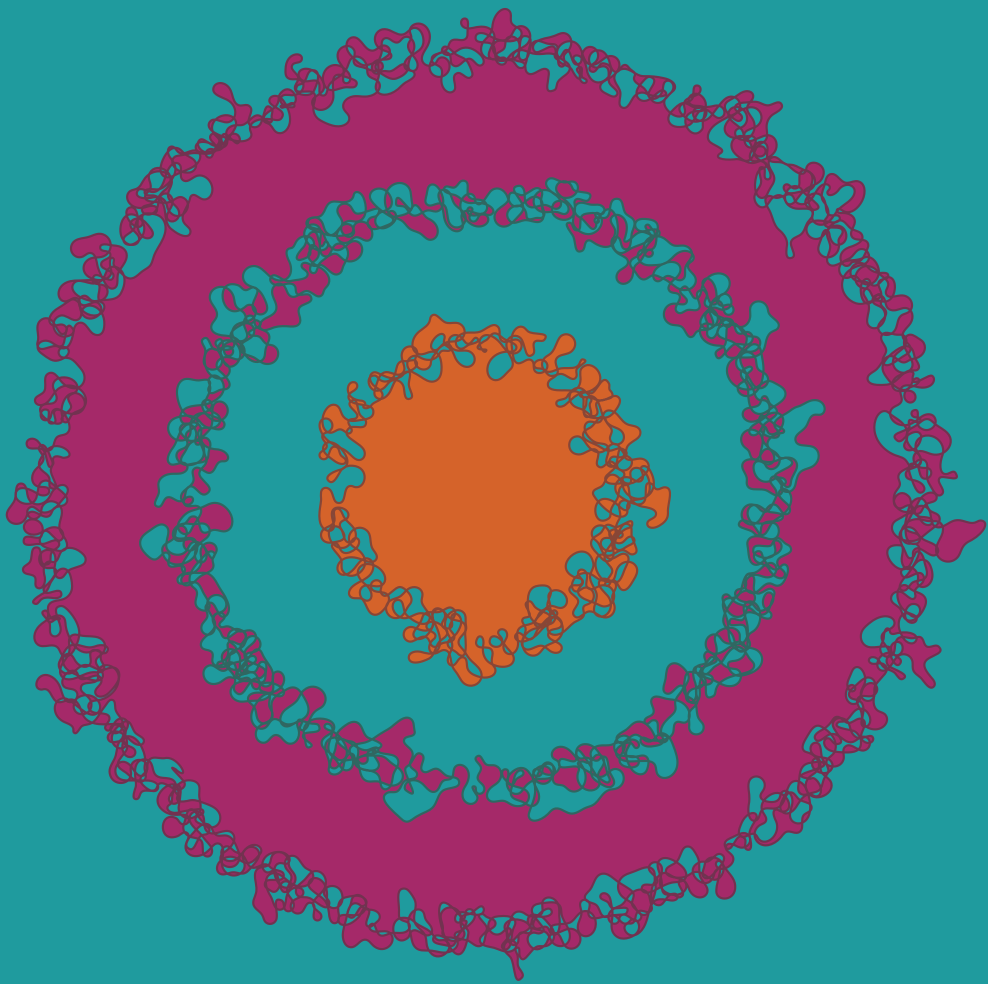
Wiskunde A

5 VWO

Katern 3

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Steekproef en Populatie

1.1 Van steekproef naar populatie

Inleiding

In werkelijkheid is het vaak onmogelijk of te duur om alle te onderzoeken waardes van een toevalsvariabele te achterhalen. Dit geldt ook voor normaal verdeelde toevalsvariabelen zoals 'de lengte van een zonnebloem in midden-Frankrijk in het jaar 2015'. Hoe kun je daar ooit met zekerheid het gemiddelde of de standaardafwijking van kennen? Stuk voor stuk opmeten zal een enorme en prijzige operatie zijn.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- hoe je onderzoek doet op basis van goede (aselecte, representatieve en voldoende grote) steekproeven;
- wat de centrale limietstelling is.

Voorkennis

- de normale verdeling met zijn vuistregels over het gemiddelde en de standaardafwijking;
- herkennen of een frequentieverdeling normaal is of niet;
- de wortel-n-wet gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

In uitspraken in kranten, boeken en op internet kom je vaak resultaten van statistisch onderzoek tegen. Hier zie je daar een voorbeeld van.

> Uit onderzoek van het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) blijkt dat bijna de helft van de jongeren tussen de 15 en 25 jaar gebruik maakt van internet op de telefoon. Dat is veel meer dan vorig jaar, toen nog maar 20 procent van de jongeren internette op hun mobiel.
> (Bron: jongeren.blog.nl maart 2010)

Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) heeft zich kennelijk afgevraagd hoe het zit met het internetgebruik onder jongeren. Met zo'n probleemstelling begint statistisch onderzoek. De probleemstelling wordt vertaald in een aantal **onderzoeksvragen**. Die vragen worden zo geformuleerd dat de antwoorden data opleveren die statistisch verwerkt kunnen worden om antwoord te geven op het gestelde probleem.

Bekijk de uitspraak hierboven van maart 2010.

a Welke onderzoeksvraag heeft het CBS zich gesteld?

b Kun je bedenken hoe het CBS dit heeft aangepakt?

c Hoe zou je zelf zo'n onderzoeksvraag aanpakken?

Uitleg 1

Als je kenmerken van een groep mensen of dingen wilt leren kennen, doe je statistisch onderzoek. Daarbij doorloop je in principe altijd de zogenoemde statistische cyclus.

Vaak is het onmogelijk of te duur om de volledige groep, de populatie, te onderzoeken. Maar op basis van steekproeven uit de populatie kun je ook betrouwbare uitspraken over de gehele populatie doen. Dat heet verklarende statistiek.

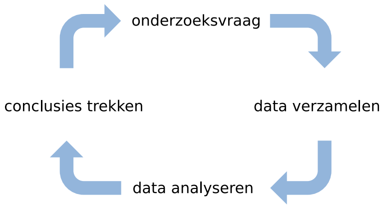
Tot nu toe was je vooral bezig met beschrijvende statistiek en dat betreft 'data verzamelen' en 'data analyseren'.

Stel, je wilt weten wat 'de gemiddelde lengte van een zonnebloem in midden-Frankrijk dit jaar' is. Hoe kun je daar met zekerheid het gemiddelde of de standaardafwijking van bepalen? Stuk voor stuk opmeten is onmogelijk. Maar met een steekproef kun je een schatting van de gemiddelde zonnebloemlengte maken.

Verklarende statistiek helpt ook bij het onderzoeken naar bijvoorbeeld het verband tussen de zonnebloemlengte en de hoeveelheid regen die in het betreffende jaar in midden-Frankrijk viel. Ook kun je zo de zonnebloemlengte in midden-Frankrijk in het ene jaar vergelijken met die in het andere jaar.

Steeds trek je een steekproef. Die moet wel aselect, representatief en voldoende groot zijn.

Aselect betekent dat elk element van de populatie een even grote kans heeft om in de steekproef te komen.
Representatief betekent dat alle kenmerken die je onderzoekt in de steekproef en in de populatie naar verhouding even vaak voorkomen.
En hoe groter de steekproef, hoe nauwkeuriger de resultaten. In veel gevallen is $n \geq 30$ groot genoeg, maar de minimale steekproefomvang hangt af van wat je onderzoekt.



Figuur 1.2

Opgave 1

De 'lengte van een zonnebloem in midden-Frankrijk dit jaar' is, bekeken vanuit een statistisch onderzoek, een toevalsvariabele.

a Geef een beargumenteerde definitie van deze toevalsvariabele en gebruik daarbij onder andere de termen kwantitatief/kwalitatief en wel/niet normaal verdeeld.

b Beschrijf de te onderzoeken populatie.

c Beschrijf een manier om een steekproef uit de door jou beschreven populatie aselect te maken en om de steekproef representatief te maken.

d Leg uit waarom in een betrouwbaar onderzoek een steekproef met een omvang die kleiner is dan 10 zonnebloemen of die bestaat uit alle zonnebloemen in midden-Frankrijk in dit jaar, nooit gebruikt zal worden.

Opgave 2

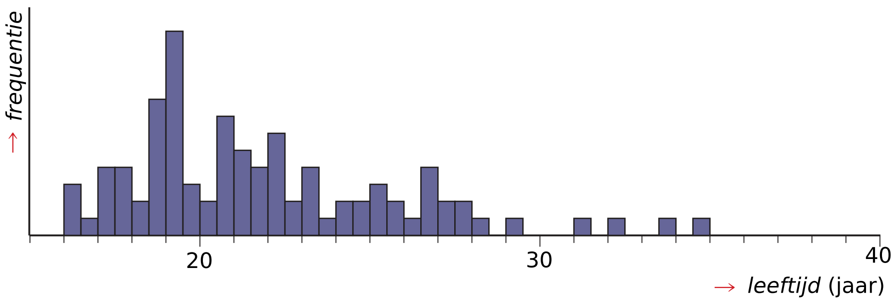
Leg uit of er in de omschreven situaties sprake is van een aselecte en representatieve steekproef.

a Om onderzoek te doen naar het discotheekbezoek onder 14- tot 18-jarigen kies je de leerlingen uit je klas.

b Om uit te zoeken op welke politieke partij Nederlanders stemmen bij de Tweede Kamerverkiezingen, worden uit het bevolkingsregister van Nederland willekeurig 7500 stemgerechtigde inwoners gekozen.

Uitleg 2

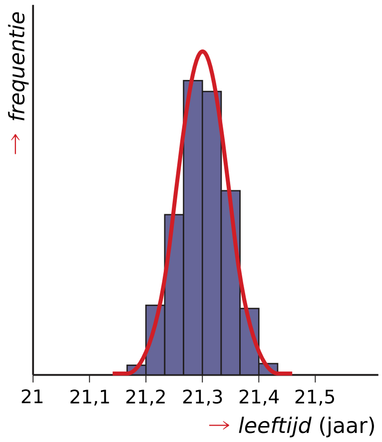
Er is een heel groot concert met tienduizenden bezoekers. De organisatoren van het concert willen de gemiddelde leeftijd van de bezoekers weten.
Bij elk van de 50 ingangen zetten ze een enquêteur die aan elke 10^e bezoeker de leeftijd vraagt. Zo worden er 50 steekproeven genomen. Ga ervan uit dat deze steekproeven representatief zijn. Omdat niet iedereen wordt ondervraagd, kun je de gemiddelde leeftijd niet precies te weten komen. Je kunt deze alleen maar schatten. In het linker histogram zijn de gegevens van één van de 50 steekproeven weergegeven.



Figuur 1.3

Het lijkt erop dat de leeftijden van de concertbezoekers niet normaal verdeeld zijn. Van alle 50 steekproeven die genomen zijn, is de gemiddelde leeftijd berekend, bekijk het rechter histogram. Het lijkt er op dat de steekproevenverdeling wel bij benadering normaal verdeeld is.

In de steekproef gaat het om n onafhankelijke gelijke toevalsvariabelen X. De som S van deze gelijke toevalsvariabelen is bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde $\overline{S} = n \cdot \overline{X}$ en standaardafwijking $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$. Ook het gemiddelde van S is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van $\overline{S} = \overline{X}$ en een standaardafwijking van $\sigma(\overline{S}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.



Figuur 1.4

Hoe meer steekproeven je doet, hoe beter de benadering is. In veel gevallen is $n \geq 30$ groot genoeg, maar de minimale steekproefomvang hangt af van wat je onderzoekt.

In het algemeen zijn de uitkomsten van een grote hoeveelheid onafhankelijke steekproeven uit dezelfde populatie bij benadering normaal verdeeld. Hoe groter het aantal steekproeven, hoe beter de benadering. Hieruit volgt dat de steekproevenverdeling bij benadering normaal verdeeld is. Dit wordt de centrale limietstelling genoemd.

Opgave 3

Een vulmachine vult pakken suiker. Het gemiddelde gewicht van een pak suiker is 1000 gram en de standaardafwijking 2,8 gram. De Consumentenbond doet een steekproef van honderd pakken.

a Waarom mag je zeggen dat het totale gewicht van die honderd pakken bij benadering normaal verdeeld is? Is het daarbij belangrijk dat het gewicht van een pak suiker normaal verdeeld is?

b Is de steekproevenverdeling ook bij benadering normaal verdeeld?

c Wat is het gemiddelde en de standaardafwijking van de steekproevenverdeling?

d De Consumentenbond vindt het onacceptabel als het gemiddelde gewicht van de pakken suiker uit de steekproef kleiner is dan 999 gram.
Bereken in vier decimalen de kans dat dit het geval is.

Opgave 4

Twee onderzoekers geven elk een werkwijze die beide een bij benadering normale kansverdeling opleveren.

Onderzoeker A neemt een steekproef van 5000 zonnebloemen uit midden-Frankrijk en meet de lengte ervan. Hij maakt er een histogram van.

Onderzoeker B neemt duizend steekproeven van ieder 5000 zonnebloemen uit midden-Frankrijk en meet de lengte van al deze zonnebloemen. Van ieder van de 1000 steekproeven berekent ze de gemiddelde zonnebloemlengte. Van de 5000 gemiddelde zonnebloemlengtes maakt zij een histogram.

a Beschrijf voor beide werkwijzen van welke toevalsvariabele de onderzoekers een histogram maken.

b Geef aan welke van de twee werkwijzen vanwege de centrale limietstelling een normale kansverdeling oplevert.

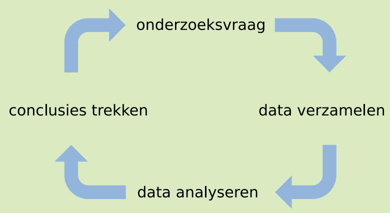
c Een groep scholieren wil ook aan de slag met zonnebloemlengtes.

Moeten de scholieren voor hun onderzoek meerdere steekproeven trekken of slechts één (die natuurlijk wel aselect, representatief en groot genoeg is) om toch een betrouwbare uitspraak over alle zonnebloemen te kunnen doen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een statistisch onderzoek doorloopt in principe altijd de zogenoemde **statistische cyclus**.



Figuur 1.5

Data verzamelen van de volledige populatie die je wilt onderzoeken, is vaak erg duur en soms ook onmogelijk. Gelukkig is het meestal wel mogelijk om een **aselecte**, **representatieve steekproef** van voldoende omvang uit de **populatie** te trekken en op basis daarvan betrouwbare aannames te doen over de volledige populatie. Deze tak van wetenschap heet **verklarende statistiek**.

Een belangrijke stelling die bij verklarende statistiek wordt gebruikt is de **centrale limietstelling**:
De som van een groot aantal onafhankelijke, mogelijk verschillende, willekeurig verdeelde toevalsvariabelen is bij benadering normaal verdeeld. De toevalsvariabelen zelf hoeven niet normaal verdeeld te zijn.

De kansverdeling van de gemiddelde steekproefuitslagen heet de **steekproevenverdeling**. Daarbij gaat het over n onafhankelijke gelijke toevalsvariabelen X. De som S van deze gelijke toevalsvariabelen is bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde $\overline{S} = n \cdot \overline{X}$ en standaardafwijking $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$. (Denk aan de wortel-n-wet.)

Ook het gemiddelde van S is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van $\overline{S} = \overline{X}$ en een standaardafwijking van $\sigma\left(\overline{S}\right) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

Wel moet n voldoende groot zijn. Wat voldoende groot is om de centrale limietstelling te gebruiken, is afhankelijk van de verdeling van de toevalsvariabelen. In veel gevallen is $n \geq 30$ groot genoeg.

De centrale limietstelling wordt vaak gebruikt bij het doen van steekproeven. Je kunt dan uitspraken doen over een populatie zonder de hele populatie apart te onderzoeken.

Behalve uit het achterhalen van de waarde van een populatiekenmerk bestaat verklarende statistiek ook uit onderzoek naar het verband tussen meerdere populatiekenmerken en naar overeenkomst/verschil tussen meerdere populaties.

Voorbeeld 1

Zijn de volgende steekproeven representatief? Geef ook aan of de steekproef aselect is.

1. Er wordt onderzoek gedaan naar het stemgedrag voor politieke partijen van Nederlanders. Daarvoor worden aselect achtduizend stemgerechtigde Nederlanders uit het bevolkingsregister gekozen.
2. Er wordt onderzoek gedaan naar de hoeveelheid verf in blikken. Van alle geproduceerde blikken wordt steeds het tiende blik gewogen.

3. Er wordt onderzoek gedaan naar het aantal uren dat ouders van de kinderen van een school van huis zijn. De ouders die op een ouderavond komen, worden ondervraagd.

Antwoord

1. De steekproef is, behalve aselect, waarschijnlijk ook representatief door de grote omvang.
2. De steekproef is waarschijnlijk wel representatief, want de steekproef is uit de hele populatie. De steekproefomvang is goed en meestal maakt het niet uit van welke blikken je de hoeveelheid meet. (Het zou natuurlijk kunnen dat elk tiende blik door één persoon wordt gevuld en de rest door een ander.) De steekproef is niet aselect, want niet ieder blik heeft een even grote kans om in de steekproef terecht te komen.
3. De steekproef is niet representatief, want waarschijnlijk komen er naar verhouding minder ouders die veel van huis zijn naar de ouderavond. De steekproef is ook niet aselect, want ouders die niet op een ouderavond komen, hebben geen kans om in de steekproef terecht te komen.

Opgave 5

Zijn de volgende steekproeven aselect? Licht je antwoord toe.

a Een onderzoek onder leerlingen van twintig scholen, waarbij van elke school 10% van de leerlingen willekeurig wordt gekozen.

b Een onderzoek dat gebruikmaakt van vragenlijsten die zijn ingevuld door willekeurig gekozen mensen van 65 jaar en ouder.

c Een onderzoek naar de tevredenheid van abonnees van een telefoonbedrijf door willekeurig gekozen klanten die de helpdesk bellen te ondervragen.

Opgave 6

Geef van de volgende steekproeven aan of ze representatief en/of aselect zijn. Licht je antwoord toe.

a Een leverancier van koffie doet onderzoek naar de tevredenheid van zijn klanten over de koffie. Hij ondervraagt alle klanten die in zijn winkel komen.

b De RDW is de organisatie die beslist welke voertuigen in Nederland worden toegelaten op de wegen. De RDW doet onderzoek naar voertuigen. De RDW neemt daarom willekeurig een grote steekproef uit de lijst van alle kentekens van voertuigen en stuurt de eigenaars van de voertuigen een vragenlijst over winterbanden.

c Een onderzoeksbureau doet onderzoek naar gebruik van sociale media onder jongeren. Het bedrijf verspreidt een enquête via sociale media.

Voorbeeld 2

Een machine vult pakken suiker. Het gewicht van een pak suiker is 501 gram met een standaardafwijking van $2{,}9$ gram.

Er wordt een steekproef genomen van 50 pakken.

Hoe groot is de kans dat het gemiddelde gewicht van een pak suiker uit deze steekproef minder is dan 500 gram?

Antwoord

Vanwege de centrale limietstelling mag je ervan uitgaan dat het gemiddelde gewicht $\overline{X}$ van de steekproevenverdeling normaal verdeeld is waarbij het gemiddelde 501 gram is en de standaardafwijking $\frac{2{,}9}{\sqrt{50}}$ gram.

De gevraagde kans is P$\left(\overline{X} < 500 | \mu = 501 \text{ en } \sigma = \frac{2{,}9}{\sqrt{50}}\right) \approx 0{,}007$.

Dit bereken je met de grafische rekenmachine.

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Moet het gewicht van een pak suiker per se normaal verdeeld zijn?

b Reken na dat de kans ongeveer $0{,}007$ is.

c Als de steekproefgrootte 100 was geweest, hoe groot was dan in vier decimalen de kans geweest?

Opgave 8

In een wetenschappelijke analyse door het blad ‘Science’ (gepubliceerd in maart 2016) van allerlei onderzoeken op het gebied van de experimentele economie is ook een onderzoek uit 2011 bestudeerd dat als resultaat gaf: ‘ruilen is minder effectief dan betalen’.

Tijdens de analyse werd geconcludeerd dat voor dit onderzoek het aantal proefpersonen veel te klein was. Bij een herhaling van dit onderzoek kan het effect niet worden gereproduceerd.

Verklaar met statistische termen en argumenten dat het kleine aantal proefpersonen en het feit dat het effect niet reproduceerbaar is, met elkaar samenhangt.

Denk aan termen als populatie, steekproef, steekproefomvang, steekproefgemiddelde, normale verdeling, wortel-n-wet, centrale limietstelling.

Verwerken

Opgave 9

In de Nationale Wetenschapsquiz kwam de volgende vraag voor. Stel, je wilt weten hoeveel schoolgaande kinderen er gemiddeld per gezin zijn. Je neemt een grote steekproef onder schoolkinderen en vraagt hun hoeveel schoolgaande broers en zussen zij hebben. Op basis daarvan bepaal je het gemiddelde aantal schoolgaande kinderen per gezin.

Is dit een goede aanpak? Welk van de antwoorden is correct en waarom?

A. Ja, zo krijg je een juiste schatting.
B. Nee, zo krijg je een te lage schatting.
C. Nee, zo krijg je een te hoge schatting.

Opgave 10

Een machine vult pakken suiker. Het gemiddelde gewicht van een pak suiker is 1002 gram met een standaardafwijking van 6,5 gram. Er wordt een steekproef genomen van 100 pakken.

a Waarom mag je ervan uitgaan dat de steekproevenverdeling normaal verdeeld is?

b Bereken in vier decimalen de kans dat het gemiddelde gewicht van een pak suiker uit de steekproef minder is dan 1000 gram.

Opgave 11

Er wordt onderzoek gedaan naar het aantal Nederlanders dat Fries spreekt. Er wordt een steekproef genomen van 1200 Nederlanders: uit elke provincie aselect 100 inwoners.

a Lever commentaar op deze steekproefsamenstelling.

b Hoe kan het beter? Geef hiervoor minstens twee manieren.

Opgave 12

Leg uit of bij de volgende situaties uitgegaan mag worden van normale verdeling.

a Het aantal ogen dat je gooit als je drie keer met een dobbelsteen gooit.

b Het aantal keer kop als je 10000 keer met een geldstuk werpt.

c De gemiddelde score van een boogschutter die honderd keer achter elkaar op een schietschijf schiet met daarop de scores 1 tot en met 10.

Opgave 13

Een onderzoeker wil de gemiddelde lengte van een zonnebloem in midden-Frankrijk weten in het jaar 2016. Daarvoor heeft hij de lengte van duizend zonnebloemen gemeten. De gegevens heeft hij in een relatieve frequentietabel gezet.

a Bereken het steekproefgemiddelde van de getoonde steekproef van 1000 zonnebloemen. Bereken ook de bijbehorende standaardafwijking. Geef beide waardes in meter en rond af op twee decimalen.

b De steekproef is voldoende groot om de centrale limietstelling te mogen gebruiken. Waarom mag je nu niet zomaar zeggen dat de lengte van een zonnebloem normaal verdeeld is?

Neem aan dat de lengte van een zonnebloem in midden-Frankrijk in 2016 normaal verdeeld is met een gemiddelde van 2,83 en een standaardafwijking van 76 cm.

lengte zonnebloem (meter)	percentage
$0- < 0,5$	0,1
$0,5- < 1$	1,1
$1- < 1,5$	2,6
$1,5- < 2$	9,1
$2- < 2,5$	21,6
$2,5- < 3$	31,4
$3- < 3,5$	19,9
$3,5- < 4$	9,8
$4- < 4,5$	3,1
$4,5- < 5$	1,0
$5- < 5,5$	0,3

Tabel 1.1

c Bereken in vier decimalen de kans dat een zonnebloem uit midden-Frankrijk in 2016 een lengte heeft die kleiner is dan het steekproefgemiddelde van de 1000 zonnebloemen.

Opgave 14

Een steekproef van 30 of groter is in veel gevallen voldoende groot om de centrale limietstelling te mogen toepassen. Soms is een kleinere steekproef al voldoende, maar soms moet de steekproef ook een stuk groter zijn dan 30.

