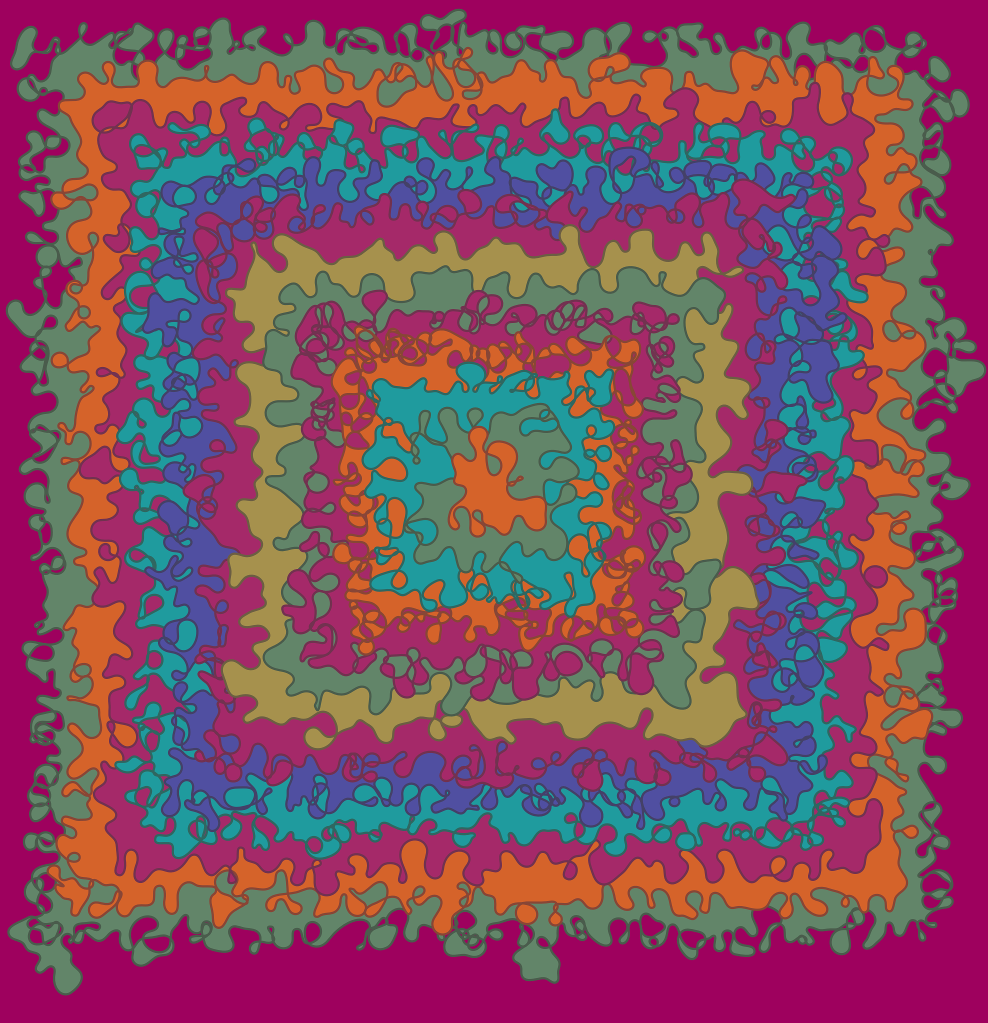
Wiskunde B

5 VWO

Katern 1

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Afgeleide functies

1.1 Het begrip afgeleide

Inleiding

In de zeventiende eeuw vond Stevin de zeilwagen uit. Je kunt er snelheidsveranderingen mee bestuderen. Bij **Veranderingen** heb je leren werken met differentiequotiënten en differentiaalquotiënten. Daarmee geef je de verandering van de functiewaarden, de helling van een grafiek, weer. Je leert ook de notatie met een limiet voor het vinden van de *afgeleide functie* van een functie f, het differentiaalquotiënt voor willekeurige x. Die afgeleide heeft als grafiek de hellingsgrafiek van de functie, waaruit je eigenschappen van f kunt afleiden.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide (het differentiaalquotiënt) in een punt bepalen;
- de afgeleide functie (hellingfunctie) bepalen.

Voorkennis

- werken met differentiequotiënten van een functie op een interval;
- werken met differentiaalquotiënten van een functie bij een bepaalde invoerwaarde.

Verkennen

Opgave V1

Met een zeilwagen die Stevin in de zeventiende eeuw uitvond kun je veranderingen van de snelheid bestuderen.

In deze opgave wordt zo'n zeilwagen klaargemaakt, de zeilen worden gehesen. De zeilwagen gaat steeds sneller, er staat een flinke wind. Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s in meter de formule $s = 1{,}2t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden.

Figuur 1.2

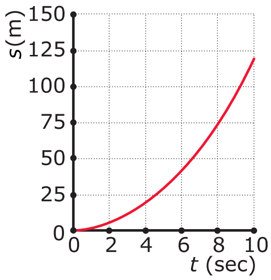
a Hoeveel m heeft de zeilwagen na 5 s afgelegd en hoe snel rijdt hij dan?

b Kun je een formule opstellen voor de snelheid v in m/s van de zeilwagen als functie van t?

Uitleg

Bekijk de grafiek van de afstand die een zeilwagen heeft afgelegd. Er geldt $s(t) = 1{,}2t^2$.
Daarbij is s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconden. De wagen gaat steeds sneller rijden.
De gemiddelde snelheid over de eerste vier seconden bereken je met het differentiequotiënt:

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot 4^2 - 1{,}2 \cdot 0^2}{4-0} = \frac{19{,}2}{4} = 4{,}8$ m/s.



Figuur 1.3

Omdat de wagen steeds sneller gaat, zal de snelheid op $t = 4$ hoger zijn dan de gemiddelde snelheid over de eerste vier seconden. Benader de snelheid op $t = 4$. Gebruik hierbij het differentiequotiënt.

Bekijk de applet

Neem het interval $[4,4+h]$.
Het differentiequotiënt op dat interval is (mits $h \neq 0$):

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot (4+h)^2 - 1{,}2 \cdot 4^2}{4+h-4}$$
$$= \frac{9{,}6h + 1{,}2h^2}{h} = 9{,}6 + 1{,}2h$$

Als h de waarde 0 nadert, dan nadert $9{,}6+1{,}2h$ de grenswaarde 9,6 m/s.
Deze grenswaarde is de snelheid op $t=4$. Met andere woorden: de grenswaarde is de limiet van de gemiddelde snelheid op $[4,4+h]$ als h naar 0 nadert.
Dit kun je schrijven als:

$$s'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{1{,}2 \cdot (4+h)^2 - 1{,}2 \cdot 4^2}{4+h-4} = \lim_{h \to 0} \frac{9{,}6h + 1{,}2h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (9{,}6 + 1{,}2h) = 9{,}6$$
m/s.

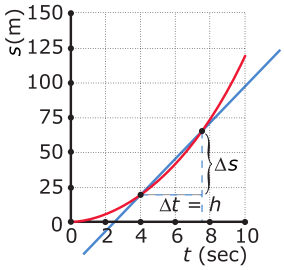
$s'(4)$ wordt ook wel genoteerd als $\left[\frac{ds}{dt}\right]_{t=4}$

Dit is:

- het differentiaalquotiënt voor $t=4$
- het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek voor $t=4$
- de verandering van de afstand per tijdseenheid in meter per seconde op $t=4$
- de afgeleide waarde op $t=4$

In dit geval is $s'(4)$ ook de snelheid van de wagen op $t=4$, omdat s de afgelegde afstand over tijd weergeeft.

Door de dy/dx-functie van de grafische rekenmachine te gebruiken kun je de helling ook bepalen.
Hoe dit moet, zie je in het **Practicum**.



Figuur 1.4

Opgave 1

Voor een versnellende zeilwagen geldt: $s(t) = 1{,}2t^2$.
Hierin is t de tijd in seconde en s de afgelegde afstand in meter.

a Bereken de gemiddelde snelheid over de eerste vijf seconden.

b Bereken het differentiaalquotiënt voor $t=5$ door de limiet te nemen van het differentiequotiënt op het interval $[5,5+h]$ als h naar 0 gaat.

c Waarom geeft het differentiaalquotiënt voor $t=5$ de snelheid van de wagen op dat tijdstip?

Opgave 2

Voor de afgelegde afstand a van een versnellende zeilwagen in meter geldt: $s=1{,}2t^2$ waarin t de tijd in seconden is.

a Je kunt zelf een formule afleiden voor de snelheid als functie van t. Stel eerst het differentiequotiënt op het interval $[t,t+h]$ op.

b Als h de waarde 0 nadert, krijg je de snelheid voor een willekeurige waarde van t. Geef een formule voor de snelheid als functie van t.

c De functie die je hebt gevonden heet de afgeleide van $s(t)$.
Welke betekenis heeft $s'(5)$ in dit verband?

A. $s'(5)$ is de gemiddelde snelheid in de eerste 5 seconden;
B. $s'(5)$ is de afgelegde weg in de eerste 5 seconden;
C. $s'(5)$ is de snelheid op tijdstip $t = 5$.

d Hoe groot is $s'(5)$?

e Op welk tijdstip rijdt de zeilwagen 50 km/h?

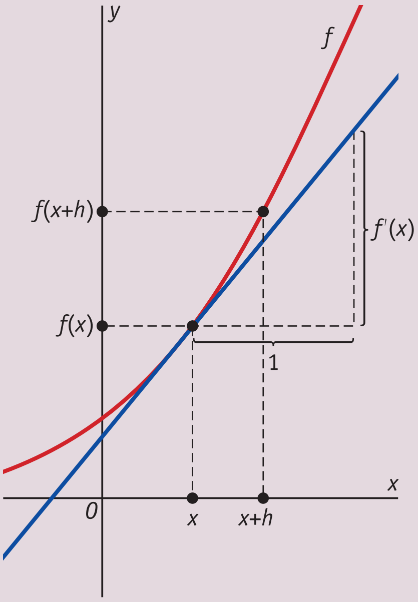
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Het hellingsgetal van de grafiek van een functie f voor $x = a$ bereken je als volgt:

- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[a,a + h]$.
- Laat dan h steeds dichter de waarde 0 naderen.
- Bekijk of dit differentiequotiënt een bepaalde grenswaarde, een limiet nadert.
- Als dit zo is, is deze grenswaarde het **differentiaalquotiënt** of de **afgeleide waarde** voor $x = a$.



Figuur 1.5

Je kunt dit noteren als:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

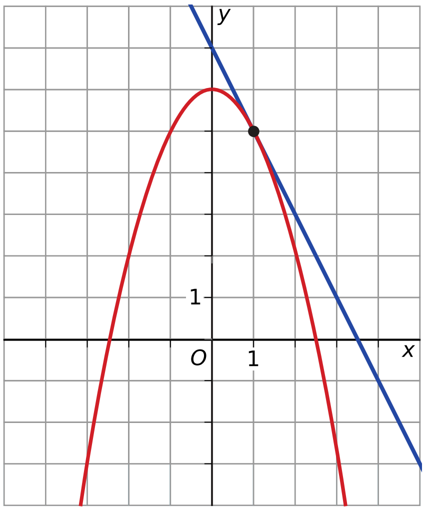
Voor $f'(a)$ wordt ook wel de notatie $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$ gebruikt.

Doe je dit voor willekeurige x, dan heet $f'(x)$ de **afgeleide (functie)**. De grafiek van f' is de hellingsgrafiek van f.

$f'(a) = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$ stelt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = a$ voor.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = 6 - x^2$. Bereken zonder de grafische rekenmachine het differentiaalquotiënt van deze functie voor $x = 3$. Controleer het antwoord met de grafische rekenmachine. Stel met behulp van het differentiaalquotiënt een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.



Figuur 1.6

Antwoord

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{6-(1+h)^2-(6-1^2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-2h-h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (-2-h) = -2
\end{aligned}
$$

Controle met de grafische rekenmachine: voer $y_1 = 6 - x^2$ in en bepaal $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1}$.

Voor de vergelijking van de raaklijn geldt: $y = ax + b$.
Het differentiaalquotiënt van f voor $x = 1$ is het hellingsgetal van de raaklijn.
$f'(1) = -2$, dus de vergelijking heeft de vorm $y = -2x + b$.
Omdat $f(1) = 6 - 1^2 = 5$, gaat de raaklijn door het raakpunt $(1,5)$.
Dit punt vul je in de vergelijking van de raaklijn in: $5 = -2 \cdot 1 + b$ geeft $b = 7$.

De vergelijking van de raaklijn is: $y = -2x + 7$.

Opgave 3

Bekijk de in **Voorbeeld 1** gegeven functie f.

a Bereken de hellingswaarde van de grafiek van f voor $x = -2$ met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[-2, -2 + h]$. Controleer het antwoord met de grafische rekenmachine.

b Stel de formule van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = -2$ op.

c Stel de formule van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ op.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cdot 3^x$.

a Bereken in twee decimalen het differentiaalquotiënt voor $x = -1$ met behulp van de grafische rekenmachine.

b Stel de formule van de raaklijn op aan de grafiek van f voor $x = -1$. Rond de getallen in de formule af op één decimaal.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = x^3$. Stel het functievoorschrift van de afgeleide van deze functie op en stel met behulp daarvan een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = -1$.

Antwoord

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 3x^2$$

De vergelijking van de raaklijn heeft de vorm $y = ax + b$.

Nu is $f'(-1) = 3$ en $f(-1) = -1$.

Dus $a = 3$ en de vergelijking wordt $y = 3x + b$.

De raaklijn gaat door het punt $(3, -1)$, dus: $-1 = 3 \cdot -1 + b$ en $b = 2$.

De vergelijking van de raaklijn is: $y = 3x + 2$.

Opgave 5

Bekijk de in **Voorbeeld 2** gegeven functie f.

a Laat zelf zien, dat $f'(x) = 3x^2$.

Je kunt de hellingsgrafiek (de afgeleide dus) met de grafische rekenmachine benaderen met $f'(x) = (f(x + 0{,}001) - f(x))/(0{,}001)$.

b Laat zien, dat de grafiek van deze benadering van $f'(x)$ ongeveer overeen komt met die van de gevonden afgeleide $f'(x) = 3x^2$.

c Stel de formule van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ op.

d Stel de formule van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ op.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 4x$.

a Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van f.

b Bereken met behulp van het functievoorschrift bij a de hellingwaarden van de grafiek van f voor de nulpunten van f.

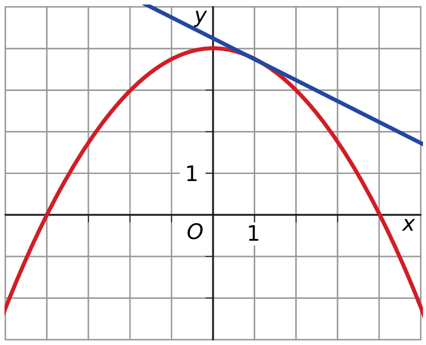
c Bereken algebraïsch het nulpunt van f'. Geef ook aan welke betekenis deze x-waarde voor de grafiek van f heeft.

d De grafiek van f heeft precies één punt waarop de helling 2 is. Bereken de coördinaten van dit punt.

Verwerken

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$ met domein $[-5{,}5]$. Stel met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[1{,}1 + h]$ de formule op van de raaklijn aan de grafiek door het punt met $x = 1$.



Figuur 1.7

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 6 - 0{,}5x^2$.

a Geef met behulp van het differentiequotiënt op $[x, x + h]$ het functievoorschrift van de afgeleide van $f(x)$.

b De lijn met vergelijking $y = -2x + 8$ lijkt de grafiek te raken. Laat met een berekening zien dat dit inderdaad het geval is.

Opgave 9

Een functie heeft als voorschrift $f(x) = ax^2$.
Bepaal de afgeleide van deze functie.

Opgave 10

Een bepaalde autofabrikant maakt als enige een kleine stadsauto. Voor de totale opbrengst van de verkoop van die auto geldt de opbrengstfunctie $TO = 900q - 60q^2$ waarin TO wordt uitgedrukt in duizenden euro per jaar en q de geplande productieomvang in honderdtallen per jaar voorstelt. Er wordt van uitgegaan dat alle geproduceerde auto's ook worden verkocht.

a Stel met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[q, q + h]$ een functievoorschrift op voor de afgeleide van deze opbrengstfunctie.

b Welke betekenis heeft $TO'(5)$ voor de opbrengstfunctie?

c De autofabrikant wil onderzoeken hoe groot zijn productieomvang moet zijn om een maximale opbrengst te krijgen. Bereken deze productieomvang met behulp van de afgeleide. Controleer het antwoord met de grafische rekenmachine.

Opgave 11

Gegeven de functie f met voorschrift $f(x) = -0{,}06x^4 + x^2 - 1$ op het interval $[-5{,}5]$.

a Schets de bijbehorende hellingsgrafiek.

b Controleer met de grafiek van de afgeleide van f of f bij $x = 3$ een maximum heeft en zo niet of het maximum dan vlak voor of vlak na $x = 3$ ligt.

c Controleer met de grafiek van de afgeleide of f bij $x = 1{,}5$ toenemend of afnemend aan het stijgen is.

Toepassen

Opgave 12: Vrije val

Voor een lichaam in vrije val (bijvoorbeeld een parachutespringer voordat hij zijn valscherm opent) geldt bij benadering $s(t) = 0{,}5g \cdot t^2$ waarin s de afgelegde afstand is in meter na t seconden. g is een constante, de gravitatieconstante van ongeveer 9,8 m/s^2.

a Hoeveel bedraagt de gemiddelde snelheid gedurende de eerste 10 seconden vrije val?

b De snelheid na 10 seconden vrije val is groter dan de gemiddelde snelheid over de eerste 10 seconden. Laat dit door middel van een berekening zien.

c Stel een formule op voor de snelheid v als functie van t.

d Na hoeveel seconden vrije val beweegt het lichaam met een snelheid van 120 km/h?

Opgave 13: Afbraak van giftige stof in water

De hoeveelheid van een bepaalde giftige stof in het water van een meertje wordt op den duur minder: de stof breekt op natuurlijke wijze af. Voor die hoeveelheid geldt $H(t) = 20 \cdot 0{,}8^t$ waarin H de hoeveelheid in milligram per liter is en t de tijd (in dagen) is, die is verstreken sinds de stof in het water terechtkwam.

a Bereken $H'(0)$ en $H'(4)$.

Wat is de betekenis van deze waarden voor de hoeveelheid giftige stof in het water?

b De grafiek van H heeft een asymptoot. Geldt dit ook voor de grafiek van H' en wat betekent dat in deze situatie?

c Maak met behulp van de grafische rekenmachine een grafiek van de verhouding tussen de afgeleide van H en H zelf, $\frac{H'(x)}{H(x)}$.

Wat valt je op? Wat betekent dit?

d Geef een formule voor $H'(x)$ als functie van $H(x)$ en als functie van x en bereken hiermee nogmaals $H'(0)$ en $H'(4)$.

Testen

Opgave 14

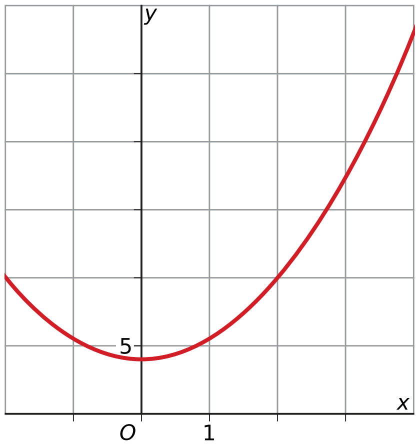
Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 1{,}5x^2 + 4$ op het interval $[-2{,}4]$.

a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op dit interval.

b Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide $f'(x)$.

c Bereken de afgeleide van $f(x)$ voor $x = 2$.

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.



Figuur 1.8

Opgave 15

De kosten K (in euro) voor de productie van q liter van een bepaalde chemische stof bedragen $K(q) = 0{,}1q^2 + 0{,}7q + 12$.

a Met behulp van het differentiequotiënt over het interval $[q, q+h]$ kun je een formule opstellen voor $K'(q)$. Stel die formule op, laat duidelijk zien hoe je te werk gaat.

b Hoe kun je aan de gevonden afgeleide zien, dat de kosten blijven stijgen bij toenemende q?

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het bepalen van een differentiaalquotiënt.

- **Veranderingen, differentiëren en de TI84**
- **Veranderingen, differentiëren en de TInspire**
- **Veranderingen, differentiëren en de Casio**
- **Veranderingen, differentiëren en de HPprime**
- **Veranderingen, differentiëren en de NumWorks**

1.2 Differentiëren

Inleiding

Je hebt gezien dat bij een functie vaak een afgeleide (functie) is op te stellen.

Die afgeleide zegt iets over de veranderingen van de grafiek van de functie. En dus over de helling van die functie.
Het **differentiëren** is een handige techniek om afgeleiden te vinden.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van een functie bepalen met behulp van differentieerregels;
- de hellingswaarde bepalen met de afgeleide;
- bepalen waar de grafiek een bepaalde hellingswaarde heeft.

Voorkennis

- met behulp van een differentiequotiënt de afgeleide (of hellingsfunctie) van een functie bepalen;
- een hellingsfunctie gebruiken om de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek op te stellen.

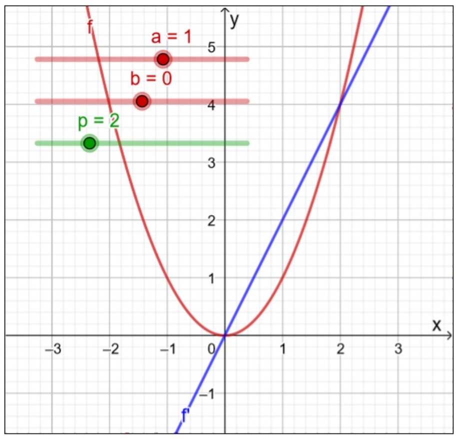
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

In de applet zie je (rood) de grafiek van functies f van de vorm $f(x) = a \cdot x^p + b$.
In blauw zie je de grafiek van de bijbehorende hellingsfunctie, de afgeleide.

Stel je in $a = 1$, $b = 0$ en $p = 2$ dan heb je de grafiek van $f(x) = x^2$.



Figuur 2.2

a Ga na, dat dan de gevonden hellingsgrafiek overeen komt met de grafiek van $y = 2x$.
Controleer dat je deze afgeleide ook krijgt door het differentiaalquotiënt op $[x, x+h]$ te berekenen.

b Bekijk ook andere kwadratische functies van de vorm $f(x) = ax^2 + b$. Probeer vooraf te bedenken welk voorschrift bij de hellingsfunctie zou moeten passen. En controleer dan of je gelijk hebt.
Doe hetzelfde voor derdegraadsfuncties van de vorm $f(x) = ax^3 + b$.
En voor functies van de vorm $f(x) = ax^4 + b$ en $f(x) = ax^5 + b$.
Werk bijvoorbeeld in tweetallen en bedenk een manier om de afgeleide te vinden zonder met differentiequotiënten te werken.

Uitleg

Het differentiaalquotiënt van een machtsfunctie berekenen kost vaak veel tijd. Maar het kan sneller.

De afgeleide van de functie $f(x) = ax^2$ is:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2axh + ah^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2ax + ah) = 2ax$$

De afgeleide van $f(x) = ax^2$ is $f'(x) = 2ax$ voor elke waarde van a.
Op dezelfde manier blijkt: de afgeleide van $f(x) = ax^3$ is $f'(x) = 3ax^2$ voor elke waarde van a. Misschien zie je een regelmaat.
De afgeleide van $f(x) = ax^n$ is $f'(x) = nax^{n-1}$ voor elke waarde van a.

Het gebruiken van een regel om een afgeleide te bepalen heet differentiëren. Deze specifieke regel heet de machtsregel.

Uit deze regel volgt dat voor de constante functie $f(x) = c$ de afgeleide $f'(x) = 0$ is. Dit heet de constanteregel.

Op vergelijkbare wijze is er een regelmaat te vinden in de afgeleide bepalen van een som van functies. Die regel zegt dat je die term voor term kunt differentiëren. Voor bijvoorbeeld $f(x) = 0{,}1x^3 - 3x^2 + 25x + 10$ geldt:
$f'(x) = 3 \cdot 0{,}1x^{3-1} - 2 \cdot 3x^{2-1} + 1 \cdot 25x^{1-1} + 0 = 0{,}3x^2 - 6x + 25$

De afgeleide van de som van x-machten is de som is van de afzonderlijke afgeleiden. Deze regel heet de somregel.

Opgave 1

De afgeleide van $f(x) = cx^3$ bereken je door het differentiequotiënt op het interval $[x, x+h]$ te bepalen en h naar 0 te laten naderen.

a Toon aan dat voor de afgeleide van $f(x) = cx^3$ geldt $f'(x) = 3cx^2$.

b Bepaal met behulp van deze algemene regel voor een derdemachtsfunctie de afgeleide van $f(x) = 5x^3$, $g(x) = -2\frac{1}{5}x^3$ en $h(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

c Bereken met de algemene machtsregel en de somregel de afgeleide van $h(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x + 10$.

d Bewijs de somregel door aan te tonen dat de afgeleide van $f(x) = u(x) + v(x)$ is $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
Gebruik hierbij de definitie van een afgeleide:
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Opgave 2

Bepaal de afgeleide door differentiëren.

a $f(x) = 12x^5$

b $g(x) = 12x^5 + 20$

c $h(x) = 12x^5 + 20x^3$

d $k(x) = 12x^5 + 20x^3 + 5x^2 - 10x + 15$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De afgeleide van een functie $y = f(x)$ is:

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Hieruit zijn algemene regels af te leiden waarmee je de afgeleide sneller kunt vinden. Je noemt ze **differentieerregels**. Het toepassen ervan heet **differentiëren**.

- De **constanteregel** is de differentieerregel voor constante functies.
  Als $f(x) = c$ dan geldt: $f'(x) = 0$.
- De **machtsregel** is de differentieerregel voor machtsfuncties.
  Als $f(x) = cx^n$ dan geldt voor elke waarde van c en voor gehele positieve waarden van n: $f'(x) = ncx^{n-1}$.

Bewijs 1

Deze stelling geldt voor $n = 1$, want $f(x) = cx^1$ geeft $f'(x) = c \cdot 1x^{1-1} = cx^0 = c$. (Immers dan is f een lineaire functie met hellingsgetal c.)

Neem nu eens aan dat de formule voor een bepaalde n geldt. En stel dat je kunt aantonen dat daaruit volgt dat hij dan ook voor $n+1$ geldt. Dan geldt hij voor alle gehele positieve waarden van n, want uit de geldigheid voor $n = 1$ volgt dan die voor $n = 1 + 1 = 2$ en daaruit die voor $n = 2 + 1 = 3$, enzovoort...

Dus moet worden aangetoond: uit de regel geldt voor n volgt dat hij geldt voor $n + 1$.
Je neemt dus aan dat als $f(x) = cx^n$ dan is $f'(x) = ncx^{n-1}$, ofwel:

$\lim_{h \to 0} \frac{c(x+h)^n - cx^n}{h} = ncx^{n-1}$

Nu naar $n + 1$.
Aangetoond moet worden: als $f(x) = cx^{n+1}$ dan is
$f'(x) = (n+1)cx^n$.

