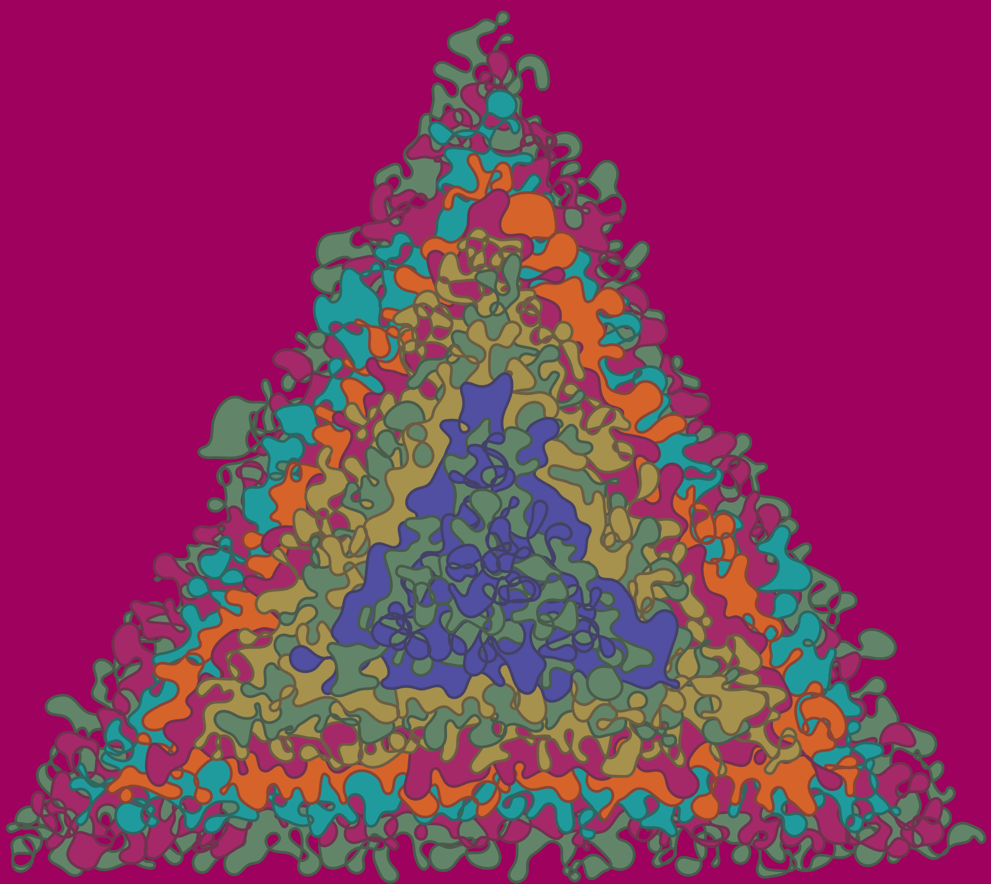
Wiskunde B

5 VWO

Katern 2

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Periodieke functies

1.1 Radialen

Inleiding

Een punt dat met een vaste snelheid over een cirkel beweegt, volgt een eenparige cirkelbeweging. Dit is een belangrijk periodiek verschijnsel. De hoogte van dit punt boven de horizontale as kun je met behulp van de sinus van de draaihoek berekenen. Heeft de cirkel een straal van 1 dan is die hoogte gelijk aan de sinus van de hoek. Bij de eenparige cirkelbeweging komt vanzelf een nieuwe manier tevoorschijn om de grootte van een hoek aan te geven: in radialen in plaats van in graden.

Je leert in dit onderwerp

- graden omrekenen naar radialen en omgekeerd;
- werken met de exacte waarden van sinus en cosinus ook voor niet-scherpe hoeken m.b.v. de symmetrie-eigenschappen van de eenheidscirkel.

Voorkennis

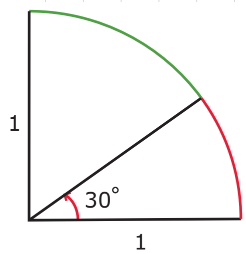
- de formule voor de omtrek van een cirkel;
- werken met sinus en cosinus in rechthoekige driehoeken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

Hoeken druk je al heel lang in graden uit. Toch hoeft dat niet, bekijk deze kwartcirkel maar eens. Hij heeft een straal van 1. Er staat een hoek van 30° in getekend.



Figuur 1.1

a Hoe lang is de getekende cirkelboog? Leg uit waarom 30° overeenkomt met een booglengte van $\frac{1}{6}\pi$.

Als je de grootte van een hoek door zijn booglengte in een cirkel met straal 1 beschrijft, krijg je hoeken in ‘radialen’. Dus 30° komt overeen met $\frac{1}{6}\pi$ radialen.

b Waarom is het van belang dat de cirkel waarin je de booglengte uitrekent een straal van 1 heeft?

c Reken maar eens een paar andere hoeken om van graden naar radialen.

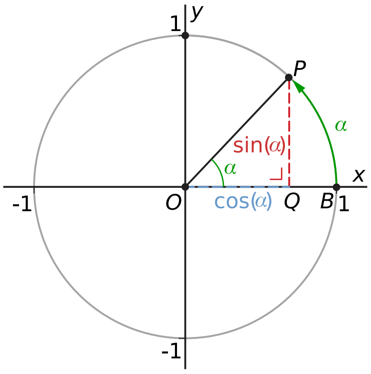
Uitleg 1

Bekijk de applet

Bekijk het punt P dat linksom (tegen de klok in) draait over een eenheidscirkel, een cirkel met een straal van 1.
Straal OP maakt een hoek α met de positieve x-as. Er geldt:

$\sin(\alpha) = \frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{y_P}{1} = y_P$

$\cos(\alpha) = \frac{|OQ|}{|OP|} = \frac{x_P}{1} = x_P$



Figuur 1.2

De driehoek is alleen te gebruiken als $0° < \alpha < 90°$. Maar het punt draait gewoon door, evenals de hoek. Op deze manier wordt de sinus en cosinus gedefinieerd voor draaihoeken van 90° en groter. Zo is

$\sin(180°) = 0$, $\sin(270°) = -1$ en $\sin(90° + k \cdot 360°) = 1$ met k een geheel getal;

$\cos(180°) = -1$, $\cos(270°) = 0$ en $\cos(k \cdot 360°) = 1$ met k een geheel getal;

Sinus en cosinus kunnen dus ook een negatief getal zijn.

Het punt kan rechtsom (met de klok mee) draaien, je krijgt dan negatieve groottes van hoeken.

De grootte van hoeken kun je weergeven in graden, maar ook als booglengte BP. De eenheid voor deze hoek heet radiaal, afgekort rad.

De omtrek van een cirkel met straal r is $2 \cdot \pi \cdot r$.
In een eenheidscirkel met $r = 1$ is de omtrek dus gelijk aan 2π.

Bij 360° hoort dus een booglengte van 2π en een hoek van 2π rad.
Bij 180° hoort dus een booglengte van π en een hoek van π rad.

Hoeken worden vanaf nu, tenzij anders vermeld, gegeven in radialen.

Om graden om te rekenen naar radialen gebruik je $180° = \pi$ rad.

Bijvoorbeeld: omdat $1° = \frac{1}{180}\pi$ rad is $40° = \frac{40}{180}\pi$ rad $= \frac{2}{9}\pi$ rad.

Merk op dat $\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin(\alpha)$ (k geheel), je hebt dan alleen een extra rondje gedraaid. Hetzelfde geldt voor cosinus.

Opgave 1

Teken een eenheidscirkel (een cirkel met een straal van 1 eenheid).

Gebruik je rekenmachine met hoeken in graden.

a Teken P als de draaihoek $\alpha = 30°$.
Hoeveel radialen is α?
Bereken $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.

b Teken P als de draaihoek $\alpha = 150°$.
Hoeveel radialen is α?
Bereken $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.

c Teken P als de draaihoek $\alpha = 210°$.
Hoeveel radialen is α?
Bereken $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.

d Teken P als de draaihoek $\alpha = 270°$.
Hoeveel radialen is α?
Bereken $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.

e Hoeveel radialen hoort er bij $360°$? En bij $90°$?

f Bij welke draaihoeken is de y-coördinaat 1? Geef je antwoord in graden en in radialen.

Opgave 2

In **Uitleg 1** zie je hoe je kunt omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd.

a Hoeveel radialen is $60°$?

b Hoeveel graden is $1{,}5\pi$ rad?

c Hoeveel graden is 1 rad?

d Hoeveel radialen is $1°$?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je weet al dat bij bepaalde scherpe hoeken exacte waarden horen voor sinus en cosinus.

Je vindt ze in deze tabel, waarbij de hoek in graden en in radialen is gegeven. Leer de tabel uit het hoofd.

hoek in graden	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
hoek in radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabel 1.1

Met behulp van de symmetrie van de eenheidscirkel kun je ook de exacte waarde van bijvoorbeeld $\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right)$ bepalen.

Je ziet dat: $\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

en dat: $\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Opgave 3

Bepaal met behulp van de symmetrie van de eenheidscirkel de exacte waarden.

a $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)$

b $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right)$

c $\cos\left(3\frac{1}{3}\pi\right)$

d $\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$

Opgave 4

Ook als er van exacte waarden geen sprake is, zijn er meerdere draaihoeken met dezelfde sinus of dezelfde cosinus.

a Bereken in drie decimalen $\sin(1)$ en $\sin(1+2\pi)$. Leg uit waarom beide uitkomsten gelijk zijn.

b Bereken $\sin(1)$ en $\sin(\pi-1)$. Leg uit waarom beide uitkomsten gelijk zijn.

c Welke hoeken hebben dezelfde sinus als $212{,}5\pi$?

d Welke hoeken hebben dezelfde sinus als -1500π?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Bekijk de **eenheidscirkel** (cirkel met straal 1) met het middelpunt in O. Punt P ligt op de eenheidscirkel.

Voor de **draaihoek** van P is de **booglengte** genomen vanaf hier (1,0), tot het draaiende punt P. Bij linksom draaien is deze hoek positief, bij rechtsom draaien negatief.

Er geldt:

$\sin(\alpha) = \frac{y_P}{1} = y_P$

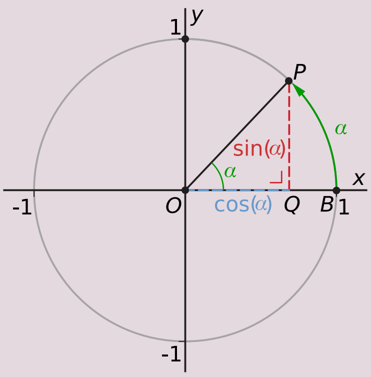
$\cos(\alpha) = \frac{x_P}{1} = x_P$

De eenheid voor deze hoek heet **radiaal**, afgekort rad. Op de eenheidscirkel hoort bij een draaihoek van 1 rad een booglengte van 1.

180° komt dan overeen met π rad (de halve omtrek van de eenheidscirkel).

Tenzij anders aangegeven, wordt in het vervolg de hoekeenheid rad gebruikt. Je kunt de grafische rekenmachine instellen op rekenen met radialen.

Merk op dat $\sin(\alpha + k\cdot 2\pi) = \sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha + k\cdot 2\pi) = \cos(\alpha)$ (k geheel).



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

Gebruik bij het omrekenen van graden naar radialen: 360° is gelijk aan 2π radialen.
Hieruit volgt:

- 1° wordt $\frac{2\pi}{360} = \frac{1}{180}\pi$ rad.
- 90° wordt $90 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{1}{2}\pi$ rad.

En omgekeerd:

- 1 rad komt overeen met $\left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} = 57{,}295...^{\circ}$.
- $\frac{1}{6}\pi$ rad komt overeen met $\left(\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} = 30^{\circ}$.

Je kunt zo deze handige tabel maken:

graden	360	180	90	45	30	1
radialen	2π	π	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{180}\pi$

Tabel 1.2

Opgave 5

Neem de tabel over en vul hem in.

graden	0	18		220		540
radialen			$\frac{5}{9}\pi$		2π	

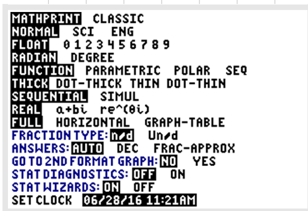
Tabel 1.3

Voorbeeld 2

Bepaal met de rekenmachine $\sin(1)$, $\sin(10)$, $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$, $\sin(360)$ en $\sin(10 + 30\pi)$.
Welke waarden zijn hetzelfde?

Antwoord

Reken in radialen, want er zijn geen gradentekens. Laat de rekenmachine dan ook in radialen rekenen.



Figuur 1.4

Ga na dat:
$\sin(1) \approx 0{,}841$
$\sin(10) \approx -0{,}544$
$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 0{,}5$
$\sin(360) \approx 0{,}959$
$\sin(10 + 30\pi) \approx -0{,}544$

De uitkomsten van $\sin(10)$ en $\sin(10 + 30\pi)$ zijn gelijk omdat tussen 10 en $10 + 30\pi$ precies 30π zit. Dat is precies 15 keer één volledige cirkel (lengte 2π).

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Bepaal in drie decimalen nauwkeurig $\sin\left(\frac{1}{55}\pi\right)$.

b Leg uit waarom $\sin\left(40\frac{1}{55}\pi\right)$ dezelfde uitkomst geeft.

c Geef nog twee verschillende waarden voor x waarvoor geldt: $\sin\left(\frac{1}{55}\pi\right) = \sin(x)$.

Opgave 7

De draaihoeken kun je ook gewoon x noemen. Dat is later handig als je grafieken van de sinusfunctie en de cosinusfunctie gaat maken.

a Leg uit waarom $\sin(x) = \sin(x + k \cdot 2\pi)$ en $\cos(x) = \cos(x + k \cdot 2\pi)$, waarbij k een geheel getal is.

b Welke waarden kunnen $\sin(x)$ en $\cos(x)$ aannemen?

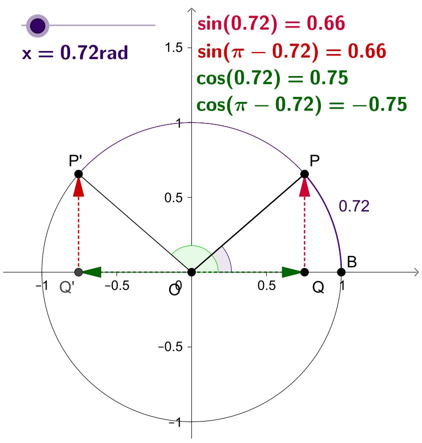
c Waarom is $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ exact $\frac{1}{2}$?

d Geef de volgende waarden exact: $\sin\left(5\frac{1}{6}\pi\right)$, $\cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right)$, $\sin\left(2\frac{3}{4}\pi\right)$.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

De grootte van hoek x is in radialen.
Verklaar waarom $\sin(x) = \sin(\pi - x)$.



Figuur 1.5

Antwoord

Bekijk de figuur met de punten P en P' op een eenheidscirkel, achtereenvolgens met hoek x en $\pi - x$.

In de eenheidscirkel liggen deze punten bij de hoeken x en $\pi - x$ symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door het middelpunt.
Er geldt: $\sin(x) = \sin(\pi - x)$.

Opgave 8

Bekijk de figuur uit **Voorbeeld 3**.

a Bereken de grootte van $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ en $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$. Geef exacte antwoorden.

b Waarom zijn bij a beide antwoorden hetzelfde?

c Voor welke hoek geldt dat de sinus hetzelfde is?

d Voor welke hoeken is $\cos(x) = 0{,}5$?

Opgave 9

Leg uit waarom:

a $\sin(-x) = -\sin(x)$

b $\cos(x) = \cos(-x)$

c $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

Verwerken

Opgave 10

Deze hoeken zijn gegeven in graden. Bereken de bijbehorende booglengtes in de eenheidscirkel in radialen.

a $30°$, $20°$, $10°$, $270°$, $360°$, $455°$, $780°$

De booglengtes zijn in de eenheidscirkel gegeven. Bereken de bijbehorende hoeken in graden.

b $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{1}{3}\pi$; $\frac{3}{4}\pi$; 1; π; $3{,}1416$; 10π

Opgave 11

Gebruik eventueel een eenheidscirkel.

a Bereken exact $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$, $\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)$, $\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$.

b Bereken exact de grootte van $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$, $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$, $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)$, $\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)$ en $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$.

Opgave 12

Gegeven is $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

a Geef in een eenheidscirkel alle waarden van x met $0 \leq x < 2\pi$ aan die hieraan voldoen.

b Noteer alle waarden van x die hieraan voldoen. Geef exacte waarden.

Opgave 13

Je weet, dat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$.

Onderzoek welke waarden van x voldoen aan $\sin(x) = -\frac{1}{2}$.

a Geef in een eenheidscirkel alle waarden van x op het interval $[0, 2\pi]$ aan die hieraan voldoen.

b Geef alle waarden van x die hieraan voldoen. Gebruik exacte waarden.

Opgave 14

Leg uit waarom:

a $\sin(x) = \sin(3\pi - x)$

b $\cos(x) = \cos(6\pi - x)$

c $\cos(x) = \sin(x - 21{,}5\pi)$

Toepassen

In de studie van periodieke verschijnselen wordt het begrip **hoeksnelheid** gebruikt.
De hoeksnelheid ω van een object dat gelijkmatig beweegt over een cirkel, in radialen per tijdseenheid, is gedefinieerd als:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

Hierin is T de omwentelingstijd, dat is de tijd die één complete omwenteling duurt.

Een ander begrip is de **raaksnelheid**.
Dit is de afstand die een vast punt dat gelijkmatig beweegt over een cirkel, per tijdseenheid aflegt.

Opgave 15

De omtrek van de aarde (om de evenaar) is ongeveer 40075 km.

a Hoe groot is de hoeksnelheid van de rotatie van de aarde om haar eigen as, in radialen per uur?

b Stel je voor dat je op de evenaar stilstaat. Wat is je raaksnelheid (km/h)? Rond af op één decimaal.

c Gebruik de resultaten uit a en b en onderzoek het verband tussen de hoeksnelheid ω en raaksnelheid v van de aarde. Onderzoek vervolgens het verband tussen hoeksnelheid en raaksnelheid van roterende objecten in het algemeen.

Testen

Opgave 16

Geef de antwoorden exact indien mogelijk, anders in drie decimalen benaderd.

a Deze hoeken zijn gegeven in graden. Reken om naar radialen, tussen 0 en 2π:
$60°$, $45°$, $180°$, $300°$, $330°$, $350°$, $-350°$.

b Deze booglengtes van een eenheidscirkel zijn gegeven in radialen. Bereken de bijbehorende hoeken in graden.
π, $\frac{1}{3}\pi$, $-\frac{1}{4}\pi$, 2π, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{12}\pi$, 2, $\frac{5}{3}\pi$.

Opgave 17

Gegeven $\sin(x) = 0{,}25$.

a Geef in een eenheidscirkel alle waarden van x met $0 \leq x < 2\pi$ aan die hieraan voldoen.

b Schrijf alle waarden van x op die hieraan voldoen. Benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 18

a Bereken $\sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi\right)$ en $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$. Verklaar het verschil.

b Bereken $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)$ en $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$ exact. Verklaar de overeenkomst.

c Laat zien dat $\sin(-x) = \sin(\pi + x)$ met behulp van een eenheidscirkel.

1.2 Sinus- en cosinusfuncties

Inleiding

Nu je weet dat draaihoeken alle waarden (zowel in graden als in radialen) kunnen aannemen en dat daar steeds een waarde voor de sinus en een waarde voor de cosinus van die hoek bij horen, kun je gaan kijken naar de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$. En je zult zien dat daarbij een herhaling optreedt met een vaste periode. Daarover gaat dit onderdeel. Je neemt x altijd in radialen.

Je leert in dit onderwerp

- met de functie en de grafiek van $y = \sin(x)$ en transformaties daarvan werken;
- met de functie en de grafiek van $y = \cos(x)$ en transformaties daarvan werken.

Voorkennis

- werken met sinus en cosinus van hoeken in radialen en met de eenheidscirkel;
- werken met transformaties van grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Maak op je grafische rekenmachine de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ met domein $[-2\pi, 4\pi]$. Neem x in radialen.

a Leg uit waarom de hoogste waarde die $\sin(x)$ kan aannemen 1 is.

b Voor welke waarden van x is $\sin(x) = -1$?

c De waarden van f herhalen zich steeds. Waarom is dat zo?

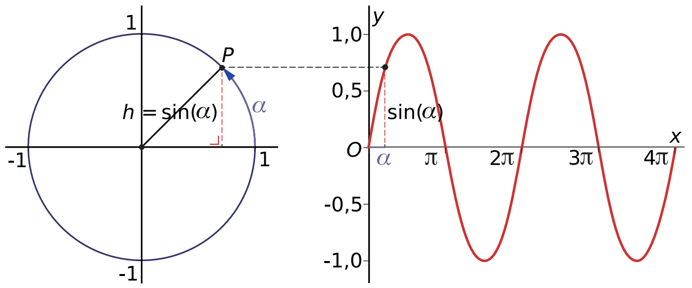
d Maak ook de grafieken van $y_2 = 2\sin(x)$, $y_3 = \sin(2x)$, $y_4 = \sin(x) + 2$ en $y_5 = \sin(x + 2)$. Verklaar welke transformaties hier worden toegepast.

Uitleg 1

Bekijk de applet: sinusfunctie

$y = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode 2π.
Hierin is $x = \alpha$ radialen en op de y-as komt de waarde van $h = \sin(\alpha)$.
De grafiek loopt links en rechts van de y-as oneindig door als je α niet beperkt vanaf 0 tot 2π rad.

Bekijk de figuur, waar twee periodes van de grafiek van $y = h = \sin(x)$ zijn getekend.



Figuur 2.1

Op de horizontale as is de eenheid π, zodat exact de snijpunten met de x-as en de toppen zijn af te lezen.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + 2k \cdot \pi$.
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + 2k \cdot \pi$.
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$.

Wil je alle waarden weten waarvoor bijvoorbeeld $h = y = 0{,}5$ dan los je de vergelijking $\sin(x) = 0{,}5$ op met je rekenmachine.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ in **Uitleg 1**.

a Geef de coördinaten van de toppen op het domein $[-2\pi, 2\pi]$.

b Welke nulpunten heeft f op het domein $[-2\pi, 4\pi]$?

Opgave 2

Plot de grafiek van $y = \sin(x)$ op het domein $[-10, 10]$. Denk om x in radialen!

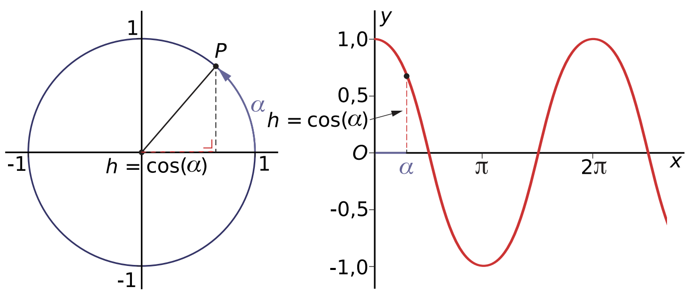
Hoe vaak snijdt de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ de x-as op het domein $[-10, 10]$?

Uitleg 2

Bekijk de applet: cosinusfunctie

$y = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode 2π.
Hierin is $x = \alpha$ radialen en op de y-as komt de waarde van $h = \cos(\alpha)$.
De grafiek loopt links en rechts van de y-as oneindig door als je α niet beperkt vanaf 0 tot 2π rad.

Bekijk de figuur met twee periodes van de grafiek van $y = \cos(x)$.



Figuur 2.2

Op de horizontale as is als eenheid π genomen.

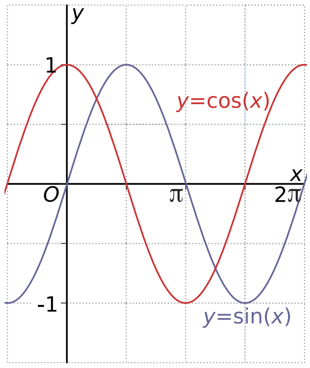
- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $2k \cdot \pi$.
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $\pi + 2k \cdot \pi$.
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De grafiek van $y = \cos(x)$ met x in radialen lijkt op de standaard sinusgrafiek $y = \sin(x)$.

De grafiek is alleen met $-\frac{1}{2}\pi$ verschoven in de x-richting.

Dit betekent $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je door transformatie uit die van $y = \sin(x)$ laten ontstaan.



Figuur 2.3

Opgave 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ in **Uitleg 2**.

a Geef de coördinaten van de toppen op het domein $[-2\pi, 2\pi]$.

b Welke nulpunten heeft f op het domein $[-2\pi, 4\pi]$?

Opgave 4

In **Uitleg 2** zie je de functie $y = \cos(x)$.

a Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $f_1(x) = 5 \cdot \cos(x)$ uit die van $y = \cos(x)$?

b Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $f_2(x) = \cos(x + \pi)$ uit die van $y = \cos(x)$?

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $f_3(x) = 5 \cdot \cos(x + \pi) + 2$ uit die van $y = \cos(x)$?

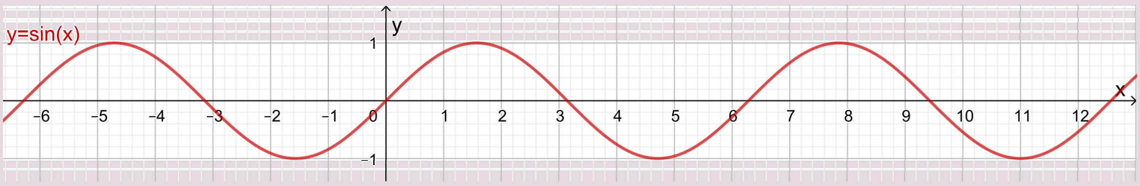
d Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ uit die van $y = \cos(x)$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Exacte waarden		
hoek	**sin**	**cos**
0	0	1
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	0

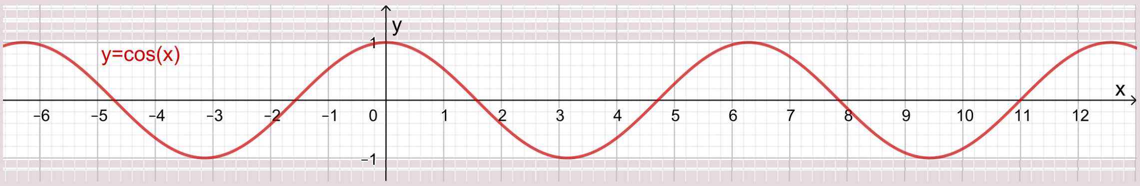
Tabel 2.1



Figuur 2.4

De **standaard sinusfunctie** $y = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$



Figuur 2.5

De **standaard cosinusfunctie** $y = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je laten ontstaan door de grafiek van $y = \sin(x)$ te verschuiven met $-\frac{1}{2}\pi$ in de x-richting: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

Voorbeeld 1

Maak op de grafische rekenmachine de grafiek van $y = \sin(x)$ op het domein $[-2\pi, 4\pi]$.

$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, voor welke andere waarden op het gegeven domein is de sinus even groot?

Antwoord

Gebruik de symmetrie van de grafiek.