Stel, er zijn twee dobbelstenen. Een gewone en een bijzondere dobbelsteen met de waarden 1, 2, 4, 5, 6, 6. Je gooit beide dobbelstenen een groot aantal keer en berekent het gemiddeld aantal ogen.

a Bij welke dobbelsteen, denk je, zal het gemiddeld aantal ogen dat je gooit eerder een normale verdeling benaderen?

b Is de som van de gemiddeldes van beide dobbelstenen (bij benadering) normaal verdeeld, als je maar vaak genoeg gooit?

Toepassen

Opgave 15: Populaire webwinkel

Een Britse populaire webwinkel heeft gedurende Britse kantooruren gemiddeld 65000 bezoekers per uur, met een standaarddeviatie van 27500 bezoekers: het aantal bezoekers is normaal verdeeld.
Tijdens een test wordt een aselecte steekproef van 50 kantooruren getrokken en wordt steekproefgemiddelde $\overline{B}$ van het aantal websitebezoekers berekend.

a Welke kansverdeling heeft $\overline{B}$? Beargumenteer je antwoord.

b Hoe groot is de kans dat het steekproefgemiddelde van deze 50 kantooruren hoger is dan 73000 bezoekers per kantooruur? Rond af op vier decimalen.

c Wat is waarschijnlijker: dat het steekproefgemiddelde $\overline{B}$ lager ligt dan 60000 bezoekers per kantooruur of dat er tijdens een willekeurig kantooruur minder dan 60000 bezoekers zijn? Beargumenteer je antwoord.

d Leg uit waarom het antwoord op de vorige vraag overeenkomt met wat je volgens de centrale limietstelling van een steekproef mag verwachten.

Testen

Opgave 16

Leg uit of de gekozen steekproef groot genoeg is.

a In het buitenland komt een ziekte bij 0,01% van de mensen voor. De overheid wil weten of de ziekte ook in ons land voorkomt en onderzoekt daarom vijfduizend Nederlanders.

b De manager van een ijsbaan wil weten of er op woensdag meer meisjes dan jongens komen schaatsen. Op een zeker moment neemt hij een steekproef van dertig bezoekers en telt het aantal meisjes.

Opgave 17

Zijn bij de volgende onderzoeken de steekproeven aselect en representatief? Leg je antwoord uit.

a Een onderzoek onder treinreizigers, waarbij de vragenlijsten willekeurig worden verstuurd naar bezitters van een OV-chipkaart. Ga ervan uit dat iedere reiziger maar één OV-chipkaart bezit.

b Een onderzoek houden of Nederlanders voldoen aan de beweegnorm door een maand lang alle bezoekers van de website van de Gezondheidsraad te bevragen.

Opgave 18

Bij een snackbar kan iedere klant zelf een portie mayonaise toevoegen met een mayonaisepomp. De mayonaisepomp pompt per portie gemiddeld 25 gram mayonaise op met een standaardafwijking van 3 gram.

Bij een steekproef van 40 porties blijkt dat het steekproefgemiddelde 18 gram is.

a Bereken de kans op een steekproefgemiddelde van minder dan 18 gram.

b Wat vind je van de waarschijnlijkheid van genoemd steekproefgemiddelde als het echt waar is dat het gemiddelde portievolume gelijk is aan 25 gram met een standaardafwijking van 3 gram?

1.2 Toetsen van hypothesen

Inleiding

De inhoud van een fles cola is ongeveer $1{,}5$ liter. Omdat de fabrikant volgens Europese richtlijnen niet te veel klanten mag teleurstellen moet hij zijn flessen vullen met een volume dat normaal is verdeeld met gemiddeld 1530 mL en een standaardafwijking van 18 mL. Nu bevat minder dan 5% van zijn flessen te weinig cola. Hoe kan deze fabrikant nagaan of zijn flessen aan deze norm voldoen?

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen hypothese toetsen, nulhypothese, alternatieve hypothese, kritieke gebied, significantieniveau;
- linkszijdige, rechtszijdige, tweezijdige toetsen uitvoeren.

Voorkennis

- de normale verdeling met zijn vuistregels over het gemiddelde en de standaardafwijking;
- kansen en grenswaardes berekenen met de normale verdeling;
- de wortel-n-wet gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

De inhoud van een fles cola is ongeveer $1{,}5$ liter. Omdat de fabrikant volgens Europese richtlijnen niet te veel klanten mag teleurstellen moet hij zijn flessen vullen met een volume dat normaal is verdeeld met gemiddeld 1530 mL en een standaardafwijking van 18 mL. Nu bevat minder dan 5% van zijn flessen te weinig cola.

a Reken na dat inderdaad 5% van zijn flessen te weinig cola bevat.

b Hoe kan deze fabrikant nagaan of zijn flessen aan deze norm voldoen? Met andere woorden: of ze inderdaad een gemiddelde volume van 1530 mL hebben met een standaardafwijking van 18 mL.

Uitleg 1

Op een fles frisdrank staat dat de inhoud $1{,}5$ liter is. Natuurlijk zal de inhoud nooit precies $1{,}5$ liter zijn. De vulmachine is zo afgesteld dat het vulgewicht V normaal is verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 1530$ mL is en een standaardafwijking van $\sigma = 18$ mL. Minder dan 5% van de flessen bevat nu te weinig frisdrank.

De fabrikant controleert regelmatig de afstelling van zijn vulmachine door in een steekproef van 25 flessen de gemiddelde inhoud te meten. De fabrikant voert een hypothesetoets uit.

De nulhypothese H_0 is: $\mu = 1530$ mL.
De alternatieve hypothese H_1 is: $\mu \neq 1530$ mL.

Figuur 2.2

Ongelijk aan 1530 mL betekent dat het gemiddelde zowel groter als kleiner dan 1530 kan zijn. Dan voer je een tweezijdige toets uit.

Je kunt ook een eenzijdige toets uitvoeren. In het geval van H_1: $\mu > 1530$ mL, spreek je van een rechtszijdige toets, in het geval van H_1: $\mu < 1530$ mL, van een linkszijdige toets.

Vooraf heeft de fabrikant een beslissingsvoorschrift opgesteld, bijvoorbeeld: als het gemiddelde volume van een fles uit de steekproef kleiner is dan 1525 mL of groter dan 1535 mL, klopt de nulhypothese niet. Vulgemiddeldes die minder zijn dan 1525 mL of meer dan 1535 mL vormen het kritieke gebied. Valt het gemiddelde volume in de steekproef in het kritieke gebied, dan gaat de fabrikant er niet meer van uit dat de vulmachine de flessen vult met een gemiddelde van 1530 mL. Hij verwerpt daarmee de nulhypothese en accepteert de alternatieve hypothese. Het gevolg is dat hij de machine bij moet stellen.

Er is een kans dat de fabrikant de nulhypothese ten onrechte verwerpt. Die kans heet het significantieniveau α. Toevallig kan het gemiddelde volume in de steekproef een keer bijzonder klein of bijzonder groot zijn. De fabrikant zal van tevoren een afweging gemaakt hebben over de waardes die in het kritieke gebied komen: zijn het er te veel, dan is de kans dat hij ten onrechte de vulmachine anders afstelt groot. Zijn het er te weinig, dan is de kans dat hij zijn vulmachine ten onrechte niet aanpast weer groot.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.

a De hypothesetoets in de uitleg heet een tweezijdige hypothesetoets.
Leg uit waarom.

b Waarom is de steekproevenverdeling normaal verdeeld?

c Bereken in vier decimalen de kans dat het gemiddelde volume van de steekproef van 25 flessen frisdrank in het kritieke gebied valt dat de fabrikant bepaald heeft.

Opgave 2

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.

a Schets de normaalkromme van de steekproevenverdeling en geef daarin het kritieke gebied aan.

b Beargumenteer met statistische argumenten of je deze grenswaardes van het kritieke gebied zou aanbevelen aan de fabrikant of juist niet.

Uitleg 2

Een fabrikant beweert dat zijn vulmachine flessen frisdrank vult met een gemiddelde van 1530 mL en een standaardafwijking van 18 mL. Het vulgewicht is normaal verdeeld. Hij krijgt echter steeds meer klachten van klanten die vinden dat het gemiddelde lager ligt.

De fabrikant doet daarom een steekproef van 25 flessen met het volgende beslissingsvoorschrift: als de kans op het gemiddelde volume van een fles frisdrank in zijn steekproef kleiner is dan 5% stelt

hij zijn vulmachine opnieuw in. Dit betekent:
H_0: $\mu = 1530$
H_1: $\mu < 1530$

Dit is een linkszijdige hypothesetoets met een significantieniveau α van 5%.

Het gemiddelde volume in de steekproef van de fabrikant blijkt 1519 mL te zijn. Je kunt nu op twee manieren deze linkszijdige hypothesetoets verder uitvoeren.

Manier 1

- Bereken de grenswaarde g van het kritieke gebied met behulp van $\alpha = 0{,}05$:
  $$\text{P}\left(\overline{V} < g | \mu = 1530 \text{ en } \sigma = \frac{18}{\sqrt{25}}\right) = 0{,}05$$
  geeft een grenswaarde van ongeveer 1524 mL.
- Omdat $1519 < 1524$ ligt het steekproefgemiddelde in het kritieke gebied.
- Conclusie: de nulhypothese wordt verworpen, de vulmachine moet bijgesteld worden.

Manier 2

- Bereken de kans op hoogstens het steekproefgemiddelde. Deze kans is
  $$\text{P}\left(\overline{V} < 1519 | \mu = 1530 \text{ en } \sigma = \frac{18}{\sqrt{25}}\right) \approx 0{,}0011.$$
- Omdat $0{,}0011 < 0{,}05$ ligt het steekproefgemiddelde in het kritieke gebied.
- Conclusie: de nulhypothese wordt verworpen, de vulmachine moet bijgesteld worden.

De fabrikant trekt deze conclusie met een betrouwbaarheid van 95%. Door een significantieniveau van 5% te gebruiken is de kans dat zijn nulhypothese wel degelijk juist is en dat hij zijn vulmachine dus voor niets bijstelt gelijk aan 5%.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

a Bereken zelf de grenswaarde van het kritieke gebied voor de hypothesetoets.

b Bereken zelf de kans op hoogstens het steekproefgemiddelde van de hypothesetoets.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.
De klanten voeren doen een eigen onderzoek.
Zij gebruiken een significantieniveau van 1% en trekken ook een steekproef van 25 flessen.

a Geef de nulhypothese en de alternatieve hypothese van deze hypothesetoets.

Het gemiddelde volume van de flessen in de steekproef van de klanten is 1521 mL.

b Voer de hypothesetoets uit van de klanten op basis van de grenswaarde van het kritieke gebied.

c Welke conclusie trekken de klanten? Hoe groot de betrouwbaarheid van deze conclusie?

Door het significantieniveau van 1% hebben de klanten in principe een kans van 1% om H_0 ten onrechte te verwerpen.

d Hoe groot is in vier decimalen de kans dat de vulmachine van de fabrikant toch goed afgesteld staat bij een gemiddeld steekproefvolume van maximaal 1521 mL?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Statistische methodes kunnen worden gebruikt om een bewering over een populatie te controleren. Dit heet **een hypothese toetsen**.

De **nulhypothese** H_0 is de gangbare bewering (bijvoorbeeld op grond van voorgaand onderzoek).
De **alternatieve hypothese** H_1 is een bewering die de nulhypothese bestrijdt.

Stel, toevalsvariabele X is normaal verdeeld. Er wordt beweerd dat het gemiddelde $\mu(X) = \mu$ is, waarin μ een bepaalde waarde is. Iemand anders vertrouwt het gemiddelde niet en vermoedt (bijvoorbeeld): $\mu(X) < \mu$.

Je hebt dan:
$H_0 : \mu(X) = \mu$
$H_1 : \mu(X) < \mu$

Dit wordt getoetst met een steekproef van grootte n. Je bepaalt dan het gemiddelde in de steekproef en kijkt of de afwijking van μ significant is. Het steekproefgemiddelde $\mu(\overline{X})$ is normaal verdeeld met $\mu(\overline{X}) = \mu$ en $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

Opmerking: Dit is vanwege de **centrale limietstelling** ook zo als X niet normaal verdeeld is, mits de steekproef voldoende groot is.

Bij de alternatieve hypothese hoort een **kritiek gebied** dat aangeeft waar de afwijking van $\mu(\overline{X})$ zo groot is dat je de nulhypothese verwerpt. Dat kritieke gebied bepaal je op grond van een vooraf vastgesteld **significantieniveau α** . Het significantieniveau kies je voordat je de toets uitvoert, bijvoorbeeld $\alpha = 10$% of $\alpha = 5$%.

Als de kans op een steekproefgemiddelde van $\mu(\overline{X})$ kleiner is dan α, verwerp je H_0 en accepteer je H_1.

Afhankelijk van de situatie, zijn er drie mogelijkheden voor de alternatieve hypothese:

- een **rechtszijdige toets** waarbij H_0 getoetst wordt tegen $H_1 : \mu(\overline{X}) > \mu(X)$.
- een **linkszijdige toets** toetst H_0 tegen $H_1 : \mu(\overline{X}) < \mu(X)$.
- een **tweezijdige toets** toetst H_0 met $H_1 : \mu(\overline{X}) \neq \mu(X)$.

Voorbeeld 1

Een groothandel verkoopt pakken hagelslag met een gemiddeld gewicht van 255 gram en een standaardafwijking van 4 gram. Het gewicht van een pak hagelslag is normaal verdeeld.

De fabrikant van de pakken hagelslag vermoedt dat zijn pakken tegenwoordig te veel hagelslag bevatten en dat is nadelig voor hem.
Hij besluit een hypothesetoets te doen met een significantieniveau van 5%.
De fabrikant neemt een steekproef van 15 pakken hagelslag.
Voer de hypothesetoets uit en geef het kritieke gebied.

Antwoord

Deze hypothesetoets heeft betrekking op de normaal verdeelde toevalsvariabele G, het gewicht van een pak hagelslag.

De fabrikant stelt als nulhypothese en alternatieve hypothese:
H_0: $\mu(G) = 255$ gram
H_1: $\mu(G) > 255$ gram

Het is dus een rechtszijdige hypothesetoets: het kritieke gebied ligt rechts van de grenswaarde.

Het gemiddelde gewicht $\overline{G}$ van de steekproevenverdeling is normaal verdeeld (omdat G normaal verdeeld is). De grenswaarde g van het kritieke gebied is te berekenen met:

$$\text{P}\left(\overline{G} > g | \mu = 255 \text{ en } \sigma = \frac{4}{\sqrt{15}}\right) = 0{,}05$$

Je vindt met de grafische rekenmachine $g \approx 256{,}7$ gram.

Het kritieke gebied bestaat uit alle gewichten die groter zijn dan $256{,}7$ gram.

Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Schets het kritieke gebied bij een steekproefomvang van 15 pakken hagelslag in de normaalkromme van de steekproevenverdeling.

b Stel dat de fabrikant een steekproef van 10 pakken zou doen. Welk kritiek gebied krijg je dan?

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**. De fabrikant heeft het significantieniveau verlaagd naar $2{,}5$% en heeft een steekproef van 15 pakken hagelslag getrokken. Het gemiddelde gewicht van een pak hagelslag in deze steekproef blijkt $256{,}4$ gram te zijn.

a Ligt het steekproefgemiddelde in het kritieke gebied?

b Wat zal de fabrikant doen op basis van zijn beslissingsvoorschrift bij deze steekproefuitslag?

Voorbeeld 2

Een groothandel verkoopt pakken hagelslag met een gemiddeld gewicht van 255 gram en een standaardafwijking van 4 gram. Het gewicht van de pakken is normaal verdeeld.
De fabrikant van de pakken hagelslag wil niet te veel, maar ook niet te weinig hagelslag in de pakken voor de groothandel stoppen.
Regelmatig trekt hij daarom een steekproef van 20 pakken hagelslag en voert daarmee een hypothesetoets uit met een significantieniveau van 5%.

Wat is de conclusie die de fabrikant uit deze hypothesetoets zal trekken als het steekproefgemiddelde $253{,}75$ gram is?

Antwoord

De hypothesetoets die de fabrikant telkens uitvoert, is een tweezijdige toets van toevalsvariabele G, het gewicht van een pak hagelslag.

Er geldt:
H_0: $\mu(G) = 255$ gram
H_1: $\mu(G) \neq 255$ gram

Het steekproefgemiddelde $\overline{G}$ is kleiner dan het gemiddelde van de nulhypothese: als het al in het kritieke gebied ligt, dan ligt het in het linkerdeel van dit tweezijdige kritieke gebied.

P$\left(\overline{G} < 253{,}75 | \mu = 255 \text{ en } \sigma = \frac{4}{\sqrt{20}}\right) \approx 0{,}0811$

Het significantieniveau is 5%, maar omdat het een tweezijdige toets is, vergelijk je dit met $2{,}5\% = 0{,}025$.
Omdat de kans op een steekproefgemiddelde van hoogstens $253{,}75$ gram groter is dan $2{,}5\%$ ligt het steekproefgemiddelde niet in het kritieke gebied.
De fabrikant verwerpt de nulhypothese daarom niet.

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Bereken de grenswaarde van het linkerdeel van het kritieke gebied bij de hypothesetoets.

b Wat is de betekenis van dit kritieke gebied voor de hypothesetoets?

c Bereken ook de grenswaarde van het rechterdeel van het kritieke gebied.

d Klopt de conclusie van de fabrikant op basis van een steekproefgemiddelde van $253{,}75$ gram ook als je niet naar de kans op dit steekproefgemiddelde kijkt, maar checkt of dit steekproefgemiddelde wel of niet in het kritieke gebied ligt?

Opgave 8

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**. Stel, de fabrikant vindt de kosten van te volle hagelslagpakken geen probleem meer en daarom wil hij zijn vulproces alleen nog maar toetsen op te weinig inhoud. Hij blijft bij het toetsen gebruikmaken van een steekproef van 20 pakken en behoudt het significantieniveau van 5%.

a Geef de nulhypothese en de alternatieve hypothese van de nieuwe hypothesetoets van de fabrikant en bepaal het bijbehorende kritieke gebied.

b Vergelijk het oorspronkelijke kritieke gebied en het nieuwe kritieke gebied met elkaar.

Opgave 9

Bij het uitvoeren van statistische hypothesetoetsen kan de conclusie fout zijn, zelfs als het onderzoek helemaal goed wordt uitgevoerd. Welke twee foute conclusies zijn er te trekken?

Verwerken

Opgave 10

Een firma die batterijen levert voor rekenmachines, beweert dat die batterijen geschikt zijn om zo'n apparaat gemiddeld 3600 uur te laten werken. Ze gaan ervan uit dat die levensduur normaal is verdeeld met een standaarddeviatie van 600 uur.

De leverancier van die rekenmachines is bang dat de levensduur van de batterijen gemiddeld korter is en daarom gaan ze dit toetsen. Ze kiezen aselect 75 rekenmachines en stoppen in elk apparaat een aselect gekozen batterij van deze firma.

Zij nemen voor de grenswaarde van het kritieke gebied van hun hypothesetoets een gemiddelde levensduur van 3350 uur.

a Stel de hypothesetoets op.

b Het steekproefgemiddelde is 3400 uur. Welke conclusie over de gemiddelde levensduur van de batterijen zal de leverancier van de rekenmachines trekken?

Opgave 11

Volgens een wetenschappelijk tijdschrift is het gewicht van 17-jarige meisjes normaal verdeeld met een gemiddelde van $54{,}2$ kg en een standaarddeviatie van $4{,}7$ kg. Om deze bewering te toetsen wordt van 200 aselect gekozen 17-jarige meisjes het gewicht bepaald. Als significantieniveau is 5% gekozen.

a Zal dit een eenzijdige of tweezijdige toets worden?

b Beschrijf de hypothesetoets.

c Welke grenswaarde(s) heeft het kritieke gebied?

d Het steekproefgemiddelde is $54{,}7$ kg. Welke conclusie trek je?

Opgave 12

Volgens de informatie op een pakje drinkyoghurt zou dit gemiddeld $12{,}5$ gram suiker bevatten. Een onderzoeksbureau beweert dat er in werkelijkheid veel meer suiker in de pakjes zit.

De leverancier van de pakjes besluit een steekproef van 50 pakjes te nemen. De pakjes uit de steekproef bevatten gemiddeld $16{,}4$ gram suiker.

Neem aan dat de hoeveelheid per pakje normaal verdeeld is met een standaardafwijking van $3{,}1$ gram.

Onderzoek of dit resultaat voldoende aanleiding is om de informatie die op de pakjes staat te verwerpen. Neem een significantieniveau van 1%.

Opgave 13

Vacuüm verpakte vleeswaren mogen maximaal $0{,}022\%$ natriumnitriet bevatten. De keuringsdienst van waren toetst dit percentage, omdat men denkt dat het gemiddelde percentage natriumnitriet boven $0{,}022\%$ ligt. Je mag aannemen dat het natriumnitrietpercentage normaal verdeeld is.

a Formuleer de nulhypothese.

b Is de toets eenzijdig of tweezijdig? Formuleer ook de alternatieve hypothese.

Bekijk 25 meetresultaten:

0,0219	0,0226	0,0225	0,0225	0,0216
0,0219	0,0220	0,0216	0,0229	0,0226
0,0214	0,0219	0,0226	0,0220	0,0212
0,0225	0,0223	0,0215	0,0221	0,0223
0,0224	0,0215	0,0228	0,0223	0,0223

Tabel 2.1

c Toets met behulp van deze steekproef of de keuringsdienst gelijk heeft. Neem een significantieniveau van 5%. Gebruik hierbij de standaardafwijking van deze meetresultaten.

Opgave 14

In een medisch laboratorium worden voortdurend cholesterolgehaltes in bloedmonsters bepaald. Het cholesterolgehalte is normaal verdeeld. De gebruikte apparatuur wordt elk uur gecontroleerd met behulp van een ijkmonster. Hiervan is bekend dat het gemiddelde 175 mg per 100 mL zou moeten zijn. De controlemetingen aan het ijkmonster leveren op: 168, 170, 188, 170, 174, 190, 188 en 171.
Is er met een significantie van $\alpha = 0{,}01$ reden om aan te nemen dat de meetapparatuur niet goed meer werkt?

Gebruik de standaardafwijking van de controlemetingen als schatting voor de standaardafwijking van de populatie.

Toepassen

Opgave 15: Conditietest

Een Canadese gymnastiekdocent traint regelmatig jongens van 14 jaar om hun conditie te verbeteren. De gemiddelde score van deze leeftijdscategorie is $8{,}0$ en de standaardafwijking is $2{,}0$. De docent is van mening dat deze training daadwerkelijk helpt. Om dat na te gaan laat hij na een aantal trainingen 132 jongens van 14 jaar de conditietest doen. Het resultaat is dat deze jongens een gemiddelde score van $8{,}43$ hebben gehaald.

Onderzoek of deze gymnastiekdocent op grond van dit resultaat gelijk krijgt.
Neem als significantieniveau 5%.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2009, tweede tijdvak)

Opgave 16: Fout van de tweede soort

Als het significantieniveau van een hypothesetoets gelijk is aan 5% wil dat zeggen dat je bij deze toets minder dan 5% kans hebt om de nulhypothese onterecht te verwerpen.

Als je de nulhypothese ten onrechte verwerpt, ga je ervan uit dat de toevalsvariabele van de populatie die je onderzoekt een ander gemiddelde heeft dan in de nulhypothese wordt gesteld: H_0 is waar maar je gaat vanaf nu uit van H_1. Dit wordt ook wel de fout van de eerste soort genoemd.

Het is ook mogelijk om de nulhypothese ten onrechte niet te verwerpen: H_1 is eigenlijk waar maar je blijft uitgaan van H_0. Dit wordt de fout van de tweede soort genoemd.

a Waarom zou normaal gesproken een fout van de eerste soort ernstiger worden gevonden dan een fout van de tweede soort?

b Waarom kun je een fout van de eerste soort nooit helemaal uitsluiten?

