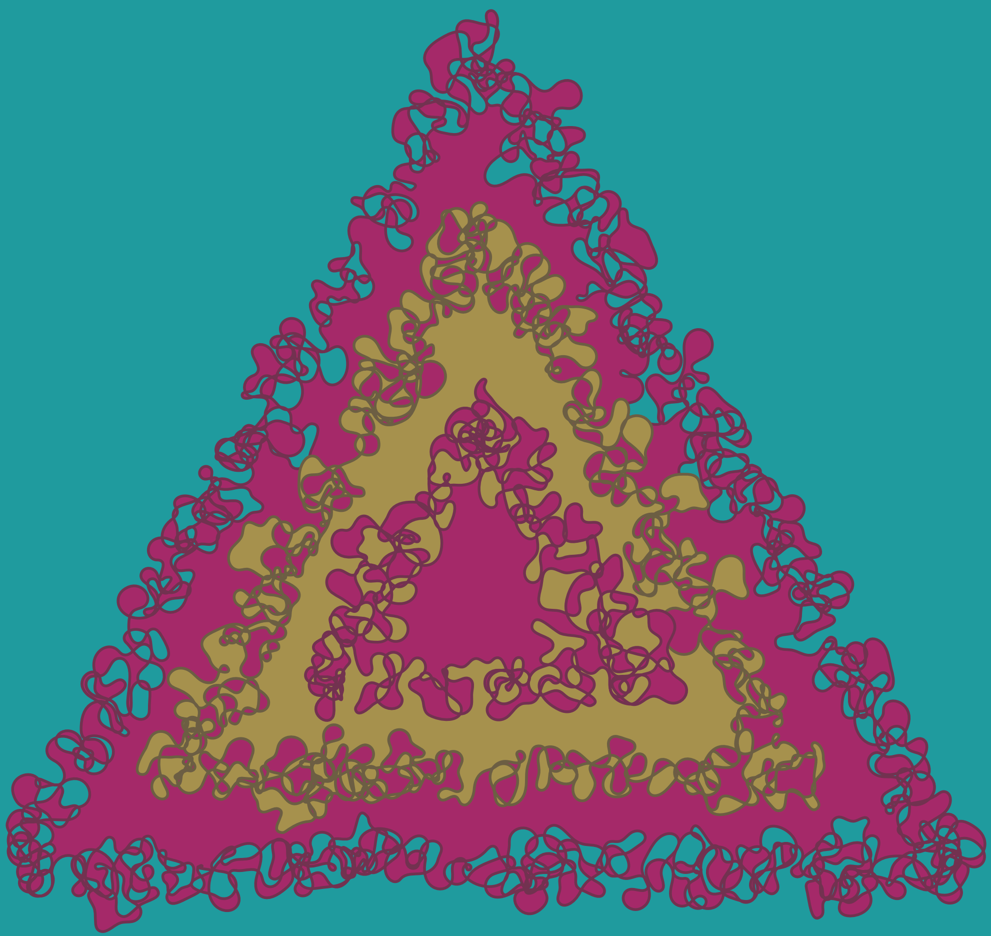
Wiskunde A

5 VWO

Katern 2

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Afgeleide functies

1.1 Het begrip afgeleide

Inleiding

In de zeventiende eeuw vond Stevin de zeilwagen uit. Je kunt er snelheidsveranderingen mee bestuderen. Bij **Veranderingen** heb je leren werken met differentiequotiënten en differentiaalquotiënten. Daarmee geef je de veranderingssnelheid van de functiewaarden, de helling van een grafiek, weer.
Je maakt nu kennis met de afgeleide functie van een functie f, het differentiaalquotiënt voor willekeurige x. Die afgeleide heeft als grafiek de hellingsgrafiek van de functie, waaruit je eigenschappen van f kunt afleiden.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip afgeleide functie;
- de hellingswaarden van een grafiek in een punt berekenen;
- de hellingsfunctie of afgeleide functie van een gegeven functie afleiden.

Voorkennis

- werken met differentiequotiënten van een functie op een interval;
- werken met differentiaalquotiënten van een functie bij een bepaalde invoerwaarde.

Verkennen

Opgave V1

Met een zeilwagen die Stevin in de zeventiende eeuw uitvond kun je veranderingen van de snelheid bestuderen.

In deze opgave wordt zo'n zeilwagen klaargemaakt, de zeilen worden gehesen. De zeilwagen gaat steeds sneller, er staat een flinke wind. Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s in meter de formule $s = 1{,}2t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden.

Figuur 1.2

a Hoeveel m heeft de zeilwagen na 5 s afgelegd en hoe snel rijdt hij dan?

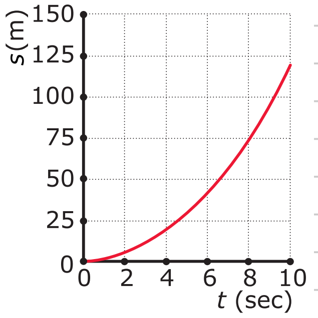
b Kun je een formule opstellen voor de snelheid v in m/s van de zeilwagen als functie van t?