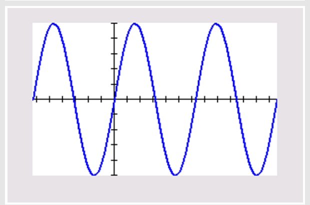
$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

De periode van $y = \sin(x)$ is 2π.

Daarom geldt dat $\sin(x) = \frac{1}{2}$ als $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Voor de volgende waarden binnen het gegeven domein is $\sin(x) = \frac{1}{2}$:

$x = -1\frac{5}{6}\pi$, $x = -1\frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = 2\frac{1}{6}\pi$ en $x = 2\frac{5}{6}\pi$.



Figuur 2.6

Opgave 5

a Plot de grafiek van $y = \sin(x)$ op het domein $[-3\pi, 5\pi]$.

b Je weet $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Voor welke waarden op het gegeven domein is de sinus even groot?

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0; 6{,}5\pi]$.

a Plot de grafiek van f. Hoeveel periodes zijn zichtbaar?

b Voor welke waarden van x in het gegeven domein, geldt $f(x) = \sin(-0{,}1)$? Rond af op drie decimalen.

Voorbeeld 2

Maak op de grafische rekenmachine de grafiek van $y = \cos(x)$ op het domein $[-\pi, 5\pi]$.

$\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, voor welke andere waarden op het domein is de cosinus even groot?

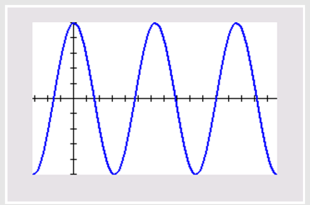
Antwoord

Gebruik de symmetrie van de grafiek.

$\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

De periode van $y = \cos(x)$ is 2π.

Daarom geldt dat $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als: $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$



Figuur 2.7

Voor de volgende waarden binnen het gegeven domein is $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$:

$x = -\frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = 1\frac{3}{4}\pi$, $x = 2\frac{1}{4}\pi$, $x = 3\frac{3}{4}\pi$, $x = 4\frac{1}{4}\pi$ en $x = 4\frac{3}{4}\pi$.

Opgave 7

a Plot de grafiek van $y = \cos(x)$ op het domein $[-3\pi, \pi]$.

b $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$ voor welke waarden op het gegeven domein is de cosinus even groot?

Opgave 8

Gegeven is $y = \cos(x)$.

a Welk domein moet je nemen, zodat de grafiek bij punt $(0,1)$ begint en er precies drie periodes zichtbaar zijn?

b Welk domein moet je nemen, zodat de grafiek bij punt $(-\pi, -1)$ begint en er precies vijf periodes zichtbaar zijn?

c Welk domein moet je nemen, zodat de grafiek bij $(3{,}5\pi; 0)$ eindigt en er precies 6,5 periodes zichtbaar zijn?

Voorbeeld 3

Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van
$f(x) = 2\cos(x - \pi) + 1$ uit de standaardgrafiek van $y = \cos(x)$?

Antwoord

De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \cos(x)$ door achtereenvolgens:

- Translatie ten opzichte van de y-as met π.
- Vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 2.
- Translatie ten opzichte van de x-as met 1.

Opgave 9

Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van
$f(x) = 0{,}5\cos(x + 0{,}25\pi) - 3$ uit de grafiek van $y = \cos(x)$?

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = -2\sin(x - 1) + 4$.

a Door welke transformaties kan de grafiek van f uit die van $y = \sin(x)$ ontstaan?

b Hoe groot is het maximum van f?

c Hoe groot is het minimum van f?

Verwerken

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0{,}4\pi]$.

a Plot de grafiek van f op het gegeven domein.
Hoeveel periodes zijn zichtbaar?

b Je weet $\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Voor welke andere waarden op het domein is de sinus even groot?

Opgave 12

Voor welke exacte waarden voor x in het domein $[-4\pi{,}4\pi]$ heeft $\cos(x)$ eenzelfde waarde als $\cos(0{,}8)$?

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = -\sin(x - 3) + 2$ met domein $[0{,}4\pi]$.

a Plot de grafiek van f.

b Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \sin(x)$?

c Geef de coördinaten van de toppen.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5\cos(x + \pi) + 4$ met domein $[-2\pi{,}4\pi]$.

a Plot de grafiek van f.

b Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \cos(x)$?

c Geef de coördinaten van de toppen.

Opgave 15

Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van $f(x) = 2\cos(x - \pi) - 6$ uit de grafiek van $y = \sin(x)$?

Toepassen

Bekijk de applet: sinusfunctie

Je ziet in de applet een **analoge klok**. De lengte van de grote wijzer is 1 dm, die van de kleine wijzer $7{,}5$ cm. Je kunt zelf de gewenste tijd instellen.

Trek (in gedachten) een horizontale lijn door de punten die horen bij 9 en bij 3. Je kunt dan de hoogte van het eindpunt van elk van de wijzers boven die lijn berekenen. Ligt zo'n eindpunt op of boven die lijn, is de hoogte positief of 0, anders negatief. Noem die hoogte h.

Trek (in gedachten) een verticale lijn door de punten die horen bij 6 en bij 12. Je kunt dan de horizontale afwijking van het eindpunt van elk van de wijzers tot die lijn berekenen. Ligt zo'n eindpunt rechts of op die lijn, is de afwijking positief of 0, anders negatief. Noem die horizontale afwijking b.

Opgave 16

De wijzers van de klok staan ingesteld op kwart over twee.

a Bereken h en b van de minutenwijzer. Rond af op twee decimalen.

b Bereken h en b van de urenwijzer. Rond af op twee decimalen.

Werk met een medeleerling samen. Stel een andere tijd in.

c Bereken h en b van de minutenwijzer en de urenwijzer. Rond af op twee decimalen.

Opgave 17

De wijzers van de klok draaien eigenlijk vanuit de verticale stand, dan is de draaihoek $x = 0$ rad. Bovendien bewegen de wijzers rechtsom in plaats van linksom zoals in een assenstelsel gebruikelijk is.

a Leg uit waarom voor de minutenwijzer dan geldt $h = \cos(x)$ en $b = \sin(x)$.

b Welke formules gelden voor h en b van de urenwijzer?

Bij een bepaald tijdstip hoort meestal een andere waarde voor x bij de minutenwijzer dan bij de urenwijzer.

c Zijn er tijdstippen waarop bij beide wijzers dezelfde draaihoek x hoort?

Testen

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 4\sin(x) + 1$ op $[-2\pi, 4\pi]$.

a Door welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = \sin(x)$?

b Plot de grafiek van f. Hoeveel periodes krijg je in beeld?

c Bepaal alle toppen van de grafiek van f.

Opgave 19

Je weet dat $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 0{,}5$. Welke waarden van x geldt ook dat $\cos(x) = 0{,}5$ als x in het domein $[5\pi, 8\pi]$ zit?

1.3 Vergelijkingen met sinus en cosinus

Inleiding

Je hebt de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ gemaakt. Ook heb je er transformaties op toegepast. Nu ga je vergelijkingen met sinus of cosinus oplossen. Daarbij moet je goed rekening houden met de periodiciteit van deze grafieken.

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking die is te herleiden tot $\sin(x) = c$ oplossen als c een constante is;
- een vergelijking die is te herleiden tot $\cos(x) = c$ oplossen als c een constante is.

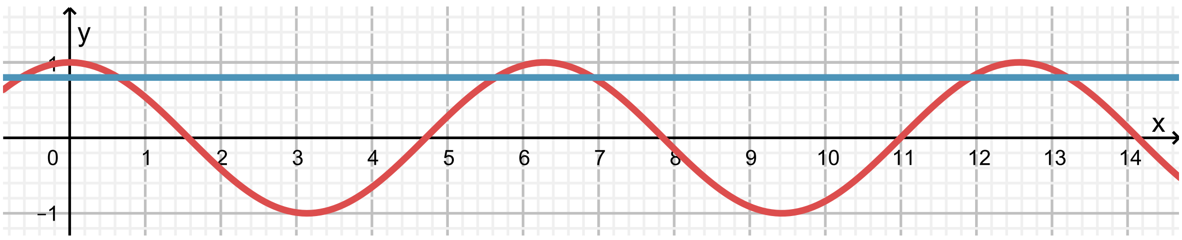
Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- werken met transformaties van deze functies.

Verkennen

Opgave V1

Gebruik deze grafiek van $f(x) = \cos(x)$ en de symmetrie ervan. Hij is gemaakt in GeoGebra.



Figuur 3.1

a Los op: $\cos(x) = 0{,}8$ met x in $[0, 4\pi]$. Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

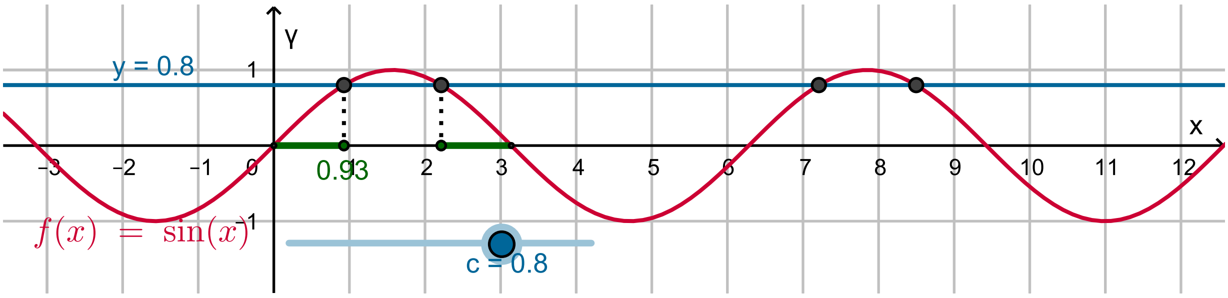
b Los op: $\cos(x) = 0{,}8$ voor elke mogelijke waarde van x. Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

c Los op: $\cos(x) = 0{,}5$ met x in $[0, 4\pi]$. Geef je antwoord exact.

d Los op: $\cos(x) = 0{,}5$ voor elke mogelijke waarde van x. Geef je antwoord exact.

Uitleg 1

Bekijk de applet



Figuur 3.2

Bekijk de grafiek van $y = \sin(x)$ en de lijn $y = 0{,}8$.

Je wilt de vergelijking $\sin(x) = 0{,}8$ oplossen:

- Zoek de oplossing die zo dicht mogelijk bij de y-as ligt. Deze oplossing heet arcsinus van 0,8. Dit getal vind je met de grafische rekenmachine.
  De oplossing is $x = \arcsin(0{,}8) \approx 0{,}927$.
  Op de rekenmachine vind je $\arcsin$ meestal als $\sin^{-1}$.
- Zoek de andere oplossing in dezelfde periode door symmetrie te gebruiken.
  Die oplossing is: $x = \pi - \arcsin(0{,}8)$.
- Omdat de periode 2π is, zijn de oplossingen:
  $x = \arcsin(0{,}8) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(0{,}8) + k \cdot 2\pi$ met k een geheel getal.

Bekijk de oplossingen van de vergelijkingen:

$\sin(x) = 1$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

$\sin(x) = -1$ geeft $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

$\sin(x) = 0$ geeft $x = 0 + k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi$.
Voeg dit samen tot $x = k \cdot \pi$.

Als in $\sin(x) = c$, de c groter is dan 1 of kleiner is dan -1 zijn er geen oplossingen.

Als $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $c = \pm 1$ kun je exacte oplossingen geven.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.
Los op. Rond af op drie decimalen.

a $\sin(x) = 0{,}2$

b $\sin(x) = -0{,}2$

Opgave 2

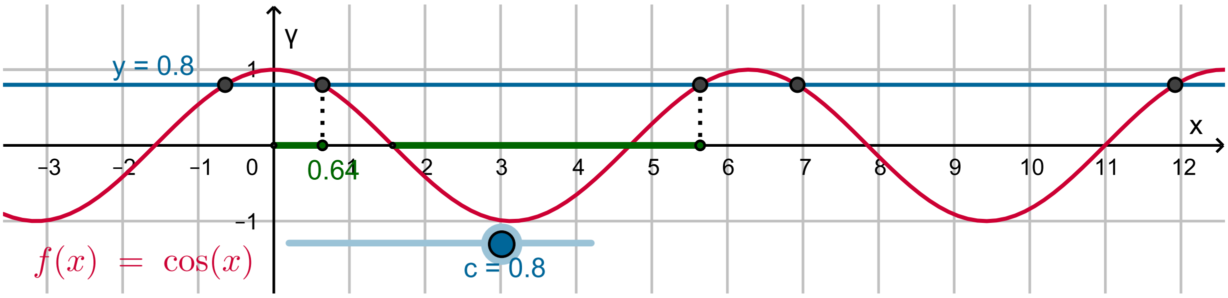
Los exact op.

a $\sin(x) = \frac{1}{2}$

b $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Uitleg 2

Bekijk de applet



Figuur 3.3

Bekijk de grafiek van $y = \cos(x)$ en de lijn $y = 0{,}8$.

Je wilt de vergelijking $\cos(x) = 0{,}8$ oplossen:

- Zoek de eerste oplossing die zo dicht mogelijk bij de verticale as ligt.
  Deze oplossing heet arccosinus van 0,8. De oplossing is: $x = \arccos(0{,}8) \approx 0{,}644$.
- Zoek een andere oplossing binnen één periode door symmetrie te gebruiken.
  Die oplossing is: $x \approx -0{,}644$ of $x \approx 2\pi - 0{,}644$ (kies één van beide).
- Omdat de periode 2π is, zijn alle oplossingen:
  $x \approx 0{,}644 + k \cdot 2\pi \vee x \approx -0{,}644 + k \cdot 2\pi$

Bekijk de oplossingen van de vergelijkingen:
$\cos(x) = 1$ geeft $x = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi$
$\cos(x) = -1$ geeft $x = \pi + k \cdot 2\pi$
$\cos(x) = 0$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

Als in $\cos(x) = c$, de c groter dan 1 of kleiner dan -1 is, zijn er geen oplossingen.

Bij $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $c = \pm 1$ kun je exacte oplossingen geven.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.
Los op. Rond af op drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}2$

b $\cos(x) = -0{,}2$

Opgave 4

Los exact op.

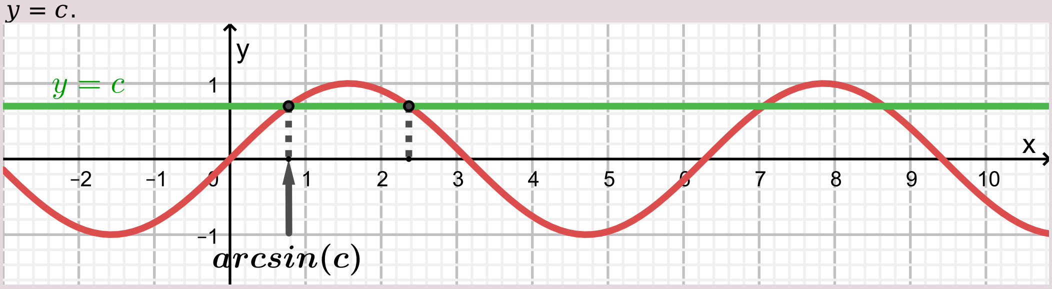
a $\cos(x) = -1$

b $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ met x in radialen en de lijn $y = c$.



Figuur 3.4

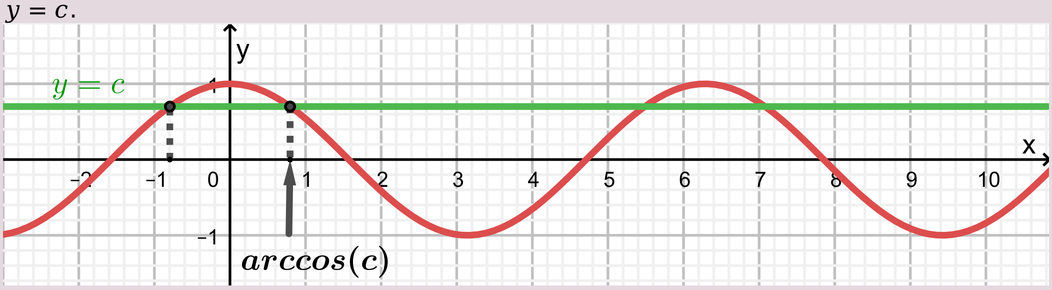
De oplossing van $\sin(x) = c$ die binnen $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ ligt, heet de **arcsinus** van c: $x = \arcsin(c)$.

Binnen één periode is er (vaak) nog een oplossing.
Vanwege de symmetrie van de grafiek is die tweede oplossing $x = \pi - \arcsin(c)$.

Vanwege de periode van 2π zijn alle oplossingen van $\sin(x) = c$ daarom:
$x = \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi$

De vergelijking $\sin(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Bekijk de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen en de lijn $y = c$.



Figuur 3.5

De oplossing van $\cos(x) = c$ binnen $[0, \pi]$ heet **arccosinus** van c: $x = \arccos(c)$.

Binnen één periode is er vaak nog een oplossing.
Vanwege de symmetrie van de grafiek is de tweede oplossing: $x = -\arccos(c)$.

Vanwege de periode van 2π zijn alle oplossingen van $\cos(x) = c$ daarom:
$x = \arccos(x) + k \cdot 2\pi \vee x = -\arccos(x) + k \cdot 2\pi$

De vergelijking $\cos(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Voorbeeld 1

Los op: $\sin(x) = \frac{1}{2}$ met x in $[0,3\pi]$.

Gebruik twee manieren: met de grafische rekenmachine en exact.
Maak gebruik van symmetrie.

Antwoord

Plot de grafieken van $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = 0{,}5$ op het gegeven interval met venster $[0,3\pi] \times [-1,1]$. Dit geeft vier oplossingen.

De eerste oplossing is: $x = \arcsin(0{,}5) \approx 0{,}524$.

De andere oplossingen zijn:
$x \approx 0{,}524 \vee x \approx \pi - 0{,}524 \vee x \approx 0{,}524 + 2\pi \vee x \approx \pi - 0{,}524 + 2\pi$
$x \approx 0{,}524 \vee x \approx 2{,}618 \vee x \approx 6{,}807 \vee x \approx 8{,}901$

De eerste oplossing is exact: $x = \frac{1}{6}\pi$.

Op het gegeven interval zijn de vier oplossingen:

$x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \pi - \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + 2\pi \vee x = \pi - \frac{1}{6}\pi + 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 2\frac{1}{6}\pi \vee x = 2\frac{5}{6}\pi$

Opgave 5

Los op $\sin(x) = -0{,}5$.

a Geef alle oplossingen, afgerond op drie decimalen.

b Geef alle exacte oplossingen.

c Geef alle exacte oplossingen op het interval $[0,4\pi]$.

Opgave 6

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$. Zorg dat je in ieder geval één complete periode in beeld hebt.

a Los exact op: $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b Geef alle exacte oplossingen op het interval $[-2\pi,4\pi]$.

c Geef de oplossingen op het interval $[-2\pi,4\pi]$. Rond af op drie decimalen.

Voorbeeld 2

Los exact op: $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Antwoord

Je weet: $\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Vanwege de symmetrie van de grafiek geldt dat
$\cos\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Een exacte oplossing is: $x = \frac{3}{4}\pi$.

Een tweede oplossing is: $x = -\frac{3}{4}\pi$.

Alle verdere oplossingen zijn te vinden door bij deze twee oplossingen een veelvoud van de periode op te tellen:

$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

Opgave 7

Los op: $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ op $[0,2\pi]$.

a Geef alle oplossingen. Rond af op drie decimalen.

b Geef alle exacte oplossingen.

c Geef alle exacte oplossingen op het interval $[0,4\pi]$.

Opgave 8

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ op $[0,2\pi]$.

a Los exact op: $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b Geef alle exacte oplossingen op het interval $[-2\pi,4\pi]$.

c Geef de oplossingen op het interval $[-2\pi,4\pi]$ in drie decimalen.

Voorbeeld 3

Los exact op: $\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Antwoord

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\ 2x &= \tfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - \tfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ x &= \tfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi \vee x = \tfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi \end{aligned}$$

Let op dat je ook $k \cdot 2\pi$ deelt door 2.

Opgave 9

Los exact op.

a $\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\sin(2x) = \sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)$

c $\cos(2x) = \cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)$

Voorbeeld 4

Los op: $3 \cdot \sin(x) + 1 < 0$.

Antwoord

Plot $y = 3\sin(x) + 1$.

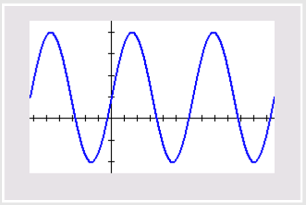
Herleid $3 \cdot \sin(x) + 1 = 0$ tot $\sin(x) = -\frac{1}{3}$.

De oplossingen binnen één periode zijn (zie de grafiek): $x = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) \vee x = -\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$.

$x \approx -0{,}340 \vee x \approx -2{,}802$

De ongelijkheid klopt binnen deze periode voor $-2{,}802 < x < -0{,}340$.

Dit herhaalt zich elke periode, dus de volledige oplossing is:
$-2{,}802 + k \cdot 2\pi < x < -0{,}340 + k \cdot 2\pi$.



Figuur 3.6

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 3\sin(x) + 1$.

a Plot deze grafiek op $[-2\pi, 4\pi]$.

b Los $f(x) < 2$. Rond af op twee decimalen.

c Los $f(x) = 2{,}5$ exact op.

d Los $f(x) = 4$ exact op.

e Waarom kun je $f(x) = 5$ niet oplossen?

Verwerken

Opgave 11

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.
Los op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen. Rond anders af op drie decimalen.

a $\sin(x) = 0{,}35$

b $\sin(x) = -0{,}35$

c $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 12

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$.
Los de vergelijkingen op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}35$

b $\cos(x) = -0{,}35$

c $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 13

Geef alle oplossingen.

a $\sin(x) = 1$

b $\sin(x) = \sin(1)$

c $\sin(1) = x$

d $\sin(x) = \cos(1)$

Opgave 14

Gegeven is de functie f met $f(x) = 2\sin(x) - 1$ op $[0{,}4\pi]$.

a Bereken alle nulpunten van de grafiek van deze functie.

b Los op: $f(x) \geq 0$

Opgave 15

Gegeven is de functie g met $g(x) = \cos(2x + 1)$ op $[0{,}4\pi]$.

a Los op: $g(x) = 0{,}5$.

b Los op: $g(x) \geq 0{,}5$

Opgave 16

Los exact op.

a $3\cos(x) + 1 = -0{,}5$

b $\sin(-\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $-8\cos(0{,}25x) = -4\sqrt{2}$

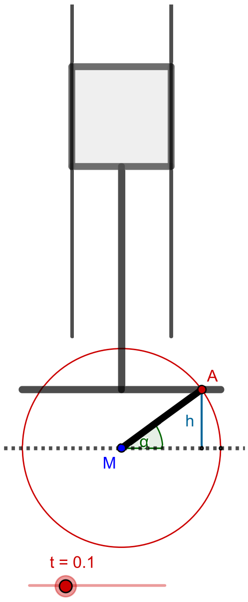
d $\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Toepassen

Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een **krukstang** MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek.

De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.



Figuur 3.7

Opgave 17

Bekijk de formule voor de hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn.

a In welke eenheid is h uitgedrukt?

b Welke periode heeft h als x in graden wordt uitgedrukt?
En als x in radialen wordt uitgedrukt?

c Kun je een voordeel noemen van het werken met radialen ten opzichte van het werken met graden?

Het werken met decimeters als eenheid is niet gebruikelijk, liever werk je met meter, centimeter, millimeter.

d Hoe wordt het functievoorschrift voor de hoogte als je in mm werkt?
En wat verandert er dan aan de grafiek?

Opgave 18

De formule voor h in cm als functie van x in radialen is $h = 10 \cdot \sin(x)$.

a Maak de grafiek van h.

b Bij welke waarden voor x is $h(x) = 5$ cm?

c Bij welke waarden voor x is $h(x) = -5$ cm?

Testen

Opgave 19

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$.
Los de volgende vergelijkingen op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

a $\cos(x) = 0{,}95$

b $\cos(x) = -0{,}95$

c $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Opgave 20

Gegeven is de functie $f(x) = 4\cos(x) + 1$ op $[-2\pi, 2\pi]$.

a Bereken alle nulpunten van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Los op $f(x) < 0$.

Opgave 21

Los exact op: $\sin(3x) = 0{,}5$.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met sinus en cosinus**. Je ziet hier alleen vergelijkingen met sinus, het gaat soms om exacte waarden. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.4 Sinusoïden

Inleiding

Je hebt leren werken met de functies $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ (met x in radialen). Als je op deze functies transformaties toepast, krijg je andere periodes en kunnen de grafieken om een andere lijn dan de x-as gaan slingeren met een andere uitwijking. Dat is belangrijk omdat de sinusfunctie en de cosinusfunctie dan kunnen worden gebruikt om periodieke verschijnselen meer in het algemeen te beschrijven. Functies die door transformatie ontstaan uit $y = \sin(x)$ noem je sinusoïden.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip sinusoïde en de bijbehorende karakteristieken kennen en de grafieken ervan tekenen.

Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- de vergelijkingen $\sin(x) = c$ en $\cos(x) = c$ oplossen als c een constante is.
- transformaties op functies toepassen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot \sin(4x) + 3$.

a Maak met de grafische rekenmachine de grafiek van f op $[0,2\pi]$.

b Bepaal de periode van deze periodieke functie.

c Bereken alle toppen van de grafiek op $[0,2\pi]$.

Gegeven is de functie $g(x) = 4 \cdot \sin(0{,}5(x - \pi)) - 1$.

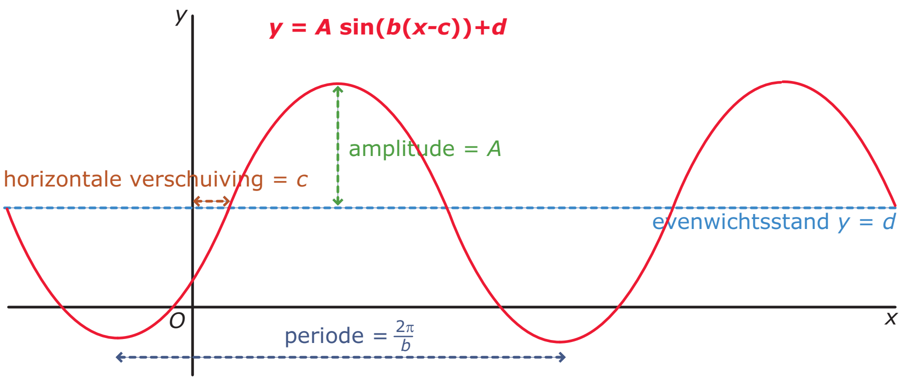
d Maak met de grafische rekenmachine de grafiek van g op $[0,4\pi]$.

e Bepaal de periode van deze periodieke functie.

f Bereken alle toppen van de grafiek op $[0,4\pi]$.

Uitleg

Bekijk de applet: sinusoïde



Figuur 4.1

Door transformaties van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ maken. Zulke grafieken heten sinusoïden.
Door transformaties van de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ maken. Zulke grafieken heten ook sinusoïden.

Bekijk met de grafische rekenmachine wat er gebeurt als je a, b, c en/of d verandert.