Testen

Opgave 17

Volgens de fabrikant is het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal verdeeld met $\mu = 1002$ en $\sigma = 3$.

Omdat de Consumentenbond veel klachten heeft binnengekregen waarin wordt gemeld dat de pakken suiker van deze fabrikant te weinig suiker bevatten, wordt er door hen getwijfeld aan dit gemiddelde. De Consumentenbond stelt dat het gemiddelde gewicht van de pakken suiker van deze fabrikant lager ligt dan 1002 gram.

Ze onderzoeken de bewering van de fabrikant met behulp van een hypothesetoets.

a Formuleer (in woorden) de nulhypothese die hier getoetst moet worden.

De Consumentenbond stelt het beslissingsvoorschrift op voor de hypothesetoets.

De kans dat het gemiddelde gewicht van de pakken suiker in een steekproef van 10 stuks lager is dan 1000 gram, moet kleiner zijn dan 1%.

b Bepaal het kritieke gebied van deze hypothesetoets.

c Is de eis van de Consumentenbond mogelijk als er een steekproef van 10 pakken suiker wordt getrokken? En als er een steekproef van 20 pakken suiker wordt getrokken?

d Leg uit wat de invloed van de steekproefomvang is op het beslissingsvoorschrift van een hypothesetoets en leg uit hoe dat komt. Gebruik daarbij het resultaat uit c.

Opgave 18

Op een pak melk staat: “Het natuurlijk vetgehalte van melk – zoals die van de koe komt – varieert van 3,7% tot 4,3%”.

Volle melk wordt in de fabriek altijd afgeroomd tot $3{,}5\%$.

Een consumentenorganisatie besluit na te gaan of volle melk $3{,}5\%$ vet bevat. In een aselecte steekproef van 20 pakken volle melk vindt ze de percentages uit de tabel.

a Laat met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier zien dat de resultaten van deze proef reden geven om aan te nemen dat het vetgehalte van pakken melk normaal verdeeld is.

b Schat met behulp van de steekproef de standaardafwijking van het vetgehalte van pakken melk.

c Toets met significantieniveau $0{,}05$ of de consumentenorganisatie op grond van de steekproef de bewering op het pak kan verwerpen.

percentage	frequentie
$3{,}445 - < 3{,}455$	1
$3{,}455 - < 3{,}465$	0
$3{,}465 - < 3{,}475$	4
$3{,}475 - < 3{,}485$	3
$3{,}485 - < 3{,}495$	3
$3{,}495 - < 3{,}505$	4
$3{,}505 - < 3{,}515$	2
$3{,}515 - < 3{,}525$	2
$3{,}525 - < 3{,}535$	1

Tabel 2.2

1.3 Populatiegemiddeldes schatten

Inleiding

Je wilt een schatting maken van de gemiddelde lengte van zonnebloemen in midden Frankrijk in 2015. Dat doe je natuurlijk door één keer een grote steekproef te trekken, want alle zonnebloemen van dat jaar opmeten is onbegonnen werk. En ook meerdere grote steekproeven nemen is nauwelijks haalbaar en zeker veel te duur. Maar hoe betrouwbaar is je schatting op grond van één steekproef?

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- een betrouwbaarheidsinterval voor een populatiegemiddelde schatten.

Voorkennis

- de normale verdeling met zijn vuistregels over het gemiddelde en de standaardafwijking;
- kansen en grenswaarden berekenen met de normale verdeling;
- de wortel-n-wet gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt een schatting maken van de gemiddelde lengte van zonnebloemen in midden Frankrijk in 2015. Dat doe je natuurlijk door één keer een grote steekproef te trekken, want alle zonnebloemen van dat jaar opmeten is onbegonnen werk. En ook meerdere grote steekproeven nemen is nauwelijks haalbaar en zeker veel te duur.

a Je neemt een steekproef van 1000 zonnebloemen. Hun gemiddelde lengte is 271 cm. Is dat dan automatisch de gemiddelde lengte van alle zonnebloemen in midden Frankrijk in 2015?

b Hoe betrouwbaar is je schatting op grond van één steekproef?

Uitleg

Om een betrouwbare schatting te maken van de gemiddelde lengte van zonnebloemen in midden-Frankrijk hebben onderzoekers een aselecte en representatieve steekproef van 1000 zonnebloemen getrokken. De gemiddelde lengte van deze 1000 zonnebloemen blijkt $2{,}83$ meter te zijn met een standaardafwijking van $75{,}9$ cm. Omdat de steekproef voldoende groot is, mag je ervan uitgaan dat de steekproevenverdeling normaal verdeeld is. Of de lengte van een zonnebloem normaal verdeeld is, maakt daarbij niet uit.

Figuur 3.2

Volgens de vuistregels zal in 95% van de steekproeven de gemiddelde lengte van zonnebloemen in midden-Frankrijk liggen tussen
$2{,}83 - 2 \cdot \frac{0{,}759}{\sqrt{1000}} \approx 2{,}78$ m en $2{,}83 + 2 \cdot \frac{0{,}759}{\sqrt{1000}} \approx 2{,}88$ m
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde zonnebloemlengte (m) is $[2{,}78; 2{,}88]$.

Het is ook mogelijk om de grenzen van het 95%-betrouwbaarheidsinterval te berekenen met behulp van z-waarde $1{,}96$: je vervangt dan de 2 in de vuistregel door $1{,}96$. De z-waarde geeft voor een normale verdeling het aantal standaardafwijkingen aan dat een bepaalde variabele verwijderd is van het gemiddelde.
Bij de zonnebloemen krijg je dan opnieuw de grenzen $2{,}78$ en $2{,}88$.

Het voordeel van de z-waarde in plaats van de vuistregel is dat je dan ook andere betrouwbaarheidsintervallen kunt berekenen zoals bijvoorbeeld een 90%- of een 99%-betrouwbaarheidsinterval. Het betrouwbaarheidsinterval kun je aanpassen aan de eisen die het onderzoek verlangt. Dat is vergelijkbaar met de vaststelling van een significantieniveau bij een hypothesetoets.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde lengte van zonnebloemen in midden-Frankrijk is $[2{,}78; 2{,}88]$. Dit betekent dat:

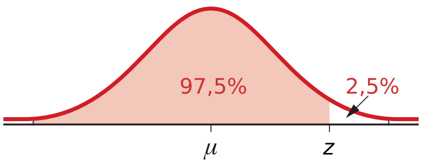
A. dat de lengte van een zonnebloem in midden-Frankrijk met een kans van 95% tussen de $2{,}78$ en de $2{,}88$ meter ligt.

B. dat de gemiddelde lengte van een zonnebloem in midden-Frankrijk met een kans van 95% tussen de $2{,}78$ en de $2{,}88$ meter ligt.

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt gebruik gemaakt van een factor 2.

a Geef een verklaring voor deze factor.



Figuur 3.3

De echte berekening van de grenzen van een betrouwbaarheidsinterval worden volgens de uitleg met z-waarden berekend.

b Verklaar met berekeningen het gebruik van z-waarde $1{,}96$ bij het berekenen van het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Opgave 3

Soms wil een onderzoeker een kleiner betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde in een populatie.

a Wat kan een onderzoeker aan de steekproef veranderen om daarvoor te zorgen? Licht je antwoord toe.

b Wordt het betrouwbaarheidsinterval groter als een betrouwbaarheid van 99% wordt genomen in plaats van 95%?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij statistisch onderzoek is het **populatiegemiddelde**, het gemiddelde van een statistische variabele van de hele populatie, belangrijk.

Dat gemiddelde wordt meestal geschat door een steekproef te nemen en daarvan het **steekproefgemiddelde** te berekenen. Maar door het nemen van een steekproef ontstaat een toevalsfout.
Deze toevalsfout ontstaat in het gemiddelde, maar ook in de standaardafwijking. Met de toevalsfout in de standaardafwijking wordt geen rekening gehouden.

Over de toevalsfout kan een uitspraak worden gedaan. Als het aantal steekproeven groot genoeg is, zal de **steekproevenverdeling** van de gemiddeldes een normale verdeling hebben. Let op: de variabele zelf kan en hoeft dus niet normaal verdeeld te zijn.

Je kunt de betrouwbaarheid van de steekproefuitslag als schatting voor het echte gemiddelde bepalen. Bij een betrouwbaarheid 95% bepaal je zo de grenzen van het **95%-betrouwbaarheidsinterval**:

- noem het steekproefgemiddelde $\overline{X}$ met steekproefomvang n;
- noem de steekproefstandaardafwijking S (als de populatiestandaardafwijking σ bekend is, gebruik dan $S = \sigma$);
- bereken de bijbehorende z-waarde met behulp van de standaardnormale verdeling: $z \approx 1{,}96 \approx 2$;
- het betrouwbaarheidsinterval is: $\left[\overline{X} - z \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$.

Met een betrouwbaarheid van 95% kun je aannemen dat het populatiegemiddelde μ een waarde heeft die in dit interval ligt. Is de gekozen betrouwbaarheid anders dan 95%, dan krijg je andere z-waarden. Zie ook het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Een groothandel verkoopt pakken hagelslag met een gemiddeld gewicht van 255 gram en een standaardafwijking van 4 gram.
De fabrikant van de pakken hagelslag wil niet te veel, maar ook niet te weinig hagelslag in de pakken voor de groothandel stoppen. Eens in de zoveel tijd trekt hij daarom een steekproef van 200 pakken hagelslag. De laatste steekproef die de fabrikant nam, had een steekproefgemiddelde van $253{,}75$ gram.

Hoe groot is het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor deze steekproef en welke conclusie kan de fabrikant daaruit trekken?

Antwoord

Je hebt te maken met:
$\overline{X} = 253{,}75$ en $\sigma = 4$ en $n = 200$.

Je mag ervan uitgaan dat het steekproefgemiddelde normaal verdeeld is (centrale limietstelling). Voor het 95%-betrouwbaarheidsinterval geldt:

De linkergrens is $253{,}75 - 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{200}} \approx 253{,}2$ gram.

De rechtergrens is $253{,}75 + 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{200}} \approx 254{,}3$ gram.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de steekproef is $[253{,}2; 254{,}3]$.

De fabrikant kan nu met een betrouwbaarheid van 95% aannemen dat μ, het gemiddelde gewicht van een pak hagelslag uit zijn fabriek, tussen de $253{,}2$ gram en de $254{,}3$ gram ligt. Dit gemiddelde gewicht is lager dan gewenst.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Reken de rechtergrens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval zelf na.

b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de steekproef uit het voorbeeld met behulp van een z-waarde van $1{,}96$.

Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**. De fabrikant besluit steekproeven van 50 pakken in plaats van 200 pakken te gebruiken.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval dat hoort bij een steekproefomvang van 50 pakken hagelslag en een steekproefgemiddelde van $253{,}75$ gram.

b Benoem het verschil tussen het betrouwbaarheidsinterval uit a en het interval dat in het voorbeeld is berekend.

c Zou je de conclusie die de fabrikant in het voorbeeld heeft getrokken op basis van dit andere 95%-betrouwbaarheidsinterval, wijzigen? Beargumenteer je antwoord.

Opgave 6

a Als de grootte van de steekproef toeneemt, wordt dan de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval groter of kleiner?

b Leg uit waarom een smal betrouwbaarheidsinterval te verkiezen is boven een breed betrouwbaarheidsinterval.

c Wat zal er met de breedte van een betrouwbaarheidsinterval gebeuren als er in plaats van een 95%-betrouwbaarheidsniveau een hoger (99%) of lager (90%) betrouwbaarheidsniveau wordt gekozen?

Voorbeeld 2

Volgens een fabrikant is zijn vulmachine zo ingesteld dat het gemiddelde gewicht van de pakken suiker 1001 gram is met een standaardafwijking van 3 gram.
Om dit te controleren wordt door de Consumentenbond een steekproef van 50 pakken suiker genomen. Het steekproefgemiddelde is 999 gram.
Hoe groot is het 90%-betrouwbaarheidsinterval voor deze steekproef en welke conclusie kan de Consumentenbond daarop baseren?

Antwoord

Er is gegeven dat: $\overline{X} = 999$ en $\sigma = 3$ en $n = 50$.

Los op: $\text{P}(Z < z | \mu = 0 \text{ en } \sigma = 1) = 0{,}95$, je vindt $z \approx 1{,}64$.

Voor het gevraagde betrouwbaarheidsinterval geldt nu

linkergrens: $999 - 1{,}64 \cdot \frac{3}{\sqrt{50}} \approx 998{,}3$ gram

rechtergrens: $999 + 1{,}64 \cdot \frac{3}{\sqrt{50}} \approx 999{,}7$ gram

Het 90%-betrouwbaarheidsinterval is: $[998{,}3; 999{,}7]$.

Conclusie: met een betrouwbaarheid van (minimaal) 90% mag de fabrikant niet beweren dat het gemiddelde gewicht van de pakken suiker 1001 gram is.

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.
Hoe luidt de conclusie als er een 99%-betrouwbaarheidsinterval gehanteerd wordt?

Opgave 8

Een laborant analyseert de concentratie in g/L van een actieve stof in een geneesmiddel. De standaardafwijking van deze concentratie is bekend, deze is 3 g/L.

a Stel dat er 10 metingen worden gedaan. Hoe breed is het 90%-betrouwbaarheidsinterval?

b Hoeveel metingen moet de laborant minstens doen om de breedte van het 90%-betrouwbaarheidsinterval kleiner dan 2 g/L te krijgen?

Verwerken

Opgave 9

Er wordt een steekproef genomen van lampen van de straatverlichting in een gemeente. De steekproef bestaat uit 500 lampen, waarvan de gemiddelde levensduur gelijk is aan 15000 uur en de standaardafwijking aan 1640 uur.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde levensduur van de lampen. Rond af op hele uren.

b Wat betekent dit interval?

c Bereken het 90%-betrouwbaarheidsinterval. Rond af op hele uren.

Opgave 10

De vuilnisdienst van een stad wil weten hoeveel huisvuil een gezin uit deze stad tweewekelijks buitenzet. Er wordt een aselecte steekproef genomen van 250 gezinnen. De hoeveelheid huisvuil heeft een gemiddeld gewicht van $12{,}5$ kg en een standaardafwijking van $5{,}3$ kg.

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de hoeveelheid huisvuil (kg) dat per gezin in de stad wordt opgehaald. Rond af op één decimaal.

Opgave 11

Een vulmachine vult flesjes water. Een aselecte steekproef van 30 flesjes geeft een gemiddelde inhoud van $25{,}1$ cL. De standaardafwijking is $s = 0{,}4$.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval. Rond af op één decimaal.

b Josephine beweert dat ongeveer 5% van de flesjes minder dan 25 cL bevat.
Rachid beweert dat ongeveer $2{,}5$% van de flesjes minder dan 25 cL bevat.
Wie heeft gelijk? Licht je antwoord toe.

Opgave 12

Een bedrijf maakt en verkoopt lightproducten. Ze beweert dat haar producten slechts 140 calorieën per pakje bevatten.
De Consumentenbond controleert dit met een aselecte steekproef van 50 pakjes. De uitkomst is gemiddeld 147 calorieën.
De standaardafwijking van deze steekproef is 14 calorieën.

a De bewering van het bedrijf lijkt niet te kloppen.
Geef aan of de Consumentenbond mag zeggen: met 95% betrouwbaarheid wordt het gemiddelde van 140 calorieën in het lightproduct overschreden.

b Wat moet het bedrijf aanpassen aan het aantal calorieën, zodat de uitspraak van de Consumentenbond niet klopt?

Opgave 13

Een machine vult medicijnverpakkingen met poeder. Het vulgewicht is normaal verdeeld. De fabrikant bewaakt het vulgewicht. Daarom onderzoekt de kwaliteitsafdeling deze verpakkingen. Het is bekend dat de standaardafwijking van het vulgewicht $0{,}35$ mg is.

De kwaliteitsafdeling wil het vulgewicht met een nauwkeurigheid van $0{,}2$ mg bepalen. Hoe groot moet de steekproefomvang zijn om dit met een 99%-betrouwbaarheid te kunnen doen?

Toepassen

Opgave 14: Meetfouten

Bij een steekproef onder 30 pasgeboren baby's is de lengte (cm) gemeten. De gemiddelde lengte is $52{,}2$ cm en de standaardafwijking $2{,}38$ cm.

a Onder de metingen zit een meetfout. Een van de baby's is geen 43 maar 46 cm. De variantie neemt daardoor met $2{,}3$ af.

Bereken het 90%-betrouwbaarheidsinterval. Geef de grenzen in centimeter en rond af op één decimaal.

Bij een andere steekproef is de lengte (cm) van 50 pasgeboren baby's gemeten. De gemiddelde lengte is $52{,}9$ en de standaardafwijking $2{,}41$.

b Door een fout in het meetinstrument zijn alle lengtes 1 cm te veel.

Bereken het 99%-betrouwbaarheidsinterval. Geef de grenzen in centimeter en rond af op één decimaal.

Testen

Opgave 15

Bij een statistisch onderzoek wordt het populatiegemiddelde $\mu \approx 44$ geschat. De standaardafwijking van de steekproevenverdeling is $\sigma \approx 1{,}2$.

a Hoe groot zijn de grenzen van het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde?

b Het nagenoeg 100%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is $\overline{X} \pm 3 \cdot \sigma$.
Hoe groot zijn de grenzen van het nagenoeg 100%-betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde?

Opgave 16

Een laborant analyseert de concentratie in g/L van een actieve stof in een geneesmiddel. De standaardafwijking van deze concentratie is bekend. Deze is $0{,}0062$ g/L.

Hoeveel metingen moet de laborant minstens doen om de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval kleiner dan $0{,}01$ te krijgen?

Practicum

Met de volgende practica kun je zien hoe je betrouwbaarheids berekent met de **grafische rekenmachine**. Doe alleen het onderdeel dat betrekking heeft op het betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden.

- **Kansverdelingen met de TI84**
- **Kansverdelingen met de TInspire**
- **Kansverdelingen met de Casio fx-CG50**
- **Kansverdelingen met de HP-prime**
- **Kansverdelingen met de NumWorks**

Maar je kunt ook heel goed betrouwbaarheidsintervallen bereke- nen met behulp van **Excel**. Bekijk daartoe het practicum:

- **Steekproeven en uitspraken**

1.4 Populatieproporties schatten

Inleiding

Je wilt een schatting maken van het percentage havoleerlingen dat doorstroomt naar vwo 5. Dat doe je door één keer een grote steekproef te trekken, want alle havoleerlingen in heel Nederland bevragen is ondoenlijk. En ook veel steekproeven nemen is nauwelijks haalbaar en zeer kostbaar. Maar hoe betrouwbaar is je schatting op grond van één steekproef?

Je leert in dit onderwerp

- betrouwbaarheidsintervallen van een steekproefproportie bepalen om een populatieproportie te kunnen schatten;;
- een populatieproportie toetsen.

Voorkennis

- de normale verdeling met zijn vuistregels over het gemiddelde en de standaardafwijking;
- kansen en grenswaarden berekenen met de normale verdeling;
- hypothese toetsen met de normale verdeling;
- werken met betrouwbaarheidsintervallen bij het schatten van een populatiegemiddelde.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt een schatting maken van het percentage havoleerlingen dat doorstroomt naar vwo 5. Dat doe je door één keer een grote steekproef te trekken, want alle havoleerlingen in heel Nederland bevragen is ondoenlijk. En ook veel steekproeven nemen is nauwelijks haalbaar en zeer kostbaar.

a Je vraagt in twee vwo 5 klassen hoeveel leerlingen er vanuit havo 5 komen. Van de 58 leerlingen blijken dat er 3 te zijn. Kun je nu gewoon vaststellen dat $5{,}1$% van de havo leerlingen doorstroomt naar vwo?

b Maar hoe betrouwbaar is je schatting op grond van één steekproef?

Uitleg 1

Bij statistische onderzoeken komen regelmatig vragen voor met maar twee mogelijke antwoorden, bijvoorbeeld:

- Ben je man of vrouw?
- Ben je ouder dan 40 jaar?

Als 39% van de ondervraagden op de vraag 'Ben je man?' met 'ja' antwoordt is het deel van de ondervraagden dat man is $p_{\text{steekproef man}} = 0{,}39$. Dit heet de steekproefproportie mannen.

Bij ‘nee’ hoort in dit geval $p_{\text{steekproef vrouw}} = 0{,}61$. Deze twee waarden van p zijn bij elkaar altijd 1.

Elke keer dat er een steekproef wordt genomen, kan het deel van de mensen dat ‘ja’ antwoordt, een iets andere waarde hebben. Omdat deze proporties p een steekproevenverdeling vormen, heeft p een normale verdeling mits de steekproef voldoende groot is.
Deze steekproevenverdeling heeft een standaardafwijking σ die je kunt berekenen uit $p_{\text{steekproef}}$ en het aantal mensen n in de steekproef. $p_{\text{steekproef}}$ noteer je ook wel als $\widehat{p}$.

Dan is: $\sigma = \sqrt{\frac{\widehat{p}\cdot(1-\widehat{p})}{n}}$

Stel dat in een steekproef van 50 uit een grote populatie 72% een bepaalde eigenschap heeft.

Dan is $n = 50$ en $\widehat{p} = 0{,}72$, zodat $\sigma = \sqrt{\frac{0{,}72\cdot(1-0{,}72)}{50}} \approx 0{,}063$.

Uit de vuistregels van de normale verdeling volgt dat 95% van de proporties in de steekproevenverdeling tussen $0{,}72 - 2 \cdot 0{,}063 \approx 0{,}59$ en $0{,}72 + 2 \cdot 0{,}063 \approx 0{,}85$ liggen. (In plaats van 2 kun je ook de z-waarde $1{,}96$ nemen.)

Dit betekent dat met 95% betrouwbaarheid bij elke nieuwe steekproef het deel van de populatie met de eigenschap tussen $0{,}59$ en $0{,}85$ ligt. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de populatieproportie is dus $[0{,}59; 0{,}85]$.

Opgave 1

Bereken in de volgende gevallen de steekproefproportie en de bijbehorende standaardafwijking.
Geef vervolgens het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

a Een steekproef van 200 personen, waarvan 130 personen ‘ja’ antwoorden.

b Een populatie van 11000 personen, waarvan 12% als steekproef wordt genomen.
63% van de mensen uit de steekproef zegt ‘1 of meer kinderen te hebben’.

Opgave 2

Er wordt een onderzoek gedaan naar welk deel van de festivalgangers boven de 40 jaar is. Bij een festival is door middel van een steekproef van 150 bezoekers de leeftijd gevraagd. Van deze groep blijken 50 bezoekers 40 jaar of ouder te zijn. Bereken de standaardafwijking van de steekproevenverdeling. Rond af op vier decimalen. Schat hiermee welk percentage van de festivalgangers boven de 40 jaar is.

Uitleg 2

In een vwo 5 klas zit 1 leerling die na zijn havodiploma doorstroomde.
Omdat er in totaal 30 leerlingen in deze klas zitten, is de proportie havogediplomeerden $\frac{1}{30} \approx 0{,}033$.

Een aantal jaar geleden heeft een onderzoeksbureau door middel van een steekproef berekend dat de proportie havogediplomeerden in vwo 5- en 6-klassen in Nederland met een betrouwbaarheid van 95% tussen de $7{,}2$% en de $15{,}2$% ligt. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is dus $[7{,}2; 15{,}2]$.

Je kunt op basis van het resultaat van 1 havogediplomeerde in de steekproef van 30 toetsen of de huidige proportie havogediplomeerden niet lager is dan $0{,}072$ (de linkergrens van het betrouwbaarheidsinterval).

De nulhypothese is H_0: $p = 0{,}072$.
De alternatieve hypothese is H_1: $p < 0{,}072$.
Neem bijvoorbeeld een significantieniveau van 5%.

Je berekent nu $\text{P}(X \leq 1)$, ervan uitgaande dat ieder van de 30 leerlingen een kans van $0{,}072$ heeft om havo gediplomeerd te zijn. Deze kans is ongeveer $0{,}354$.

