,x$.

- Geldt op $[a{,}b]$ dat $f(x) \geq g(x)$, dan is de **oppervlakte van het vlakdeel** *V* **dat door beide grafieken wordt ingesloten** op dat interval gelijk aan:

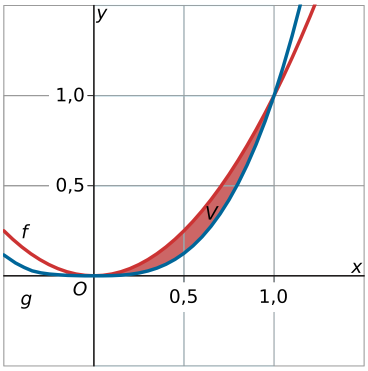
  $\text{opp}\,(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\text{d}\,x$

- De **booglengte** van de grafiek van f op interval $[a{,}b]$ is:

  $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\text{d}\,x$

Voorbeeld 1

Bereken de oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^4$ op het interval $[0,1]$.



Figuur 4.4

Antwoord

opp $(V) = \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2}{15}$

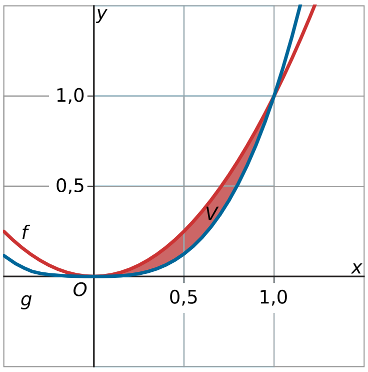
Opgave 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = x + 2$.

Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van f en g. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 1**.

Voorbeeld 2

Bereken de omtrek van het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^4$ op het interval $[0,1]$.



Figuur 4.5

Antwoord

De omtrek van V is de som van de lengte L_f van de grafiek van f op interval $[0,1]$ en de lengte L_g van de grafiek van g op datzelfde interval.
Nu is $f'(x) = 2x$ en $g'(x) = 4x^3$.
En dus is de omtrek van V:

$$L = L_f + L_g = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_0^1 \sqrt{1 + \left(4x^3\right)^2}\,\mathrm{d}\,x$$

Beide integralen zijn alleen met de grafische rekenmachine te bepalen.
Ga na dat de omtrek van V ongeveer $1{,}479 + 1{,}600 = 3{,}079$ is.

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = x + 2$.

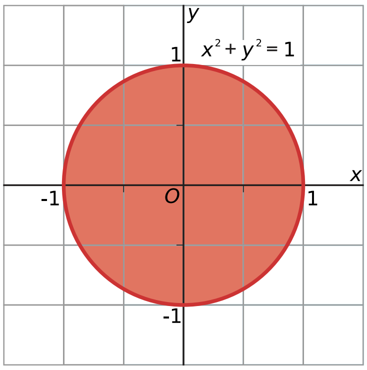
a Bereken lengte van de grafiek van g op het interval $[-2,1]$ met behulp van integreren. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 3**.

b Omdat de grafiek van g op het interval $[-2,1]$ een lijnstuk is, kun je deze lengte ook berekenen met behulp van meetkundige technieken. Ga na, dat je daarmee dezelfde uitkomst krijgt.

c Bereken de omtrek van het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van beide functies.

Voorbeeld 3

Bereken met behulp van integreren de oppervlakte en de omtrek van de cirkel c met middelpunt O en straal 1 in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 4.6

Antwoord

Omdat voor elk punt van de cirkel geldt $x^2 + y^2 = 1$, kun je hem beschrijven met twee functies: $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ en $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$.
Voor de berekening van oppervlakte en omtrek kijk je alleen naar de bovenste helft, dus y_1.

$\text{opp}(c) = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx \approx 3{,}14$.

Voor de omtrek (booglengte $L(c)$) geldt:

$$L(c) = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx \approx 6{,}28.$$

Denk er om dat je niet hebt bewezen dat de oppervlakte π en de omtrek 2π is. Je hebt ze alleen benaderd met je GR. Je kunt met integreren ook gemakkelijk de oppervlakte van een deel van de cirkel berekenen...

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** worden de oppervlakte en de omtrek van een cirkel met straal 1 berekend.

a Bereken met behulp van integraalrekening de oppervlakte van een cirkel met straal 2.

b Bereken door integreren de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ en de lijn $x = 1$, dat rechts van die lijn ligt, in twee decimalen nauwkeurig. Bereken deze oppervlakte ook meetkundig.

c Benader door integreren de omtrek van een cirkel met straal 2. Ga na, dat je uitkomst overeen komt met de formule voor de omtrek van een cirkel.

Verwerken

Opgave 6

De grafieken van de functies $f(x) = x^2 + 3x + 5$ en $g(x) = -x^2 + 5x + 9$ zijn parabolen.

a Bereken de oppervlakte van het gebied tussen beide parabolen.

b Bereken ook de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g, en de lijn $x = 4$.

Opgave 7

Ten opzichte van rechthoekig assenstelsel Oxy is K de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{3 - x}$.
Er is een getal a, zo dat K, de x-as en de lijn $x = a$ een vlakdeel begrenzen, waarvan de oppervlakte gelijk is aan 18.

Bereken a.

Opgave 8

Bereken de booglengte van de grafiek van de functie f op het gegeven interval:

a $f(x) = x^3 + \frac{1}{12x}$ op $[1,2]$.

b $f(x) = x\sqrt{x}$ op $[1,4]$.

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

a Breng de grafiek van deze functie zo in beeld dat alle karakteristieken duidelijk te zien zijn.

De grafiek van f en de x-as sluiten drie vlakdelen in. De grootste van die drie vlakdelen is V.

b Bereken door primitiveren de oppervlakte van V.

c De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$, de y-as en de grafiek van f sluiten een vakdeel W in. Bereken de oppervlakte daarvan.

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = 2{,}5$.

Opgave 11

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = \left(x^2 - 4\right)(2x + 1)$ en $g(x) = x^2 - 4$. De lijn met vergelijking $x = p$ met $-2 < p < 0$ snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.

a Bereken de waarden van p waarvoor de oppervlakte van driehoek OAB gelijk is aan 3.

Met domein $\mathbb{R}$ zijn nu voor elke $a > 0$ gegeven de functies:

$f_a(x) = \left(ax^2 - 4\right)(2x + 1)$ en $g_a(x) = ax^2 - 4$.

De grafieken van $f_a(x)$ en $g_a(x)$ hebben drie gemeenschappelijke punten en sluiten twee vlakdelen V_1 en V_2 in.

b Bewijs dat de oppervlakten van V_1 en V_2 gelijk zijn.

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = x + 3 - 4\sqrt{x}$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$.
Ten opzichte van een assenstelsel Oxy is K de grafiek van f.

a Gebruik de rekenmachine om K te tekenen.

b Bereken de oppervlakte van de driehoek gevormd door de x-as en de raaklijnen aan K in de punten waar K de x-as snijdt.

c Gebruik de rekenmachine om de lengte van K tussen $x = 1$ en $x = 9$ te bepalen.

Testen

Opgave 13

Gegeven is de functie f door $f(x) = 4 - \frac{4}{(x-3)^2}$.

a Bereken in twee decimalen nauwkeurig de extremen van f en breng de grafiek zo in beeld dat alle karakteristieken zichtbaar zijn.

b De grafiek van de functie f en de beide coördinaatassen sluiten een gebied G in. Bereken door primitiveren de oppervlakte van G.

c Bereken de omtrek van G in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 14

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - x\sqrt{x}$ en $g(x) = 2$.

a Teken het gebied G dat door de grafieken van f en g, en de y-as wordt ingesloten.

b Bereken de oppervlakte van het gebied G.

c Bereken de lengte van de grafiek van f tussen $x = 1$ en $x = 4$.

1.5 Omwentelingslichamen

Inleiding

Je ziet hier een draaibank. Er wordt een stuk hout bewerkt door het te draaien om een bepaalde as en dan met een beitel een kromme lijn te beschrijven. De omwenteling doet de rest...
Van het voorwerp dat zo ontstaat is (als het perfect is gelukt) elke doorsnede loodrecht op de draaias een cirkel. Je noemt zoiets een omwentelingslichaam.

Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip omwentelingslichaam;
- de inhoud van omwentelingslichamen berekenen met integreren zowel bij wentelen om de x-as als bij wentelen om de y-as.

Voorkennis

- integralen bepalen met behulp van primitiveren;
- integralen bepalen met behulp van je grafische rekenmachine.

Verkennen

Opgave V1

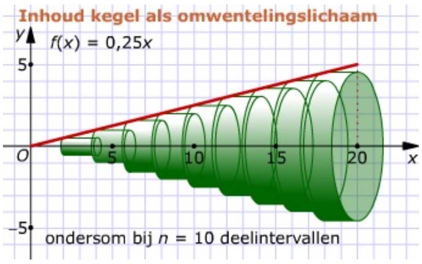
Een rechte kegel is een omwentelingslichaam.
Je kunt een kegel met een hoogte van 20 en een grondvlak met straal 5 maken door het vlakdeel ingesloten door de grafiek van $f(x) = 0{,}25x$ en de x-as op het interval $[0,20]$ te wentelen om de x-as.

a Maak een schets van deze kegel, uitgaande van de grafiek van f op het gegeven interval.

b Verdeel het interval in 10 deelintervallen. Je kunt het stukje kegel op het k-de deelinterval benaderen door een cilinder met straal $f(0{,}2k)$ en hoogte $0{,}2$. Door de inhouden van die cilindertjes op te tellen krijg je een bovensom voor de inhoud van de kegel. Bepaal die bovensom.

c Bepaal op dezelfde manier een ondersom voor de inhoud van de kegel.

d Hoe zou je met behulp van integreren de inhoud van de kegel kunnen berekenen?



Figuur 5.2

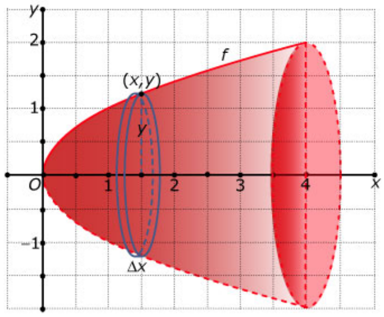
Uitleg 1

Je ziet hier hoe het vlakdeel ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ en de x-as op het interval $[0,4]$ om de x-as wordt gewenteld.
Het ‘omwentelingslichaam’ dat zo ontstaat kun je benaderen door smalle cilinders door het interval $[0,4]$ in deelintervallen met een breedte van Δx te verdelen. De inhoud van zo'n cilinder is $\pi y^2 \Delta x$.
De inhoud van het omwentelingslichaam benader je door Riemansommen van de vorm:

$$\underline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot (f_{\text{min}}(x))^2 \cdot \Delta x \text{ en } \overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot (f_{\text{max}}(x))^2 \cdot \Delta x$$

Als het aantal deelintervallen oneindig groot wordt, dan gaat Δx naar 0.
De inhoud van het omwentelingslichaam wordt dan:

$$I = \int_0^4 \pi \cdot (f(x))^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^4 \pi \cdot (\sqrt{x})^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^4 \pi x \, \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}\pi x^2\right]_0^4 = 8\pi$$



Figuur 5.3

Opgave 1

In **Uitleg 1** zie je hoe je de inhoud kunt berekenen van het omwentelingslichaam dat ontstaat door een grafiek op een bepaald interval om de x-as te wentelen.
Gegeven de functie $f(x) = 4 - x^2$. V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door V om de x-as te wentelen.

Uitleg 2

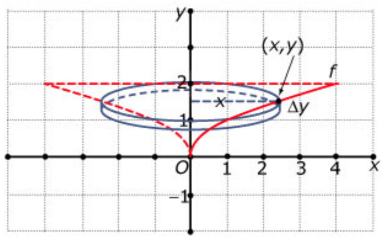
Je ziet hier hoe het vlakdeel ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ en de y-as op het interval $[0,4]$ om de y-as wordt gewenteld.
Dit vlakdeel wordt ook begrensd door de lijn $y = 2$. Het omwentelingslichaam dat zo ontstaat kun je benaderen door smalle cilinders door op de y-as het interval $[0,2]$ in deelintervallen met een breedte van Δy te verdelen. De inhoud van zo'n cilinder is $\pi x^2 \Delta y$.
Als het aantal deelintervallen oneindig groot wordt, dat gaat Δy naar 0 en de inhoud van het omwentelingslichaam wordt een integraal van de vorm:

$$I = \int_0^2 \pi x^2 \, \mathrm{d}y$$

Deze integraal kun je berekenen door het functievoorschrift $y = \sqrt{x}$ te herleiden naar $x = y^2$.

De inhoud van het omwentelingslichaam wordt dan:

$$I = \int_0^2 \pi \left(y^2\right)^2 \mathrm{d}y = \int_0^2 \pi y^4 \, \mathrm{d}y = \left[\tfrac{1}{5}\pi y^5\right]_0^2 = 6{,}4\pi$$



Figuur 5.4

Opgave 2

In **Uitleg 2** zie je hoe je de inhoud kunt berekenen van het omwentelingslichaam dat ontstaat door een grafiek op een bepaald interval om de y-as te wentelen.
Gegeven de functie $f(x) = 4 - x^2$. V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

a Laat zien, dat je de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat kunt berekenen met de integraal $\int_0^4 \pi \left(\sqrt{4-y}\right)^2 \, \mathrm{d}\, y$.

b Bereken deze inhoud met behulp van primitiveren.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een figuur die ontstaat door het wentelen van een functie om een as heet een **omwentelingslichaam**.

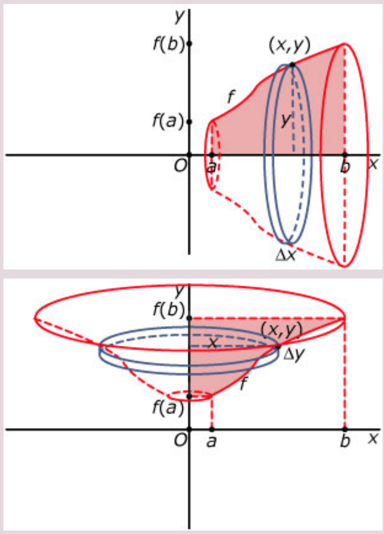
De inhoud I van het lichaam dat je krijgt als je de grafiek van de functie $y = f(x)$ op het interval $[a,b]$ wentelt om de x-as is:

$I = \int_a^b \pi y^2 \, \mathrm{d}\, x = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, \mathrm{d}\, x$

De inhoud I van het lichaam dat je krijgt als je de grafiek van de functie $y = f(x)$ op het interval $[a,b]$ wentelt om de y-as is:

$I = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi x^2 \, \mathrm{d}\, y = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi \left(f^{\text{inv}}(y)\right)^2 \, \mathrm{d}\, y$

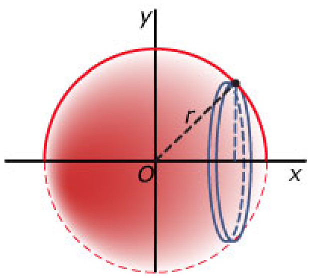
Hierin is f^{inv} de **inverse functie** van f, de functie die ontstaat door $y = f(x)$ te herleiden tot $x = f^{\text{inv}}(y)$.



Figuur 5.5

Voorbeeld 1

Een bol met straal r en middelpunt O ontstaat door de grafiek van $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ op het interval $[-r,r]$ om de x-as te wentelen.
Stel een formule op voor de inhoud en één voor de oppervlakte van die bol.



Figuur 5.6

Antwoord

Voor de inhoud van de bol geldt:

$I(r) = \int_{-r}^{r} \pi \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \, \mathrm{d}\, x = \int_{-r}^{r} \pi \left(r^2 - x^2\right) \mathrm{d}\, x = \frac{4}{3}\pi r^3$.

De oppervlakte $A(r)$ van de bol kun je uit $I(r)$ afleiden.
Bedenk, dat bij toename van r met een heel klein beetje $\Delta r = h$ de inhoud toeneemt met $I(r+h) - I(r)$. De oppervlakte van deze laag met een dikte h is ongeveer de gevraagde oppervlakte en gelijk aan $\frac{I(r+h) - I(r)}{h}$.

Deze benadering wordt beter naarmate h naar 0 nadert.

En daarom is $A(r) = \lim_{h \to 0} \frac{I(r+h)-I(r)}{h} = I'(r)$.

Dit betekent dat de oppervlakte van de bol is: $A(r) = 4\pi r^2$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** wordt de inhoud van een bol met straal r berekend. Je kunt op dezelfde manier een formule opstellen voor de inhoud van een kegel met straal r en hoogte h. Je begint dan met de lijn $y = \frac{r}{h}x$ op het interval $[0,h]$ en wentelt het vlakdeel ingesloten door die lijn, de x-as en de lijn $x = h$ om de x-as.

a Leg uit waarom de hierboven gegeven vergelijking geschikt is voor de beschreven kegel.

b Stel nu door primitiveren een formule op voor de inhoud van de kegel.

c Stel ook door primitiveren een formule op voor de inhoud van een cilinder met straal r en hoogte h.