- a verandert de maximale uitwijking, de amplitude is a.
- b verandert de periode, de periode is $\frac{2\pi}{b}$.
- c zorgt voor een horizontale verschuiving over $-c$, een translatie ten opzichte van de y-as.
  Bij een sinusfunctie is c de x-coördinaat van een punt waar de grafiek door de evenwichtsstand omhoog gaat.
  Bij een cosinusfunctie is c de x-coördinaat van een punt waar de grafiek een maximum heeft.
- d verandert de evenwichtsstand, die is $y = d$.

Wil je de grafiek van de sinusoïde $g(x) = 1{,}5 \cdot \sin(2(x-1)) + 0{,}5$ maken, dan gebruik je:

- de amplitude is $1{,}5$
- de evenwichtslijn is $y = 0{,}5$
- de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- de horizontale translatie is 1

Het bereik van de functie is $B_g = [0{,}5 - 1{,}5; 0{,}5 + 1{,}5] = [-1, 2]$.

De toppen van g vind je door de transformaties toe te passen op de toppen van f.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $g(x) = 1{,}5 \sin(2(x-1)) + 0{,}5$ op $[0{,}2\pi]$ in de **Uitleg**.

a Welke transformaties moet je achtereenvolgens op de grafiek van $y = \sin(x)$ toepassen om die van g te krijgen? Licht je antwoord toe.

b Het punt $(0{,}0)$ ligt op de grafiek van $y = \sin(x)$. Welk punt op de grafiek van g ontstaat door deze transformaties uit $(0{,}0)$?

c Welke toppen heeft de grafiek van g?

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 - 2\sin(3(x+2))$.

a Lees uit het functievoorschrift de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving af. Schets de grafiek.

b Plot de grafiek van f en controleer je antwoord met de applet.

c Oefen dit een aantal keer met zelf bedachte sinusoïden.

Theorie en voorbeelden

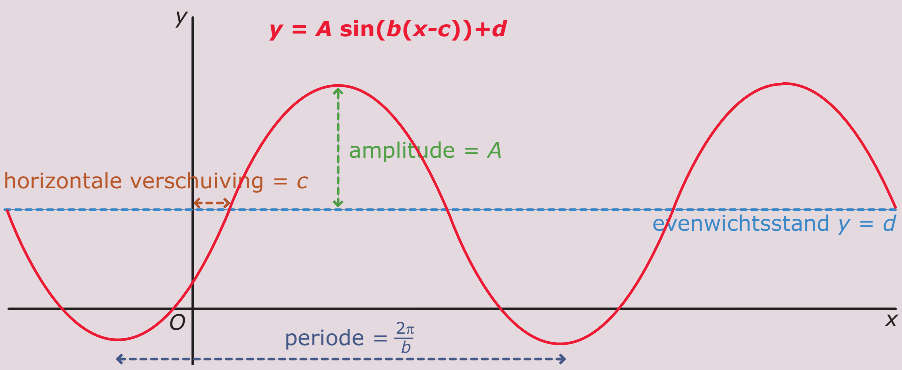
Om te onthouden

Bekijk de applet: sinusoïde

Door transformaties van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x+c)) + d$ maken.

De grafieken van de op deze manier getransformeerde functies heten **sinusoïden**.

De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \cos(b(x+c)) + d$ is ook een sinusoïde, want $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ is een verschoven sinusgrafiek.



Figuur 4.2

Voor elke sinusoïde geldt:

- de **amplitude** (maximale uitwijking van de evenwichtslijn) is a
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$, dit betekent: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- de **horizontale verschuiving** is $-c$, dit is een translatie ten opzichte van de y-as
- de **evenwichtsstand** is de lijn $y = d$

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie: $f(x) = 10\sin(3(x - \pi)) + 5$.
Bereken de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en leg uit hoe je de grafiek goed op je grafische rekenmachine in beeld krijgt.
Bereken alle toppen van deze sinusoïde.

Antwoord

De periode is $p = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$, de amplitude is $A = 10$ en de evenwichtsstand is $y = 5$.

Hieruit volgt dat het maximum 15 en het minimum -5 is.

Verder wil je minstens één complete periode in beeld hebben en het liefst ook beide coördinaatassen. Er begint een periode bij $(\pi,5)$ en dus ook bij $\left(\frac{1}{3}\pi,5\right)$.

Een geschikte vensterinstelling is $[0,\pi] \times [-5,15]$.

Voor de maxima geldt $\sin(3(x - \pi)) = 1$ en dus:

$$\begin{aligned} 3(x-\pi) &= \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= 1\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Voor de minima geldt $\sin(3(x - \pi)) = -1$ en dus:

$$\begin{aligned} 3(x-\pi) &= 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= 1{,}5\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

De toppen zijn $\left(1\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi,15\right)$ (maxima) en $\left(1\frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi,-5\right)$ (minima).

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Leg uit waarom het maximum 15 en het minimum -5 moet zijn.

b Waarom ‘begint’ er een periode bij $(\pi,5)$ en dus ook bij $\left(\frac{1}{3}\pi,5\right)$?

c Leg uit, hoe je aan de x-waarden van de extremen komt.

Gegeven is $y = 12\sin(2x) - 6$.

d Bereken de periode en alle toppen van de grafiek van deze sinusoïde en plot de grafiek op het domein $[-2\pi,2\pi]$.

Voorbeeld 2

De functie f met $f(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1$ is gedefinieerd op $\mathbb{R}$.
Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving om de grafiek goed in beeld te krijgen.

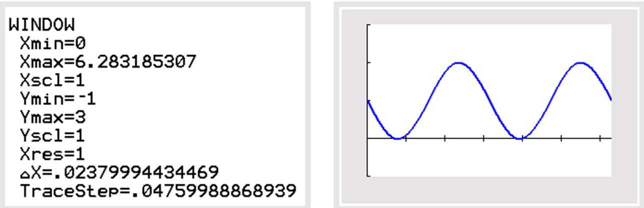
Los op: $f(x) \geq 1\frac{1}{2}$ in drie decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

De amplitude is 1 en de evenwichtsstand is $y = 1$, dus het maximum is $1 + 1 = 2$ en het minimum is $1 - 1 = 0$.

De horizontale verschuiving is $\frac{1}{2}\pi$. Kies venster bijvoorbeeld $[0,2\pi] \times [-1,3]$.



Figuur 4.3

Los op:

$$\begin{aligned}
\sin\left(2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right)\right) + 1 &= 1\tfrac{1}{2} \\
\sin\left(2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right)\right) &= \tfrac{1}{2} \\
2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) &= \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) + k \cdot 2\pi \vee 2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \pi - \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) + k \cdot 2\pi \\
2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) &= \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \\
x &= \tfrac{7}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = \tfrac{11}{12}\pi + k \cdot \pi \\
x &\approx 1{,}833 + k \cdot \pi \vee x \approx 2{,}880 + k \cdot \pi
\end{aligned}$$

De benaderde oplossing vind je ook met de rekenmachine.

Uit de grafiek lees je de oplossing van de ongelijkheid af: $1{,}833 < x < 2{,}880 + k \cdot \pi$.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 3\sin(\pi(x - 1)) + 10$.

a Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving om de vensterinstellingen te bepalen waarmee je de grafiek goed in beeld krijgt.

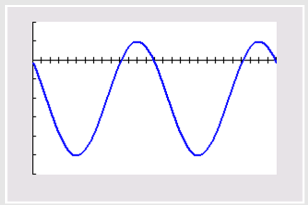
b Bereken de coördinaten van alle toppen.

c Los op: $f(x) = 11{,}5$.

Voorbeeld 3

Plot de grafiek van functie $f(x) = 300\cos\left(\frac{\pi}{7}(x + 2)\right) - 200$.

Neem x vanaf 0 tot 28.
Bereken de periode, rond af op een geheel getal. Bereken het bereik van f.
Los algebraïsch op: $f(x) = 0$. Rond af op twee decimalen.


Figuur 4.4

Antwoord

De x wordt vermenigvuldigd met $\frac{1}{7}\pi$.

De periode is daarom $\frac{2\pi}{\frac{1}{7}\pi} = 14$.

De hoogste waarde van f is $300 - 200 = 100$.
De laagste waarde van f is $-300 - 200 = -500$.
$\text{B}_f = [-500,100]$.

Los de vergelijking op.

$$\begin{aligned}
300\cos\left(\tfrac{\pi}{7}(x+2)\right) - 200 &= 0 \\
300\cos\left(\tfrac{\pi}{7}(x+2)\right) &= 200 \\
\cos\left(\tfrac{\pi}{7}(x+2)\right) &= \tfrac{2}{3} \\
\tfrac{\pi}{7}(x+2) &= \pm\arccos\left(\tfrac{2}{3}\right) + k\cdot 2\pi \\
\tfrac{\pi}{7}(x+2) &\approx \pm 0{,}841 + k\cdot 2\pi \\
x+2 &\approx \pm 1{,}874 + k\cdot 14 \\
x &\approx -0{,}126 + k\cdot 14 \vee x \approx -3{,}874 + k\cdot 14
\end{aligned}$$

Omdat x loopt vanaf 0 tot 28, krijg je vier oplossingen:
$x \approx 10{,}13 \vee x \approx 13{,}87 \vee x \approx 24{,}13 \vee x \approx 27{,}87$

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}(x+2)\right) + 8$.

a Bepaal de periode en de coördinaten van alle toppen.

b Welke transformaties moet je achtereenvolgens op de grafiek van $y = \cos(x)$ toepassen om die van f te krijgen?

c Los op (benaderingen in drie decimalen nauwkeurig): $f(x) \geq 11$.

Opgave 6

Voor de hoogte van de tip van het rotorblad van een draaiende windmolen geldt de formule:

$h(t) = 40 + 10\cdot\cos\left(\frac{4}{3}\pi\cdot t\right)$

Hierin is t de tijd in seconden en h de hoogte in meter.

a Bepaal de waarden voor de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving. Bij welke vensterinstellingen krijg je vanaf $t = 0$ precies twee periodes in beeld?

b Bereken de tijdstippen waarop de tip precies 45 meter boven de grond zit.

Verwerken

Opgave 7

De grafieken van de functies zijn sinusoïden. Geef van iedere sinusoïde de periode en de amplitude. Plot de grafiek zodat je twee periodes ziet.

a $y = 12 \cdot \sin(x)$

b $h(t) = 50 \sin(2\pi t) + 10$

c $y = 120 \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)$

d $P(x) = -20 \sin(2x)$

Opgave 8

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op drie decimalen.

a $5 \cos\left(\frac{1}{2}x + 4\right) = 1$

b $10 \sin\left(\frac{\pi}{5}(x-2)\right) = 5$

c $50 \cos(4x) = 25\sqrt{3}$

d $50 - 30 \sin\left(\frac{2\pi}{15}x\right) = 45$

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = 20 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 10$ op $[0,16]$.

a Bepaal het bereik van f.

b Bereken alle nulpunten van de grafiek van deze functie.

c Los op: $f(x) \leq 0$.

Opgave 10

Gegeven is $f(x) = 2 + 3 \sin(\pi x + \pi)$. De volgende functies hebben voor de juiste keuze van de parameter dezelfde grafiek als functie f. Bepaal telkens die parameter.

a $g(x) = 2 + 3 \cos(\pi x + a)$

b $h(x) = 2 - 3 \sin(\pi x + b)$

c $k(x) = 2 - 3 \cos(\pi x + c)$

Opgave 11

De hoogte boven de grond van iemand die zich in een reuzenrad bevindt, kun je beschrijven door:

$h(t) = 11 + 10 \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$

Hierin is $h(t)$ uitgedrukt in meter en t in seconden.

a Plot $h(t)$.

b De getallen 11 en 10 uit de formule hebben een betekenis voor het reuzenrad. Welke?

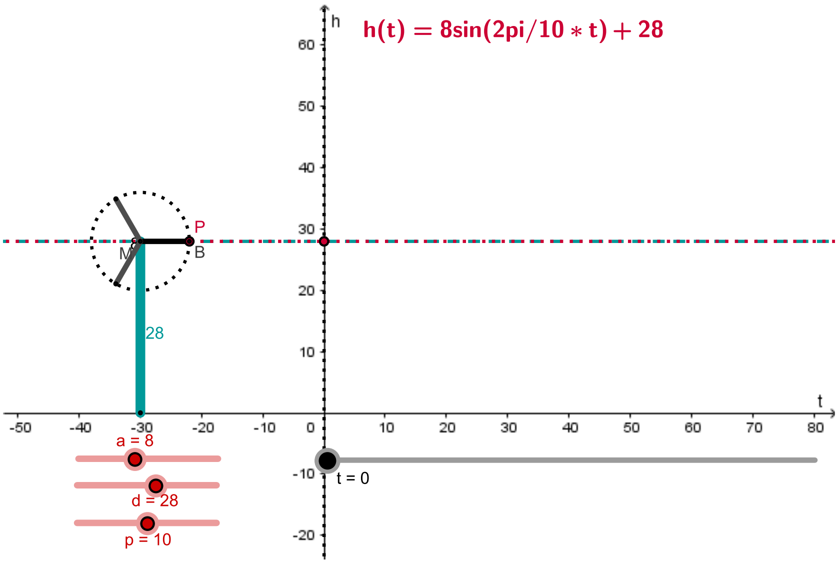
c Na één periode is het reuzenrad precies één keer rondgedraaid. Bepaal de periode in seconden.

d Bereken hoe lang het bakje van een reuzenrad hoger dan 18 meter boven de grond zit.

Toepassen

Hier zie je een schematische weergave van een **windmolen** waarvan je de lengte van de wieken a (in m), de hoogte van het draaipunt d (in m) en de omwentelingstijd, de periode p (in s) kunt aanpassen.
De grafiek gaat over de hoogte van de uiterste punt P van de wiek, afhankelijk van de tijd t in seconden.

Bekijk de applet.



Figuur 4.5

Opgave 12

Bekijk de windmolen in **Toepassen**.

Van een zekere windmolen is de hoogte van het draaipunt 30 m, de lengte van de wieken 15 m en de omwentelingstijd (bij een zekere windsnelheid) 5 s.

a Stel een bijpassende formule op voordat je deze instellingen in de applet doet.
Controleer je antwoord met de applet.

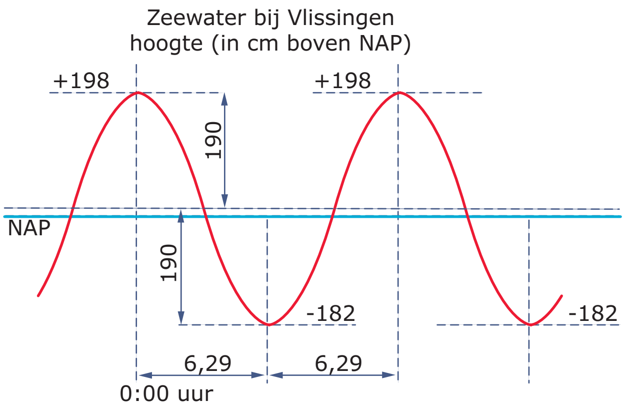
Deze windmolen staat achter een boerderij die een hoogte heeft van 20 m.

b Hoe lang is elke omwenteling de hoogte van de top van de wiek groter dan de hoogte van de boerderij?

c Je kunt de opdrachten bij a en b variëren door andere getallen te kiezen. Oefen met een medeleerling.

Opgave 13: Getijden

De grafiek in de volgende figuur geeft globaal de getijdenbeweging van het zeewater voor de haven van Vlissingen weer. Er wordt geen rekening gehouden met de invloed van de wind, met springtij, en dergelijke.



Figuur 4.6

a Hoe hoog is de gemiddelde waterstand volgens deze grafiek?

b Hoe groot is de maximale afwijking van de waterstand ten opzichte van het gemiddelde?

c Hoe groot is de periode van de getijdenbeweging?

Een benadering van de getijdenbeweging wordt gegeven door de volgende formule:

$y = 8 + 190\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot t\right)$

met t in uren t.o.v. middernacht op 21 juni 2008 en y in cm ten opzichte van het NAP.

d Vergelijk de grafiek van deze functie met de grafiek in de figuur hierboven. Vind je dat de formule een goed beeld geeft van de getijdenbeweging?

e Hoe groot is volgens de formule de periode en de amplitude?

f Hoeveel uur per periode is de waterstand hoger dan 180 cm?

Testen

Opgave 14

Bepaal van de volgende functies de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y = \sin(x)$ of $y = \cos(x)$.

a $y = 4\sin(4\pi x)$

b $y = 6 + 2\cos(x + 8)$

c $y = 0{,}5\sin(0{,}5\pi x)$

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $f(x) = -\sqrt{800}\sin(2\pi x) - 20$ op $[0,2]$.

a Bepaal het bereik van f.

b Bereken alle nulpunten van f op het gegeven interval.

c Los op: $f(x) \leq 0$.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **bepalen van de periode, de amplitude en de evenwichtsstand van een sinusoïde**. Je ziet hier alleen vergelijkingen met sinus, het gaat soms om exacte waarden. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.5 Periodieke modellen

Inleiding

Je hebt tot nu toe berekeningen gemaakt en grafieken getekend bij gegeven sinusoïden. Het omgekeerde kan ook: bij een gegeven grafiek van een sinusoïde de formule opstellen. Met die formule kun je snel nieuwe punten van de grafiek vinden.

Verder kun je periodieke verschijnselen waarvan de grafiek golfvormig is, vaak goed benaderen met een sinusoïde. Die sinusoïde is dan een model voor het verschijnsel.

Je leert in dit onderwerp

- bij een getekende sinusoïde de formule opstellen;
- sinusoïden gebruiken als model voor een periodiek verschijnsel.

Voorkennis

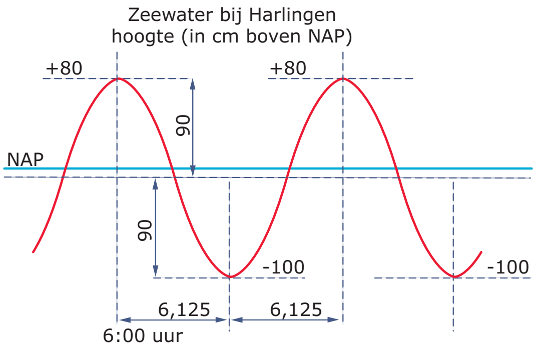
- de grafiek van een sinusoïde (zowel met sin als cos) tekenen;
- de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving van een sinusoïde aflezen uit de formule, dan wel uit de grafiek.

Verkennen

Opgave V1

In de getijdeninformatie van Harlingen kun je aflezen dat bij hoogwater de waterstand h ongeveer 80 cm boven NAP (Normaal Amsterdams Peil) zit en dat bij laagwater de waterstand ongeveer 100 cm onder NAP zit. Verder liggen de opeenvolgende tijdstippen van hoogwater (net als die van laagwater) ongeveer 12 uur en 15 minuten uit elkaar. Dat betekent een periode van $12{,}25$ uur. Op een zekere dag is het hoogwater om 6:00 uur.

De bijbehorende grafiek lijkt op een sinusoïde.



Figuur 5.1

a Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtslijn van die sinusoïde.

b Stel een passende formule op.

c Wat is het nut van zo'n formule?

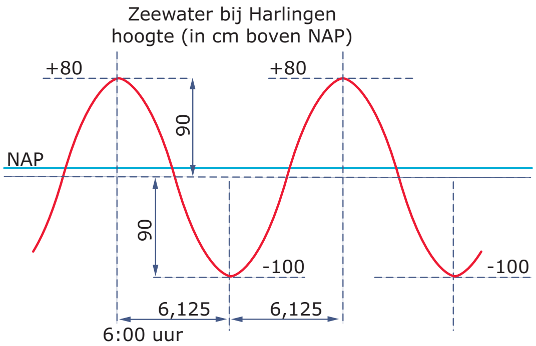
Uitleg

Bekijk de applet: waterstanden Harlingen

Periodieke verschijnselen waarvan de grafiek golfvormig is, kun je vaak goed benaderen met een sinusoïde. Die sinusoïde is dan een model voor het verschijnsel.

In de getijdeninformatie van Harlingen kun je aflezen dat bij hoogwater de waterstand h ongeveer 80 cm boven NAP (Normaal Amsterdams Peil) zit en dat bij laagwater de waterstand ongeveer 100 cm onder NAP zit. Verder liggen de opeenvolgende tijdstippen van hoogwater (net als die van laagwater) ongeveer 12 uur en 15 minuten uit elkaar. Dat betekent een periode van $12{,}25$ uur. Op een zekere dag is het hoogwater om 6:00 uur.

Bekijk de schets van een grafiek die past bij de getijdeninformatie van Harlingen.



Figuur 5.2

De bijbehorende formule bij de grafiek heeft de vorm: $h(t) = a \cdot \sin(b(t + c)) + d$.

In de grafiek kun je de volgende gegevens aflezen.

- De periode is $12{,}25$ uur: $b = \frac{2\pi}{12{,}25} \approx 0{,}52$
- De waterstand ligt tussen $0{,}8$ m en $-1{,}0$ m. De amplitude is $a = 0{,}9$ m.
- De evenwichtsstand ligt $0{,}9$ m onder hoogwater: $d = -0{,}1$.
- Hoogwater moet bij $t = 6$ zitten. Het direct ervoor liggende punt op de evenwichtsstand zit daar een kwart periode voor. Dit is bij $t = 6 - 3{,}0625 \approx 2{,}94$. Dit betekent dat $c \approx -2{,}94$.

De bijpassende sinusoïde wordt: $h(t) \approx 0{,}9 \sin(0{,}52(t - 2{,}94)) - 0{,}1$.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de waterstand bij Harlingen in de **Uitleg**.

a Leg uit hoe uit de gegevens de periode, de amplitude en de evenwichtslijn worden gevonden.

b Stel een bijpassende formule op uitgaande van $y = \cos(x)$.

c Laat zien dat de formule die in de uitleg werd gevonden, $h(t) \approx 0{,}9 \sin(0{,}52(t - 2{,}94)) - 0{,}1$, dezelfde grafiek oplevert. Controleer de grafieken op je grafische rekenmachine.

Opgave 2

Ga uit van de functie $y = \sin(x)$. Schrijf het voorschrift op van de periodieke functies die ontstaan bij de volgende wijzigingen:

a De amplitude wordt 4.

b De amplitude wordt 10 en de evenwichtsstand wordt 20.

c De periode wordt 4π en de amplitude wordt 4.

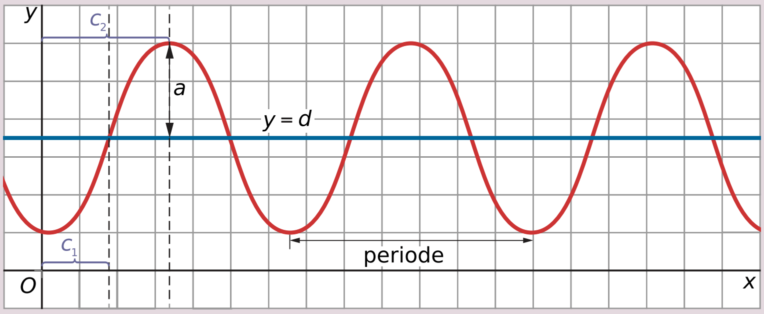
d De horizontale verschuiving is 2, de periode wordt 10, de amplitude wordt 5 en de evenwichtsstand wordt 10.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Wanneer je een periodiek verschijnsel kunt beschrijven met een sinusoïde kun je daarbij een passend functievoorschrift maken door:

- de **evenwichtslijn** $y = d$ te bepalen.
- de **amplitude** a (maximale uitwijking van de evenwichtslijn) te bepalen.
- de **periode** p te bepalen.
- de **horizontale verschuiving** (ten opzichte van de standaardgrafiek) c te bepalen.



Figuur 5.3

Er zijn twee functievoorschriften mogelijk:

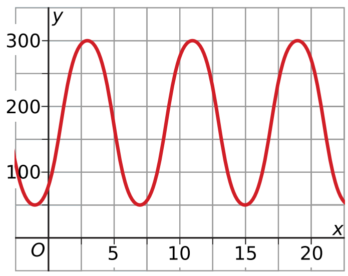
- $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c_1)) + d$ waarin $b = \frac{2\pi}{p}$
- $f(x) = a \cdot \cos(b(x - c_2)) + d$ waarin $b = \frac{2\pi}{p}$

Let erop dat de waarden voor a, b en d bij beide grafieken hetzelfde zijn, maar de waarden van c niet. De sinus 'begint' altijd op de evenwichtslijn, de cosinus op het hoogste punt. De verschuiving ten opzichte van de standaardsinus is daardoor anders dan ten opzichte van de standaardcosinus.

Voorbeeld 1

Bekijk de sinusoïde.

Welk functievoorschrift kun je bij deze sinusoïde maken uitgaande van de standaardsinus?
En welk functievoorschrift kun je maken uitgaande van de standaardcosinus?



Figuur 5.4

Antwoord

Maximum 300 en minimum 50 geeft:

- de amplitude is $a = \frac{300-50}{2} = 125$
- de evenwichtsstand is $y = 300 - 125 = 50 + 125 = 175$

Twee opvolgende maxima zitten bij $x = 3$ en $x = 11$.
De periode is $p = 8$. Ga uit van de standaardsinus, dan is de horizontale verschuiving de x-waarde van een punt op de grafiek op

de evenwichtsstand op het moment dat de grafiek daar stijgt.
Hier is dat $x = 1$.
Het functievoorschrift wordt:

$$f(x) = 125\sin\left(\frac{2\pi}{8}(x-1)\right) + 175$$

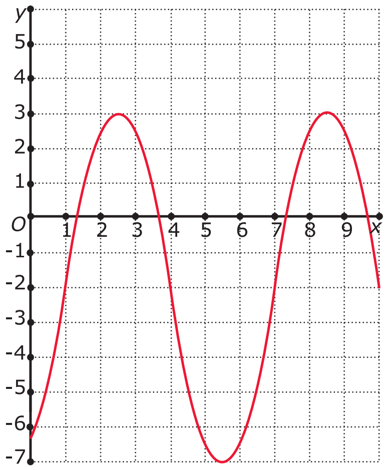
Ga je uit van de standaardcosinus, dan is de horizontale verschuiving de x-waarde van een punt op de grafiek waar een maximum zit. Hier is dat bijvoorbeeld $x = 3$.
Het functievoorschrift wordt:

$$f(x) = 125\cos\left(\frac{2\pi}{8}(x-3)\right) + 175$$

Opgave 3

Je ziet hier een sinusoïde getekend.

Maak er twee functievoorschriften bij, uitgaande van $y = \sin(x)$.



Figuur 5.5

Opgave 4

Maak bij de sinusoïde van de vorige opgave twee functievoorschriften uitgaande van $y = \cos(x)$.

Voorbeeld 2

Een sinusoïde heeft een maximum van 1 en een minimum van -5. Het domein is $\mathbb{R}$.

De evenwichtswaarde -2 wordt onder andere bereikt als $x = \frac{5}{3}\pi$ en daarna als $x = \frac{11}{3}\pi$.

Tussen deze beide x-waarden ligt de grafiek boven de evenwichtsstand.

Stel een formule op voor de beschreven sinusoïde, met zowel een sinus als een cosinus.

Antwoord

De formule krijgt bijvoorbeeld de vorm $y = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$ of de vorm $y = a \cdot \cos(b(x-c)) + d$.

Maak een schets van de situatie.

De twee punten op de evenwichtsstand liggen een halve periode uit elkaar.

- De periode is $2 \cdot \left(\frac{11}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi\right) = 4\pi$, $b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.
- De evenwichtsstand is $y = -2$.
- De amplitude a is $\frac{1-(-5)}{2} = 3$.