Omdat $0{,}354 > 0{,}05$ is er geen reden om de nulhypothese te verwerpen.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

a Wat voor soort toets wordt er genomen? Links-, rechts- of tweezijdig?

b Als je een significantieniveau van 10% neemt, is er dan reden om de nulhypothese te verwerpen?

c Reken na dat de kans dat maximaal 1 leerling van het havo komt ongeveer $0{,}354$ is.

Opgave 4

Stel dat er in een groep van 70 vwo 5 leerlingen er twee met een havodiploma zitten.
Doe dezelfde hypothesetoets als in **Uitleg 2**, alleen nu met deze gegevens. Gebruik een significantieniveau van 10%.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **populatieproportie** p is het deel van de populatie dat voldoet aan een zeker kenmerk, uitgedrukt als percentage of fractie.

Omdat een populatieproportie, net als een populatiegemiddelde, vaak niet bekend is, bestaat er ook verklarende statistiek die de populatieproportie onderzoekt.
Een steekproef met steekproefomvang n heeft in dat geval als steekproefuitslag de **steekproefproportie** $\widehat{p}$.

De steekproevenverdeling is volgens de centrale limietstelling normaal verdeeld als de steekproefomvang voldoende groot is.
De standaardafwijking van de steekproevenverdeling is: $\sigma = \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie p is met $z \approx 2$: $\left[\widehat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1-\widehat{p})}{n}}; \widehat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1-\widehat{p})}{n}}\right]$.

Andere betrouwbaarheidsintervallen kunnen met behulp van de z-waarden berekend worden.

Een **hypothesetoets op een populatieproportie** werkt als volgt.
Iemand beweert: de populatieproportie is gelijk aan p.
Iemand anders vertrouwt deze proportie niet en vermoedt (bijvoorbeeld): de populatieproportie is kleiner dan p.

Dit wordt getoetst met een steekproef van grootte n.
Je bepaalt dan de steekproefproportie $\widehat{p}$ en kijkt of deze significant afwijkt van de nulhypothese.

Je kiest een vooraf vastgesteld significantieniveau en dus ook een kritiek gebied. De hypothesetoets kan zowel linkszijdig, rechtszijdig als tweezijdig zijn.

Voorbeeld 1

Een fabrikant van gamefiguren trekt regelmatig een steekproef ter controle van zijn productieproces. Na een grondige renovatie van de fabriek en een periode van testdraaien, controleert de fabrikant 800 aselect gekozen figuren.
Hierbij vertonen er 160 een mankement.

Welk 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie defecte gamefiguren van zijn nieuwe productieproces kan de fabrikant op basis van deze controle bepalen en welke conclusie kan hij daarmee over zijn nieuwe productieproces trekken?

Antwoord

Steekproefproportie $\widehat{p}$ is $\frac{160}{800} = 0{,}2$ en steekproefomvang n is 800.

linkergrens: $0{,}2 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot (1-0{,}2)}{800}} \approx 0{,}172$

rechtergrens: $0{,}2 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot (1-0{,}2)}{800}} \approx 0{,}228$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0{,}172; 0{,}228]$.

De fabrikant weet nu dat de proportie defecte gamefiguren van zijn nieuwe productieproces in 95% van de steekproeven tussen de 17,2% en de 22,8% van de geproduceerde figuren zal liggen.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**. Na enige tijd is de fabrikant begonnen om op gezette tijden een steekproef van 50 gamefiguren te nemen. De laatste keer dat hij dat deed, was 14% van de steekproef defect.

a Bepaal de steekproefproportie $\widehat{p}$ en de steekproefomvang n van deze steekproef.

b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de schatting van het percentage defecte gamefiguren.

c Is er een kans dat de daadwerkelijke proportie defecte figuren in zijn nieuwe productieproces hoger is dan 25%? Beargumenteer je antwoord.

Opgave 6

De Consumentenbond wil weten of een bepaald type laptop minstens acht uur op de accu kan werken. De bond test 50 aselect getrokken laptops van dat type. Het blijkt dat 41 van de laptops inderdaad minstens 8 uur kan werken op de accu.

a Bereken de steekproefproportie.

b Bereken de standaardafwijking σ van de steekproefproportie. Rond je antwoord af op vier decimalen.

c Bepaal het 90%-betrouwbaarheidsinterval van de populatieproportie.

d Welke uitspraak kun je met 90% betrouwbaarheid doen?

Voorbeeld 2

Een groenteboer verkoopt een zak met 10 peren; 2 daarvan blijken van binnen helemaal rot. De groenteboer beweert dat slechts 4% van zijn peren bij aankoop al rot is.
Hoe kun je deze bewering toetsen met een hypothesetoets en welke conclusie kun je trekken met de uitslag van deze hypothesetoets als het significantieniveau 5% is?

Antwoord

Dit is een rechtszijdige hypothesetoets met als hypothesen:
H_0: $p = 0{,}04$
H_1: $p > 0{,}04$

Toevalsvariabele R is het aantal rotte peren in de steekproef van 10 peren.
Te berekenen: $\text{P}(R \geq 2)$ als iedere peer een kans van $0{,}04$ heeft om rot te zijn.
$\text{P}(R \geq 2) = 1 - \text{P}(R \leq 1) = 1 - \text{P}(R = 0 \text{ of } R = 1) \approx 0{,}0582$ ofwel $5{,}8\%$.

Deze kans is groter dan het significantieniveau van 5% en de bewering van de groenteboer hoeft niet verworpen te worden.

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Leg uit waarom is $\text{P}(R \geq 2)$ in deze situatie gelijk is aan $1 - \text{P}(R \leq 1)$.

b Bereken zelf de kans op minimaal 2 rotte peren als je er 10 koopt terwijl iedere peer een kans van 4% heeft om rot te zijn.

Opgave 8

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**. Bedenk een manier om het kritieke gebied te formuleren voor de hypothesetoets.

Verwerken

Opgave 9

Bij een aselecte steekproef in een provincie blijken onder 1500 geënquêteerden er 833 tegen de aanleg van een provinciale weg te zijn.

a Bereken de steekproefproportie. Rond je antwoord af op drie decimalen.

b Bereken de standaardafwijking van deze steekproevenverdeling. Rond je antwoord af op vier decimalen.

c Tussen welke percentages ligt binnen deze provincie het aantal tegenstanders van deze weg met een betrouwbaarheid van 95% in een nieuwe steekproef?

Opgave 10

Een fabrikant in lampen verkoopt een doos met 100 lampen; 2 daarvan blijken kapot te zijn. De fabrikant beweert dat slechts $0{,}5\%$ van zijn lampen bij aankoop kapot zijn.

Toets de bewering van de fabrikant met een significantieniveau van 5%.

Opgave 11

Uit een enquête in opdracht van de Stichting tegen Kanker van maart/april 2007 onder 1988 Belgen bleek 61% voorstander te zijn van het rookvrij maken van cafés. In oktober 2006 was dat nog maar 55% van een even grote groep.

a Bepaal bij het onderzoek van oktober 2006 het 95%-betrouwbaarheidsinterval. Geef je antwoord in procenten. Rond af op één decimaal.

b Bepaal bij het onderzoek van maart/april 2007 het betrouwbaarheidsinterval bij een betrouwbaarheid van 95%. Geef je antwoord in procenten. Rond af op één decimaal.

c Welke conclusie kun je trekken?

Opgave 12

Minke heeft een dobbelsteen, waarvan ze zegt dat die onzuiver is. Ze beweert dat je gemiddeld in slechts 8% van de keren 6 ogen gooit.
Bart gaat deze bewering toetsen. Hij gooit 30 keer met de dobbelsteen en gooit 4 keer 6 ogen.

a Stel de hypothesetoets op.

b Wat is de conclusie van Bart bij een significantieniveau van 10%?

Opgave 13

Voorafgaand aan de verkiezingen worden opiniepeilingen gehouden. Met behulp van een aselecte steekproef wordt aan 2000 Nederlanders gevraagd naar de partij van hun voorkeur. Eén partij gaat in een opiniepeiling van 30 naar 31 zetels (van de 150 zetels in de Tweede Kamer).
Onderzoek of de partij met een betrouwbaarheid van 90% zeker kan zijn van een zetel winst.

Opgave 14

Onderzoekers hebben door middel van een steekproef een bepaald kenmerk onderzocht. Zij concludeerden dat 8% van de steekproef het kenmerk heeft. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[7{,}97; 8{,}03]$.

a Toon aan dat de standaardafwijking van de steekproef $0{,}015$ is.

b Bereken de grootte van de steekproef.

Toepassen

Opgave 15: Lampen

Een fabrikant van lampen beweert dat 5% van de lampen die verkocht worden kapot zijn.
De controledienst gaat deze bewering toetsen.
Bij een steekproef van 500 lampen vond de controledienst 35 kapotte lampen.

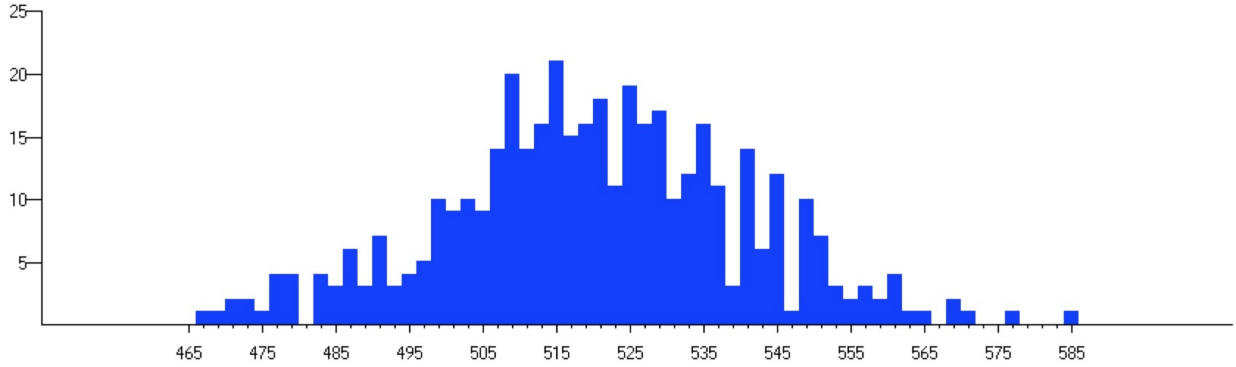
Om een conclusie te kunnen trekken moet je de kans $\text{P}(X \geq 35)$ uitrekenen, waarbij X het aantal kapotte lampen is. Vanwege de centrale limietstelling kun je deze kans benaderen met behulp van een normale verdeling met gemiddelde $500 \cdot 0{,}05 = 25$ en standaardafwijking $\sqrt{500 \cdot 0{,}05(1-0{,}05)}$. Vanwege het afronden moet je nu $\text{P}(X \geq 34{,}5)$ berekenen.

a Waarom zou je bij de normale benadering als grens $34{,}5$ gebruiken?

b Toets de bewering van de controledienst. Welke conclusie kun je trekken met de uitslag van deze hypothesetoets als het significantieniveau 5% is?

Opgave 16: Ja of nee?

Bekijk het histogram van de steekproevenverdeling van 400 steekproeven uit een ja/nee-verdeelde populatie, ieder met een omvang van 2000.



Figuur 4.1

a Bepaal op basis van de kleinste en grootste steekproefuitslag en met behulp van de vuistregels van de normale verdeling de gemiddelde proportie en de standaardafwijking van deze 400 steekproeven.

b Bepaal met de vuistregels van de normale verdeling en met je net berekende gemiddelde en standaardafwijking wat de grenzen van het 95%-gebied zijn van deze steekproevenverdeling.

c Leg uit wat de betekenis van dit 95%-gebied en van de gemiddelde proportie is.

Uit dezelfde populatie waaruit de 400 steekproeven getrokken zijn, wordt opnieuw een steekproef van 2000 stuks getrokken. Bekijk de verdeling van deze steekproef: de steekproefuitslag is 512 op de 2000.

Figuur 4.2

d Bepaal het 95%-betrouwbaarheidsinterval van deze steekproef en leg uit wat de betekenis ervan is, ook in samenhang met de gemiddelde proportie uit de steekproevenverdeling van 400 andere steekproeven.

Testen

Opgave 17

Helmond is een stad van ongeveer 90000 inwoners en de stad heeft een stadspanel met 1300 deelnemers. Op een verzoek van de gemeente een vragenlijst in 2012 over de lokale omroep in te vullen hebben 839 mensen gereageerd.
Uit deze meting blijkt dat 37% de lokale omroep niet kent.

a Welke uitspraak kun je doen met 95%-betrouwbaarheid over de onbekendheid van de lokale omroep in Helmond?

b Welke uitspraak kun je met 95% betrouwbaarheid doen over de bekendheid van de lokale omroep in Helmond?

c Welke kanttekeningen kun je bij dit onderzoek maken?

Opgave 18

Bij een marktonderzoek wordt gekeken naar de belangstelling voor elektrische auto's onder particulieren in Nederland. In een aselecte steekproef worden 1660 mensen benaderd en hiervan zeggen 917 particulieren dat ze de overstap naar een elektrische auto serieus overwegen.
De onderzoekers willen het percentage belangstellenden met een betrouwbaarheid van 95% vaststellen met een marge van $0{,}5$%.

Hoe groot moet hun steekproef dan zijn?

Practicum

Met de volgende practica kun je zien hoe je betrouwbaarheidsintervallen berekent met de **grafische rekenmachine**. Doe alleen het onderdeel dat betrekking heeft op het betrouwbaarheidsinterval bij proporties.

- **Kansverdelingen met de TI84**
- **Kansverdelingen met de TInspire**
- **Kansverdelingen met de Casio fx-CG50**
- **Kansverdelingen met de HP-prime**
- **Kansverdelingen met de NumWorks**

Maar je kunt ook heel goed betrouwbaarheidsintervallen berekenen met behulp van **Excel**. Bekijk daartoe het practicum:

- **Steekproeven en uitspraken**

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Populatie en steekproeven** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- verklarende statistiek, statistische cyclus — populatie, steekproef — aselect, representatief — steekproevenverdeling — centrale limietstelling
- hypothese toetsen — nulhypothese, alternatieve hypothese — kritiek gebied — significantieniveau
- populatiegemiddelde — steekproefgemiddelde — betrouwbaarheidsinterval
- populatieproportie — steekproefproportie — betrouwbaarheidsinterval

Activiteitenlijst

- een aselecte, representatieve steekproef herkennen — weten dat een steekproevenverdeling normaal is
- een hypothese toetsen met een afgesproken significantieniveau — links-, rechts-, tweezijdig toetsen
- een betrouwbaarheidsinterval gebruiken om een populatiegemiddelde te schatten
- een betrouwbaarheidsinterval gebruiken om een populatieproportie te schatten — een hypothesetoets op een populatieproportie toepassen

Achtergronden

In de **inductieve statistiek** probeer je om aan de hand van een steekproef informatie omtrent de gehele populatie te krijgen. Maar zo krijg je alleen beperkte informatie. De inductieve statistiek geeft methoden om daarmee uitspraken over de populatie als geheel te doen. Bekende methoden zijn hypothesen toetsen, schattingsmethoden, correlatie en regressie.

Francis Galton (1822—1911) richtte aan het Londense University College een leerstoel in de eugenetica op. De wiskundigen die deze leerstoel bezetten hebben veel voor de ontwikkeling van de mathematische statistiek betekend. Zij ontwikkelden vooral de methoden van statistische toetsing. **Karl Pearson (1857—1936)** bedacht de chi-kwadraat-toets waarmee een antwoord kon worden gegeven op de vraag hoe goed een theoretische verdeling past bij de gevonden gegevens. Zijn opvolger **Ronald Fischer (1890—1962)** en zijn volgelingen ontwikkelden methoden die geschikt zijn voor kleine steekproeven en vonden diverse verdelingen die juist voor die situatie geschikt zijn. Verder formuleerden zij de principes van het hypothese toetsen en vonden een techniek die bekend werd als de variantieanalyse. De variantieanalyse draaide om het met wiskundige methoden scheiden van ‘echte effecten’ en ‘fouten’. Als een experiment een echt effect oplevert, blijkt uit de methode hoe sterk dit effect is in verhouding tot de fout.

Vanaf de jaren '20 van de vorige eeuw werd de statistiek voor wiskundigen een steeds volwaardiger onderwerp van onderzoek, waardoor de methoden sterk werden verfijnd en een exactere onderbouwing kregen. In 1928 publiceerden **Jerzy Neyman (1894—1981)** en **Egon Pearson (1895—1980)** (zoon van Karl Pearson) enkele geschriften waarin begrippen als ‘fout van de tweede soort’ en ‘betrouwbaarheidsinterval’ werden ingevoerd. In die tijd begon ook de industrie steeds meer de statistische methoden toe te passen, met name bij kwaliteitscontrole. Bovendien werd er gezocht naar steeds betere methoden om goede representatieve steekproeven te nemen.

Vanaf 1939 werd door **Abraham Wald (1902—1950)** de statistische beslissingstheorie ontwikkeld. Hierin werd de statistiek opgevat als een spel met de natuur als tegenstander. Hoewel dit een zeer algemene theorie is wordt hij tegenwoordig door heel veel statistici gebruikt.

Testen

Opgave 1

Zijn de volgende steekproeven aselect en/of representatief? Beargumenteer je antwoord.

a Om de gemiddelde leeftijd van concertbezoekers te meten wordt aan de bezoekers van een klassiek concert gevraagd hoe oud ze zijn.

b Een restaurantketen onderzoekt hoe gasten de hygiëne van hun restaurants ervaren. Hiervoor stellen ze de gasten bij één van hun restaurants vragen met betrekking tot de hygiëne.

c Om het gewicht van de gemiddelde Nederlandse tiener te bepalen worden de gewichten van de leerlingen op jouw school gebruikt.

Opgave 2

Een fabrikant beweert dat een vulmachine pakken hagelslag vult met een gemiddeld gewicht van 351 gram en een standaardafwijking van $6{,}4$ gram.

De inspectie vermoedt dat het gemiddelde van een pak hagelslag lager is. Om dit te toetsen met een significantieniveau van 5% neemt de inspectie een steekproef van 50 pakken hagelslag. Het gemiddelde gewicht van de steekproef is 349 gram.

a Waarom mag je ervan uitgaan dat de steekproevenverdeling normaal verdeeld is? Is het daarbij belangrijk dat het gewicht van een pak hagelslag normaal verdeeld is?

b Wat voor soort toets doet de inspectie?

c Wat is de conclusie van de inspectie?

d Is de conclusie hetzelfde als er een significantieniveau van 1% wordt gebruikt?

Opgave 3

Bij een marktonderzoek wordt gekeken naar de belangstelling voor elektrische auto's onder particulieren in Nederland. In een aselecte steekproef worden 1660 mensen benaderd en hiervan zeggen 917 particulieren dat ze de overstap naar een elektrische auto serieus overwegen.

a Bereken het 99%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie van mensen die geïnteresseerd zijn in een elektrische auto naar aanleiding van de steekproef voor de particuliere markt in Nederland.

b Men wil de foutmarge beneden de 3% hebben en er komt nog een aanvullend aselect onderzoek onder 340 particulieren. Hiervan zeggen 162 particulieren dat ze de overstap overwegen. Wat zijn de gevolgen voor het 99%-betrouwbaarheidsinterval?

c Wat zijn de gevolgen voor het 99%-betrouwbaarheidsinterval als de steekproefgrootte nog groter gaat worden en als $\widehat{p}$ nagenoeg gelijk blijft?

Opgave 4

Op het etiket van een pot jam staat dat het percentage rietsuiker 12,4% is. Om dit te controleren wordt het percentage rietsuiker van 20 willekeurige potten jam bepaald en in een tabel gezet.

Je mag aannemen dat het percentage rietsuiker normaal verdeeld is.

11,9	11,1	11,4	12,6
11,6	11,4	11,7	11,8
11,8	11,8	12,4	12,5
11,7	12,3	11,3	12,2
11,9	12,6	11,7	11,8

Tabel 5.1

a Formuleer de hypothesen in deze situatie.

b Schat met deze resultaten de standaardafwijking in het percentage rietsuiker. Rond af op drie decimalen.

Deze waarde mag je bij de rest van deze opgave blijven gebruiken.

c Toets je hypothese met een significantieniveau $\alpha = 0{,}10$.

d Bij welk gemiddeld percentage zou de nulhypothese verworpen worden?

Opgave 5

Een opdrachtgever eist van een fabrikant dat het gemiddelde gewicht werkzame stof in een partij van 2000 flessen met reinigingsmiddel 12 gram is.
De fabrikant test dit door middel van een steekproef. Hij vindt een betrouwbaarheidsinterval met een breedte van 2 gram voldoende klein en hij gaat uit van een betrouwbaarheid van 98%.
De fabrikant weet dat de standaardafwijking van het gewicht van de werkzame stof bij zijn productieproces 4 gram is.

De fabrikant wil weten hoe groot de steekproefomvang moet zijn om aan deze eisen te kunnen voldoen.

Bereken de minimaal benodigde steekproefomvang.

Toepassen

Opgave 6: Noord/Zuidlijn Amsterdam

Op de website van de Dienst Onderzoek en Statistiek van de gemeente Amsterdam stond in december 2008 het volgende:

"In totaal hebben 379 Amsterdammers meegedaan aan de telefonische enquête van november. Op de vraag of men voor of tegen de aanleg van de Noord/Zuidlijn is, zegt ongeveer de helft van respondenten (49%) voor de aanleg te zijn. Het percentage voorstanders ligt hoger dan bij de vorige meting: in september was 38% voorstander. Het percentage voorstanders is hiermee terug op het niveau van 2006 toen 48% voorstander was. Het effect van de gebeurtenissen rond de Vijzelgracht lijkt te zijn vervlogen in de mening van Amsterdammers."

a Welke uitspraak over het aantal voorstanders in december 2008 van de Noord/Zuidlijn kon men toen met 95% betrouwbaarheid doen?

b In september kon men met een betrouwbaarheid van 95% beweren dat het aantal voorstanders tussen de 37% en de 39% lag. Hoeveel mensen zijn er toen ondervraagd?

Opgave 7: Pokergames

Bij Pokergames kun je chips inzetten en winnen. Big blind (BB) is een inzet van een stapel van bijvoorbeeld 1000 chips zonder dat de kaarten gezien zijn. De winrate (*WR*) is het aantal BB dat je per 100 handen (*BB*/100) wint. In pokergames wordt je winrate bijgehouden. Het is een identificatie hoeveel chips je wint, en daarmee of je een winnende speler bent of niet. In pokergames wordt ook het aantal handen bijgehouden dat je gespeeld hebt. En de standaarddeviatie σ.

a Veronderstel dat een pokergame een $WR = 3{,}5BB/100$ aangeeft met $\sigma = 40$ na 30000 handen. Je kunt zeggen dat deze 30000 handen een steekproef vormen. Alles wordt dus uitgedrukt per 100 handen. Dus $n = \frac{30000}{100} = 300$. Een hand is de 5 beste kaarten van een speler per spelletje.
Wat kun je nu zeggen over de *WR* voor de eerstvolgende hand met een betrouwbaarheid van 95%?

b Hoeveel handen moet je bij deze winrate en σ spelen om met 95% zekerheid geen verlies te behalen?

Examen

Opgave 8: Basketballen

Jaarlijks controleert de materiaalcommissaris of de ballen van Flits voldoen aan de eisen die de basketbalbond stelt. Deze zijn:

De omtrek van de bal mag niet minder bedragen dan 75 cm en niet meer dan 78 cm. Het gewicht mag niet minder zijn dan 600 g en niet meer dan 650 g.

Bij zo'n controle komt hij tot de ontdekking dat het gewicht van de ballen klopt, maar dat de omtrek van 15 ballen niet in orde is. Omdat hierbij ook een redelijk aantal nieuwe ballen is, stelt hij zich in verbinding met de leverancier: het bedrijf Balfa. Dit bedrijf beweert dat het dagelijks 125 ballen produceert, waarvan de omtrek normaal verdeeld is met een gemiddelde van $76{,}5$ cm en een standaarddeviatie van $0{,}70$ cm. Neem aan dat deze gegevens juist zijn.

a Toon aan dat men kan verwachten dat 4 ballen in de dagproductie niet voldoen aan de eisen die de bond stelt aan de omtrek.

b Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat in een aselecte steekproef van 5 door Balfa gemaakte ballen, elke bal voldoet aan de eisen die de bond stelt aan de omtrek.