Dat doe je zo:

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h)^{n+1} - cx^{n+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) \cdot c(x+h)^n - x \cdot cx^n}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(x \cdot c(x+h)^n - x \cdot cx^n\right) + h\left(c(x+h)^n\right)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h)^n - cx^n}{h} \cdot x + c(x+h)^n = ncx^{n-1} \cdot x + cx^n =$
$ncx^n + cx^n = (n+1)cx^n$

Je ziet dat je gebruik moet maken van de geldigheid van de stelling voor n.
Daaruit volgt dus de geldigheid voor $n + 1$.

Omdat de stelling geldig is voor $n = 1$, is hij dat nu ook voor $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$
Deze manier van bewijzen noem je wel het **dominoprincipe**: als de eerste steen omvalt, vallen alle daarop volgende stenen ook. In de wiskunde heet deze manier van bewijzen: **de bewijsmethode met volledige inductie**. Daarbij bewijs je een stelling voor een

bepaalde gehele waarde van n. Vervolgens bewijs je dat vanuit de geldigheid voor een willekeurige n ook de geldigheid voor $n+1$ volgt. Als dat lukt, heb je de stelling bewezen voor elke gehele n vanaf de gehele waarde waarmee je begon. En dat is ons hier gelukt...

- De **somregel** is de differentieerregel voor de afgeleide van de som (of het verschil) van twee functies. Die afgeleide is de som van de afgeleiden van die functies, dus als $f(x) = u(x) + v(x)$ dan geldt: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Bewijs 2

Gegeven is $f(x) = u(x) + v(x)$.
De afgeleide is:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)+v(x+h)-(u(x)+v(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right) + \lim_{h \to 0} \left(\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right) \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$
De somregel geldt ook voor het verschil van twee functies. Neem dan $-v(x)$ in plaats van $v(x)$. Het bewijs is verder vergelijkbaar.

Er zijn voor de afgeleide functie van $y = f(x)$ meerdere notaties: $f'(x)$, of $y'(x)$, of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, of $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$.

Voorbeeld 1

Bepaal de afgeleide van de functie $f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x - 100$.

Antwoord

De afgeleide is:

$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} + 4 \cdot 2x^{2-1} - 12 \cdot 1x^{1-1} - 0 = 3x^2 + 8x - 12$

Opgave 3

Bepaal de afgeleide van de volgende functies door te differentiëren met behulp van de differentieerregels.

a $f(x) = 10x^3 - 60x + 100$

b $f(x) = 15 + 2x - 5x^2 - 10x^4$

c $f(x) = x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right)$

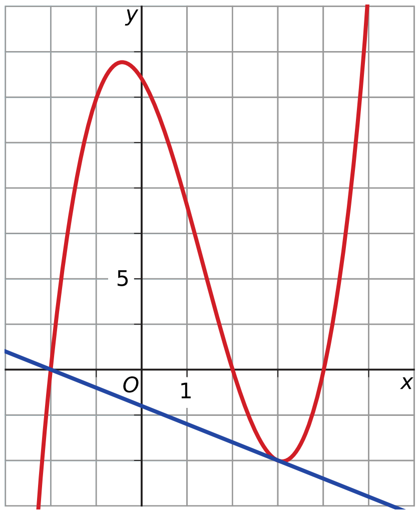
d $f(x) = \left(x^3 - 4\right)(2 - 3x)$

Opgave 4

De constante functie $f(x) = c$ kun je ook beschouwen als een machtsfunctie. Ga na dat dan ook de machtsregel geldt.

Voorbeeld 2

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van de functie $g(x) = \left(x^2 - 4\right)(x - 4)$ voor $x = 3$.



Figuur 2.3

Antwoord

Voor de vergelijking van de raaklijn heb je het hellingsgetal $g'(3)$ nodig.
Deze functie is geschreven als het product van twee functies en niet als som. Schrijf het functievoorschrift eerst als een som (verschil) van machtsfuncties en constante functies. Haakjes wegwerken geeft:
$g(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

De afgeleide is:
$g'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 4x^1 - 1 \cdot 4x^0 + 0 = 3x^2 - 8x - 4$

De vergelijking van de raaklijn heeft de vorm $y = ax + b$.

$g'(3) = -1$
$g(3) = -5$
$a = -1$, dus de vergelijking is $y = -x + b$.

De raaklijn gaat door het punt $(3, -5)$, dat vul je in de vergelijking in:

$$\begin{aligned} -5 &= -1 \cdot 3 + b \\ b &= -2 \end{aligned}$$

De vergelijking van de raaklijn is: $y = -x - 2$.

Opgave 5

Gegeven is de functie $y = \left(x^2 - 4\right)(x - 6)$.

a Een functievoorschrift in deze vorm is handig als je de nulpunten van de functie wilt bepalen. Bereken die nulpunten.

b Bereken de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ van deze functie.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 2$.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie g met voorschrift: $g(x) = 0{,}5x^3 - 3x - 1$.
Bereken de punten A en B van de grafiek van g waarin de helling gelijk is aan 3.

Antwoord

Differentieer de functie: $g'(x) = 3 \cdot 0{,}5x^2 - 1 \cdot 3x^0 + 0 = 1{,}5x^2 - 3$.

De helling van de grafiek van g is 3 wanneer $g'(x) = 3$:

$$\begin{aligned} 1{,}5x^2 - 3 &= 3 \\ 1{,}5x^2 &= 6 \\ x^2 &= 4 \\ x &= -2 \vee x = 2 \end{aligned}$$

De bijbehorende y-coördinaten zijn $g(-2) = 1$ en $g(2) = -3$.
De gevraagde punten zijn $A(-2{,}1)$ en $B(2, -3)$.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 10x - 35$.

a Bereken met behulp van de afgeleide het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

b Er zijn punten op de grafiek van f waarin de helling de waarde 10 heeft.
Bereken de coördinaten van die punten.

Verwerken

Opgave 7

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = x^3 - 4x$

b $s(t) = 60t - 4{,}9t^2$

c $H(t) = 2(t^2 - 4)$

d $y = 5 - (x-3)^2$

e $W = (-3t^4 + t)(t^5 - 2t^3) + 3t^9$

Opgave 8

a Gegeven is $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2$.
Bereken met behulp van de afgeleide het hellingsgetal van f voor $x = 2$.

b Gegeven is $W(q) = -q^3 + 3q^2 + 3q + 6$.
Bereken door differentiëren het differentiaalquotiënt van W voor $q = -1$.

c Gegeven is $v(t) = t(t-1)^2$. Bereken $v'(3)$.

d Gegeven is $g(x) = (1-x)^3$.
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan g in $x = -2$ is gelijk aan -27. Toon dit aan.

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$

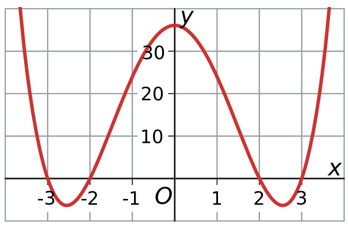
a Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken het snijpunt van de raaklijnen aan de grafiek van f voor $x = -2$ en voor $x = 2$.

d Los exact op: $f'(x) = 0$

e Wat betekent $f'(x) = 0$ voor de grafiek van f?



Figuur 2.4

Opgave 10

Differentieer.

a $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

b $f(x) = ax^3 + b^2$

c $g(p) = 3{,}4p^2q - 7pq + q - 4$

d $g(q) = 3{,}4p^2q - 7pq + q - 4$

e $K(x) = (3x^2 - 2a)(ax - 1)$

Opgave 11

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x - 24$. Op de grafiek van f ligt punt A met $x_A = -6$.

a Bereken algebraïsch het hellingsgetal van de grafiek van f in het snijpunt met de y-as.

b Bereken de coördinaten van de toppen met behulp van de afgeleide.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn door punt A op de grafiek van f.

d Bereken de punten van de grafiek van f waarvoor het hellingsgetal gelijk is aan 6.

Toepassen

Opgave 12: De baan van een kogel

Als een voorwerp onder een bepaalde hoek wordt afgeschoten, dan is zijn baan parabolisch als je geen rekening hoeft te houden met de luchtweerstand. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de grafiek van de functie $h(x) = 2{,}4 - 0{,}01(x - 12)^2$. Hierin is h de hoogte van het afgeschoten voorwerp boven de grond in meter en x de afstand over de grond tot recht onder het afgeschoten voorwerp in meter.

a Op welke hoogte werd het voorwerp afgeschoten?

b Bereken $h'(0)$.

c Wat betekent dit getal voor de kogelbaan?

d Bereken het punt van de kogelbaan waarin $h'(x) = 0$.

e In het hoogste punt van de kogelbaan is de afgeleide nul. Toch beweegt de kogel daar met een zekere snelheid. Kun je dit verklaren?

Opgave 13: Gemiddelde totale kosten

Voor de productiekosten van een bepaald artikel geldt: $TK = 1200 + 0{,}2q^2$. Hierin is q het aantal geproduceerde eenheden van dat artikel en stelt TK de totale kosten in euro voor. De productiekosten per eenheid worden gegeven door $GTK = \frac{TK}{q}$. Je noemt dit wel de gemiddelde totale kosten.

a Druk de gemiddelde totale kosten uit in q.

b Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van GTK bekijken. Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van GTK? Welke economische betekenis heeft deze asymptoot?

c Je kunt bij deze functie (nog) geen afgeleide bepalen. Maar je kunt er wel een (benadering van de) hellingsgrafiek bij tekenen met je grafische rekenmachine. Teken die hellingsgrafiek en bepaal met behulp daarvan bij welke productie de gemiddelde totale kosten zo laag mogelijk zijn.

d Welke waarde benadert de helling van de grafiek van GTK als de productie heel erg groot is? En welke betekenis heeft dat voor de productiekosten per eenheid?

Testen

Opgave 14

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = x^6 + 8x - 12$

b $f(x) = (2x+1)^2$

c $f(a) = 12a - a^2(b-a)$

Opgave 15

Op de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}5x(5-x)(x+3)$ liggen de punten $A(-1,-6)$ en $B(1,8)$.

a Bereken het hellingsgetal van deze functie in het punt A met behulp van de afgeleide.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt B.

c Er zijn twee punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0. Bereken exact de x-coördinaten van die punten.

d Er zijn twee punten op de grafiek van f die een raaklijn hebben evenwijdig aan de lijn $l(x) = -2{,}5x + 3$. Bereken exact de x-coördinaten van die punten.

Opgave 16

y is een functie van x waarvoor geldt: $y = x^3 - 25{,}5x^2 + 180x + 120$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Deze afgeleide heeft twee nulwaarden. Welke betekenis hebben die nulwaarden voor de functie?

c Bereken de nulwaarden van de afgeleide y'.

d Voor welke waarden van x is de functie dalend?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de machtsregel en de somregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.3 Transformaties en afgeleiden

Inleiding

Je hebt gezien, hoe handig differentiëren is bij het berekenen van hellingsgetallen. Alleen kun je dit nog maar op een beperkt aantal functies toepassen. Eigenlijk alleen op functies die bestaan uit machtsfuncties die je bij elkaar optelt (of van elkaar aftrekt).

Je gaat de techniek van het differentiëren uitbreiden naar transformaties van functies.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- het differentiëren van functies van de vorm $f(x)+c$, $f(x+c)$, $c \cdot f(x)$ en $f(cx)$;
- hellingswaarden benaderen met behulp van transformaties.

Voorkennis

- op een gegeven functie de vier basistransformaties toepassen, het bijpassende functievoorschrift opschrijven en de bijpassende grafiek tekenen;
- aan een gegeven functie herkennen uit welke functie hij door transformatie kan ontstaan en welke transformaties dit dan zijn;
- functies differentiëren met de machtsregel, de constanteregel en de somregel.

Verkennen

Opgave V1

De functie g en zijn afgeleide g' zijn transformaties van de standaardfunctie $f(x) = x^2$ en zijn afgeleide $f'(x) = 2x$.

Bekijk de applet

Maak met de applet of op je grafische rekenmachine de grafieken van de functies g en g' en vergelijk die met de grafiek van $f(x) = x^2$ en zijn hellingsgrafiek $f'(x)$.

- $g_1(x) = (x-4)^2$
- $g_2(x) = x^2 - 3$
- $g_3(x) = 1{,}5 \cdot x^2$
- $g_4(x) = (0{,}5x)^2$
- $g_5(x) = 1{,}5(x-4)^2 - 3$

Leg uit hoe steeds de afgeleide van g ontstaat uit die van f.

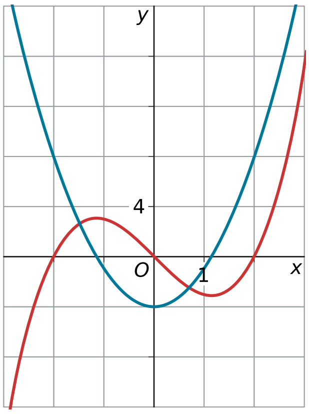
Uitleg

Bekijk de applet.

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 4x$ (rood) samen met de afgeleide $f'(x) = 3x^2 - 4$ (blauw).

Onderzoek wat er met de afgeleide gebeurt als je op de gegeven functie een verschuiving of een vermenigvuldiging toepast. Ga met de grafische rekenmachine de volgende stappen na.

- Als je de grafiek van f met 2 ten opzichte van de x-as transleert, ontstaat de grafiek van $f_1(x) = f(x) + 2$. Omdat de grafiek omhoogschuift, veranderen de x-waarden van de punten niet en de hellingen ook niet. De afgeleide van $f(x) + 2$ is dus dezelfde als die van f.
  Kortweg: als $f_1(x) = f(x) + 2$ dan is $f'_1(x) = f'(x)$.
- Als je de grafiek van f met 2 vermenigvuldigt ten opzichte van de x-as, worden alle functiewaarden 2 keer zo groot en krijg je $f_2(x) = 2 \cdot f(x)$. Alle hellingsgetallen worden ook 2 keer zo groot.
  Kortweg: als $f_2(x) = 2 \cdot f(x)$ dan is $f'_2(x) = 2 \cdot f'(x)$.
- Als je de grafiek van f met -2 ten opzichte van de y-as transleert, ontstaat de grafiek van $f_3(x) = f(x+2)$. Omdat de grafiek naar links verschuift, veranderen de hellingen niet, maar de punten worden wel 2 naar links geschoven. De afgeleide wordt dus $f'(x+2)$.
  Kortweg: als $f_3(x) = f(x+2)$ dan is $f'_3(x) = f'(x+2)$.
- Als je de grafiek van f met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigt ten opzichte van de y-as, krijg je de grafiek van $f_4(x) = f(2x)$. De hellingswaarden worden niet alleen 2 keer zo groot, maar ze horen bij x-waarden die de helft kleiner zijn.
  Kortweg: als $f_4(x) = f(2x)$ dan is $f'_4(x) = 2 \cdot f'(2x)$.



Figuur 3.2

Opgave 1

Voer de transformaties die in de **Uitleg** staan beschreven uit op de grafiek van $f(x) = x^3 - 4x$ en haar afgeleide. Ga na dat je de resultaten vindt die daar zijn aangegeven.

Toon aan dat je op dezelfde resultaten komt wanneer je de functies van f_1, f_2, f_3 en f_4 uitschrijft en vervolgens differentieert.

Opgave 2

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}25x^4 - 4x^2$ samen met de grafiek van de afgeleide.

a Maak de grafieken van f en $g_1(x) = f(x) + 3$ met de grafische rekenmachine.
Welke afgeleide heeft g_1?

A. $g_1'(x) = f'(x)$
B. $g_1'(x) = f'(x) + 3$

b Maak de grafieken van f en $g_2(x) = 3 \cdot f(x)$ met de grafische rekenmachine.
Welke afgeleide heeft g_2?

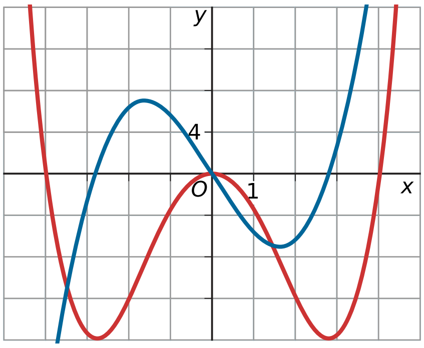
A. $g_2'(x) = f'(x)$
B. $g_2'(x) = 3 \cdot (f'(x))$

c Maak de grafieken van f en $g_3(x) = f(x+3)$ met de grafische rekenmachine.
Welke afgeleide heeft g_3?

A. $g_3'(x) = f'(x)$
B. $g_3'(x) = f'(x+3)$

d Maak de grafieken van f en $g_4(x) = f(3 \cdot x)$ met de grafische rekenmachine.
Welke afgeleide heeft g_4?

A. $g_4'(x) = f'(3 \cdot x)$
B. $g_4'(x) = 3 \cdot (f'(3 \cdot x))$



Figuur 3.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Gegeven is de grafiek van een functie f met haar afgeleide f'.

- Pas je op de grafiek een translatie van c eenheden ten opzichte van de x-as toe, dan krijg je de grafiek van $f(x) + c$ met als afgeleide $f'(x)$.
  De afgeleide van $f(x) + c$ is $f'(x)$.
- Pas je op de grafiek een translatie van - c eenheden ten opzichte van de y-as toe, dan krijg je de grafiek van $f(x+c)$ met als afgeleide $f'(x+c)$.
  De afgeleide van $f(x+c)$ is $f'(x+c)$.
- Pas je op de grafiek een vermenigvuldiging met c ten opzichte van de x-as toe, dan krijg je de grafiek van $c \cdot f(x)$ met als afgeleide $c \cdot f'(x)$.
  Dus de afgeleide van $c \cdot f(x)$ is $c \cdot f'(x)$.
- Pas je op de grafiek een vermenigvuldiging met $\frac{1}{c}$ ten opzichte van de y-as toe, dan krijg je de grafiek van $f(c \cdot x)$ met als afgeleide $c \cdot f'(c \cdot x)$.
  De afgeleide van $f(c \cdot x)$ is $c \cdot f'(c \cdot x)$.

Bij het berekenen van hellingswaarden of differentiëren van ingewikkelde functies kunnen deze transformatieregels van pas komen.

Voorbeeld 1

De afgeleide van $f(x) = x^4$ is $f'(x) = 4x^3$.
De afgeleiden van functies die door transformatie uit f ontstaan zijn te herleiden uit de afgeleide van f. Doe dit voor de volgende functies:

- $f_1(x) = x^4 + 2$
- $f_2(x) = 2x^4$
- $f_3(x) = (x+2)^4$
- $f_4(x) = (2x)^4$

Antwoord

- Als $f_1(x) = x^4 + 2$ dan is $f'_1(x) = 4x^3$.
- Als $f_2(x) = 2x^4$ dan is $f'_2(x) = 2 \cdot 4x^3 = 8x^3$.
- Als $f_3(x) = (x+2)^4$ dan is $f'_3(x) = 4(x+2)^3$.
- Als $f_4(x) = (2x)^4$ dan is $f'_4(x) = 2 \cdot 4(2x)^3 = 8 \cdot (2x)^3 = 64x^3$.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.
Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

a $g(x) = (x-7)^4$

b $h(x) = (3x)^4$

c $j(x) = 3(2x)^4 + 1$

d $k(x) = 5 + 2(6-2x)^4$

Voorbeeld 2

De functie $H(t) = 2^t$ heeft voor $t = 1$ een hellingswaarde van $H'(1) \approx 1{,}386$.
Welke hellingswaarde heeft de functie $K(t) = -3 \cdot 2^{0{,}5t} + 10$ voor $t = 2$?

Antwoord

Merk eerst op dat $K(t) = -3 \cdot H(0{,}5t) + 10$. Voor de afgeleide geldt daarom: $K'(t) = 0{,}5 \cdot -3 \cdot H'(0{,}5t)$.

Dit geeft: $K'(2) = 0{,}5 \cdot -3 \cdot H'(1) \approx 0{,}5 \cdot -3 \cdot 1{,}386 = -2{,}079$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = 5(x-1)^3 + 4$.

a De grafiek van f is door transformatie te herleiden uit die van $g(x) = x^3$. Welke transformaties moet je dan toepassen?

b Ga na dat $g'(1) = 3$. Bereken met behulp hiervan $f'(2)$.

Opgave 5

De grafiek van de functie $f(x) = 8^x$ maak je door de grafiek van $g(x) = 2^x$ te vermenigvuldigen in de x-richting.

a Laat zien dat $f(x) = g(3x)$.

b De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 0$ is bij benadering $y = 0{,}69x + 1$. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Verwerken

Opgave 6

De volgende functies kunnen ontstaan door transformatie van een bijpassende basisfunctie. Bedenk telkens welke basisfunctie dat is en bepaal de afgeleide.

a $f(x) = 6(2x+3)^4$

b $g(x) = (x+2)^5 - 100$

c $s(t) = (2t+4)^3$

d $h(t) = 1 - 2(6-3t)^4$

Opgave 7

De afgeleide van $f(x) = 2^x$ is $f'(x) \approx 0{,}69 \cdot 2^x$. Van alle functies die kunnen ontstaan door transformatie uit f kun je hiermee de afgeleide bepalen.
Bepaal de afgeleide.

a $g(x) = 2^x - 5$

b $h(x) = 3 \cdot 2^x$

c $j(x) = 2^{x+4}$

d $k(x) = 2^{-3x}$

Opgave 8

Breng de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}5(x-2)^3 + 4$ met je grafische rekenmachine in beeld met de standaardinstellingen van het venster.

a De grafiek heeft een symmetriepunt. Welk punt is dat?

b Laat met behulp van de afgeleide zien waarom dit een symmetriepunt is.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn in het nulpunt van de grafiek van f.

Opgave 9

Plot de grafiek van de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$ en de grafiek van de standaardfunctie $g(x) = 2^x$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit die van g?

b De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 1$ is ongeveer $y = 1{,}38x + 0{,}62$. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = -1$.

c Waarom kun je $f'(1)$ niet vinden met behulp van $g'(1)$?

Opgave 10

Gegeven is een functie $f(x)$ met $f'(1) = 2{,}75$.
Bereken $g'(1)$ als $g(x) = f(3x-2)$.

Toepassen

'In de buurt' van een bekend punt met een bekende helling van een grafiek kun je andere **functiewaarden benaderen**. Je gebruikt daarbij de raaklijn aan de grafiek.

Gebruik de definitie van de afgeleide om $f(x+h)$ (de waarde van de functie in de buurt van x) vrij te maken.

Uit $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ volgt $h \cdot f'(x) \approx f(x+h) - f(x)$ en dus

$f(x+h) \approx f(x) + h \cdot f'(x)$.

Dit betekent dat $f(x+h)$ kan worden benaderd vanuit $f(x)$ met behulp van $f'(x)$. Daarvoor zijn alleen een vermenigvuldiging en een optelling nodig. Natuurlijk werkt het alleen voor waarden van h die 'heel dicht' bij 0 liggen.

Neem bijvoorbeeld bij $f(x) = -x^3 + 4x$.
Nu kun je $f(1{,}001)$ benaderen vanuit $f(1) = 3$ met behulp van $f'(1) = 1$.

Je vindt: $f(1{,}001) \approx f(1) + 0{,}001 \cdot f'(1) = 3 + 0{,}001 \cdot 1 = 3{,}001$.

Vergelijk dit maar eens met de werkelijke functiewaarde $f(1{,}001) \approx 3{,}000996999$.

Opgave 11

Gegeven is de functie in **Toepassen**.

a Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

b Met behulp van dit hellingsgetal kun je de functiewaarden in de buurt van $x = 1$ schatten. Ze zijn ongeveer gelijk aan de y-waarden van de raaklijn aan de grafiek. Benader $f(1{,}003)$.

c Benader op dezelfde wijze $f(0{,}98)$.

Opgave 12

Als in een punt van de grafiek van f geldt $f(2) = 0$ en $f'(2) = -8$, dan kun je de functiewaarden bij x-waarden die niet veel van 2 verschillen goed benaderen.

a Schat de functiewaarde bij $x = 2{,}003$.

b Waarom heeft het geen zin om op dezelfde manier als bij b de waarde van $f(2{,}5)$ te schatten?

Testen

Opgave 13

Differentieer de volgende functies

a $f(x) = (3x+6)^5 - 20$

b $g(x) = 16 - 2(x-1)^4$

c $K(q) = 200 + (60+3q)^3$

Opgave 14

De grafiek van de functie $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 5$ kan door transformatie ontstaan uit die van $f(x) = 3^x$.

a Welke transformaties moet je dan toepassen?

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ heeft de vergelijking $y = 1{,}1x + 1$. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g voor dezelfde waarde van x.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren van getransformeerde functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
LET OP: de uitwerkingen zijn hier nogal omslachtig omdat de 'kettingregel' wordt gebruikt, terwijl je in dit onderdeel hebt leren werken met transformaties. Kijk daarom vooral of het eindantwoord overeen komt met jouw oplossing. Als dit niet zo is, ga dan terug naar Voorbeeld 1.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.4 Extremen berekenen

Inleiding

Als je een functievoorschrift hebt, kun je met de grafische rekenmachine een bijpassende grafiek tekenen. Je kunt dan de extreme waarden door de machine laten berekenen. Nadeel daarvan is dat je vaak niet zeker weet of je alle extremen in beeld hebt. Verder kan je rekenmachine ze alleen maar benaderen. Met behulp van de afgeleide van de functie kun je extremen echt berekenen: het zijn de punten van de grafiek waarin de afgeleide overgaat van positief in negatief of omgekeerd.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- extremen berekenen met behulp van de afgeleide van een functie;
- extremen berekenen bij families van functies;
- het berekenen van extremen toepassen in praktijksituaties.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van de GR en met behulp van hellingsgrafieken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de functies $f(x) = x^3$ en $g(x) = x^3 - 3x$.
Hoe kun je algebraïsch de toppen van beide functies vinden? Wat valt je op als je dit doet?

Uitleg

Bekijk de applet

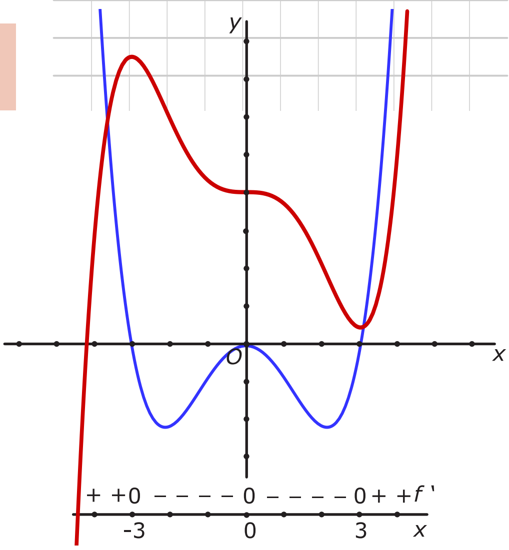
Gegeven is de functie f (rood) door:
$f(x) = 0{,}02x^5 - 0{,}3x^3 + 4$
Zijn afgeleide (blauw) is:
$f'(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}9x^2$.

Bereken met de afgeleide de extremen van f.

Voor de nulpunten van de afgeleide geldt:

$$\begin{aligned} 0{,}1x^4 - 0{,}9x^2 &= 0 \\ x^2(x^2 - 9) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = -3 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Voor het berekenen van extremen is het niet voldoende om alleen nulpunten van de afgeleide functie te berekenen.