Opgave 4

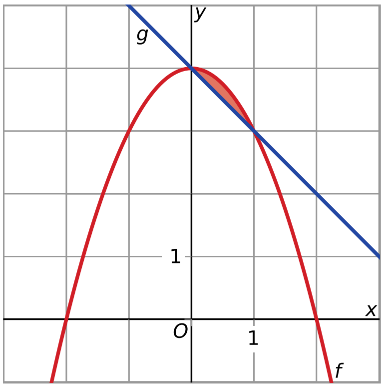
In **Voorbeeld 1** wordt ook een formule afgeleid voor de oppervlakte van een bol met straal r.

a Hoe volgt de formule voor de oppervlakte van een bol uit die voor de inhoud?

b Waarom lukt dit niet bij de kegel en de cilinder? Hoe kun je daar toch de oppervlakte van berekenen?

Voorbeeld 2

Hier zie je het vlakdeel(tje) ingesloten door de grafieken van $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = 4 - x$.
Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door V om de x-as te wentelen.



Figuur 5.7

Antwoord

Eerst bereken je de snijpunten van de grafieken: $(0,4)$ en $(1,3)$.

Vervolgens constateer je dat het omwentelingslichaam een soort van ring wordt: uit het lichaam dat ontstaat door de grafiek van f op $[0,1]$ om de x-as te wentelen wordt het lichaam dat ontstaat door de grafiek van g op $[0,1]$ om de x-as te wentelen weg geboord. De gevraagde inhoud is daarom:

$I = \int_0^1 \pi\left(4 - x^2\right)^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^1 \pi(4 - x)^2 \,\mathrm{d}x$

Door haakjes uitwerken en primitiveren vind je: $I = 1{,}2\pi$.

Opgave 5

Bestudeer nu eerst **Voorbeeld 2**.

a Schets het omwentelingslichaam dat ontstaat door V om de x-as te wentelen.

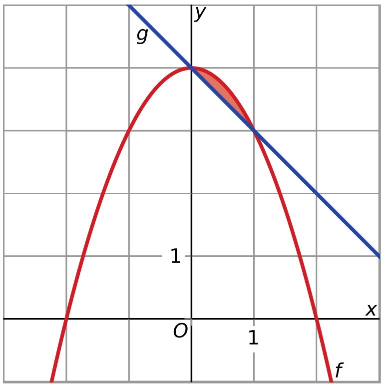
b Bereken zelf door haakjes uitwerken en primitiveren de inhoud van het omwentelingslichaam.

c Waarom is het niet mogelijk om de inhoud van dit lichaam te berekenen met

$\int_0^1 \pi(f(x) - g(x))^2 \, \text{d}\, x$?

Voorbeeld 3

Hier zie je het vlakdeel(tje) ingesloten door de grafieken van $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = 4 - x$.
Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door V om de y-as te wentelen.



Figuur 5.8

Antwoord

Eerst bereken je de snijpunten van de grafieken: $(0,4)$ en $(1,3)$.

Vervolgens constateer je dat het omwentelingslichaam een soort van hoedje wordt: uit het lichaam dat ontstaat door de grafiek van f op $[f(0), f(1)]$ om de y-as te wentelen wordt de kegel die ontstaat door de grafiek van g op $[g(0), g(1)]$ om de y-as te wentelen weg geboord.
Dan moet je van beide functies de inverse bepalen:

- $f(x) = y = 4 - x^2$ wordt: $x = \sqrt{4 - y}$
- $g(x) = y = 4 - x$ wordt: $x = 4 - y$

De gevraagde inhoud is daarom:

$I = \int_3^4 \pi\left(\sqrt{4 - y}\right)^2 \text{d}\, y - \int_3^4 \pi(4 - y)^2 \, \text{d}\, y$

Door haakjes uitwerken en primitiveren vind je: $I = \frac{1}{6}\pi$.

Opgave 6

Bestudeer nu eerst **Voorbeeld 3**.

a Schets het omwentelingslichaam dat ontstaat door V om de y-as te wentelen.

b Bereken zelf door haakjes uitwerken en primitiveren de inhoud van het omwentelingslichaam.

Verwerken

Opgave 7

Bereken met behulp van primitiveren de inhoud van de omwentelingslichamen, die ontstaan bij wenteling om de x-as van de vlakdelen, begrensd door:

a de x-as en de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 7x + 6$;

b de x-as, de y-as en de grafiek van de functie $f(x) = x + 4 - 4\sqrt{x}$;

c de x-as, de grafiek van de functie $f(x) = \frac{8}{x}$ en de lijnen $x = 2$ en $x = 4$.

Opgave 8

Bereken met behulp van primitiveren de inhoud van de omwentelingslichamen, die ontstaan bij wenteling om de y-as van de vlakdelen, begrensd door:

a de grafiek van de functie $f(x) = x^3$, de y-as en de lijn $y = 4$;

b de y-as, de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}5x^2 + 8$ en een raaklijn uit O aan de grafiek van f.

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = x + 3 - 4\sqrt{x}$.
V is het vlakdeel begrensd door de grafiek van f en de lijn $y = 3$.

Bereken exact de inhoud van het lichaam dat ontstaat door V te wentelen om de lijn $y = 3$.

Opgave 10

Gegeven zijn de functies $f(x) = 6 - (x - 2)^2$ en $g(x) = x^2 - 2x + 2$.
G is het gebied dat door beide grafieken wordt ingesloten.

a Bereken exact de oppervlakte van G.

b G wordt om de x-as gewenteld. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

Opgave 11

Een bol ontstaat door de functie $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ om de x-as te wentelen op het interval $[-r,r]$.
Neem nu het getal a met $0 < a < r$.

a Je wentelt het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as met $a \leq x \leq r$ om de x-as. Het lichaam dat zo ontstaat heet een bolsegment. Stel met behulp van primitiveren een formule op voor de inhoud van zo'n bolsegment.

b Wanneer je aan het bolsegment een kegel toevoegt met de top in $O(0,0)$, hoogte a en straal $\sqrt{r^2 - a^2}$ dan heb je een bolsector. Stel met behulp van primitiveren een formule op voor de inhoud van zo'n bolsector.

Opgave 12

Gegeven is de functie f met $f(x) = \sqrt{x}$.
De lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in A. De lijn $y = q$ gaat door A.
V is het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = p$.
W is het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f, de y-as en de lijn $y = q$.
De inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door V om de x-as te wentelen is gelijk aan de inhoud die ontstaat door W om de y-as te wentelen.

Bereken p.

Testen

Opgave 13

Gegeven is de functie f door $f(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$.

a Bereken de nulpunten en de asymptoten van f en schets de grafiek van f.

V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, de lijn $y = x$ en de lijnen $x = 1$ en $x = 3$.

b Bereken exact de oppervlakte van V.

c V wordt gewenteld om de x-as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

Opgave 14

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - x\sqrt{x}$ en $g(x) = 2$.
G is het gebied dat wordt ingesloten door beide grafieken en de y-as. Dit vlakdeel wordt om de y-as gewenteld.

Bereken exact de inhoud van het lichaam dat daardoor ontstaat.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Integraalrekening**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- het begrip integraal — het verband tussen integraal en oppervlakte
- het begrip primitieve (functies)
- de hoofdstelling van de integraalrekening — somregel, constante-regel en substitutieregel voor integreren
- oppervlakte van een vlakdeel ingesloten door grafieken en lijnen
- omwentelingslichaam — inhoud van een omwentelingslichaam

Activiteitenlijst

- de integraal van een functie op een bepaald interval berekenen (o.a. met behulp van Riemannsommen)
- integralen berekenen door primitiveren
- integreren met behulp van integreerregels en de hoofdstelling van de integraalrekening
- de oppervlakte van vlakdelen berekenen door integreren, waar nodig met de GR
- inhoud van omwentelingslichamen berekenen, zowel bij wenteling om de x-as als bij wenteling om de y-as

Achtergronden

Al in de Oudheid deden wetenschappers pogingen om de lengte, de oppervlakte en de inhoud van lichamen exact te berekenen. De omtrek en de oppervlakte van een cirkel, de oppervlakte en inhoud van cilinder, kegel en bol, het waren allemaal klassieke problemen. **Eudoxus (408—355 v.Chr.)** bedacht er de **uitputtingsmethode** voor en vooral **Archimedes (287—212 v.Chr.)** paste die techniek toe. Deze laatste vond met name de inhoud van cilinder, kegel en bol en bijvoorbeeld de oppervlakte onder een parabool.

Nadeel van die techniek was dat hij steeds aan het object in kwestie moest worden aangepast, het was geen eenvoudig ‘rekenrecept’. Dat ontstond pas in de zeventiende eeuw toen **Newton (1642—1727)** en **Leibniz (1646—1716)** onafhankelijk van elkaar de technieken van differentiëren en primitiveren ontwikkelden.

De integraalrekening zoals we die nu hebben opgebouwd is een globale weergave van de theorie van **Bernard Riemann (1826—1866)** waarvan je hier een afbeelding ziet. Hij ontwikkelde de begrippen ‘Riemann-som’ en ‘Riemann-integraal’.

Figuur 6.1 **Bernard Riemann**

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}5x + 4$ op het interval $[-2,2]$.

a Verdeel het interval $[-2,2]$ in vier gelijke deelintervallen, en bereken de onder- en de bovensom bij deze verdeling.

b Bereken het verschil tussen onder- en bovensom als je het interval in acht gelijke deelintervallen verdeelt.

Opgave 2

Bepaal de functie F waarvoor geldt:

a $F'(x) = x\sqrt{x}$ met $F(4) = 0$.

b $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$ met $F(2) = 0$.

c $F'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(3-2x)^2}$ met $F(2) = 0$.

Opgave 3

Bepaal de volgende onbepaalde integralen:

a $\int x^2\sqrt{2x}\, \mathrm{d}x$

b $\int \left(x^2 - 4\right)^2 \mathrm{d}x$

c $\int x\sqrt{2 + x^2}\, \mathrm{d}x$

Opgave 4

Bereken het exacte antwoord van deze bepaalde integralen en controleer je antwoorden met de rekenmachine:

a $\int_1^8 7\sqrt[3]{x}\, \mathrm{d}x$

b $\int_0^2 \frac{2}{(1+2x)^2}\, \mathrm{d}x$

c $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}} - 5\sqrt{x}\, \mathrm{d}x$

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$.

a Bereken: $\int_0^6 f(x)\, \mathrm{d}x$.

b Bepaal de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as op het interval $[0,6]$.

c Waarom heb je bij a en b niet hetzelfde antwoord gekregen? Verklaar het verschil.

d Bereken de lengte van de parabool tussen zijn twee snijpunten met de assen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{3 - x}$.
Er is een getal a zodat de oppervlakte van het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f en de x-as op het interval $[a,3]$ gelijk is aan 18.

a Bereken a.

Er is ook een getal b zodat de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as op het interval $[0,b]$ even groot is als de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as op het interval $[b,3]$.

b Benader b in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 7

Als je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ op het interval $[1,p]$ wentelt om de x-as dan ontstaat een figuur met de vorm van een soort toeter.

a Laat zien dat de inhoud van deze toeter gelijk is aan: $I = \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Als p oneindig groot wordt dan ontstaat een oneindig lange toeter. Toch is de inhoud van deze toeter niet oneindig groot.

b Bepaal de inhoud van deze oneindige toeter.

Opgave 8

Gegeven is de functie f met $f(x) = x^3$.
Door de grafiek op $[0,p]$ om de x-as te wentelen ontstaat een omwentelingslichaam a.
Door de grafiek op $[0,p]$ om de y-as te wentelen ontstaat een omwentelingslichaam b.
Beide omwentelingslichamen hebben hetzelfde volume.

Bereken p.

Opgave 9

De punten $P(x,y)$ die voldoen aan de vergelijking $x^2 + 4y^2 = 16$ liggen op een ellips.

a Met welke twee functievoorschriften kun je deze ellips beschrijven?

b Bereken de oppervlakte van deze ellips in twee decimalen nauwkeurig.

c Bereken de omtrek van deze ellips in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 10: Arbeid

Onder arbeid wordt in de natuurkunde verstaan: het product van de kracht die werkt in de bewegingsrichting van een bewegend voorwerp en de lengte van de afgelegde weg. Als die kracht voortdurend verandert, bereken je de arbeid met behulp van een integraal.
Neem bijvoorbeeld een balletje aan een elastiek. Als je het wegschiet, zal de spankracht van het elastiek afhangen van de afgelegde weg x. In dat geval is de kracht die op het balletje wordt uitgeoefend een functie $F(x)$. De arbeid W bereken je dan door de arbeid op deelintervallen van de afgelegde weg op te tellen:

$$W = \sum_{k=1}^{n} F(x_k) \cdot \Delta x$$

Je ziet dat je ook hier met Riemannsommen kunt werken.
Als het aantal deelintervallen oneindig groot wordt (en dus $\Delta x \to 0$) wordt de arbeid een integraal:

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

Hang je bijvoorbeeld een gewicht aan een veer, dan werkt op dat gewicht een veerkracht die volgens de wet van Hooke recht evenredig is met de uitwijking x uit de ruststand: $F(x) = C \cdot x$.
Als u de uiteindelijke afstand is die het gewicht heeft afgelegd dan is de door de veerkracht verrichte arbeid:

$$W = \int_0^u F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^u (C \cdot x)\,\mathrm{d}x = \int_0^u (C \cdot x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}Cu^2.$$

Aan een veer hangt men een massa van 1 kg. Na enige tijd hangt de veer weer stil. Hij is dan 10 cm uitgetrokken. In de onderste stand werken er twee krachten op de massa: de zwaartekracht en de veerkracht. De zwaartekracht is bij benadering gelijk aan $m \cdot g$. De veerkracht is recht evenredig met de uitwijking.

Figuur 6.2

a Bereken de veerconstante C. Neem $g = 10$ m/s^2.

Als je de veer verder naar beneden uitrekt, dan moet je een extra kracht uitoefenen.

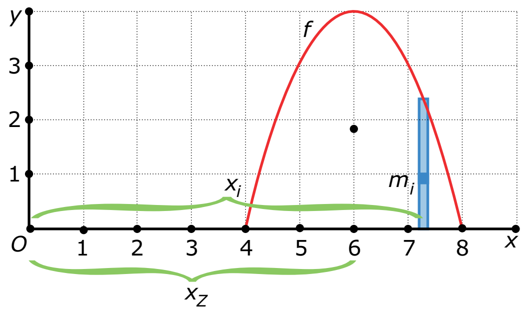
b Hoe groot is die kracht als de veer 20 cm uitgetrokken is?

c Hoeveel arbeid verricht je als je de massa 30 cm vanuit de evenwichtsstand naar beneden trekt?

Opgave 11: Zwaartepunt

Het **zwaartepunt** van een object is het punt ten opzichte waarvan de massa van dat object in evenwicht is. Het object gedraagt zich alsof alle massa zich als één gewicht in het zwaartepunt bevindt.

Stel dat je het zwaartepunt van het gekleurde vlakdeel hiernaast wilt berekenen. Dit zwaartepunt noem je $Z(x_Z, y_Z)$. Je gaat er van uit dat de massa van het vlakdeel homogeen is verdeeld, dus recht evenredig is met de oppervlakte ervan. Het gewicht is daarom $\int_4^8 c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.



Figuur 6.3

Kijk eerst in de x-richting. Je kunt dan het vlakdeel opdelen in allemaal kleine massa's. Bij elke massa hoort in de x-richting een moment ten opzicht van (bijvoorbeeld) de oorsprong O van het assenstelsel van $x_i \cdot G_i$ (moment is gewicht maal arm).
Tel je al die momenten (in de x-richting) op dan krijg je $\int_4^8 x \cdot c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.
Dit is gelijk aan het moment van het totale gewicht in de zwaartepunt, dus: $x_Z \cdot \int_4^8 c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_4^8 x \cdot c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.
Door beide integralen te berekenen, bereken je de x-waarde van het snijpunt. In de y-richting kun je een vergelijkbare redenering houden. Die wordt wel iets ingewikkelder omdat je met de inverse van de functie moet werken...

Ga er van uit dat het vlakdeel wordt begrensd door de x-as en een parabool met top $(6,4)$ die door $(4,0)$ en $(8,0)$ gaat.

a Voer de berekening die hierboven wordt beschreven ook daadwerkelijk uit.

b Het antwoord van a mag je niet verrassen, hier was zo'n moeilijke berekening overbodig. Licht dat toe.

Het berekenen van de y-waarde van het zwaartepunt gaat op een vergelijkbare manier. Maar nu heb je de functies $x = 6 \pm \sqrt{4-y}$ nodig. De formule voor de berekening van het zwaartepunt wordt nu

$y_Z \cdot \int_0^4 c \cdot 2\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y = \int_0^4 y \cdot c \cdot 2\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y$

c Licht deze formule toe.

d Bereken met de grafische rekenmachine de y-waarde van het zwaartepunt van het gegeven vlakdeel.

e Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van het gebied G dat wordt ingesloten door de parabool $y = 4 - x^2$, de parabool $y = 3 - x^2$ en de x-as.

Een geodriehoek is een gelijkbenige rechthoekige driehoek. Zo'n driehoek kun je zo in het assenstelsel leggen, dat ΔABC met $A(-a,0)$, $B(a,0)$ en $C(0,a)$ ontstaat.

f Laat zien dat ΔABC inderdaad gelijkbenig is. Bewijs met behulp van integreren dat het zwaartepunt $Z\left(0,\frac{1}{3}a\right)$ is.