Op grond van de eigen gegevens beweert de verkoper van Balfa dat gemiddeld hoogstens één op de twintig ballen niet aan alle eisen van de bond voldoet. De materiaalcommissaris heeft zo zijn twijfels. Zij spreken met elkaar af de bewering van de verkoper te toetsen door middel van een aselecte steekproef van 15 stuks bij een significantieniveau van 5%. Indien het resultaat de verkoper in het ongelijk stelt, krijgt Flits de 15 nieuwe ballen uit de steekproef gratis.
X is het aantal ballen in de steekproef dat niet voldoet aan de eisen van de bond.

c Bereken de kleinste waarde van X waarbij Flits de ballen gratis krijgt.

(bron: examen wiskunde A vwo 1990, tweede tijdvak)

Opgave 9: Rookgedrag van leerlingen

Sinds de jaren tachtig meet het Trimbos-instituut regelmatig via een enquête het gebruik van alcohol, drugs en tabak in aselecte, representatieve steekproeven onder alle leerlingen van het voortgezet onderwijs. Ook werd de leerlingen in de enquête gevraagd naar hun leeftijd (in jaren), hun geslacht (jongen, meisje), en hun schoolniveau (vmbo, havo, vwo).

Aan de enquête van 2015 deden 6714 leerlingen mee in de leeftijd van 12 tot en met 16 jaar. In deze groep is onder andere gekeken naar de lifetime-prevalentie van roken. Hieronder staat wat dit begrip betekent:

lifetime-prevalentie van roken = het percentage van de leerlingen dat rookt of ooit gerookt heeft in zijn of haar leven.

steekproefomvang	6714
aantal dat rookt of ooit gerookt heeft	1544
lifetime-prevalentie	23%

Tabel 5.2

In de tabel zie je dat van de leerlingen in de steekproef 23%, bijna een kwart, rookt of ooit gerookt heeft. Op basis van bovenstaande gegevens kun je het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de lifetime-prevalentie van roken berekenen.

Bereken dit 95%-betrouwbaarheidsinterval. Rond de percentages in je antwoord af op gehele getallen.

(bron: examen wiskunde A havo in 2018, tweede tijdvak)

2

Differentieerregels

2.1 Differentieerregels

Inleiding

De afgeleide van een functie geeft de helling van de grafiek in een punt weer. Het is ook een maat voor de veranderingssnelheid van de functiewaarde voor een bepaalde waarde van x. Je bepaalt een afgeleide door te differentiëren. Dat lijkt tot nu toe misschien een eenvoudige klus. Maar wanneer de functies ingewikkelder worden moet je er speciale **differentieerregels** voor toepassen. Je herhaalt eerst nog even de al bekende technieken.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- differentiëren met de machtsregel en de somregel;
- het belang van die differentieerregels inzien en ze toepassen.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel en de somregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al differentiëren.
Neem nu de functies f en g met $f(x) = 6x^5$ en $g(x) = 2x^3$.

Bepaal de afgeleide van:

a $f_1(x) = f(x) + g(x)$

b $f_2(x) = f(x) - g(x)$

c $f_3(x) = f(x) \cdot g(x)$

d $f_4(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Voor functie f_1 (de som van f en g) geldt dat de afgeleide gelijk is aan de som van de afgeleiden van f en g.

e Kun je voor f_2, f_3 en f_4 iets vergelijkbaars opschrijven?

Uitleg

De afgeleide functie (ook wel de hellingsfunctie genoemd) geeft de helling van de grafiek aan.

- Als $f(x) = x^3$, dan is de afgeleide functie: $f'(x) = 3x^2$.
- Als $g(x) = x^2$, dan is de afgeleide functie: $g'(x) = 2x$.
- Als $h(x) = 2x^3 - x^2 + 5$, dan is de afgeleide functie: $h'(x) = 6x^2 - 2x$.

Je maakt hierbij gebruik van de constanteregel, de machtsregel en de somregel/verschilregel.

Deze regels zijn niet toereikend om alle functies te differentiëren. Alleen functies die je kunt herleiden tot een som en/of verschil van machtsfuncties kun je met deze regels differentiëren.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Welke differentieerregels pas je toe bij het bepalen van de afgeleide van $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 12$?
Bereken die afgeleide.

b Welke betekenis heeft de afgeleide van een functie?

c Hoe gebruik je de afgeleide om de extremen van een functie te berekenen?
Bereken de extremen van f.

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2$ en $g(x) = x^2$.

a Differentieer $k(x) = f(x) \cdot g(x)$.

b Differentieer $l(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

c Waarom kun je $m(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ nog niet differentiëren?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **afgeleide functie** van een functie $y = f(x)$ is te bepalen door te **differentiëren**. Je kent al een aantal **differentieerregels**:

- De **machtsregel**:
  Als $f(x) = cx^n$, dan is $f'(x) = ncx^{n-1}$ voor elke c en voor gehele, positieve n.
- De **constanteregel**:
  Als $f(x) = c$, dan is $f'(x) = 0$.
- De **somregel/verschilregel**:
  Als $f(x) = u(x) \pm v(x)$, dan is $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

Deze differentieerregels heb je nodig om **hellingswaarden** van som/verschil van machtsfuncties (met n geheel en positief) te berekenen. Heb je daarentegen met andere functies te maken, dan zijn ook andere differentieerregels nodig.

Toepassingen van de afgeleide functie zijn het bepalen van extreme waarden en het opstellen van de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek.

De hellingswaarde in een punt $P(p, f(p))$ is de **richtingscoëfficiënt van de raaklijn** in dat punt aan de grafiek: $a = f'(p)$ als de raaklijn $y = a \cdot x + b$ is.

Extreme waarden zijn maxima en minima en die treden op in toppen van de grafiek, waar de helling vaak 0 is. De extremen van $f(x)$ vind je door $f'(x) = 0$ op te lossen en dan de grafiek te bekijken in de buurt van de gevonden x-waarden.

Voorbeeld 1

Differentieer de functies:

- $f(x) = 31{,}7$
- $f(x) = 7x^4$
- $f(x) = x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 2x + 100$
- $A(r) = 20\pi r + 2\pi r^2$
- $s(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$
- $f(x) = a^2x^4 - 2bx^2 + c^3$

Antwoord

- $f'(x) = 0$
- $f'(x) = 28x^3$
- $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 2$
- $A'(r) = 20\pi + 4\pi r$ (π is een constante.)
- $v(t) = s'(t) = v_0 + at$ (v_0 en a zijn constanten.)
- $f'(x) = 4a^2x^3 - 4bx$ (b en c zijn constanten.)

Opgave 3

Differentieer.

a $f(x) = 6 - \frac{1}{2}x^3$

b $TK(q) = 2q^3 + 60q^2 - 100q + 50$

c $I(d) = \frac{1}{6}\pi d^3 + a^2$

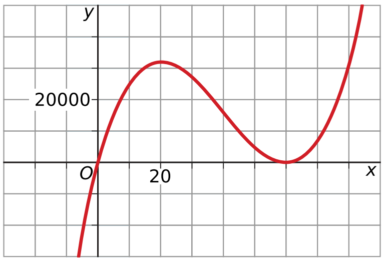
d $f(x) = x(x - 20)$

e $T(p) = a^2p^3 - ap + a^4$

f $f(x) = x(x + 4)^2$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = x(60 - x)^2$.
Bereken algebraïsch de extremen van f.



Figuur 1.2

Antwoord

Bekijk de grafiek van f. Er lijken twee extremen te zijn. In die twee extremen is de helling van de grafiek 0. Die helling wordt bepaald door de afgeleide van f.
Werk eerst haakjes weg om de afgeleide te kunnen bepalen.

$$\begin{aligned} f(x) &= x(60-x)^2 \\ &= x(60-x)(60-x) \\ &= x\left(3600-120x+x^2\right) \\ &= 3600x-120x^2+x^3 \end{aligned}$$

De afgeleide is $f'(x) = 3600 - 240x + 3x^2$.
Om de extremen te bepalen stel je de afgeleide gelijk aan 0: $f'(x) = 3600 - 240x + 3x^2 = 0$.
Dit geeft $x = 20 \vee x = 60$.
Bekijk nu de grafiek: de extremen zijn $\max. f(20) = 32000$ en $\min. f(60) = 0$.

Opgave 4

Bekijk de grafiek van de functie f in **Voorbeeld 1**.

a Om zelf de grafiek zo in beeld te krijgen, bepaal je eerst algebraïsch de nulpunten van de functie. Vervolgens kijk je naar de tabel en stel je het venster van de grafische rekenmachine in. Welke instellingen geven (ongeveer) hetzelfde deel van de grafiek te zien?

b Los op $f'(x) = 0$ en bereken de extremen van f.

c Hoe groot is de hellingswaarde van de grafiek van f voor $x = 10$?

Voorbeeld 3

De kosten voor de productie van een bepaalde stof worden weergegeven door:
$TK = 10q^3 - 60q^2 + 130q$
Daarin stellen q de productie in honderden kilogram per dag en TK de totale kosten in euro voor.
Bepaal bij welke productie de afgeleide van TK minimaal is.
Welke economische betekenis heeft het antwoord?

Antwoord

De afgeleide van TK is: $\frac{\mathrm{d}TK}{\mathrm{d}q} = TK'(q) = 30q^2 - 120q + 130$.

Een minimum van deze hellingsfunctie vind je door de afgeleide ervan te bekijken:

- $TK''(q) = 60q - 120 = 0$ als $q = 2$.
- TK'' is negatief als $q < 2$ en positief als $q > 2$.

Bekijk je de grafiek van TK met q van 0 tot 6, dan zie je dat de grafiek voortdurend stijgt. Maar de stijging is eerst afnemend (tot in de buurt van $q = 2$) en daarna toenemend. Er is inderdaad een kleinste hellingsgetal.

TK' is minimaal als $q = 2$, dat is bij een productie van 200 kg per dag.
Economisch gezien betekent dit dat bij een productie van 200 kg per dag de kostenstijging per extra kg stof het kleinst is.

Opgave 5

Voor de kosten van de productie van eenvoudige nietmachines heeft een bedrijf een wiskundig model laten opstellen. In dat model zijn de kosten K (euro) afhankelijk van het aantal geproduceerde nietmachines q (in honderdtallen) volgens de formule: $K = 4q^3 - 72q^2 + 600q + 2000$.

a Hoeveel bedragen de vaste productiekosten? Waaruit zouden deze kosten kunnen bestaan?

b De verandering van de kosten afhankelijk van q wordt bepaald door de afgeleide $\frac{dK}{dq}$. Stel een formule op voor deze afgeleide.

c Er worden maandelijks maximaal 2000 van deze nietmachines geproduceerd. Breng de bijbehorende grafiek op de grafische rekenmachine in beeld. Bij welke vensterinstellingen komt het bijpassende deel van de grafiek van K geheel in beeld?

d In welk punt van de grafiek van K gaan de kosten over van afnemend stijgend naar toenemend stijgend? Laat zien hoe je met behulp van differentiëren dit punt berekent.

Verwerken

Opgave 6

Differentieer de functies.

a $f(x) = 5x^6 - 13x^5 + 10x - 25$

b $f(x) = ax^2 + bx + c$

c $P(I) = RI^2$

d $y(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$

e $f(x) = -8x^8 - 88$

f $f(x) = 2ax^3 - 3a^2x + a^3$

g $A(r) = \pi r^2 + 2lr$

h $h(x) = 3x^2(10 - x)^2$

Opgave 7

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{4}{5}x^3 - 3x^2$.

a Plot de grafiek van $f(x)$ en de hellingsgrafiek van $f(x)$ in één scherm.

b Hoe zie je aan de hellingsgrafiek waar de extremen van $f(x)$ zich bevinden?

c Bereken algebraïsch de extremen van f.

d Bereken de hellingwaarde van de grafiek van f voor $x = 5$.

e Bereken algebraïsch de coördinaten van het punt van de grafiek van f waarin de helling minimaal is.

Opgave 8

Het punt (2,0) ligt op de grafiek van de functie $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

a Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dit punt aan de grafiek.

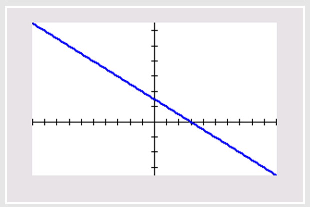
b In hoeveel andere punten van de grafiek heeft de raaklijn dezelfde richtingscoëfficiënt?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van $f'(x)$ met op beide assen dezelfde schaalverdeling. Het nulpunt van deze hellingsgrafiek is $(3,0)$.

a Wat betekent dit voor de grafiek van $f(x)$?

b Welke vorm heeft de grafiek van $f(x)$?



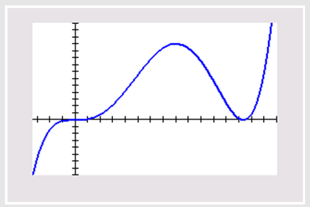
Figuur 1.3

Opgave 10

Bekijk de grafiek van $f(x) = x^3(x-20)^2$.

a In het deel van de grafiek dat in beeld is, bevinden zich drie punten waarin de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is aan de x-as. Bereken de x-coördinaten van die drie punten algebraïsch.

b Waarom heeft de functie f toch maar twee (lokale) extremen?



Figuur 1.4

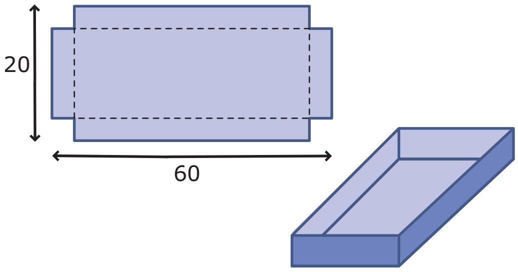
Toepassen

Opgave 11: Bakje met maximale inhoud

Uit een stuk karton van 20 bij 60 centimeter wordt een bakje gevouwen. Neem voor de hoogte van dit bakje x centimeter.

a De inhoud I van dit bakje hangt alleen af van x (als er verder niets boven het open bovenvlak mag uitsteken). Stel een bijpassend functievoorschrift $I(x)$ op.

b Bereken algebraïsch bij welke waarde van x de inhoud van het bakje maximaal is.



Figuur 1.5

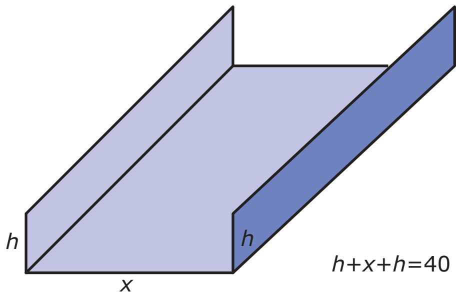
Opgave 12: Goten voor bevloeien van akkers

Een Nederlands bedrijf maakt goten voor bevloeiing van akkers in een ontwikkelingsland. De goten worden gemaakt door vlakke platen kunststof te buigen. De platen zijn 2 meter lang en 40 centimeter breed. Ze worden zo gebogen dat een goot ontstaat van 2 meter lang met als dwarsdoorsnede (in de breedterichting) een rechthoek.

a Noem de breedte van de goot x en de hoogte h. Welke verband bestaat er tussen x en h? Stel een formule voor dat verband op.

b Je kunt nu een formule opstellen voor de hoeveelheid water die zo'n goot kan bevatten. Druk de hoeveelheid water H in uit in x.

c Bereken bij welke waarde van x de hoeveelheid water maximaal is.



Figuur 1.6

Testen

Opgave 13

Differentieer de volgende functies:

a $f(x) = \text{-}0{,}5x^4 + 3x$

b $f(x) = 10 - 6x^2 - x^4$

c $f(x) = (x-1)\left(x^2 - 1\right)$

d $f(x) = ax\left(1 - x^2\right)$

e $H(t) = 3p^2 + 4pt^3$

f $y(t) = 20t^2(10 - t)(15 + t)$

Opgave 14

Het punt $(2{,}7)$ ligt op de grafiek van $f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

a Controleer deze bewering met een berekening.

b Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(2{,}7)$.

Opgave 15

Bekijk de grafiek van de functie $y = \text{-}x^3 + 6x^2 - 10$.

a De grafiek heeft twee (lokale) extremen. Bereken beide extremen.

b Bereken het punt van de grafiek tussen de twee toppen waarin de hellingswaarde het grootst is.

Practicum

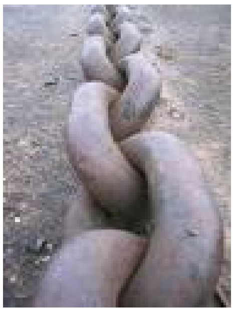
Met *Algebra*__KIT__ kun je oefenen met **het differentiëren met de machtsregel en de somregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.2 De kettingregel

Inleiding

In veel functievoorschriften komen haakjes voor.
Vaak kun je die eenvoudig uitwerken, maar niet altijd.
Met name bij samengestelde functies, zeg maar functies die als een ketting aan elkaar zijn geschakeld, is het uitwerken van haakjes vaak helemaal niet eenvoudig, of zelfs gewoon onmogelijk. Het differentiëren van dergelijke functies vereist een speciale differentieerregel.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de kettingregel voor het differentiëren van samengestelde functies;
- de kettingregel toepassen.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel en de somregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Bij het lozen van olie op zee ontstaat een zich cirkelvormig uitbreidende olievlek.
De straal R (in meter) van die olievlek hangt af van de tijd t (in uren).
Bijvoorbeeld kan gelden: $R = \sqrt{7t}$.

a Waarom is R een samengestelde functie?

b Hoe snel verandert de straal van de olievlek na 3 uur?

c Kun je het antwoord op de vorige vraag met behulp van differentiëren vinden? En hoe dan?

Uitleg 1

Je hebt van de functie $s(x) = \left(x^2 + 10\right)^2$ de afgeleide nodig.
Differentiëren door lukt nu alleen nog door eerst de haakjes weg te werken, dit geeft:

$s(x) = x^4 + 20x^2 + 100$

en dus

$s'(x) = 4x^3 + 40x$

Dit wegwerken van de haakjes is bijna ondoenlijk als het hogere machten betreft.
Bekijk daarom de functie als een ketting van meerdere schakels:

$$x \xrightarrow{g(x)} x^2+10 \xrightarrow{f(g(x))} (x^2+10)^2$$

Figuur 2.2

- $s(x) = f(g(x)) = (g(x))^2$
- $g(x) = x^2 + 10$

De afgeleide $s'(x)$ bepaal je nu door schakel voor schakel te differentiëren:
$s'(x) = 2(g(x))^1 \cdot g'(x) = 2\left(x^2 + 10\right) \cdot 2x = 4x^3 + 40x$

Je gebruikt: $f'(g(x)) = 2(g(x))^1$ en $g'(x) = 2x$.

In het algemeen geldt: als $s(x) = f(g(x))$, dan is $s'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
Deze regel wordt de kettingregel genoemd.

Opgave 1

Bekijk de functie in **Uitleg 1**.
Van deze functie wordt op twee manieren de afgeleide bepaald.

a Bereken eerst zelf de afgeleide door eerst van s de haakjes weg te werken.

b Bekijk vervolgens hoe $s(x)$ in afzonderlijke schakels kan worden ontleed.
Bepaal nu de afgeleide door die afzonderlijke schakels te differentiëren.

Bekijk ook de functie $t(x) = g(f(x)) = \left(x^2\right)^2 + 10$.

c Uit welke twee schakels bestaat deze functie?

d Bereken de afgeleide van $t(x)$ op twee manieren: door eerst de haakjes weg te werken en daarna door de schakels te gebruiken. Laat zien dat beide afgeleiden hetzelfde zijn.

Opgave 2

Gegeven is de functie: $f(x) = \left(4x^2 + 2x\right)^2$.

a Uit welke twee schakels bestaat f?

b Bepaal $f'(x)$ zonder eerst de haakjes weg te werken, dus met de kettingregel.

c Bepaal $f'(x)$ door eerst de haakjes weg te werken van $f(x)$.

d Laat zien dat je bij b en bij c dezelfde afgeleide vindt.

Uitleg 2

Bij een functie als $f(x) = \left(x^2 + 10\right)^2$ (en functies die daar op lijken), heb je voor het differentiëren het werken met een ketting van functies niet nodig. Maar bij functies zoals $g(x) = \sqrt{x^2 + 10}$ kun je niet zonder. Alleen weet je nog niet hoe je functies met wortelvormen differentieert.

Daarvoor gebruik je de machtsregel. Die blijkt namelijk ook te gelden voor gebroken en/of negatieve exponenten. Hij geldt in feite voor alle reële exponenten:

Als $f(x) = x^r$, dan is $f'(x) = r x^{r-1}$ voor elke reële waarde van r.

Voor een functie als $f(x) = \sqrt{x}$ betekent dit:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

heeft als afgeleide

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Voor een functie als $f(x) = \frac{1}{x^2}$ betekent dit:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

heeft als afgeleide

$$f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{-2}{x^3}$$

En zo kun je veel functies met wortelvormen en/of gebroken vormen differentiëren.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** hoe je functies met wortelvormen en gebroken vormen vaak kunt differentiëren. Differentieer nu zelf:

a $f(x) = 2\sqrt{x}$

b $f(x) = \frac{1}{x^5}$

c $f(x) = \frac{5}{x}$

Opgave 4

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = x^2 + 3$ met $x \geq 0$.

a Noteer het functievoorschrift van $h(x) = f(g(x))$.

b Bepaal de afgeleide van h door te werken met samengestelde functies.

c Noteer het functievoorschrift van $k(x) = g(f(x))$ zo eenvoudig mogelijk. Bepaal ook hiervan de afgeleide.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **samengestelde functie** of een **kettingfunctie** is een functie die uit twee of meer in serie geschakelde functies bestaat.

$$x \xrightarrow{g(x)} u \xrightarrow{f(u)} f(g(x))$$

Figuur 2.3

Voor de afgeleide van een samengestelde functie kun je de kettingregel gebruiken.

- De **kettingregel voor differentiëren**:
  Als $s(x) = f(g(x))$, dan is $s'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Met behulp van deze regel kan worden bewezen dat de machtsregel voor differentiëren geldig is voor alle soorten exponenten, niet alleen maar voor gehele, positieve exponenten. Dit betekent dat je er ook de afgeleiden van wortelfuncties en gebroken functies mee kunt bepalen.
In het algemeen geldt:

- De **algemene machtsregel voor differentiëren**:
  Als $f(x) = x^r$, dan is $f'(x) = rx^{r-1}$ voor elke reële waarde van r.

Met de algemene machtsregel kun je ook wortelfuncties en gebroken functies differentiëren. Je hebt daarvoor de rekenregels voor machten nodig.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $s(x) = \left(x^2 + 2x\right)^4$.

Antwoord

Deze functie is een samengestelde functie:

$s(x) = \left(x^2 + 2x\right)^4 = (g(x))^4 = f(g(x))$.
Hierin is:

- $f(g(x)) = (g(x))^4$ en hieruit volgt: $f'(g(x)) = 4(g(x))^3$
- $g(x) = x^2 + 2x$ en hieruit volgt: $g'(x) = 2x + 2$

Dit geeft:

$s'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 4(g(x))^3 \cdot g'(x) = 4 \cdot \left(x^2 + 2x\right)^3 \cdot (2x + 2) =$
$(8x + 8)\left(x^2 + 2x\right)^3$

Opgave 5

Gegeven is de functie: $h(x) = \left(2x^2 + 1\right)^8$.

a Deze functie heeft de vorm $h(x) = f(g(x))$.
Noteer de voorschriften van f en g.

b Laat zien dat $h'(x) = 32x\left(2x^2 + 1\right)^7$.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies: $f(x) = x^4$ en $g(x) = 2x^3 + 4x$.

a Noteer het functievoorschrift van $h(x) = f(g(x))$.

b Bepaal de afgeleide van h.

c Noteer het voorschrift van de functie $k(x) = g(f(x))$.

d Bepaal de afgeleide van k.