Het is bekend waar de punten op de evenwichtsstand zitten. Het is het makkelijkst om uit te gaan van de standaardsinus. De horizontale verschuiving is $\frac{5}{3}\pi$. Bij die x-waarde hoort een punt op de evenwichtsstand waarin de grafiek omhooggaat.

De gevraagde formule is bijvoorbeeld:

$$y = 3\sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{3}\pi\right)\right) - 2$$

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt de formule van een sinusoïde opgesteld, waarbij uitgegaan wordt van de standaardsinus. Stel een andere formule op voor deze sinusoïde waarbij nu uitgegaan wordt van de standaardcosinus.

Opgave 6

De grafiek van een sinusoïde f heeft een minimum 10 voor $x = 1$ en een eerstvolgend maximum 26 voor $x = 13$.

a Bereken de periode, de evenwichtslijn en de amplitude.

b Geef twee passende formules, gebruik zowel de sinus als de cosinus.

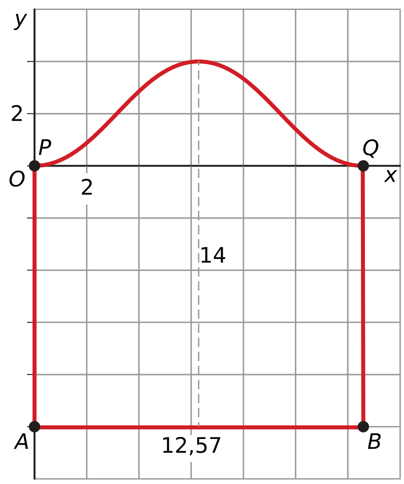
c Bereken in twee decimalen nauwkeurig: $f(12)$, $f(12{,}25)$, $f(12{,}5)$, $f(12{,}75)$ en $f(13)$.

d Los op: $f(x) > 22$.

Voorbeeld 3

Een cilinder met een diameter van 4 cm snijdt je aan de bovenkant schuin af. Vervolgens knip je hem open en leg je hem plat neer. Je kunt dan de afgebeelde figuur krijgen. De bovenrand is een zuivere sinusoïde.

Stel voor deze rand een formule op. Neem aan dat punt P de coördinaten $(0,0)$ heeft.



Figuur 5.6

Antwoord

De assen volgen uit de figuur.
Bepaal vervolgens:

- de evenwichtsstand is $y = 2$
- de amplitude is 2
- de periode is 4π

Het maximum zit halverwege de bovenrand bij $x = 2\pi$.
Ten opzichte van de cosinus is de horizontale verschuiving 2π.
De formule wordt: $y = 2\cos(0{,}5(x - 2\pi)) + 2$ met domein $[0{,}4\pi]$.

Opgave 7

Gebruik de cilinder uit **Voorbeeld 3**.

a Stel voor de bovenrand een formule op uitgaande van $y = \sin(x)$.

b Waarom is de periode 4π?

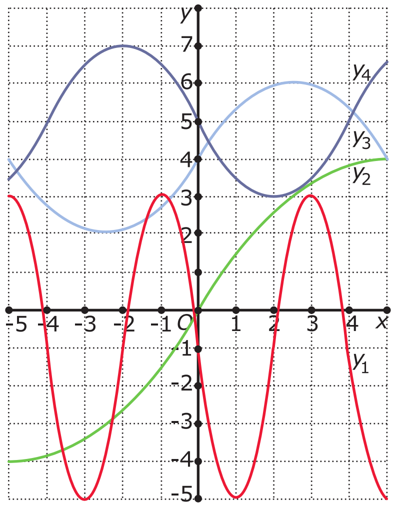
c De lijn $y = 3$ snijdt de sinusoïde uit het voorbeeld in de punten A en B.
Bereken exact de lengte van lijnstuk AB.

d Een lijn evenwijdig aan PQ snijdt de bovenrand in A en B. Gegeven is $AB = 4$ cm. Bepaal de coördinaten van A en B.

Verwerken

Opgave 8

Stel bij de vier sinusoïden een passend functievoorschrift op. Gebruik hierbij de sinus.



Figuur 5.7

Opgave 9

Bij de functie $y_1 = -1 + 4\sin\left(\frac{2\pi}{4}(x-2)\right)$ zijn andere functievoorschriften mogelijk die dezelfde grafiek hebben als y_1.

a Geef er minstens drie.

b Gebruik één van deze functievoorschriften om op te lossen: $y_1 = -2$. Geef benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

De grafiek van f is sinusvormig. De evenwichtslijn is $y = 1$, de amplitude is 2, de periode is π en de grafiek gaat stijgend door het punt $\left(\frac{1}{6}\pi, 1\right)$.

a Stel een formule op voor $f(x)$.

b Bereken met die formule $f(0)$.

c Los op: $f(x) \leq 0$.

Opgave 11

Functie $f(x)$ heeft een sinusvormige grafiek met een minimum in het punt $(15, -22)$ en een eerstvolgend maximum in het punt $(33, 104)$.

a Maak een schets van deze grafiek met $0 \leq x \leq 50$.

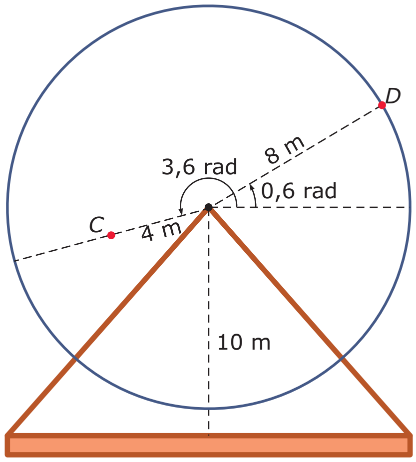
b Bereken de periode, de amplitude en de evenwichtslijn en stel een passend functievoorschrift op.

c Bereken $f(42)$, $f(45)$ en $f(48)$ algebraïsch.

d Los op: $f(x) = 72{,}5$.

Opgave 12

Een reuzenrad bevat de stoeltjes C en D. Stoeltje C draait op een afstand van 4 meter van de as in het rond, stoeltje D op een afstand van 8 meter. De as van het reuzenrad bevindt zich op 10 meter boven de grond. Bekijk de getekende situatie. Het reuzenrad draait in 8 seconden één keer rond. Op $t = 0$ staat stoeltje D zo hoog mogelijk. Het reuzenrad draait tegen de wijzers van de klok in.



Figuur 5.8

a Bereken bij de stand in de figuur de hoogte h in meter van de stoeltjes C en D ten opzichte van de grond.

b Stel een passend functievoorschrift op voor de hoogte van stoeltje D.

c Hoe hoog staat stoeltje C op tijdstip $t = 1413{,}25$?

d Hoelang zit je in stoeltje C elk rondje hoger dan 12 meter?

e Welke vergelijking moet je oplossen om te weten op welke tijdstippen stoeltje C en D op dezelfde hoogte hangen?

f Bereken in twee decimalen nauwkeurig hoeveel seconden per periode stoeltje C hoger hangt dan stoeltje D.

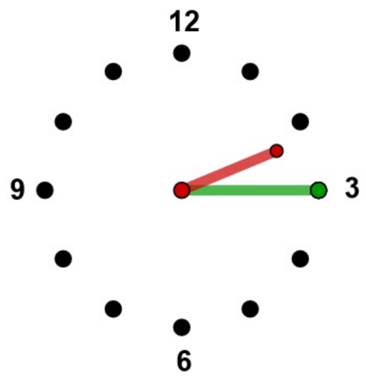
g Verklaar waarom het resultaat bij f ook te beredeneren valt.

Toepassen

Bekijk de applet: analoge klok

Je ziet hier een **analoge klok**. De lengte van de grote wijzer is 2 dm, die van de kleine wijzer 15 cm. Je kunt in de applet zelf de gewenste tijd instellen.

Bekijk de hoogte h van de uiteindes van de wijzers als functies van t (tijd).



Figuur 5.9

Opgave 13

Het middelpunt van de klok hangt op 2 meter hoogte.

a Stel een passend functievoorschrift op voor de hoogte h van de uiteindes van de wijzers als functies van t (tijd). Kies als eenheden hoogte in centimeter en tijd in uur en neem $t = 0$ op 0:00 uur.

b Geef bij de volgende tijden de hoogtes van de minutenwijzer en de urenwijzer, zo mogelijk exact, en anders in twee decimalen nauwkeurig.

- twee uur
- tien voor half vijf
- vijf voor elf
- twee voor twaalf

Testen

Opgave 14

Functie f met voorschrift $f(x)$ heeft een sinusvormige grafiek met een minimum in het punt $(20{,}300)$ en een eerstvolgend maximum in het punt $(32{,}400)$.

a Maak een schets van deze grafiek met x van 0 tot ten minste 40.

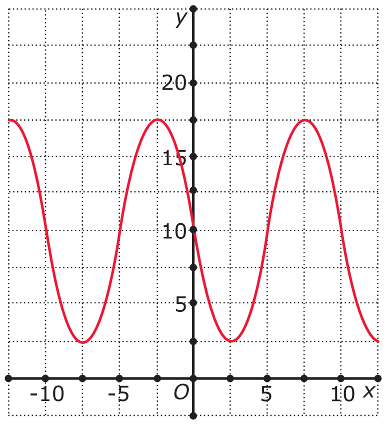
b Bereken de periode, de amplitude en de evenwichtslijn en stel een passend functievoorschrift op.

c Bereken $f(50)$, $f(51)$ en $f(52)$.

d Los op: $f(x) = 325$.

Opgave 15

Stel bij deze sinusoïde twee passende functievoorschriften op. Gebruik hierbij de sinus.



Figuur 5.10

Opgave 16

Onze ademhaling is bij benadering een periodiek verschijnsel. Een gezonde volwassen man ademt ongeveer 12 keer per minuut in en weer uit. De longinhoud $V(t)$ kan daarbij met zo'n halve liter toe- of afnemen, waarin t de tijd in seconden is. Het longvolume na inademen is $5{,}2$ liter.

a Hoe groot is de ademhalingsfrequentie per minuut?

b Ga ervan uit dat $V(t)$ een sinusoïde is met op $t = 0$ een maximale longinhoud. Teken de grafiek van de longinhoud V uitgezet tegen de tijd t.

c Stel bij deze situatie een formule op voor $V(t)$.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Periodieke functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- eenheidscirkel — draaihoek — radialen;
- standaard sinus — periode — standaard cosinus;
- arcsinus — arccosinus;
- sinusoïde — periode — amplitude — evenwichtsstand — horizontale verschuiving;
- periodiek model.

Activiteitenlijst

- draaihoeken omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd
- de standaard sinusgrafiek tekenen — de standaard cosinusgrafiek tekenen — eenvoudige transformaties hierop toepassen;
- vergelijkingen bij de standaard(co)sinus oplossen, exact (met arcsin/arccos) en met de GR;
- bij een sinusoïde de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving bepalen, zowel vanuit de grafiek als vanuit de formule — toppen en nulpunten van sinusoïden berekenen — vergelijkingen bij sinusoïden oplossen;
- bij een gegeven periodiek verschijnsel een sinusoïde opstellen die dat verschijnsel zo goed mogelijk beschrijft.

Achtergronden

Bekijk de applet: sinus

In de Indische wiskunde heette de helft van de koorde van een cirkelboog de ardhâ-jyâ (ardha = half; jyâ = koorde) van die boog. Dit werd, afgekort tot jyâ of jîv en door de Arabieren als vgîb geschreven. Toen het wetenschappelijk centrum van de wereld verschoof, werden de Arabische werken in de 12e eeuw vertaald naar het Latijn. Bij de vertaling werd vgîb gelezen als het Arabische vgaib wat ‘plooi’ of ‘boezem’ betekent. Dit werd door **Gerard van Cremona (1114—1187)** letterlijk vertaald als **sinus**.

Sinus en cosinus werden al in de Griekse Oudheid bestudeerd en later o.a. door de Indische geleerden **Aryabhata (476—550)**, **Brahmagupta (598—670)** en **Bhaskara (1114—1185)** en de Perzische wetenschappers **Mohammad ibn Musa al-Khwarizmi (ongeveer 780—845)**, **Omar Khayyam (1048—1131)**, **Nasir al-Din al-Tusi (13e eeuw)**, **Ghiyath al-Kashi (14e/15e eeuw)**. In

de 12de eeuw werden deze begrippen in West-Europa bekend.
In de oorspronkelijke definitie waren sinus en cosinus verhoudingen van bepaalde zijden in een rechthoekige driehoek. De grootte van deze verhouding verandert niet zo lang de hoeken even groot blijven.
Maar deze definitie brengt het probleem met zich mee dat stompe hoeken geen sinus of cosinus hebben (want er bestaan geen rechthoekige driehoeken met een stompe hoek). Om dit probleem op te lossen werden de sinus en cosinus opnieuw gedefinieerd met behulp van de eenheidscirkel. Voordeel van deze definitie is dat de sinus en de cosinus van elke hoek kunnen worden bepaald.

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie f door $f(x) = 200 - 50 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ met $0 \leq x \leq 30$.

a Bepaal het bereik van f en plot de grafiek van f op de grafische rekenmachine.

b Los algebraïsch op: $f(x) = 210$. Rond af op twee decimalen.

c Los exact op: $f(x) \leq 175$.

Opgave 2

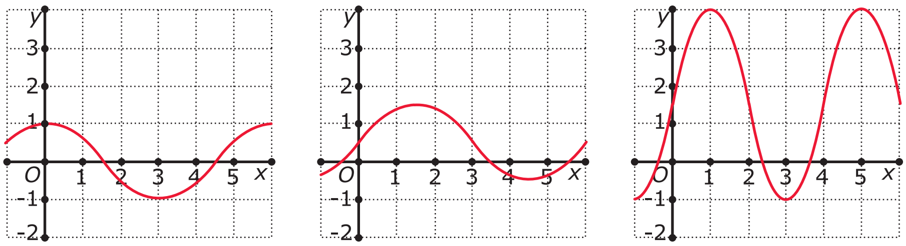
Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $1 - 2\sin(2\pi x) = 0$

b $25 + 10\cos\left(\frac{\pi}{7}(t - 15)\right) = 17$

Opgave 3

Bekijk de sinusoïden. Geef telkens een bijpassend functievoorschrift.



I II III

Figuur 6.1

Opgave 4

Bij het bepalen van de gewenste dijkhoogte langs de Nederlandse kust is het belangrijk dat de dijk hoger is dan de te verwachten maximale waterhoogte bij een stormvloed. De gemiddelde waterhoogte is daarbij niet van belang. Bij normale omstandigheden kan de getijdenbeweging van het zeewater bij de Hondsbosse zeewering te Petten redelijk worden beschreven door de functie:

$y = 0{,}4 + 1{,}5 \sin\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot t\right)$

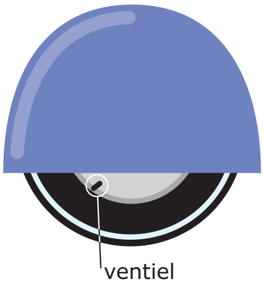
Hierin is t in uur ten opzichte van middernacht op 21 juni 1998 en de waterhoogte y in meter ten opzichte van NAP.

Onder invloed van de stand van de zon en de maan kan de amplitude van de getijdenbeweging variëren van 10% tot 140% van de amplitude van de gegeven functie. Afhankelijk van de windsterkte kan de gemiddelde waterhoogte bij aanlandige wind $1{,}5$ tot $2{,}5$ meter hoger zijn dan normaal.

Hoe hoog moet de zeedijk van Petten volgens jou minimaal zijn? Licht je antwoord toe aan de hand van het gegeven functievoorschrift.

Opgave 5

Van het autowiel in de figuur is slechts het onderste deel zichtbaar. Van de wielhoogte is $\frac{3}{4}$ deel afgeschermd achter het spatbord.



Figuur 6.2

a Hoeveel procent van de tijd is het ventiel zichtbaar als de auto met een constante snelheid rijdt?

'Zichtbaar' kun je aangeven met een 1, 'onzichtbaar' met een 0. Je kunt dan de grafiek van de zichtbaarheid van het ventiel uitzetten tegen de tijd.

b Is dit een periodieke functie? Zo ja, teken een periode op schaal.

Opgave 6

Van een windmolen bevindt zich de as van de wieken op 25 m hoogte. De wieken zijn 12 m lang. Eén omwenteling van de wieken duurt precies 3 seconden en gaat tegen de wijzers van de klok in. Eén van de wieken heeft een gekleurde stip op zijn eindpunt. Op $t = 0$ zit deze stip precies op het hoogste punt boven de grond.

a Stel een formule op voor de hoogte h in m van deze stip boven de grond afhankelijk van de tijd t in seconden.

Voor de molen staat een rij eikebomen die ongeveer 30 m hoog zijn.

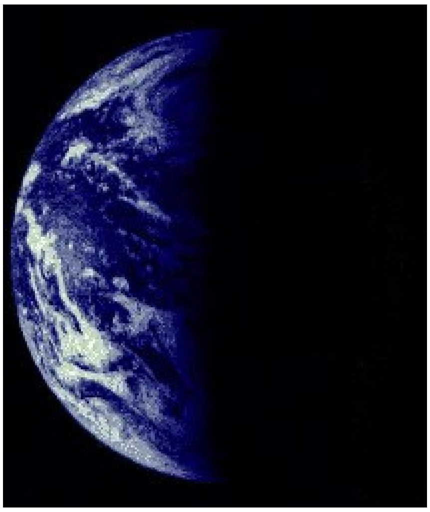
b Hoeveel tijd zie je elke omwenteling de stip? Geef je antwoord in tienden van seconden nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 7: Daglengte

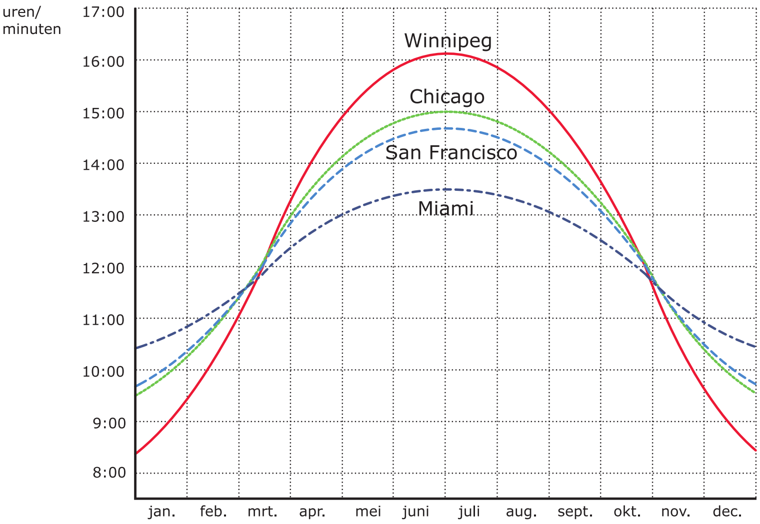
De daglengte varieert door het jaar heen. De daglengte is het verschil in tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang. Dit is een heel mooi periodiek verschijnsel dat behoorlijk nauwkeurig is te beschrijven met behulp van een sinusoïde.

Via internet kun je een **actuele tabel voor zonsopkomst en -ondergang in De Bilt** vinden.
Een dergelijke tabel kun je in een rekenblad invoeren en dan grafieken maken voor de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang. **Hier zie je er een voorbeeld van**. Het zijn de vereenvoudigde gegevens van een bepaald jaar voor Amsterdam. De daglengte is het verschil van beide en ook daarvan is eenvoudig een grafiek te maken.
Je kunt de grafieken benaderen met sinusoïden en zo nauwkeurig de lengte van de langste dag en de kortste dag berekenen...



Figuur 6.3

Het variëren van de daglengte hangt nogal af van de breedtegraad op Aarde. Dat komt omdat de Aardas niet precies loodrecht op de ecliptica (het vlak waarin de Aardbaan om de Zon ligt). Ook leuk om nader te onderzoeken...



Figuur 6.4

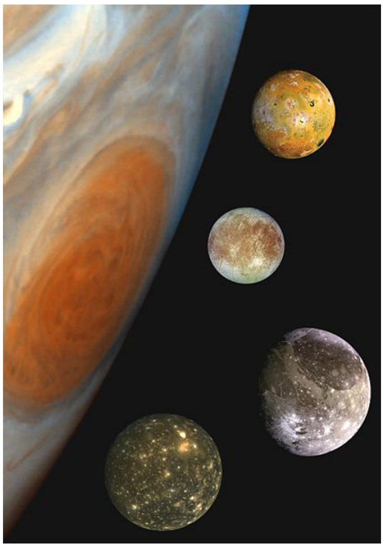
a Stel voor de vier steden een voorschrift op voor de daglengte als functie van de tijd t in dagen; $t = 0$ op 1 januari.

b Op welke datum is de langste dag van het jaar? En de kortste?

c Hoeveel dagen per jaar is de daglengte meer dan 14 uur?

Opgave 8: De manen van Jupiter

In 1610 werden de vier helderste **Jupitermanen** ontdekt door Galileï. De manen beschrijven bij benadering cirkelvormige banen om Jupiter, alle vier in dezelfde omlooprichting. Deze banen liggen (vrijwel) in één vlak met Jupiter en de Aarde. Daarom zie je Jupiter en de vier manen in een kijker altijd op één horizontale lijn liggen. De onderlinge posities van de manen in het kijkerbeeld veranderen voortdurend. Voor amateurastronomen worden maandelijks grafieken gepubliceerd waaruit ze op ieder moment de posities van de manen kunnen aflezen. Zie **hemel.waarnemen.com: Galileïsche manen van Jupiter, slingerdiagram september 2008**
Het diagram op de website geeft informatie over de maand september in 2008.
Deze slingerdiagrammen zijn vrijwel zuivere sinusoïden.

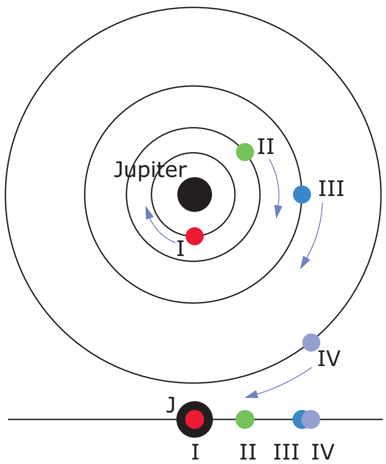


Figuur 6.5

Voor Ganymedes bijvoorbeeld wordt deze harmonische beweging goed beschreven door $u(t) = 15\sin\left(\frac{2\pi}{7{,}2}(t-10)\right)$ waarin t de tijd in dagen is met $t = 1$ op 1 september 2008 om 0:00 uur en u de uitwijking t.o.v. Jupiter gemeten in Jupiterstralen.

Zo kun je ook van de beweging van de drie andere Galileïsche manen een formule opstellen.
En verder kun je op elk moment tekenen hoe je deze manen t.o.v. Jupiter vanaf Aarde ziet. Nog een leuke puzzel...

Op 1 september 2008 om 0:00 uur waren dus van links (west) naar rechts (oost) in de kijker te zien: Io (I, voor Jupiter), Europa (II), Ganymedes (III) en Callisto (IV). Hier zie je van de vier manen de posities op hun cirkelbanen op 1 september 2008 om 0:00 uur getekend.



Figuur 6.6

a Teken in zo'n figuur voor deze vier manen het deel van de baan dat ze doorlopen van 1 september 0:00 uur tot 5 september 0:00 uur.

In de kijker zie je de beweging van elk van die manen als een in de tijd veranderende uitwijking $u(t)$ t.o.v. Jupiter op een horizontale as. Die uitwijking kan goed worden beschreven met een sinuoïde. u wordt uitgedrukt in veelvouden van de straal van Jupiter en t is in dagen.
Voor Callisto geldt bij goede benadering $u(t) = 26\sin(0{,}365(t-24))$.
(Hierbij is er van uit gegaan dat 'West' een positieve waarde van u betekent en 'Oost' een negatieve.)

b Laat zien dat deze formule redelijk overeenkomt met de gegeven grafiek. Bereken met de formule de omlooptijd van Callisto.

c Stel zelf zo'n formule op voor Ganymedes.

De manen zijn in de figuur naar verhouding veel te groot getekend. In werkelijkheid zijn het stipjes. Dus als $-1 \leq u(t) \leq 1$ dan kunnen de manen achter Jupiter zitten.

d Bereken met behulp van de formule voor Ganymedes hoe lang deze maan achter Jupiter zit.

Opgave 9: Fietsen

Bij normaal weer, zonder al te veel mee- of tegenwind, legt een fietser gemiddeld 15 kilometer per uur af. Als je bij een constante snelheid de hoogte van de trappers uitzet tegen de tijd, of de hoogte van het ventiel tegen de tijd, krijg je een mooie sinusoïden.

a Maak daarvan een overzicht met grafieken en formules. Geef redelijke schattingen van de bijbehorende afmetingen.

De baan die het ventiel aflegt als je fietst is geen sinusoïde.

b Waarom is dat zo?

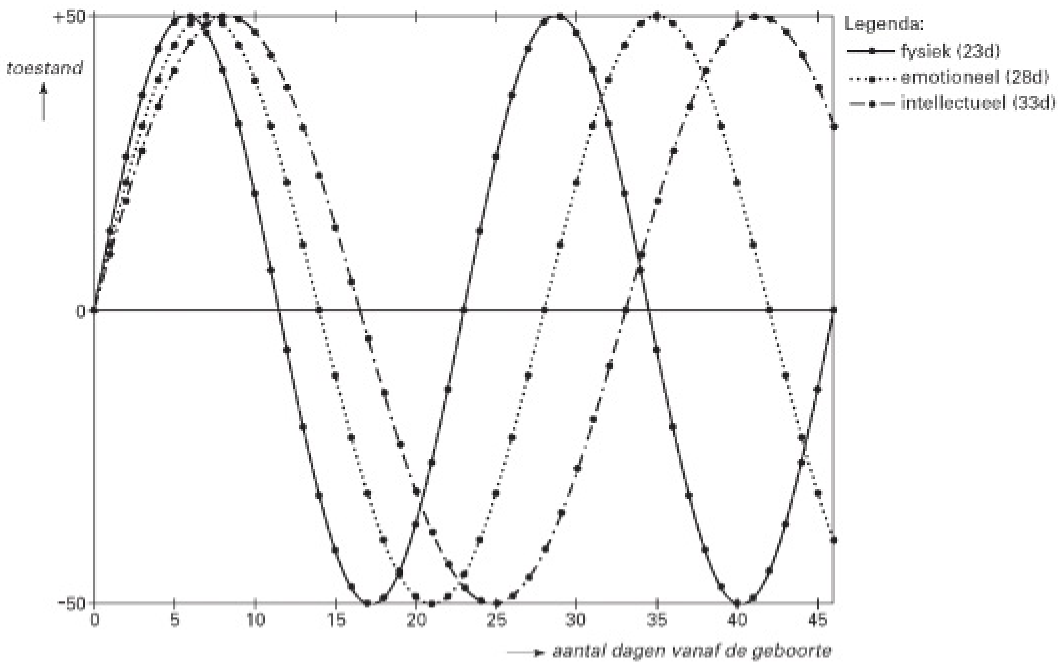
c Hoe ziet die baan er dan wel uit? Maak er een zo goed mogelijke tekening van en verwerk die in het overzicht.