Opgave 12: Benzineverbruik

Een auto die met een snelheid van 20 m/s rijdt, trekt 5 seconden op met een versnelling van 2 m/s^2. Na die 5 seconden is de snelheid van de auto 30 m/s.

a Stel een formule op waarmee je de snelheid tijdens die 5 seconden kunt berekenen.

b Hoeveel meter legt de auto in die tijd af?

c Ga na dat de auto in 1 uur 5,75 liter benzine verbruikt als de snelheid tijdens dat uur 20 m/s is.

d Laat zien dat het verbruik in de tijdsperiode $[t, t+\Delta t]$ ongeveer gelijk is aan: $\left(1{,}3 \cdot 10^{-7}(20+2t)^2 - 3{,}6 \cdot 10^{-6}(20+2t) + 10^{-4}(20+2t)\right) \cdot (20+2t) \cdot \Delta t$.

e Bereken met een integraal het benzineverbruik in die 5 seconden. Gebruik daarbij de grafische rekenmachine.

Examen

Opgave 13: Twee halve parabolen

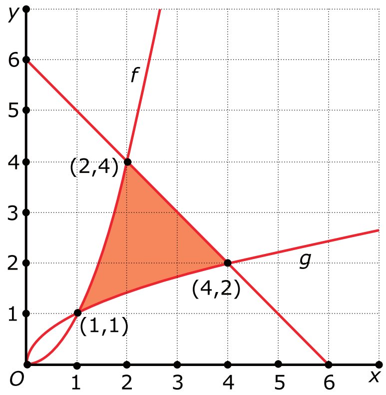
Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$, beide met domein $[0, \rightarrow\rangle$. De lijn $x = p$, met $0 < p < 1$, snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.

a Bereken de exacte waarde van p waarvoor de lengte van het lijnstuk AB maximaal is.

In de figuur zijn de grafieken van f en g en ook de lijn $y = 6 - x$ getekend. Het gebied ingesloten door de grafiek van f, de grafiek van g en de lijn $y = 6 - x$, is in de figuur gekleurd.

b Bereken algebraïsch de exacte oppervlakte van dit gebied.

(bron: examen wiskunde B vwo 2004, tweede tijdvak)



Figuur 6.4

Opgave 14: Zwaartepunt

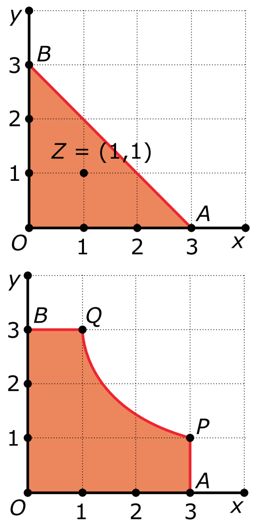
De hoekpunten van driehoek OAB zijn $O(0,0)$, $A(3,0)$ en $B(0,3)$.

a Toon met behulp van een integraal aan dat het zwaartepunt van driehoek OAB het punt $(1,1)$ is.

Het vlakdeel $OAPQB$ wordt begrensd door de x-as, de y-as, de lijn $x = 3$, de lijn $y = 3$ en de hyperbool $y = 3/x$.

b Bereken de x-coördinaat van het zwaartepunt van dit vlakdeel in twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen wiskunde B vwo 2001, tweede tijdvak, aangepast)



Figuur 6.5

Opgave 15: Gebroken functie

Gegeven is de functie $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

a Bereken langs algebraïsche weg de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

V is het gebied dat wordt ingesloten door de lijn $y = 5$ en de grafiek van f.

b Bereken de omtrek van V in twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen wiskunde B vwo 2003, tweede tijdvak, aangepast)

Opgave 16: Onafhankelijk van *n*

De grafieken van de functies $y = \frac{1}{2}x^2$ en $y = x$ sluiten een gebied G in. Door dit gebied G te wentelen om de x-as ontstaat een omwentelingslichaam.

a Bereken de exacte waarde van de inhoud van dit omwentelingslichaam.

Voor $n = 1,2,3,...$ bekijken we het vierkant $OQ_nP_nR_n$, waarvan twee zijden langs de coördinaatassen vallen en waarvan het punt $P_n(n,n)$ een hoekpunt is. De grafiek van de functie $y = \frac{1}{n}x^2$ gaat door O en door P_n. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $y = \frac{1}{n}x^2$ in het punt P_n is onafhankelijk van n.

b Toon dit aan.

De grafiek van $y = \frac{1}{n}x^2$ verdeelt het vierkant $OQ_nP_nR_n$ in twee stukken V en W.
De verhouding van de oppervlakten van V en W is onafhankelijk van n.

c Toon dit aan.

(bron: examen wiskunde B vwo 2005, eerste tijdvak, aangepast)

2

Parametervoorstellingen

2.1 Parametervoorstelling

Inleiding

Bekijk de applet

Je hebt al gewerkt met vergelijkingen van lijnen en cirkels. Maar je kunt ze ook op een totaal andere manier beschrijven. Je vat daarbij de lijn of de cirkel op als de figuur die ontstaat door het bewegen van een punt in een assenstelsel afhankelijk van de 'tijd'. In deze applet kun je punt P bewegen.

Je leert in dit onderwerp

- hoe je met een plaatsvector en een richtingsvector lijnen kunt beschrijven en er vectorvoorstellingen/parametervoorstellingen van maakt;
- vergelijkingen van lijnen omzetten in vectorvoorstellingen/parametervoorstellingen en omgekeerd;
- vectorvoorstellingen/parametervoorstellingen van lijnen toepassen bij berekeningen.

Voorkennis

- met vectoren rekenen, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met vergelijkingen van lijnen en cirkels.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

Je kunt punt A bewegen door de richtingsvector $\vec{r}$ te verlengen.

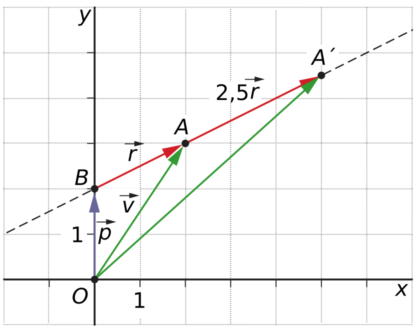
Je ziet hier de vectoren $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Verder is $\vec{v}=\vec{p}+t\cdot\vec{r}$.

a Bekijk de eindpunten van de vectoren $\vec{p}+1\cdot\vec{r}$, $\vec{p}+2\cdot\vec{r}$, $\vec{p}+3\cdot\vec{r}$ en $\vec{p}-1\cdot\vec{r}$.

b Hoe komt het dat deze eindpunten allemaal op dezelfde rechte lijn liggen?

c Kun je dit bewijzen voor elke vector $\vec{v}$?



Figuur 1.1

Uitleg

Bekijk de applet

Als je de vector $\vec{r}$ langer maakt zie je punt A over een rechte lijn bewegen.

Bij elk punt A hoort een vector $\vec{v}=\vec{p}+t\cdot\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

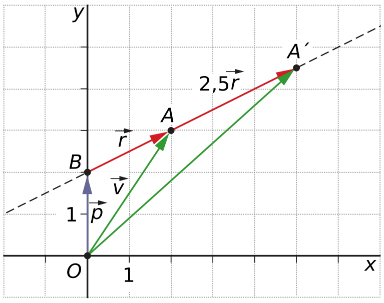
Dit noem je een vectorvoorstelling van de lijn waar A op ligt.

$\vec{r}$ heet een richtingsvector en $\vec{p}$ een plaatsvector (of steunvector) van de lijn.

Uit de kentallen van de richtingsvector kun je afleiden dat de richtingscoëfficiënt van de lijn $\frac{1}{2}$ is. De bijbehorende vergelijking is $y=\frac{1}{2}x+2$ ofwel $-x+2y=4$.

Elk punt A op de lijn heeft coördinaten $(0+2t,2+t)$. Je kunt gemakkelijk nagaan dat deze coördinaten voor elke waarde van t ook aan de vergelijking voldoen. Vergelijking en vectorvoorstelling zijn beide geschikte manieren om een lijn te beschrijven.

Je zegt wel dat $x(t)=2t$ en $y(t)=2+t$ een parametervoorstelling van de lijn is. De variabele t (de 'tijd') is de parameter.



Figuur 1.2

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** wat een vectorvoorstelling van een lijn is.

a Waarom is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+p\cdot\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ ook een vectorvoorstelling van de getekende lijn? Welke parametervoorstelling hoort daar bij?

b En is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+q\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ook een geschikte vectorvoorstelling? Licht je antwoord toe.

c Hoe bepaal je vanuit een richtingsvector van de lijn de richtingscoëfficiënt?

d Laat zien, hoe je nu een vergelijking van de lijn opstelt.

Je kunt de vergelijking van de lijn ook rechtstreeks uit de parametervoorstelling halen.

e Laat zien hoe dit gaat door de parameter t weg te werken uit beide vergelijkingen van de parametervoorstelling.

Opgave 2

De lijn m gaat door de punten $A(2,3)$ en $B(4,0)$.

a Stel voor l een vectorvoorstelling en een parametervoorstelling op.

b Waarom wordt bij a gesproken over 'een' vectorvoorstelling en 'een' parametervoorstelling?

c Stel een vergelijking van l op.

d Controleer nu dat de vergelijking die je gevonden een richtingscoëfficiënt heeft die past bij de richtingsvector.

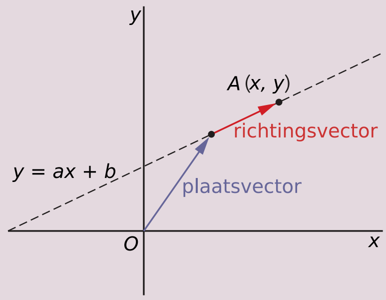
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Je ziet hier hoe je de plaats een willekeurig punt A dat over een rechte lijn beweegt door t te variëren kunt beschrijven met twee vectoren:

- de **plaatsvector** of **steunvector** $\vec{p}$ naar een vast punt van de lijn
- een **richtingsvector** $\vec{r}$ (bij $t = 1$)



Figuur 1.3

Neem lijn l door $B(\text{-}1,2)$ met $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Naar elk punt $A(x,y)$ van l wijst een vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-}1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dit noem je een **vectorvoorstelling van de lijn** l. De plaatsvector is een vector vanuit $O(0,0)$ naar een punt B op de lijn, de richtingsvector ligt op de lijn. Je kunt dit ook schrijven als **parametervoorstelling van de lijn** l: $x(t) = \text{-}1 + 2t$ en $y(t) = 2 + t$.

De richtingsvector kun je vergroten of verkleinen tot $\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

En daarom is de richtingscoëfficiënt van de lijn $0{,}5$. De vergelijking is dus $y = 0{,}5x + 2{,}5$, ofwel $x - 2y = \text{-}5$.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door $P(\text{-}2,3)$ en $Q(4,0)$. Maak vervolgens vanuit de vectorvoorstelling een vergelijking van lijn PQ.

Antwoord

Elk punt van die lijn bereik je vanuit O door eerst naar een punt ervan (bijvoorbeeld P) te ‘lopen’ en vervolgens de richtingsvector (bijvoorbeeld $\overrightarrow{PQ}$) te verlengen, of verkorten. Dus:

- een plaatsvector (steunvector) van l is $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \text{-}2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
- een richtingsvector van l is $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ \text{-}3 \end{pmatrix}$;

Die richtingsvector kun je nog inkorten door beide kentallen door 3 te delen.

Een mogelijke vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-}2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \text{-}1 \end{pmatrix}$.

Je kunt hierbij een vergelijking maken door in de bijbehorende parametervoorstelling $x = -2 + 2t$ en $y = 3 - t$ de parameter t weg te werken. Je krijgt dan $x + 2y = 4$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je een vectorvoorstelling maakt van een lijn door twee gegeven punten.

a Maak een andere vectorvoorstelling van deze lijn door $\overrightarrow{OQ}$ als plaatsvector en (een verlengde of verkorte vector) $\overrightarrow{QP}$ als richtingsvector te gebruiken.

b Gebruik de parametervoorstelling $x = -2 + 2t$ en $y = 3 - t$ en stel een vergelijking van lijn PQ op door hieruit de t weg te werken.

c Laat ook zien, dat je vanuit de vectorvoorstelling die je bij a hebt gevonden dezelfde vergelijking voor lijn PQ kunt opstellen.

Opgave 4

a Maak een vectorvoorstelling en een vergelijking van de lijn door $R(-4,1)$ en $S(2,-1)$.

b Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de lijn door $A(-3,0)$ en $B(2,5)$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de lijn $l : 4x + 3y = 12$. Stel een parametervoorstelling en een vectorvoorstelling op van lijn l.

Antwoord

Er zijn verschillende manieren om dit te doen:

- Neem bijvoorbeeld $x = 3t$, dan is $4 \cdot 3t + 3y = 12$ en dus $y = 4 - 4t$.
  Je parametervoorstelling is $x = 3t$ en $y = 4 - 4t$. De bijbehorende vectorvoorstelling kun je meteen opschrijven.
- Bepaal twee punten op lijn l, bijvoorbeeld $A(3,0)$ en $B(0,4)$ en stel een vectorvoorstelling op van een lijn door deze twee punten.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt uitgelegd hoe je vanuit een vergelijking van een lijn een bijpassende vectorvoorstelling en parametervoorstelling kunt maken. Een algebraïsche manier is het invoeren van de parameter t door bijvoorbeeld $x = 3t$ te kiezen.

a Waarom wordt $x = 3t$ gekozen en niet $x = t$?

b Ga na, dat de parametervoorstelling overeenkomt met de vectorvoorstelling die je verderop in het voorbeeld aantreft.

Bekijk de meer meetkundige methode van het bepalen van twee punten op de lijn en daarmee de vectorvoorstelling maken.

c Laat zien hoe dit in zijn werk gaat.

Opgave 6

Stel van de volgende lijnen een parametervoorstelling op.

a $l: 2x - 5y = 10$

b $m: y = 12 - 0{,}25x$

Voorbeeld 3

Twee punten P en Q bewegen in een cartesisch Oxy-assenstelsel. Beide banen zijn rechte lijnen. Op $t = 0$ zit P in $(0,1)$ en Q in $(\text{-}2,6)$. Op $t = 6$ zit P in $(6,3)$ en Q in $(4,0)$. Beide banen snijden elkaar in punt S.
Bereken de exacte coördinaten van dit punt en licht toe waarom beide punten niet met elkaar in botsing komen.

Antwoord

Je kunt van beide banen een vectorvoorstelling en een bijpassende parametervoorstelling opstellen:

- Punt $P(x,y)$ ligt op lijn l met:

  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ en dus $x = t$ en $y = 1 + \frac{1}{3}t$.

- Punt $Q(x,y)$ ligt op lijn m met:

  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-}2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-}1 \end{pmatrix}$ en dus $x = \text{-}2 + t$ en $y = 6 - t$.

Denk er om dat je beide richtingsvectoren niet mag vergroten of verkleinen!

Als je een waarde van t zoekt waarvoor beide punten op dezelfde plek zitten (botsen), dan moet $t = \text{-}2 + t \wedge 1 + \frac{1}{3}t = 6 - t$. En dat levert geen mogelijke waarde voor t op.

Toch hebben beide banen een snijpunt. Dat kun je op diverse manieren berekenen:

- Kies in de vectorvoorstelling (of parametervoorstelling) van m een andere letter voor de parameter en los het stelsel vergelijkingen dat hoort bij het snijpunt van beide banen exact op.
- Maak van beide parametervoorstellingen vergelijkingen in x en y en bereken daarmee het gevraagde snijpunt.
- Maak van één van beide parametervoorstellingen een vergelijking in x en y en vul daarin de parametervergelijkingen van de andere lijn in.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** wordt het snijpunt van de banen van twee bewegende punten berekend.

a Laat zien hoe je aan de twee parametervoorstellingen komt.

b Waarom mogen de richtingsvectoren nu niet worden verlengd of verkort?

c Bereken het snijpunt van beide banen door in de vectorvoorstelling van m de parameter t te vervangen door s en

$t = \text{-}2 + s \wedge 1 + \frac{1}{3}t = 6 - s$ op te lossen.

d Je kunt ook eerst vergelijkingen maken van beide lijnen. Bereken het snijpunt ook op deze manier.

e En bereken tenslotte het snijpunt nog eens vanuit een vergelijking van de éne lijn en een parametervoorstelling van de andere.

Opgave 8

Bereken exact het snijpunt van de lijnen l en m in de volgende gevallen.

a $l: 2x - y = 12$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en m door $x = 1 + s$ en $y = 3s$.

Opgave 9

In een cartesisch assenstelsel bewegen de punten A en B over de lijnen l en m. Op $t = 0$ zit A in $(1,4)$ en B in $(-1,0)$. Op $t = 4$ zit A in $(5,3)$ en B in $(4,1)$.

a Stel de parametervoorstellingen van l en m op.

b Waarom botsen deze punten nu wel tegen elkaar?

c Bereken de coördinaten van het botsingspunt.

d Laat zien dat je dit punt ook kunt berekenen vanuit twee vergelijkingen van l en m.

Verwerken

Opgave 10

Maak bij de volgende lijnen een passende vectorvoorstelling:

a de lijn l door $P(-20,45)$ en $Q(30,15)$;

b de lijn m met vergelijking $2x - 5y = 10$;

c de lijn n door $P(-20,45)$ en evenwijdig met m;

d de x-as.

Opgave 11

Gegeven zijn de lijnen l door $A(30,0)$ en $B(0,20)$ en $m: x - y = 50$.

a Stel van beide lijnen een vectorvoorstelling op.

b Bereken exact het snijpunt van beide lijnen.