Figuur 4.2

Je moet nog controleren of er sprake is van een maximum, een minimum of geen van beide.

De grafiek van f laat zien dat er bij $x = -3$ en $x = 3$ echt extremen optreden, maar bij $x = 0$ niet. Er geldt nu: max. $f(-3) = 3{,}24$ en min. $f(3) = -3{,}24$.

In plaats van de grafiek kun je ook een tekenschema gebruiken. Onder de grafiek zie je het tekenschema van de afgeleide.
Bij $x = -3$ en $x = 3$ treedt een tekenwissel op, maar bij $x = 0$ niet.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je de extremen van een functie kunt berekenen.

Bereken de extremen van de volgende functies.
Vergeet niet bij elke functie óf een grafiek te schetsen óf een tekenschema te maken.

a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

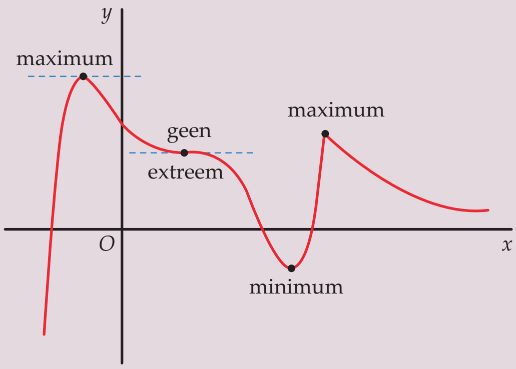
b $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12$

c $h(x) = -x^5 + 1\frac{1}{4}x^4 + 3\frac{1}{3}x^3 - 6$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

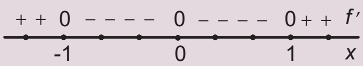
Bekijk de applet



Extremen bepalen gaat bij een functie, waarvan $f(x)$ het functievoorschrift is, als volgt:

- Bepaal de afgeleide van $f(x)$.
- Los op $f'(x) = 0$, houd rekening met het domein van $f(x)$.
- Bekijk de grafiek van de functie of maak een **tekenschema van de afgeleide**.

Figu



Figuur 4.4

- Bekijk bij elk nulpunt of de grafiek van $f'(x)$ overgaat van negatief in positief (minimum) of van positief naar negatief (maximum).
- Bereken de waarden van de maxima en minima.

Een maximum vind je waar de afgeleide overgaat van positief (de grafiek van f stijgt) naar negatief (de grafiek van f daalt). Een minimum vind je waar de afgeleide overgaat van negatief naar positief. Daar waar geen tekenwisseling plaatsvindt, is er ook geen extreem.

Een wiskundig probleem waarbij je differentiëren gebruikt om extremen te bepalen om het op te lossen wordt een **optimalisatieprobleem** genoemd. In het dagelijks leven komen er talloze optimalisatieproblemen voor.

Voorbeeld 1

Bereken de extremen van de functie: $f(x) = 25x^4 - 800000x - 50000$.

Antwoord

Vind de extremen door de functie te differentiëren en de afgeleide gelijk te stellen aan 0:
$f'(x) = 100x^3 - 800000$
$f'(x) = 100x^3 - 800000 = 0$ geeft: $x = \sqrt[3]{8000} = 20$.

Maak een tekenschema van de afgeleide.

− − − − − − −	0	+ + + + +	f'	
dalend	20	stijgend	f	x

Figuur 4.5

Bij $x = 20$ heeft f een minimum, want de functie gaat daar over van dalend in stijgend.
Min. $f(20) = -12050000$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}1x^3 - 120x$. Soms is een grafiek goed in beeld brengen nog lastig. Je kunt dan om te bepalen of er sprake is van een extreem en of het een maximum dan wel een minimum is, een tekenschema maken van de afgeleide. Zie het voorbeeld.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Bereken de nulwaarden van de afgeleide.

c Maak een tekenschema van de afgeleide van f. Geef er de plaats van de extremen in aan.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3$.

a Bereken de waarden van x waarin $f'(x) = 0$.

b Deze functie heeft voor $x = 0$ een horizontale raaklijn. Heeft de functie ook een extreme waarde voor $x = 0$?

c Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = |x|$. Wat is er aan de hand in $x = 0$?

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100x^2$ en $g(x) = x^2 \cdot (x - 10)^2$.

a Bereken algebraïsch de snijpunten van beide grafieken.

b Bereken met behulp van differentiëren de extremen van g.

c Als je het getal 100 in het functievoorschrift van f vervangt door een ander getal, gaat de grafiek door het punt waarin g een maximum heeft. Door welk getal moet je 100 vervangen? En hoeveel snijpunten hebben beide grafieken dan?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = x^3 + ax$.
Voor elke waarde van a heb je met een andere functie te maken.

Met je grafische rekenmachine kun je een paar grafieken van deze familie van functies voor verschillende waarden van a maken.

Sommige functies f_a hebben extremen, andere niet.
Onderzoek welk soort extremen er zijn bij de waarden van a.

Antwoord

$f'_a(x) = 3x^2 + a$

$3x^2 + a = 0$ geeft

$x = \sqrt{-\frac{a}{3}} \vee x = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$

Dit geeft de volgende mogelijkheden:

- $a > 0$:
  Vanwege de wortels zijn er dan geen oplossingen voor x.
  Dus heeft f_a geen extremen.
- $a = 0$:
  Dit geeft $f'_0(x) = 3x^2$. $f'_0(x)$ is dan altijd positief of 0.
  Dus heeft f_a geen extremen.
- $a < 0$:
  Nu is de grafiek van de afgeleide een dalparabool met twee nulpunten.
  Dus f_a heeft twee extremen: een maximum (voor $x = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$) en een minimum (voor $x = \sqrt{-\frac{a}{3}}$).

Opgave 5

Gegeven is de functie $f_a(x) = ax^3 - x$ met $a > 0$.

a Neem $a = 1$ en bereken de extremen van f_1.

b Bereken de x-coördinaten van de extremen van f_a, voor alle waarden van a.

c Bereken de y-coördinaten van de extremen van f_a.

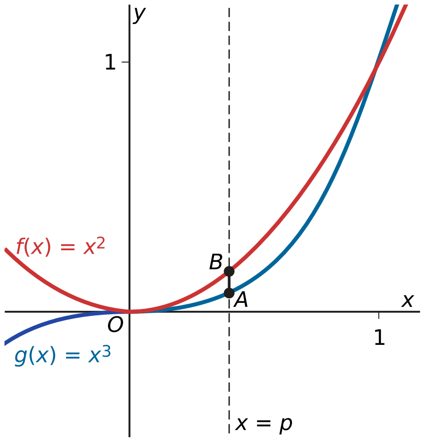
d Voor welke waarde van a is de maximale waarde van f gelijk aan 1?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Bekijk de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$.
De lijn $x = p$ met $0 < p < 1$ snijdt de grafiek van f in punt B en die van g in A.

Bereken exact de waarde van p waarvoor de lengte van lijnstuk AB maximaal is.



Figuur 4.6

Antwoord

Voor beide punten A en B geldt $x = p$. Dat geeft coördinaten $A(p,p^3)$ en $B(p,p^2)$.
Omdat $f(p) > g(p)$ geldt voor de lengte L van lijnstuk AB:
$L(p) = f(p) - g(p) = p^2 - p^3$

Stel de afgeleide van $L(p)$ gelijk aan 0 en los de vergelijking op:
De afgeleide is: $L'(p) = 2p - 3p^2$.

$$\begin{aligned} 2p - 3p^2 &= 0 \\ p &= 0 \vee p = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Met behulp van de grafiek of een tekenschema zie je dat de maximale lengte van AB gelijk is aan $L\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = 4 - x$.

a De lijn $x = k$ met $0 < k < 1$ snijdt de grafiek van f in P en die van g in Q.

Bereken de grootste lengte van lijnstuk PQ.

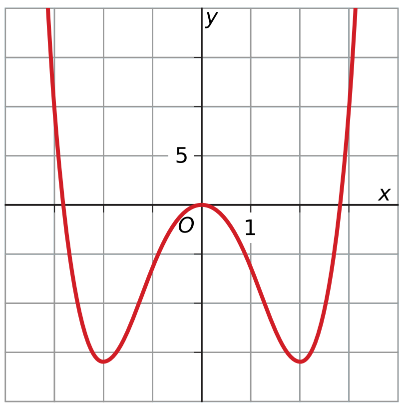
b De lijnen $x = -p$ en $x = p$ met $p > 0$ snijden de grafiek van f in A en in B. Bovendien snijden ze de x-as respectievelijk in D en in C.

Bereken exact de maximale oppervlakte van vierhoek $ABCD$.

Verwerken

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 8x^2$.
Bepaal met behulp van differentiëren alle extremen van deze functie.



Figuur 4.7

Opgave 8

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4000 - 10x^2$ en $g(x) = (x - 10)(x^2 - 400)$.

a Om de grafieken van beide functies in beeld te krijgen op je grafische rekenmachine moet je de instellingen nogal aanpassen. Bereken eerst de nulpunten van beide functies.

b Nu weet je welke waarden voor x je het beste kunt instellen. Bereken de extremen van beide functies.

c Je kunt nu de grafieken natuurlijk heel mooi in beeld krijgen. Los op: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 9

Gegeven is voor elke waarde van a de functie $f_a(x) = x^4 - ax^2$.
Bekijk de grafieken van f_a voor enkele waarden van a met je grafische rekenmachine.

a Voor welke waarden van a is het minimum van deze functie gelijk aan -1?

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$ gaat door het punt $(0,4)$.
Voor welke waarde van a is dit het geval?

Opgave 10

Een fabrikant van zelfrijzend bakmeel verkoopt zijn product voor € 2,25 per kilogram. Voor de totale kosten TK voor productie en opslag geldt:

q (in honderden kg)	1	2	3	4	5	6
TK(in euro)	75	100	125	200	400	800

Tabel 4.1

a Hoeveel stijgen de kosten gemiddeld per kilogram als de productie toeneemt van 400 naar 500 kg?

b Voor de totale kosten heeft de fabrikant de formule $TK(q) = 10q^3 - 60q^2 + 130q$ met q in honderden kg en TK in euro laten opstellen. Ga na dat deze formule past bij de gegevens in de tabel.

c Toon aan dat voor de winst de formule $W = -10q^3 + 60q^2 + 95q$ geldt.

d Bereken de marginale winst bij een productie van 400 kilo met behulp van $MW(q) = W'(q)$. Welke betekenis heeft dit getal?

e Bereken de maximale winst met behulp van de functie MW.

Opgave 11

Gegeven zijn de functies $f(x) = 0{,}5x^3 - 2x$ en $l(x) = 1{,}5x + 3$.

Lijn l snijdt de grafiek van f in drie punten A, B en C met respectievelijk x-coördinaten -2, -1 en 3.

a De lijn $x = p$ met $-2 < p < -1$ snijdt de grafieken van f en l in de punten P en Q.
Bepaal exact de maximale lengte van PQ.

b De lijn $x = t$ met $-1 < t < 3$ snijdt de grafieken van f en l in de punten S en T.
Bepaal exact de maximale lengte van ST.

c Had je het antwoord van vraag b ook sneller kunnen vinden?

Opgave 12

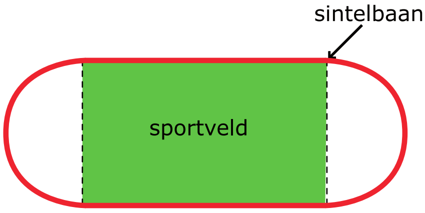
Voor elke waarde van p bestaat er een functie van de vorm $f(x) = x^3 - 6px^2 - 16$.

a Onderzoek voor welke waarden van p functie f een maximum heeft.
Licht je antwoord toe.

b Voor welke waarde van p heeft de functie een extreme waarde van -32?
Is dat een minimum of een maximum?

Toepassen

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. Het sportveld is net zo lang als de rechte stukken. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.



Figuur 4.8

Je kunt een formule opstellen voor de oppervlakte van dit sportveld als functie van de lengte of de breedte ervan of als functie van de straal van de cirkel. Als je dat doet kun je **differentiëren toepassen om extremen te bepalen**.

Opgave 13

Bekijk het probleem van de afmetingen bepalen van het zo groot mogelijke rechthoekige sportveld binnen een atletiekbaan.

a Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.

Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.

b Noem de oppervlakte van het sportveld A, de lengte ervan l en de straal van de cirkel r. Welke formules kun je nu opstellen?

c Stel een formule op voor $A(r)$.

d Voor welke waarde van r is $A(r)$ maximaal? Maak gebruik van differentiëren.
Geef ook de afmetingen van het sportveld. Rond je antwoorden af op één decimaal.

Opgave 14

Een fabrikant verpakt zijn hagelslag al jaren in doosjes met een vierkante bodem van 8 bij 8 cm. Ze hebben de vorm van een balk met een hoogte van 21 cm.
De fabrikant vraag zich af of hij de inhoud van het doosje kan vergroten door de afmetingen anders te kiezen, zonder meer karton te gebruiken. Het gaat erom de inhoud zo groot mogelijk te maken bij een gelijkblijvende oppervlakte. Het grondvlak blijft vierkant. Welke afmetingen moet de fabrikant kiezen?

a Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.

Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.

b Noem de zijde (in cm) van het grondvlak x en de hoogte h.

Welke twee formules kun je opstellen?

c Hoeveel karton heeft de fabrikant nodig voor zijn huidige doosjes?

Verwerk het antwoord in de oppervlakteformule en isoleer h uit de verkregen vergelijking.

d Stel een formule op voor de inhoud van de doosjes als functie van de zijde x.

e Voor welke waarde van x is de inhoud maximaal? Maak gebruik van differentiëren.
Rond je antwoord op drie decimalen.

f Bepaal de afmetingen van de doosjes met een maximale inhoud in millimeter nauwkeurig.

Opgave 15

Een boer omheint een rechthoekig weiland met een hek met een lengte van 200 meter. Een stal grenst aan het weiland en heeft een lengte van 12 meter. Waar de stal staat, hoeft geen omheining te komen.
Bepaal met behulp van differentiëren de maximale oppervlakte van het omheinde weiland.

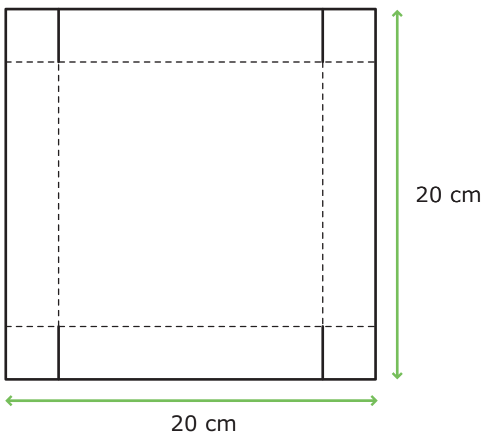
Opgave 16

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

a Stel dat je de zijde van het ingeknipte vierkantje x noemt. Welke functie $I(x)$ kun je dan opstellen voor de inhoud van dit bakje?

b Welke waarden kan x allemaal aannemen?

c Bereken de maximale inhoud van het bakje.



Figuur 4.9

Testen

Opgave 17

Bereken bij deze functies de extremen.

a $f(x) = -x^4 + 2x^3$

b $f(x) = x^2(x - 6)$

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^5 - 80000x^2 + 2557$.

a Bereken de extremen met behulp van differentiëren.

b Met welke vensterinstellingen krijg je de grafiek van f goed in beeld op de grafische rekenmachine.

c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = 0$?

Opgave 19

Bekijk de grafieken van $f(x) = x^3$ en $g(x) = x$. De lijn $x = p$ met $0 < p < 1$ snijdt de grafieken van f en g in de punten A en B. Bereken exact de maximale lengte van AB.

1.5 Buigpunten

Inleiding

Zodra de helling van de grafiek overgaat van toenemende stijging (of daling) naar afnemende stijging (of daling), of omgekeerd, spreek je van een buigpunt. In zo'n buigpunt heeft de helling een (lokaal) maximum of minimum. Je vindt buigpunten dus door naar de extremen van de afgeleide te zoeken.

Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- de betekenis van de tweede afgeleide voor de grafiek kennen;
- buigpunten berekenen met behulp van de tweede afgeleide van een functie;
- het opstellen van de vergelijking van een buigraaklijn.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van differentiëren.

Verkennen

Opgave V1

De afstand s die een bewegend voorwerp als functie van de tijd t aflegt wordt gegeven door $s(t) = t^3 - 6t^2 + 36t$ met $0 \leq t \leq 4$.
Het voorwerp heeft op $t = 0$ al een flinke beginsnelheid. Vervolgens remt het wat om daarna weer te versnellen.

a Hoe zie je dat aan de grafiek?

b Met differentiëren kun je een formule opstellen voor de snelheid van dit voorwerp. Welke formule is dat?

c Hoe kun je een formule opstellen voor de verandering van die snelheid, de versnelling?

d Het tijdstip waarop het voorwerp van vertragen overgaat in versnellen kun je exact berekenen. Laat zien hoe.

Uitleg

Bekijk de applet.

Je ziet hier de grafiek (rood) van de functie $f(x) = x^3 - 20x^2 + 150x + 100$, zijn afgeleide f' en de afgeleide van f' aangegeven door f''.

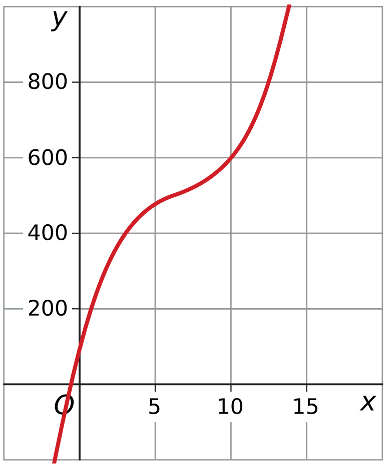
De grafiek van f stijgt voortdurend.
Dat zie je aan de afgeleide: $f'(x) > 0$ voor elke waarde van x. Nauwkeuriger:

- ongeveer tot $x = 7$ is er afnemende stijging;
- ongeveer vanaf $x = 7$ is er toenemende stijging.

Waar deze functie overgaat van een afnemende stijging naar een toenemende stijging zit een buigpunt.
Een buigpunt van een functie is een punt waar de afgeleide van die functie een extreme waarde bereikt. Met de afgeleide van f' vind je die extreme waarde. De afgeleide van f' noem je de tweede afgeleide $(f')' = f''$. Differentiëren geeft:
$f'(x) = 3x^2 - 40x + 150$
$f''(x) = 6x - 40$

Het minimum van $f'(x)$ vind je door $f''(x) = 6x - 40 = 0$ op te lossen.

Je vindt $x = \frac{40}{6}$, het buigpunt zit daarom bij $x = \frac{40}{6} \approx 6{,}67$. De y-coördinaat van het buigpunt is $f\left(\frac{40}{6}\right) \approx 507{,}41$.



Figuur 5.2

Opgave 1

Bekijk de functie f in de **Uitleg**.

a Bereken $f(0)$, $f'(0)$ en $(f')'(0) = f''(0)$.
Beschrijf de betekenis van deze drie getallen voor de grafiek van f.

b De grafiek van f heeft een buigpunt. Hoe blijkt dat uit de hellingsgrafiek?

c Bepaal algebraïsch de exacte coördinaten van het buigpunt.

d Is in dit buigpunt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn ook 0?

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 12x$.

a Plot de grafieken van f, f' en f'' met venster $[-5,10] \times [-40,10]$.

b De grafiek van f heeft een buigpunt. Hoe blijkt dat uit de hellingsgrafiek?

c Bepaal algebraïsch de coördinaten van het buigpunt.

d Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het buigpunt aan de grafiek van f.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij toenemende stijging/daling en afnemende stijging/daling verandert de helling.

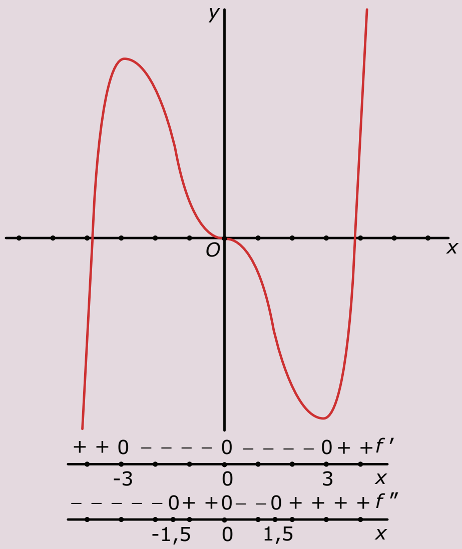
- Bij toenemende stijging wordt de helling steeds groter: f' stijgt. De afgeleide van f' is dan positief.
- Bij toenemende daling wordt de helling steeds kleiner: f' daalt. De afgeleide van f' is dan negatief.
- Bij afnemende stijging wordt de helling steeds kleiner: f' daalt. De afgeleide van f' is dan negatief.
- Bij afnemende daling wordt de helling steeds groter: f' stijgt. De afgeleide van f' is dan positief.

De afgeleide van f' heet de **tweede afgeleide** van f.

De tweede afgeleide noteer je als: $f''(x)$ of $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

Het punt waarin de helling overgaat van toenemend naar afnemend (of omgekeerd) heet een **buigpunt** van de grafiek.
Je vindt die buigpunten door naar de extremen van de afgeleide te zoeken. Dat doe je met behulp van de tweede afgeleide.

Een **buigraaklijn** is de raaklijn door een buigpunt. Als je de coördinaten van het buigpunt weet, stel je de buigraaklijn op zoals een normale raaklijn.



Figuur 5.3

Voorbeeld 1

Functies kunnen verschillende buigpunten hebben.
Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3(x^2 - 100)$ met drie zichtbare buigpunten.
Bepaal exact de buigpunten van deze grafiek.

Antwoord

Bepaal de tweede afgeleide:

$f(x) = x^5 - 100x^3$

$f'(x) = 5x^4 - 300x^2$

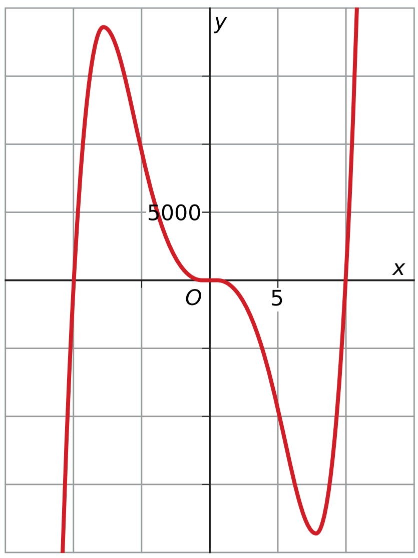
$f''(x) = 20x^3 - 600x$

De buigpunten vind je door $f''(x)$ gelijk te stellen aan 0.

$$\begin{aligned} 20x^3 - 600x &= 0 \\ 20x(x^2 - 30) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = -\sqrt{30} \vee x = \sqrt{30} \end{aligned}$$

Bij $x = 0$ heeft f inderdaad een buigpunt (met een horizontale raaklijn).

De buigpunten zijn $(-\sqrt{30}, 2100\sqrt{30})$, $(0,0)$ en $(\sqrt{30}, -2100\sqrt{30})$.



Figuur 5.4

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je de grafiek van de functie f.

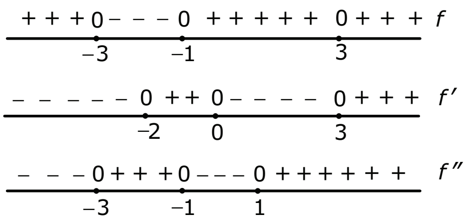
a Omschrijf de verschillende hellingsovergangen bij de buigpunten.

b Bereken exact de extremen van deze functie.

c Bereken exact de buigpunten van deze grafiek.

Opgave 4

Van een functie zijn de tekenschema's van $f(x)$, van $f'(x)$ en van $f''(x)$ gegeven door deze figuren.



Figuur 5.5

a Heeft de grafiek van f een buigpunt boven de x-as? Zo ja, waar?

b Schets een mogelijke grafiek van f.

Opgave 5

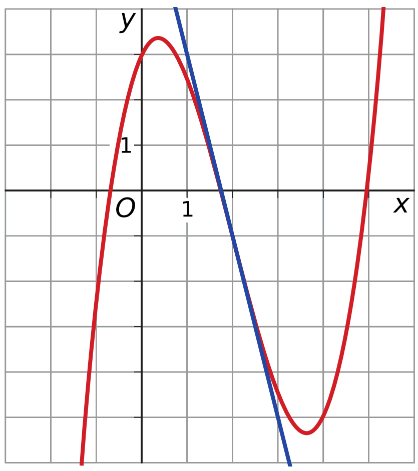
Een zeilwagen legt een afstand af die voor $t > 0$ wordt beschreven met de functie $s(t) = 1{,}2t^2$. Bepaal de afgelegde afstand, de snelheid en de versnelling op $t = 8$.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 2x + 3$.

De getekende lijn is de raaklijn in het buigpunt, kortweg de buigraaklijn.
Stel een formule voor de buigraaklijn op.



Figuur 5.6

Antwoord

Bepaal de tweede afgeleide:
$f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 2$
$f''(x) = 3x - 6$

Het buigpunt vind je door $f''(x) = 0$ op te lossen:
$f''(x) = 3x - 6 = 0$ geeft $x = 2$.

De coördinaten van het buigpunt zijn $(2, f(2)) = (2, -1)$.

De helling in dat punt is $f'(2) = -4$. De getekende raaklijn heeft een formule van de vorm $y = -4x + b$, waarin je b vindt door het buigpunt in te vullen: $-4 \cdot 2 + b = -1$ geeft $b = 7$.

De vergelijking van de buigraaklijn is: $y = -4x + 7$.

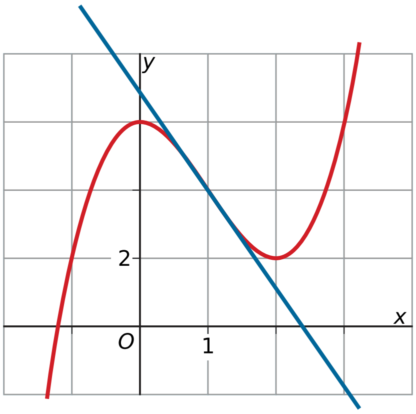
Opgave 6

Hier zie je de grafiek van $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ met daarin de buigraaklijn, de raaklijn in het buigpunt, getekend. Stel een vergelijking op van de getekende buigraaklijn.

a Welke coördinaten heeft het buigpunt?

b Bereken de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn.

c Stel een vergelijking op van de getekende buigraaklijn.



Figuur 5.7

Verwerken

Opgave 7

Bepaal met behulp van differentiëren van de volgende functies alle buigpunten.

a $f(x) = 0{,}5x^3 + 6x^2 - 90$

b $g(x) = 4x^2 - 0{,}5x^4$

c $h(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4$

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}25x^4 - 36x^2$.

a Bereken exact de buigpunten van de grafiek van f.

b De grafiek van f heeft twee buigraaklijnen die elkaar snijden op de y-as.
Bereken de coördinaten van dit snijpunt.