Figuur 6.7

Examen

Opgave 10: Bioritme

Op een pagina op Internet staat te lezen dat ons leven beheerst wordt door een drietal toestanden, namelijk door onze fysieke, onze emotionele en onze intellectuele toestand. Op de ene dag voel je je fysiek (lichamelijk) beter dan op een andere dag. Deze 'fysieke toestand' kunnen we weergeven op een schaal van -50 (fysiek op dieptepunt) tot $+50$ (fysiek opperbest). Deze fysieke toestand varieert in de tijd volgens een sinusoïde.
Ook de 'emotionele toestand' en de 'intellectuele toestand' variëren op een schaal van -50 tot $+50$ volgens een sinusoïde. Zie figuur.



Figuur 6.8

Bij de geboorte van een mens zou elke cyclus zich in dezelfde begintoestand bevinden, zoals is weergegeven in de figuur. Tezamen bepalen de drie cycli het zogenaamde bioritme van een mens. Sommigen beweren dat het bioritme volledig vastlegt tot welke prestaties een mens op een bepaald moment in staat is. Zo zou

je bijvoorbeeld kunnen uitrekenen op welke dag je het best kunt solliciteren.
Voor de fysieke cyclus is de periode 23 dagen, voor de emotionele cyclus 28 dagen en voor de intellectuele cyclus is de periode 33 dagen.

Het bioritme in de figuur betreft een pasgeboren baby. E is de emotionele toestand van de baby t dagen na de geboorte. Hierbij hoort een formule van de vorm $E = a\sin(bt)$.

a Geef de waarden van a en b.

Zodra de emotionele toestand beneden -25 komt, zou het moeilijker worden om de emoties onder controle te houden.

b Hoeveel procent van een periode heeft de emotionele toestand een waarde die kleiner is dan -25? Licht je antwoord toe.

c F is de fysieke toestand van de baby. Onderzoek of F op de eerste verjaardag een dalend of een stijgend verloop heeft.

Annelies is op 1 januari 1983 geboren. Op 1 januari 2001 wordt ze dus 18 jaar. Vanaf die dag mag ze rijexamen doen. Ze wil dat doen op een dag waarop zowel haar fysieke als haar intellectuele toestand positief is. (De jaren 1984, 1988, 1992, 1996 en 2000 hebben een dag extra, dus 366 dagen.)

d Onderzoek welke de eerste drie dagen van januari 2001 zijn die voor het rijexamen in aanmerking komen.

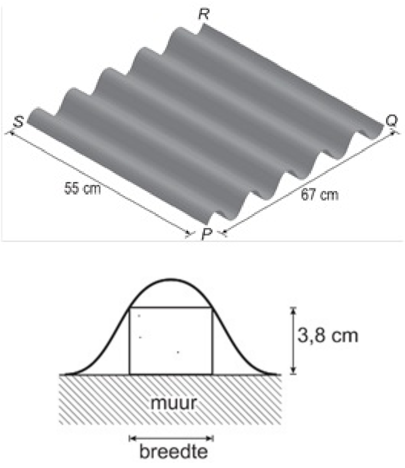
(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2000, eerste tijdvak, opgave 1)

Opgave 11: Golfplaat

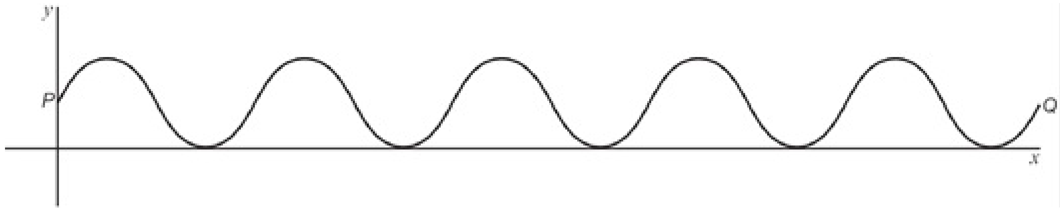
Golfplaat is een bouwmateriaal dat gebruikt wordt voor het afdekken van eenvoudige bouwwerken. In de figuur hiernaast is een rechthoekig stuk golfplaat getekend. Hieronder is het vooraanzicht van dit stuk golfplaat in een assenstelsel getekend. Hierbij is de dikte verwaarloosd. In het assenstelsel zijn x en y uitgedrukt in cm. Bij deze grafiek behoort de formule:

$y = 3 + 3\sin(0{,}469x)$

De golfplaat wordt als afdakje gebruikt. De plaat wordt horizontaal neergelegd en steunt aan de randen PQ en RS op een muur. De ruimtes tussen de bovenrand van de muur en de golfplaat worden afgedicht met houten blokjes. Deze blokjes zijn $3{,}8$ cm hoog en hebben een zo groot mogelijke breedte. In figuur is dit geschetst.



Figuur 6.9



Figuur 6.10

a Bereken de breedte van zo'n blokje. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Het bovenaanzicht van het stuk golfplaat de figuur rechtsboven is een rechthoek $PQRS$. $PQ = 67$ cm en $PS = 55$ cm. Dit stuk golfplaat wordt diagonaal doorgezaagd. In het bovenaanzicht is de zaagsnede een rechte lijn van S naar Q. De werkelijke vorm van de doorsnede is een sinusoïde.

b Stel een formule op van deze sinusoïde als deze op ware grootte in een assenstelsel zoals in het vooraanzicht wordt weergegeven.

(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2005, tweede tijdvak)

Opgave 12: Cosinus

Gegeven zijn de functies $f_1(x) = 3\cos(x)$ en $f_2(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

a Onderzoek, met behulp van de grafische rekenmachine, voor welke waarden van x tussen 0 en 2π geldt $f_1(x) < f_2(x)$. Rond de getallen in het antwoord af op twee decimalen.

b Hieronder zijn enkele transformaties vermeld:

- horizontale verschuiving ... naar links of ... naar rechts
- verticale verschuiving ... omhoog of ... omlaag
- vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met de factor ...
- vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met de factor ...

Welke van deze transformaties kunnen achtereenvolgens worden uitgevoerd om uit de standaardgrafiek van $y = \cos(x)$ de grafiek van f_2 te krijgen? Geef daarbij ook de getallen die op de plaats van de puntjes horen te staan. Er zijn verschillende goede antwoorden mogelijk, geef niet meer dan één antwoord.

c Voor de somfunctie s geldt: $s(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
De somfunctie s kan geschreven worden in de vorm $s(x) = a\cos(x + b)$.
Leid, met behulp van de grafische rekenmachine, uit de grafiek van s de waarden van a en b af. Geef je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde B1 in 2001, eerste tijdvak)

2

Differentieerregels

2.1 Differentieerregels

Inleiding

De afgeleide van een functie geeft de helling van de grafiek in een punt weer. Het is ook een maat voor de verandering van de functiewaarde voor een bepaalde waarde van x. Je bepaalt een afgeleide door te differentiëren. Dat lijkt tot nu toe misschien een eenvoudige klus. Maar wanneer de functies ingewikkelder worden moet je er speciale **differentieerregels** voor toepassen. Je herhaalt eerst nog even de al bekende technieken en breidt de machtsregel uit.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- regels toepassen bij het differentiëren;
- de algemene machtsregel voor differentiëren gebruiken.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken, met name machtsfuncties;
- differentiëren met de machtsregel, de constanteregel en de somregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al differentiëren.
Neem de functies f en g met $f(x) = 6x^5$ en $g(x) = 2x^3$.

Bepaal zo mogelijk de afgeleide van:

a $f_1(x) = f(x) + g(x)$

b $f_2(x) = f(g(x))$

c $f_3(x) = f(x) \cdot g(x)$

d $f_4(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

e $f_5(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

Voor functie f_1 (de som of het verschil van f en g) geldt dat de afgeleide gelijk is aan de som of het verschil van de afgeleiden van f en g (de somregel).

Voor het vinden van de afgeleide van de functies f_2, f_3 en f_4 heb je de functies eerst moeten herleiden alvorens te kunnen differentiëren. Bij f_5 lukte dat daarmee waarschijnlijk (nog) niet.

f Kun je voor f_2, f_3, f_4, en f_5 een regel bedenken waarbij dat niet noodzakelijk zou zijn?

Uitleg

Met een afgeleide f' beschrijf je de veranderingen van een functie f. Je weet:

- Als $f(x) = x^3$ dan is $f'(x) = 3x^2$.
- Als $g(x) = 3x^2$ dan is $g'(x) = 6x$.

Je differentieert hier met de machtsregel. Deze regel blijkt niet alleen bij gehele positieve waarden van de exponent, maar ook bij negatieve waarden, gebroken waarden, zelfs bij alle reële waarden te gelden.

Als $f(x) = cx^r$ dan is $f'(x) = rcx^{r-1}$ voor elke c en voor elke reële waarde van r.

Om $f(x) = \frac{1}{x^2}$ te differentiëren schrijf je deze functie eerst als machtsfunctie: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$.

Door de algemene machtsregel te gebruiken vind je nu de afgeleide:

$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$

Dit kun je zonder gebroken en/of negatieve exponenten schrijven:

$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

Ook functies met wortels kun je zo differentiëren:

$g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Je gebruikt bij het differentiëren van machtsfuncties de rekenregels voor machten.

Opgave 1

Schrijf de functies als één macht. Differentieer deze functies en herleid de antwoorden tot een vorm zonder gebroken en/of negatieve exponenten.

a $f(x) = \frac{1}{x}$

b $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c $f(x) = \frac{3}{x^2}$

d $f(x) = x\sqrt{x}$

e $f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x}}$

f $f(x) = \sqrt{4x^3}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kent al enkele **differentieerregels**, zoals:

- De **somregel**:
  Als $f(x) = u(x) + v(x)$ dan geldt: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- De **constanteregel**:
  Als $f(x) = c$ dan geldt: $f'(x) = 0$.
- De **machtsregel**:
  Als $f(x) = cx^n$ dan geldt voor elke c en voor gehele positieve n: $f'(x) = ncx^{n-1}$.

Deze laatste regel mag je uitbreiden tot:

- De **algemene machtsregel**:
  Als $f(x) = cx^r$ dan geldt voor elke c en voor elke r: $f'(x) = rcx^{r-1}$.

Een bewijs van deze regel volgt later nog.

Met de algemene machtsregel kun je ook machtsfuncties differentiëren met gebroken en/of negatieve exponenten.

Na het differentiëren zul je de afgeleide vaak weer gaan herleiden, want je laat liever geen gebroken en/of negatieve exponenten staan als je met de afgeleide nog moet rekenen.

De afgeleide kent allerlei toepassingen, zoals de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt van de grafiek aan die grafiek bepalen, of de coördinaten van de extremen berekenen en dergelijke.

Voorbeeld 1

Differentieer de functies:

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $g(x) = \frac{1}{x}$
- $h(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

Antwoord

- Eerst schrijf je f als machtsfunctie:

  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

  Vervolgens pas je de machtsregel toe en werk je de negatieve en de gebroken exponent weer weg:

  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Eerst schrijf je g als machtsfunctie:

  $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

  Vervolgens pas je de machtsregel toe en werk je negatieve exponent weer weg:

  $g'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

- Eerst schrijf je h als machtsfunctie:

  $h(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} = 3x^{-\frac{1}{2}}$

  Vervolgens pas je de machtsregel toe en werk je de negatieve en de gebroken exponent weer weg:

  $h'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$

Opgave 2

Herleid en differentieer de functies.

a $f(x) = 2x^2\sqrt{x}$

b $f(x) = 6x\sqrt[3]{x}$

c $f(x) = 1\frac{1}{2}x^2\sqrt[3]{x^2}$

d $f(x) = 3ax^3\sqrt[3]{x}$

Opgave 3

Bepaal de afgeleide (de hellingsfunctie) van de volgende functies.

a $f(x) = 6 - \frac{1}{2x^3}$

b $TK(q) = 2q^3 + 60q^2 - 100q + 50$

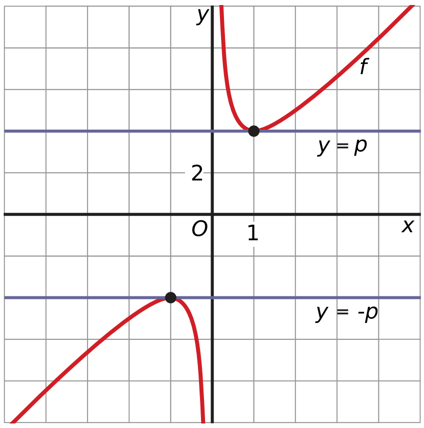
c $J(d) = \frac{1}{6}\pi d^3 + \frac{1}{a^2}$

d $f(x) = x^{-1}\left(x^2 - 20x\right)\left(x^2 + 30x\right)$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie: $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

Bereken algebraïsch voor welke waarden van p de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing heeft.



Figuur 1.2

Antwoord

$y = p$ is een horizontale lijn. De horizontale lijnen, die door de toppen gaan, hebben één (raak)punt met f gemeen. Daarom moet je berekenen wat de extremen zijn.

$f(x) = x + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$.

Met $f'(x) = 0$ vind je de x-coördinaten van de toppen.
Je krijgt $x = -2 \vee x = 2$.

De extremen zijn daarmee min. $f(-2) = -4$ en max. $f(2) = 4$.

Bekijk de grafiek: Voor $p = -4 \vee p = 4$ heeft $f(x) = p$ één oplossing.

Opgave 4

Gegeven is de functie: $g(x) = \frac{2}{x} + 2x$

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 2$.

c Voor welke waarden van p heeft de lijn $y = p$ precies één punt met de grafiek van g gemeen?

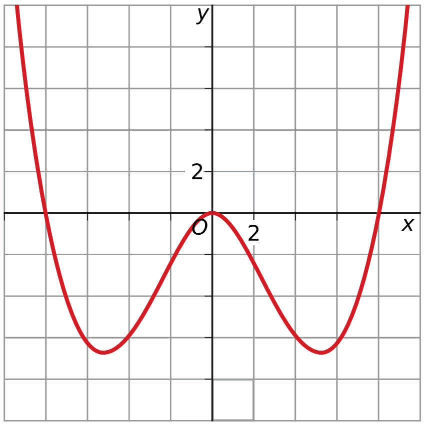
Opgave 5

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} - x^2$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ vier oplossingen?

c Bereken algebraïsch de buigpunten van f.



Figuur 1.3

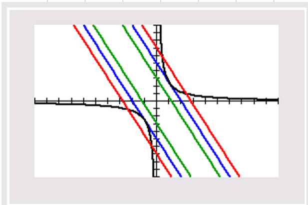
Voorbeeld 3

Bekijk de functie f met $f(x) = \frac{10}{x}$.

Voor welke waarde van b heeft de lijn $y = -2\frac{1}{2}x + b$ geen snijpunten met de grafiek van f?

Antwoord

Plot de grafiek van f en enkele lijnen met een hellingsgetal van $-2\frac{1}{2}$.



Figuur 1.4

Je ziet dat er enkele lijnen zijn die twee snijpunten hebben met de grafiek van f (de rode lijnen), twee blauwe lijnen die de grafiek van f in één punt raken en enkele lijnen die geen snijpunt met de grafiek van f hebben (de groene lijnen). De raaklijnen zijn de grenzen waartussen de lijnen liggen, die geen snijpunt met de grafiek van f hebben.

Je moet dus uitrekenen voor welke b de lijn $y = -2\frac{1}{2}x + b$ een raaklijn is van de grafiek van f.

Als $y = -2\frac{1}{2}x + b$ een raaklijn is van f, dan geldt $f'(x) = -2\frac{1}{2}$.

$f(x) = \frac{10}{x} = 10x^{-1}$ geeft $f'(x) = -10x^{-2} = -\frac{10}{x^2}$.

En uit $f'(x) = -\frac{10}{x^2} = -2\frac{1}{2}$ volgt $x = -2 \vee x = 2$.

De raakpunten zijn daarmee $(-2, -5)$ en $(2, 5)$.

De raaklijnen zijn $y = -2\frac{1}{2}x - 10$ en $y = -2\frac{1}{2}x + 10$.

Voor $-10 < b < 10$ hebben de lijnen $y = -2\frac{1}{2}x + b$ geen snijpunten met de grafiek van f.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Laat zien hoe je $f'(x) = -2\frac{1}{2}$ oplost.

b Stel de twee vergelijkingen van de raaklijnen met richtingscoëfficiënt $-2\frac{1}{2}$ op.

c Hoe trek je nu de conclusie in het voorbeeld?

Opgave 7

Gegeven zijn de functie $f_c(x) = 2\sqrt{x} + c$ en de lijn $y = 2x$.
Bereken voor welke waarde van c de grafiek van f en de gegeven lijn elkaar raken.

Verwerken

Opgave 8

Differentieer de functies.
Schrijf de afgeleide steeds zonder gebroken en/of negatieve exponenten.

a $f(x) = 2\sqrt{x}$

b $f(x) = -\frac{2}{3x^3}$

c $f(x) = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}$

d $f(x) = \sqrt[3]{x}$

e $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2x}$

Opgave 9

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{x} - x\sqrt{x}$

a Toon met de afgeleide aan dat f dalend is. Doe dit door te beredeneren dat de afgeleide over het hele domein negatief is.

b Bereken of de grafiek van f in het punt met $x = 1$ toenemend of afnemend dalend is.

c De grafiek van f heeft een buigpunt. Bereken algebraïsch de x-coördinaat van dat buigpunt en rond je antwoord af op twee decimalen.

Opgave 10

Bepaal door gebruik te maken van de eigenschappen van functies na transformaties, de afgeleide van de volgende functies.

a $g(x) = \frac{2}{x-3}$

b $g(x) = \sqrt{3x+1}$

c $g(x) = \sqrt[5]{(-2x)^3}$

d $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$

Opgave 11

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

a Bereken de extremen van f.

b Voor welke waarden van p heeft $f(x) = p$ geen oplossingen?

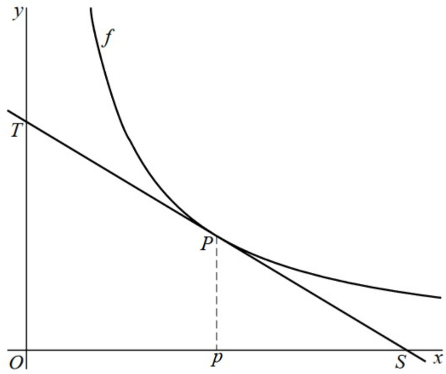
c Voor welke waarden van a hebben de grafiek van f en de lijnen $y = ax$ geen punten gemeenschappelijk?

d Voor welke waarden van b heeft de grafiek van f twee snijpunten met de lijn $y = -3x + b$?

Opgave 12

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{60}{x}$ met $x > 0$.

Het punt P ligt op de grafiek van f. De raaklijn in P aan de grafiek van f snijdt de x-as in S en de y-as in T. De x-coördinaat van P noemen we p. Bekijk de figuur.



Figuur 1.5

a Een vergelijking van de raaklijn ST is: $y = -\frac{60}{p^2} \cdot x + \frac{120}{p}$.

Toon dit aan.

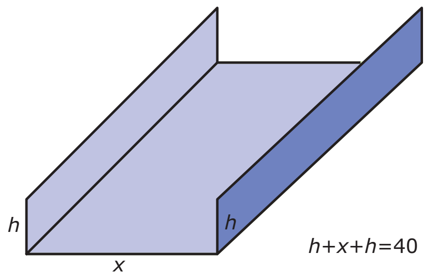
b Toon aan dat de oppervlakte van driehoek OST onafhankelijk is van de plaats van P op de grafiek van f.

(bron: examen wiskunde B in 2010, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 13: Goten voor bevloeien van akkers

Een Nederlands bedrijf maakt goten voor bevloeiing van akkers in een ontwikkelingsland. Die goten worden gemaakt door vlakke platen kunststof te buigen. Die platen zijn 2 meter lang en 40 centimeter breed. Ze worden zo gebogen dat een goot ontstaat van 2 meter lang met als dwarsdoorsnede (in de breedterichting) een rechthoek.



Figuur 1.6

a De breedte van de goot noem je x en de hoogte is h. Welke verband bestaat er tussen x en h? Stel een formule voor dat verband op.

b Je kunt nu een formule opstellen voor de hoeveelheid water die zo'n goot kan bevatten. Druk de hoeveelheid water H in uit in x.

c Bereken bij welke waarde van x die hoeveelheid water maximaal is.

Testen

Opgave 14

Herleid en differentieer de volgende functies

a $y = 3x^3\sqrt{x}$

b $y = 4x\sqrt[3]{x}$

c $y = \frac{1}{4}x^2\sqrt[4]{x^3}$

d $y = 4ax^4\sqrt[4]{x}$

Opgave 15

Gegeven is de functie g door $g(x) = \frac{1}{x} + 4x$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = \frac{1}{4}$.

c Voor welke waarden van p heeft de lijn $y = p$ precies één punt met de grafiek van g gemeen?

Opgave 16

Bekijk de functie f met $f(x) = \frac{10}{\sqrt{x}}$.

Voor welke waarde van b heeft de lijn $y = -\frac{5}{8}x + b$ twee snijpunten met de grafiek van f?

Practicum

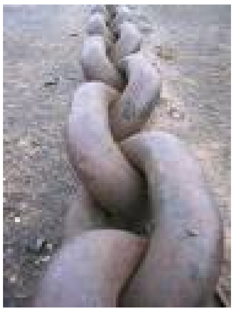
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de machtsregel en de somregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.2 De kettingregel

Inleiding

In veel functievoorschriften komen haakjes voor. Vaak kun je die eenvoudig uitwerken, maar niet altijd.
Met name bij samengestelde functies, zeg maar functies die als een ketting aan elkaar zijn geschakeld, is het uitwerken van haakjes vaak helemaal niet eenvoudig, of zelfs gewoon onmogelijk. Het differentiëren van dergelijke functies vereist een speciale differentieerregel.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de kettingregel voor het differentiëren van samengestelde functies;
- de kettingregel toepassen.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel en de somregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de functie $f(x) = (2x + 10)^3$.

a Laat zien hoe je van deze functie met behulp van transformaties de afgeleide bepaalt.

Bekijk de functie $f(x) = \left(x^2 + 10\right)^3$.

b Kun je van deze functie met behulp van transformaties de afgeleide bepalen?

c Kun je deze functie differentiëren? En hoe dan?

Uitleg 1

In functievoorschriften kunnen haakjes voorkomen. Bij functies die als een ketting aan elkaar zijn geschakeld, kan het wegwerken van haakjes lastig of zelfs onmogelijk zijn. Differentiëren volgens de nu bekende regels wordt dan ook moeilijk.

Een voorbeeld van een eenvoudige ketting van functies is: $f(x) = (2x + 10)^3$.
Je berekent een functiewaarde bij een gegeven x door eerst $g(x) = 2x + 10$ te berekenen.

$$x \xrightarrow{g(x)} 2x+10 \xrightarrow{f(g(x))} (2x+10)^3$$

Figuur 2.2

De functie $f(x) = (2x+10)^3 = (g(x))^3 = f(g(x))$ is een samengestelde functie of kettingfunctie. Zo'n functie bestaat uit een binnenste functie $g(x)$ in een buitenste functie: $f(g(x))$.
Deze kettingfunctie kun je nu al differentiëren door met transformaties te werken:

De basisfunctie waaruit f ontstaan is, is $y = x^3$ met $\frac{dy}{dx} = 3x^2$.

Daarom vind je voor de afgeleide van f:
$f'(x) = 3(2x+10)^2 \cdot 2 = 6(2x+10)^2$.

Dit gaat echter alleen maar omdat de binnenste functie $g(x) = 2x + 10$ een lineaire functie is, met andere functies lukt dat niet.

Opgave 1

Gegeven is de functie: $f(x) = 4(x-2)^3$.

a Waarom is f een samengestelde functie? Waaraan herken je dat?.

b Deze functie kun je differentiëren zonder eerst de haakjes weg te werken. Laat zien hoe.

Opgave 2

Splits de functievoorschriften in een binnenste en een buitenste functie. Van welke van deze functies kun je de afgeleide bepalen door van transformaties gebruik te maken?

a $y = -2(3x-4)^5$

b $y = 3\left(x^3+2x\right)^4$

c $y = \sqrt{x^2-1}$

d $y = \left(3-x^2\right)\sqrt{3-x^2}$

e $y = \frac{1}{2x-7}$

f $y = -\frac{4}{5(3x-2)^3}$

Uitleg 2

De functie $f(x) = 5\left(x^2+4x\right)^2$ is een voorbeeld van een kettingfunctie waarbij $f(x) = f(g(x))$.

Noem de binnenste functie $g(x) = x^2 + 4x = u$.
De buitenste functie is daarmee $y = f(g(x)) = f(u) = 5(u)^2$.

Je kunt nu zeggen:

- de afgeleide van $g(x)$ is $g'(x) = 2x+4$;
- de afgeleide van $f(u)$ is $f'(g(x)) = f'(u) = 10(u)$, want u is de variabele bij $f(u)$.

Dan geldt: $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = 10(u) \cdot (2x+4) = 10\left(x^2+4x\right)(2x+4)$.

Voor de afgeleide van een samengestelde functie geldt de kettingregel:
Als $f(x) = f(g(x))$ dan is $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Dit moet nog wel worden bewezen!

Opgave 3

Gegeven is de functie: $f(x) = 3(-2x+5)^4$.

a Bepaal de afgeleide van f met behulp van de afgeleide van de basisfunctie waaruit f na transformaties is ontstaan.

b Bepaal de afgeleide van f met behulp van de kettingregel.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \left(2x^2+1\right)^8$. Deze functie heeft de vorm $f(x) = f(g(x)) = f(u)$ met $u = g(x)$. In **Uitleg 2** zie je hoe je zo'n functie kunt differentiëren.

a Schrijf de voorschriften van $y = f(u)$ en $u = g(x)$ op.

b Laat zien dat $f'(x) = 32x\left(2x^2+1\right)^7$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **samengestelde functie** is een functie die uit twee of meer geschakelde functies bestaat.

Voor een samengestelde functie geldt bijvoorbeeld $f(x) = f(g(x))$.

$$x \xrightarrow{g(x)} u \xrightarrow{f(u)} f(g(x))$$

Figuur 2.3

De afgeleide van $f(x) = f(g(x))$ is $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Deze regel voor de afgeleide van een samengestelde functie heet de **kettingregel**.

Bewijs 1

Volgens de limietdefinitie van de afgeleide is $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Voor $f(x) = f(g(x))$ geldt: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$

en voor $g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Uit deze laatste definitie volgt voor waarden van h dicht bij 0: $g(x+h) - g(x) \approx h \cdot g'(x)$.

En daarom: $g(x+h) \approx g(x) + h \cdot g'(x)$.

Zodat: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(g(x)+h \cdot g'(x))-f(g(x))}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(g(x)+h \cdot g'(x))-f(g(x))}{h \cdot g'(x)} \cdot g'(x)$.

Stel $h \cdot g'(x) = p$.

Als $h \to 0$, dan ook $p \to 0$ (als $g'(x)$ bestaat).

Dus $f'(x) = \lim\limits_{p \to 0} \frac{f(g(x)+p)-f(g(x))}{p} \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $S(x) = \left(x^2 + 2x\right)^4$.

Antwoord

Deze functie is een samengestelde functie:

$S(x) = f(g(x)) = \left(x^2 + 2x\right)^4 = (g(x))^4$.