Voorbeeld 2

Met de algemene machtsregel kun je ook wortelfuncties en gebroken functies differentiëren. Je hebt daarvoor de rekenregels voor machten nodig.

Differentieer de functies:

- $f(x) = 10\sqrt{x}$
- $g(x) = 2x\sqrt[3]{x}$
- $h(x) = \frac{6}{2x+3}$

Antwoord

- Noteer eerst f als machtsfunctie:

  $f(x) = 10\sqrt{x} = 10x^{\frac{1}{2}}$

  Pas vervolgens de machtsregel toe:

  $f'(x) = 10 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 5x^{-\frac{1}{2}} = 5 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{\sqrt{x}}$

- Noteer eerst g als machtsfunctie:

  $g(x) = 2x\sqrt[3]{x} = 2x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 2x^{1\frac{1}{3}}$

  Pas vervolgens de machtsregel toe:

  $g'(x) = 2 \cdot 1\frac{1}{3}x^{1\frac{1}{3}-1} = 2\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} = 2\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$

- Noteer eerst h als machtsfunctie:

  $h(x) = \frac{2}{2x+3} = 6 \cdot (2x+3)^{-1}$

  Pas vervolgens de machtsregel en de kettingregel toe:

  $h'(x) = 6 \cdot -1(2x+3)^{-1-1} \cdot 2 = -6(2x+3)^{-2} = \frac{12}{(2x+3)^2}$

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Differentieer zelf de bovenste twee functies zonder naar de uitwerking te kijken.

b Waarom heb je bij het differentiëren van de derde functie ook de kettingregel nodig?

c Laat bij die derde functie zien hoe de kettingregel wordt toegepast bij het differentiëren.

Opgave 8

Differentieer de functies. Noteer de afgeleiden zonder gebroken en/of negatieve exponenten.

a $f(x) = 2\sqrt{x}$

b $f(x) = x\sqrt{x}$

c $f(x) = \sqrt[3]{4x}$

d $f(x) = \frac{3}{4-x}$

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.
Bereken het hellingsgetal van deze functie voor $x = 1$.

Antwoord

Noteer de wortelvorm eerst als een macht:

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} = \left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = (g(x))^{\frac{1}{2}}$$

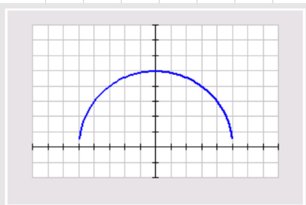
Differentieer f met de kettingregel:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(g(x))^{\frac{1}{2}-1} \cdot g'(x) = \tfrac{1}{2}\left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x = -x \cdot \left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

Het gevraagde hellingsgetal is: $f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{8}}$.

Opgave 9

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ op de grafische rekenmachine.



Figuur 2.4

a Noteer het domein en het bereik van f. Waaraan zie je dat de grafiek niet helemaal compleet is?

b Bepaal de afgeleide van f.

c Hoe kun je met zekerheid concluderen dat deze functie een maximum voor $x = 0$ heeft?

A. De grafische rekenmachine geeft dit aan.
B. 5 is de grootste functiewaarde en die waarde zit bij $x = 0$.
C. $f'(x) = 0$ alleen als geldt $x = 0$.
D. $f'(0) = 0$ en de afgeleide gaat alleen voor $x = 0$ over van positief naar negatief.

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Verwerken

Opgave 10

Differentieer de functies.

a $f(x) = \left(x^2 - 100\right)^4$

b $g(x) = -5 + (1 - x)^3$

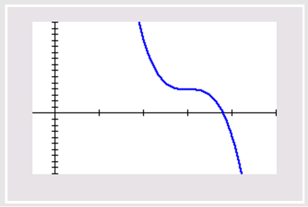
c $H(t) = 25(2 - 4t)^3$

Opgave 11

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = -(2x-6)^3 + 4$.

a De grafiek lijkt dalend voor elke waarde van x behalve $x = 3$. Toon aan dat dit inderdaad het geval is.

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ snijdt de x-as in punt P. Bereken de coördinaten van P.



Figuur 2.5

Opgave 12

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$.

a Bereken algebraïsch het domein van deze functie.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van de top bij deze functie.

c Stel een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek voor $x = -1$ op.

Opgave 13

Bepaal van de functies de afgeleide. Noteer de afgeleide functie zonder negatieve of gebroken exponenten.

a $y = \sqrt[3]{x^7}$

b $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 1$

c $H(p) = \left(1 - \sqrt{p}\right)^3$

d $g(x) = 2x - \frac{5}{1-x}$

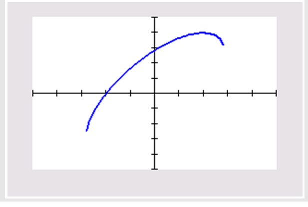
Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x + \sqrt{8 - x^2}$.

a Bepaal het domein van f.

b Bereken algebraïsch het bereik van f.

c Noem de randpunten van de grafiek van f respectievelijk A en B. Voor welke waarde van x is het hellingsgetal van de grafiek van f gelijk aan dat van lijn AB?



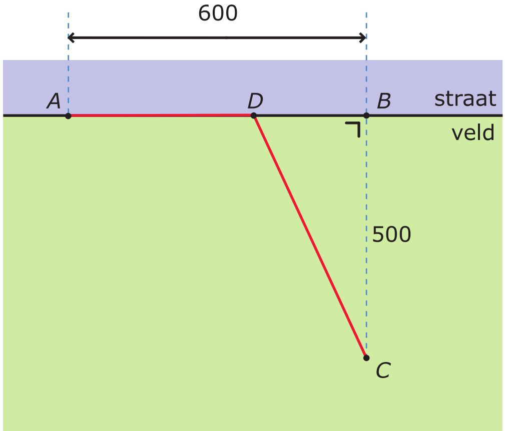
Figuur 2.6

Toepassen

Opgave 15: Waterleiding aanleggen

Vanuit punt A moet een waterleiding gelegd worden naar punt C. Langs de straat bedragen de kosten € 30,00 per meter en door het veld € 70,00 per meter. De lengte van AB is 600 meter en de lengte van BC is 500 meter. Er zijn verschillende mogelijkheden om de waterleiding aan te leggen.

- Langs de straat tot aan punt B en vervolgens door het aangrenzende terrein naar punt C.
- Direct vanuit A door het veld, in een rechte lijn naar C.
- Of een van de vele tussenmogelijkheden: de leiding wordt dan voor een gedeelte langs de straat aangelegd, tot aan punt D en vervolgens vanaf de straat naar punt C.



Figuur 2.7

a Hoeveel bedragen de kosten als je voor de eerste mogelijkheid kiest?

b Hoeveel bedragen de kosten als je voor de tweede mogelijkheid kiest?

c Bekijk de derde mogelijkheid. Neem voor de lengte van BD de variabele x. Druk nu de kosten voor de aanleg van deze waterleiding uit in x.

d Hoe moet je de waterleiding aanleggen opdat de kosten minimaal zijn? Bereken de minimale kosten met behulp van de afgeleide.

Testen

Opgave 16

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 6\left(1 + x^2\right)^3$

b $y(x) = (1 - 4x)^4 + 5$

c $R(t) = \sqrt{\frac{15}{\pi}t}$

d $f(x) = \sqrt{10 + 4x^2}$

e $K(p) = \frac{2}{p\sqrt{p}}$

f $f(x) = x^3 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

Opgave 17

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \sqrt{x+2}$.

a Als je de grafiek van deze functie op je grafische rekenmachine bekijkt met de standaardinstellingen van het venster, lijkt het wel een rechte lijn te zijn. Wat is het domein van f?

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp deze afgeleide het minimum van f.

d Wat is het bereik van deze functie f?

e Bereken de hellingwaarde van de grafiek van f in het punt waar deze grafiek de y-as snijdt.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de kettingregel en de algemene machtsregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.3 De productregel

Inleiding

Als je twee functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ vermenigvuldigt, krijg je een nieuwe functie die de productfunctie van f en g heet. Vaak kun je die producten uitwerken, maar niet altijd. En soms is dit gewoon te bewerkelijk.
Daarom moet je een differentieerregel hebben voor productfuncties $f(x) \cdot g(x)$.

Je leert in dit onderwerp

- de productregel voor het differentiëren van productfuncties gebruiken.

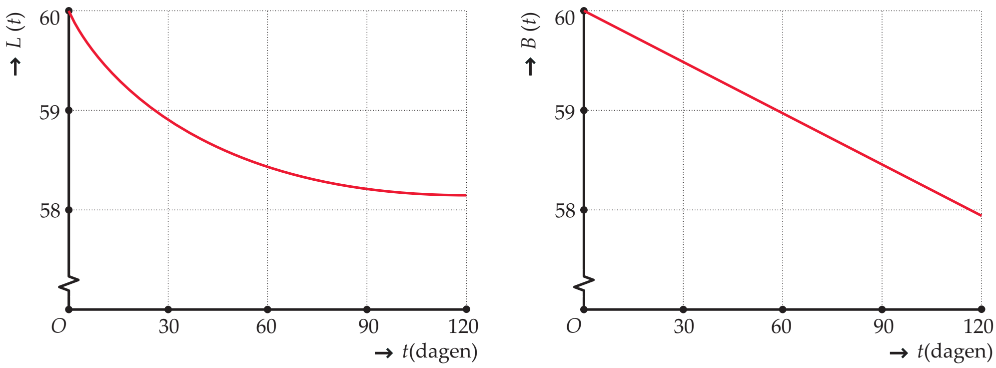
Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel, de somregel en de kettingregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

In deze grafieken zie je hoe de lengte L en de breedte B van een plank van 60 cm bij 60 cm in de loop van de tijd veranderen.



Figuur 3.1

a In welke periode krimpt de plank in de lengte sneller dan in de breedte?

b Op $t = 0$ is de plank vierkant. Tijdens het krimpen verandert de verhouding tussen lengte en breedte. Na hoeveel dagen is de plank opnieuw ongeveer vierkant?

c Op $t = 90$ is de lengte van de plank 58,3 cm en de breedte van de plank 58,5 cm. De plank krimpt dan in de lengte met 0,007 cm per dag en in de breedte met 0,017 cm per dag. Met hoeveel cm per dag verandert de oppervlakte dan?

Uitleg

Je wilt een product van twee functies differentiëren. Je probeert $p(x) = x^2 \cdot x^3$ hieruit volgt $p'(x) = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3$.

Maar je weet: omdat $p(x) = x^2 \cdot x^3 = x^5$ is $p'(x) = 5x^4$.

Dus je eerste probeersel was fout, je moet de functie eerst herleiden. Maar herleiden kan niet altijd. Hoe kun je dan toch productfuncties differentiëren?

Bekijk de figuur. Als de lengte en breedte van een rechthoek functies van x zijn, is de oppervlakte A een productfunctie:
$A(x) = f(x) \cdot g(x)$

Je kunt de oppervlakte van deze rechthoek variëren door x te laten toenemen tot $x + h$. De nieuwe oppervlakte wordt dan:
$A(x+h) = f(x+h) \cdot g(x+h)$

Je ziet dat de toename (van $A(x)$ naar $A(x+h)$) uit drie rechthoekjes bestaat:

- een rechthoekje met een oppervlakte van $f(x) \cdot (g(x+h) - g(x))$.
- een rechthoekje met een oppervlakte van $g(x) \cdot (f(x+h) - f(x))$.
- een klein rechthoekje, waarvan de oppervlakte heel snel 0 wordt als h naar 0 nadert. Dat rechthoekje mag je daarom weglaten.

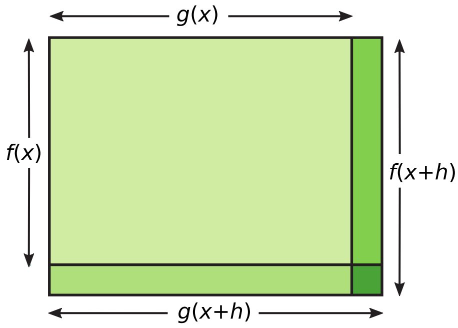
Deel je die toename door h, dan geldt:

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Nu is $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$ en $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ als $h \to 0$.

En dus krijg je: $A'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$.

Dit heet de productregel voor differentiëren.



Figuur 3.2

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de productfunctie $p(x) = x^2 \cdot x^3$.

a Bepaal met de productregel de afgeleide van p.
Ga na, dat je nu het juiste antwoord krijgt.

Gegeven is de productfunctie $p(x) = x^4 \cdot x^5$.

b Bepaal de afgeleide van p met de productregel die je in de uitleg ziet.

Bij deze eenvoudige productfunctie kun je beter eerst $p(x)$ herleiden en daarna pas differentiëren.

c Laat zien dat je op deze manier hetzelfde krijgt als bij b.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een product van twee functies geldt de productregel voor differentiëren **productregel voor differentiëren**:
Als $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, dan is $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Deze differentieerregel is lang niet altijd nodig, soms kun je haakjes wegwerken.
Maar vooral als je te maken krijgt met productfuncties waarbij de éne functie bijvoorbeeld een kwadratische functie is en de andere een wortelfunctie, dan gebruik je de productregel.

Vaak komt deze regel in combinatie met de voorgaande differentieerregels voor. Soms moet je binnen de productregel ook nog de kettingregel gebruiken.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $p(x) = \left(x^3 - 6x^2\right)\left(x^4 - 1\right)$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $f(x) = x^3 - 6x^2$ waarvoor geldt: $f'(x) = 3x^2 - 12x$
- $g(x) = x^4 - 1$ waarvoor geldt: $g'(x) = 4x^3$

De afgeleide van p vind je door de productregel toe te passen:
$p'(x) = \left(3x^2 - 12x\right)\left(x^4 - 1\right) + \left(x^3 - 6x^2\right)\left(4x^3\right)$
Na haakjes wegwerken: $p'(x) = 7x^6 - 36x^5 - 3x^2 + 12x$.
Hier had je de productregel kunnen vermijden door direct de haakjes van functie p weg te werken.

Opgave 2

De functie $f(x) = x^2\left(x^3 - 4x\right)$ kun je opvatten als een productfunctie van $u(x)$ en $v(x)$. Bij het differentiëren kun je dan de productregel gebruiken.

a Noteer de functies $u(x)$ en $v(x)$.

b Bepaal de afgeleide van f met behulp van de productregel.

c Je kunt deze functie ook zonder de productregel differentiëren. Je moet dan eerst de haakjes wegwerken. Differentieer de functie ook op deze manier.

Voorbeeld 2

Differentieer de functie: $h(x) = x(2x + 1)^3$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $f(x) = x$ waarvoor geldt $f'(x) = 1$.
- $g(x) = (2x + 1)^3$ waarvoor geldt $g'(x) = 3 \cdot (2x + 1)^2 \cdot 2$. Hierbij gebruik je de kettingregel.

De afgeleide van h vind je door de productregel toe te passen:
$h'(x) = 1 \cdot (2x + 1)^3 + x \cdot 3 \cdot (2x + 1)^2 \cdot 2 = (2x + 1)^3 + 6x(2x + 1)^2$
Overigens had je ook hier eerst de haakjes van functie h weg kunnen werken en zonder productregel kunnen differentiëren.

Opgave 3

Vaak heb je behalve de productregel ook de kettingregel nodig. Bijvoorbeeld bij het differentiëren van de functie $f(x) = (x^2 + 3x)(x^2 + 10)^3$. Beschouw deze functie als het product van $u(x) \cdot v(x)$. Dan geldt $f(x) = u(x) \cdot v(x)$.

a Bepaal de afgeleide van $u(x) = x^2 + 3x$.

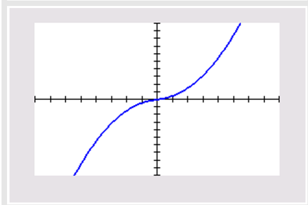
b Bepaal de afgeleide van $v(x)$.

c Bepaal met de productregel de afgeleide van f. Je hoeft de functie niet te herleiden.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$.

Bereken met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in $(0,0)$.



Figuur 3.3

Antwoord

De afgeleide vind je met behulp van de productregel (en de kettingregel):

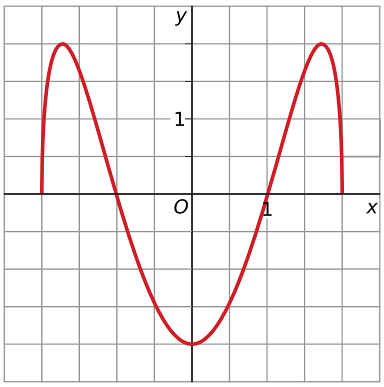
$f(x) = x \cdot (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 1 \cdot (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

Omdat je hier alleen $x = 0$ moet invullen, is verder herleiden zinloos: $f'(0) = 1$.
De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in $(0,0)$ is $y = x$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \sqrt{4 - x^2}$.
Bekijk de volledige grafiek van deze functie.



Figuur 3.4

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Met behulp van deze afgeleide kun je algebraïsch de extremen van f berekenen. Laat zien hoe dit in zijn werk gaat.

c De grafiek van f gaat door het punt $(1,0)$. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

Verwerken

Opgave 5

Bepaal van deze functies de afgeleide.

a $f(x) = (x^3 + 6)(4x^2 - 5x)$

b $g(x) = (10 - x) \cdot \sqrt{x}$

c $R(t) = 3t(t + 5)^4$

d $y(x) = x \cdot \sqrt{5 + x^2}$

e $y(x) = x - \sqrt{5 + x^2}$

f $V(r) = \left(100 - \frac{5}{r}\right)(20 - r)^2$

Opgave 6

Gegeven zijn de functies: $y_1(x) = x^2$ en $y_2(x) = (2x-8)^4$.
De functie $f(x) = y_1(x) \cdot y_2(x)$ is de productfunctie van beide.

a De nulpunten van f kun je uit de grafieken afleiden. Welke nulpunten heeft de grafiek van f?

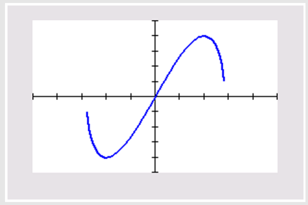
b Toon aan dat $f'(x) = (2x-8)^3(12x^2 - 16x)$.

c Bepaal met behulp van de afgeleide functie de extremen van f.

d Voor welke waarden van k heeft de vergelijking $f(x) = k$ precies vier oplossingen?

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x \cdot \sqrt{8-x^2}$ die is gemaakt door een grafische rekenmachine.



Figuur 3.5

a De grafiek is onvolledig. Dat kun je bijvoorbeeld zien aan de nulpunten van deze functie. Welke nulpunten heeft de grafiek van f?

b Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in $(0,0)$.

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = 0{,}25x^2 - x\sqrt{x}$.

a Bereken algebraïsch het bereik van f.

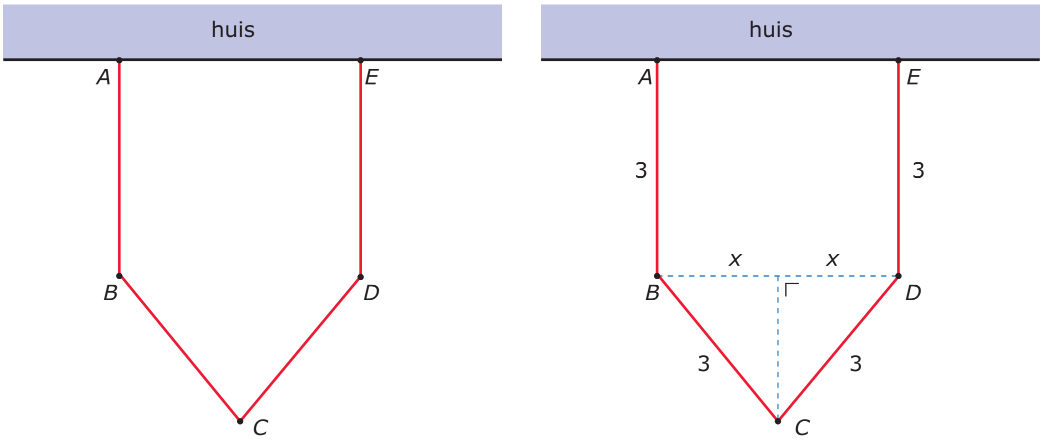
b Bereken de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f.

c In welk punt van de grafiek van f heeft de raaklijn een richtingscoëfficiënt van 2?

Toepassen

Opgave 9: Serre aanbouwen

Iemand wil met behulp van een viertal even grote rechthoekige kozijnen een serre aan zijn huis bouwen. Elk van die kozijnen is $2{,}5$ meter hoog en 3 meter breed. Hij bestudeert eerst de mogelijke opstellingen waarbij twee kozijnen AB en DE loodrecht op de muur worden bevestigd. De andere twee BC en CD worden zo geplaatst dat de vloeroppervlakte van de serre maximaal wordt.



Figuur 3.6

a De afstand tussen de twee kozijnen die loodrecht op de muur staan is $2x$. Toon aan dat voor de vloeroppervlakte A van de serre geldt: $A(x) = 6x + x \cdot \sqrt{9 - x^2}$.

b Bereken algebraïsch de grootst mogelijke vloeroppervlakte van deze serre.

Testen

Opgave 10

Bepaal de afgeleide van de volgende functies:

a $f(x) = 6x\left(1 + x^2\right)^3$

b $H(t) = t \cdot \sqrt{1 - t^2}$

c $y(x) = (ax - 4)^2(6 - x)^3$

d $g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x\sqrt{x} + 4x$.

a Bepaal de nulwaarden van f.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = x\left(x^2 - 10\right)^3$.

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de productregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.4 De quotiëntregel

Inleiding

Als je twee functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ deelt, krijg je een nieuwe functie die de quotiëntfunctie van f en g heet. Soms kun je die quotiënten uitwerken, maar meestal niet.
Daarom moet je een differentieerregel hebben voor quotiëntfuncties $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Je leert in dit onderwerp

- de regel voor het differentiëren van quotiëntfuncties gebruiken.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel, de somregel, de kettingregel en de productregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Een gebroken functie (quotiëntfunctie) is bijvoorbeeld $f(x) = \frac{2x^5}{x^2}$.

a Laat met een voorbeeld zien dat NIET geldt: $f'(x) = \frac{t'(x)}{n'(x)}$.

b Hoe bepaal je de afgeleide van $f(x) = \frac{1}{x}$?

c Hoe kun je het resultaat van b gebruiken met het berekenen van de afgeleide van f?

Uitleg

Je wilt een quotiënt (een deling) van twee functies differentiëren.
Je probeert

$q(x) = \frac{2x^5}{x^2}$ hieruit volgt $q'(x) = \frac{10x^4}{2x} = 5x^3$.

Maar omdat $q(x) = \frac{2x^5}{x^2} = 2x^3$ is $q'(x) = 6x^2$.

Dus je eerste probeersel was fout, je moet de functies eerst herleiden Je mag een gebroken functie dus niet differentiëren door eerst afzonderlijk de teller en noemer te differentiëren en dan te delen. Maar eerst herleiden en dan differentiëren, kan niet altijd.

Hoe moet je dan differentiëren bij een functie als $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$?

De oplossing vind je door de productregel te gebruiken.

Je noteert de functie als een productfunctie: $f(x) = x^2 \cdot (x-3)^{-1}$.

Dan differentieer je met de productregel:
$f'(x) = 2x \cdot (x-3)^{-1} + x^2 \cdot -1(x-3)^{-2}$.

Werk vervolgens de negatieve exponenten weg en tel de breuken die ontstaan op:

$$f'(x) = \frac{2x}{x-3} - \frac{x^2}{(x-3)^2} = \frac{2x(x-3)}{(x-3)^2} - \frac{x^2}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x}{(x-3)^2} - \frac{x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$$

Met behulp van de productregel kun je quotiëntfuncties differentiëren. Je krijgt hier een vorm met twee breuken. Die kun je gelijknamig maken en optellen.

Doe je dit in het algemeen dan krijg je:

$f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$.