Opgave 9

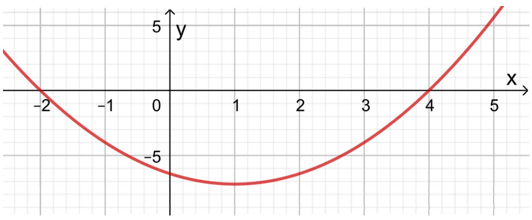
Gegeven is de functie $f(x) = 1\frac{1}{2}x^3 - 4x^2$. Onderzoek algebraïsch of de grafiek van f bij het punt A met $x_A = 1$ toe- of afnemend stijgt of daalt.

Opgave 10

Dit is de grafiek van de afgeleide van een functie, gemaakt met GeoGebra.

a Bij welke waarden van x heeft deze functie extremen?

b De functie heeft een buigpunt, waarvan de y-coördinaat gelijk is aan 5. Bepaal de vergelijking van de buigraaklijn.



Figuur 5.8

Opgave 11

Vaak is de opbrengst TO bij de productie van een bepaald artikel afhankelijk van de ingezette arbeidstijd a (in uren per dag). Een dergelijk verband kan worden beschreven door de functie $TO(a) = -\frac{1}{3}a^3 + 8a^2$.

a Bekijk de grafiek van TO. De opbrengst stijgt in het begin progressief (steeds sterker). Schat tot hoeveel ingezette arbeidstijd dat ongeveer zo is.

b Het antwoord op de voorgaande vraag kun je nauwkeurig berekenen met behulp van differentiëren. Laat zien hoe dat gaat.

c Hoeveel bedraagt de grootste opbrengststijging per uur?

Opgave 12

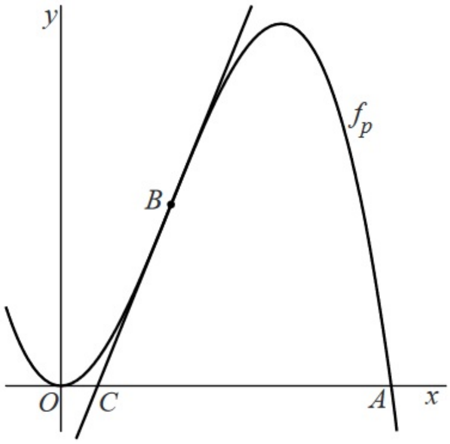
Voor $p > 0$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.

De grafiek van f_p raakt de x-as in het punt $O(0,0)$ en snijdt deze in het punt $A(3p,0)$.

De grafiek van f_p heeft een buigpunt $B(p,2p^3)$. De buigraaklijn in B snijdt de x-as in punt C.

In de figuur is deze situatie weergegeven. Bewijs dat de lengte van CA voor elke waarde van $p > 0$ acht keer zo groot is als de lengte van OC.

(bron: examen vwo wiskunde B in 2014, tweede tijdvak)



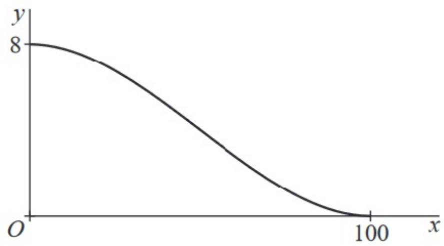
Figuur 5.9

Toepassen

Opgave 13: Landing

Bekijk een wiskundig model van de baan van een vliegtuig bij de landing.
Een vliegtuig vliegt op een hoogte van 8 km. Op een afstand van 100 km van het vliegveld (horizontaal gemeten) wordt het landingsproces ingezet.
De baan van het vliegtuig is in een assenstelsel getekend: x is de afstand (kilometer, horizontaal gemeten) vanaf het punt waar het landingsproces wordt ingezet en y is de hoogte (kilometer).
Bekijk de figuur. De piloot begint het landingsproces in het punt $(0,8)$ en het vliegtuig komt in het punt $(100,0)$ op de grond.

De baan die het vliegtuig tijdens het landingsproces beschrijft, wordt in het assenstelsel bij benadering gegeven door: $y(x) = 8 - 2{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot x^3$.



Figuur 5.10

a Toon langs algebraïsche weg aan dat volgens deze formule het vliegtuig zowel in het punt $(0,8)$ als in het punt $(100,0)$ een horizontale bewegingsrichting heeft.

De snelheid in horizontale richting is tijdens het hele landingsproces 500 km/h.
Er geldt: $x = 500t$, waarbij t het aantal uren na het inzetten van

de landing is en $0 \leq t \leq 0{,}2$.
Voor de hoogte y geldt: $y(t) = 8 - 600t^2 + 2000t^3$.

b Toon dit aan.

c Om veiligheidsredenen mag de absolute waarde van de verticale versnelling $y''(t)$ tijdens het landingsproces niet groter zijn dan 1200 km/h^2.
Onderzoek of aan deze eis is voldaan.

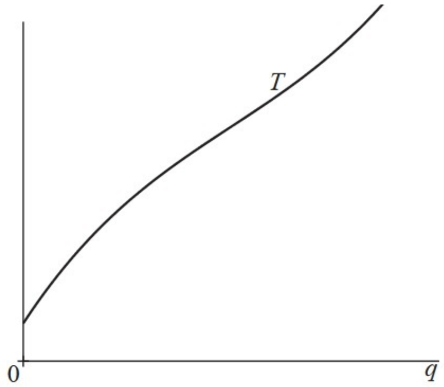
(bron: examen vwo wiskunde B in 2008, eerste tijdvak)

Opgave 14: Kostenfuncties

In de economie worden de volgende kosten bij de productie van een hoeveelheid q van een bepaald product onderscheiden:

- de totale kosten $T(q)$;
- de marginale kosten $M(q)$, die je benadert door $T'(q)$.

Gegeven is: $M(q) = T'(q)$.
In het algemeen geldt dat de totale kosten $T(q)$ eerst afnemend stijgend en vervolgens toenemend stijgend zijn. In de figuur is deze situatie weergegeven.



Figuur 5.11

Omdat derdegraadsfuncties T met $T(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d$ zich onder bepaalde voorwaarden voor a, b, c en d op deze manier gedragen, worden deze vaak gebruikt om de totale kosten te beschrijven.
Voor een bruikbare derdegraadsfunctie T moet gelden: $a > 0$, $c > 0$ en $d > 0$.

Een voorwaarde voor b vind je door te bedenken dat de marginale kosten $M(q) = T'(q)$ eerst afnemen en vervolgens toenemen. Dan moet er een productiehoeveelheid q zijn waarbij de marginale kosten $M(q)$ minimaal zijn.

Toon aan dat hieruit volgt dat $b < 0$.

(naar: examen vwo wiskunde B in 2011, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12$.

a Toon aan met de eerste en de tweede afgeleide van f dat de grafiek van f toenemend dalend is in $x = 1$.

b Bereken de coördinaten van het buigpunt.

Opgave 16

Van een functie f is de afgeleide gegeven door $f'(x) = 4x - 0{,}5x^2$.

a Geef aan bij welke waarden van x de grafiek van f een maximum of minimum heeft en geef de x-coördinaat van het buigpunt van de grafiek van f.

b De y-coördinaat van het buigpunt is 10. Stel een vergelijking op van de buigraaklijn van de grafiek van f.

Opgave 17

Een verffabriek gebruikt de functie $TK = 0{,}5q^3 - 3q^2 + 6q$ voor de productiekosten van een bepaald soort verf. Hierin is q de hoeveelheid geproduceerde verf in duizenden liter per dag en verder stelt TK de kosten in duizenden euro voor.

a De marginale kosten zijn de meerkosten per liter die ontstaan bij de productie van 1 liter extra. Bereken de marginale kosten bij een productie van 3000 liter verf per dag.

b Je kunt de marginale kosten goed benaderen met behulp van de afgeleide: $MK = TK'$. Bereken ook op deze manier de marginale kosten bij een productie van 3000 liter per dag.

c De verffabrikant produceert het liefst een hoeveelheid waarbij de marginale kosten minimaal zijn. Bij welke productie in liter per dag is dat het geval? Bereken het antwoord algebraïsch.

Practicum

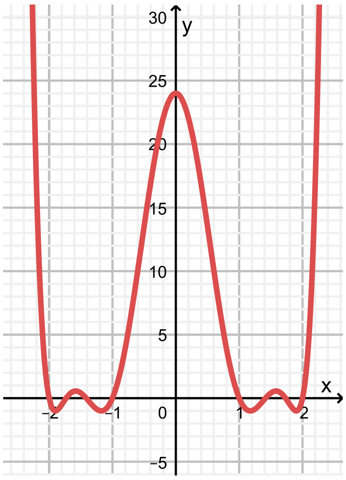
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het bepalen van de tweede afgeleide**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.6 Veeltermen

Inleiding

Een mooie proeftuin om alle aspecten van differentiëren te leren kennen en te oefenen is een categorie functies die in de wiskunde veeltermfuncties wordt genoemd. Een veeltermfunctie heeft een voorschrift dat bestaat uit een optelling van machtsfuncties met gehele positieve exponenten (een veelterm of polynoom).



Figuur 6.1

Je leert in dit onderwerp

- wat een veelterm en een veeltermfunctie is;
- extremen en buigpunten van veeltermfuncties berekenen;
- veeltermen vermenigvuldigen en delen.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met lineaire, kwadratische en machtsfuncties met gehele positieve exponent;
- extremen en buigpunten bepalen met behulp van differentiëren.

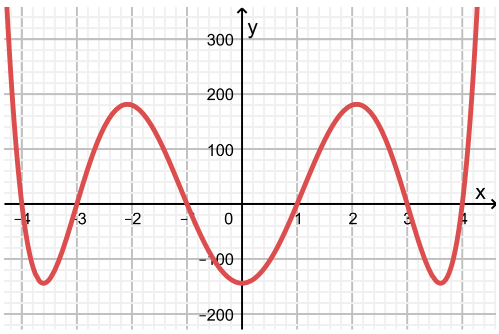
Verkennen

Opgave V1

Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)(x^2 - 16)$. Dit is een functie waarvan het voorschrift bestaat uit een product van drie veeltermen.

a Werk de haakjes uit en laat zien dat het functievoorschrift ook een veelterm is.

b Hoe kun je aan het functievoorschrift zien hoeveel nulpunten, extremen en buigpunten er zijn?



Figuur 6.2

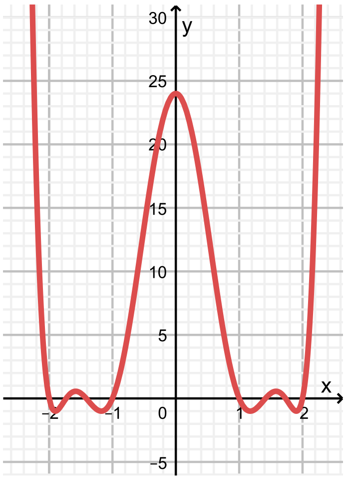
Uitleg

Hier zie je de grafiek van de functie
$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 - 4)$.
Werk je de haakjes uit, dan krijg je:
$f(x) = x^8 - 10x^6 + 35x^4 - 50x^2 + 24$.

De functie heeft een voorschrift dat bestaat uit een optelling (aftrekking) van machtsfuncties waarvan de exponent een geheel getal groter of gelijk aan 0 is. Je noemt zo'n uitdrukking een veelterm of polynoom. Functie f is een veeltermfunctie. In dit geval spreek je van een achtstegraads functie omdat 8 de hoogte exponent van x is die voorkomt. Er zijn ook acht nulpunten. Meer is onmogelijk, minder kan wel, volgens de hoofdstelling van de algebra die zegt dat de hoogste exponent van een veeltermfunctie het maximale aantal nulpunten bepaalt.

Om extremen te bepalen ga je differentiëren.
$f'(x) = 8x^7 - 60x^5 + 140x^3 - 100x = 0$ geeft hier 7 (of minder) oplossingen.

Om buigpunten te bepalen stel je de tweede afgeleide gelijk aan 0.
$f''(x) = 56x^6 - 300x^4 + 420x^2 - 100 = 0$ geeft hier 6 (of minder) oplossingen.



Figuur 6.3

Opgave 1

Gegeven is $f(x) = x^8 - 10x^6 + 35x^4 - 50x^2 + 24$.

a Bepaal de x-waarden van de toppen door de vergelijking $f'(x) = 8x^7 - 60x^5 + 140x^3 - 100x = 0$ met de GR op te lossen.

b Bepaal de x-waarden van de buigpunten door de vergelijking $f''(x) = 56x^6 - 300x^4 + 420x^2 - 100 = 0$ met de GR op te lossen.

c Kun je je voorstellen wat de hoofdstelling van de algebra inhoudt?

Opgave 2

Neem $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten van de grafiek van f.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

c Bereken algebraïsch de buigpunten van de grafiek van f.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **veelterm** (of **polynoom**) is een uitdrukking van de vorm

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Een functie waarvan het voorschrift zo'n veelterm is heet een **veeltermfunctie** of **n-de graads functie**.
Het domein van dergelijke functies is $\mathbb{R}$.

De **hoofdstelling van de algebra** zegt dat een vergelijking zoals
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$
maximaal n reële oplossingen heeft.
Het bewijs van deze stelling vereist een verdere studie van de algebra...

Deze stelling betekent wel dat een n-de graads functie maximaal n nulpunten heeft.
Bovendien betekent dit dat er maximaal $n - 1$ extremen en maximaal $n - 2$ buigpunten zijn.

Als je veeltermen vermenigvuldigd, krijg je opnieuw een veelterm. Zie **Voorbeeld 3**.
Maar als je veeltermen deelt, dan is dit niet altijd het geval. Zie **Voorbeeld 4**.

Voorbeeld 1

De functie f met $f(x) = x^3 + 9x^2 - 610x + 600$ is een derdegraads functie. Als je hem met de standaardinstellingen van de grafische rekenmachine in beeld brengt, zie je één nulpunt, namelijk $(1,0)$.
Bereken algebraïsch de andere nulpunten.

Antwoord

Je moet oplossen: $x^3 + 9x^2 - 610x + 600 = 0$.
Je hebt geen algemene methoden voor het oplossen van een derdegraads vergelijking geleerd. Maar je kunt gebruik maken van het gevonden nulpunt $(1,0)$. Dat betekent namelijk dat $x = 1$ oplossing van de vergelijking is (controleren door invullen). En daarom is te vergelijking te schrijven als $(x - 1)(\ldots) = 0$.

Met een staartdeling vind je:
$(x - 1)\left(x^2 + 10x - 600\right) = 0$
Dit kun je verder ontbinden:
$(x - 1)(x - 20)(x + 30) = 0$
De oplossing is:
$x = 1 \vee x = 20 \vee x = \text{-}30$.
Er zijn dus precies drie nulpunten:
$(1,0)$, $(20,0)$ en $(\text{-}30,0)$.

Opgave 3

Bekijk met je grafische rekenmachine de grafieken van $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 1$ en $g(x) = 1 - x^4$.
Je ziet dan, dat $(1,0)$ een nulpunt van de grafiek van f en ook een snijpunt van de grafieken van f en g lijkt te zijn.

a Ga na dat dit laatste klopt.

b Bereken algebraïsch alle nulpunten van de grafiek van f.

c Bereken algebraïsch de extremen van f.

d Bereken algebraïsch het buigpunt van de grafiek van f.
Benader de coördinaten in twee decimalen nauwkeurig.

e Los op: $f(x) \leq g(x)$.

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $x^3 - 4x^2 = 12x$

b $-0{,}1x^5 = 4x^2$

c $(x - 1)(x + 1)(2x - 5) = 5$

d $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 = 0$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Gegeven is de familie van functies

$f_p(x) = x^3 - px^2 + 9x$.

Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f_p precies twee extremen? Toon ook aan dat elke functie van deze familie precies één buigpunt heeft.

Antwoord

Voor de extremen geldt:

$f'_p(x) = 3x^2 - 2px + 9 = 0$

Er zijn twee oplossingen als
$D = (-2p)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 > 0$.
Dit is het geval als: $p < -\sqrt{27} \vee p > \sqrt{27}$.

Omdat de grafiek van f'_p dan een dalparabool is met twee nulpunten, wisselt de afgeleide ook van teken, zodat er inderdaad extremen zijn.

Voor de buigpunten geldt: $f''_p(x) = 6x - 2p = 0$.

Deze vergelijking heeft voor elke p precies één oplossing. De grafiek van f''_p is een rechte lijn met een nulpunt en f''_p wisselt dus van teken, er is een buigpunt.

Opgave 5

Bekijk enkele grafieken van functies van de vorm

$f_c(x) = \frac{1}{2}x^4 - cx^2 + c$ op domein $[-4,4]$.

a Bewijs dat elke functie f_c een extreme waarde heeft voor $x = 0$.

b Voor welke waarden van c raakt de grafiek van f_c de x-as?

c Voor welke waarden van c liggen de buigpunten van de grafiek van f_c op de x-as?

d Voor welke waarden van c heeft de grafiek van f_c voor $x = 1$ een hellingsgetal van 1?

Voorbeeld 3

$f(x) = x^3 - 8x^2$ en $g(x) = x^2 - 4$ zijn voorbeelden van functievoorschriften van veeltermfuncties.
$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ is het product van deze veeltermfuncties.
Laat zien dat p ook een veeltermfunctie is en leg uit waarom het aantal toppen van de grafiek van p precies één meer is dan dat van f en g samen.

Antwoord

$p(x) = \left(x^3 - 8x^2\right)\left(x^2 - 4\right) = x^5 - 8x^4 - 4x^3 + 32x^2$
Je ziet dat het functievoorschrift van p inderdaad als veelterm kan worden geschreven.

De extremen vind je uit $p'(x) = 5x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 64x = 0$.
Ondanks dat je x buiten haakjes kunt halen, is deze vergelijking niet eenvoudig op te lossen.
Je moet de extremen van p daarom met de GR bepalen.
Ga na, dat je vindt: max.$p(-1{,}44) \approx 37{,}71$, min.$p(0) = 0$, max.$p(1{,}37) \approx 26{,}42$ en min.$p(6{,}46) \approx -2424{,}9$.

Bekijk je alle drie de grafieken, dan zie je dat f twee, g één en p vier extremen heeft. Waarom dit zo is, zie je aan hun afgeleiden. f' heeft 2 als hoogste macht, g' heeft 1 als hoogste macht en p' heeft 4 als hoogste macht. Die hoogste machten van de afgeleiden bepalen hoeveel extremen er hoogstens zijn.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 2x - 8$.
Bekijk de functie $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten en de toppen van p.

b Los op: $p(x) = 2x-8$. Is het uitwerken van de haakjes hierbij nodig?

c Los op: $p(x) \leq -2x^2$.

Voorbeeld 4

$f(x) = x^3 - 8x^2$ en $g(x) = x^2 - 4$ zijn voorbeelden van functievoorschriften van veeltermfuncties.

$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ is het quotiënt van deze veeltermfuncties.

Laat zien dat q geen veeltermfunctie is en bepaal de asymptoten van de grafiek van q.

Antwoord

q wordt opnieuw een veeltermfunctie als deling van f en g 'op 0 uitkomt'.
Dat is echter niet het geval, als je een staartdeling uitvoert houd je $-28x$ over.

Dit betekent: $q(x) = \frac{x^3-8x^2}{x^2-4} = x - 8 - \frac{28x}{x^2-4}$.

Het functievoorschrift krijgt niet de gedaante van een veelterm, het blijft een gebroken functie.
Als $x^2 - 4 = 0$ dan zijn er geen reële uitkomsten (delen door 0).
Dit is het geval als $x = -2 \vee x = 2$. Aan de grafiek zie je dat bij deze waarden van x verticale asymptoten optreden.
Horizontale asymptoten zijn er niet: als x oneindig groot wordt, benadert $\frac{28x}{x^2-4}$ de waarde 0 en wordt dus $q(x) \approx x - 8$. Hetzelfde geldt als x hele grote negatieve waarden aanneemt.

Opgave 7

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 2x - 8$.

Bekijk de functie $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

a Bepaal het domein van q. Waarom is q geen veeltermfunctie?

b Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van q? Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van q?

c Bepaal het bereik van q met behulp van de grafische rekenmachine.

Verwerken

Opgave 8

Gegeven is de derdegraadsfunctie f met voorschrift
$f(x) = x^3 + 9x^2 - 15x + 5$.

a Breng de grafiek van f in beeld op je grafische rekenmachine. Welke nulpunten kun je aflezen?

b Bereken algebraïsch de andere twee nulpunten in twee decimalen nauwkeurig. Controleer je antwoorden met je rekenmachine.

c Bereken ook algebraïsch de toppen en het buigpunt van f in twee decimalen nauwkeurig.

d Voor welke x-coördinaten van de grafiek van f heeft de raaklijn een richtingscoëfficiënt van -5?

e Welk hellingsgetal heeft de grafiek van f in het snijpunt met de y-as?

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $x^2(x-2) = 3x-6$

b $0{,}5x^4 + 4x^3 - 6x = 48$

c $0{,}25x^6 = 4x^3 - 15$

d $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$

Opgave 10

Gegeven is de familie van functies f_p door het voorschrift $f_p(x) = px^4 - 2x^2 + 8p$.

a Bepaal algebraïsch de toppen en de buigpunten van de grafiek van f_1.

b Voor welke waarden van p raakt de grafiek van f_p de x-as?

c Voor welke waarden van p liggen de buigpunten van de grafiek van f_p op de x-as?

Opgave 11

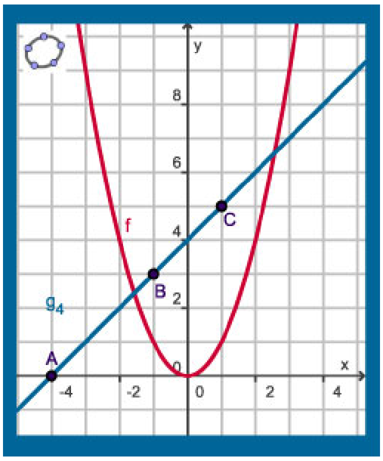
Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g_a(x) = x + a$. In de figuur zie je de grafieken van f en g_4. Functie h_a is gegeven door $h_a = f(x) \cdot g_a(x)$.

a Beredeneer dat de grafiek van h_4 door de punten O, A, B en C moet gaan.

b Bereken de uiterste waarden van h_4.

c De snijpunten van de grafieken van h_a en g_a liggen op drie rechte lijnen. Welke?

d Bewijs dat de toppen van de grafieken van h_a op de kromme lijn $y = -\frac{1}{2}x^3$ liggen.



Figuur 6.4

Opgave 12

Gegeven zijn de functies f_c door $f_c(x) = cx(x+6)^2$. Bekijk de grafieken van deze familie van functies op het domein $[-8,1]$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f_1 op dit domein.

b Alle functies f_c hebben een extreme waarde voor $-6 < x < 0$. Voor welke waarden van c is die extreme waarde gelijk aan 80?

c Druk de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f_c uit in c.

d Voor welke waarde van c gaat de buigraaklijn aan de grafiek van f_c door het punt $(0,80)$?

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10x-40}{x^2-10}$.

Bekijk de grafiek van f op de rekenmachine, voor $-10 \leq x \leq 10$.

a Welke drie asymptoten heeft de grafiek van f? Leg uit hoe deze asymptoten uit het functievoorschrift zijn af te leiden.

b Bepaal het bereik van f in één decimaal nauwkeurig.

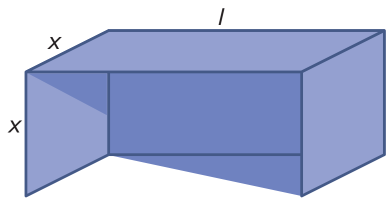
c Voor welke waarden van p met p in één decimaal nauwkeurig, heeft de vergelijking $f(x) = p$ precies twee oplossingen?

d De lijn $y = 10x - 40$ snijdt de grafiek van f van links naar rechts in drie punten A, B en C. Welke van de drie lijnstukken OA, OB of OC is het langst?

Toepassen

Opgave 14: Fietsenstalling

Voor het bouwen van een eenvoudige fietsenstalling is 40 m^2 golfplaat beschikbaar. Daarmee worden beide zijwanden, de achterwand en de bovenkant bekleed. Het geraamte van het bouwsel wordt zo gemaakt dat een zuiver rechthoekig blok ontstaat, dat even hoog als diep is.



Figuur 6.5

a Geef een formule voor de inhoud van het rechthoekige blok als functie van x.

b Welke waarden kan x aannemen?

c Welke waarden kan de inhoud van de fietsenstalling aannemen?

Testen

Opgave 15

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$ en $g(x) = -2x^2 + 20$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten en extremen van de functie f.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van f en g en los op $f(x) < g(x)$.

c Onderzoek hoeveel waarden voor x er zijn waarvoor beide grafieken dezelfde helling hebben.

Opgave 16

Los op: $0{,}5x^3 + 2x^2 - 3x = 6$.

Opgave 17

Gegeven is voor elke reële waarde van p de functie $f_p(x) = x^4 - 4x^3 + px^2$ met het domein $\mathbb{R}$.

a Bereken de nulpunten, de toppen en de buigpunten van de grafiek van f_4.

b De lijn $y = mx$ en de grafiek van f_4 hebben precies drie punten gemeenschappelijk. Bereken m.

c Voor welke waarden van p heeft f_p precies drie extremen?

Opgave 18

Op het domein $[-1,3]$ zijn de volgende functies gegeven: $f(x) = (x-2)^2(2x+1)$ en $g_a(x) = a(2x+1)$.

a Los op: $f(x) = g_2(x)$.

b Bereken algebraïsch de nulpunten, de toppen en het buigpunt van de grafiek van f.

c Voor welke waarden van a heeft de vergelijking $f(x) = g_a(x)$ twee oplossingen?

d Voor welke waarden van a bestaan er geen raaklijnen van f die evenwijdig zijn aan g_a?

1.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt het onderwerp **Afgeleide functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- definitie afgeleide — limiet — vergelijking raaklijn
- differentieerregels — machtsregel voor gehele positieve n — somregel — constante-regel
- afgeleide na transformatie
- extremen — tekenschema afgeleide
- buigpunt — tweede afgeleide — buigraaklijn
- veelterm of polynoom — veeltermfunctie — hoofdstelling algebra

Activiteitenlijst

- afgeleiden bepalen met de limietdefinitie — vergelijking van een raaklijn opstellen
- afgeleiden bepalen met behulp van differentieerregels
- afgeleide van een getransformeerde functie bepalen
- extremen berekenen met behulp van de afgeleide
- buigpunten berekenen met behulp van de tweede afgeleide
- werken met veeltermfuncties

Achtergronden

De differentiaalrekening is min of meer tegelijkertijd en zonder dat ze het van elkaar wisten door twee van de allergrootste geleerden van hun tijd uitgevonden:

- In Engeland bedacht **sir Isaac Newton (1642—1727)** zo rond 1665 zijn 'fluxierekening' toen hij zich in die periode bezig hield met beweging, snelheid en versnelling. Hij publiceerde zijn resultaten echter niet.
- In Duitsland schreef **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716)** in 1675 het manuscript waarin hij zijn theorie rond het berekenen van hellingen en van oppervlaktes onder krommen uiteen zette.

Er ontstond daarna nogal een ruzie over wie de eerste ontdekker van de differentiaal- en integraalrekening was (deze termen en de notaties die we tegenwoordig gebruiken zijn van Leibniz afkomstig). De fluxierekening deed het in de Engelstalige landen en vooral onder de natuurkundigen heel lang erg goed. Maar uiteindelijk werd toch de begrippenstructuur van Leibniz aanvaard, vooral ook omdat de wiskundigen van de familie Bernoulli en de grote wiskundige Leonhard Euler (die grote vorderingen met deze nieuwe tak van de wiskunde maakten) op het vasteland van Europa woonden.