Noem $g(x) = u$.
Er geldt:

- $f(u) = u^4 = \left(x^2 + 2x\right)^4$ en dus $f'(u) = 4u^3 = 4\left(x^2 + 2x\right)^3$
- $u = g(x) = x^2 + 2x$ en dus $g'(x) = 2x + 2$

Hieruit volgt:

$S'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = 4(u)^3 \cdot (2x + 2) = 4\left(x^2 + 2x\right)^3 \cdot (2x + 2) =$

$(8x + 8)\left(x^2 + 2x\right)^3$

Opgave 5

Differentieer de functies.

a $f(x) = \left(x^2 - 100\right)^4$

b $f(x) = -3\left(5 + x^3\right)^5$

c $f(x) = (1 - x)^3$

d $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 + 2x\right)^3$

Opgave 6

Soms moet je de functie eerst herleiden tot een samengestelde machtsfunctie voordat je hem kunt differentiëren. Na het differentiëren moet je de functie herleiden tot er geen gebroken en/of negatieve exponenten meer in voorkomen.

a $f(x) = \frac{5}{3 - 2x^2}$

b $g(x) = \frac{-1}{\left(x^2 - 2\right)^3}$

c $h(x) = 3\sqrt{2x + 3}$

d $j(x) = \left(x^2 + 3\right)\sqrt{x^2 + 3}$

Voorbeeld 2

Differentieer: $f(x) = -3x^2 + 2\left(x - x^3\right)^4$.

Antwoord

$f(x)$ bestaat uit de som van de termen $-3x^2$ en $2\left(x - x^3\right)^4$. Je moet dus de somregel toepassen. Voor het differentiëren van de laatste term heb je de kettingregel nodig.

Je krijgt daarom: $f'(x) = -6x + 8\left(x - x^3\right)^3 \cdot \left(1 - 3x^2\right)$.

Opgave 7

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \text{-}2x^4$ en $g(x) = 2x^3 + 4x$.

a Schrijf het functievoorschrift op van: $h(x) = f(g(x))$.

b Bepaal de afgeleide van h.

c Schrijf het voorschrift op van de functie $k(x) = g(f(x))$.

d Bepaal de afgeleide van k.

Opgave 8

Differentieer de functies.

a $f(x) = 4 - (x^3 + 2)^3$

b $f(x) = \text{-}2(x^3 - 5)^2 + 4x^3$

c $f(x) = \text{-}\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3+x^2}$

d $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}+1}{4-x}$

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Bereken het hellingsgetal van deze functie voor $x = 1$.

Antwoord

Voor het hellingsgetal van deze functie voor $x = 1$ moet je $f'(1)$ berekenen.

Om $f'(x)$ te bepalen moet je f eerst als een samengestelde machtsfunctie schrijven.

$f(x) = (9 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

De afgeleide van deze samengestelde functie is:

$f'(x) = \frac{1}{2}(9 - x^2)^{\text{-}\frac{1}{2}} \cdot \text{-}2x = \frac{\text{-}x}{(9-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{-}x}{\sqrt{9-x^2}}$ en

$f'(1) = \frac{\text{-}1}{\sqrt{8}} = \text{-}\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Opgave 9

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ op je grafische rekenmachine.

a Geef het domein van f.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Opgave 10

Gegeven is functie: $f(x) = x + \frac{1}{2x-3}$.

a Plot de grafiek van f.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

c Voor welke waarden van b heeft de vergelijking $f(x) = -x + b$ geen oplossingen?

Verwerken

Opgave 11

Differentieer de functies.

a $f(x) = 3\left(x^2 - 10\right)^4$

b $f(x) = -\left(3x + x^2\right)^5$

c $f(x) = -4\left(4x^2 - 8\right)^2 + 3x^2$

d $f(x) = 3 - \left(x - 4x^3\right)^4$

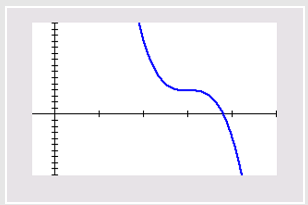
Opgave 12

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = -(2x - 6)^3 + 4$.

a De grafiek lijkt dalend voor elke waarde van x behalve $x = 3$.
Toon aan dat dit inderdaad het geval is.

b De grafiek van f lijkt in $x = 3$ een buigpunt te hebben.
Toon algebraïsch aan dat dat zo is.

c De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ snijdt de x-as in punt P.
Bereken de coördinaten van P.



Figuur 2.4

Opgave 13

Differentieer de functies met behulp van de kettingregel.
Laat geen gebroken en/of negatieve exponenten in je antwoord staan.

a $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+2x^2}}$

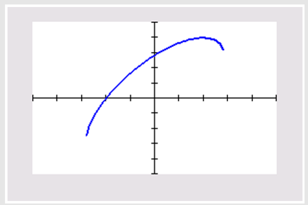
b $f(x) = -2\sqrt[3]{4x + 5}$

c $f(x) = \frac{1-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

d $f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{3x+1}}$

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x + \sqrt{8 - x^2}$.



Figuur 2.5

a Bereken exact het domein van f.

b Bereken exact het bereik van f.

c Noem de randpunten van de grafiek van f respectievelijk A en B. Voor welke waarde van x is het hellingsgetal van de grafiek van f gelijk aan dat van lijn AB?

Opgave 15

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ op je grafische rekenmachine.

a Geef het domein van f.

b Bepaal de afgeleide van f.

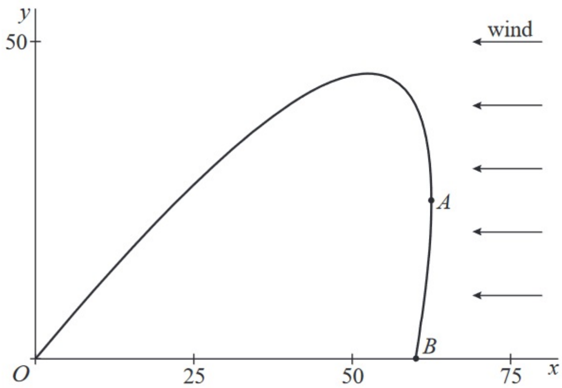
c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0{,}5$.

Toepassen

Opgave 16: Vuurpijl met tegenwind

Een vuurpijl wordt vanaf de grond schuin weggeschoten. Door tegenwind beschrijft de vuurpijl een baan zoals die in de figuur is getekend.

In deze figuur is een assenstelsel aangebracht met de x-as op de grond tegen de windrichting in en de y-as verticaal. In O wordt de vuurpijl afgeschoten. In B komt hij weer op de grond. A is het punt van de baan dat het meest naar rechts ligt. We gebruiken voor de baan de volgende formules: voor het eerste deel OA van de baan geldt $y = 2x - 100 + 4\sqrt{625 - 10x}$, voor het tweede deel AB van de baan geldt $y = 2x - 100 - 4\sqrt{625 - 10x}$, met x en y in meter.



Figuur 2.6

a Bereken op algebraïsche wijze de maximale hoogte die de vuurpijl bereikt.

b Bereken de x-coördinaat van A.

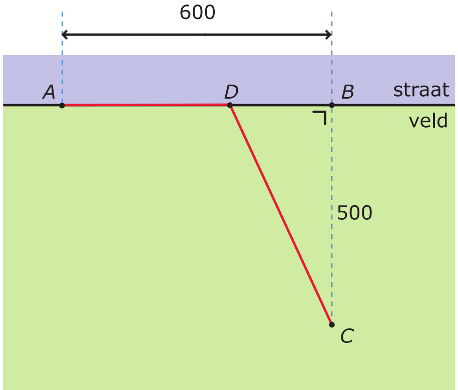
c Bereken op algebraïsche wijze op welke afstand van O de vuurpijl op de grond komt.

(bron: examen vwo wiskunde B in 2009, eerste tijdvak)

Opgave 17: Waterleiding aanleggen

Vanuit punt A moet een waterleiding gelegd worden naar punt C. Langs de straat bedragen de kosten € 30,00 per meter en door het veld € 70,00 per meter. De lengte van AB is 600 meter en de lengte van BC is 500 meter. Er zijn verschillende mogelijkheden om de waterleiding aan te leggen:

- Langs de straat tot aan punt B en vervolgens door het aangrenzende terrein naar punt C.
- Direct vanuit A door het veld, in een rechte lijn naar C.
- Een van de vele tussenmogelijkheden: de leiding wordt dan voor een gedeelte langs de straat aangelegd, tot aan punt D, en vervolgens vanaf de straat naar punt C.



Figuur 2.7

a Hoeveel bedragen de kosten als je voor de eerste mogelijkheid kiest?

b Hoeveel bedragen de kosten als je voor de tweede mogelijkheid kiest?

c Bekijk de derde mogelijkheid. Neem voor de lengte van BD de variabele x. Druk nu de kosten voor de aanleg van deze waterleiding uit in x.

d Hoe moet je de waterleiding aanleggen opdat de kosten minimaal zijn? Bereken de minimale kosten met behulp van de afgeleide.

Testen

Opgave 18

Differentieer de volgende functies

a $f(x) = 6\left(1 + x^2\right)^3$

b $y(x) = (1 - 4x)^4 + 5$

c $R(t) = \sqrt{\frac{15}{\pi} t}$

d $f(x) = \sqrt{10 + 4x^2}$

e $K(p) = \frac{2}{p\sqrt{p}}$

f $f(x) = x^3 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

Opgave 19

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \sqrt{x+2}$.

a Als je de grafiek van deze functie op je grafische rekenmachine bekijkt met de standaardinstellingen van het venster, lijkt het wel een rechte lijn te zijn. Wat is het domein van f?

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp deze afgeleide het minimum van f.

d Bepaal het bereik van deze functie f.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de kettingregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.3 De productregel

Inleiding

Als je twee functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ vermenigvuldigt, krijg je een nieuwe functie die de productfunctie van f en g heet. Vaak kun je die producten uitwerken, maar niet altijd. En soms is dit gewoon te bewerkelijk.
Daarom moet je een differentieerregel hebben voor productfuncties $f(x) \cdot g(x)$.

Je leert in dit onderwerp

- de regel voor het differentiëren van productfuncties gebruiken.

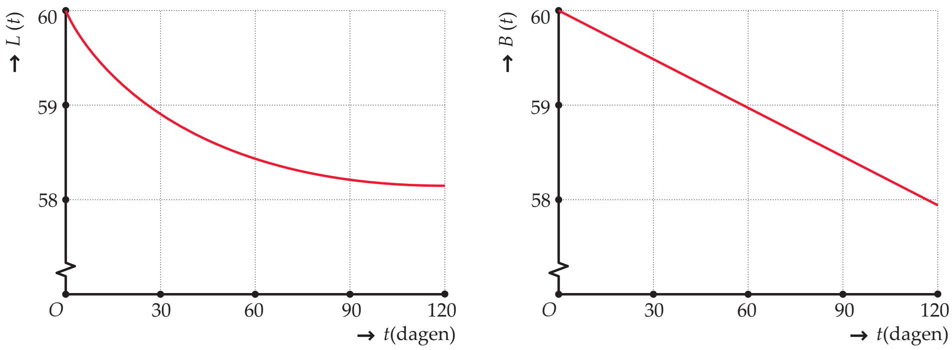
Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel, de somregel en de kettingregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

In deze grafieken zie je hoe de lengte L en de breedte B van een plank van 60 cm bij 60 cm in de loop van de tijd veranderen.



Figuur 3.1

a In welke periode krimpt de plank in de lengte sneller dan in de breedte?

b Op $t = 0$ is de plank vierkant. Tijdens het krimpen verandert de verhouding tussen lengte en breedte. Na hoeveel dagen is de plank opnieuw ongeveer vierkant?

c Op $t = 90$ is de lengte van de plank 58,3 cm en de breedte van de plank 58,5 cm. De plank krimpt dan in de lengte met 0,007 cm per dag en in de breedte met 0,017 cm per dag. Met hoeveel cm^2 per dag verandert de oppervlakte dan?

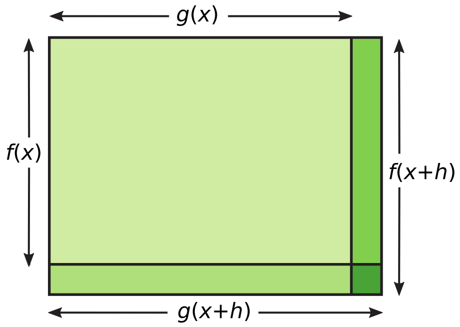
Uitleg

Met behulp van eenvoudige functies kun je gemakkelijk nagaan dat voor het product van twee functies geen voor de hand liggende regels gelden:

- Als $f(x) = 3x$ dan is $f'(x) = 3$.
- Als $g(x) = x^2$ dan is $g'(x) = 2x$.

De productfunctie van f en g is dan:
$P(x) = f(x) \cdot g(x) = 3x \cdot x^2 = 3x^3$. De afgeleide daarvan is $P'(x) = 9x^2$ en niet
$P'(x) = f'(x) \cdot g'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$, zoals je zou kunnen denken.
Voor productfuncties geldt een speciale regel: de productregel.

Bekijk de figuur. Als lengte en breedte van een rechthoek functies van x zijn, is de oppervlakte $A(x)$ zo'n productfunctie: $A(x) = f(x) \cdot g(x)$.



Figuur 3.2

De afgeleide van $A(x)$ is volgens de definitie:

$A'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h}$.

Als x toeneemt tot $x + h$ dan is de toename van de oppervlakte:

$A(x + h) - A(x) =$
$= f(x) \cdot (g(x + h) - g(x)) + g(x) \cdot (f(x + h) - f(x)) +$
$(f(x + h) - f(x)) \cdot (g(x + h) - g(x))$

Dus is

$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} +$

$(f(x + h) - f(x)) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Neem je de limiet voor $h \to 0$, dan krijg je:

$A'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left(f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + (f(x+h) - f(x)) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$

$= f(x) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + 0 =$
$f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$.

Voor de gegeven functie $P(x) = f(x) \cdot g(x) = 3x \cdot x^2$ betekent dit:
$P'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x) = 3x \cdot 2x + x^2 \cdot 3 = 9x^2$.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Leg aan de hand van de figuur de formule voor $A(x + h) - A(x)$ uit.

b Bij het berekenen van $A'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h}$ wordt gesteld dat $\lim\limits_{h \to 0} \left((f(x + h) - f(x)) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = 0$. Waarom is dat zo?

c Welke formule geldt dus voor de afgeleide van $A(x) = f(x) \cdot g(x)$?

d Neem $A(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot x^3$.
Bereken de afgeleide met de regel die je in de uitleg hebt gevonden en controleer het antwoord door eerst de functie te herleiden.

Opgave 2

De functie $A(x) = x^2(x^3 - 4x)$ kun je opvatten als een productfunctie van f en g. Bij het differentiëren kun je de regel aan het einde van de **Uitleg** gebruiken.

a Bepaal de afgeleide van A met behulp van die regel.

b Differentieer de functie ook door eerst de haakjes weg te werken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een product van twee functies geldt de **productregel**:

Als

$p(x) = f(x) \cdot g(x)$

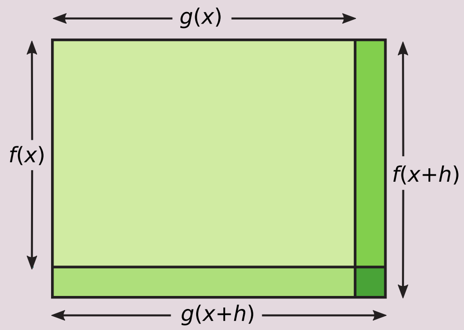
dan geldt

$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Bekijk vóór je deze regel gaat gebruiken of je bijvoorbeeld een product van machtsfuncties gaat differentiëren en of je dan de haakjes kunt wegwerken. Dat kan je werk besparen.

Bewijs 1

Bekijk de figuur.



Figuur 3.3

Als lengte en breedte van een rechthoek functies van x zijn, is de oppervlakte A een productfunctie in x: $A(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Je kunt de oppervlakte van deze rechthoek vergroten door x te laten toenemen met Δx.

De nieuwe oppervlakte is dan in de lengte vergroot met $\Delta f(x)$ en in de breedte met $\Delta g(x)$.

De toename van de oppervlakte bestaat uit de donkerder rechthoekjes met een oppervlakte van respectievelijk: $f(x) \cdot \Delta g(x)$, $g(x) \cdot \Delta f(x)$ en $\Delta f(x) \cdot \Delta g(x)$.

De gemiddelde toename van deze oppervlakte is:

$$\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \frac{f(x)\cdot\Delta g(x)+g(x)\cdot\Delta f(x)+\Delta f(x)\cdot\Delta g(x)}{\Delta x} = f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}+g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\Delta f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

Op het interval $[x, x+h]$ wordt dit differentiequotiënt:

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+(f(x+h)-f(x))\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

De limiet van $\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$ voor h naar 0 is gelijk aan $A'(x)$:

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\left(f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+(f(x+h)-f(x))\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

$$A'(x) = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x) + 0\cdot g'(x)$$

Daarmee wordt de afgeleide van $A(x)$: $A'(x) = f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $P(x) = (x^3 - 6x^2)(x^4 - 1)$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $f(x) = x^3 - 6x^2$ waarvoor geldt: $f'(x) = 3x^2 - 12x$
- $g(x) = x^4 - 1$ waarvoor geldt: $g'(x) = 4x^3$

De afgeleide van P vind je door de productregel toe te passen:
$P'(x) = (x^3 - 6x^2) \cdot 4x^3 + (3x^2 - 12x) \cdot (x^4 - 1)$

En na haakjes wegwerken: $P'(x) = 7x^6 - 36x^5 - 3x^2 + 12x$.
Hier had je de productregel kunnen vermijden door direct de haakjes van functie P weg te werken.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je bij het differentiëren de productregel kunt gebruiken.

a Bepaal zo de afgeleide van: $P(x) = (x^3 + 4)(0{,}5x^4 - 4x)$

b Bepaal met de productregel de afgeleide van: $f(x) = 3x^4(6x^2 - 2x^3)$

c Zowel bij a als bij b heb je de productregel niet nodig voor het differentiëren. Waarom niet?

d Bepaal de afgeleide van $g(x) = (x^2 + 1)\sqrt{2x + 1}$.

Opgave 4

Differentieer de productfunctie: $P(x) = (x^2 + 5)(x + 10)^3$

a Bepaal de afgeleide van $P(x)$ met behulp van de productregel.

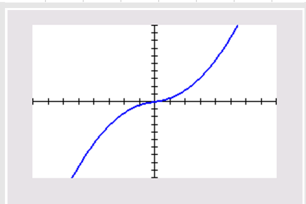
b Om de extremen te vinden dien je eerst de afgeleide van P gelijk te stellen aan 0 en uit te rekenen welke oplossingen voor x dit geeft.

Waarom moet je daarbij vooral niet de nog aanwezige haakjes helemaal weg gaan werken?

c Bereken de extremen van P.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie: $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$.
Bereken met behulp van differentiëren de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 0$.



Figuur 3.4

Antwoord

De afgeleide vind je met behulp van de productregel en de kettingregel:

$$f(x) = x \cdot (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = x \cdot \tfrac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1 + x^2} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $x = 0$ is $f'(0) = 1$.

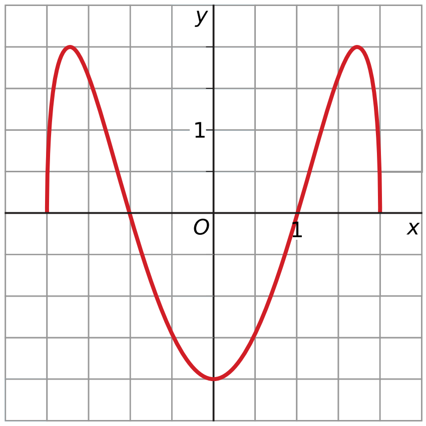
Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = \left(x^2 - 1\right) \cdot \sqrt{4 - x^2}$. Bekijk de volledige grafiek van deze functie in een cartesisch assenstelsel.

a Bepaal de afgeleide van deze functie. Schrijf je antwoord als één breuk.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

c De grafiek van f gaat door het punt $(1{,}0)$.
Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dit punt aan de grafiek.



Figuur 3.5

Verwerken

Opgave 6

Bepaal van de functies de afgeleide. Bedenk altijd eerst of de productregel wel de meest handige manier is om de afgeleide te bepalen.
Schrijf je antwoord zo mogelijk als een product.

a $f(x) = \left(x^2 - 4\right)(x + 3)$

b $f(x) = 4\left(x^2 - x\right)^3$

c $f(x) = 3x(x + 5)^4$

d $f(x) = -10x\sqrt{x + 1}$

e $f(x) = -2x^3\left(4x + x^2\right)^2$

f $f(x) = -x\sqrt{5 + x^2}$

Opgave 7

Bekijk de grafieken van de functies $y_1(x) = x^2$ en $y_2(x) = (x - 4)^4$.
De functie $f(x) = y_1(x) \cdot y_2(x)$ is de productfunctie van beide.

a De nulpunten van f kun je uit de gegeven grafieken afleiden. Welke nulpunten heeft de grafiek van f?

b Toon aan dat $f'(x) = \left(6x^2 - 8x\right)(x - 4)^3$

c Bepaal met behulp van de afgeleide de extremen van f.

d Voor welke waarden van k heeft de vergelijking $f(x) = k$ precies vier oplossingen?

e De grafiek van f heeft twee buigpunten. Bereken de x-coördinaten van de buigpunten.

Opgave 8

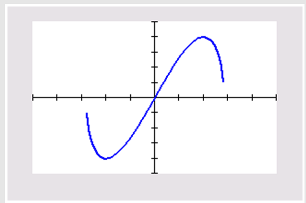
Gegeven is de functie $f(x) = 4x\sqrt{x} \cdot \left(1 - x^3\right)$.

a Voor welke waarden van x heeft de grafiek een raaklijn evenwijdig aan de x-as?

b Deze functie heeft twee extremen. Welke twee?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$ op de grafische rekenmachine.



Figuur 3.6

a De grafiek is onvolledig. Dat kun je bijvoorbeeld zien aan de nulpunten van deze functie. Welke nulpunten heeft de grafiek van f?

b Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f.

c Bereken voor welke waarden van p de lijn met vergelijking $y = px$ drie punten gemeen heeft met de grafiek van f.

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = \left(x^2 - 100\right)^4$.
Bereken de buigpunten van deze functie.

Toepassen

In een cartesisch assenstelsel kun je de **hoek berekenen** die een lijn met de x-as of de y-as maakt. Als de lijn een richtingscoëfficiënt a heeft en α is de hoek met de positieve x-as, dan is:

$\tan(\alpha) = a$

Denk er wel om dat het assenstelsel cartesisch moet zijn, dus op de x-as en op de y-as dezelfde schaalverdeling moet hebben.

Opgave 11

Gegeven is in een cartesisch assenstelsel de grafiek van de functie $f(x) = (x - 3)^2(x + 1)^2$.

a Bereken de hoek die de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ met de x-as maakt.

b Bereken de hoek die de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt met de y-as, met de y-as maakt.

Opgave 12

Gegeven is in een cartesisch assenstelsel de grafiek van de functie: $f(x) = x(2x + 3)^2$.

a Bereken de coördinaten van het snijpunt met de y-as.

b Bereken de helling van de raaklijn in het snijpunt met de y-as.

c De lijn $l : y = ax+b$ snijdt de grafiek in het snijpunt met de verticale as loodrecht. Bereken a en b.

Testen

Opgave 13

Bepaal de afgeleide van de volgende functies. Schrijf je antwoord zo mogelijk als één product of als één breuk:

a $f(x) = 6x\left(1 + x^2\right)^3$

b $f(x) = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$

c $f(x) = (4x - 1)\sqrt{4x - 1}$

d $f(x) = x(1 + x)^3\sqrt{x - 1}$

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x\sqrt{x} + 4x$.

a Bepaal de nulwaarden van f.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

c Bereken algebraïsch het buigpunt van de grafiek van f.

d De raaklijn l in de oorsprong aan de grafiek van f wordt a eenheden in de positieve x-richting verschoven. De nieuwe lijn m die daardoor ontstaat raakt ook aan de grafiek van f. Bereken a.

2.4 De quotiëntregel

Inleiding

Als je twee functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ deelt, krijg je een nieuwe functie die de quotiëntfunctie van f en g heet. Soms kun je die quotiënten uitwerken, maar meestal niet.
Daarom moet je een differentieerregel hebben voor quotiëntfuncties $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Je leert in dit onderwerp

- de regel voor het differentiëren van quotiëntfuncties gebruiken.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel, de somregel, de kettingregel en de productregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Een gebroken functie (quotiëntfunctie) heeft de vorm $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$.
Je kunt alle quotiëntfuncties schrijven als een product van twee machtsfuncties: $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$.

a Bepaal de afgeleide van $q(x) = \frac{x+3}{x+2}$ door de functie eerst als een product van twee machtsfuncties te schrijven. Schrijf je antwoord als één breuk.

b Bepaal op dezelfde manier de afgeleide van de algemene quotiëntfunctie $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Schrijf je antwoord als één breuk.

Uitleg

Als een deling niet uitkomt, blijft er een breuk over. Ook bij functies kan dit voorkomen.

- $f(x) = \frac{3x^5}{2x^2}$ is een deling van $t(x) = 3x^5$ en $n(x) = 2x^2$.
  Deze deling is echter te vereenvoudigen (mits $x \neq 0$) tot $f(x) = 1{,}5x^3$
- $g(x) = \frac{x+1}{x}$ is een deling van $t(x) = x + 1$ en $n(x) = x$.
  Deze breuk kun je gemakkelijk uitdelen waarbij de vorm $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ontstaat.
- $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ is een deling van $t(x) = x$ en $n(x) = x^2 + 1$.
  Deze functie kun je niet vereenvoudigen of uitdelen.

De functies f en g kun je na vereenvoudigen en/of uitdelen differentiëren.

Bij functie h kun je de afgeleide vinden door de functie als een product van twee machtsfuncties te schrijven: $h(x) = x \cdot (x^2+1)^{-1}$.

Je vindt de afgeleide met de productregel en de kettingregel:

$h'(x) = 1 \cdot (x^2+1)^{-1} + x \cdot -1 \cdot (x^2+1)^{-2} \cdot 2x$, dus:

$h'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}$

Je ziet dus dat ook een gebroken functie te differentiëren is. Je krijgt op deze manier een vorm met twee breuken, die je weer kunt samenvoegen tot één breuk. Er bestaat echter ook een quotiëntregel voor het differentiëren:

Als $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dan is $q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Deze regel geeft de afgeleide direct in een vorm met één breuk.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

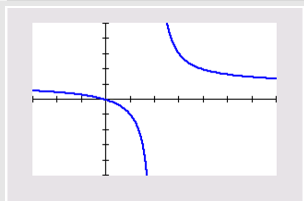
a Bepaal de afgeleides van f en g

b Bepaal de afgeleide van h op dezelfde manier als in de uitleg. Schrijf het antwoord als één breuk.

c Bepaal de afgeleide van h met behulp van de quotiëntregel.

Opgave 2

Hier zie je een deel van de grafiek van de functie $q(x) = \frac{x}{x-2}$.