Dit kun je als quotiëntregel voor differentiëren gebruiken.

Opgave 1

Bekijk de functie $q(x) = \frac{2x^5}{x^2}$ in de **Uitleg**. Je ziet, dat je om de afgeleide te vinden, niet gewoon de afgeleide van de teller kunt delen door die van de noemer. Door eerst herleiden vind je de juiste afgeleide.

a Bereken q' met behulp van de productregel en laat zien dat je de juiste afgeleide vindt.

b Bereken q' ook met behulp van de quotiëntregel en laat zien dat je de juiste afgeleide vindt.

c Bereken de afgeleide van $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ met de quotiëntregel. Vergelijk je antwoord met dat in de uitleg.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Van een gebroken functie $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ is de functie f de teller en de functie g de noemer van de breuk. Zo'n functie is te differentiëren door haar te schrijven als $q(x) = f(x) \cdot (g(x))^{-1}$ en dan de productregel in combinatie met de kettingregel te gebruiken.

Als je dan de negatieve exponenten wegwerkt en de twee breuken die je krijgt optelt, ontstaat de **quotiëntregel voor differentiëren**:

Als $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dan is $q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, soms kun je eerst de quotiëntfunctie herleiden.
Vaak komt hij in combinatie met de voorgaande differentieerregels voor. Vooral de kettingregel duikt daarbij vaak op.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x}{x-4}$.

Bepaal de afgeleide functie met behulp van de quotiëntregel.

Antwoord

Bekijk eerst de teller en de noemer afzonderlijk:

- $t(x) = 2x$ met $t'(x) = 2$
- $n(x) = x - 4$ met $n'(x) = 1$

Hieruit volgt: $f'(x) = \frac{2 \cdot (x-4) - 2x \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{-8}{(x-4)^2}$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

a Bepaal de afgeleide van f met de quotiëntregel.

b Waarom is bij deze functie de quotiëntregel het handigst?
Kan het wel op een andere manier?

Opgave 3

Gegeven is de functie f door $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

a Bepaal van deze functie de afgeleide met behulp van de quotiëntregel.

b Je kunt ook het functievoorschrift eerst herleiden. Dan hoef je de quotiëntregel niet te gebruiken. Bepaal de afgeleide zonder de quotiëntregel toe te passen. Welke van beide methodes van differentiëren is hier het handigst?

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $f(x) = \frac{5x-10}{\sqrt{4+x^2}}$.

Antwoord

Gebruik de quotiëntregel:

- $t(x) = 5x - 10$ met $t'(x) = 5$
- $n(x) = \sqrt{4 + x^2} = \left(4 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ met $n'(x) = \frac{1}{2}\left(4 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

Hieruit volgt: $f'(x) = \frac{5 \cdot \sqrt{4+x^2} - (5x-10) \cdot \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2}$.

Vermenigvuldig nu teller en noemer met $\sqrt{4 + x^2}$ en dit geeft:

$f'(x) = \frac{5 \cdot (4+x^2) - (5x-10) \cdot x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{20+10x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$

Opgave 4

Differentieer de functies met de quotiëntregel als dat nodig is. Probeer telkens de handigste manier van differentiëren te gebruiken.

a $f(x) = \frac{3x^2-4}{2x+1}$

b $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$

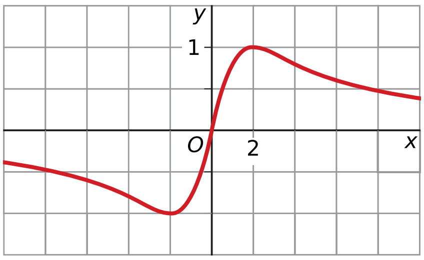
c $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{4+x^2}}$

d $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Voorbeeld 3

Je ziet een deel van de grafiek van $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$.

Er zijn twee extremen. Bereken die met behulp van de afgeleide van f.



Figuur 4.1

Antwoord

De afgeleide is:

$$f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2+4) - 4x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$$

Los de vergelijking $f'(x) = 0$ op.
Let op: een breuk kan alleen maar op 0 uitkomen als de teller 0 is (en de noemer niet).
Dit betekent dat $-4x^2 + 16 = 0$.
Deze vergelijking levert op: $x = -2 \vee x = 2$.
De extremen zijn: max. $f(2) = 1$ en min. $f(-2) = -1$.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$.

a Bereken de extremen van f met behulp van differentiëren. Geef benaderingen in twee decimalen.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Verwerken

Opgave 6

Differentieer de functies.

a $f(x) = \frac{x+1}{x^2-16x}$

b $y(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$

c $H(t) = \frac{\sqrt{2t+6}}{3t}$

d $GTK(q) = \frac{2q^3-10q^2+60q+120}{q}$

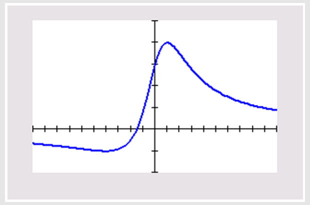
e $A(r) = \frac{2r}{\sqrt{4r+8}}$

f $GO(p) = 200p + 400 + \frac{2000}{p}$

Opgave 7

Je ziet hier een deel van de grafiek van functie f. Het functievoorschrift is

$f(x) = \frac{8x+12}{x^2+4}$.



Figuur 4.2

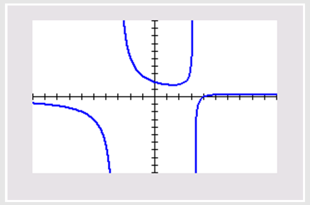
a Bereken algebraïsch de uiterste waarden van f.

b Los op: $f(x) < \frac{3}{2}$

c De grafiek van f snijdt de x-as in A en de y-as in B. Onderzoek of de lijn AB de grafiek van f raakt.

Opgave 8

Je ziet hier een deel van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{10x-40}{x^2-10}$.



Figuur 4.3

a Bereken met behulp van de afgeleide de extremen van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Het punt $P(0,4)$ ligt op de grafiek van f. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in dat punt.

Opgave 9

Voor de kosten van de productie van eenvoudige nietmachines heeft een bedrijf een wiskundig model laten opstellen. In dat model zijn de kosten K (in euro) afhankelijk van het aantal geproduceerde nietmachines q (in honderdtallen) volgens de formule $K = 4q^3 - 72q^2 + 600q + 2000$.
De gemiddelde totale kosten zijn de kosten per nietmachine: $GTK = \frac{K}{q}$.

a Geef een functievoorschrift van $GTK(q)$.

b De verandering van de gemiddelde totale kosten afhankelijk van q wordt bepaald door de afgeleide $\frac{\mathrm{d}GTK}{\mathrm{d}q}$. Stel een formule op voor deze afgeleide.

c Er worden maandelijks maximaal 2000 van deze nietmachines geproduceerd. Breng de grafiek van GTK in beeld op je grafische rekenmachine. Bij welke vensterinstellingen komt het bijpassende deel van de grafiek geheel in beeld?

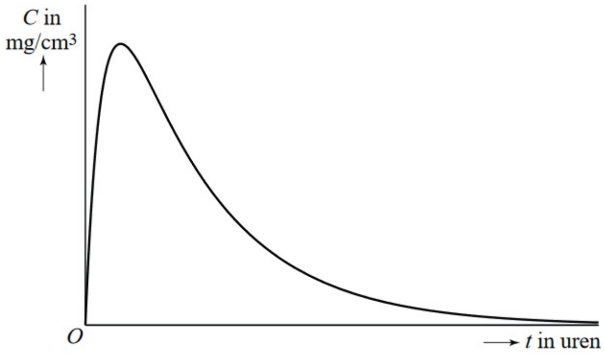
d Bij welke maandelijkse productie is GTK minimaal?

Toepassen

Opgave 10: PharmaCie

PharmaCie brengt een nieuw medicijn tegen hooikoorts op de markt. Het nieuwe medicijn van PharmaCie wordt in pilvorm verkocht.

Als een patiënt klachten krijgt, neemt hij een pil. De werkzame stof komt dan via de maag en de darm in de bloedbaan terecht. De hoeveelheid werkzame stof in de bloedbaan stijgt eerst en neemt daarna af omdat de stof door het lichaam wordt afgebroken. De concentratie van de werkzame stof in de bloedbaan noemen we C. In de figuur zie je een schets van de grafiek van C. Een onderzoeker van PharmaCie stelt de volgende formule op die dit verloop redelijk benadert:



Figuur 4.4

$C(t) = \frac{16t}{190t^2+60}$

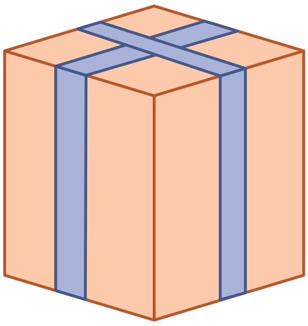
Hierin is C de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t de tijd in uur na het innemen van de pil.

Bereken met behulp van de afgeleide van C na hoeveel minuten, gerekend vanaf het moment dat de pil is ingenomen, de concentratie werkzame stof maximaal is.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak)

Opgave 11: Sierlinten

De afdeling Verpakking van een bedrijf heeft de opdracht gekregen balkvormige doosjes te maken waarvan de lengte vier keer zo groot is als de breedte. Om elke doos worden twee zijden sierlinten aangebracht zoals je in de tekening ziet. De inhoud van de doosjes moet 1 liter zijn. Het bedrijf wil het verbruik van het sierlint zo klein mogelijk houden.


Figuur 4.5

a Stel een formule op voor de lengte L van het benodigde sierlint als functie van de breedte x van de doos.

b Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het doosje de lengte van het sierlint zo klein mogelijk is. Geef je antwoord in millimeter nauwkeurig.

Testen

Opgave 12

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$

b $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$

c $H(t) = \frac{2}{2+\frac{2}{t}}$

d $y(x) = \frac{x^5+1}{(1+x^2)^5}$

Opgave 13

Een bedrijfseconoom heeft voor een fabriek van kleine gereedschappen een kostenanalyse gemaakt voor de productie van zogenaamde 'allesknippers'. Hij geeft in zijn eindrapport een grafiek waarbij volgens hem de formule: $TK = \frac{1}{3}q^3 - 5q^2 + 40q$ hoort. Hierin is TK in euro uitgedrukt en q de dagelijkse productie in tientallen.

a Stel een formule op voor de marginale kosten $MK = \frac{\mathrm{d}TK}{\mathrm{d}q}$ als functie van q.

b Bereken $MK(1)$. Wat betekent dat getal? Hoe kun je het in de grafiek van TK vinden?

c Bij welke dagproductie is MK minimaal? Bepaal deze waarde zowel met je grafische rekenmachine als met algebraïsche methoden.

d Onder de gemiddelde totale kosten verstaan economen: $GTK = \frac{TK}{q}$. Bepaal met behulp van differentiëren voor welke waarde van q de gemiddelde totale kosten minimaal zijn.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de quotiëntregel (en de andere regels)**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.5 Optimaliseren

Inleiding

Een **model** is een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid. In de wetenschap wordt veel met modellen gewerkt omdat de werkelijkheid te complex is om zonder meer te beschrijven. Door niet belangrijke details weg te laten (verstandige aannames te doen) kan een model worden opgesteld dat met wiskundige middelen is te beschrijven en door te rekenen. Uit het doorrekenen van het model worden conclusies getrokken die dan weer kunnen worden vergeleken met de realiteit.

Je leert in dit onderwerp

- werken met rekenmodellen waarin het differentiëren kan worden toegepast, zoals optimaliseringsproblemen.

Voorkennis

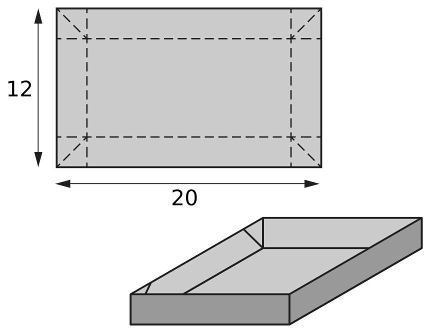
- differentiëren met alle differentieerregels;
- werken met de afgeleide onder andere voor het berekenen van extremen.

Verkennen

Opgave V1

Een industrieel ontwerper ontwikkelt een type opbergbakje dat zuiver rechthoekige zijvlakken heeft. Het is van boven open en wordt gemaakt uit dunne rechthoekige plaatjes staal van 12 cm bij 20 cm die door een machine in de gewenste vorm worden gevouwen. De vierkantjes op de hoeken van een plaatje staal worden daarbij dubbel gevouwen en naar binnen geklapt. De bakjes krijgen een vlakke kunststof deksel die precies de bovenzijde afsluit.
De afmeting van de vierkantjes (de lengte van een zijde ervan) stelt hij zo vast dat de inhoud van het bakjes zelf zo groot mogelijk wordt.

Welke afmeting stelt hij in?



Figuur 5.1

Uitleg

Een industrieel ontwerper ontwikkelt een type opbergbakje dat zuiver rechthoekige zijvlakken heeft. Het is van boven open en wordt gemaakt uit dunne rechthoekige plaatjes staal van 12 centimeter bij 20 centimeter. Deze worden door een machine in de gewenste vorm gevouwen. De vierkantjes op de hoeken van een plaatje staal worden daarbij dubbelgevouwen en naar binnen geklapt. De bakjes krijgen een vlakke kunststof deksel die precies de bovenzijde afsluit.
De afmeting van de vierkantjes (de lengte van een zijde ervan) stelt hij zo vast dat de inhoud van de bakjes zelf zo groot mogelijk wordt.

Welke afmeting kiest hij voor de zijden van de vierkantjes?

Om dit probleem op te lossen maak je een geschikt wiskundig rekenmodel.

- Doe aannames.
  De zijvlakken en bodem zijn rechthoekig (want er wordt uit een rechthoek gevouwen en op de hoeken zitten vierkantjes). Alle zijkanten zijn even hoog (want op de hoeken zitten vierkantjes).
- Bepaal van welke variabele(n) een rol spelen.
  De afmeting van de vierkantjes, dit is ook de hoogte van het bakje, noem deze x.
  De inhoud, want die moet maximaal zijn. Noem deze I.
- Stel formules op.
  Voor de inhoud I van het bakje geldt: $I = \text{lengte} \cdot \text{breedte} \cdot \text{hoogte}$.

  Vul hiervoor uitdrukkingen in x in.
- Zorg dat er één formule met twee variabelen overblijft.
  Je vindt $I = (12 - 2x)(20 - 2x)x$.

De aannames plus de formule vormen je wiskundige model.
De maximale inhoud vind je met de grafische rekenmachine of met behulp van differentiëren.
Ga na dat voor $x \approx 2{,}43$ centimeter de inhoud maximaal is. De maximale inhoud is ongeveer gelijk aan 263 kubieke centimeter.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**.

a Laat zien hoe je aan de formule voor de inhoud $I(x)$ van het bakje komt.

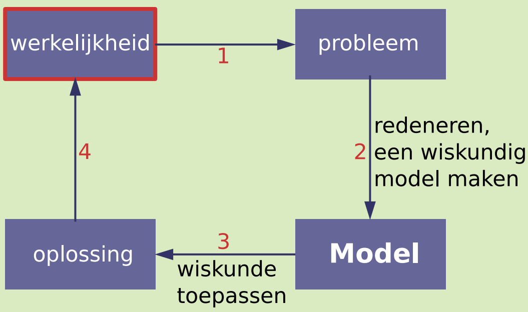
b Welke waarden kan x aannemen?

c Bepaal de afgeleide van $I(x)$ en bereken met behulp daarvan de waarde van x waarvoor I maximaal is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Wiskunde wordt veel toegepast in wetenschap en handel en industrie om problemen op te lossen.
Er wordt dan een **wiskundig model** gemaakt. Een wiskundig model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid op grond van verstandige aannames. In een goed model zijn alle belangrijke factoren nog aanwezig, alleen de onbelangrijke blijven buiten beschouwing. Meestal heeft het model de vorm van één of meer formules die beschrijven hoe de belangrijke variabelen zich gedragen.
Op die formules wordt dan een geschikte wiskundige theorie losgelaten.

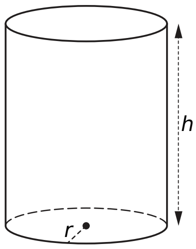


Figuur 5.2

Bij **optimaliseren** gaat het om wiskundige modellen waarbij wordt gezocht naar een maximale of een minimale waarde. Vaak is dat het maximum of minimum van een functie. Je kunt dat vinden door eerst te differentiëren, dan de afgeleide gelijk te stellen aan nul, en vervolgens de ontstane vergelijking op te lossen. Of je bepaalt het maximum of minimum met de grafische rekenmachine.

Voorbeeld 1

Een blikfabriek maakt cilindervormige blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.
Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?



Figuur 5.3

Antwoord

Stel een rekenmodel op.

- Doe aannames.
  Het blik is zuiver cilindrisch en de benodigde hoeveelheid blik is gelijk aan de totale oppervlakte van het blik.
- Bepaal welke variabelen een rol spelen.
  De straal van (het grondvlak van) het blik r in cm.
  De hoogte h in cm.
  De inhoud I van het blik is 1 L = 1000 cm^3.
  De oppervlakte A van het blik die minimaal moet zijn.
- Stel formules op.
  Voor de inhoud van het blik geldt: $I = \pi r^2 h = 1000$.
  Voor de oppervlakte van het blik geldt: $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$.
- Zorg dat er één formule met twee variabelen overblijft.
  Als je beide formules combineert krijg je: $A(r) = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2$.

Met behulp van differentiëren (of de grafische rekenmachine) vind je dat voor $r \approx 5{,}4$ cm en $h \approx 10{,}8$ cm de totale oppervlakte minimaal is.

Opgave 2

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Laat zien, hoe je aan de formule voor $A(r)$ komt.

b Bereken met behulp van de grafische rekenmachine voor welke waarde van r de oppervlakte A van het conservenblik minimaal is.

c Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van r de oppervlakte A van het conservenblik minimaal is. Rond het eindantwoord af op twee decimalen.

Voorbeeld 2

ChemoTech brengt een nieuw onkruidbestrijdingsmiddel CHIF op de markt. De productiekosten zijn bekend, er is **een kostenmodel** voorhanden:

ChemoTech

Figuur 5.4

$TK = 0{,}25q^3 - 3q^2 + 18q + 30$

Hierin stelt q het aantal geproduceerde kilogram (in duizendtallen) CHIF voor en TK de totale kosten in duizenden euro.

Voor de opbrengst gelden de volgende aannames.

- Bij een prijs van € 18,00 per kilogram zal de verkoop 4500 kilogram zijn.
- Bij een prijs van € 9,00 per kilogram zal de verkoop 31500 kilogram zijn.

De verkochte hoeveelheid q hangt lineair af van de prijs p.

Welke winst kan ChemoTech met dit product maximaal maken?

Antwoord

Stel een rekenmodel op.

- Doe aannames.
  ChemoTech produceert alleen bestrijdingsmiddel als het ook wordt verkocht.
- Bepaal welke variabele(n) van belang zijn.
  De winst. Noem die TW.
  De prijs p in euro/kg, de verkochte hoeveelheid q per 1000 kg, de totale opbrengst TO per 1000 euro, de totale kosten TK per 1000 euro.
- Stel formules op.
  Er geldt:
  $TW = TO - TK$, $TO = p \cdot q$ en $TK = 0{,}25q^3 - 3q^2 + 18q + 30$.
  De verkoop q hangt lineair af van de prijs p: $q = a \cdot p + b$.
  De grafiek hiervan gaat door $(9; 31{,}5)$ en $(18; 4{,}5)$.
  Daaruit volgt: $q = -3p + 58{,}5$.
- Zorg dat er één formule met twee variabelen overblijft.
  $TW = TO - TK$ geeft: $TW = p \cdot q - (0{,}25q^3 - 3q^2 + 18q + 30)$.
  Nu zijn er nog drie variabelen. p komt het minst vaak voor, werk die weg.
  Als $q = -3p + 58{,}5$, dan geldt $p = 19{,}5 - 0{,}33q$.
  Vul dit in in de formule voor TW en dit geeft:
  $TW = -0{,}25q^3 + 2{,}67q^2 + 1{,}5q - 30$.

De maximale winst is € 25821,59. Dit is te vinden met behulp van differentiëren, met de grafische rekenmachine of met **dit kostenmodel in Excel**.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Begin met de formule $TW = TO - TK$ en leid de formule voor de totale winst $TW = -0{,}25q^3 + 2{,}67q^2 + 1{,}5q - 30$ af.

b Bereken met behulp van differentiëren voor welke q de waarde van TW maximaal is.

Voorbeeld 3

Een winkelier die een product wil verkopen moet daarvan voldoende in voorraad hebben. Hij bestelt dit product bij de fabrikant. Daarvoor betaalt hij bestelkosten. Hoe vaker hij bestelt, hoe hoger de bestelkosten. Aan de andere kant, als hij niet vaak bestelt, dan moet hij zelf een grotere voorraad aanhouden en daarvoor maakt hij voorraadkosten.
Stel je voor dat de jaarlijkse vraag V exemplaren bedraagt, de bestelkosten B euro per bestelling zijn, elk exemplaar E euro kost en dat de voorraadkosten P procent van de kostprijs van de gemiddelde voorraad bedragen. De winkelier doet een aantal bestellingen per jaar van steeds evenveel exemplaren. Welke bestelgrootte is het gunstigst voor hem?

Antwoord

Stel een rekenmodel op.

- Doe aannames.
  De leverancier bestelt als zijn voorraad op is en de levertijd is erg kort. Gunstig betekent: de bestelkosten plus de voorraadkosten zijn bij elkaar zo laag mogelijk.
- Bepaal welke variabele(n) een rol spelen.
  De bestelgrootte moet je berekenen, noem deze x.
  De jaarlijkse vraag V.
  De bestelkosten per bestelling B.
  De kosten per product E.
  De voorraadkosten:
  $\frac{P}{100} \cdot$ kosten van de producten die gemiddeld op voorraad zijn.
  De bestelkosten + de voorraadkosten, noem deze TK.
- Stel formules op.
  Het aantal bestellingen is: $\frac{V}{x}$
  De bestelkosten zijn: $B \cdot \frac{V}{x}$
  Het gemiddeld aantal producten op voorraad: direct na bestellen zijn er x, net voor de volgende keer bestellen zijn er 0, dus gemiddeld $\frac{1}{2} \cdot x$
  De voorraadkosten zijn: $\frac{1}{2} \cdot x \cdot E \cdot \frac{P}{100}$.
- Zorg dat er één formule met twee variabelen overblijft.
  De formule voor de totale kosten is: $TK = B \cdot \frac{V}{x} + \frac{1}{2} x \cdot E \cdot \frac{P}{100} + E \cdot V$
  Deze formule heeft alleen x als variabele.
  Van $TK(x)$ moet het minimum worden berekend. Omdat er onbekende constanten zijn, kan dat alleen met differentiëren.

Nu is: $\frac{\mathrm{d}TK}{\mathrm{d}x} = -B \cdot \frac{V}{x^2} + \frac{E \cdot P}{200}$.

$\frac{\mathrm{d}TK}{\mathrm{d}x} = 0$ geeft $x = \sqrt{\frac{200 \cdot B \cdot V}{E \cdot P}}$.
Bij deze waarde van de bestelgrootte zijn zijn kosten minimaal.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.

a Leg uit waarom je geen rekening hoeft te houden met de kosten voor het aanschaffen van de producten.

b Leid zelf de formule voor de totale kosten TK af.

c Laat met behulp van differentiëren zien dat een bestelgrootte van $x = \sqrt{\frac{200 \cdot B \cdot V}{E \cdot P}}$ de minste kosten voor de winkelier oplevert.

Opgave 5

Een bedrijf brengt droogtrommels op de markt. Er is een vraag naar droogtrommels van 1500 stuks per jaar. Voor de opslagkosten moet je rekenen met een rentepercentage van 9%. De productieprijs is € 700 en de prijs voor het plaatsen van een bestelling is € 15.

a Stel een formule op voor het verband tussen de totale bestelkosten en de bestelgrootte.

b Stel een formule op voor het verband tussen de opslagkosten en de bestelgrootte.

c Stel een formule op voor het verband tussen de totale kosten en de bestelgrootte.

d Bereken de optimale bestelgrootte.