Lees ook: **Grafieken en verandering, differentiaalrekening**.

Testen

Opgave 1

Differentieer de volgende functies.

a $h(x) = -3\left(x^2 - 4\right)^2$

b $P(q) = \frac{0{,}5q^3+20q^2+60q}{q}$

c $f(x) = 4ax^5 - 12a^2x^2 + 60x + 100a$

d $g(a) = 4ax^5 - 12a^2x^2 + 60x + 100a$

e $E(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120}$

f $f(x) = (ax + b)^{12}$

Opgave 2

Bekijk de grafiek van $f(x) = 2x^3 - x^4$ op het interval $[-1; 2{,}5]$.

a De grafiek heeft twee punten waarin de raaklijn horizontaal loopt. Toon dat aan met behulp van differentiëren en toon ook aan dat er toch maar één extreme waarde is.

b De grafiek van f heeft behalve $(0,0)$ nog een buigpunt. Bereken de coördinaten van dat punt.

c Stel de raaklijn op aan de grafiek in het bij b bedoelde buigpunt.

Opgave 3

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = -x^2$ en $g(x) = 0{,}5x^3 - 2x$.

a Beredeneer dat de grafieken van deze twee functies elkaar maximaal drie keer kunnen snijden.

b Toon aan dat het product van deze twee functies slechts 3 nulpunten heeft.

c Bepaal het domein, het bereik en de asymptoten van het quotiënt van f en g.

Opgave 4

Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoermiddel in grote bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt hun afzet q (in duizendtallen) uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0{,}1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1{,}5q^3 - 22{,}5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizendtallen euro.

a Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?

b Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q.

c Stel een formule op voor de winst TW als functie van de afzet q.

d Bepaal met behulp van differentiëren de prijs van één autoped bij maximale winst.

e Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q. Bepaal met behulp van differentiëren bij welke afzet GTK minimaal is.

Opgave 5

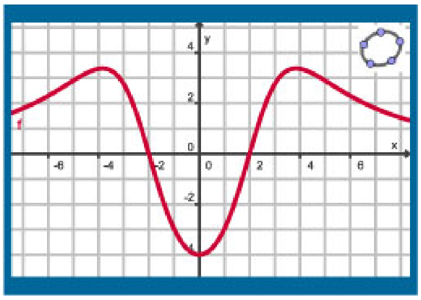
Gegeven is voor elke reële waarde van p de functie $f(x) = x^4 - 4x^3 + px^2$.

a Toon aan datvoor elke $p > 4{,}5$ de grafiek van f precies één minimum heeft.

b Punt A met $x_A = 1$ ligt op de grafiek van f. De rechte lijn met vergelijking $y = ax$ raakt de grafiek van f in het punt A. Welke waarde heeft p in dit geval?

Opgave 6

Je ziet hier de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{100x^2-400}{x^4+100}$.



Figuur 7.1

a Bepaal het bereik van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Los exact op: $f(x) \leq \frac{80}{x^2}$.

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq \frac{1}{f(x)}$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 7

Gegeven is de functie f door $f(x) = x(6 + x)(10 - x)^2$.

a Bereken algebraïsch de toppen en de buigpunten van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.

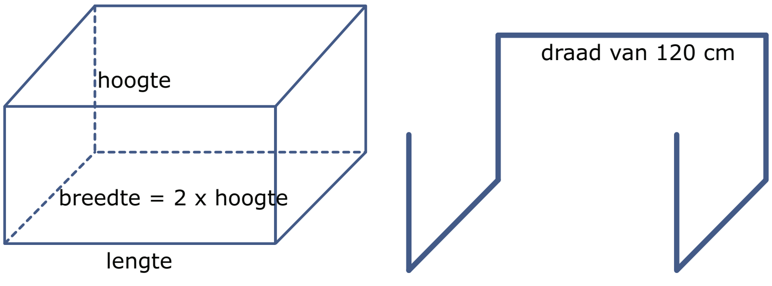
b Voor welke waarden van p heeft de lijn $y = p$ precies drie punten met de grafiek van f gemeen?

c De raaklijn aan de grafiek van f in de oorsprong van het assenstelsel snijdt de grafiek in nog twee andere punten. Bereken de coördinaten van die punten in één decimaal nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 8: Plastic bakjes

Een bedrijf maakt plastic bakjes: bodem en zijvlakken van deze bakjes zijn rechthoeken; de breedte van de bakjes is tweemaal zo groot als de hoogte. Om de bakjes te verstevigen wordt een gebogen metaaldraad met een lengte van 120 cm aangebracht zoals in de tekeningen is aangegeven.



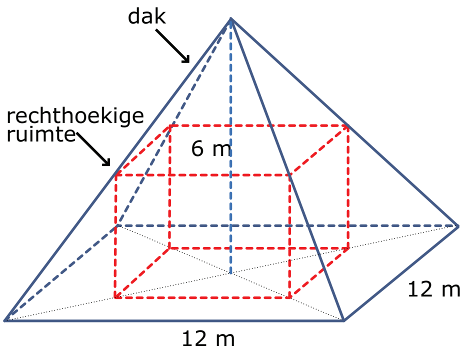
Figuur 7.2

a Bereken de maximale inhoud die deze bakjes kunnen krijgen.

b Als het goed is blijkt bij a dat de lengte van het bakje viermaal zo groot is als de hoogte. Toon aan dat bij elke draadlengte een maximale inhoud ontstaat als de breedte tweemaal de hoogte en de lengte viermaal de hoogte is.

Opgave 9: Piramidedak

Onder een piramidevormig dak wil je een rechthoekige ruimte bouwen met een zo groot mogelijke inhoud. Bekijk in de figuur hoe dit eruit komt te zien. Het grondvlak van de ruimte is een vierkant. Welke afmetingen krijgt deze ruimte?



Figuur 7.3

Opgave 10: Kogelbaan

De **kogelbaan** is een model voor de baan die een in vacuüm (om luchtweerstand te kunnen verwaarlozen) onder een bepaalde hoek en met een bepaalde snelheid afgeschoten massapunt aflegt.
Noem de beginsnelheid v_0 en de hoek waaronder het massapunt wordt afgeschoten α.

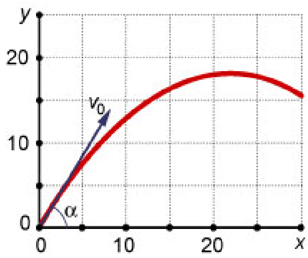
De snelheid in de x-richting is $v_0 \cos(\alpha)$.
De snelheid in de y-richting is $v_0 \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee.
Dus is:

$x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$.

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9{,}81$ m/s^2.
Hiermee maak je een model in Excel: **Model kogelbaan**.
Zie ook deze **kogelbaansimulatie**.

Laat zien dat bij de baan de formule $y = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{g}{2v_0 \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$

hoort.
Kun je de gunstigste afschiethoek α bepalen als je de kogel zo ver mogelijk van het afschietpunt weer op de grond wilt laten komen?



Figuur 7.4

a Leid zelf de vergelijking van de baan van deze parabool af.

b Druk het punt waar de kogel weer op de grond komt uit in v_0, α en g.

c Bij welke waarde voor α komt de kogel zo ver mogelijk? Druk de hoogte die de kogel dan haalt uit in v_0 en g.

Examen

Opgave 11

Met domein $\mathbb{R}$ zijn gegeven de functies: $f(x) = (x^2 - 4)(2x + 1)$ en $g(x) = x^2 - 4$.

a Bepaal algebraïsch de karakteristieken van de grafiek van f.

b Los op: $f(x) > g(x)$.

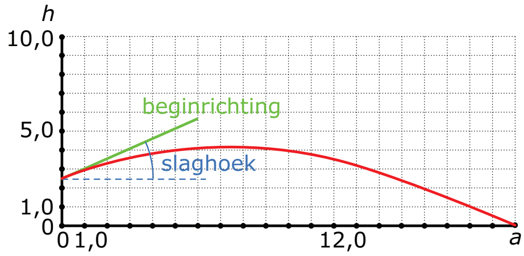
c De lijn met de vergelijking $x = p$, met $-2 < p < 0$, snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B. Bereken de waarden van p waarvoor de oppervlakte van driehoek OAB gelijk is aan 3.

d Door O gaat een lijn die de grafiek van f raakt. Stel een vergelijking van die lijn op. Geef een benadering in twee decimalen.

(bron: examen wiskunde B vwo 1996, eerste tijdvak, aangepast)

Opgave 12: Tennis

Bij sporten als volleybal en tennis is de service erg belangrijk, dat wil zeggen de manier waarop de bal in het spel gebracht wordt. We bekijken de service bij tennis. De speler staat bij het serveren 12 meter van het net. Het net is 1 meter hoog. We nemen aan dat de speler de bal raakt op een hoogte van 2,5 meter boven de grond en ter vereenvoudiging gaan we er van uit dat de speler de bal precies in de lengterichting van het veld slaat. In de eerste figuur zie je een mogelijke baan van de bal.



Figuur 7.5

De hoogte van de onderkant van de bal in meter ten opzichte van de grond noemen we h. De horizontale afstand in meter noemen we a. Het verband tussen h en a hangt af van de snelheid waarmee de bal geslagen wordt en van de beginrichting. Deze beginrichting wordt bepaald door de slaghoek. Dit is de hoek waaronder de bal geslagen wordt. Zie eerste figuur.

a Neem aan dat de bal onder een hoek van 15° geslagen wordt met een snelheid van v m/s. Bij deze hoek geldt bij benadering het volgende verband tussen a en h:

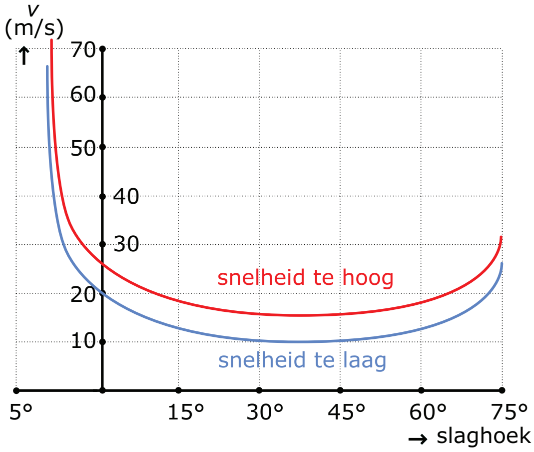
$$h = -\frac{5{,}36}{v^2} \cdot a^2 + 0{,}27a + 2{,}50$$

Een speler slaat de bal met een snelheid van 17 m/s. Bereken met behulp van differentiëren de grootste hoogte boven de grond die deze bal bereikt.

In deze vereenvoudigde situatie spreken we van een geldige service als:

- de speler die serveert 12 meter van het net staat;
- de bal precies in de lengterichting van het veld geslagen wordt;
- de bal over het net gaat zonder dit te raken;
- de bal neerkomt op een afstand van ten hoogste 7 meter voorbij het net.

In een artikel over dit onderwerp stond deze grafiek. Daarin is weergegeven bij welke combinaties van slaghoek en snelheid een geldige service verkregen wordt. Een speler die de bal slaat onder een hoek van 30° moet volgens deze grafiek de bal slaan met een snelheid van ongeveer 11 tot 13 m/s. Slaat hij te zacht dan komt de bal niet over het net. Slaat hij te hard dan komt de bal te ver voorbij het net op de grond. Een profspeler slaat bij een geldige service de bal met een snelheid van 150 km/h.



Figuur 7.6

b Bepaal met behulp van de grafiek de beginrichting van een mogelijke baan van deze bal.

Neem aan dat de bal onder een hoek van 10° geslagen wordt. Bij deze hoek geldt bij benadering de volgende formule voor het verband tussen a en h:

$h = \frac{-5{,}16}{v^2} \cdot a^2 + 0{,}18a + 2{,}50$

Voor een geldige service moet de bal over het net gaan zonder dit te raken. De snelheid is te laag als in bovenstaande formule bij afstand $a = 12$ de hoogte $h \leq 1$ is. Volgens de grafiek is een snelheid van 16 m/s of minder te laag voor een geldige service. Echter, met behulp van een berekening is na te gaan dat de figuur erg onnauwkeurig is getekend.

c Welke snelheden (in m/s) zijn volgens de formule te laag voor een geldige service? Geef je antwoord in ten minste één decimaal.

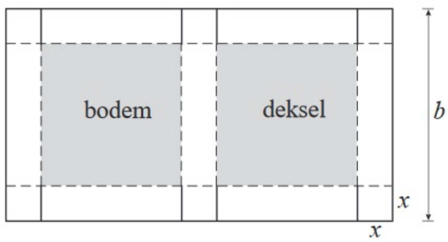
Voor een geldige service moet de bal bovendien ten hoogste 7 meter voorbij het net de grond raken. Uit deze eis volgt ook een voorwaarde voor v.

d Welke getallen moet je in de bovenstaande formule invullen om deze voorwaarde te krijgen? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A vwo 2000, eerste tijdvak)

Opgave 13: Pizzadoos

Een bepaald type doos wordt op de manier zoals is in de figuur is afgebeeld uit een rechthoekig stuk karton gemaakt. Denk aan een pizzadoos.



Figuur 7.7

Neem een stuk karton met een breedte van b cm. Wil je een doos maken die x cm hoog wordt, dan moet je voor de lengte van het stuk karton $2b - x$ cm nemen.
Op zes plaatsen worden vierkantjes van x bij x cm losgesneden en omgevouwen. De stippellijnen zijn vouwlijnen; de doorgetrokken lijnen zijn snijlijnen. Bodem en deksel zijn allebei vierkant.
Voor de inhoud in cm^3 $I(x)$ van zo'n doos geldt de formule:

$I(x) = 4x^3 - 4bx^2 + b^2x$ met $0 < x < \frac{1}{2}b$.

a Toon de juistheid van deze formule aan.

b Voor elke positieve waarde van b heeft de inhoud $I(x)$ een maximale waarde.

Dit maximum wordt bereikt voor $x = \frac{1}{6}b$.

Toon aan dat deze waarde van x juist is.

(bron: examen vwo wiskunde B in 2009, eerste tijdvak)

2

Vectoren en goniometrie

2.1 Vectoren

Inleiding

Bij schepen en vliegtuigen speelt naast de snelheid ook de koers een belangrijke rol. Die koers wordt vastgelegd door de hoek ten opzichte van het noorden. In feite heb je het bij beide over een snelheidsvector, een combinatie van snelheid (de lengte van de pijl) en koers (de richtingshoek).

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip vector kennen met een draaihoek en een lengte;
- vectoren in componenten ontbinden en werken met componenten van vectoren;
- vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal.

Voorkennis

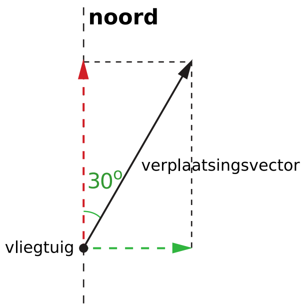
- werken met coördinaten;
- meetkundige begrippen zoals: loodrecht, evenwijdig, hoek, afstand, e.d., gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.

De koers van een vliegtuig is de hoek die zijn vliegrichting maakt met het noorden. Zo'n hoek wordt rechtsom (met de wijzers van de klok mee) gemeten. De verplaatsing van het vliegtuig heeft een richtingshoek (de koers) en een lengte (de snelheid). Hij is op te splitsen in een noordelijke component en een oostelijke component.



Figuur 1.2

a Als de verplaatsing een grootte heeft van 500 km en een richtingshoek van 30°, hoe groot zijn dan de noordelijke component en de oostelijke component?

Je kunt de hoek van de verplaatsing aanpassen. Vergroot de hoek.

b Bij welke hoek wordt de noordelijke component een zuidelijke component?

c Bij welke hoek is de zuidelijke component even sterk als de noordelijke component bij 30°?

d Bij welke hoek wordt de oostelijke component een westelijke component?

e Als je de verplaatsingen met een westelijke component meetelt, zijn er nog twee hoeken met dezelfde noordelijke of zuidelijke component als de noordelijke component bij 30°. Hoe groot zijn deze hoeken?

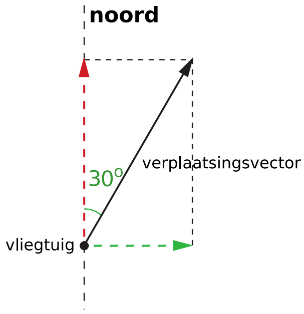
Uitleg 1

Bekijk de applet.

De verplaatsing van bijvoorbeeld een vliegtuig beschrijf je met twee grootheden:

- de richting, bijvoorbeeld de hoek met het noorden is $30°$.
- de afstand, bijvoorbeeld over 500 km.

Teken een pijltje, een vector, wanneer zowel afstand als richting belangrijk is. De lengte van de vector is de afstand in kilometer, de richting is de richtingshoek ten opzichte van de hoofdrichting, in dit geval het noorden.
Geef deze verplaatsingsvector als $(30°,500)$.



Figuur 1.3

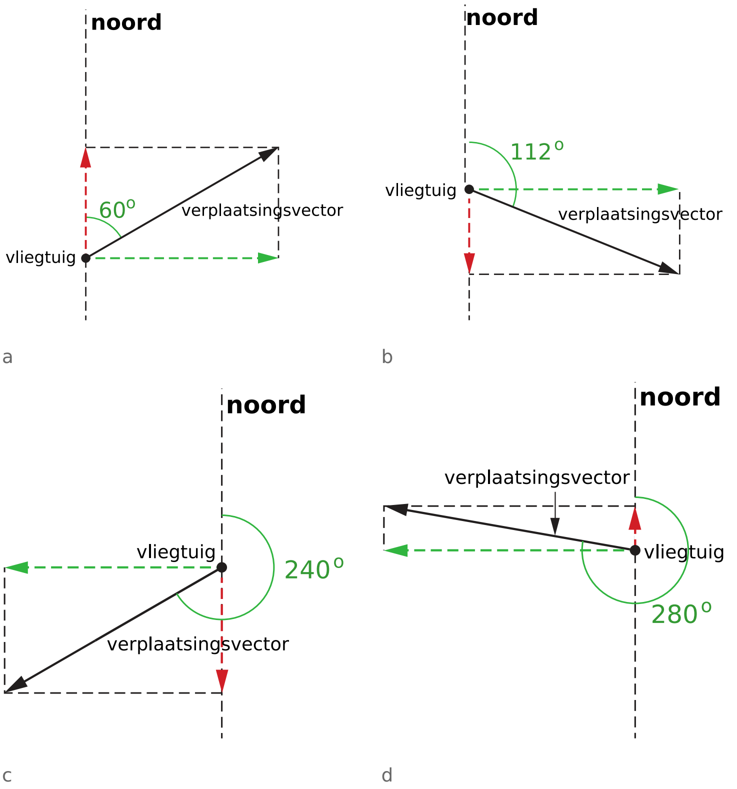
Omdat er een hoofdrichting is (het noorden), kun je doen alsof de vector bestaat uit een noordelijke component samen met een oostelijke component. De richting van een component kan negatief zijn. De noordelijke component is negatief als hij naar het zuiden wijst. De oostelijke component is negatief als hij naar het westen wijst.
Bepaal de lengte van de twee componenten door de vector te ontbinden in twee onderling loodrechte richtingen (noord en oost). Je kunt de lengte van die componenten meten (of berekenen met behulp van sinus of cosinus).

De lengte van de oostelijke component is 250.
De lengte van de noordelijke component is ≈ 433.

Het punt waar de vector begint, heet het aangrijpingspunt. Het aangrijpingspunt is geen eigenschap van de vector. Als er meerdere vliegtuigen van verschillende plaatsen vertrekken, zijn de aangrijpingspunten verschillend, maar toch kunnen de verplaatsingsvectoren gelijk zijn.

Opgave 1

Bekijk de vier figuren waarin een verplaatsingsvector met lengte 400 is getekend. Bepaal bij elke situatie de lengte van de noordelijke component en de lengte van de oostelijke component. Rond zo nodig af op gehele getallen. Geef met behulp van mintekens de richting aan.



Figuur 1.4

Opgave 2

Van een verplaatsingsvector zijn de componenten gegeven. Bereken de lengte van deze vector en maak er eventueel een tekening van. Bepaal ook de grootte van de bijbehorende richtingshoek α (door opmeten of met behulp van tangens).

a noordelijke component: 200 km, oostelijke component: 100 km.

b noordelijke component: -300 km, oostelijke component: 400 km.

c noordelijke component: -200 km, oostelijke component: 300 km.

d noordelijke component: -200 km, oostelijke component: -150 km.

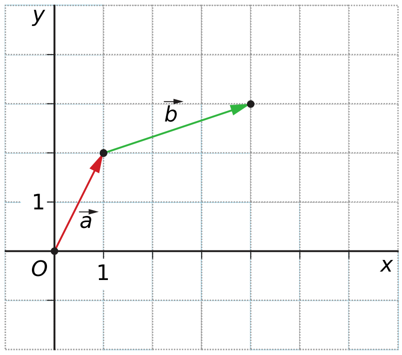
e noordelijke component: 0 km, oostelijke component: -100 km.

f noordelijke component: -200 km, oostelijke component: 0 km.

Uitleg 2

Bekijk de applet.

In de wiskunde bestudeer je verplaatsingen het liefst in een cartesisch assenstelsel Oxy. Daarin neem je aan dat de positieve x-as de hoofdrichting is en elke hoek vanaf die hoofdrichting tegen de wijzers van de klok in wordt gemeten. Een vector kun je dan gemakkelijk beschrijven met een component in de x-richting en een component in de y-richting: $\vec{a}= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Figuur 1.5

Zo'n vector heeft geen vast startpunt, alleen de richting en de lengte zijn eigenschappen van elke vector. Zo'n vector kun je gemakkelijk verlengen, de componenten worden dan beide met hetzelfde getal vermenigvuldigd: $3 \cdot \vec{a}= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ of meer algemeen:

$k \cdot \vec{a}= \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix}$.

Je telt vectoren op door twee verplaatsingen na elkaar uit te voeren. Dan zet je de vectoren na elkaar, ‘staart aan kop’. De vector vanaf het allereerste startpunt tot het allerlaatste eindpunt is dan de som van beide vectoren, de vectoren worden opgeteld. Dit kan eenvoudig door de kentallen op te tellen: $\vec{a} + \vec{b}= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Als je twee vectoren van elkaar wilt aftrekken, tel je het tegengestelde van de tweede vector op bij de eerste vector: $\vec{a} - \vec{b}=\vec{a} + \text{-}\,\vec{b}= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-}2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** hoe er met vectoren wordt gewerkt. Gebruik de gegeven vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

a Teken $\vec{p}= 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p}$.

b Teken $\vec{p}=\vec{a} - \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p}$.

c Teken $\vec{p}= 3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p}$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

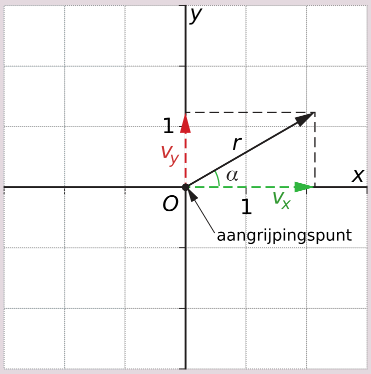
Een **vector** $\vec{v}$ is een grootheid met lengte en richting.
Een vector kun je beschrijven met:

- de **lengte** r van de vector;
- de **richtingshoek** α, de hoek die de vector maakt met de gekozen hoofdrichting.

In de wiskunde is de standaard hoofdrichting in een assenstelsel de positieve x-as. Verder wordt de richtingshoek linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten.

Een vector kun je ook beschrijven met:

- de grootte van de x-**component** v_x;
- de grootte van de y-**component** v_y.



Figuur 1.6

De grootte van de componenten van een vector heten ook wel de **kentallen** van een vector.

Je noteert de vector dan als: $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

De lengte van de vector is: $|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

De getekende vector heeft de oorsprong O als **aangrijpingspunt**. Er zijn echter gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben. In de wiskunde zijn twee vectoren gelijk als hun lengtes en hun richtingshoeken gelijk zijn. Het aangrijpingspunt is geen eigenschap van een vector.

Maak de vector $\vec{v}$ langer (of korter) door hem met een factor k te vermenigvuldigen. Dit noem je **scalaire vermenigvuldiging** van de vector met k.

$$k\cdot \vec{v}=\begin{pmatrix} k \cdot v_x \\ k \cdot v_y \end{pmatrix}$$

Als $k = -1$ dan krijg je $-\vec{v}$, het **tegengestelde** van $\vec{v}$.

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je **optellen** door ze ‘staart aan kop’ te leggen. Je krijgt dan de **somvector** van $\vec{a}$ en $\vec{b}$:

$$\vec{r}=\vec{a} + \vec{b}$$

De kentallen van $\vec{r}$ ontstaan door de overeenkomstige kentallen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ op te tellen.

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je **aftrekken** door gebruik te maken van $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+-\vec{b}$.

Tel dan bij $\vec{a}$ het tegengestelde van $\vec{b}$ op.

Als je $\vec{a}$ en $-\vec{a}$ optelt, krijg je de **nulvector** $\vec{0}$.
De nulvector heeft geen richting en heeft lengte 0.

Noteer de vector met aangrijpingspunt A en eindpunt B als $\overrightarrow{AB}$.

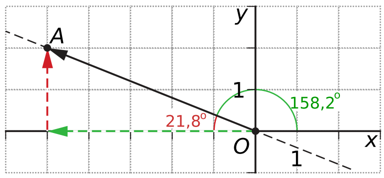
Voorbeeld 1

Gegeven zijn de punten $A(-5,2)$, $B(23,16)$ en $C(28,14)$ in een cartesisch assenstelsel.

Bereken de lengte en de richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$.

Laat zien dat de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{CB}$ gelijk zijn.

Waarom is $\overrightarrow{BC}$ niet gelijk aan $\overrightarrow{OA}$?



Figuur 1.7

Antwoord

De componenten van $\overrightarrow{OA}$ zijn -5 en 2. Dit geeft: $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$.

De lengte van $\overrightarrow{OA}$ is: $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}$.

De richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$ wordt bepaald door de hoek α die lijn OA met de x-as maakt en daarvoor geldt: $\tan(\alpha)=\frac{2}{5}$.

Die hoek is ongeveer $21{,}8°$.

Hieruit volgt de richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$: $180-21{,}8=158{,}2°$.

De componenten van $\overrightarrow{CB}$ zijn $23-28=-5$ en $16-4=2$. Dit geeft: $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CB}$ heeft dus dezelfde kentallen en dezelfde lengte en richtingshoek als $\overrightarrow{OA}$.

$\overrightarrow{BC}$ heeft de tegenovergestelde richting ten opzichte van $\overrightarrow{CB}$ en ook ten opzichte van $\overrightarrow{OA}$: $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{OA}$.

Opgave 4

Gegeven zijn de punten $A(-2,1)$, $B(1,6)$, $C(-31,12)$ en $D(-28,17)$ in een cartesisch assenstelsel. Bereken $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ en $\left|\overrightarrow{CD}\right|$ en de richtingshoeken van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$. Laat zien dat beide vectoren gelijk zijn.