Figuur 4.1

a Bepaal de afgeleide van $q(x) = \frac{x}{x-2}$ met de quotiëntregel.

b Ga na dat je met de product- en kettingregel op hetzelfde antwoord uitkomt.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een quotiënt van twee functies geldt de **quotiëntregel**:

De afgeleide van $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ is $q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Bewijs 1

Je kunt $q(x)$ schrijven als $q(x) = f(x) \cdot (g(x))^{-1}$.

Differentiëren van deze functie met de productregel en de kettingregel geeft dan:

$q'(x) = f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot -1 \cdot (g(x))^{-2} \cdot g'(x)$, dus:

$q'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

De breuken gelijknamig maken en het geheel vervolgens als één breuk schrijven, levert de quotiëntregel:

$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x)}{(g(x))^2} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

De quotiëntregel geeft best veel rekenwerk. Kijk goed of deze regel wel echt noodzakelijk is. Vaak kun je een quotiëntfunctie vereenvoudigen of uitdelen, wat het differentiëren eenvoudiger maakt.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie: $p(x) = \frac{x^2}{x-1}$.
Differentieer $p(x)$ met behulp van de quotiëntregel.

Antwoord

Voor de afgeleide van een quotiëntfunctie $p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ geldt de quotiëntregel: $p'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

In dit geval geldt:

- teller: $f(x) = x^2$ met $f'(x) = 2x$
- noemer: $g(x) = x - 1$ met $g'(x) = 1$

Dus de gevraagde afgeleide is: $p'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

Opgave 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

a Bepaal van deze functie de afgeleide met behulp van de quotiëntregel.

b Je kunt ook het functievoorschrift eerst herleiden. Dan hoef je de quotiëntregel helemaal niet te gebruiken. Bepaal nu de afgeleide zonder de quotiëntregel toe te passen. Welk van beide methodes om te differentiëren is hier het handigst?

Opgave 4

Differentieer de functies. Ga daarbij eerst na of het gebruik van de quotiëntregel echt noodzakelijk is of dat je de functie beter eerst kunt vereenvoudigen of uitdelen voordat je gaat differentiëren.

a $f(x) = \frac{x+4}{x}$

b $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$

c $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$

d $f(x) = \frac{x}{x+3}$

e $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$

f $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

Voorbeeld 2

Differentieer de functie: $f(x) = \frac{5x-10}{\sqrt{4+x^2}}$.

Antwoord

Noem de teller $t(x)$ en de noemer $n(x)$ en pas de quotiëntregel toe:

- $t(x) = 5x - 10$ met $t'(x) = 5$
- $n(x) = \sqrt{4 + x^2} = (4 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ met $n'(x) = \frac{1}{2}(4 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

Dus: $f'(x) = \frac{5 \cdot \sqrt{4+x^2} - (5x-10) \cdot \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2}$

Vermenigvuldig nu teller en noemer met $\sqrt{4 + x^2}$ om de breuk uit de teller te halen en je vindt:

$f'(x) = \frac{5 \cdot (4+x^2) - (5x-10) \cdot x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{20+10x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

Opgave 5

Differentieer de functies. Gebruik de quotiëntregel alleen als het niet makkelijker kan.

a $f(x) = \frac{3x^2-4}{2x+1}$

b $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$

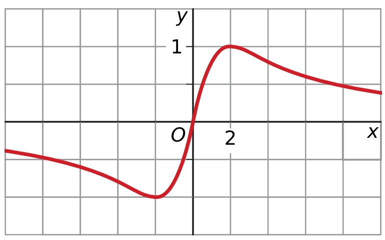
c $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{4+x^2}}$

d $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Voorbeeld 3

Bekijk het deel van de grafiek van $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$.

Er zijn twee extremen. Bereken die met behulp van de afgeleide van f.



Figuur 4.2

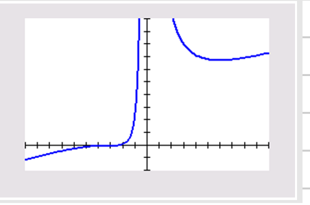
Antwoord

De afgeleide is: $f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2+4) - 4x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$.

$f'(x) = 0$ geeft $-4x^2 + 16 = 0$.
En deze vergelijking levert op: $x = -2 \vee x = 2$.
Uit de grafiek kun je dan aflezen dat de extremen zijn: max. $f(2) = 1$ en min. $f(-2) = -1$.

Opgave 6

Je ziet hier een deel van de grafiek van $f(x) = \frac{(x+3)^3}{3x^2}$.



Figuur 4.3

- **a** Toon aan dat $f'(x) = \frac{(x-6)(x+3)^2}{3x^3}$.
- **b** Bereken het minimum van f.
- **c** Waarom is het punt (-3,0) een buigpunt van de grafiek van f?

Verwerken

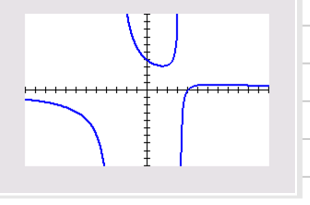
Opgave 7

Differentieer de volgende functies.

- **a** $f(x) = \frac{x+1}{x^2-16x}$
- **b** $f(x) = \frac{x^2-10}{2x}$
- **c** $f(x) = \frac{2x}{x^2-10}$
- **d** $f(x) = \frac{-4}{1-3x^2}$

Opgave 8

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \frac{10x-40}{x^2-10}$.



Figuur 4.4

- **a** Bereken exact de extremen van f.
- **b** Los op: $\frac{10x-40}{x^2-10} = -x + 4$.

  Wat heeft de oplossing voor betekenis voor de grafiek van f?

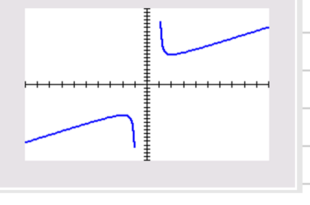
Opgave 9

Toon aan dat de afgeleide van $f(x) = \frac{x+3}{x\sqrt{1-2x}}$ gelijk is aan

$f'(x) = \frac{x^2+9x-3}{(x^2-3x^3)\sqrt{1-2x}}$

Opgave 10

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-1}} + x$ met $x > 1$.



Figuur 4.5

- **a** Toon aan dat geldt:

  $f'(x) = \frac{-3\sqrt{3}}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} + 1$
- **b** Bereken exact het minimum.
- **c** Er is een punt A op f met raaklijn $l: y = f'(x_A)x + b$, waarvoor geldt dat $f(x_A) = x_A + \frac{1}{2}b$.

  Bereken de coördinaten van A.

Opgave 11

Bekijk de grafiek van $f(x) = \frac{10}{\sqrt{x^2+2}}$.

Voor welke waarde van x is de stijging maximaal?

Toepassen

Opgave 12: Gelijkstroomcircuit

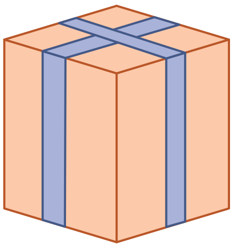
Een gelijkstroomcircuit bestaat uit een 12 volts batterij met een inwendige weerstand van 12 ohm en een variabele weerstand van R (ohm). Het vermogen P (in watt) dat door dit circuit wordt opgewekt, wordt gegeven door $P = RI^2$. De stroomsterkte I wordt daarin gegeven door $I = \frac{12}{R+12}$.

a Druk het ontwikkelde vermogen uit in R, de variabele weerstand.

b Bereken het maximaal ontwikkelde vermogen met behulp van differentiëren.

Opgave 13: Sierlinten

De afdeling Verpakking van een bedrijf heeft de opdracht gekregen balkvormige doosjes te maken waarvan de lengte vier keer zo groot is als de breedte. Om elke doos worden twee zijden sierlinten aangebracht zoals je in de tekening ziet. De inhoud van de doosjes moet 1 liter zijn. Het bedrijf wil het verbruik van het sierlint zo klein mogelijk houden.



Figuur 4.6

a Stel een formule op voor de lengte L van het benodigde sierlint als functie van de breedte x van de doos.

b Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het doosje de lengte van het sierlint zo klein mogelijk is. Geef je antwoord in millimeter nauwkeurig.

Testen

Opgave 14

Differentieer de volgende functies zo handig mogelijk.

a $f(x) = \frac{2x+5}{1-x}$

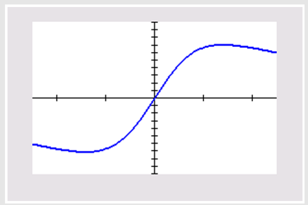
b $f(x) = \frac{\pi}{3(1+x^3)}$

c $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

d $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}$

Opgave 15

Dit is een deel van de grafiek van $f(x) = \frac{10x}{0{,}5x^2+1}$.



Figuur 4.7

a Bereken exact de twee extremen van functie f.

b Bepaal de tweede afgeleide van f.

c Bepaal de buigpunten van de grafiek van f.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met alle differentieerregels**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.5 Differentieerbaarheid

Inleiding

Je kent nu de meest gebruikte differentieerregels. Het lijkt er op dat je alle functies zonder problemen kunt differentiëren. Dat is echter niet het geval. Er bestaan functies waarbij zelfs binnen het domein problemen optreden met de afgeleide.

In dit onderdeel kom je daar een aantal voorbeelden van tegen. Het gaat dan om sprongen en knikken in de grafiek.

Je leert in dit onderwerp

- herkennen wanneer en waar een bepaalde functie (zelfs binnen zijn domein) geen afgeleide heeft;
- werken met de afgeleide in de buurt van knikpunten en sprongen in de grafiek.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de grafiek van $y = \sqrt{x}$ op je grafische rekenmachine.

a Probeer je grafische rekenmachine het hellingsgetal voor $x = 0$ laten vinden.

b Welk probleem doet zich daarbij voor? Kun je er een verklaring voor vinden?

c Heeft deze grafiek een raaklijn voor $x = 0$? Zo ja, welke vergelijking hoort er dan bij die raaklijn?

Uitleg

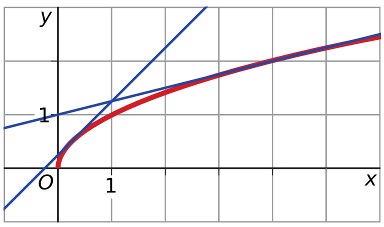
Bekijk de applet

Het domein van de grafiek van de wortelfunctie $f(x) = \sqrt{x}$ is $[0, \rightarrow\rangle$. Het randpunt $(0,0)$ is een punt van de grafiek van f.

De afgeleide is: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Hier heeft $f'(0)$ geen betekenis, want je deelt dan door 0 en dat kan niet.

Dit betekent dat deze wortelfunctie niet differentieerbaar is voor $x = 0$. Ook de meeste andere wortelfuncties kennen waarden waarin de functie niet differentieerbaar is.



Figuur 5.1

Als je $x = 0$ in de grafiek van f van de bovenkant benadert, dan wordt de helling steeds groter. In $O(0,0)$ is de helling oneindig groot. De grafiek heeft in dat punt een verticale raaklijn met vergelijking $x = 0$.

Er zijn verschillende situaties denkbaar waarbij een functie voor een bepaalde waarde van x geen afgeleide heeft hoewel die waarde wel tot het domein behoort. Vaak is dat zichtbaar aan een knik of een sprong in de grafiek. Op plaatsen waarin een knik of een sprong optreedt, kan niet precies één raaklijn aan de grafiek getekend worden. Ook randpunten van de grafiek kunnen een onbepaalde helling hebben.

Opgave 1

De functie $f(x) = \sqrt{x}$ is niet differentieerbaar voor $x = 0$.

a Wat betekent dit?

b Voor welke waarde van x is de functie g met $g(x) = 2 + \sqrt{x-3}$ niet differentieerbaar?

c Welke vergelijking heeft de raaklijn aan de grafiek van g voor de in b bedoelde waarde van x?

Opgave 2

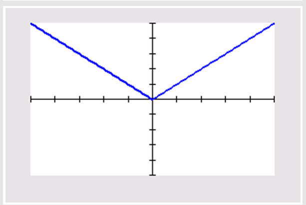
Gegeven is f met $f(x) = |x|$ met $-5 \leq x \leq 5$.

a Welke helling heeft de grafiek van f voor $x < 0$?

b Welke helling heeft de grafiek van f voor $x > 0$?

c Waarom is de grafiek van f voor $x = 0$ niet differentieerbaar?

d Is de functie $g(x) = \left|x^3\right|$ voor $x = 0$ differentieerbaar?



Figuur 5.2

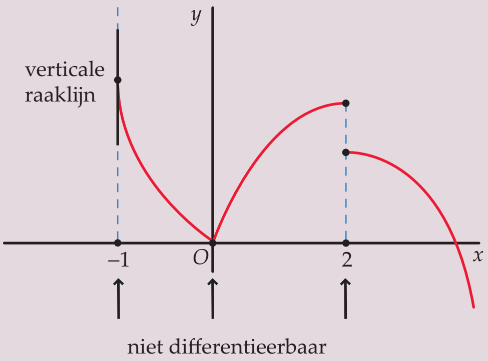
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een functie f is **differentieerbaar** voor $x = a$ als a tot het domein van f behoort en

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

bestaat. Belangrijk is hierbij dat h zowel positief als negatief moet kunnen zijn: het naar 0 naderen moet zowel van de negatieve als de positieve kant kunnen en hetzelfde getal opleveren.
Dat differentiaalquotiënt is dan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $x = a$ aan de grafiek van f. Het komt er dus op neer, dat je de functie voor $x = a$ precies één hellingsgetal moet kunnen geven en een bijpassende vergelijking van de raaklijn moet kunnen opstellen.



Figuur 5.3

Er zijn verschillende situaties waarin een functie **niet differentieerbaar** is, terwijl de betreffende x-waarde wel tot het domein van f behoort. Bekijk de voorbeelden. Het gaat om x-waarden waarin de grafiek

- een **verticale raaklijn**, of
- een **knikpunt**, of
- een **sprong**

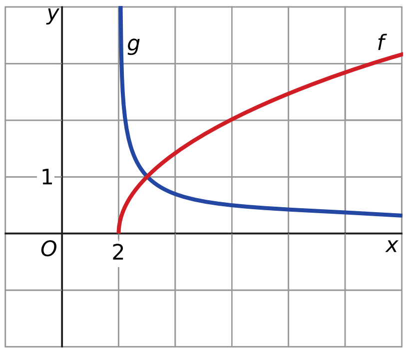
vertoont. Heeft een grafiek een perforatie, dan is deze voor de bijbehorende waarde van x niet differentieerbaar.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x-2}$ en $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

Hoe zit het met de differentieerbaarheid van beide functies?



Figuur 5.4

Antwoord

Functie f heeft als domein $[2, \rightarrow\rangle$.

De afgeleide $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ heeft als domein $\langle 2, \rightarrow\rangle$.

Naarmate je van de bovenkant dichter bij het randpunt $(2,0)$ komt, wordt de grafiek steeds steiler. In dit punt heeft de grafiek een verticale raaklijn. De functie f is niet differentieerbaar voor $x = 2$ hoewel dit getal wel in het domein zit.

Functie g heeft als domein $\langle 2, \rightarrow\rangle$.

De afgeleide $g'(x) = \frac{-1}{2(x-2)\sqrt{x-2}}$ heeft als domein ook $\langle 2, \rightarrow\rangle$.

De functie g is voor elke x-waarde in het domein differentieerbaar.

Opgave 3

Bekijk de functies in **Voorbeeld 1**.

a Waarom zijn zowel f als g niet differentieerbaar voor $x = 2$?

b Waarom heeft de grafiek van f wel een raaklijn voor $x = 2$ maar de grafiek van g niet?

Opgave 4

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

a Bepaal het domein en bereik van f.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bepaal het domein en bereik van f'.

d Welke conclusies kun je daaruit trekken?

Opgave 5

Bekijk de grafieken van de functies: $f(x) = \left|x^2 - 4x\right|$ en $g(x) = x^2 - |4x|$.

a Voor welke waarden van x is functie f niet differentieerbaar?

b Voor welke waarden van x is functie g niet differentieerbaar?

Voorbeeld 2

Hoe zit het met de differentieerbaarheid van de functie f met $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$?

Antwoord

De functie is te schrijven als

$f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3$ mits $x \neq 3$

De grafiek is daarom een rechte lijn met een perforatie bij $x = 3$.

Omdat de functiewaarde bij $x = 3$ niet bestaat, is de functie daar niet differentieerbaar.

Opgave 6

Onderzoek de differentieerbaarheid van de functies.

a $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

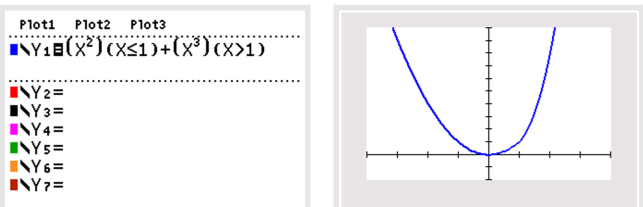
b $g(x) = \frac{|x|}{x}$

c $h(x) = \frac{|x^2+x|}{x}$

Voorbeeld 3

Soms bestaat een functie uit meerdere delen. Bijvoorbeeld:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{voor } x \leq 1 \\ x^3 & \text{voor } x > 1 \end{cases}$$



Figuur 5.5

Laat zien dat deze functie niet differentieerbaar is voor $x = 1$.

Antwoord

De grafiek van f vertoont bij $x = 1$ geen sprong, want $f(1) = 1 = \lim_{x \downarrow 1} x^3$.

De afgeleide is:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{voor } x \leq 1 \\ 3x^2 & \text{voor } x > 1 \end{cases}$$

Bekijk je nu het punt $(1,1)$ dan zie je dat het hellingsgetal 2 is, want $f'(1) = 2$. En als je het punt $(1,1)$ van rechts benadert dan zie je dat het hellingsgetal 3 wordt, want $\lim\limits_{x \downarrow 1} 3x^2 = 3$.

Omdat beide hellingen verschillend zijn, is er daar een knikpunt en is f niet differentieerbaar voor $x = 1$.

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{voor } x < 0 \\ x^3 & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$

Waarom is g wel differentieerbaar voor $x = 0$?

Verwerken

Opgave 8

Bepaal de punten waarin de functies niet differentieerbaar zijn.

a $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

b $g(x) = \left|9 - x^2\right|$

c $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$

d $k(x) = 2x + |x - 5|$

Opgave 9

De grafiek van de functie $f(x) = x^2|x + 4|$ heeft een knikpunt bij $(-4,0)$.
In dit knikpunt kun je twee lijnen tekenen die de grafiek van f raken. Bereken de richtingscoëfficiënten van deze twee lijnen.

Opgave 10

Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = -2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ op het domein $[-1,6]$.

a Laat zien dat deze functie voor $x = 0$ niet differentieerbaar is.

b Bereken de extremen van deze functie.

c De raaklijn voor $x = k$ snijdt de x-as in het punt A en de y-as in het punt B zodanig dat A en B even ver van $(0,0)$ af liggen. Bereken k.

Opgave 11

Gegeven is de functie f die is gedefinieerd door:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{voor } x < 1 \\ (x-2)^2 + 2 & \text{voor } x \geq 1 \end{cases}$$

a Laat zien dat deze functie voor elke waarde van x differentieerbaar is.

b Het functievoorschrift wordt voor $x \geq 1$ vervangen door een functievoorschrift van de vorm $f(x) = ax + b$. Welke waarden moeten a en b dan hebben als de nieuwe functie f die dan ontstaat nog steeds voor elke x differentieerbaar is?

Opgave 12

Bekijk: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$.

a Voor welke waarden van x is f niet differentieerbaar?

b Bereken $\lim\limits_{x \uparrow -2} f'(x)$ en $\lim\limits_{x \downarrow -2} f'(x)$.
Welke betekenis heeft dit voor de grafiek van f?

Toepassen

Opgave 13: Startende fietser

Een fietser versnelt de eerste vijf seconden met een versnelling van 1 m/s^2 en rijdt daarna met een constante snelheid verder.

Voor zijn afgelegde weg s geldt $s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{voor } 0 \leq t < 5 \\ 5t - 12{,}5 & \text{voor } t \geq 5 \end{cases}$

a Laat zien, dat de grafiek van $s(t)$ aaneengesloten is.

b Laat zien, dat ook de grafiek van de snelheid $v(t) = s'(t)$ aaneengesloten is.

c En hoe ziet de grafiek van de versnelling $a(t) = s''(t)$ er uit?
Hoe merkt de fietser dat?

Testen

Opgave 14

Bepaal de waarden van x waarin de volgende functies niet differentieerbaar zijn.

a $f(x) = 4 - \sqrt{2-x}$

b $g(x) = x\left|x^2 - 4\right|$

Opgave 15

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^3}$.

a Bepaal het domein van f.

b Voor welke waarden van x is f niet differentieerbaar?

c Bereken de extremen van f.

2.6 Optimaliseren

Inleiding

Een **model** is een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid. In de wetenschap wordt veel met modellen gewerkt omdat de werkelijkheid te complex is om zonder meer te beschrijven. Door niet belangrijke details weg te laten (verstandige aannames te doen) kan een model worden opgesteld dat met wiskundige middelen is te beschrijven en door te rekenen. Uit het doorrekenen van het model worden conclusies getrokken die dan weer kunnen worden vergeleken met de realiteit.
Bij het werken met modellen gaat het vaak om het berekenen van extremen, om 'optimaliseringsproblemen'. Daarbij wordt het differentiëren toegepast. En er zijn nog andere toepassingen van differentiëren...

Je leert in dit onderwerp

- werken met modellen waarin het differentiëren kan worden toegepast, zoals optimaliseringsproblemen;
- raaklijn opstellen door een punt buiten de grafiek.

Voorkennis

- differentiëren met alle differentieerregels;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

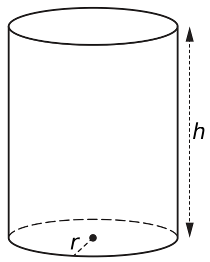
Verkennen

Opgave V1

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.

Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Uitleg



Figuur 6.1

Een blikfabriek maakt cilindervormige blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag. Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Om die vraag te beantwoorden kun je een rekenmodel opstellen. Bijvoorbeeld zo:

- Doe enkele aannames.
  Het blik is zuiver cilindrisch en de benodigde hoeveelheid blik is gelijk aan de totale oppervlakte van het blik.
- Bepaal welke variabelen een rol spelen.
  Het gaat om het berekenen van de straal van (het grondvlak

van) het blik r en de hoogte h, neem beide bijvoorbeeld in centimeter. Het gegeven betreft de inhoud van een blik (1 L = 1000 cm^3), de eis betreft de oppervlakte die minimaal moet zijn.

- Bedenk welke bekende formules hier gelden.
  Ga na, dat voor de inhoud van een cilinder geldt: $I = \pi r^2 h$.
  En voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$.
- Gebruik de gegevens.
  Omdat $I = 1000$ cm^3 vind je $1000 = \pi r^2 h$.
- Zorg dat er één formule met twee variabelen overblijft.
  Door beide formules te combineren vind je: $A(r) = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2$.

Met behulp van differentiëren (of de grafische rekenmachine) vind je nu dat voor $r \approx 5{,}4$ cm en $h \approx 10{,}8$ cm de totale oppervlakte minimaal is.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**.

a Welke twee formules voor een cilinder worden er gebruikt?

b Welke aannames worden er gedaan?

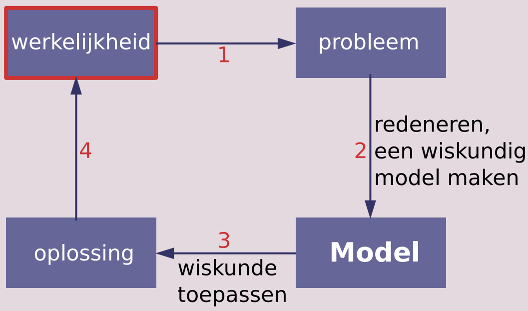
c Laat zien hoe je aan de formule voor $A(r)$ komt.

d Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het blik de hoeveelheid gebruikt materiaal het laagst is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Wiskunde wordt veel toegepast in wetenschap, handel en industrie om problemen op te lossen.
Vaak heeft het antwoord op zo'n probleem de vorm van een **wiskundig model**.
Een wiskundig model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid op grond van verstandige aannames. In een goed model zijn alle belangrijke factoren nog aanwezig, alleen de onbelangrijke blijven buiten beschouwing. Meestal heeft het model de vorm van één of meer formules die beschrijven hoe de belangrijke variabelen zich gedragen.
Op die formules wordt dan de geschikte wiskundige theorie losgelaten.
Bij **optimaliseren** gaat het om wiskundige modellen waarbij wordt gezocht naar een maximale of een minimale waarde. Vaak is dat het maximum of minimum van een functie. Je kunt dat vinden met behulp van differentiëren, met of zonder de grafische rekenmachine.



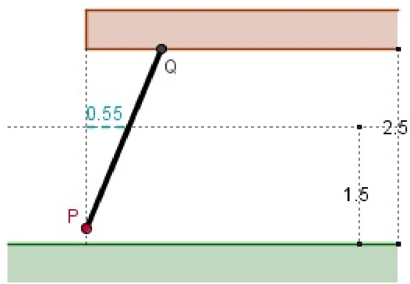
Figuur 6.2

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Garagedeur

Bekijk de dwarsdoorsnede van een garage met een garagedeur.

Bij het openen van de deur gaat de onderkant (punt P) recht omhoog, terwijl de bovenkant (punt Q) langs het plafond horizontaal naar binnen (rechts) gaat. Binnen in de garage moet dus voldoende ruimte zijn om te zorgen dat een auto niet beschadigd raakt door de naar binnen komende deur. De garagedeur is $2{,}50$ m hoog en de auto is $1{,}50$ m hoog. Hoe ver komt de deur op die hoogte van $1{,}50$ m maximaal naar binnen?



Figuur 6.3

Antwoord

Maak een schets van de situatie en geef de belangrijke punten een letter.

Noem de afstand van P tot het plafond x en zet de maten van de andere zijden die vaststaan in de schets. De afstand L die de deur op een hoogte van $1{,}50$ m naar binnen komt (de lengte van de horizontale stippellijn binnen de driehoek die de deur met het plafond maakt), is een functie van x. Voor de lengte L geldt: $L(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\sqrt{6{,}25 - x^2}$.

Je kunt hiermee berekenen dat het maximum van L bij $x \approx 1{,}84$ m optreedt: $L(1{,}84) \approx 0{,}77$.
Dat wil zeggen dat de garagedeur op een hoogte van $1{,}50$ m maximaal zo'n 77 cm naar binnen komt.

Opgave 2

Bekijk in **Voorbeeld 1** het probleem van de garagedeur.

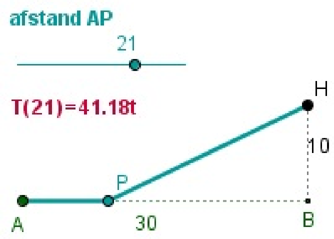
a Toon aan dat voor de lengte L als functie van x de formule in het voorbeeld geldt.

b Toon aan met behulp van differentiëren dat de waarde van L maximaal is voor $x \approx 1{,}84$ m.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Leiding aanleggen

Een woonhuis heeft een nieuwe leiding nodig. Het huis H staat op een afstand van 10 meter van de rechte weg AB. Het aansluitingspunt A voor de leiding ligt 30 meter verderop in de straat. De sleuf voor de leiding kan geheel of gedeeltelijk door de tuin gegraven worden. Het graven en weer netjes dichtmaken van een sleuf in de tuin kost $1{,}5$ keer zo veel tijd als datzelfde werk langs de wegkant. Hoe moet er worden gegraven om alles in zo kort mogelijke tijd te doen?