Verwerken

Opgave 6

Op rechthoekige vellen papier van 1 vierkante meter worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 decimeter breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 decimeter breedte.
Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

a Maak een schets van de situatie met de gegevens er in.

b Neem aan dat de breedte van zo'n poster wordt voorgesteld door x decimeter. Leid een formule af voor de oppervlakte A van het bedrukte deel als functie van x.

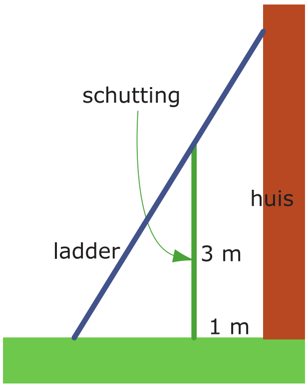
c Bereken met behulp van differentiëren de waarde van x waarvoor $A(x)$ maximaal is.

d Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

Opgave 7

Iemand wil een ladder kopen om zijn dakgoten schoon te maken. Vlak naast zijn huis op 1 meter van de muur staat een schutting van 3 meter hoog.

Hoe lang moet een ladder minstens zijn om over de schutting tegen de muur van het huis te komen?
Ga ervan uit dat zowel de muur van het huis als de schutting loodrecht op de vlakke grond staat.



Figuur 5.5

Opgave 8

Een kledingbedrijf introduceert een nieuw soort regenpak. Na verloop van tijd blijkt er een vraag te zijn van 1200 regenpakken per jaar. Ga voor de opslagkosten uit van 7% per jaar. De productieprijs van een regenpak is € 35,00. De prijs voor het plaatsen van een bestelling is € 10,00.

Bereken de optimale bestelgrootte.

Opgave 9

Een aantal jaar geleden werden voor het verbruik van aardgas twee tarieven gehanteerd:

- Een tarief voor kleinverbruikers: iemand die jaarlijks tot 600 kubieke meter aardgas verbruikte, betaalde 26 cent per kubieke meter en een vastrecht van € 40,00 per jaar.
- Een tarief voor grootverbruikers: iemand die jaarlijks 600 kubieke meter of meer verbruikte, betaalde 16 cent per kubieke meter met een vastrecht van € 80,00 per jaar.

a Teken de grafiek van de prijs p van het gasverbruik per jaar als functie van het aantal verbruikte kubieke meter aardgas a.

b Geef zowel voor kleinverbruik als voor grootverbruik een passende formule.

c Voor welke waarde van a is er een ‘sprong’ in de grafiek?

Tuinders waarvan het gasverbruik in de buurt van de 600 kubieke meter uitkwam lieten gas afbranden. Dat betekent dat ze opzettelijk gas lieten ontsnappen en dat lieten verbanden.

d Waarom en bij welke waarden voor a zouden ze dat hebben gedaan?

e Hoe moet het vastrecht voor grootverbruik worden aangepast om het afbranden van gas te voorkomen?

f Waarom blijft er dan nog altijd sprake van een ‘knik’ in de grafiek?

Opgave 10

De eigenaar van een camping wil het aantal plaatsen uitbreiden. Hij koopt een hectare grond en wil daarop zuiver vierkante kampeerplaatsen inrichten. Hij heeft echter een deel van de grond nodig voor wegen, toilet- en wasgelegenheid, en dergelijke. Per kampeerplaats schat hij daarvoor zo'n 20 vierkante meter te moeten reserveren. Verder gaat hij ervan uit dat het bedrag dat hij per plaats kan rekenen afhangt van de grootte ervan. In ieder geval rekent hij per nacht een prijs van € 4,50, maar daar bovenop denkt hij nog zo'n € 2,50 per meter breedte te kunnen vragen.
Voor plaatsen van 4 meter breedte zal hij dan € 14,50 per nacht kunnen rekenen. De vraag van deze campingeigenaar is daarom: 'Hoe breed moet ik mijn kampeerplaatsen maken om zo veel mogelijk te verdienen aan deze extra hectare grond?'

Los dat probleem voor hem op. Schrijf een volledige uitwerking op waarbij je gebruikmaakt van differentiëren.

Testen

Opgave 11

In een bepaalde supermarkt worden pakken yoghurt verkocht voor € 0,90 per stuk. Er worden elke week ongeveer 1000 pakken yoghurt verkocht. De bedrijfsleider denkt dat hij meer pakken yoghurt kan verkopen als hij de prijs verlaagt. Elke 4 cent prijsverlaging kon wel eens een omzetverhoging van 100 pakken betekenen. De pakken yoghurt worden ingekocht voor € 0,60 per stuk.

a Stel een formule op voor de winst als de functie van de verkoopprijs. Ga er daarbij van uit dat de bedrijfsleider gelijk heeft.

b Bij welke prijs is zijn winst maximaal? Hoe groot is de wekelijkse omzet dan?

c Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Opgave 12

Een fabrikant heeft opslagruimte nodig. Het meest praktisch voor zijn producten is een rechthoekige loods met een vloeroppervlakte van $0{,}5$ hm^2. Hij vraagt bij de gemeente de aankoop van een rechthoekig stuk grond op het industrieterrein aan om die loods op te kunnen bouwen. De gemeente antwoordt dat hem alleen een bouwvergunning kan worden verstrekt als hij een groenvoorziening om zijn loods aanbrengt. De voorschriften zijn: groenstroken aan de zijkanten en de achterkant van de loods van 5 m breed en een groenstrook aan de voorkant van 8 m breed. De fabrikant slaat nu aan het rekenen. Hij wil dit probleem oplossen: 'Hoe kan ik een zo klein mogelijk rechthoekig stuk grond kopen waar een loods van $0{,}5$ hm^2 op past en dat voldoet aan de voorschriften van de gemeente?'

Los het probleem van de fabrikant op met behulp van differentiëren.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu **alle basisregels voor het differentiëren** geleerd. Het is nuttig om nog even alle begrippen op een rijtje te zetten voor jezelf.

Begrippenlijst

- differentieerregels — somregel, constante-regel, machtsregel
- samengestelde functie (kettingfunctie) — kettingregel — algemene machtsregel
- productfunctie — productregel
- quotiëntfunctie — quotiëntregel
- wiskundig model — optimaliseren

Activiteitenlijst

- afgeleiden bepalen m.b.v. differentieerregels — afgeleiden toepassen
- afgeleiden bepalen m.b.v. de kettingregel en de algemene machtsregel
- afgeleiden bepalen m.b.v. de productregel
- afgeleiden bepalen m.b.v. de quotiëntregel
- werken met wiskundige modellen met name bij optimaliseringsproblemen

Achtergronden

De grootste wiskundige prestatie van de achttiende eeuw was de ontwikkeling van de 'calculus', van de 'analyse'. Daarbij gaat het om differentiaal- en integraalrekening, de functietheorie en alles wat daaruit voortvloeide. De belangrijkste rol daarin werd vervuld door **Leonhard Euler (1707—1783)**. Euler leerde de wiskunde in Basel van **Johann Bernoulli (1667—1748)** en werd in 1773 opvolger van **Daniël Bernoulli (1700—1782, zoon van Johann Bernoulli)** als hoogleraar in St. Petersburg.

Figuur 6.1 Euler

Vooral dankzij een fenomenaal geheugen (hij kende bijvoorbeeld de eerste zes machten van de eerste 100 priemgetallen uit zijn hoofd evenals alle formules uit de trigonometrie en de analyse en een grote hoeveelheid gedichten) kon hij zelfs toen hij volslagen blind was zijn onvoorstelbare productiviteit op het gebied van de wiskunde en de mathematische fysica handhaven. Met 'Introductio in Analysin Infinitorum' schreef hij in 1748 het eerste samenhangende werk over analyse. Toch was Euler bepaald geen monomane excentrieke wiskundige, maar vooral een gezinsmens (hij had 13 kinderen waarvoor hij allerlei spelletjes ontwierp).

Lees ook op deze site: **Differentiaalrekening**.

Testen

Opgave 1

Differentieer de functies.

a $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

b $f(x) = 4x\sqrt{x^2 + 1}$

c $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$

d $f(x) = \frac{x^2+1}{4x}$

e $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}$

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{15x}{x^2+36}$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b De raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 3 snijdt de y-as in punt A. Stel een vergelijking van die raaklijn op en bereken de coördinaten van A.

c Voor welke a raakt de lijn $y = ax$ de grafiek van f?

Opgave 3

Gegeven is de functie f met $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^3}$.

a Bepaal het domein van f.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

c Welk probleem doet zich voor als je de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ wilt opstellen?

Toch kun je twee raaklijnen van de vorm $y = ax$ aan de grafiek tekenen voor $x = 0$.

d Laat zien dat de lijnen $y = -2x$ en $y = 2x$ precies één punt met de grafiek van f gemeen hebben.

Opgave 4

De drainage (waterafvoer) van natte landerijen door het ingraven van rijen drainagebuizen is een kostbare zaak. De kosten per hectare hangen af van de onderlinge afstand x (meter) van de evenwijdige rijen buizen. Die onderlinge afstand heet de ‘drainageafstand’. Er geldt de formule:

$$K = a + 100 \cdot b \cdot \frac{100}{x} + c \cdot \frac{x^3}{125}$$

Hierin zijn a de vaste kosten per hectare, b de kosten van de aanleg van de buizen per meter en c de kosten van de schade aan het gewas bij een drainafstand van 25 meter. Alle kosten zijn in euro.

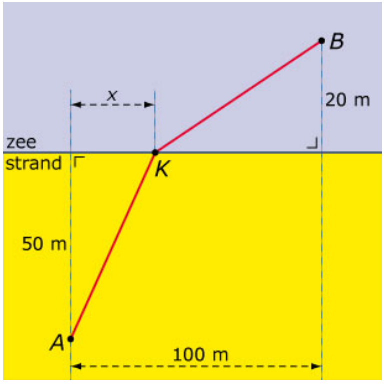
a Toon aan dat deze kosten een minimale waarde kunnen bereiken.

b Bereken voor $b = 3$ en $c = 1000$ de optimale drainafstand, dat wil zeggen de afstand tussen de rijen buizen waarvoor K minimaal is.

c Hoe groot is die minimale waarde van K als de vaste kosten € 300,00 per hectare bedragen?

Opgave 5

Een zwemmer is in nood voor de kust van Bergen. De figuur geeft een beeld van de situatie. De zwemmer bevindt zich bij punt B in zee. Een lid van de reddingsbrigade ziet de zwemmer en wil in actie komen. Zij bevindt zich in punt A. Ze wil natuurlijk via de snelste weg naar de drenkeling toe. Maar wat is de snelste weg?
Een deel van de weg moet ze rennend afleggen en een deel zwemmend. Ze rent met een gemiddelde snelheid van 6 meter per seconde en ze zwemt met een gemiddelde snelheid van $1{,}5$ meter per seconde. Hoe kan ze het snelst hulp bieden? Noem het punt waar ze in het water stapt K.
Punt K kan overal langs de aangegeven 100 meterlijn liggen. De tijd die ze nodig heeft om in B te komen moet natuurlijk zo klein mogelijk zijn. Noem de totale tijd t, de gemiddelde snelheid over het strand v_s en de gemiddelde snelheid in zee v_z.



Figuur 6.2

a Druk t uit in AK, KB, v_s en v_z.

b Formuleer een verband tussen t en x.

c Bepaal met behulp van differentiëren de minimale tijd die het lid van de reddingsbrigade nodig heeft om de zwemmer te bereiken.

d Bepaal de kortste weg.

Toepassen

Opgave 6: File

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan.

Bekijk deze **file-simulatie** (een Java-applet).

Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren. Neem aan dat alle auto's 4 m lang zijn en hun onderlinge afstand precies de remweg R (in meter) is. Deze remweg hangt af van de snelheid v (in km/h).

Er geldt bij benadering: $R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$.

De verkeersdienst zet een teller halverwege de wegversmalling die meet hoeveel auto's er per minuut passeren. Stel nu een formule op voor het aantal auto's dat per minuut de teller passeert.

Bereken met behulp van differentiëren bij welke snelheid zoveel mogelijk auto's de teller passeren.

Opgave 7: Energieverbruik van vissen

Het energieverbruik van een vis tijdens een zwemtochtje in stilstaand water is recht evenredig met de tijd t en met de derde macht van zijn snelheid door het water:

$E = c \cdot v^3 \cdot t$

Hierin is:

- E het energieverbruik in J (Joule),
- v de snelheid van de vis ten opzichte van het water in km/h,
- t de tijd in uren,
- c de evenredigheidsconstante is.

a Neem aan dat $c = 0{,}15$. Bereken het energieverbruik van een vis die in stilstaand water een afstand van 5 km aflegt met een snelheid van 2 km/h.

b Toon aan dat het energieverbruik per afgelegde kilometer ten opzichte van de oever van een stroomopwaarts zwemmende vis gelijk is aan:

$U = c \cdot \frac{v^3}{v-s}$

als s de stroomsnelheid van het water in km/h is.

c Neem weer aan dat $c = 0{,}15$. Bereken het energieverbruik van een vis die in een rivier stroomopwaarts een afstand van 5 km (ten opzichte van de oever) aflegt met een snelheid van $3{,}5$ km/h ten opzichte van het water dat met een snelheid van 2 km/h stroomt.

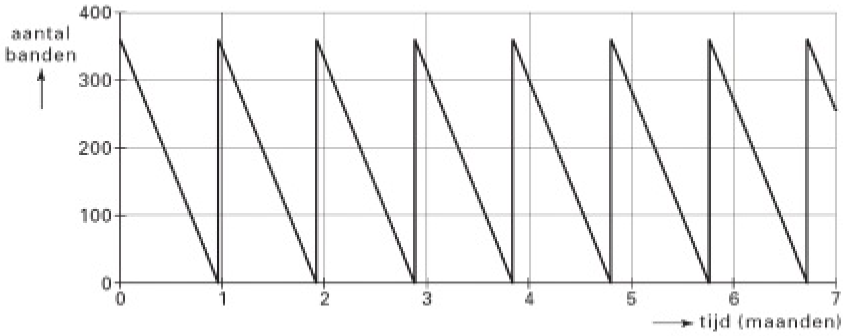
d Verklaar waarom zalmen de rivier op trekken met een gemiddelde snelheid ten opzichte van het water van $1{,}5$ maal de stroomsnelheid, door aan te tonen dat hun energieverbruik dan minimaal is.

Examen

Opgave 8: Autobanden

De firma Nedtyre verkoopt een speciaal type autobanden aan garages, bandenspecialisten en autospeciaalzaken. Jaarlijks verkoopt Nedtyre 4500 banden van dit type. Nedtyre koopt deze banden in bij de Italiaanse bandenfabriek Carrelli. Om de voorraad op peil te houden doet Nedtyre steeds bestellingen van 360 banden. We nemen aan dat de verkoop gelijkmatig over het jaar verdeeld is. Men zorgt ervoor dat de nieuwe bestelling telkens precies arriveert op het moment dat er geen banden meer in voorraad zijn. Dan zit er telkens $0{,}08$ jaar, dus iets minder dan een maand, tussen twee opeenvolgende bestellingen.

De voorraad autobanden verloopt volgens de grafiek in deze figuur.



Figuur 6.3

De voorraadkosten zijn evenredig met het aantal banden dat in voorraad is. De kosten om een band een jaar lang in voorraad te houden bedragen € 180.

a Toon aan dat de totale voorraadkosten volgens dit model € 32400 per jaar bedragen.

De banden worden door Nedtyre voor € 70 per stuk verkocht. De inkoopprijs die Nedtyre betaalt, is € 30 per band. Bij het berekenen van de winst moet ook rekening worden gehouden met bovengenoemde voorraadkosten en met de leveringskosten. Deze leveringskosten bedragen € 3500 per bestelling.

b Laat met een berekening zien dat uit het voorgaande volgt dat Nedtyre gemiddeld per band een winst van ongeveer € 23,08 maakt. Je mag hierbij geen gebruik maken van de formule die later in deze opgave vermeld wordt.

De leveringskosten van € 3500 gelden voor elke bestelling, ongeacht het aantal bestelde banden. Ook het jaarlijks verkochte aantal van 4500 banden blijft voortdurend gelijk. Nedtyre wil nu onderzoeken of de gemiddelde winst per band verhoogd kan worden door in plaats van 360 banden een ander aantal banden per keer te bestellen. Hierdoor zouden de totale kosten af kunnen nemen. Men maakt de volgende formule:

$$W = 40 - \frac{3500}{x} + 0{,}02x$$

Hierin is W de gemiddelde winst per band in euro's en x de bestelgrootte (het aantal banden dat telkens wordt besteld).

c Toon aan dat deze formule voor iedere bestelgrootte x juist is.

d Nedtyre wil zo veel mogelijk winst per band maken. Stel de afgeleide van W op en bereken met behulp daarvan bij welke bestelgrootte x de gemiddelde winst per band maximaal is.

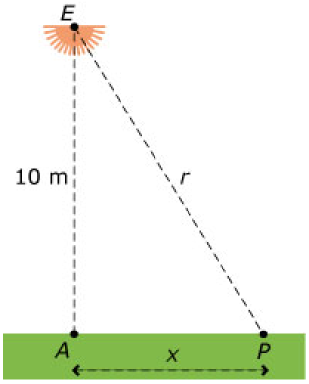
(bron: examen wiskunde A1,2 vwo 2004, eerste tijdvak)

Opgave 9: Wegverlichting

Een belangrijke eis die aan wegverlichting gesteld wordt, is dat er overal langs de te verlichten weg ongeveer even licht is, en niet bijvoorbeeld halverwege tussen twee lampen veel donkerder dan vlak onder een lamp. Om aan te geven hoe licht het op een bepaalde plaats is, gebruikt men het begrip ‘verlichtingssterkte’ (gemeten in lux). Voor het berekenen van de lichtsterkte bij één lamp gebruikt men het volgende model. Uitgangspunt is een lamp die op 10 m hoogte boven het wegdek hangt en waarvan het licht zich in alle richtingen naar beneden kan verspreiden. Zie de figuur. De afstand van de lamp tot een punt P op het wegdek noemen we r (in meters). De verlichtingssterkte in punt P noemen we S (in lux). Voor S geldt:

$$S = \frac{100000}{r^3}$$

Punt A bevindt zich recht onder de lamp, x is de afstand in meters tussen punt A en punt P.



Figuur 6.4

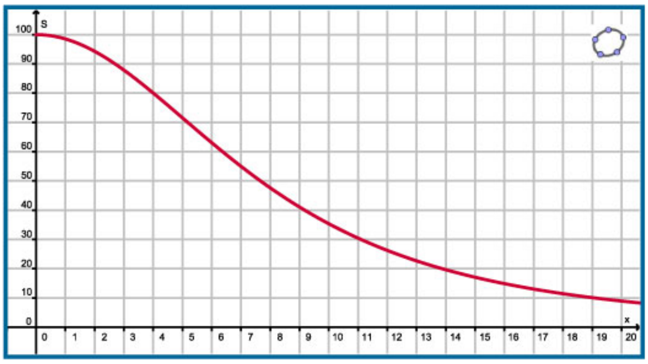
a Bereken x als de verlichtingssterkte in P de helft is van die in A. Rond het antwoord af op gehele decimeters.

Men kan S ook als functie van x opvatten. De afgeleide functie $\frac{dS}{dx}$ is een maat voor de verandering van de verlichtingssterkte (in lux/meter) als men zich over het wegdek van punt A verwijdert. Er geldt:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-300000x}{(100+x^2)^2\sqrt{100+x^2}}.$$

b Toon dit aan.

In de figuur zie je de grafiek van S als functie van x getekend. Iemand vraagt zich af of er een punt is waar $\frac{dS}{dx}$ kleiner is dan -8 lux/m. Hij probeert vergeefs deze vraag te beantwoorden door een vergelijking op te lossen. Met behulp van deze figuur en de formule voor $\frac{dS}{dx}$ is echter snel na te gaan dat er inderdaad zo’n punt bestaat.



Figuur 6.5

c Laat dit zien.

(bron: examen wiskunde A vwo 1998, eerste tijdvak)

Opgave 10: Sportprestaties

In de atletiek kent men verschillende onderdelen. De ene atleet is goed in hardlopen, de andere atleet in hoogspringen of speerwerpen. Iemand die de 100 meter binnen de 11 seconden loopt is een goede sprinter, terwijl iemand die met een polsstok hoger springt dan 5 meter een goede polsstokhoogspringer is. Men kan zich afvragen wie van de twee de betere atleet is. Om prestaties bij verschillende atletiekonderdelen te kunnen vergelijken, hanteert de Koninklijke Nederlandse Atletiek Unie (KNAU) een puntensysteem. Met dit systeem worden sportprestaties omgerekend tot een aantal punten met behulp van verschillende formules. Vanzelfsprekend hoort bij een betere prestatie een groter aantal punten. Zie tabel.

KNAU-puntensysteem voor mannen				
soort sport	formule	onderdeel	a	b
loop- nummers	$P=\frac{a}{t}-b$	100 m	29950	1881,5
		200 m	52611,4	1547,1
		400 m	111960	1433,5
		800 m	248544	1323,2
		1500 m	489971,4	1224,7
		3000 m	1077300	1234,9
spring- nummers	$P=a\sqrt{r}-b$	hoogspringen	2440	2593,5
		verspringen	1094,4	2075,3
		hinkstapsprong	762,9	2074,5
		polsstokhoogspringen	1040	1272,5
werp- nummers	$P=a\sqrt{r}-b$	kogelstoten	462,5	1001,8
		discuswerpen	249,8	893,5
		speerwerpen	190,2	711,3

Tabel 6.1

Voor vrouwen hanteert de KNAU een vergelijkbare tabel.
In deze tabel lezen we af dat voor hardlopen het behaalde aantal punten P wordt berekend met de formule $P=\frac{a}{t}-b$.
Hierbij is t de tijd in seconden die de atleet nodig heeft om de afstand te lopen. De getallen a en b worden afgelezen in de betreffende kolommen.

a Als een man de 100 meter in $10{,}70$ seconden loopt, dan heeft hij daarmee $880{,}2$ punten behaald.
Bereken hoeveel seconden, in 2 decimalen nauwkeurig, een man over de 400 meter moet doen om ook $880{,}2$ punten te behalen.

Voor de spring- en werpnummers wordt door de KNAU de formule $P=a\sqrt{r}-b$ gebruikt.
Hierin is r de gesprongen hoogte of afstand in meters of de geworpen afstand in meters. Zie tabel.
De International Association of Athletics Federations (IAAF) kent ook een puntensysteem. Voor het berekenen van de punten gebruikt de IAAF andere formules dan de KNAU. Bij het speer-

werpen voor mannen ziet de IAAF-formule er als volgt uit: $P = 10{,}14 \cdot (r - 7)^{1{,}08}$. Wanneer we de formule van speerwerpen voor mannen van de KNAU met die van de IAAF vergelijken, dan blijkt dat voor sommige geworpen afstanden r de formule van de KNAU meer punten oplevert dan de formule van de IAAF.

b Onderzoek voor welke waarden van r dat het geval is.

De formules van de KNAU en van de IAAF die horen bij het speerwerpen voor mannen verschillen van elkaar. Dat maakt voor het aantal te behalen punten niet zoveel uit. Er is echter wel een opmerkelijk verschil tussen de grafieken van beide formules: de grafiek van de IAAF stijgt steeds sneller terwijl de grafiek van de KNAU steeds langzamer stijgt. Dat laatste geldt voor elke formule van de KNAU voor de spring- en de werpnummers. Voor elke positieve waarde van a hoort bij de formule $P = a\sqrt{r} - b$ een stijgende grafiek. De stijging van deze grafiek verloopt bovendien steeds minder snel naarmate r toeneemt.

c Toon deze laatste bewering aan door gebruik te maken van differentiëren.

(bron: examen wiskunde A vwo 2003, eerste tijdvak)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

www.math4all.nl