Opgave 5

Bepaal lengte en richtingshoek van de vectoren:

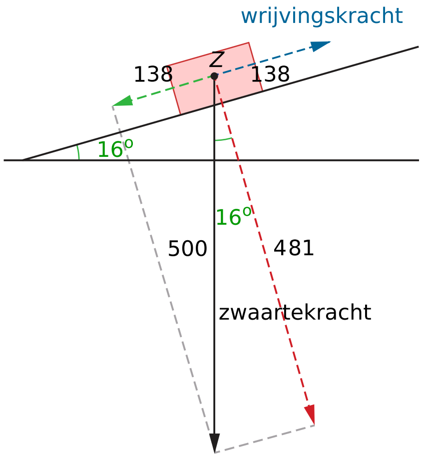
$$\vec{a}=\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-15\\7\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\8\end{pmatrix}, \vec{d}=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}, \vec{e}=\begin{pmatrix}13\\0\end{pmatrix} \text{ en } \vec{f}=\begin{pmatrix}13\\-25\end{pmatrix}$$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Een blok hout ligt op een hellend vlak. Het ondervindt een zwaartekracht van 500 N. (In de figuur zijn alle krachten in eenheden van 100 N uitgedrukt.)

Bij welke hellingshoek begint het blok te glijden als de maximale wrijvingskracht 200 N is?



Figuur 1.8

Antwoord

Het blok begint te glijden als de component van de zwaartekracht langs het hellende vlak net iets groter is dan de wrijvingskracht, dus net iets meer is dan 200 N. Bij precies 200 N is de component van de zwaartekracht loodrecht op het hellende vlak $\sqrt{500^2-200^2} \approx 458$ N. De hellingshoek van het hellende vlak is gelijk aan de hoek tussen de component loodrecht op het hellende vlak en de zwaartekracht. Dit betekent: $\tan(\alpha) \approx \frac{200}{458}$ dus de gevraagde hoek is 23,6°. Om α te berekenen, gebruik je de arctan-functie. Op sommige rekenmachines is dat de functie $\tan^{-1}$.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** de toepassing van het werken met vectoren in de natuurkunde.

a Hoe groot zal in de weergegeven situatie de wrijvingskracht zijn?

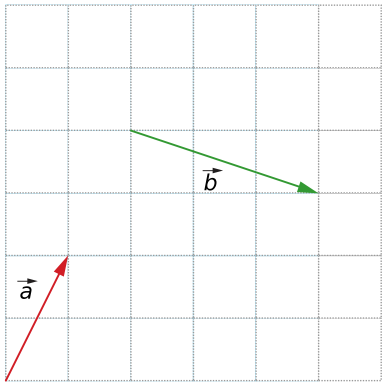
b Bij welke hellingshoeken blijft het gewicht liggen?

c Leg uit waarom de hoek tussen de component loodrecht op het hellende vlak en de zwaartekracht altijd gelijk is aan de hellingshoek van het vlak.

d Bereken de maximale hellingshoek waarbij een gewicht dat een zwaartekracht van 350 N ondervindt, nog blijft liggen op het hellende vlak.

Voorbeeld 3

Bekijk de vectoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$



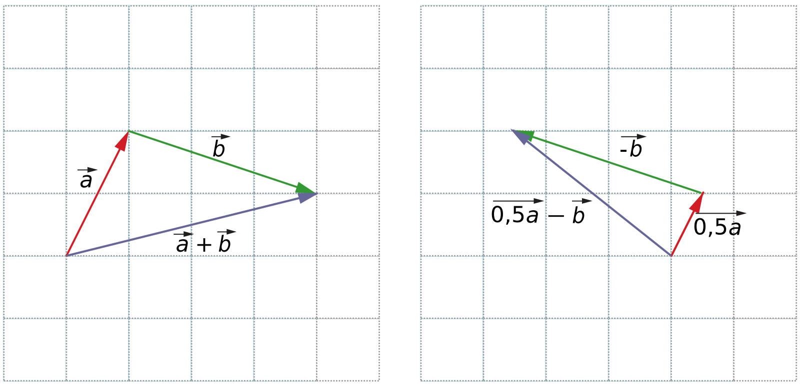
Figuur 1.9

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ worden opgeteld tot $\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1+3\\2+-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

Dit heet de ‘staart aan kop’-methode.

Op dezelfde manier maak je $0{,}5\,\vec{a}-\vec{b}$.

Bekijk de applet.



Figuur 1.10

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je vectoren kunt optellen en aftrekken en vermenigvuldigen met een getal. Gebruik de gegeven vectoren.

a Teken de vector $2\,\vec{a}$ en bepaal de kentallen ervan.

b Teken de vector $2\,\vec{a}+1{,}5\,\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

c Teken de vector $-2\,\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

d Teken de verschilvector van $-\vec{a}$ en $\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

Opgave 8

Gegeven zijn de punten $A(3,4)$ en $B(5,2)$ en de vectoren $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ en $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ in een cartesisch assenstelsel.

a Laat zien dat $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

Gegeven zijn de punten $A\left(a_x,a_y\right)$ en $B\left(b_x,b_y\right)$ en de vectoren $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ en $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ in een cartesisch assenstelsel.

b Laat zien dat $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

Verwerken

Opgave 9

Een vector $\vec{v}$ heeft een gegeven lengte en een gegeven richtingshoek α ten opzichte van de positieve x-as. Bepaal de x-component en de y-component, in één decimaal nauwkeurig.

a $|\vec{v}| = 3$ en $\alpha = 135°$

b $|\vec{v}| = 5$ en $\alpha = 210°$

c $|\vec{v}| = 4$ en $\alpha = 300°$

d $|\vec{v}| = 2$ en $\alpha = 270°$

Opgave 10

Gegeven is telkens een vector $\vec{v}$ door zijn x- en y-componenten. Bereken de lengte en de richtingshoek van deze vector. Geef de lengte exact, rond de hoek af op één decimaal.

a $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b $\vec{v} = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \end{pmatrix}$

c $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix}$

d $\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$

Opgave 11

Gegeven is $O(0,0)$ en punt A met $|\overrightarrow{OA}| = 5$. Voor een ander punt B geldt $|\overrightarrow{OB}| = 2 \cdot |\overrightarrow{OA}|$. De richtingshoek van $\overrightarrow{OB}$ ten opzichte van de x-as tegen de klok in is $30°$. Bepaal de coördinaten van punt B en rond af op één decimaal.

Opgave 12

Gegeven zijn de vectoren:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 17 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \end{pmatrix}$.

Bepaal de kentallen van de volgende vectoren.

a $\vec{v}_1 = \vec{b} + \vec{c}$

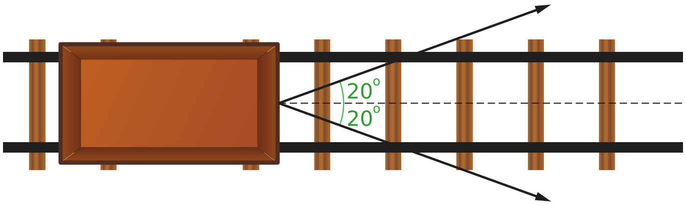
b $\vec{v}_2 = \vec{f} + 0{,}5\,\vec{c}$

c $\vec{v}_3 = \vec{a} - \vec{e} - 2\,\vec{d}$

d $\vec{v}_4 = \vec{e} + \vec{d} - \vec{b}$

Opgave 13

Een lorrie is een karretje dat op rails loopt. Twee personen trekken een lorrie met dezelfde kracht van 8 N elk aan een touw.



Figuur 1.11

a Met welke kracht trekken beide personen samen aan het karretje in de rechter richting? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

b Beantwoord dezelfde vraag als de ene persoon trekt met een kracht van 8 N en de andere met een kracht van 6 N. De hoeken blijven gelijk. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 14

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met hoekpunten $A(-23{,}61)$, $B(7{,}51)$, $C(-3{,}91)$ en $D(-33{,}101)$. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van $ABCD$.

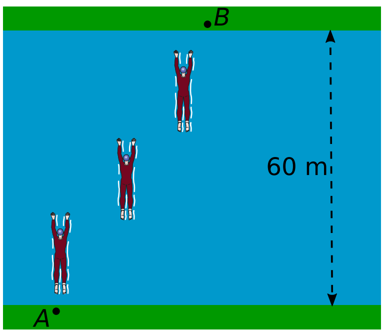
a Bepaal de componenten van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$. Toon met behulp van deze twee vectoren aan dat vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.

b Bereken de hoek tussen vectoren $\overrightarrow{AS}$ en $\overrightarrow{SB}$.

Toepassen

Opgave 15: Zwemmer (1)

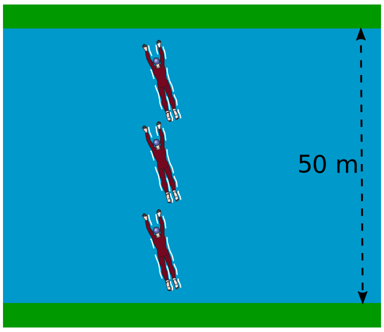
Een zwemmer probeert een rivier met een breedte van 60 meter recht over te steken, maar hij heeft last van de stroming. Tot zijn verbazing komt hij niet recht tegenover zijn startpunt A op de andere oever aan, maar in een punt B dat verder stroomafwaarts ligt. De stroomsnelheid is 0,6 km/h en de zwemmer bereikt in 5 minuten de overkant van de rivier. Wat is de snelheid in km/h waarmee hij AB aflegt? Geef je antwoord in drie decimalen.



Figuur 1.12

Opgave 16: Zwemmer (2)

Iemand zwemt met een snelheid van 2 km/h schuin tegen de stroom van een rivier met een stroomsnelheid van $0{,}6$ km/h in. Daardoor steekt hij de rivier precies loodrecht op de oevers (en de stroomrichting) in de breedte over. De rivier is 50 m breed. Hoe lang doet hij over de overtocht?



Figuur 1.13

Opgave 17: Sportvliegtuig

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt drie uur met een constante snelheid van 140 km/h in een koers van $30°$ ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in $170°$ en de snelheid in 120 km/h. Na anderhalf uur moet hij een noodlanding maken.

a Maak van deze vlucht een tekening op schaal.

b Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bepaal de verplaatsingsvector van de helikopter. Reken daarmee ook de koershoek (ten opzichte van het noorden) en de lengte van de verplaatsingsvector uit.

Testen

Opgave 18

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a Bereken de lengte van beide vectoren in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de richtingshoek van beide vectoren in graden nauwkeurig.

c Bereken de kentallen van de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$ en $0{,}5\,\vec{a} - \vec{b}$.

d Bereken de kentallen van de vector $\vec{c}$ zo, dat $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opgave 19

Gegeven zijn de punten $P(0,12)$ en $Q(8,2)$.

a Bereken $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ en de hoek die $\overrightarrow{PQ}$ met de positieve x-as maakt, zo nodig in één decimaal.

b $\overrightarrow{OR}$ is even lang als $\overrightarrow{PQ}$ maar heeft een richtingshoek van $120°$ met de positieve x-as. Bepaal de coördinaten van R.

Practicum: GeoGebra IV

Je kunt GeoGebra heel goed gebruiken om rechten en krommen met een gegeven vergelijking in beeld te brengen. Je ziet dan meteen of er snijpunten zijn. En met GeoGebra kun je gemakkelijk snijpunten van twee (rechte of kromme) lijnen in de figuur aangeven. Ook kun je in GeoGebra met **vectoren** werken:

- Vector tussen twee punten: Maakt een vector van het eerst aangeklikte punt naar het tweede punt.
- Vector met beginpunt: Maakt een vector vanuit een aangeklikt punt die gelijk is aan de aangeklikte vector. Dit gebruik je vooral om gelijke vectoren te maken.
- Algebraïsche invoer van een vector met gegeven kentallen: v=(-5,2) geeft de vector $\vec{v}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ vanuit de oorsprong van het assenstelsel. Merk op dat GeoGebra vectoren en coördinaten op dezelfde manier noteert!

2.2 Sinus, cosinus en tangens

Inleiding

Een vliegtuig legt 500 km af met een koers van $30°$ ten opzichte van het noorden. Hoeveel km verplaatst het vliegtuig zich in noordelijke richting? Dit kun je nauwkeurig berekenen met behulp van goniometrie. Er is immers sprake van een rechthoekige driehoek. Maar wat als de windrichting bijvoorbeeld $120°$ is?

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- sinus, cosinus en tangens gebruiken bij vectoren;
- sinus, cosinus en tangens van hoeken boven de $90°$ gebruiken.

Voorkennis

- werken met goniometrische verhoudingen in rechthoekige driehoeken;
- vectoren met gegeven richting en lengte tekenen en de componenten bepalen door meting;
- van vectoren gegeven door hun x- en y-componenten de lengte en de richtingshoek berekenen.

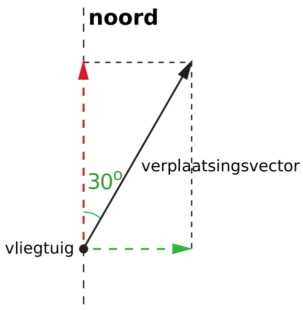
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.

Je ziet een vliegtuig met een gegeven verplaatsingsvector. Kun je nauwkeurig vaststellen hoeveel het in noordelijke dan wel oostelijke richting is verplaatst? M.a.w. kun je de noordelijke component en de oostelijke component berekenen?

Stel je voor dat de verplaatsing 500 km bedraagt en de richtingshoek $30°$ is.



Figuur 2.2

a Bereken de noordelijke component en de oostelijke component beiden met behulp van zowel de sinus en cosinus.

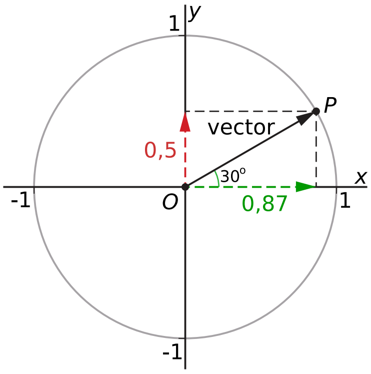
b Bereken ook de noordelijke component bij een richtingshoek van $120°$. Waarom is hij negatief?

Uitleg

Bekijk de applet.

Je hebt al leren werken met sinus, cosinus en tangens, maar meestal bij scherpe hoeken. Het werken met vectoren maakt het mogelijk om de definities van sinus, cosinus en tangens uit te breiden voor grotere hoeken.

Bekijk de vector met een lengte van 1 in een eenheidscirkel (cirkel met middelpunt O en straal 1). Zolang de richtingshoek α scherp (tussen 0° en 90°) is, kun je de componenten van deze vector berekenen met goniometrie:



Figuur 2.3

$\cos(\alpha) = \frac{v_x}{1}$ dus $v_x = \cos(\alpha)$

$\cos(30°) = \frac{v_x}{1}$ dus $v_x = \cos(30°) \approx 0{,}87$

$\sin(\alpha) = \frac{v_y}{1}$ dus $v_y = \sin(\alpha)$

$\sin(30°) = \frac{v_y}{1}$ dus $v_y = \sin(30°) = 0{,}5$

Door af te spreken dat $v_x = \cos(\alpha)$ en $v_y = \sin(\alpha)$ ook voor alle andere hoeken geldt, geef je de sinus en de cosinus voor alle mogelijke hoeken betekenis. Bekijk in de figuur dat dan voor hoeken tussen 90° en 270° de cosinus negatief is en ook dat voor hoeken tussen 180° en 360° de sinus negatief is.

Opgave 1

Bereken met de rekenmachine in twee decimalen de componenten van een verplaatsingsvector met lengte 1 bij de richtingshoeken.

a 40°

b 140°

c 240°

d 340°

e De verplaatsingsvectoren uit a, b, c en d krijgen allemaal een lengte van 500. Wat betekent dit voor alle componenten?

Opgave 2

Beredeneer dat:

a $\sin(100°) = \sin(80°)$

b $\cos(100°) = -\cos(80°)$

c $\sin(253°) = -\sin(73°)$

d $\cos(280°) = \cos(80°)$

Opgave 3

Beredeneer dat:

a $\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)$

b $\cos(\alpha) = -\cos(180° - \alpha)$

c $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$

d $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

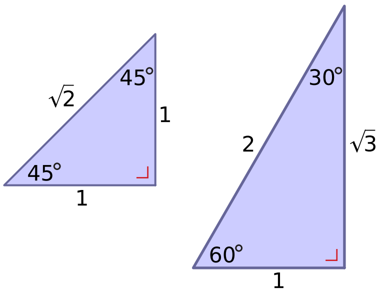
Opgave 4

Van een aantal hoeken kun je de sinus, de cosinus en de tangens exact berekenen. Omdat die hoeken regelmatig voorkomen, is het handig om die exacte waarden te weten. Bekijk de twee bijzondere driehoeken. De rechter is een halve gelijkzijdige driehoek en de linker is een geodriehoek.

a Bereken sinus, cosinus en tangens van $60°$ en van $30°$.

b Bereken sinus, cosinus en tangens van $45°$.

c De tabel met de exacte waarden van sinus, cosinus en tangens van $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ en $90°$ is heel handig om uit je hoofd te kennen. Maak deze tabel.



Figuur 2.4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

In de **eenheidscirkel** (de cirkel met middelpunt O met straal 1) zie je een vector met aangrijpingspunt O en met een lengte van 1 in een assenstelsel. De componenten van zo'n vector zijn:

$v_x = \cos(\alpha)$

$v_y = \sin(\alpha)$

Dit geldt voor alle mogelijke hoeken α.

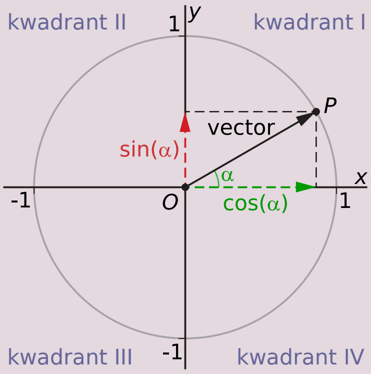
Het assenstelsel verdeelt het vlak in vier **kwadranten**. Voor hoeken in het tweede kwadrant is de cosinus negatief en de sinus positief. Voor hoeken in het derde kwadrant zijn de cosinus en de sinus beide negatief. Voor hoeken in het vierde kwadrant is de cosinus positief en de sinus negatief.

Er geldt: $\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x}$.

Is de lengte van de vector niet 1 maar bijvoorbeeld r, dan worden beide componenten ook r keer zo groot. De **componenten van een vector** met lengte r en **richtingshoek** α zijn:

$v_x = r\cos(\alpha)$

$v_y = r\sin(\alpha)$



Figuur 2.5

Exacte waarden sinus, cosinus en tangens					
hoek	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Tabel 2.1

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Bereken exact de sinus, cosinus en tangens van hoeken van 60° en 120°.

Antwoord

De vector heeft lengte 1 en richtingshoek α.
Als $\alpha = 60°$ is ΔOPQ precies een halve gelijkzijdige driehoek.

Voor de x-component geldt: $v_x = \frac{1}{2}$.

Voor de y-component geldt: $v_y = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Daarom geldt:

$\cos(60°) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

$\sin(60°) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

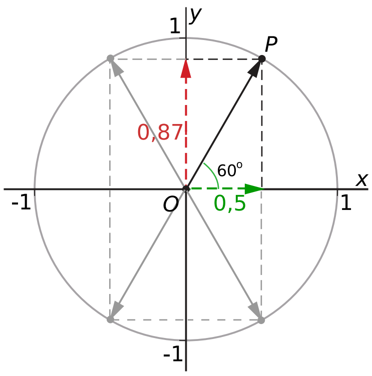
$\tan(60°) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Vervolgens is:

$\sin(120°) = \sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos(120°) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}$

$\tan(120°) = -\tan(60°) = -\sqrt{3}$



Figuur 2.6

Opgave 5

Bepaal met behulp van de eenheidscirkel de exacte waarden van sin, cos en tan van 240° en 300°.

Opgave 6

Bepaal bij de gegeven richtingshoek telkens exact de sinus, cosinus en tangens.

a $\alpha = 135°$

b $\alpha = 225°$

c $\alpha = 315°$

Opgave 7

Bepaal bij de gegeven richtingshoek telkens exact de sinus, cosinus en tangens.

a $\alpha = 150°$

b $\alpha = 210°$

c $\alpha = 330°$

Opgave 8

Gebruik indien mogelijk de exacte waarden van sinus, cosinus en tangens van $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ en $90°$.

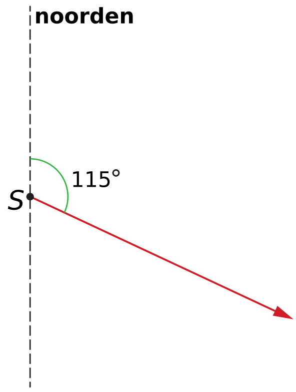
a Bepaal alle hoeken tussen $0°$ en $360°$ die voldoen aan $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

b Bepaal in graden nauwkeurig alle hoeken tussen $0°$ en $360°$ die voldoen aan $\sin(\beta) = -0{,}6$.

c Bepaal in graden nauwkeurig alle hoeken tussen $0°$ en $360°$ die voldoen aan $\tan(\gamma) = -0{,}6$.

Voorbeeld 2

Een schip vaart 40 kilometer met een koers van $115°$ ten opzichte van het noorden. Dergelijke kompaskoersen worden altijd met de klok mee gemeten. Hoeveel heeft het schip zich in noordelijke of zuidelijke richting verplaatst?



Figuur 2.7

Antwoord

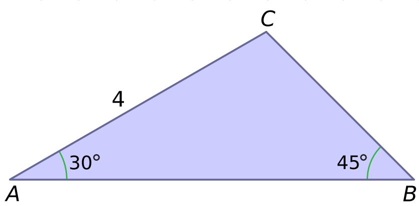
Projecteer de koers van het schip op een eenheidscirkel.
Gebruik de sinus: $v_y = \sin(\alpha)$ om de afstand in noordelijk of zuidelijke richting te bepalen.
Beredeneer dat $40 \sin(335°) \approx -16{,}9$ km.
Het schip heeft zich 16,9 km in zuidelijke richting verplaatst.

Opgave 9

Een schip vaart 80 kilometer met een koers van $215°$ ten opzichte van het noorden. Hoeveel heeft het schip zich in noordelijke of zuidelijke richting verplaatst? En hoeveel in oostelijke of westelijke richting? Geef je antwoorden in één decimaal.

Voorbeeld 3

Bekijk ΔABC met $\angle A = 30°$, $\angle A = 45°$ en $AC = 4$ cm.
Bereken de exacte lengte van AB.



Figuur 2.8

Antwoord

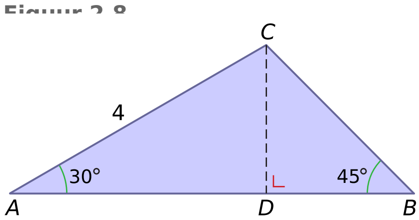
Zonder rechte hoeken kun je niet met sin, cos en/of tan werken.
Maak eerst rechte hoeken.

Vat AC als vector op, zodat AD en DC de componenten zijn:

$|AD| = 4\cos(30°) = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$|CD| = 4\sin(30°) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

ΔDBC is een gelijkbenige driehoek: $|DB| = |CD| = 2$.
Hieruit volgt het antwoord: $|AB| = 2\sqrt{3} + 2$.



Figuur 2.9

Opgave 10

Gegeven is ΔPQR met $\angle P = 50°$, $\angle Q = 35°$ en $|PR| = 6$ cm.
Bereken de lengte van PQ en QR. Geef benaderingen in twee decimalen.

Opgave 11

Gegeven is ΔKLM met $\angle K = 60°$, $\angle L = 45°$ en $|LM| = 4$ cm.
Bereken de exacte lengte van KL en KM.

Verwerken

Opgave 12

Bereken de x- en de y-componenten van de volgende vectoren. Geef waar mogelijk exacte uitkomsten.

a $|\vec{v}| = 3$ en $\alpha = 135°$

b $|\vec{v}| = 5$ en $\alpha = 210°$

c $|\vec{v}| = 4$ en $\alpha = 320°$

d $|\vec{v}| = 2$ en $\alpha = 270°$

Opgave 13

Bereken in graden nauwkeurig alle hoeken α met $0° \leq \alpha \leq 360°$ waarvoor geldt:

a $\cos(\alpha) = 0{,}38$

b $\sin(\alpha) = 0{,}38$

c $\cos(\alpha) = -0{,}38$

d $\sin(\alpha) = -0{,}38$

e Teken een eenheidscirkel om het verband te vinden tussen $\cos(\alpha)$ en $\cos(-\alpha)$. Doe hetzelfde voor $\cos(\alpha)$ en $\cos(180° - \alpha)$.

Opgave 14

Bereken in graden nauwkeurig alle hoeken α met $0° \leq \alpha \leq 360°$ waarvoor geldt:

a $\cos(\alpha) = 0$

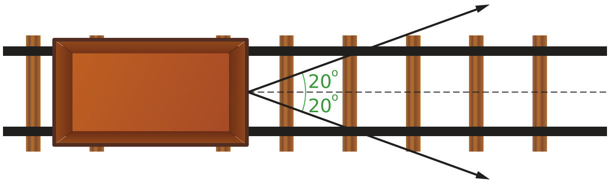
b $\cos(\alpha) = 1$

Opgave 15

Teken ΔABC met $\angle A = 120°$, $\angle B = 45°$ en $|AC| = 5$ cm. Bereken de exacte lengte van AB en BC.

Opgave 16

Twee personen trekken elk aan een touw een lorrie voort. Ze lopen beiden op dezelfde afstand van het midden van de rails. De hoek tussen beide touwen is $40°$. De grootte van elke kracht is 7 N.



Figuur 2.10

a Bereken de kracht die ze samen uitoefenen in de bewegingsrichting van de lorrie in één decimaal nauwkeurig.

b Doe hetzelfde voor de situatie waarin de ene persoon trekt met een kracht van 8 N onder een hoek van $20°$ ten opzichte van de rails en de ander trekt met een kracht van 6 N onder een hoek van $15°$ ten opzichte van de rails.

c In welke van beide situaties loopt de lorrie soepeler over de rails? Verklaar je antwoord.

Opgave 17

Bekijk deze foto van een huis met een zogenaamd mansardedak.

De breedte van het huis is 6 meter en de breedte van elk dakdeel is $2{,}5$ meter. De onderste dakdelen maken een hellingshoek van $65°$ met een horizontaal vlak.

Figuur 2.11

a Bereken de hoogte van het huis als de dakgoot op 3 meter boven de begane grond zit.

b Bereken de hellingshoek van de bovenste dakdelen.

Toepassen

Opgave 18: Noodlanding

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt 3 uur met een constante snelheid van 140 km/h in de koers $30°$ ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in $170°$ en de snelheid in 120 km/h. Na $1{,}5$ uur moet hij een noodlanding maken. Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bereken de verplaatsingsvector van de helikopter.

Opmerking: Dit is dezelfde opgave als in 'Toepassen' van het vorige onderdeel, maar het verschil is dat je hiervoor nog mocht meten en nu moet je berekenen.