Opgave 12

Twee punten P en Q bewegen in een cartesisch Oxy-assenstelsel. P beweegt over de lijn $l: x + 2y = 20$, zit op $t = 0$ op de y-as en op $t = 10$ op de x-as. Q beweegt over lijn m en zit op $t = 0$ in het punt $(2,0)$ en op $t = 6$ in $(8,12)$.

a Stel een parametervoorstelling op voor de beweging van punt Q.

b Bereken het snijpunt van l en m.

c Komen beide punten P en Q met elkaar in botsing?

Opgave 13

Stel in de volgende gevallen een parametervoorstelling van l op.

a l is evenwijdig met de lijn $m: 4x - y = 16$ en gaat door $P(2,5)$.

b l gaat door $P(2,5)$ en maakt een hoek van $45°$ met de x-as.

Opgave 14

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de tegenoverliggende zijde. Gegeven is de driehoek OAB door de punten $O(0,0)$, $A(8,2)$ en $B(4,6)$.

Bereken het snijpunt van de zwaartelijn door A en de zwaartelijn door B. Laat zien, dat de zwaartelijn door O ook door ditzelfde snijpunt gaat.

Toepassen

Opgave 15: Bewijs: drie zwaartelijnen door één punt

Door de assen verstandig te kiezen kun je elke driehoek ABC beschrijven met de hoekpunten $A(a,0), B(b,0)$ en $C(0,c)$.

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de tegenoverliggende zijde. Toon aan dat alle drie de zwaartelijnen door één punt gaan. Druk de coördinaten van dit punt uit in a, b en c.

Testen

Opgave 16

Gegeven de lijnen l door $A(-3,2)$ en $B(5,1)$ en m met vergelijking $x + 2y = 24$.

a Stel van beide lijnen een vectorvoorstelling op.

b Bereken het snijpunt van beide lijnen.

Punt P beweegt over lijn l en punt Q over lijn m. Op $t = 0$ zitten beide punten op de y-as en op $t = 6$ zit P en Q op de x-as.

c Onderzoek met behulp van een berekening of beide punten met elkaar botsen.

Opgave 17

Gegeven is lijn l door: $3x - 5y = 15$.

a Stel een parametervoorstelling op van lijn m door $P(2,3)$ en evenwijdig met l.

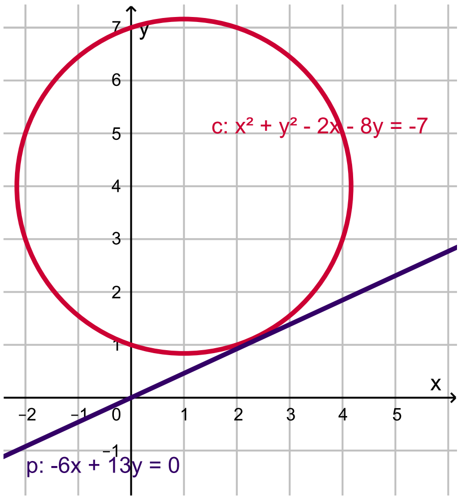
b Bereken de snijpunten met de assen van lijn m.

2.2 Lijnen en cirkels

Inleiding

Je ziet hier een cirkel en een lijn gemaakt in GeoGebra.

Cirkels en lijnen kun je algebraïsch weergeven door vergelijkingen en door vectorvoorstellingen (ook wel parametervoorstellingen). Maar wanneer stelt een vergelijking of een vectorvoorstelling nu een cirkel en wanneer een (rechte) lijn voor?



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- wanneer een vergelijking of een parametervoorstelling een rechte lijn of een cirkel beschrijft;
- uit een vergelijking of een parametervoorstelling middelpunt en straal van een cirkel halen;
- snijpunten berekenen bij lijnen en cirkels.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen van lijnen en cirkels en vectorvoorstellingen van lijnen;
- werken met het inproduct van twee vectoren.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

Teken een cirkel c met middelpunt $M(0,0)$ en straal 4. Het punt $P(x,y)$ doorloopt deze cirkel als je t laat toenemen vanaf 0 tot 2π. Het startpunt en eindpunt is $P(1,0)$.

a Met welke twee formules kun je de coördinaten $x(t)$ en $y(t)$ van P beschrijven?

Stel je nu voor dat het middelpunt van de cirkel het punt $M(1,3)$ is, terwijl de straal nog steeds 4 is. Het punt $P(x,y)$ doorloopt deze cirkel als je t laat toenemen vanaf 0 tot 2π. Het startpunt en eindpunt is $P(2,4)$.

b Met welke twee formules kun je dan de coördinaten $x(t)$ en $y(t)$ van P beschrijven?

Uitleg

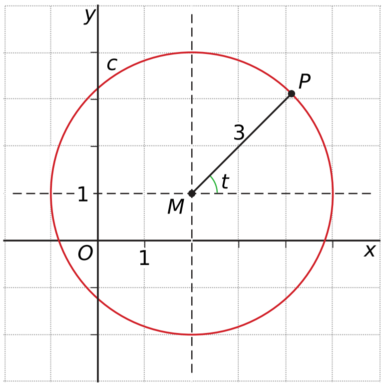
Bekijk de applet

Je kunt ook een cirkel beschrijven met een vectorvoorstelling of een parametervoorstelling. Hier zie je een cirkel met middelpunt $M(2,1)$ en straal 3. Je gaat uit van een punt P dat de cirkel doorloopt afhankelijk van een parameter t. In de figuur hiernaast wordt voor die parameter de hoek gekozen die $\overrightarrow{MP}$ met de positieve x-as maakt. Op $t = 0$ is die hoek 0 rad. Op $t = 2\pi$ heeft het punt P de hele cirkel precies één keer doorlopen.
De positie van punt P in het Oxy-assenstelsel wordt beschreven door de vector $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$.

Ga na dat de cirkel is te beschrijven door

- de vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$;
- de parametervoorstelling $x(t) = 2 + 3\cos(t)$ en $y(t) = 1 + 3\sin(t)$.

Hierin is t de hoek in radialen ten opzichte van een lijn door M en evenwijdig aan de x-as.



Figuur 2.2

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de parametervoorstelling (en de vectorvoorstelling) van een cirkel geïntroduceerd.

a Leg uit waarom $\overrightarrow{OP}= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$.

b Welk punt is P als $t = \frac{1}{4}\pi$? En welk punt als $t = \frac{3}{4}\pi$?

c Welke waarden voor t horen er bij het punt $P\left(2 - 1{,}5\sqrt{2}; 1 - 1{,}5\sqrt{2}\right)$?

d Voor welke punten op de cirkel geldt $y = 2{,}5$?

e Benader in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de punten P waarvoor $x = 1$.

Opgave 2

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(1,3)$ en straal 2.

a Stel een parametervoorstelling $(x(t), y(t))$ van c op.

b Welke vergelijking heeft cirkel c?

c Laat zien dat de parametervoorstelling die je bij a hebt gevonden ook aan de vergelijking van de cirkel voldoet voor elke waarde van t.

d Bereken de snijpunten van de cirkel met de y-as zowel met behulp van de vergelijking als met behulp van de parametervoorstelling.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

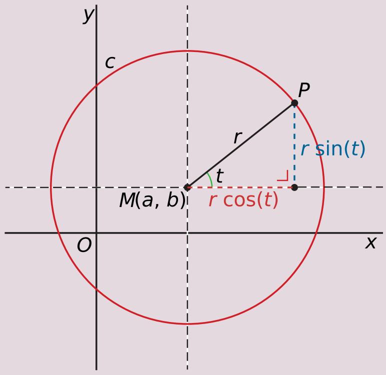
Cirkels en lijnen kun je algebraïsch voorstellen door **vergelijkingen** en door **vectorvoorstellingen**.
Bij een vectorvoorstelling denk je aan vectoren. Je kunt echter ook denken aan een zich in de tijd verplaatsend punt. De tijd is dan een parameter waar de plaats van het punt van af hangt. In dat geval spreek je van een **parametervoorstelling**.

De cirkel c heeft als mogelijke:

- vergelijking $(x-2)^2+(y-1)^2=9$;
- vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$
- parametervoorstelling $x(t)=2+3\cos(t)$ en $y(t)=1+3\sin(t)$.

Hierin is t de hoek in radialen ten opzichte van een lijn door M en evenwijdig aan de x-as.

Welke algebraïsche voorstelling van een cirkel je gebruikt hangt van de omstandigheden af. Heeft de vergelijking van de cirkel niet de vorm waarin je het middelpunt en de straal kunt aflezen, dan kun je hem door **kwadraat afsplitsen** in die vorm brengen.



Figuur 2.3

Voorbeeld 1

Stel van de cirkel c: $x^2+y^2-6x+4y=0$ een parametervoorstelling op.

Antwoord

Wil je van een cirkel een parametervoorstelling maken, dan bepaal je eerst middelpunt en straal.
Daarvoor moet je in de gegeven vergelijking twee keer een kwadraat afsplitsen:
$x^2+y^2-6x+4y=0$ geeft $(x-3)^2-9+(y+2)^2-4=0$,
zodat de vergelijking wordt: $(x-3)^2+(y+2)^2=13$.

Nu je weet dat c een cirkel met middelpunt $M(3,-2)$ en straal $\sqrt{13}$ is, kun je de parametervoorstelling opstellen: $x(t)=3+\sqrt{13}\cdot\cos(t)$ en $y(t)=-2+\sqrt{13}\cdot\sin(t)$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je van de vergelijking van een cirkel een parametervoorstelling kunt maken.

a Het middelpunt en de straal van de cirkel worden bepaald door twee keer een kwadraat af te splitsen. Ga na hoe dit in zijn werk gaat.

b De parametervoorstelling van de cirkel wordt direct opgeschreven vanuit het middelpunt en de straal. Welke aanname wordt er dan gedaan met betrekking tot de parameter t?

c Beschrijft de parametervoorstelling $x(t) = 3 + \sqrt{13} \cdot \sin(t)$ en $y(t) = -2 + \sqrt{13} \cdot \cos(t)$ dezelfde cirkel? En zo ja, wat stelt de parameter t dan voor?

Opgave 4

Stel van de cirkels die zijn gegeven door de volgende vergelijkingen een parametervoorstelling op.

a $x^2 + y^2 = 12y$

b $x^2 + y^2 + 6x = 16$

c $x^2 - 3x = 12 - 6y - y^2$

Opgave 5

Soms ziet een vergelijking er uit alsof die bij een cirkel hoort en je er een parametervoorstelling van kunt maken. Ga bij de volgende vergelijkingen na of dit het geval is.

a $x^2 + y^2 + 8x + 4y = 0$

b $x^2 + y^2 - 8x + 4y = -25$

c $2x^2 + y^2 + 8x = x^2 + 4y$

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de cirkel c door de parametervoorstelling $(x(t), y(t)) = (2 + 5\cos(t), 1 + 5\sin(t))$ en de lijn l door de vergelijking $7y - 6x = 5$. Bereken de snijpunten van c en l algebraïsch en breng cirkel en lijn in beeld op je grafische rekenmachine.

Antwoord

Op een grafische rekenmachine kun je een cirkel plotten die is gegeven door een parametervoorstelling, zie **Practicum**. Om de lijn ook in beeld te krijgen zet je de vergelijking ervan om in een parametervoorstelling, bijvoorbeeld $(x,y) = \left(t, \frac{6}{7}t + \frac{5}{7}\right)$.

Je kunt het algebraïsch berekenen van de snijpunten alleen voor elkaar krijgen als je van de parametervoorstelling van c eerst een vergelijking maakt. Daarin substitueer je de vergelijking van l. Omdat je uit de gegeven parametervoorstelling het middelpunt M en de straal r van de cirkel direct kunt aflezen, is dit te doen. Ga na, dat je de punten $(5,5)$ en $(-2,-1)$ krijgt.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt beschreven hoe je de snijpunten van een lijn en een cirkel kunt berekenen. Het rekenwerk zelf moet je nog doen.

a Bereken de gevraagde snijpunten. Voer alle rekenstappen ook echt algebraïsch uit.

b Je zou misschien denken dat je deze snijpunten wel snel kunt vinden door beide parametervoorstellingen gelijk te stellen. Laat zien, dat dit niet lukt.

c Kun je snijpunten vinden door de parametervoorstelling van de cirkel in de vergelijking van de lijn te substitueren?

Opgave 7

Bereken de snijpunten van de gegeven lijnen en cirkels op algebraïsche wijze.

a Cirkel c_1: $(x(t), y(t)) = \left(-1 + \sqrt{13}\cos(t), 2 + \sqrt{13}\sin(t)\right)$ en lijn l: $(x(s), y(s)) = (s, 4 + s)$.

b Cirkel c_1: $(x(t), y(t)) = \left(-1 + \sqrt{13}\cos(t), 2 + \sqrt{13}\sin(t)\right)$ en

cirkel c_2: $\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{6{,}5}\cos(s) \\ \sqrt{6{,}5}\sin(s) \end{pmatrix}$.

Verwerken

Opgave 8

Gegeven zijn de twee cirkels c_1 en c_2 door

$c_1 : x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$

en

c_2: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van c_1 met de assen.

b Bereken de snijpunten van c_1 en c_2.

c Bereken van c_1 het exacte middelpunt en de exacte straal en stel een parametervoorstelling van c_1 op. Teken beide cirkels in één figuur.

Opgave 9

Teken in een assenstelsel de punten $A(3,0)$, $B(5,2)$ en $C(-1,4)$.

a Stel een parametervoorstelling op van de lijn door A en B.

b Stel een parametervoorstelling op van de cirkel door A, B en C.

Opgave 10

Een cirkel c is gegeven door de parametervoorstelling $x = 3 + 5\cos(t)$ en $y = -1 + 5\sin(t)$, met $0 \leq t \leq \pi$. c snijdt de assen in de punten A, B, C en D.

Bereken de grootste afstand tussen twee van die vier punten.

Opgave 11

Bereken (indien mogelijk) de straal en de coördinaten van het middelpunt van deze cirkels en stel een parametervoorstelling van de cirkels op.

a $x^2 + y^2 = 6x - 4y - 5$

b $x^2 + y^2 = 6x - 4y - 50$

c $x(x + 4) = 3 - y(y + 2)$

d $x^2 + y^2 = 4x + 2y - 5$

Opgave 12

Gegeven is de cirkel c door $x(t) = 1 + \sqrt{5}\cos(t)$ en $y(t) = -2 + \sqrt{5}\sin(t)$ en de lijn m: $x - 2y = 2{,}5$.

a Bereken algebraïsch in twee decimalen nauwkeurig de lengte van het lijnstuk PQ als P en Q de snijpunten van m met cirkel c zijn.

b Toon aan dat vierhoek $MQOP$ (of $MPOQ$, afhankelijk van wat je P en wat je Q hebt genoemd) een ruit is.

Toepassen

Opgave 13: Cirkels en lijnstuk

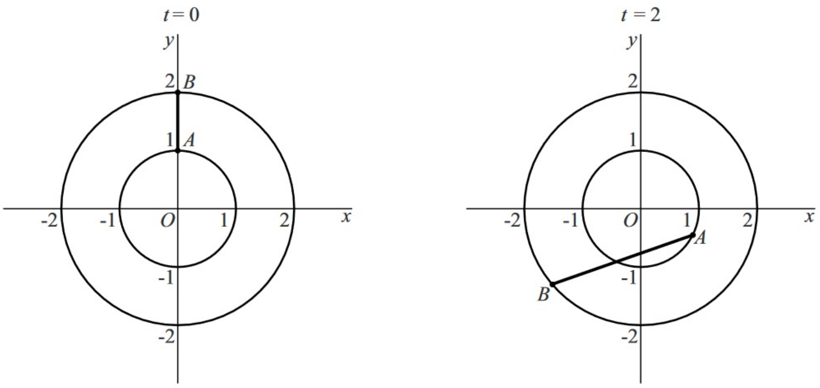
Over een cirkel c_1 met middelpunt $M(0,0)$ en straal $r = 1$ beweegt een punt A met de tijdsafhankelijke parametervoorstelling:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Over een cirkel c_2 met middelpunt $M(0,0)$ en straal $r = 2$ beweegt een punt B met de tijdsafhankelijke parametervoorstelling:

$$\begin{cases} x(t) = 2\sin(2t) \\ y(t) = 2\cos(2t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Bekijk de figuur met de cirkels en het lijnstuk AB getekend voor de tijdstippen $t = 0$ en $t = 2$.



Figuur 2.4

a Hoe kun je aan de parametervoorstellingen zien dat punt B twee keer zo snel ronddraait als punt A?

b Op de tijdstippen waarop B zich op de x-as bevindt, bevindt het punt A zich op de lijn $y = x$ of $y = -x$. Toon dit aan.

c Er zijn twee tijdstippen waarop AB horizontaal is én onder de x-as ligt. Bereken deze twee tijdstippen en bijbehorende coördinaten.

(naar: pilotexamen vwo wiskunde B in 2015, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 14

Gegeven zijn de cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 12x - 10$ en c_2 met middelpunt $M_2(4,2)$ en straal $\sqrt{10}$.

a Bereken het middelpunt M_1 en de straal van c_1.

b Stel een parametervoorstelling op van c_2.

c Bereken de snijpunten A en B van c_1 en c_2.

Opgave 15

Bereken de snijpunten van de cirkel c gegeven door $x = -2 + 5\sin(t)$ en $y = 4 + 5\cos(t)$ (met $0 \leq t \leq 2\pi$) en de lijn l met vergelijking $y = 0{,}5x$.