Figuur 6.4

Antwoord

P is het punt waarbij de leiding de weg verlaat en dwars door de tuin verder gaat.
Neem x meter voor de lengte van BP en t voor de benodigde tijd per meter langs de weg.
Maak een schets van de situatie en zet alle maten erbij.

De totale benodigde tijd is: $T = t(30 - x) + 1{,}5t\sqrt{x^2 + 100}$.
Met behulp van differentiëren vind je de waarde van x waarvoor T maximaal is, de waarde van t speelt daarbij geen enkele rol.

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 2** het probleem van de sleuf die voor een nieuwe leiding gegraven moet worden.

a Toon aan dat voor de totale tijd $T(x)$ als functie van de afstand x en de benodigde tijd t langs de weg de formule in het voorbeeld geldt.

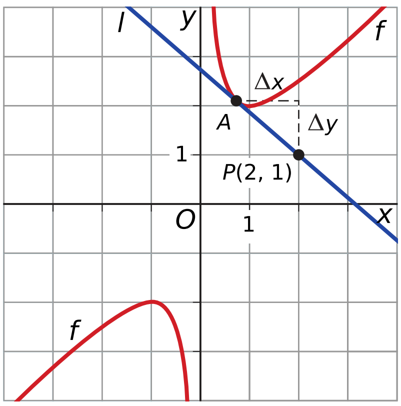
b Toon aan dat bij het vinden van de kortste benodigde tijd voor het graven de waarde van t geen enkele rol speelt.

c Bereken met behulp van differentiëren na hoeveel meter de sleuf van de wegkant naar de tuin af moet slaan om de totale benodigde tijd voor het graven zo kort mogelijk te houden.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Gegeven is de functie: $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
Bereken exact de x-coördinaten van de punten aan de grafiek van f waarvan de raaklijnen door het punt $P(2, 1)$ gaan.



Figuur 6.5

Antwoord

In de figuur raakt raaklijn l de grafiek als de helling van die lijn gelijk is aan de helling van de grafiek in dat punt (de afgeleide dus) van de functie f.
Het raakpunt is $(x, f(x))$, dus:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - 1}{x - 2} = f'(x)$$

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ en $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ geeft:

$$\frac{x + \frac{1}{x} - 1}{x - 2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Na beide zijden met $x - 2$ vermenigvuldigen krijg je:

$$x + \frac{1}{x} - 1 = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)(x - 2)$$

Dit geeft: $1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} = 0$ en $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Er zijn dus twee mogelijke oplossingen: $x_A = -1 + \sqrt{3}$ en $x_B = -1 - \sqrt{3}$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 3**.
Er zijn dus blijkbaar twee punten A en B op de grafiek van f die een raaklijn hebben die door punt P gaan.

a Ga na dat er door het punt $P(2,1)$ inderdaad twee lijnen gaan die de functie $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ergens raken.

b Geef de vergelijkingen van de raaklijnen.

Je had dit probleem ook anders kunnen aanpakken, bijvoorbeeld door het punt A variabele coördinaten te geven: $A\left(a, a + \frac{1}{a}\right)$.

c Leg uit dat dan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn door A gelijk is aan $1 - \frac{1}{a^2}$.

d Stel nu de vergelijking van de raaklijn door A met die richtingscoëfficiënt op.

e Bereken ten slotte de twee mogelijke waarden voor a door gebruik te maken van het gegeven dat de raaklijn door $P(2,1)$ moet gaan.

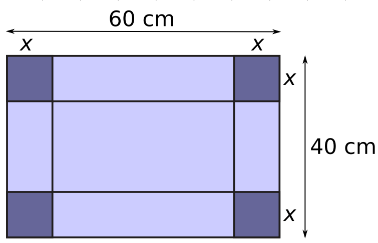
Opgave 5

Gegeven zijn de functies f en g door $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$.
De lijn $x = p$ met $0 < p < 1$ snijdt beide grafieken in de punten A en B. Voor welke waarde van p is de lengte van lijnstuk AB maximaal?

Verwerken

Opgave 6

Een fabrikant van balkvormige dozen maakt dozen van karton. Voor het maken van een doos (zonder deksel) gebruikt hij karton met een afmeting van 40×60 cm.



Figuur 6.6

a Neem aan dat x de hoogte van de doos is en bepaal welke maximale en minimale waarde x heeft.

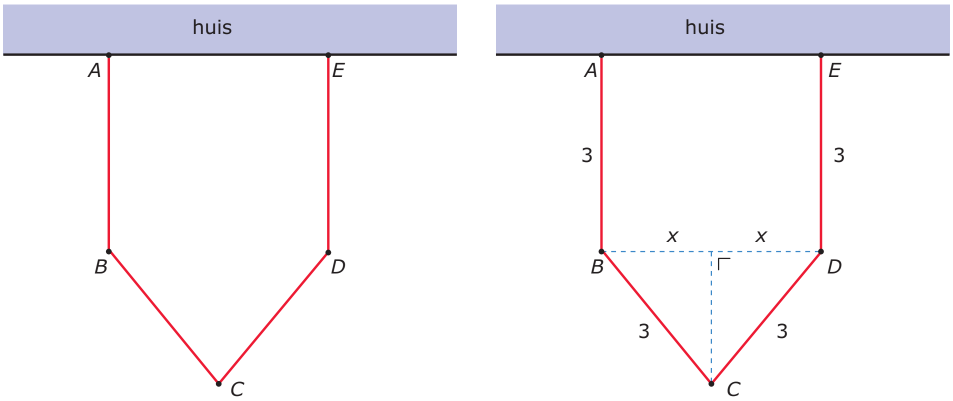
b Druk de oppervlakte A en de inhoud I van de doos uit in x.

c Bereken met behulp van differentiëren bij welke hoogte (mm) de doos de grootste inhoud heeft.

d Bereken de maximale inhoud van de doos (cm^3) en de afmetingen (mm) die daarbij horen.

Opgave 7

Iemand wil met behulp van een viertal even grote rechthoekige kozijnen een serre aan zijn huis bouwen. Elk van die kozijnen is 2,5 m hoog en 3 m breed. Hij bestudeert de mogelijke opstellingen waarbij twee kozijnen AB en DE loodrecht op de muur worden bevestigd. De andere twee BC en CD worden zo geplaatst dat de vloeroppervlakte van de serre maximaal wordt.



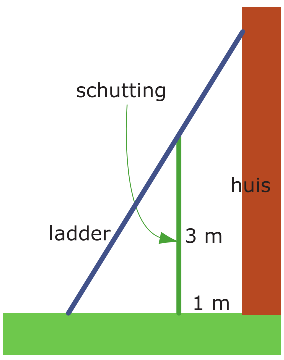
Figuur 6.7

a De afstand tussen de twee kozijnen die loodrecht op de muur staan is $2x$. Toon aan dat voor de vloeroppervlakte A van de serre geldt: $A(x) = 6x + x\sqrt{9 - x^2}$.

b Bereken algebraïsch de grootst mogelijke vloeroppervlakte van deze serre.

Opgave 8

Iemand wil een ladder kopen om zijn dakgoten schoon te maken. Vlak naast zijn huis op 1 m van de muur staat echter een schutting van 3 m hoog. Hoe lang moet een ladder minstens zijn om over de schutting tegen de muur van het huis te komen?
(Ga er van uit dat zowel de muur van het huis als de schutting loodrecht op de vlakke grond staan.)



Figuur 6.8

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = \frac{100x^2 - 400}{x^4 + 100}$.

a Bereken algebraïsch het bereik van f. Geef benaderingen in één decimaal nauwkeurig.

b Los algebraïsch op: $f(x) \leq \frac{1}{f(x)}$.

c De lijn $y = ax$ raakt de grafiek van f. Bereken a.

Opgave 10

Gegeven is de familie van functies f_p door $f_p(x) = \frac{x^2+px+4}{x+3}$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten en de extremen van f_4.

b Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f_p geen verticale asymptoot?

c Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f_p geen nulpunten?

d Voor welke waarden van p heeft f_p geen extremen?

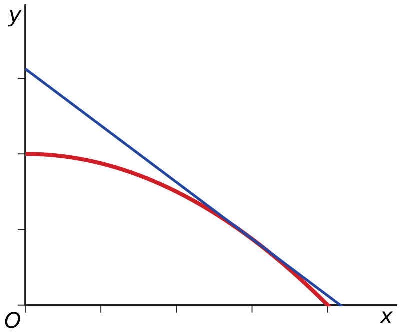
e Voor welke waarden van p gaat de raaklijn aan de grafiek van f_p voor $x = 0$ door het punt $\left(9,\frac{1}{3}\right)$?

Opgave 11

Een metalen boog in de vorm van een halve bergparabool is op 4 m hoogte tegen een hoge muur bevestigd en raakt de grond op een afstand van 2 m van de muur.

Tegen de metalen constructie wordt een rechte plank gezet die zowel de grond, de halve paraboolboog als de muur raakt.

In een wiskundig model van de situatie waarbij de diktes van de boog en de plank verwaarloosd zijn is een assenstelsel aangebracht met de x-as als de grond en de y-as als de muur.
Voor de boog geldt $y = 4 - x^2$.



Figuur 6.9

a Stel de plank raakt de boog in het punt P met $x_P = p$.

Toon aan dat de plank dan de grond raakt in het punt $\left(\frac{2}{p}+\frac{1}{2}p,0\right)$.

b De plank vormt met de grond en de muur een driehoek.

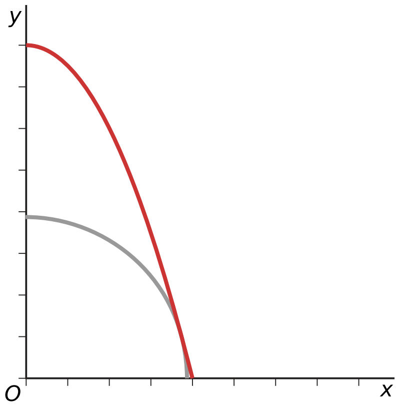
Toon aan dat voor de oppervlakte van die driehoek als functie van de x-coördinaat van het raakpunt P geldt: $A(p) = \frac{(4+p^2)^2}{4p}$ en bereken algebraïsch de minimale oppervlakte van die driehoek.

c Bereken de lengte van de kortste plank die zowel de grond, de boog en de muur raakt. Geef je antwoord in centimeter.

Onder de halve paraboolboog wordt een metalen kwart cirkelboog gemaakt die de oorsprong als middelpunt heeft en de parabool-boog raakt.

De diktes van de bogen kun je verwaarlozen.

d Bereken exact de straal van de cirkelboog.

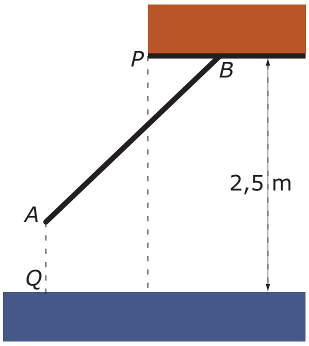


Figuur 6.10

Testen

Opgave 12

Hier zie je een bewegende garagedeur. De hoogte van punt A (de onderkant van de deur) boven de grond is in elke stand even groot als de lengte van PB.
Bereken algebraïsch hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 6.11

Opgave 13

Gegeven is de functie f met $f(x) = \left(x^2 - x\right)^4$.

a Bepaal algebraïsch de extremen van f.

b De lijn met vergelijking $x = k$ met $0 < k < 1$ snijdt de x-as in A en de grafiek van f in B. Voor welke waarde van k is de oppervlakte van ΔOAB maximaal?

2.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle basisregels voor het differentiëren geleerd, de **differentieerregels**. Het is nuttig om nog even alle begrippen op een rijtje te zetten voor jezelf.

Begrippenlijst

- somregel — constante-regel — machtsregel voor gehele positieve *n*
- samengestelde functie (kettingfunctie) — kettingregel
- productfunctie — productregel
- gebroken functie — quotiëntregel
- differentieerbaarheid — knikpunt — sprong in grafiek — verticale raaklijn
- modelleren — optimaliseringsprobleem

Activiteitenlijst

- differentiëren met de basisregels
- differentiëren met de kettingregel en de algemene machtsregel
- differentiëren met de productregel
- differentiëren met de quotiëntregel
- onderzoek of een functie voor een bepaalde x differentieerbaar is
- toepassingen van differentiaalrekening

Achtergronden

De grootste wiskundige prestatie van de achttiende eeuw was de ontwikkeling van de 'calculus', van de 'analyse'. Daarbij gaat het om differentiaal- en integraalrekening, de functietheorie en alles wat daaruit voortvloeide. De belangrijkste rol daarin werd vervuld door **Leonhard Euler (1707—1783)**. Euler leerde de wiskunde in Basel van **Johann Bernoulli (1667—1748)** en werd in 1773 opvolger van **Daniël Bernoulli (1700—1782, zoon van Johann Bernoulli)** als hoogleraar in St. Petersburg.

Figuur 7.1 Leonhard Euler

Vooral dankzij een fenomenaal geheugen (hij kende bijvoorbeeld de eerste zes machten van de eerste 100 priemgetallen uit zijn hoofd evenals alle formules uit de trigonometrie en de analyse en een grote hoeveelheid gedichten) kon hij zelfs toen hij volslagen blind was zijn onvoorstelbare productiviteit op het gebied van de wiskunde en de mathematische fysica handhaven. Met 'Introductio in Analysin Infinitorum' schreef hij in 1748 het eerste samenhangende werk over analyse. Toch was Euler bepaald geen monomane excentrieke wiskundige, maar vooral een gezinsmens (hij had 13 kinderen waarvoor hij allerlei spelletjes ontwierp).

Lees ook: **Grafieken en verandering, differentiaalrekening**.

Testen

Opgave 1

Differentieer de functies.

a $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

b $f(x) = 4x\sqrt{x^2+1}$

c $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$

d $f(x) = \frac{x^2+1}{4x}$

e $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}$

Opgave 2

In een chemisch proces zijn druk p en volume V afhankelijk van de tijd t.

Er geldt: $p(t) = \frac{13}{V(t)}$.
Verder is $V(2) = 3$ en $p'(t) = 2$ voor elke waarde van t.

a Bereken exact $V'(2)$.

b Op $t = 0$ is de druk $p(0) = 1$. Stel een functievoorschrift op voor $p(t)$.

Opgave 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{15x}{x^2+36}$

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

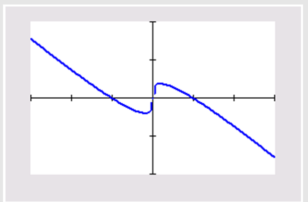
b De raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 3 snijdt de y-as in punt A. Stel een vergelijking van die raaklijn op en bereken de coördinaten van A.

Opgave 4

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = -x + \sqrt[3]{x}$.

a Bereken met behulp van differentiëren de extremen van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Er is een raaklijn aan de grafiek van f die door $(0,1)$ gaat. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze raaklijn?



Figuur 7.2

Opgave 5

De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{x} & \text{als} \quad x < -2 \vee x > 2 \\ ax^3 + bx & \text{als} \quad -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

a Neem $a = 1$ en $b = -2{,}5$. Onderzoek of deze functie differentieerbaar is voor elke waarde van x.

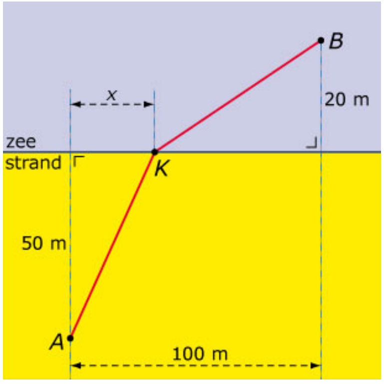
b Er zijn waarden voor a en b te vinden waarbij deze functie wel differentieerbaar is. Bereken deze waarden van a en b.

Opgave 6

Een zwemmer is in nood voor de kust van Bergen. De tekening geeft een beeld van de situatie. De zwemmer in nood bevindt zich bij punt B in zee. Een lid van de reddingsbrigade ziet de zwemmer in nood en wil in actie komen. Zij bevindt zich in punt A. Ze wil natuurlijk via de snelste weg naar de drenkeling toe. Maar wat is de snelste weg?

Een deel van de weg moet ze rennend afleggen en een deel zwemmend. Ze rent met een gemiddelde snelheid van 6 m/s en ze zwemt met een gemiddelde snelheid van $1{,}5$ m/s. Hoe kan ze het snelst hulp bieden? Noem het punt waar ze in het water stapt K.

Punt K kan overal langs de aangegeven 100 m-lijn liggen. De tijd die ze nodig heeft om in B te komen moet natuurlijk zo klein mogelijk zijn. Noem de totale tijd t, de gemiddelde snelheid over het strand v_s en de gemiddelde snelheid in zee v_z.



Figuur 7.3

a Druk t uit in AK, KB, v_s en v_z.

b Formuleer een verband tussen t en x.

c Bepaal met behulp van differentiëren de minimale tijd die ze nodig heeft om de zwemmer te bereiken. Geef je antwoord in tienden van seconden nauwkeurig.

d Bepaal de kortste weg.

Toepassen

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan. Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren.


Figuur 7.4

Onder bepaalde aannames kun je een formule afleiden voor het aantal auto's dat op een bepaald punt kan passeren afhankelijk van de snelheid. Bijvoorbeeld:

- Alle auto's passeren het punt met dezelfde constante snelheid van v km/uur.
- Alle auto's hebben dezelfde lengte van ongeveer 4 m.
- Alle auto's houden een onderlinge afstand die gelijk is aan hun remweg.
- Alle auto's hebben dezelfde remweg die is te berekenen door de snelheid v in km/uur te delen door 10, daarvan het kwadraat te nemen en dat getal met $0{,}75$ te vermenigvuldigen.

Stel op grond daarvan een formule op voor het aantal auto's f dat per minuut het punt passeert waar de file ontstaat als functie van v. Bepaal van de gevonden functie $f(v)$ een maximum en vooral de waarde van v waarvoor dat maximum optreedt. Dat is dan de optimale doorstroomsnelheid.

Opgave 7: Files

Bekijk het verhaal over filevorming hierboven. Neem aan dat alle auto's 4 m lang zijn en hun onderlinge afstand precies de remweg R (in meter) is. Deze remweg hangt af van de snelheid v (in km/h).

Er geldt bij benadering: $R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$.

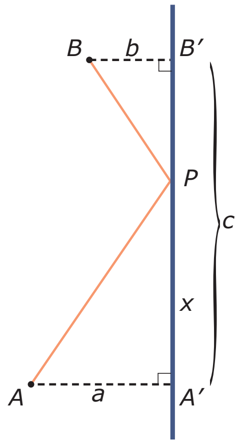
De verkeersdienst zet een teller halverwege de wegversmalling die meet hoeveel auto's er per minuut passeren. Stel nu een formule op voor het aantal auto's dat per minuut de teller passeert. Bereken met behulp van differentiëren bij welke snelheid zoveel mogelijk auto's de teller passeren.

Opgave 8: Spiegel

Dit is een beroemd probleem uit de Griekse Oudheid. Het stamt uit de ‘Catoptrica’ van Heroon.

‘Een lichtstraal loopt van punt naar punt doordat hij van het oppervlak van een vlakke spiegel wordt teruggekaatst. Aangenomen dat het licht altijd de kortste route neemt, waar raakt het dan de spiegel?’

P is het punt waar het licht wordt weerkaatst. De afmetingen zijn verder in de figuur te vinden. De lengte van de lichtstraal (L) is gelijk aan de som van de lengtes van AP en PB. De positie van P is bekend als x is berekend.

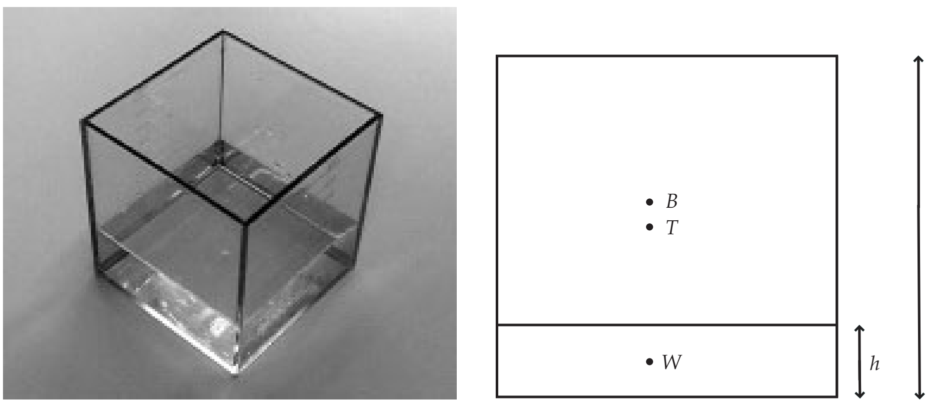


Figuur 7.5

- **a** Stel zelf een formule op voor L als functie van x.
- **b** Neem $a = 2$ dm, $b = 1$ dm en $c = 5$ dm. Bereken met behulp van differentiëren x als L zo klein mogelijk is in twee decimalen nauwkeurig.
- **c** Laat ook zien hoe je dit probleem meetkundig kunt oplossen.

Examen

Opgave 9: Verschuivend zwaartepunt



Figuur 7.6

Een kubusvormige bak met deksel heeft binnenmaten 10 bij 10 bij 10 centimeter en weegt 1 kilogram. Het zwaartepunt B van de bak ligt in het centrum van de bak, dus 5 cm boven het midden van de bodem. De bak wordt met water gevuld tot een hoogte van h cm. Het zwaartepunt W van het water (de bak niet meegerekend) ligt in het centrum van het water, dus $\frac{1}{2}h$ cm boven het midden van de bodem. Zie de foto en de figuur waarin op schaal een vooraanzicht van de bak is getekend. Het zwaartepunt van het geheel (bak en water samen) noemen we T. Het punt T ligt op het lijnstuk BW. Er geldt: $d_T = \frac{h}{h+10} d_W + \frac{10}{h+10} d_B$.

Hierbij zijn d_T, d_W en d_B de afstand in centimeter van achtereenvolgens T, W en B tot de bodem.

a Bereken d_T voor $h = 3$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

b Toon aan dat voor de afstand van T tot de bodem, uitgedrukt in h, geldt: $d_T = \frac{h^2+100}{2h+20}$.

c Als de bak leeg is, valt T samen met B. Tijdens het vullen van de bak verschuift de plaats van T eerst omlaag en later weer omhoog. Als de bak vol is, valt T weer samen met B. Bereken voor welke waarden van h geldt: $d_T < 4{,}5$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

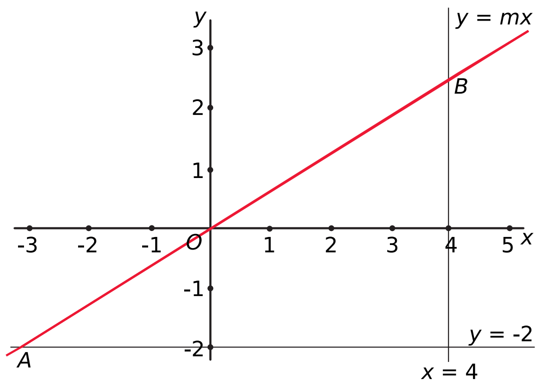
d Bereken exact voor welke waarde van h de afstand van T tot de bodem minimaal is.

(bron: examen wiskunde B vwo 2002, eerste tijdvak)

Opgave 10: Kortste weg

We bekijken de lijn met vergelijking $y = mx$, met $m > 0$. De lijn snijdt de lijn $y = -2$ in A en de lijn $x = 4$ in B.

a Bewijs dat voor elke positieve waarde van m de lengte van het lijnstuk gelijk is aan $\sqrt{(4m+2)^2 + \left(\frac{2}{m}+4\right)^2}$.



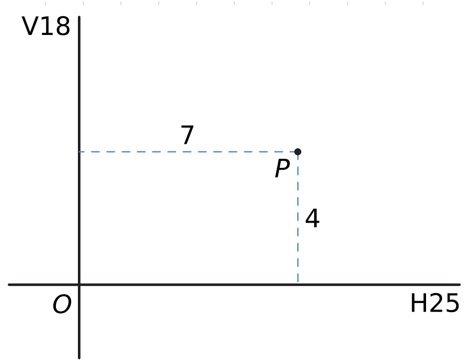
Figuur 7.7

Plaats P ligt dichtbij het kruispunt van twee wegen, de H25 en de V18. De wegen snijden elkaar loodrecht. Plaats P ligt 4 km van de H25 en 7 km van de V18 af.

Er wordt een nieuwe rechte weg aangelegd die de twee wegen met elkaar verbindt. De nieuwe weg moet door plaats P gaan.

b Bereken in meters nauwkeurig de lengte van de kortste weg die aan deze eisen voldoet.

(bron: examen wiskunde B vwo 2002, tweede tijdvak)



Figuur 7.8

Opgave 11: Kogelbanen

Vanuit een bepaald punt worden kogels afgeschoten met steeds dezelfde beginsnelheid. De hoek waaronder men de kogels afschiet, varieert. We brengen een assenstelsel aan in het vlak van de kogelbaan, met de x-as horizontaal en de y-as verticaal. De kogels worden afgeschoten in het punt $(0,0)$ en komen neer in een punt op de x-as. Zie de bovenste figuur. In deze figuur is behalve de kogelbaan ook de raaklijn l in $(0,0)$ aan deze baan getekend. De kogel wordt weggeschoten in de richting van l. Uit de mechanica is bekend dat een kogelbaan een deel van een parabool is. Een vergelijking van de kogelbaan is: $y = rx - \left(0{,}1 + 0{,}1r^2\right)x^2$. Hierbij is r een constante die afhangt van de hoek waaronder geschoten wordt.

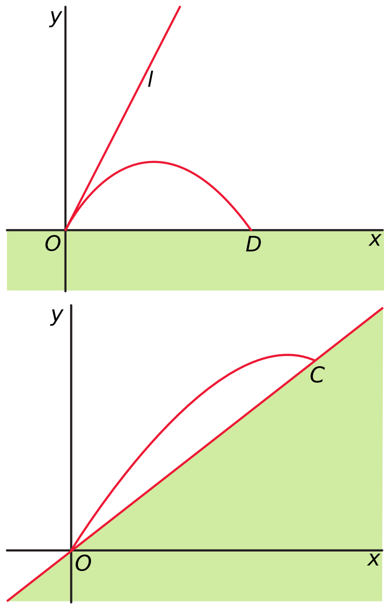
a De richtingscoëfficiënt van l is gelijk aan r. Toon dit aan.

b Er geldt: $OD = \frac{10r}{1+r^2}$. Toon dit aan.

c Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van r de afstand maximaal is.

d Veronderstel dat de kogel niet op een horizontaal terrein wordt afgeschoten, maar op een hellend terrein met richtingscoëfficiënt 1. Zie de onderste figuur. Het hangt van r af waar de kogel op het terrein neerkomt. Dit punt noemen we C. De x-coördinaat van punt C is $\frac{10(r-1)}{1+r^2}$. Bereken de maximale lengte van OC in twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen wiskunde B vwo 2003, tweede tijdvak)



Figuur 7.9

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

www.math4all.nl