Testen

Opgave 19

Bereken (exact indien mogelijk, anders in graden nauwkeurig) alle hoeken α met $0° \leq \alpha \leq 360°$ waarvoor geldt:

a $\sin(\alpha) = -0{,}83$

b $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 20

Gegeven zijn de punten $P(0{,}8)$ en $Q(12{,}3)$.

a Bereken $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ en de hoek die $\overrightarrow{PQ}$ met de positieve x-as maakt.

b $\overrightarrow{OR}$ is even lang als $\overrightarrow{PQ}$ maar heeft een richtingshoek van $120°$ met de positieve x-as. Bereken de exacte coördinaten van R.

Opgave 21

Teken ΔABC met $\angle A = 30°$, $\angle B = 135°$, en $|AC| = 10$. Bereken de exacte lengte van AB en BC.

2.3 De sinusregel

Inleiding

Niet altijd zijn driehoeken netjes voorzien van een rechte hoek. Om toch met $\sin$, $\cos$ of $\tan$ te kunnen werken heb je dan hulplijnen nodig die voor rechte hoeken zorgen. Bovendien moet je dan een aantal berekeningsstappen zetten. De sinusregel maakt het rekenwerk wat eenvoudiger...

Je leert in dit onderwerp

- de sinusregel gebruiken.

Voorkennis

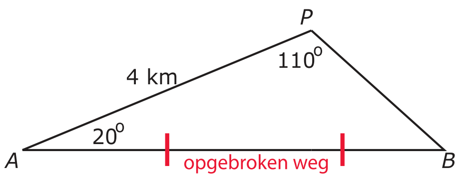
- werken sinus, cosinus en tangens;
- werken met hoeken groter dan $90°$.

Verkennen

Opgave V1

Tussen de punten A en B is de weg opgebroken. Er is een omleiding via P. De wegen AB en AP maken een hoek van $20°$ met elkaar. De hoek tussen PA en PB is $110°$. De weg van A naar P is 4 km.

Hoeveel langer is de weg A naar B via P dan de rechtstreekse weg AB?

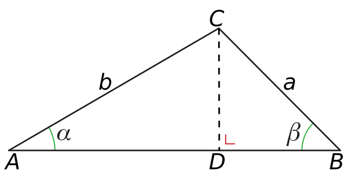


Figuur 3.1

Opgave V2

Bekijk de driehoek.

Laat zien, dat $a \sin(\beta) = b \sin(\alpha)$ door de lengte van CD op twee manieren te berekenen.



Figuur 3.2

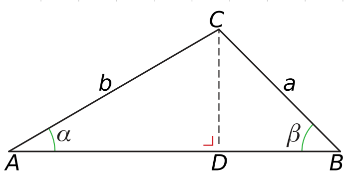
Uitleg

Je kunt een verband afleiden tussen a, b, $\sin(\alpha)$ en $\sin(\beta)$ door de hoogtelijn CD op twee manieren te schrijven:

- In ΔADC is $|CD| = b \sin(\alpha)$.
- In ΔDBC is $|CD| = a \sin(\beta)$.

Dit betekent: $b \sin(\alpha) = a \sin(\beta)$. Dit kun je schrijven als: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$. Met behulp van een andere hoogtelijn kun je ook zo'n verband tussen a, c, $\sin(\alpha)$ en $\sin(\gamma)$ afleiden. Hierin is $c = |AB|$ en $\gamma = \angle C$.

Dit verband tussen de hoeken en de zijden van een driehoek heet de ‘sinusregel’.



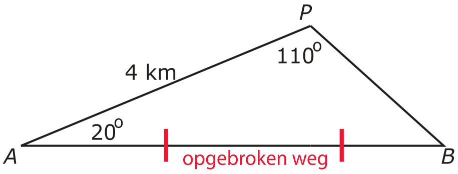
Figuur 3.3

Opgave 1

Gebruik de sinusregel om het volgende (reeds bekende) probleem op te lossen.

Tussen de punten A en B is de weg opgebroken. Er is een omleiding via P. De wegen AB en AP maken een hoek van 20° met elkaar. De hoek tussen PA en PB is 110°. De weg van A naar P is 4 km.

Hoeveel langer is de weg A naar B via P dan de rechtstreekse weg AB?



Figuur 3.4

Opgave 2

Gegeven is ΔABC met $|AB| = 5$ cm, $\angle A = 40°$ en $\angle C = 65°$. Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Gegeven is ΔDEF met $|DE| = 5$ cm, $\angle D = 40°$ en $\angle E = 65°$. Bereken de lengte van DF in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

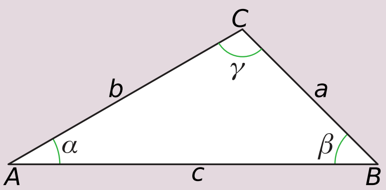
De algemene afspraak voor het geven van namen aan onderdelen van driehoek ABC is:

$\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$ en $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$.

Nu kun je zelf afleiden: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. Laat dat zien.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



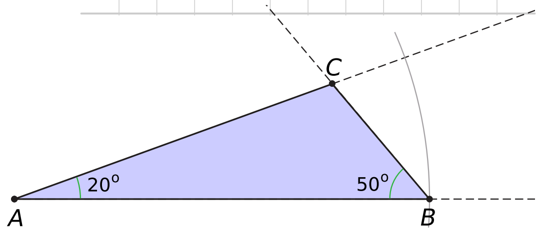
Figuur 3.5

In elke ΔABC geldt de **sinusregel**: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Je gebruikt hem vooral in driehoeken die geen rechte hoek hebben.

Voorbeeld 1

Bekijk de constructie van ΔABC met $\angle A = 20°$, $\angle B = 50°$ en $|AB| = 6$. Bereken de lengte van AC.



Figuur 3.6

Antwoord

Merk eerst op dat $\angle C = 110°$.

$\frac{|AC|}{\sin(50°)} = \frac{6}{\sin(110°)}$

Hieruit volgt: $|AC| \approx 4{,}89$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je de constructie van ΔABC als gegeven is $\angle A = 20°$, $\angle B = 50°$ en $|AB| = 6$ cm.

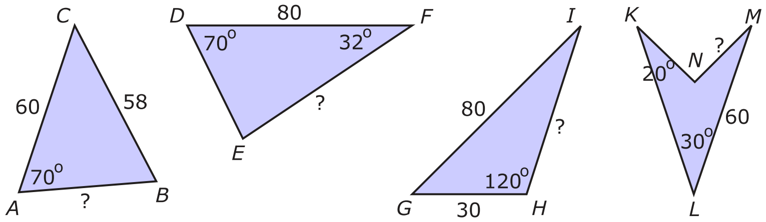
a Construeer zelf deze driehoek.

b Waarom is het voor het berekenen van de lengte van AC nodig om $\angle C$ te berekenen?

c Controleer dat inderdaad $|AC| \approx 4{,}89$.

Opgave 6

Bereken de zijde waar het vraagteken bij staat.



Figuur 3.7

Opgave 7

Je kunt de sinusregel op meerdere manieren schrijven. Bijvoorbeeld ook zo: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

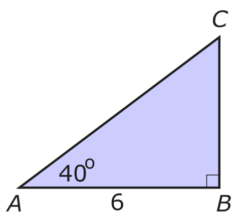
Bedenk nog twee manieren waarop je de sinusregel kunt schrijven.

Opgave 8

In deze rechthoekige driehoek kun je de lengte van AC berekenen met behulp van de sinusregel.

a Laat zien hoe dat gaat.

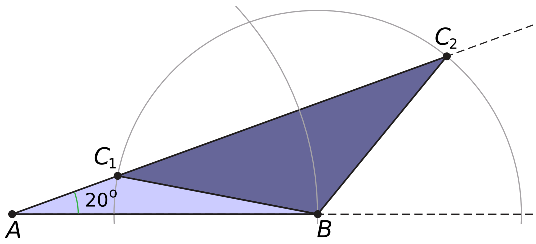
b Bereken $|AC|$ ook zonder de sinusregel te gebruiken.



Figuur 3.8

Voorbeeld 2

Bekijk de constructie van ΔABC met $\angle A = 20°$, $|AB| = 6$ en $|BC| = 4$. Bereken de lengte van AC.



Figuur 3.9

Antwoord

De sinusregel geeft: $\frac{4}{\sin(20°)} = \frac{6}{\sin(\angle C)}$.

Hieruit volgt: $\sin(\angle C) \approx 0{,}5130$.
Nu zijn er twee hoeken die hieraan voldoen: $\angle C_2 \approx 31° \vee \angle C_1 \approx 149°$.

En daarom zijn er twee driehoeken mogelijk, wat de constructie ook laat zien. Van deze driehoeken is $\angle B_2 \approx 129° \vee \angle B_1 \approx 11°$. Pas je nog een keer de sinusregel toe, dan vind je: $|AC| \approx 9{,}1 \vee |AC| \approx 2{,}2$.

Opgave 9

ΔKLM heeft $\angle K = 30°$, $|KL| = 5$ cm en $|LM| = 4$ cm. Construeer de twee mogelijke driehoeken en bereken voor allebei de lengte van KM.

Opgave 10

Van een ΔABC is $|AB| = 20$, $|BC| = 25$ en $\angle A = 60°$.

a Toon aan dat $\sin(\angle C) = \frac{2}{5}\sqrt{3}$.

b Welke hoeken voldoen aan $\sin(\angle C) = \frac{2}{5}\sqrt{3}$?

c Je berekent hoeken uit een driehoek. Welke hoek voldoet?

d Bereken nu de lengte van AC.

Verwerken

Opgave 11

Gegeven is ΔABC met $\angle A = 25°$, $\angle B = 55°$ en $|AB| = 5$.
Bereken $|AC|$ en $|BC|$ in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 12

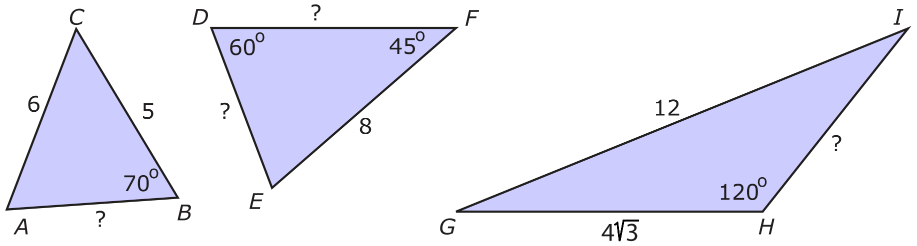
Gegeven is ΔKLM met $\angle K = 40°$, $|KM| = 6$ en $|LM| = 8$.
Bereken $\angle L$ en $\angle M$ in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 13

Laat met een berekening zien dat een driehoek ABC met $|AB| = 12$, $|AC| = 8$ en $\angle B = 45°$ onmogelijk is.

Opgave 14

Bereken (waar mogelijk exact) de zijde waar het vraagteken bij staat.



Figuur 3.10

Opgave 15

Je wilt de lengte bepalen van lijnstuk AB, maar tussen de punten A en B ligt een meertje. Je gaat nu als volgt te werk:

- Je loopt vanuit punt A 200 m in een richting die een hoek van 60° maakt met AB. Zo houd je droge voeten.
- Je bent op een punt dat je P noemt en meet de hoek tussen AP en PB. Die is 80°.
- Vervolgens bereken je de lengte van AB.

Laat met een tekening zien hoe dit in zijn werk gaat en bereken de lengte van AB.

Toepassen

Om de positie van een bepaald punt P in kaart te brengen, werkten landmeters vroeger met de sinusregel. Daartoe werden de afstanden tot P vanuit bekende punten berekend. Door omcirkelen vanuit die bekende punten kon P op de kaart worden aangegeven. Deze procedure heette ‘voorwaartse insnijding’. Deze methode werkt alleen in de ‘lagere geodesie’, de **landmeetkunde** waarbij het aardoppervlak als plat kan worden beschouwd.

Opgave 16

Stel dat A en B de bekende punten zijn. Ze liggen 125,3 m uit elkaar. Je wilt de positie van P bepalen. Je meet de hoeken BAP en ABP: $\angle BAP = 68{,}3°$ en $\angle ABP = 77{,}4°$.

Bereken nu de lengtes van AP en BP.

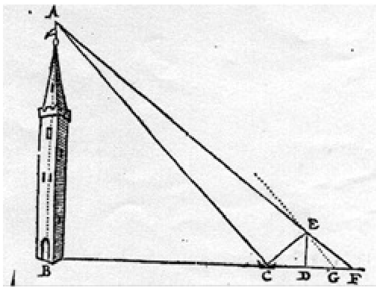
Opgave 17

Iemand wil de hoogte van een toren weten. Hij gaat een stuk van de toren vandaan staan en meet de hoek tussen de horizontale richting en de richting naar de spits van de toren (punt A). Deze hoek C is $32°$. Dan loopt hij 50 m verder van de toren vandaan en meet de hoek naar de top opnieuw; de nieuwe hoek D is nu $15°$.

a Maak een schets van deze situatie met de gegevens die bekend zijn. Ga er daarbij vanuit dat beide hoeken op $1{,}80$ m boven de grond zijn gemeten.

b Bereken de hoogte van de toren in meter nauwkeurig. (Opmerking: er is een oplossing van dit probleem waarbij je de sinusregel gebruikt, maar er is wel een oplossing te bedenken waarbij dit niet hoeft. Kun je beide oplossingen vinden?)

De Nederlandse meetkundige Sybrandt Hansz. Cardinael (1578—1647) bedacht een manier om de hoogte van een toren te bepalen. Je hebt er zelfs geen hoeken voor nodig. Hier zie je hoe hij te werk ging. De toren is AB en er ligt een spiegel op de grond in C. Je zet bij D een verticale stok DE zo, dat de top A van de toren in de spiegel gezien kan worden vanuit E. Vervolgens bepaal je de plaats van punt F zo, dat vanuit F de top A juist boven de stok DE in het verlengde van FE gezien kan worden. Als je de lengtes van CD, DE en DF kent, kun je de hoogte van de toren AB berekenen.



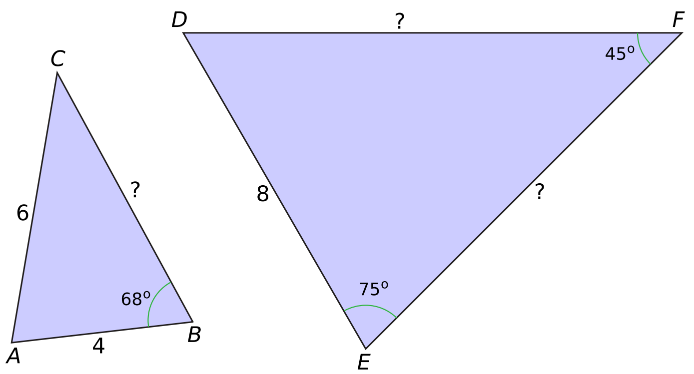
Figuur 3.11

c Bereken de hoogte van de toren als $|CD| = 8$, $|DE| = 6$ en $|DF| = 9$.

Testen

Opgave 18

Bereken (exact indien mogelijk) in de twee onderstaande figuren de lengte van het lijnstuk waar een vraagteken bij staat.



Figuur 3.12

Opgave 19

Gegeven is ΔABC met $\angle B = 45°$, $|BC| = 5$ cm en $|AC| = 4$ cm. Construeer de twee mogelijke driehoeken en bereken telkens de lengte van AB in twee decimalen nauwkeurig.

2.4 De cosinusregel

Inleiding

De sinusregel werkt niet in alle situaties, dat heb je vast wel ontdekt. Als je bijvoorbeeld van een driehoek alle zijden weet, dan kun je hem construeren, de driehoek ligt daarmee volledig vast. Toch kun je niet met behulp van de sinusregel de hoeken ervan uitrekenen. In dit geval gebruik je de cosinusregel...

Je leert in dit onderwerp

- de cosinusregel gebruiken.

Voorkennis

- werken sinus, cosinus en tangens;
- werken met hoeken groter dan $90°$.
- de sinusregel gebruiken.

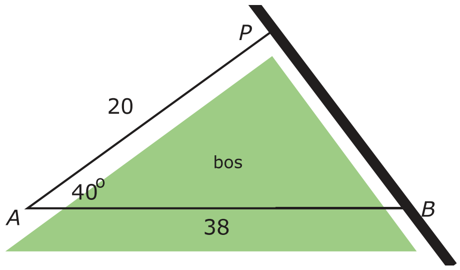
Verkennen

Opgave V1

Bij een crosscountry-wedstrijd moeten de deelnemers van punt A naar punt B zien te komen. Er zijn twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is een route rechtstreeks door het bos van A naar B. De tweede mogelijkheid is een route via punt P en een geasfalteerd fietspad. De paden AB en AP maken een hoek van $40°$ met elkaar. Het pad van A naar P is 20 m, dat van A naar B is 38 m.

a Bereken hoeveel verschil er is tussen de route AB door het bos en de route van A naar B via P en het fietspad.

b Waarom lukt dit met de sinusregel niet?

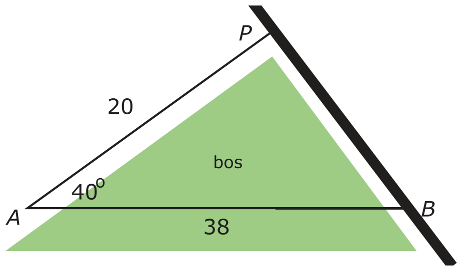


Figuur 4.1

Uitleg

Bij een crosscountry-wedstrijd moeten de deelnemers van punt A naar punt B zien te komen. Er zijn twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is een route rechtstreeks door het bos van A naar B. De tweede mogelijkheid is een route via punt P en een geasfalteerd fietspad. De paden AB en AP maken een hoek van $40°$ met elkaar. Het pad van A naar P is 20 m, dat van A naar B is 38 m.

Nu is de sinusregel niet bruikbaar. Je kunt dit alleen oplossen door een hoogtelijn PD op AB te tekenen. Dat is nog behoorlijk wat rekenwerk. Handiger is het om de cosinusregel te gebruiken in ΔABP.



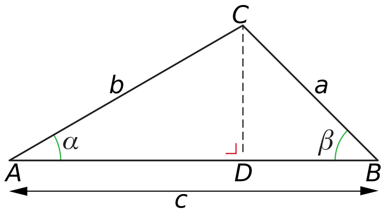
Figuur 4.2

In elke driehoek ABC geldt:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.

In de driehoek bij de crosscountry-wedstrijd is $C = P$ en dus $\alpha = 40°$, $|PB| = a$, $|AB| = c$ en $|AP| = b$.

Even invullen en je vindt $PB = a \approx 26{,}1$ m.



Figuur 4.3

Opgave 1

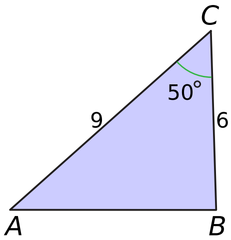
Bekijk in de **Uitleg** wat de cosinusregel is. Laat zien hoe je aan de lengte van PB komt met behulp van de cosinusregel.

Opgave 2

Bekijk driehoek ABC. Twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven.

a Hoe ziet de cosinusregel bij de gegeven hoek eruit?

b Bereken de derde zijde van deze driehoek.



Figuur 4.4

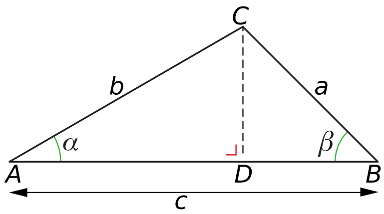
Opgave 3

Wil je in deze figuur a uitrekenen terwijl α, b en c bekend zijn, dan lukt dit niet met behulp van de sinusregel. Je kunt echter een verband afleiden tussen a, α, b en c.

a Laat zien, dat $a^2 = CD^2 + (c - AD)^2$.

b Laat zien dat $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot AD$ door haakjes weg te werken.

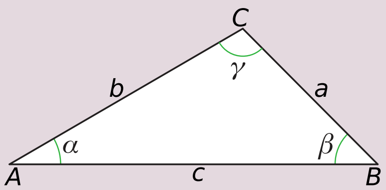
c Laat tenslotte zien, dat $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.



Figuur 4.5

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 4.6

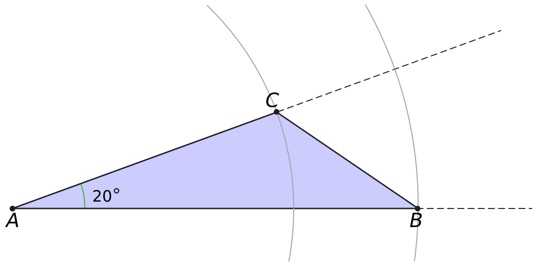
In elke ΔABC geldt de **cosinusregel**. Er zijn drie varianten:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

Je gebruikt de cosinusregel in driehoeken die geen rechte hoek hebben en in situaties waarin de sinusregel niet goed werkt.

Voorbeeld 1

Bekijk de constructie van ΔABC met $\angle A = 20°$, $|AB| = 6$ en $|AC| = 4$. Bereken de lengte van BC.



Figuur 4.7

Antwoord

Cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.

Dit geeft: $|BC|^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(20°) = 6{,}89...$.

Hieruit volgt: $|BC| \approx 2{,}6$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je de constructie van ΔABC als gegeven is $\angle A = 20°$, $|AB| = 6$ cm en $|AC| = 4$ cm.

a Construeer zelf deze driehoek.

b Controleer met de cosinusregel dat inderdaad $|BC| \approx 2{,}63$.

Opgave 5

Laat zien dat de stelling van Pythagoras een speciaal geval is van de cosinusregel.

Opgave 6

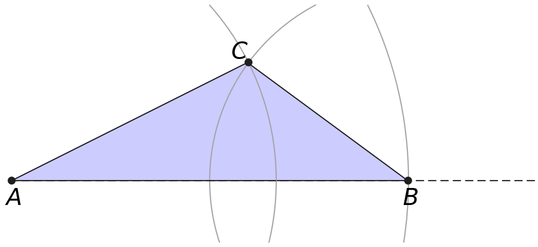
Stel je voor dat op 60 km van een eiland je schip vergaat. Je kunt jezelf drijvend houden op een vlot, maar alle instrumenten zijn verloren gegaan. Natuurlijk probeer je rechtstreeks naar het eiland te peddelen, maar zodra je begonnen bent, komt er een dichte mist op. Je legt ongeveer $2{,}5$ km per uur af. Zonder dat je het in de gaten hebt, staat er een stroming die ervoor zorgt dat je $30°$ uit de koers raakt. Na 20 uur zou je nog 10 km van het eiland verwijderd moeten zijn, als je er inderdaad recht naartoe gepeddeld was.
Hoe ver ben je er in werkelijkheid vanaf? Teken eventueel eerst een schets.

Opgave 7

Van een ΔABC is gegeven dat $|AB| = 10$, $|AC| = 6$ en $\angle C = 60°$. Gebruik de cosinusregel om de lengte van zijde BC uit te rekenen.

Voorbeeld 2

Bekijk de constructie van ΔABC met $|AB| = 6$, $|AC| = 4$ en $|BC| = 3$. Bereken de grootte van $\angle A$.



Figuur 4.8

Antwoord

Cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

Dit geeft: $3^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(\angle A)$.

Dus: $9 = 52 - 48\cos(\angle A)$. En: $\cos(\angle A) = \frac{-43}{-48} \approx 0{,}8958$, zodat $\angle A \approx 26°$.

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2** de constructie van ΔABC met $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm en $|BC| = 3$ cm.

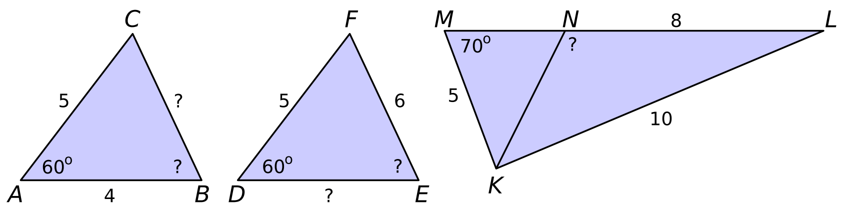
a Voer zelf de berekening van $\angle A$ uit.

b Bereken nu ook $\angle B$.

c Heb je opnieuw de cosinusregel gebruikt? Zo ja, kon dit ook met de sinusregel?

Opgave 9

Bereken de onbekende zijden en de onbekende hoeken in de figuren.



Figuur 4.9

Verwerken

Opgave 10

Elke ΔABC heeft zes afmetingen, te weten:

- de lengtes van de zijden $|AB| = c$, $|BC| = a$ en $|AC| = b$
- de hoeken $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$.

Hier zijn steeds drie maten van ΔABC gegeven. Bereken de andere maten (exact waar mogelijk).

a $a = 8$, $b = 5$ en $\gamma = 65°$

b $a = 8$, $b = 5$ en $\alpha = 65°$

c $c = 150$, $\gamma = 120°$ en $\beta = 45°$

d $a = 6$, $b = 10$ en $c = 8$

e $a = b = 15$ en $\gamma = 20°$

Opgave 11

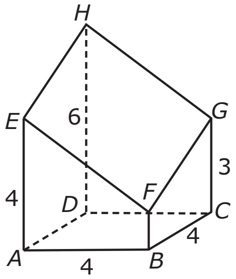
Teken het trapezium $ABCD$ met $|AB| = 12$, $|AC| = 10$, $|DC| = 4$ en $\angle B = 45°$. Omdat de vierhoek $ABCD$ een trapezium is, is AB evenwijdig met CD.
Bereken de lengte van AD. Er zijn twee mogelijkheden. Geef ze allebei.

Opgave 12

Laat met een berekening zien dat een gelijkbenige driehoek ABC met $\angle A = \angle B, \angle C = 20°$, $|AC| = 10$ en $|AB| = 5$ onmogelijk is.

Opgave 13

Bekijk de afgeknotte balk $ABCD.EFGH$. De afmetingen staan in de figuur. Bereken de grootte van $\angle EHG$ met behulp van de cosinusregel in ΔEHG.



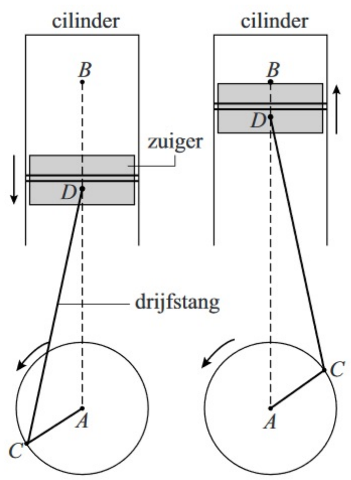
Figuur 4.10

Opgave 14

Van een viervlak $ABCD$ zijn de ribben achtereenvolgens $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|AD| = 7$ cm, $|BD| = 8$ cm en $|CD| = 9$ cm. Punt P is het midden van AC en punt Q is het midden van BD. Bereken de lengte van PQ.