Practicum

Met de grafische rekenmachine kun je cirkels tekenen als ze zijn gegeven door een parametervoorstelling. In dit practicum kun je nalezen hoe dat gaat.

- **Parameterkrommen met de TI84**
- **Parameterkrommen met de TInspire**
- **Parameterkrommen met de Casio fx-CG50**
- **Parameterkrommen met de HPprime**
- **Parameterkrommen met de NumWorks**

Wil je een cirkel ook echt als cirkel zien, dan moet je op beide assen dezelfde eenheid gebruiken.

Het is meestal mooier om met **GeoGebra** te werken als je cirkels en lijnen in beeld wilt brengen. **Op de Math4all website kun je met GeoGebra leren werken** via Hulpmiddelen > Practica > GeoGebra.
Een **parametervoorstelling** voer je in door in de invoerbalk eerst t=0 te typen, je krijgt dan een variabele t die je (klikken met de rechter muisknop en 'Object tonen' kiezen) als schuifbalk kunt laten zien.
Vervolgens typ je op de invoerbalk bijvoorbeeld P=(4*cos(t),4*sin(t)) en je krijgt een punt P dat gaat bewegen zodra je t verschuift. De gewenste waarden voor t kun je instellen (rechter muisknop, 'Eigenschappen').
Wil je de cirkel meteen in zijn geheel zien, dan maak je GEEN schuifbalk voor t, maar voer je in: Kromme[4*cos(t),4*sin(t),t,0,2*pi].
In plaats van t kun je ook een andere letter kiezen, als hij maar niet bij een schuifbalk hoort.

2.3 Hoeken en afstanden

Inleiding

Nu je lijnen zowel door vergelijkingen als vectorvoorstellingen of parametervoorstellingen kunt weergeven, wordt het berekenen van de hoek tussen twee lijnen meestal gedaan vanuit de twee richtingsvectoren. Je gebruikt daarbij het inproduct.
Daar kun je ook gebruik van maken om een lijn loodrecht op een andere lijn te bepalen. Dat is dan weer handig bij het berekenen van afstanden.

Je leert in dit onderwerp

- de (scherpe) hoek tussen twee lijnen te berekenen;
- een vectorvoorstelling en een vergelijking van een loodlijn op een bepaalde lijn te bepalen;
- de afstand van een punt tot een lijn en tussen twee evenwijdige lijnen te berekenen.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen en vectorvoorstellingen/parametervoorstellingen van lijnen en cirkels;
- werken met het inproduct van twee vectoren.

Verkennen

Opgave V1

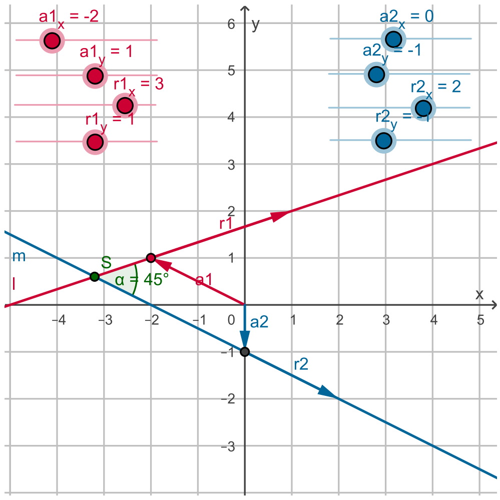
Je hebt leren werken met het inproduct om hoeken tussen vectoren te berekenen.

a Hoe kun je dit toepassen om de hoek tussen twee lijnen te berekenen?

b Hoe kun je dit toepassen om een loodlijn op een gegeven lijn en door een gegeven punt te bepalen?

Uitleg 1

Bekijk de applet



Figuur 3.1

De hoek tussen twee lijnen is de hoek tussen hun richtingsvectoren. Die bereken je met het inproduct. Hiervoor gebruik je het inproduct van twee vectoren. Het inproduct of inwendig product van de vectoren $\vec{r_1}$ en $\vec{r_2}$ is

$$\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = \left|\vec{r_1}\right| \cdot \left|\vec{r_2}\right| \cdot \cos(\alpha)$$

waarin α de hoek tussen $\vec{r_1}$ en $\vec{r_2}$ is.

Afhankelijk van je keuze van de richtingsvectoren krijg je meteen de gewenste scherpe hoek of juist een stompe hoek. In dat laatste geval moet je die stompe hoek nog omrekenen naar de bijpassende scherpe hoek.

Als die hoek $90°$ is, dan noem je de éne lijn een normaal van de andere. Het begrip ‘normaal’ betekent in de meetkunde dus zoiets als ‘loodlijn’. De richtingsvector van zo'n loodlijn is een normaalvector van de lijn waar hij loodrecht opstaat. Ga na dat een lijn met richtingsvector $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$ als normaalvector heeft $\vec{n} = \begin{pmatrix} r_y \\ -r_x \end{pmatrix}$ of een veelvoud hiervan. Dat deze twee vectoren loodrecht op elkaar staan volgt uit het feit dat hun inproduct 0 is.

Met behulp van een normaalvector bepaal je snel een vectorvoorstelling van een loodlijn door een bepaald punt op een gegeven lijn.

Opgave 1

Lees in **Uitleg 1** hoe je de hoek tussen twee lijnen berekent. Teken de lijnen l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ in een cartesisch assenstelsel.

a Welke vectoren bepalen de richting van deze lijnen?

b Bereken de hoek tussen de in a bedoelde vectoren met behulp van het inproduct.

c Is de hoek die beide lijnen met elkaar maken automatisch gelijk aan deze hoek?

Opgave 2

Teken de lijnen k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en n: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

in een cartesisch assenstelsel.

a Bereken met behulp van het inproduct de hoek tussen beide richtingsvectoren.

b Is deze hoek gelijk aan de hoek tussen k en n? Leg uit waarom.

Opgave 3

In **Uitleg 1** zie je dat de vectoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$ en $\vec{n} = \begin{pmatrix} r_y \\ -r_x \end{pmatrix}$ elkaars normaalvector zijn, dus loodrecht op elkaar staan.

a Laat met behulp van het inproduct zien dat deze vectoren inderdaad een hoek van 90° met elkaar maken.

b Welke vector staat loodrecht op $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$? En is dat de enige vector die loodrecht op $\vec{v}$ staat?

c Welke eigenschap heeft het inproduct van twee vectoren die loodrecht op elkaar staan?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Bijzonder handig is het dat de normaalvector van een lijn gemakkelijk uit de vergelijking ervan is af te lezen.

In de figuur zie je de lijn l: $-x + 3y = 5$.

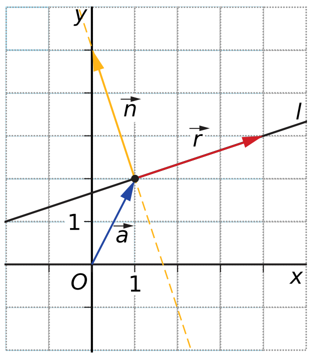
Een normaalvector is $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Merk op dat de kentallen van deze normaalvector precies de constanten voor x en y in de gegeven vergelijking zijn. Met de applet kun je nagaan dat dit altijd zo is.

Maar narekenen kun je het ook:

$-x + 3y = 5$ is te schrijven als $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$, dus de lijn heeft een richtingscoëfficiënt van $\frac{1}{3}$ en als richtingsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Het inproduct van deze richtingsvector met de normaalvector gelijk is aan nul: $-1 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$ en dus staan beide vectoren loodrecht op elkaar.



Figuur 3.2

Opgave 4

Bekijk in **Uitleg 2** wat een normaalvector van een lijn is.

Gegeven is de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a Welke normaalvector heeft k? Laat zien dat dit inderdaad een vector loodrecht op k is door het inproduct met de richtingsvector te berekenen.

b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door O en loodrecht op k.

Opgave 5

Neem de lijn l: $-x + 3y = 5$.

a Stel een parametervoorstelling op van de lijn m door O loodrecht op l.

b Hoe kun je met behulp van lijn m de afstand van O tot l berekenen? Voer die berekening ook uit.

Opgave 6

Gegeven lijn m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a Bepaal de richtingsvector en de normaalvector van m.

b Leg uit hoe je nu gemakkelijk de vergelijking van m kunt maken.

c Maak nu ook zo handig mogelijk de vergelijking van de loodlijn p door $(2,3)$ op m.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder de **hoek tussen twee lijnen** versta je de scherpe hoek die beide lijnen met elkaar maken. Je kunt die hoek berekenen door de hoek tussen beide richtingsvectoren te berekenen met behulp van hun inproduct. Als die hoek α is, is de hoek tussen beide lijnen de kleinste van de hoeken α en $180° - \alpha$. Een lijn die loodrecht op een andere lijn staat is een **loodlijn** van die lijn.

Een **normaal** is een loodlijn op een gegeven lijn.

Een **normaalvector** is een vector die loodrecht staat op een gegeven lijn.

Een lijn met richtingsvector $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$ heeft normaalvector $\vec{n} = \begin{pmatrix} r_y \\ -r_x \end{pmatrix}$ of een veelvoud ervan.

Een lijn met vergelijking $ax + by = c$ heeft:

- een normaalvector $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$;
- een richtingsvector $\vec{r} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Hiermee kun je van een loodlijn op een gegeven lijn een vectorvoorstelling of een parametervoorstelling maken. En daarmee kun je dan weer de **afstand van een punt tot een lijn** berekenen. De afstand van punt P tot lijn l noteer je als $\mathrm{d}(P,l)$ (met de ‘d’ van ‘distance’).

Een **middelloodlijn** van een lijnstuk AB is een loodlijn van lijn AB en gaat door het midden van AB. Elk punt van zo'n middelloodlijn ligt even ver van A als van B.
Elke driehoek ABC heeft drie middelloodlijnen van de zijden. Deze drie middelloodlijnen gaan door één punt, dat dus even ver van alle drie de hoekpunten af ligt. Dit punt is het middelpunt van de **omgeschreven cirkel** van ΔABC, de cirkel door de drie hoekpunten van deze driehoek.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Bereken de hoek die de lijn $l : 4x + 3y = 12$ maakt met de lijn m door de punten $A(\text{-}2,1)$ en $B(4,3)$.

Antwoord

De snelste manier om een richtingsvector van l te vinden is het aflezen van een normaalvector uit de vergelijking. Die normaalvector is $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus een richtingsvector van l is $\begin{pmatrix} \text{-}3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Van lijn m vind je een richtingsvector vanuit de twee punten waar hij door gaat. Een richtingsvector van m is $\begin{pmatrix} 4 - \text{-}2 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Met behulp van het inproduct van beide richtingsvectoren vind je de hoek ertussen. Het wordt een stompe hoek van ongeveer $108{,}4°$. Ga dit zelf na. En ga ook na, dat de hoek tussen beide lijnen dus ongeveer $71{,}6°$ is.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 1**.

Je kunt de hoek tussen beide lijnen berekenen vanuit de richtingsvectoren van de lijnen.

a Waarmee moet je dan rekening houden?

b Loop de berekeningen zelf na.

Opgave 8

a Bereken de hoek die de lijnen p: $x - 2y = 8$ en q: $5x + 3y = 10$ in graden nauwkeurig.

b Bereken de hoek die de lijn door $A(0,4)$ en $B(5,0)$ maakt met de lijn door $C(0,\text{-}2)$ en $D(\text{-}10,0)$.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Bereken de afstand van punt $A(-2,1)$ tot de lijn l: $4x + 3y = 12$.

Antwoord

De normaalvector van l is $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van de loodlijn door $A(-2,1)$ op l is daarom:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Het snijpunt S van deze loodlijn en l vind je door een willekeurig punt van de loodlijn $(-2 + 4t, 1 + 3t)$ in de vergelijking van de lijn in te vullen. Als je S hebt gevonden kun je met de afstandsformule de lengte van lijnstuk AQ berekenen.

Opgave 9

Bestudeer in **Voorbeeld 2** hoe je de afstand van een punt tot een lijn berekent met behulp van de normaalvector.
Gegeven is de lijn PQ door $P(-5,3)$ en $Q(1,1)$ en punt $A(4,8)$.

a Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door A en loodrecht op PQ.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen PQ en l.

c Bereken nu $\text{d}(A,l)$, de afstand van punt A tot lijn l.

Opgave 10

Bereken de afstand van $P(9,7)$ tot de lijn l: $x + 2y = 6$.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

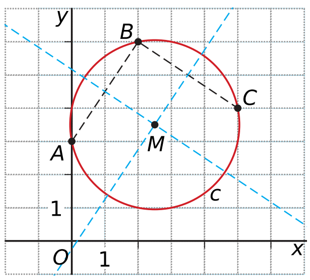
Gegeven zijn de punten $A(0,3)$, $B(2,6)$ en $C(5,4)$. Stel een vergelijking op van de cirkel c door deze drie punten.

Antwoord

Stel eerst vergelijkingen op van de middelloodlijnen van (bijvoorbeeld) AB en BC.

- De middelloodlijn van AB heeft een richtingscoëfficiënt van $-\frac{2}{3}$ en gaat door $(1; 4,5)$. De vergelijking ervan is $y = -\frac{2}{3}x + 5\frac{1}{6}$.
- De middelloodlijn van BC heeft een richtingscoëfficiënt van 1,5 en gaat door $(3,5; 5)$. De vergelijking ervan is $y = 1,5x - 0,25$.

Het snijpunt van beide middelloodlijnen is $M(2,5; 3,5)$ en dit is het middelpunt van de bedoelde cirkel. Deze heeft daarom als vergelijking $(x - 2,5)^2 + (y - 3,5)^2 = r^2$. De juiste waarde van r^2 vind je door een punt van de cirkel (bijvoorbeeld $A(0,3)$) in te vullen voor x en y.



Figuur 3.3

Je vindt dan: $r^2 = (0-2{,}5)^2 + (3-3{,}5)^2 = 6{,}5$. De straal van de cirkel is $\sqrt{6{,}5} \approx 2{,}55$. De uiteindelijke vergelijking van de cirkel wordt $(x-2{,}5)^2 + (y-3{,}5)^2 = 6{,}5$.

Opgave 11

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de vergelijking opstelt van de cirkel door de punten $A(0,2)$, $B(2,6)$ en $C(5,4)$. Voer de berekeningen in dit voorbeeld zelf uit. In de applet kun je de punten A, B en C verplaatsen en zo in nieuwe situaties het opstellen van de vergelijking van de cirkel oefenen. Doe dit zo vaak als nodig. Het uiteindelijke antwoord vind je in de applet.

Opgave 12

Neem in een cartesisch assenstelsel de punten $O(0,0)$, $A(4,0)$ en $B(3,5)$.

a Stel vergelijkingen op van de middelloodlijnen van OA, AB en OB.

b Laat met berekeningen zien dat die middelloodlijnen door één punt gaan.

c Teken een cirkel door die drie punten en stel er een vergelijking van op.

d Laat met berekeningen zien dat zowel O als A en B ook echt op de cirkel liggen.

Verwerken

Opgave 13

De drie lijnen l: $x+3y=6$, m: $4x-y+2=0$ en n: $x+y=6$ sluiten een driehoek ABC in.

a Bereken de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.

b Stel een vergelijking op van de cirkel door A, B en C.

Opgave 14

Bereken de afstand van $P(2,6)$ tot $l: x+2y=8$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 15

ΔPQR met $P(a,b)$, $Q(a+7,b+1)$ en $R(a+6,b-2)$ is rechthoekig.

Bewijs dit.

Opgave 16

Driehoek PQR is gegeven door $P(\text{-}5,10)$, $Q(7,7)$ en $R(0,12)$.

a Stel een vergelijking op van de hoogtelijn uit P op zijde QR.

b Stel een vergelijking op van de zwaartelijn uit P op zijde QR.

c Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van zijde QR.

d Bereken de oppervlakte van deze driehoek. Welke van de drie voorgaande lijnen kun je daar bij gebruiken?

De cirkel door de drie hoekpunten van de gegeven driehoek heet de omgeschreven cirkel van deze driehoek.

e Stel een parametervoorstelling van deze omgeschreven cirkel op. Benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

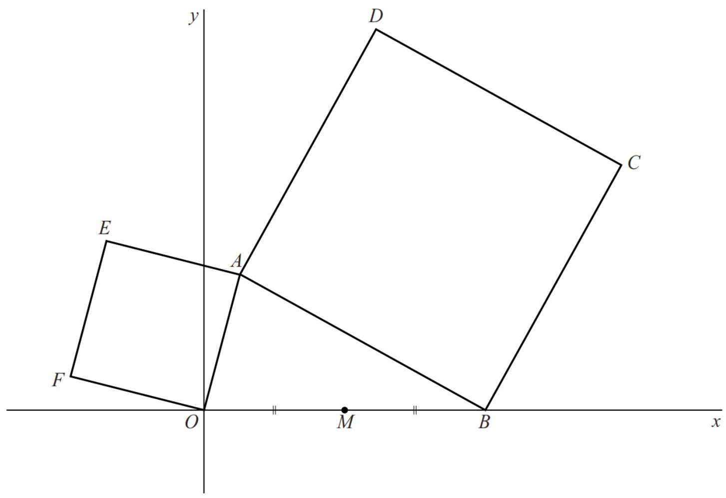
Opgave 17

Een hoogtelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt loodrecht op de tegenoverliggende zijde. Gegeven is de driehoek OAB door de punten $O(0,0)$, $A(4,1)$ en $B(2,3)$.

Bereken het snijpunt van de hoogtelijn door A en de hoogtelijn door B. Laat zien, dat de hoogtelijn door O ook door ditzelfde snijpunt gaat.

Toepassen

Opgave 18: Twee vierkanten tegen driehoek



Figuur 3.4

Voor positieve waarden van p en q is gegeven de driehoek OAB met $O(0,0)$, $A(p,q)$ en $B(2,0)$. Tegen de zijden OA en AB liggen de vierkanten $OAEF$ en $ABCD$. Deze vierkanten liggen buiten driehoek OAB. Het midden van lijnstuk OB is punt M. In de figuur is een mogelijke situatie weergegeven.

a Toon aan dat $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix}$.

b Toon aan dat lijn MA loodrecht staat op lijn ED.

(naar: pilotexamen vwo B in 2013, tweede tijdvak)

Opgave 19: Bewijs: middelloodlijnen door één punt

Gegeven is de driehoek OAB door de punten $O(a,0)$, $A(b,0)$ en $B(0,c)$.

Door de assen verstandig te kiezen kun je elke driehoek ABC beschrijven met de hoekpunten $A(a,0)$, $B(b,0)$ en $C(0,c)$. Een middelloodlijn in een driehoek is een lijn door het midden van een zijde en loodrecht op die zijde.

a Toon aan dat alle drie de middelloodlijnen door één punt gaan. Druk de coördinaten van dit punt uit in a,b en c.

b Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van deze driehoek ABC.

Opgave 20: Bewijs: hoogtelijnen door één punt

Door de assen verstandig te kiezen kun je elke driehoek ABC beschrijven met de hoekpunten $A(a,0)$, $B(b,0)$ en $C(0,c)$.

Een hoogtelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt loodrecht op de tegenoverliggende zijde. Toon aan dat alle drie de hoogtelijnen door één punt gaan. Druk de coördinaten van dit punt uit in a, b en c.

Testen

Opgave 21

Gegeven zijn de punten $A(-2,4)$, $B(6,0)$, $C(7,2)$ en $D(4,8)$.

a Bereken de hoek tussen de lijnen AB en CD in graden nauwkeurig.

b Bereken de afstand van punt D tot lijn AB.

c Bereken de coördinaten van de punten op DC die precies $\sqrt{5}$ eenheden van lijn AB af liggen.

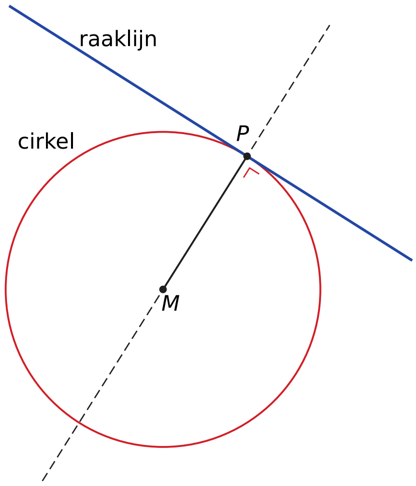
Opgave 22

Bewijs met behulp van het inproduct dat een gelijkbenige driehoek twee gelijke basishoeken heeft. Kies daartoe een handig assenstelsel waarin de coördinaten van de hoekpunten eenvoudig worden, maar wel kunnen variëren.

2.4 Raaklijnen

Inleiding

Vergelijkingen opstellen van raaklijnen aan een cirkel kun je al. Maar als je gebruik maakt van de eigenschap die in deze figuur staat uitgebeeld, kun je je daarbij af en toe veel tijd en werk besparen.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- gebruik maken van de eigenschap dat een raaklijn loodrecht staat op de straal naar het raakpunt;
- van een raaklijn aan een cirkel in een punt van die cirkel een vergelijking of een vectorvoorstelling opstellen;
- van de raaklijnen aan een cirkel in een punt buiten die cirkel vergelijkingen of vectorvoorstellingen opstellen.

Voorkennis

- snijpunten van lijnen en cirkels berekenen;
- vergelijkingen van raaklijnen aan een cirkel opstellen met behulp van de discriminantmethode.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

In de **Inleiding** zie je een cirkel om O met straal 5 en de lijn $l: y = -0{,}75x + 6{,}25$.
Lijn l raakt de cirkel in P.

a Wat weet je van de hoek tussen lijnstuk OP en lijn l? Waarom weet je dat zo zeker?

b Ga na, dat ook $Q(4,3)$ een punt van de cirkel is. Bepaal de richtingsvector van lijn OQ. Kun je hiermee een vectorvoorstelling en een vergelijking van de raaklijn in Q aan de cirkel opstellen?

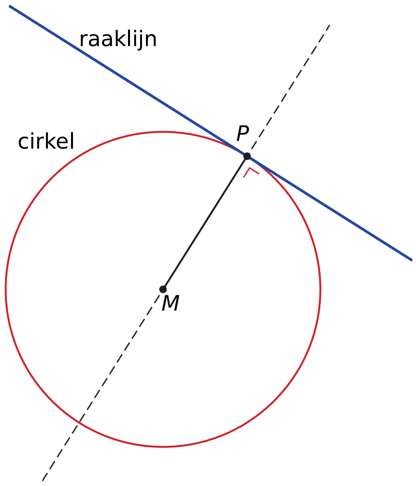
Uitleg

Bekijk de applet.

In de figuur zie je een punt P op een cirkel c. Je ziet ook dat de raaklijn in P aan de cirkel loodrecht staat op de straal OP. De raaklijn aan een cirkel staat altijd loodrecht op de straal naar het raakpunt P. Dit is een eigenschap van een raaklijn aan de cirkel.

Met behulp van symmetrie is dat snel duidelijk te maken. De hele figuur van cirkel en raaklijn is namelijk spiegelsymmetrisch t.o.v. de lijn door het middelpunt O van de cirkel en het raakpunt P. Dit betekent dat de twee hoeken bij P waarvan de raaklijn het éne been en de straal OP het andere been is even groot moeten zijn. Maar ze zijn ook samen $180°$. Dus zijn ze elk $90°$.

Dit kun je gebruiken om een vectorvoorstelling of een vergelijking op te stellen van een raaklijn als het raakpunt bekend is. De vector $\overrightarrow{OP}$ staat namelijk loodrecht op de raaklijn en is er dus een normaalvector van.
Hiermee kun je direct een vergelijking van de raaklijn opstellen, omdat ook de coördinaten van het raakpunt P gegeven zijn.



Figuur 4.2

Opgave 1

Gegeven is een cirkel c met middelpunt $O(0,0)$ en door het punt $P(3,4)$.

a Welke vergelijking heeft cirkel c?

b Welke richtingsvector heeft lijn OP?

c Welke normaalvector heeft de raaklijn in P aan cirkel c?

d Welke vergelijking heeft die raaklijn? En welke vectorvoorstelling?

e Welke vergelijking heeft de raaklijn in $P(5,0)$ aan de cirkel?

Opgave 2

Op de cirkel c met parametervoorstelling
$(x,y) = \left(1+\sqrt{10}\cos(t), 2+\sqrt{10}\sin(t)\right)$ ligt het punt $P(4,3)$. Stel een vergelijking op van de raaklijn door P aan cirkel c.

Opgave 3

Gegeven is de cirkel $c: x^2+y^2=25$ en het punt $P(7,5)$. Je wilt een vergelijking opstellen van de raaklijnen die door P gaan en raken aan cirkel c.

a Waarom staat zo'n raaklijn nu niet loodrecht op $\overrightarrow{OP}$?

b Waarom kun je een parametervoorstelling van zo'n raaklijn schrijven als $(x,y) = (7+t, 5+a\cdot t)$?

c Je weet dat zo'n raaklijn precies één punt met de cirkel c gemeen heeft. Hoe kun je daarmee a berekenen?

d Stel de vergelijkingen van beide raaklijnen op.

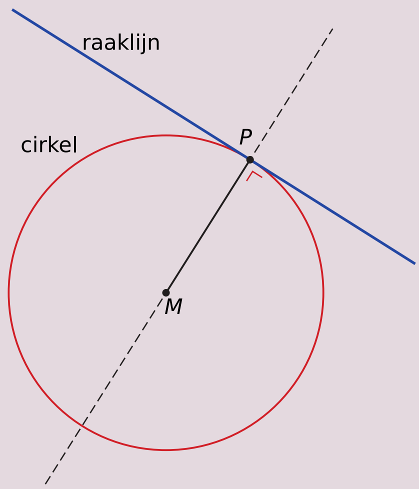
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **raaklijn** aan een cirkel c in een punt P op die cirkel staat loodrecht op de vector $\overrightarrow{MP}$, waarin M het middelpunt van de cirkel c is.

Hiervan kun je gebruik maken als je een vergelijking of een vectorvoorstelling/parametervoorstelling van zo'n raaklijn wilt maken. $\overrightarrow{MP}$ is een normaalvector van de raaklijn. En daarmee kun je de vergelijking ervan maken omdat deze raaklijn ook door het gegeven punt P moet gaan.

Heb je te maken met raaklijnen waarvan je het raakpunt niet weet, dan gebruik je andere middelen om vergelijkingen of vectorvoorstellingen/parametervoorstellingen op te stellen. Meestal werk je dan met de discriminantmethode.



Figuur 4.3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Stel een vergelijking op van de raaklijn r in het punt $P(3,5)$ aan de cirkel $c : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$.

Antwoord

Het middelpunt van de cirkel is $M(1,2)$ en het raakpunt is $P(3,5)$.

Dus is de normaalvector van de raaklijn $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

De vergelijking van de raaklijn is daarom van de vorm $2x + 3y = c$.

Omdat hij door $P(3,5)$ gaat is $2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = c$, dus $c = 21$.

Dus r heeft vergelijking $2x + 3y = 21$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je een vergelijking opstelt van een raaklijn in een punt P aan een cirkel als dit punt op de cirkel ligt. Er wordt gebruik gemaakt van de loodrechte stand van $\overrightarrow{MP}$ en de raaklijn. Je kunt echter ook gebruik maken van de parametervoorstelling van de raaklijn $(x,y) = (3+t, 5+at)$.

a Waarom is dit een geschikte parametervoorstelling van de raaklijn?

b Bereken nu a met behulp van de discriminantmethode.

c Laat zien, dat de raaklijn die je zo hebt gevonden inderdaad loodrecht staat op $\overrightarrow{MP}$.

Opgave 5

Gegeven $P(5,10)$ en de cirkel met parametervoorstelling $x(t) = 3 + \sqrt{20}\cos(t)$ en $y(t) = 6 + \sqrt{20}\sin(t)$.

a Stel een vergelijking op van de raaklijn in $P(5,10)$ aan deze cirkel .

b Bereken de afstand van de oorsprong van het assenstelsel tot deze raaklijn.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(4,0)$ en straal $\sqrt{10}$.
Van de familie van lijnen $l : y = ax - 2$ raken er twee aan deze cirkel. Welke twee?

Antwoord

De cirkel c heeft vergelijking: $(x-4)^2 + y^2 = 10$.
Vul de vergelijking van lijn $l : y = ax - 2$ in de cirkelvergelijking c in, en je vindt: $(x-4)^2 + (ax-2)^2 = 10$.
Haakjes wegwerken levert op: $x^2 - 8x + 16 + a^2x^2 - 4ax + 4 = 10$.
En dus: $\left(1 + a^2\right)x^2 + (-8 - 4a)x + 10 = 0$.

Omdat l en c elkaar raken heeft deze vergelijking precies één oplossing. De discriminant ervan is daarom 0.
Dus $(-8 - 4a)^2 - 4 \cdot 10 \cdot \left(1 + a^2\right) = 0$.

Uitwerken geeft: $3a^2 - 8a - 3 = 0$. Dit levert op: $a = -\frac{1}{3} \vee a = 3$.

De twee raaklijnen zijn $y = 3x - 2$ en $y = -\frac{1}{3}x - 2$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je een vergelijking opstelt van een raaklijn door een gegeven punt op de y-as aan een cirkel. Er wordt gebruik gemaakt van de discriminantmethode.

a Voer zelf deze berekening volledig uit.

b Er zijn aan deze cirkel twee raaklijnen met een richtingscoëfficiënt van 3. Laat dit ook zien met behulp van de discriminantmethode.

Als de richtingscoëfficiënt is gegeven kun je echter ook zonder discriminantmethode te werk gaan.

c Welke richtingsvector heeft de raaklijn?

d Welke richtingsvectoren hebben de stralen naar beide mogelijke raakpunten?

e Welke twee raakpunten moeten de raaklijnen met deze richting hebben?

f Hoe kun je nu de twee vergelijkingen van de raaklijnen bepalen? Ga na, dat je dezelfde krijgt als in het voorbeeld.

Opgave 7

Gegeven is de cirkel c door $x(t) = 4 + \sqrt{17}\cos(t)$ en $y(t) = 2 + \sqrt{17}\sin(t)$.

Er zijn twee raaklijnen die evenwijdig lopen met de lijn $y = -4x$.

a Stel van deze twee raaklijnen een vergelijking op.

Er zijn ook twee raaklijnen die door het punt $P(13,4)$ gaan.

b Stel van deze twee raaklijnen een vergelijking op.

Opgave 8

Gegeven zijn de cirkel c door $x^2 + y^2 = a^2$ en het punt $P(2a,0)$. Er zijn twee raaklijnen aan c die door P gaan. De bijbehorende raakpunten zijn Q en R.

a Druk de lengte van PQ uit in a.

b Bewijs met behulp van een berekening dat $PQ \perp OQ$.

Voorbeeld 3

Als twee cirkels elkaar raken, dan hebben ze precies één gemeenschappelijk punt. In dat punt hebben ze ook een gemeenschappelijke raaklijn. Laat zien dat de twee cirkels c_1 gegeven door $(x,y) = (5\cos(t), 5\sin(t))$ en c_2 gegeven door $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 125 = 0$ elkaar raken en dat hun gemeenschappelijke raaklijn loodrecht staat op de lijn die door beide middelpunten gaat.

Antwoord

Als je de snijpunten van beide cirkels berekent, dan vind je alleen het punt $P(4,3)$. Omdat dit het enige gemeenschappelijke punt van beide cirkels is raken ze elkaar daar.

De raaklijn aan c_1 staat loodrecht op $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ omdat O het middelpunt van c_1 is en P een punt van die cirkel is. De vergelijking van die raaklijn is daarom $4x + 3y = 25$.

De raaklijn aan c_2 staat loodrecht op $\overrightarrow{MP}$ waarin M het middelpunt van c_2 is. Ga zelf na, dat $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$, dus precies een veelvoud van $\overrightarrow{OP}$. Die raaklijn heeft daarom dezelfde vergelijking als de raaklijn aan c_1 en beide stralen liggen in elkaars verlengde.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** wordt gesproken over het raken van twee cirkels. Er zijn twee cirkels gegeven.

a Bereken zelf hun gemeenschappelijke punt P.

b Laat zien dat de raaklijn aan c_2 in punt P een vergelijking heeft die gelijkwaardig is met die van de raaklijn aan c_1 in punt P.

Opgave 10

Gegeven zijn de cirkels c_1 door $x^2 + y^2 = 8$ en c_2 door $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 72$.

a Laat met een berekening zien dat beide cirkels elkaar raken.

b Stel een vergelijking op van de gemeenschappelijke raaklijn van beide cirkels.

c Stel een vergelijking op van de cirkel c_3 die beide gegeven cirkels raakt.

Verwerken

Opgave 11

Gegeven is de cirkel c door $x^2 + y^2 = 34$ en het punt $P(2,8)$.

a Stel een vergelijking op van de raaklijn in $A(3,5)$ aan c.

b Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan c die door P gaan. Bereken de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken.

c Deze drie raaklijnen sluiten ΔPQR in. Bereken op algebraïsche wijze de oppervlakte van deze driehoek. Rond af op één decimaal.

Opgave 12

Stel parametervoorstellingen op van de twee lijnen l en m die evenwijdig zijn met de lijn $y = 3x$ die de cirkel c met parametervoorstelling $x(t) = 10 + 2\sqrt{10}\cos(t)$ en $y(t) = 2\sqrt{10}\sin(t)$ raken.

Opgave 13

Stel een vergelijking op van de cirkel c die de lijn l: $-2x + y = 0$ raakt in $A(2,4)$ en door het punt $B(6,0)$ gaat.

Opgave 14

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(0,4)$ en straal 4. Een lijn l gaat door $P(8,0)$, raakt cirkel c en snijdt de positieve y-as in S.

a Bereken exact de coördinaten van S.

Door O gaat een lijn die c snijdt in punt R.

b Bereken de exacte coördinaten van R als $|OR| = 6$.

Opgave 15

Gegeven is de cirkel c_1 met middelpunt $M_1(0,4)$ en straal 4. Een cirkel c_2 raakt c_1 en heeft een straal van 2 en een middelpunt M_2 dat op de lijn $y = 2$ ligt, maar niet binnen c_1.

a Bereken exact de coördinaten van M_2.

b Q is een gemeenschappelijk raakpunt van beide cirkels in het eerste kwadrant. Stel een vergelijking op van de raaklijn in Q aan beide cirkels.

Beide cirkels hebben drie raaklijnen gemeenschappelijk. Behalve de raaklijn die je bij b hebt berekend, is ook de x-as zo'n raaklijn.

c Stel een vergelijking op van de derde raaklijn.