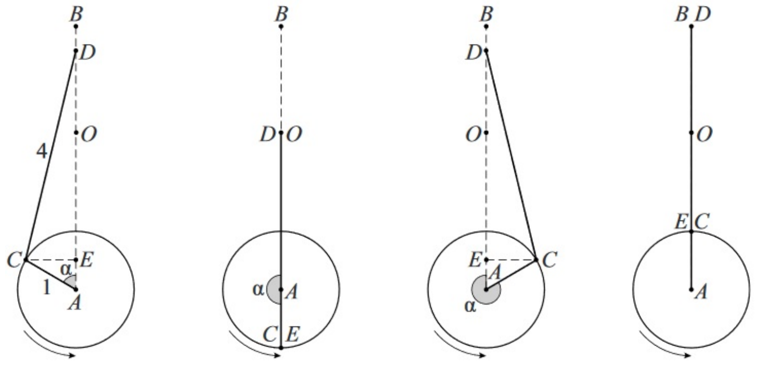
Toepassen

In een automotor wordt de op- en neergaande beweging van een zuiger via een drijfstang omgezet in een draaiende beweging. In de eerste figuur zijn twee standen getekend.
In de eerste stand beweegt de zuiger omlaag en in de tweede stand omhoog.
In de tweede figuur zijn vier standen schematisch getekend. A is een vast punt, D beweegt verticaal over AB en C draait over een cirkel met straal 1 en middelpunt A waarbij CD een vaste lengte 4 dm heeft.
De grootte van hoek CAD (in graden) is α.
De grootte van hoek ACD (in graden) is γ.



Figuur 4.11

Punt E is de loodrechte projectie van C op lijn AD.



Figuur 4.12

Je kunt nu de lengte van AD bij allerlei hoeken α of γ berekenen.

Opgave 15

Bekijk de figuren hierboven. Alle afmetingen zijn in dm.

a Bereken AD als $\gamma = 110°$ in mm nauwkeurig.

b Bereken AD als $\alpha = 55°$ in mm nauwkeurig.

Opgave 16

De zuiger kent een stand waarbij AD maximaal is en een stand waarbij AD minimaal is.

a Tussen welke waarden ligt de lengte van AD?

b Hoe groot zijn AD en γ als $\alpha = 100°$?

Testen

Opgave 17

Van een driehoek ABC is gegeven $|AC| = b = 12$, $|AB| = c = 15$ en $\angle A = \alpha = 55°$. Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 18

Van een driehoek zijn de zijden respectievelijk 8, 5 en 4 cm. Bereken de grootte van de hoeken.

2.5 Inproduct

Inleiding

Dit zijn condenssporen van vliegtuigen. Als een vliegtuig met een constante snelheid en een vaste koers beweegt ontstaan ze bij mooi weer in hogere luchtlagen. Door de ‘bewegende’ snelheidsvector ontstaan er lijnen in de lucht. Soms lijken ze loodrecht op elkaar te staan. Hoe kun je bepalen welke hoek twee vectoren met elkaar maken?

Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip in(wendig)product van twee vectoren;
- de hoek tussen twee vectoren in een cartesisch assenstelsel berekenen vanuit hun inproduct;
- werken met richtingsvectoren van lijnen.

Voorkennis

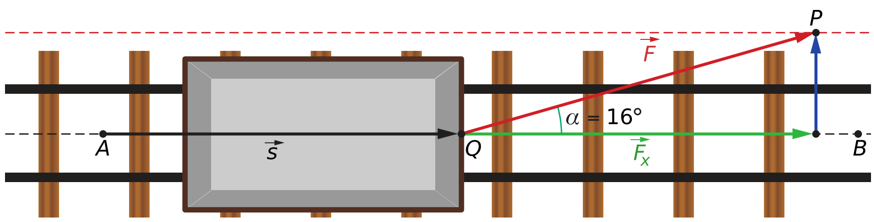
- werken met vectoren (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen met een getal)
- werken met kentallen van vectoren;
- de begrippen sinus, cosinus, tangens en de cosinusregel.

Verkennen

Opgave V1

Persoon P trekt een lorrie van A naar B met een trekkracht van 10 N. Als de vector $\vec{F}$ die de trekkracht voorstelt dezelfde richting heeft als de afgelegde weg $\vec{s}$, dan is de arbeid W die wordt verricht gelijk aan $W = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right|$. Dit betekent een arbeid van $W = 10 \cdot 20 = 200$ Nm. Maar hoe zit dit als de trekkracht niet dezelfde richting heeft als de afgelegde weg, m.a.w. als degene die de lorrie trekt naast het spoor loopt? Bekijk de figuur. Kies de richting van de afgelegde weg als positieve x-richting. Je kunt de rode stippellijn met P er op verplaatsen.

Bekijk de applet.



Figuur 5.2

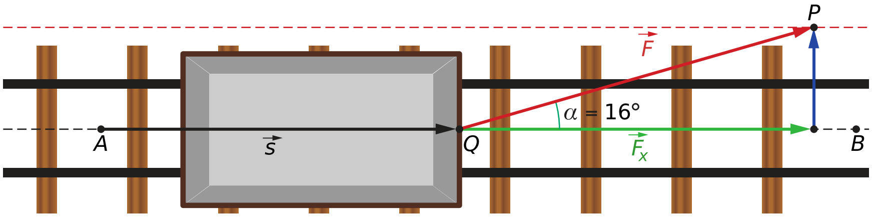
a Waarom verricht alleen $\overrightarrow{F_x}$, dus de component van $\vec{F}$ in de x-richting arbeid?

b Laat zien hoe de lengte van $\overrightarrow{F_x}$ kan worden berekend en bereken deze lengte als $\alpha = 16°$. Controleer het antwoord met de applet.

c Leg uit waarom $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\alpha)$ als α de hoek is die $\vec{F}$ met $\vec{s}$ maakt.

Uitleg 1

Bekijk de applet.



Figuur 5.3

In de natuurkunde wordt gebruikgemaakt van het begrip arbeid. Arbeid is de energie die wordt omgezet als een kracht een voorwerp verplaatst.
Energie en arbeid hebben geen richting en zijn géén vectoren. Het zijn waarden met een eenheid.

Bekijk de afbeelding waarin persoon P een lorrie van A naar B trekt. De trekkracht $\vec{F}$ is 10 N groot (steeds onder dezelfde hoek met de rails) en de afstand van A naar B is 20 meter. Maar de kracht en de verplaatsing staan niet in dezelfde richting. Gebruik voor de berekening van de arbeid de component van de kracht in de richting van de verplaatsing, die component is $\overrightarrow{F_x}$.
Er geldt: arbeid = afstand · grootte van de component van de kracht.

$W = |\vec{s}| \cdot |\overrightarrow{F_x}| = |\vec{s}| \cdot |\vec{F}| \cdot \cos(\alpha)$

W is de arbeid, α is de grootte van de hoek tussen de kracht en de afstand en $|\vec{s}|$ is de afstand waarover het voorwerp is verplaatst.

Dit heet in de wiskunde het inproduct van de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{s}$.

De lengte van de projectie (component) $\overrightarrow{F_x}$ van de ene vector $\vec{F}$ op de andere vector $\vec{s}$, wordt vermenigvuldigd met de lengte van de andere vector $\vec{s}$.

Het inproduct van $\vec{F}$ en $\vec{s}$ noteer je als $\vec{F} \cdot \vec{s}$, dus:

$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\alpha)$.

Opgave 1

De vector in **Uitleg 1** heeft een lengte van 10 N. De richtingshoek α met de bewegingsrichting van de lorrie stel je in door in de applet de rode stippellijn te verplaatsen. De afgelegde afstand $|\vec{s}|$ is 20 meter, die kun je instellen door punt P in de applet te verslepen.

a Bepaal met de applet de arbeid die de kracht verricht als $\alpha = 16°$.

b Ga door berekening na dat deze arbeid gelijk is aan $|\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\alpha)$.

c Bepaal ook voor $\alpha = 10°$, $\alpha = 12°$ en $\alpha = 20°$ de verrichte arbeid met de applet en met de formule. Rond af op één decimaal.

d Hoe groot is het inproduct van $\vec{F}$ en $\vec{s}$ als $\alpha = 0°$?

e Hoe groot is het inproduct van $\vec{F}$ en $\vec{s}$ als $\alpha = 90°$?

Uitleg 2

Bekijk de applet.

$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zijn de twee eenheidsvectoren in een cartesisch xy-assenstelsel. Deze twee vectoren maken een hoek van 90° en hebben daarom een inproduct van 0:

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = |\vec{e}_x| \cdot |\vec{e}_y| \cdot \cos(90°) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = |\vec{e}_x| \cdot |\vec{e}_x| \cdot \cos(0°) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$

Elke vector is te schrijven als een samenstelling van eenheidsvectoren.

Neem bijvoorbeeld:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\,\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\,\vec{e}_x + 1\,\vec{e}_y$$

Voor het inproduct van beide geeft dit:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(-2\,\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y\right) \cdot \left(2\,\vec{e}_x + 1\,\vec{e}_y\right)$

Neem aan dat ook voor het inproduct van twee vectoren de regels voor het wegwerken van haakjes gelden.

Dit geeft: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1$

Kennelijk hoef je alleen de overeenkomstige kentallen te vermenigvuldigen en de twee uitkomsten op te tellen om het inproduct van beide vectoren te krijgen.

Opgave 2

Het inproduct van twee vectoren wordt gegeven door kentallen in een cartesisch assenstelsel te bepalen en de vectoren te ontleden in eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

a Waarom is $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$?

b Waarom is $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$ en $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$?

c Laat zien dat het inproduct van $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ inderdaad $-2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1$ is door haakjes weg te werken.

d Bereken op dezelfde manier met behulp van eenheidsvectoren het inproduct van $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Opgave 3

In het algemeen geldt voor het inproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is.

Neem $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gebruik het inproduct van beide vectoren om de hoek φ ertussen te berekenen.

Opgave 4

Neem $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en bereken het inproduct van beide vectoren. Gebruik dit inproduct om de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te berekenen.

Opgave 5

Neem $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ en laat zien dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Het **inproduct** of **inwendig product** van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is.

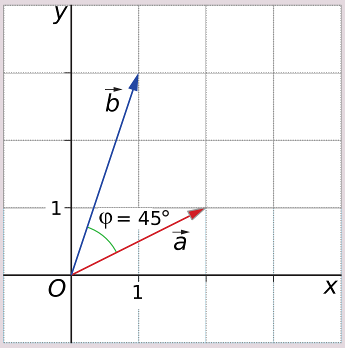
Als beide vectoren zich in een cartesisch assenstelsel bevinden, beschrijf je ze met hun kentallen: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$.

In dat geval is het inproduct te berekenen door de overeenkomstige kentallen te vermenigvuldigen en het resultaat op te tellen: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

Het combineren van de twee formules geeft:

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

Dit kun je gebruiken bij het berekenen van de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Belangrijk is dat van twee onderling loodrechte vectoren het inproduct altijd 0 is omdat de hoek tussen beide 90° is.
De hoek tussen twee lijnen is gelijk aan de scherpe hoek tussen een vector op de éne lijn en een vector op de andere lijn. Zo'n vector heet de richtingsvector van de lijn.

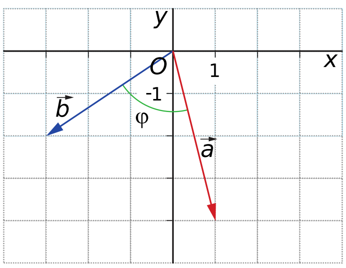


Figuur 5.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Figuur 5.5

Antwoord

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot -3 + -4 \cdot -2 = 5$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$, dus $5 = \sqrt{17} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos(\varphi)$.

Voor de hoek φ tussen beide vectoren geldt:

$\cos(\varphi) = \frac{5}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}}$ en dus $\varphi \approx 70{,}3°$.

Opgave 6

De hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ is ongeveer 70,3°.

a Laat dit zien met een berekening.

b Bereken de hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ in één decimaal.

Opgave 7

Met behulp van de applet in **Voorbeeld 1** kun je uitzoeken wanneer twee vectoren een inproduct van 0 hebben.

a Geef een voorbeeld van twee vectoren waarvoor dat geldt. Laat door berekening zien dat het inproduct dan ook 0 is.

b Toon algebraïsch aan dat de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} kb \\ \text{-}ka \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.

Voorbeeld 2

Bewijs dat $ABCD$ met $A(18,\text{-}14)$, $B(22,\text{-}13)$, $C(21,\text{-}9)$ en $D(17,\text{-}10)$ een vierkant is. Gebruik het inproduct.

Antwoord

Het is voldoende om aan te tonen dat $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}$ en $\overrightarrow{CD}$ en $\overrightarrow{DA}$ en $\overrightarrow{AB}$ rechte hoeken maken en even lang zijn.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 22 - 18 \\ \text{-}13 - (\text{-}14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 21 - 22 \\ \text{-}9 - (\text{-}13) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-}1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 17 - 21 \\ \text{-}10 - (\text{-}9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-}4 \\ \text{-}1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 18 - 17 \\ \text{-}14 - (\text{-}10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-}4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \cdot \text{-}1 + 1 \cdot 4 = 0$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \text{-}1 \cdot \text{-}4 + 4 \cdot \text{-}1 = 0$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \cdot 4 + \text{-}4 \cdot 1 = 0$$

De vectoren staan loodrecht op elkaar, dus maken ze rechte hoeken. Ook zijn alle lengtes $\sqrt{17}$.
$ABCD$ is een vierkant.

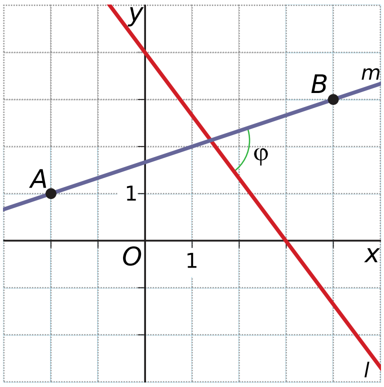
Opgave 8

Bewijs dat $ABCD$ met $A(18,\text{-}14)$, $B(22,\text{-}13)$, $C(21,\text{-}9)$ en $D(17,\text{-}10)$ een vierkant is door te bewijzen dat de diagonalen loodrecht op elkaar staan en even lang zijn.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Bereken de hoek die de lijn l: $4x + 3y = 12$ maakt met de lijn m door de punten $A(-2,1)$ en $B(4,3)$.



Figuur 5.6

Antwoord

Lijn l gaat door $P(0,4)$ en $Q(3,0)$ en hieruit volgt dat de richting van l wordt bepaald door bijvoorbeeld de vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Lijn m gaat door $A(-2,1)$ en $B(4,3)$ en hieruit volgt dat de richting van l wordt bepaald door bijvoorbeeld de vector $\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ga met het inproduct van deze vectoren na dat de hoek tussen beide lijnen ongeveer 71,6° is.

Opgave 9

De hoek tussen twee lijnen kun je bepalen met behulp van het inproduct van twee vectoren die op deze lijnen liggen. Die bepalen de richting van de lijnen.

a Laat zien dat de lijn l: $4x + 3y = 12$ en vector $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ een hoek van 71,6° met elkaar maken.

b Lijn m gaat door $P(0,3)$ en $Q(5,0)$. Bereken de hoek tussen de lijnen l: $4x + 3y = 12$ en m.

Verwerken

Opgave 10

Bereken de hoek tussen de gegeven vectoren in graden nauwkeurig.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

b $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

Opgave 11

a Bereken de hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ in graden nauwkeurig.

b Geef een vector $\vec{c}$ die loodrecht staat op $\vec{b}$ en twee keer zo lang is.

Opgave 12

Bereken met behulp van het inproduct de hoek tussen de lijnen l door $A(-5,-3)$ en $B(-1,3)$ en m met vergelijking $5x+3y=15$ in graden nauwkeurig.

Opgave 13

Twee lijnen l en m snijden elkaar in $S(102,31)$. l gaat door $A(120,22)$ en m gaat door $B(120,58)$.

a Bereken de hoek tussen l en m met behulp van het inproduct van vectoren op deze lijnen.

b Bereken de hoeken van ΔSAB.

Opgave 14

Vierhoek $ABCD$ met $A(p,q)$, $B(p+3,q+1)$, $C(p+4,q+4)$ en $D(p+1,q+3)$ is een ruit.

a Toon dit aan.

b Bereken de hoeken van de ruit.

c Toon aan dat ook in deze ruit de diagonalen loodrecht op elkaar staan.

Opgave 15

Een bootje wordt door het midden van een sloot getrokken door een jongen en een twee keer zo sterke man. Twee touwen zijn beide aan dezelfde plek op de boeg van de boot bevestigd. De jongen en de man trekken elk aan een ander touw en lopen aan een andere kant van de sloot. De boot blijft in het midden van de sloot varen. De man trekt met een kracht van 10 N en onder een hoek van 20° met de vaarrichting.

a Construeer in een bovenaanzicht de vectoren die de twee trekkrachten voorstellen.

b Bereken de richtingshoek van de kracht die de jongen uitoefent in graden nauwkeurig.

c Welke arbeid verrichten beiden samen als ze het bootje 1 kilometer voort trekken?

d Verrichten ze beiden evenveel arbeid?

Toepassen

Opgave 16: Bewijzen met het inproduct

Gegeven zijn de lijnen l: $y-nx=b$ en m: $y+\frac{1}{n}x=c$.

a Gebruik een inproduct om te bewijzen dat l en m loodrecht op elkaar staan voor alle willekeurige waarden van n, b en c (mits $n\neq 0$).

b Gegeven is de lijn p: $y-ax=0$. Geef een algemene uitdrukking voor a in termen van n, als is gegeven dat de hoek tussen p en l, 45° is.

Testen

Opgave 17

Bereken met behulp van het inproduct de hoek tussen de lijnen l door $A(-3,2)$ en $B(5,1)$ en m met vergelijking $x+2y=24$ in graden nauwkeurig.

Opgave 18

Gegeven is de vierhoek $PQRS$ met $P(-27,21)$, $Q(23,21)$, $R(33,51)$ en $S(3,61)$.

a Toon aan dat deze vierhoek een vlieger is.

b Bereken de grootste hoek van deze vierhoek.

c A, B, C en D zijn de middens van de opeenvolgende zijden van de vlieger. Wat voor bijzondere vierhoek is $ABCD$? Toon dit ook aan!

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt het onderwerp **Vectoren en goniometrie** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- vector, lengte en richtingshoek — componenten van een vector
- sinus, cosinus, tangens ook van hoeken groter dan $90°$
- de sinusregel
- de cosinusregel
- het inproduct van twee vectoren

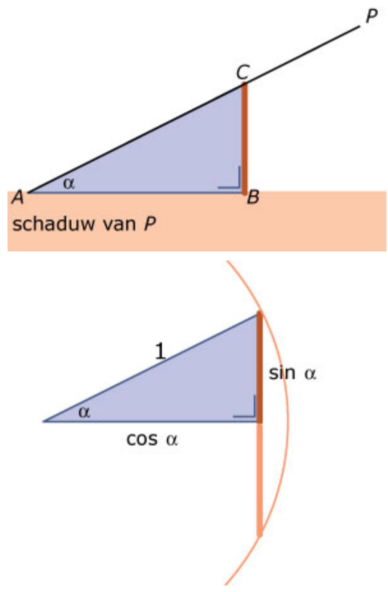
Activiteitenlijst

- componenten van een vector bepalen door meting/berekening, positieve/negatieve componenten onderscheiden
- componenten van vectoren berekenen m.b.v. sin en cos — sin, cos en tan van hoeken (ook) boven $90°$ bepalen
- de sinusregel gebruiken in (niet-)rechthoekige driehoeken
- de cosinusregel gebruiken in (niet-)rechthoekige driehoeken
- het inproduct gebruiken om de hoek tussen twee vectoren te berekenen

Achtergronden

Met een staaf van een bepaalde lengte werden in de oude culturen de posities van de zon, de maan en andere hemellichamen vastgelegd. Bij elk punt aan de hemel hoort een bepaalde 'schaduw' en een bepaalde hoek. Er is een verband tussen hoek A en punt P aan de hemel. Goniometrie (hoekmeting) speelt daarom van oudsher een grote rol in de sterrenkunde.

De beroemde Alexandrijnse astronoom **Ptolemaeus (87—168 vermoedelijk)** gaf rond 150 na Chr. in zijn boek 'Almagest' een tabel de lengtes van de koorden bij bepaalde cirkelhoeken. De Indiërs gaven in de 7de eeuw bij een gegeven middelpuntshoek de lengte van de halve koorde. Via het Arabisch is het woord voor 'halve koorde' in de 12de eeuw in het Latijn vertaald als 'sinus' (wat 'bocht' of 'boezem' betekende). Het woord 'cosinus' is de afkorting voor 'complementi sinus' (de sinus van het complement). Met 'complement' wordt de hoek bedoeld die de gegeven hoek aanvult tot $90°$.



Figuur 6.1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn deze vectoren door hun lengte v en hun richtingshoek α. Bereken de lengte van de x-component en de y-component. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen.

a $v = 20$ en $\alpha = 45°$

b $v = 20$ en $\alpha = 115°$

c $v = 20$ en $\alpha = 300°$

d $v = 20$ en $\alpha = 270°$

Opgave 2

Bereken alle overige lengten van zijden en hoeken van ΔABC als gegeven is (geef waar nodig benaderingen in twee decimalen):

a $a = 5$, $b = 6$ en $c = 4$

b $a = 5$, $b = 6$ en $\gamma = 120°$

c $a = 5$, $b = 6$ en $\beta = 120°$

d $c = 12$, $\alpha = 50°$ en $\beta = 60°$

e $a = 12$, $b = 6$ en $\alpha = 90°$

f $a = b = 10$ en $\beta = 81°$

Opgave 3

De breedte van een rivier bepaal je vanuit een duidelijk herkenbaar punt P op de tegenover liggende oever. Langs de oever waarop je zelf staat zet je een lijnstuk AB van bijvoorbeeld 10 m uit. Vervolgens meet je de hoeken van AP met AB en van BP met AB. Bereken de breedte van de rivier als $\angle BAP = 65°$ en $\angle ABP = 54°$.

Opgave 4

Gegeven is een driehoek waarvan de lengtes van de zijden a, b en c zijn. Bereken in de volgende gevallen de grootte van de hoek tegenover de zijde met lengte a.

a $a^2 = b^2 + c^2$

b $a^2 = b^2 + c^2 - bc$

c $a^2 = b^2 + c^2 + 0{,}5bc$

Opgave 5

Tussen drie palen die loodrecht op de grond staan is heel strak een driehoekig zeil gespannen. Paal 1 staat 5 m van paal 2, paal 2 staat 4 m van paal 3 en paal 3 staat 3 m van paal 1. Het zeil is op 2 m boven de grond aan paal 1, op 2,5 m boven de grond aan paal 2 en op 3,50 m boven de grond aan paal 3 bevestigd. Bereken de oppervlakte van dit zeil.

Opgave 6

Gegeven zijn de lijn l met vergelijking $3x - 5y = 12$ en de punten $A(0,4)$ en $B(3,0)$.

a Bereken de hoek die lijn l met de lijn m die door de punten A en B gaat.

b Laat zien dat vectoren van de vorm $\begin{pmatrix} 4k \\ 3k \end{pmatrix}$ loodrecht staan op $\overrightarrow{AB}$.

c Punt $C(4,2)$ is het derde hoekpunt van ΔABC. Laat zien dat deze driehoek rechthoekig is.

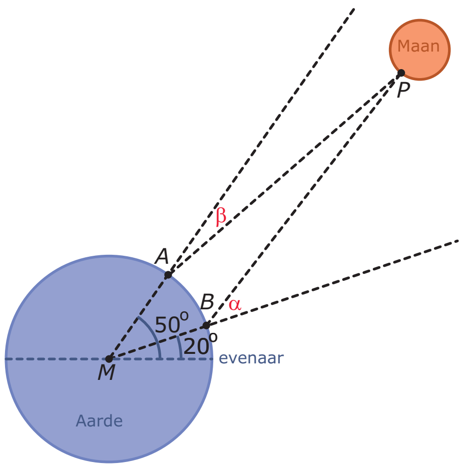
Opgave 7

In elke driehoek deelt de deellijn van een hoek de overstaande zijde in stukken die zich verhouden zoals de aanliggende zijden van die hoek. Teken maar eens een driehoek ABC met daarin de deellijn CD van hoek C. Punt D ligt zo op de overstaande zijde AB, dat $AD : BD = AC : BC$. Bewijs deze stelling.

Toepassen

Opgave 8: Afstand Aarde - Maan

De afstand van het middelpunt M van de Aarde tot een punt P op de Maan kun je berekenen door op dezelfde lengtegraad op twee verschillende punten A en B een kijker op punt P te richten. Neem aan dat de Aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km en neem ook aan dat de Maan precies recht boven de lengtegraad staat waar A en B op liggen, dus M, A, B en P liggen in één vlak. Je meet de hoeken die de kijker met MA en met MB maakt (dus met lijnen loodrecht op het aardoppervlak). Stel dat A op $50°$ N.B. ligt en B op $20°$ N.B. Beschrijf hoe je vanuit de gemeten hoeken de afstand MP berekent.

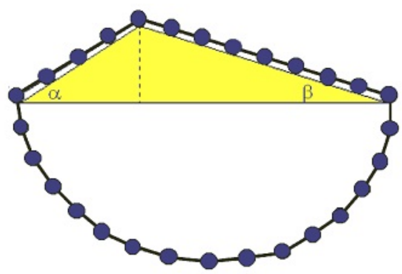


Figuur 6.2

Opgave 9: Clootcrans

In een tijd dat krachten nog niet als vectoren werden ontbonden bedacht Simon Stevin wat de kracht moet zijn die een massa uitoefent op een helling. Hij deed dat niet door een experiment, maar door een simpele redenering.

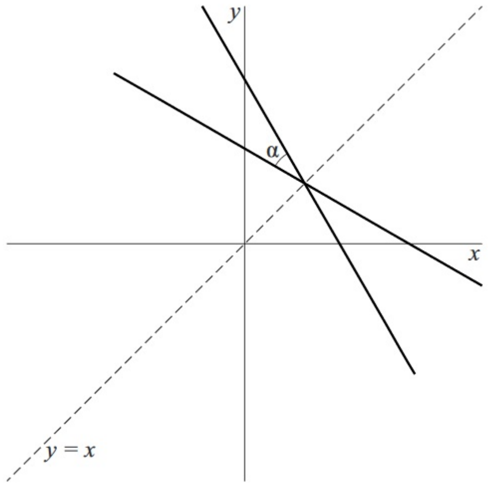
Hang een ketting van kralen over een punt dat twee hellingen verbindt. Welke kracht oefent de ketting uit op het punt, vanaf links en vanaf rechts? Het vrij hangende gedeelte trekt aan beide kanten even hard. De ketting beweegt niet, dus het gewicht van de ketting links is evenredig met de lengte van de helling links. De kracht die dat gewicht dan effectief uitoefent moet gelijk zijn aan de kracht die het rechterstuk uitoefent. Dus moet die kracht evenredig zijn met de lengte van de andere zijde. Dus verhouden de krachten zich omgekeerd met de lengtes van de hellingen. Je kunt dit ook controleren door de krachten te ontbinden in vectoren. En dan de sinusregel toe te passen. Laat zien hoe dat gaat. (Zie ook: **Clootcransbewijs in Wikipedia**)



Figuur 6.3

Examen

Opgave 10: Gespiegelde lijn



Figuur 6.4

Een lijn met vergelijking $ax + y = b$, met $a > 0$, wordt gespiegeld in de lijn met vergelijking $y = x$. In de figuur zijn voor zekere waarden van a en b de lijn en zijn spiegelbeeld getekend. De hoek tussen de twee lijnen is α.

Er geldt: $\cos(\alpha) = \frac{2a}{a^2+1}$

Bewijs dit.

(bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2014, eerste tijdvak)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

www.math4all.nl