Opgave 16

De cirkel c_1 met middelpunt $M_1(0,a)$ en straal a en de cirkel c_2 met middelpunt $M_2(p,b)$ en straal b raken elkaar in Q. Neem aan dat $a > b$.

Druk p uit in a en b.

Toepassen

Opgave 17: Raaklijnen loodrecht straal

Nu je weet dat een raaklijn aan een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt, is het werken met de discriminant niet meer nodig. Het punt $Q(1,4)$ ligt buiten de cirkel $c : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$. Er zijn twee raaklijnen te tekenen vanuit Q aan cirkel c. De bijbehorende raakpunten zijn A en B.

a M is het middelpunt van c. Bereken $|QM|$.

b De lengtes van de stralen MA en MB zijn bekend. Bereken $|QA|$ en $|QB|$.

c De punten A en B liggen op een cirkel met middelpunt Q en straal $|QA|$. Stel een vergelijking van die cirkel c_2 op.

d Bereken nu de coördinaten van A en B als snijpunten van c en c_2.

e Stel de vergelijkingen op van de twee raaklijnen aan c die door Q gaan.

Testen

Opgave 18

Cirkel c heeft middelpunt $M(2,4)$ en gaat door $O(0,0)$.

a Stel een vergelijking op van de raaklijn in O aan c.

b c heeft twee raaklijnen die evenwijdig zijn aan OM. Stel van die twee raaklijnen de vergelijkingen op.

c Door $P(8,2)$ gaan twee raaklijnen aan deze cirkel. Bereken de afstand tussen beide raakpunten die bij deze raaklijnen horen.

Opgave 19

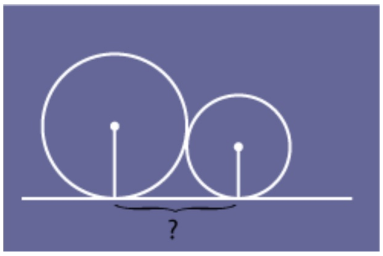
Cirkel c raakt de beide coördinaatassen en de lijn $l : 2x + y = 8$.

Bereken exact de straal van deze cirkel.

2.5 Berekeningen met cirkels

Inleiding

Met wat je tot nu toe hebt geleerd over lijnen en cirkels en een beetje meetkundig redeneren kun je een puzzel zoals deze hiernaast wel oplossen. Dit noem je een sangaku en zo'n puzzel stamt uit het Japan in de tijd van de 17e tot de 19e eeuw. Maar ook kun je hoeken tussen een lijn en een cirkel en de hoeken tussen twee cirkels berekenen.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- de hoek berekenen waaronder een lijn en een cirkel of twee cirkels elkaar snijden;
- afstanden berekenen tussen een lijn en een lijn en/of cirkel;
- berekeningen met lijnen en cirkels uitvoeren.

Voorkennis

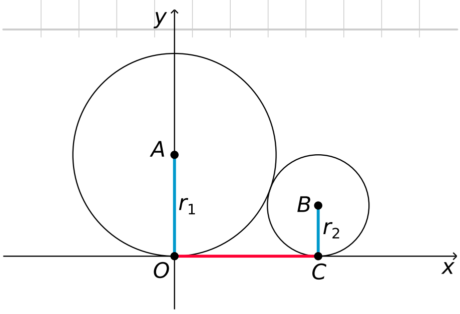
- snijpunten van lijnen en cirkels berekenen;
- de afstand van een punt tot een lijn berekenen;
- vergelijkingen van raaklijnen aan een cirkel opstellen met behulp van de discriminantmethode en met behulp van loodrechte stand.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je twee cirkels die de x-as raken in O en C en elkaar raken. Hun middelpunten zijn A en B en hun stralen zijn r_1 en r_2.

Druk de lengte van het lijnstuk OC uit in r_1 en r_2.



Figuur 5.2

Uitleg

Je hebt nu de basistechnieken over lijnen en cirkels geleerd. Tijd om dit toe te passen bij berekeningen waarin deze figuren voorkomen. Een voorbeeld is het berekenen van de hoek waaronder een lijn een cirkel snijdt.

Bekijk de applet.

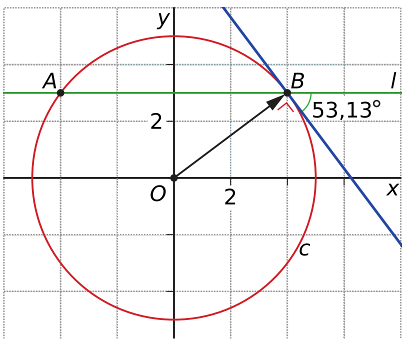
Hier zie je de lijn $l: y = 3$ die de cirkel $c: x^2 + y^2 = 25$ snijdt. Je wilt de hoek berekenen die l en c met elkaar maken.

Eerst bereken je beide snijpunten: $A(-4,3)$ en $B(4,3)$. De cirkel heeft middelpunt $O(0,0)$.

Nu ga je de vergelijking van de raaklijn opstellen in (bijvoorbeeld) B.

Omdat $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, is de richtingsvector van de raaklijn $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

De lijn $y = 0$ heeft een richtingsvector van $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De hoek tussen



Figuur 5.3

beide lijnen is daarom $53{,}13°$. Dit is tevens de hoek tussen de lijn en de cirkel.

Je kunt ook de hoek tussen twee cirkels berekenen en de afstand van een punt tot een cirkel, van een lijn tot een cirkel en tussen twee cirkels.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe de hoek wordt berekend waaronder een gegeven lijn een gegeven cirkel snijdt.

a Bereken zelf de snijpunten van l en c en de gevraagde hoek.

b Waarom hoef je maar één hoek te berekenen?

c Bereken zelf de hoek die lijn en cirkel met elkaar maken in punt A.

Opgave 2

De lijn l met vergelijking $y = x$ en de cirkel c middelpunt $M(3{,}0)$ en door het punt $P(4{,}2)$ snijden elkaar in A en B. Bereken de hoek waaronder l en c elkaar snijden in graden nauwkeurig. Rond af op één decimaal.

Opgave 3

In de **Uitleg** zie je hoe de hoek wordt berekend waaronder een gegeven lijn een gegeven cirkel snijdt.

a Beschrijf hoe je de hoek tussen twee cirkels berekent.

b Wat versta je onder de afstand van een punt tot een cirkel? En hoe bereken je die, denk je?

c Wat versta je onder de afstand van een lijn tot een cirkel? En hoe bereken je die, denk je?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder de **hoek tussen twee lijnen** versta je de hoek tussen hun twee richtingsvectoren. Die hoek kun je met het inproduct van twee vectoren berekenen.

Onder de **hoek tussen een lijn en een cirkel** versta je de hoek tussen de richtingsvector van de lijn en de richtingsvector van de raaklijn in één van beide snijpunten.

Onder de **hoek tussen twee cirkels** versta je de hoek tussen de richtingsvectoren van de raaklijnen aan deze cirkels in één van beide snijpunten.

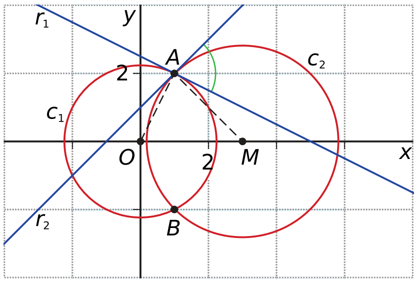
De **afstand tussen een punt en een cirkel** c met middelpunt M en straal r bereken je door van de afstand van het punt tot M de straal af te trekken: $\text{d}(P,c) = |PM| - r$.

De **afstand tussen een twee cirkels** c_1 en c_2 met middelpunten M_1 en M_2 en straal r_1 en r_2 bereken je door van de afstand tussen beide middelpunten de stralen af te trekken: $\text{d}(c_1,c_2) = |M_1M_2| - (r_1 + r_2)$.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

De twee cirkels c_1: $x^2 + y^2 = 5$ en c_2: $x^2 + y^2 = 6x - 1$ snijden elkaar in de punten A en B. Bereken de hoek waaronder ze elkaar snijden.



Figuur 5.4

Antwoord

Eerst bereken je de snijpunten $A(1,2)$ en $B(1,-2)$.
Dan stel je de raaklijn aan c_1 en die aan c_2 op in één van die punten, zeg A.

- Het middelpunt van c_1 is $O(0,0)$ en $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  De raaklijn aan c_1 in A heeft als richtingsvector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Het middelpunt van c_2 is $M(3,0)$ en $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  De raaklijn aan c_2 in A heeft als richtingsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De hoek tussen de raaklijnen bereken je met het inproduct van de twee richtingsvectoren van de raaklijnen. Je vindt ongeveer 72°.

De hoek tussen de raaklijnen is gelijk aan de hoek tussen de twee stralen naar de raakpunten. Daarmee kun je de berekening wat inkorten.

Opgave 4

De twee cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 10$ en $c_2 : x^2 + y^2 = 8y - 14$ snijden elkaar in de punten A en B. Bereken de hoek waaronder ze elkaar snijden.

Opgave 5

De cirkel c_1 met middelpunt $M_1(1,2)$ en straal 5 en de cirkel c_2 met middelpunt $M_2(4,3)$ en straal $\sqrt{5}$ snijden elkaar in de punten P en Q. Bereken de hoek waaronder ze elkaar snijden.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Bereken de afstand van lijn $l : 2x + 3y = 6$ tot cirkel c met middelpunt $M(3,4)$ en straal 2.

Antwoord

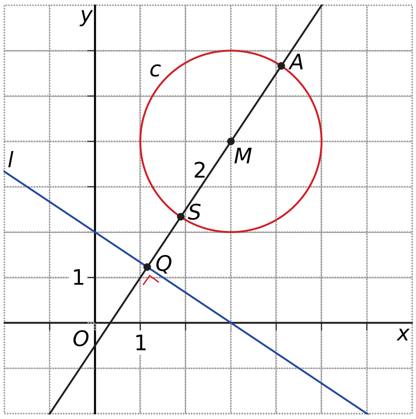
Het gaat om de kortste lengte van lijnstuk QS. Dat bereik je als lijn MQ loodrecht op l staat.
De vergelijking van die lijn MQ is: $3x - 2y = 1$.
(Ga dat na!). Deze lijn snijden met $2x+3y = 6$ geeft de coördinaten van Q. Het punt Q dat bij de kortste afstand $|QS|$ hoort is $\left(\frac{45}{39}, \frac{16}{13}\right)$.

Bereken nu $|MQ|$ en trek van deze de lengte van de straal van de cirkel af.

Dus $|MQ| = \sqrt{\left(4 - \frac{16}{13}\right)^2 + \left(3 - \frac{45}{39}\right)^2} - 2 = 1\frac{1}{3}$.

Je kunt ook de coördinaten van S berekenen door c_1 te snijden met l.

Hiermee bereken je met behulp van de stelling van Pythagoras de lengte van $|SQ|$. Dan vind je ook $|SQ| = 1\frac{1}{3}$.



Figuur 5.5

Opgave 6

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 10$ en de lijn $l : x + y = 2$.

a Bereken algebraïsch de afstand van O tot cirkel c in twee decimalen nauwkeurig.

b Wat versta je onder de afstand van lijn l tot cirkel c? Bereken ook deze afstand. Bekijk eventueel het voorbeeld nog eens.

c Bereken de afstand tussen cirkel c en de cirkel om O en door $(1,1)$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 7

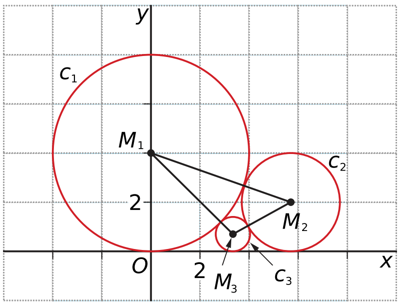
a Bereken de afstand tussen de twee lijnen $l : 2x + 4y = 7$ en $m : y = 6 - 0{,}5x$.

b Wanneer heeft het zin om te vragen naar de afstand tussen twee rechte lijnen? Hoeveel bedraagt die afstand in alle andere gevallen?

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de cirkel c_1 met middelpunt $M_1(0,4)$ en straal 4 en de cirkel c_2 met straal 2 die zowel de x-as als c_1 raakt. Er is een cirkel c_3 die zowel beide gegeven cirkels als de x-as raakt.

Bereken de straal van c_3.



Figuur 5.6

Antwoord

Stel je voor dat cirkel c_3 een straal van lengte r heeft. Het middelpunt van c_2 is M_2 en dat van c_3 is M_3.

Maak nu drie rechthoekige driehoeken met de rechthoekszijden evenwijdig aan de assen, waarvan M_1M_2, M_1M_3 en M_3M_2 de hypotenusa's zijn. Je kunt dan met behulp van de stelling van Pythagoras afleiden:

$$\sqrt{(4+r)^2-(4-r)^2}+\sqrt{(2+r)^2-(2-r)^2}=\sqrt{(4+2)^2-(4-2)^2}=\sqrt{32}.$$

En uit deze vergelijking kun je de waarde van r berekenen.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt alleen een globale oplossing van het op te lossen probleem beschreven.

a Maak zelf een tekening en laat zien hoe je aan de vergelijking kunt komen die in het voorbeeld staat.

b Los deze vergelijking exact op.

c Stel een vergelijking op van cirkel c_3.

Opgave 9

Je kunt het probleem in **Voorbeeld 3** ook oplossen met een meer algebraïsche aanpak en meteen de coördinaten van M_3 berekenen.

a Licht toe dat uit de gegevens volgt $\text{d}(M_1,M_3) = 4 + r$, $\text{d}(M_2,M_3) = 2 + r$ en $\text{d}(M_3, y = 0) = r$.

b Van punt M_2 weet je de x-coördinaat niet. Die kun je berekenen uit $\text{d}(M_1,M_2) = 6$. Laat zien hoe dat gaat.

c Laat zien hoe je nu M_3 kunt berekenen vanuit de drie eigenschappen van dit punt die je bij a hebt opgemerkt.

Verwerken

Opgave 10

Een cirkel met een straal van $\sqrt{13}$ en middelpunt $(2,4)$ snijdt de y-as.

a Bereken de hoek waaronder deze cirkel de y-as snijdt.

b Bereken de hoek waaronder een cirkel met straal $\sqrt{13}$ en middelpunt $(2,4)$ de cirkel met middelpunt $(-2,0)$ en straal $\sqrt{5}$ snijdt.

Opgave 11

Bereken (eventueel in twee decimalen nauwkeurig) de afstand van

a punt $P(2,3)$ tot lijn $l: 4x - 5y = 40$

b punt $P(2,3)$ tot cirkel $c: (x+3)^2 + (y+4)^2 = 16$

c lijn l tot cirkel c

Opgave 12

Een cirkel snijdt de x-as onder een hoek van $45°$ in de punten $A(1,0)$ en $B(5,0)$.
Bereken het middelpunt en de straal van deze cirkel.

Opgave 13

De driehoek ABC heeft hoekpunten $A(-2,0)$, $B(2,0)$ en $C\left(0,2\sqrt{3}\right)$.

a Toon aan dat driehoek ABC gelijkzijdig is.

b De ingeschreven cirkel van deze driehoek is de cirkel die alle drie de zijden raakt. Stel een vergelijking van deze cirkel op.

Opgave 14

In een cartesisch assenstelsel is gegeven de cirkel c_1 met parametervoorstelling $x(t) = 6\cos(t)$ en $y(t) = 6\sin(t)$. Binnen deze cirkel ligt een tweede cirkel c_2 die behalve c_1 ook de beide coördinaatassen raakt. De coördinaten van alle raakpunten zijn groter of gelijk aan 0.

Stel een vergelijking op van c_2.

Opgave 15

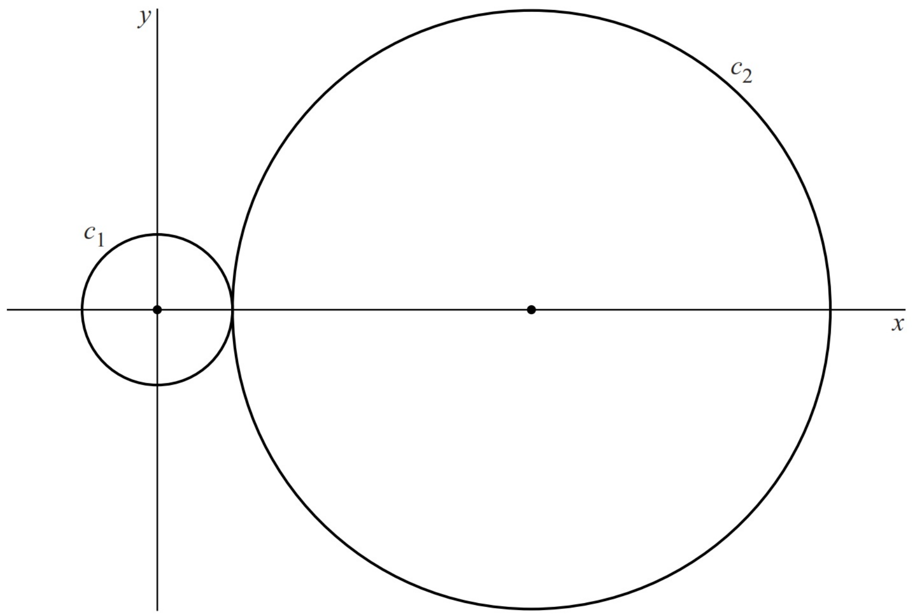
In een cartesisch assenstelsel is vierkant $OABC$ gegeven door $O(0,0)$, $A(4,0)$ en $C(0,4)$. In dit vierkant zit een kwart cirkel met middelpunt O en straal 4.

Stel een vergelijking op van de cirkel c die de gegeven kwart cirkel, lijnstuk OB en lijnstuk AB raakt.

Toepassen

Opgave 16: Raakcirkel en raaklijnen

Gegeven zijn de cirkel c_1 met vergelijking $x^2 + y^2 = 9$ en de cirkel c_2 met vergelijking $(x - 15)^2 + y^2 = 144$. In de figuur zijn c_1 en c_2 getekend.



Figuur 5.7

Cirkel c_3 met middelpunt op de positieve y-as raakt de beide cirkels c_1 en c_2.

a Stel een vergelijking op van c_3.

De cirkels c_1 en c_2 hebben drie gemeenschappelijke raaklijnen.

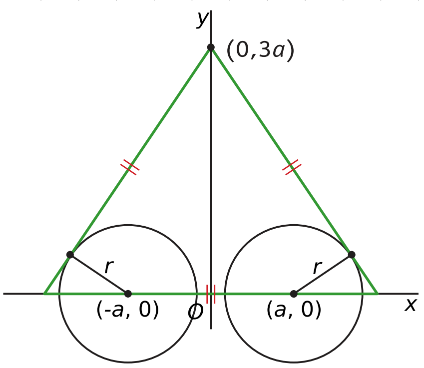
b Stel van elk van deze gemeenschappelijke raaklijnen een vergelijking op.

(bron: pilotexamen wiskunde B vwo in 2013, tweede tijdvak)

Opgave 17: Raaklijnen aan twee cirkels

Gegeven zijn twee cirkels met middelpunten (- a,0), (a,0) en straal r. Gegeven is ook punt $(0,3a)$.
Door $(0,3a)$ gaan twee raaklijnen aan de cirkels, zodat de middelpunten van de cirkels binnen de daardoor ontstane driehoek liggen.
De driehoek die beschreven wordt door $(0,3a)$ en de snijpunten van de raaklijn met de x-as is gelijkzijdig. Bekijk de figuur.

Druk r uit in a. Rond af op twee decimalen.



Figuur 5.8

Testen

Opgave 18

Een cirkel c met het middelpunt op de lijn $l: x + 2y = 12$ raakt de x-as en de y-as.

a Stel een vergelijking van deze cirkel op.

b Bereken de hoek waaronder deze cirkel de lijn $k: x + y = 12$ snijdt.

c Bereken de afstand van deze cirkel tot de lijn door $P(0,12)$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 19

De punten $A(-2,0)$, $B(0,-4)$, $C(2,0)$ en $D(0,4)$ zijn hoekpunten van een ruit $ABCD$. De ingeschreven cirkel van deze ruit is de cirkel die alle vier de zijden raakt. Stel een vergelijking van deze cirkel op.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Parametervoorstellingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- vectorvoorstelling, parametervoorstelling met name van lijnen
- vector/parametervoorstellingen van cirkels
- de hoek tussen twee lijnen berekenen — loodlijn en middelloodlijn — omgeschreven cirkel van een driehoek
- raaklijn aan een cirkel — elkaar rakende cirkels
- hoek tussen een lijn en een cirkel — hoek tussen twee snijdende cirkels — afstand punt of lijn tot cirkel

Activiteitenlijst

- lijnen beschrijven met vector/parametervoorstellingen — vergelijkingen van lijnen omschrijven naar vector/parametervoorstellingen en omgekeerd
- vergelijkingen van cirkels omschrijven naar vector/parametervoorstellingen en omgekeerd — snijpunten van lijnen en cirkels berekenen
- de hoek tussen twee lijnen berekenen — een loodlijn door een gegeven punt maken op een gegeven lijn en beschrijven met een vergelijking en/of een vector/parametervoorstelling — een vergelijking en/of een vector/parametervoorstelling van een middelloodlijn maken — de afstand van een punt tot een lijn, tussen twee evenwijdige lijnen, berekenen
- een vergelijking en/of een vector/parametervoorstelling opstellen van een raaklijn aan een cirkel in een punt van die cirkel — vergelijkingen en/of vector/parametervoorstellingen opstellen van de raaklijnen aan een cirkel in een punt buiten die cirkel
- de hoek berekenen waaronder een lijn en een cirkel of twee cirkels elkaar snijden — de afstand van een punt of een lijn tot een cirkel berekenen

Achtergronden

Sir William Rowan Hamilton (1805—1865) was een Ierse wiskundige, natuurkundige en astronoom die belangrijke bijdragen leverde aan de ontwikkeling van de optica, dynamica en algebra.

Hamilton was de eerste die het begrip **vector** introduceerde.
Hij werkte vooral in drie dimensies en voor hem was een vector een pijl vanuit de oorsprong van een driedimensionaal assenstelsel naar een punt in de ruimte.

Hamilton werd in het bijzonder bekend door de door hem bedachte **quaternionen**, een uitbreiding van de complexe getallen (zie bij wiskunde D).

Figuur 6.1 bron: Wikipedia

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 12x - 10$ en c_2 met middelpunt $M_2(4,2)$ en straal $\sqrt{10}$.

a Bereken het middelpunt en de straal van c_1.

b Bereken de snijpunten van c_1 en c_2.

c Bereken de afstand van M_2 tot cirkel c_1.

d Bereken de hoek waaronder beide cirkels elkaar snijden in graden nauwkeurig.

e Door $A(0,4)$ gaan twee lijnen die c_2 raken. Stel van elk van deze twee lijnen een vergelijking op.

f De raaklijn aan c_1 in het punt $P(7,5)$ snijdt de x-as in Q.
Bereken de coördinaten van Q.

g Bereken de exacte afstand van lijn PQ tot punt M_2.

Opgave 2

De afstand van een punt tot een lijn kun je ook berekenen met behulp van een cirkel. Neem $O(0,0)$ en $l : x + 2y = 6$.

a Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt O en straal r.

b l moet raken aan c. Bereken de exacte waarde van r.

Je kunt de gevraagde afstand ook berekenen door te werken met gelijkvormige driehoeken. Daarbij gebruik je de snijpunten van l met de twee assen. Noem het snijpunt van l met de x-as A en dat met de y-as B. OC is het lijnstuk dat de afstand van O tot l voorstelt.

c Bereken nu $|OC|$ met behulp van gelijkvormigheid.

Neem nu voor l een willekeurige lijn $ax + by = c$.

d Laat zien dat: $\text{d}(O,l) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

e Gebruik deze formule om de afstand van O tot $l : x + 2y = 6$ uit te rekenen.

Opgave 3

Cirkel c snijdt van de lijn $y = 4$ een lijnstuk met lengte 4 af, gaat door $P(-5,2)$ en heeft een middelpunt M op de x-as. Geef een vergelijking op van c.

Opgave 4

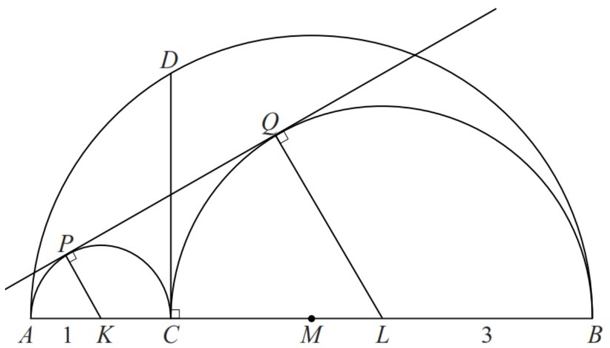
Gegeven is de cirkel $c : x^2 + y^2 = 2x + 3$ en de lijn $l : y = ax$. De snijpunten van l en c zijn A en B.

a Neem $a = 2$. Toon aan dat $|OA| \cdot |OB| = 3$.

b Bewijs dat voor elke a geldt: $|OA| \cdot |OB| = 3$.

Opgave 5

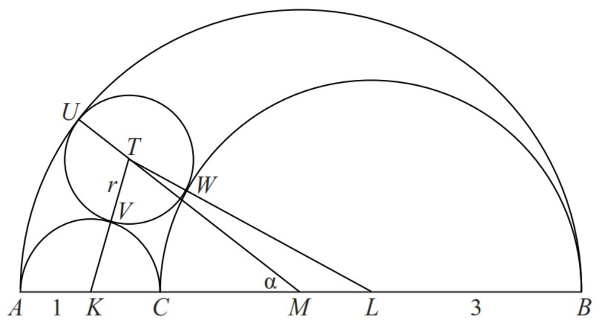
Gegeven is een halve cirkel met middellijn AB en straal 4. Het middelpunt van deze cirkel is M. Op lijnstuk AB ligt het punt C zo dat $AC = 2$. AC en CB zijn de middellijnen van twee andere halve cirkels met stralen 1 en 3. De middelpunten van deze twee halve cirkels zijn respectievelijk K en L. Alle halve cirkels liggen aan dezelfde kant van AB. De lijn door C loodrecht op AB snijdt de grootste halve cirkel in punt D. Lijn PQ is de gemeenschappelijke raaklijn aan de twee binnenste halve cirkels, waarbij P en Q de raakpunten zijn. PQ staat dus loodrecht op KP en op LQ.



Figuur 6.2

a Toon aan dat CD en PQ exact even lang zijn.

Tussen de drie halve cirkels past precies één cirkel die raakt aan elk van de drie gegeven halve cirkels. Deze cirkel heeft middelpunt T en straal r. De raakpunten van deze cirkel met de drie halve cirkels zijn U, V en W. $\angle TMK = \alpha$.



Figuur 6.3

b Toon aan dat $\cos(\alpha) = \frac{12-5r}{12-3r}$.

In driehoek MLT geldt op dezelfde manier $\cos(\alpha) = \frac{7r-4}{4-r}$.

c Bereken de exacte waarde van r.

(naar: pilotexamen wiskunde B in 2012, tweede tijdvak)

Opgave 6

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met zijde 2. In dit vierkant zijn getekend:

- de kwartcirkel c met middelpunt A en eindpunten B en D;
- de kwartcirkel d met middelpunt B en eindpunten A en C;
- het vierkant $PQRS$ met P en Q op AB, R op c en S op d.

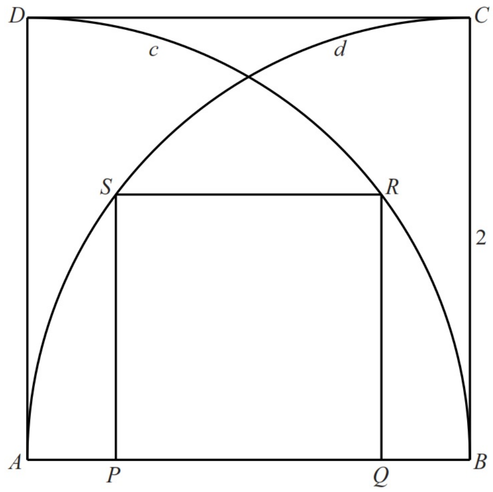
Er geldt: $PQ = \frac{6}{5}$.

a Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Aan de tekening wordt een cirkel met middelpunt M en straal r toegevoegd, die RS en de beide kwartcirkels raakt. De diameter van deze cirkel is kleiner dan RS.

b Bereken exact de straal r.

(naar: pilotexamen wiskunde B in 2013, eerste tijdvak)



Figuur 6.4

Toepassen

Opgave 7: Bissectrice

De deellijn (of bissectrice) van een hoek is de lijn die de hoek in twee gelijke delen verdeelt. De lijnen $l : y = 0$ en $m : y = 2x$ maken een scherpe hoek met elkaar. Punt $P(x,y)$ is een punt van de deellijn van deze hoek.

a Stel een vergelijking op van deze deellijn (benaderingen in drie decimalen nauwkeurig).

b Toon aan dat elk punt van deze deellijn dezelfde afstand heeft tot lijn l als tot lijn m.

Opgave 8: Een cirkel uit een driehoek

Uit een gelijkzijdige driehoekige lap stof met zijden van 4 dm wil je een zo groot mogelijke cirkelvormige lap stof snijden.

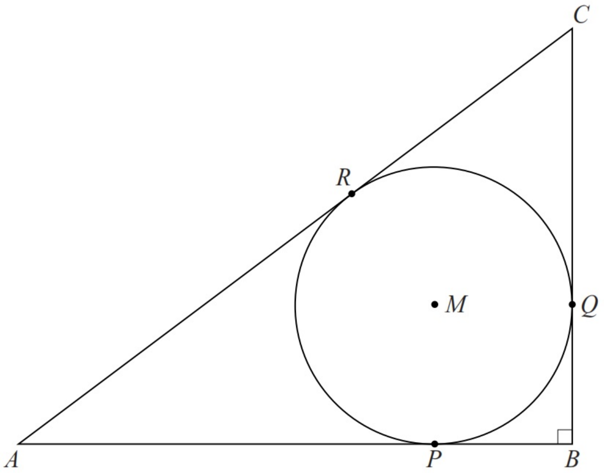
Maak een assenstelsel met $A(-2,0)$, $B(2,0)$ en $C(0,4)$ en bereken de straal van de ingeschreven cirkel.

Examen

Opgave 9: Cirkels in een driehoek

Als vanuit een punt A buiten een cirkel de twee raaklijnen aan die cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van A tot de twee raakpunten P en Q even groot. Deze eigenschap mag je in deze opgave gebruiken.

Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met rechthoekszijden $AB = 4$ en $BC = 3$. De ingeschreven cirkel van driehoek ABC raakt de zijden van de driehoek in P, Q en R. M is het middelpunt van deze cirkel.

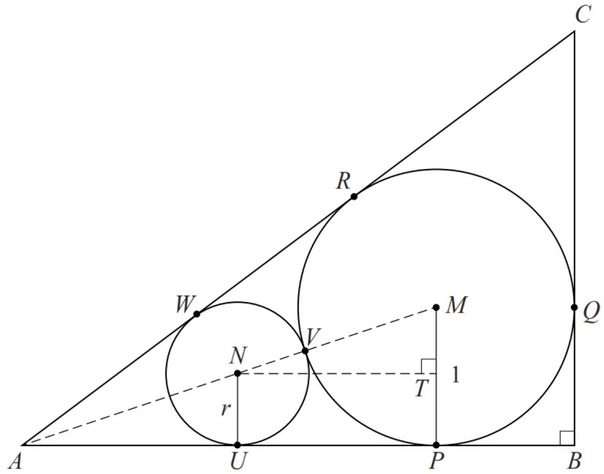


Figuur 6.5

De straal van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC is 1.

a Bewijs dit.

Tussen de ingeschreven cirkel en de zijden AB en AC van de driehoek wordt een tweede cirkel met middelpunt N getekend. Deze tweede cirkel raakt de zijde AB in U, de ingeschreven cirkel in V en de zijde AC in W. De punten M, N en A liggen dus op één lijn. De straal NU van de tweede cirkel is r. De loodrechte projectie van N op MP is T.



Figuur 6.6

Er geldt dat $AU = 3r$.

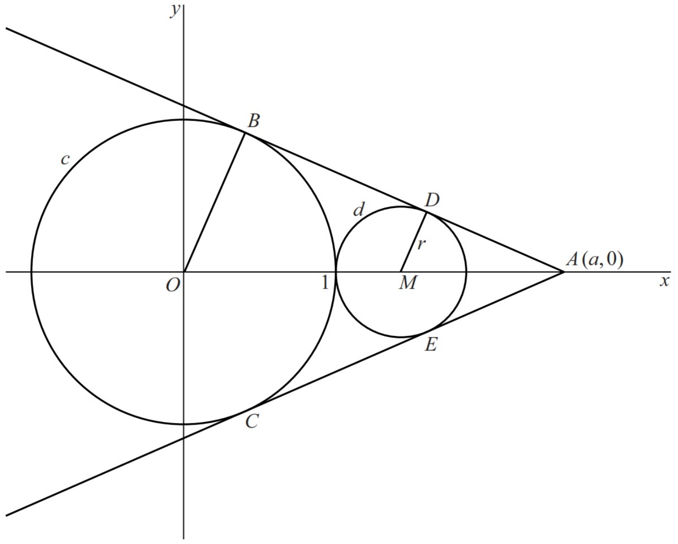
b Bewijs dit.

c Bereken r. Rond je antwoord af op twee decimalen.

(naar: pilotexamen wiskunde B in 2014, eerste tijdvak)

Opgave 10: Ingesloten cirkel

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $O(0,0)$ en straal 1. Verder is gegeven het punt $A(a,0)$ met $a > 1$. Er zijn twee lijnen door A die aan c raken. De raakpunten zijn B en C. De twee raaklijnen en cirkel c sluiten een cirkel d in. Cirkel d raakt de twee lijnen in D en E en cirkel c in $(1,0)$. Cirkel d heeft middelpunt M. Zie de figuur.



Figuur 6.7

Driehoek AMD en driehoek AOB zijn gelijkvormig.

Voor de straal r van cirkel d geldt: $r = \frac{a-1}{a+1}$.

a Bewijs dit.

Er is een waarde van a waarvoor vierhoek $OCAB$ een vierkant is. In dat geval kan de straal van cirkel d geschreven worden als $r = p + q\sqrt{2}$ waarbij p en q gehele getallen zijn.

b Bereken exact de waarden van p en q.

(naar: pilotexamen wiskunde B in 2014, tweede tijdvak)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

www.math4all.nl