Uitleg

Bekijk de grafiek van de afstand die een zeilwagen heeft afgelegd. Er geldt $s(t) = 1{,}2t^2$.
Daarbij is s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconden.
De wagen gaat steeds sneller rijden.
De gemiddelde snelheid over de eerste vier seconden bereken je met het differentiequotiënt:

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot 4^2 - 1{,}2 \cdot 0^2}{4-0} = \frac{19{,}2}{4} = 4{,}8$ m/s.

Omdat de wagen steeds sneller gaat, zal de snelheid op $t = 4$ hoger zijn dan de gemiddelde snelheid over de eerste vier seconden.
Benader de snelheid op $t = 4$. Gebruik hierbij het differentiequotiënt.

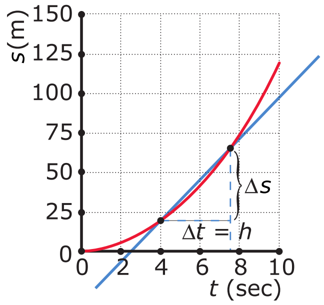


Figuur 1.3

Bekijk de applet.

Neem het interval $[4, 4+h]$.
Het differentiequotiënt op dat interval is (mits $h \neq 0$):

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot (4+h)^2 - 1{,}2 \cdot 4^2}{4+h-4}$$
$$= \frac{9{,}6h + 1{,}2h^2}{h} = 9{,}6 + 1{,}2h$$



Figuur 1.4

Als h de waarde 0 nadert, dan nadert $9{,}6 + 1{,}2h$ de grenswaarde 9,6 m/s.
Deze grenswaarde is de snelheid op $t = 4$.

Je noteert deze grenswaarde als $s'(4)$ of als $\left[\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right]_{t=4}$.

Dit is:

- het differentiaalquotiënt voor $t = 4$;
- het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek voor $t = 4$;
- de verandering van de afstand per tijdseenheid in meter per seconde op $t = 4$;
- de afgeleide waarde op $t = 4$.

Door de dy/dx-functie van de grafische rekenmachine te gebruiken kun je de helling ook bepalen.
Hoe dit moet, zie je in het **Practicum**.

Opgave 1

Voor een versnellende zeilwagen geldt $s(t) = 1{,}2t^2$.
Hierin is t de tijd in seconden en s de afgelegde afstand in meter.

a Bereken de gemiddelde snelheid over de eerste vijf seconden.

b Bereken het differentiequotiënt op het interval $[5, 5+h]$ en vereenvoudig de gevonden uitdrukking voor $h \neq 0$.

c Hoe groot is het differentiaalquotiënt en dus de snelheid op $t = 5$?

Opgave 2

Voor de afgelegde afstand s van een versnellende zeilwagen in meter geldt: $s = 1{,}2t^2$ waarin t de tijd in seconden is.

a Je kunt zelf een formule afleiden voor de snelheid als functie van t. Stel eerst het differentiequotiënt op het interval $[t,t+h]$ op.

b Als h de waarde 0 nadert, krijg je de snelheid voor een willekeurige waarde van t. Geef een formule voor de snelheid als functie van t.

c De functie $v(t)$ is de afgeleide van $s(t)$.
Welke betekenis heeft $s'(5)$ in dit verband?

A. $s'(5)$ is de gemiddelde snelheid in de eerste vijf seconden.
B. $s'(5)$ is de afgelegde weg in de eerste vijf seconden.
C. $s'(5)$ is de snelheid op tijdstip $t=5$.

d Hoe groot is $s'(5)$?

e Op welk tijdstip rijdt de zeilwagen 50 km/h?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

De gemiddelde verandering of het differentiequotiënt zegt iets over de helling van een grafiek.

Het differentiequotiënt is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

De hellingswaarde of **afgeleide waarde** van een grafiek in een punt benader je door het differentiequotiënt over een steeds kleiner interval uit te rekenen. Deze waarde wordt ook wel **differentiaalquotiënt** genoemd.

De afgeleide waarde van $f(x)$ voor $x = a$ schrijf je als: $f'(a)$. (Spreek uit als: ‘f accent a’.)

Dit kun je ook schrijven als: $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$.

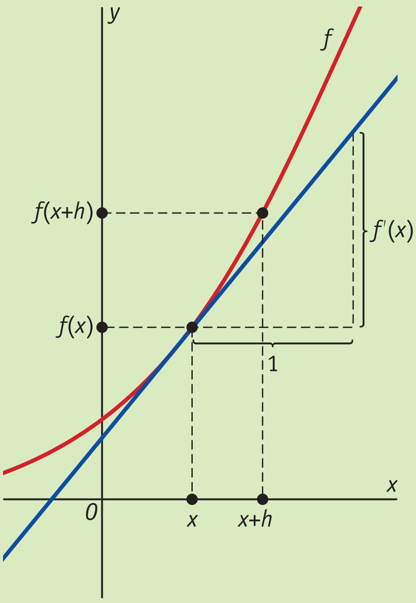
(Spreek uit als: ‘dy dx als x is a’.)

Als je een formule opstelt voor de hellingswaarden voor alle mogelijke waarden van x, dan spreek je van de **afgeleide (functie)**.

Die afgeleide functie geeft bij elke waarde van x (uit het domein) de helling van de functie voor die waarde van x. Dit getal is ook het hellingsgetal van de raaklijn in het punt met die waarde van x.

Je schrijft die afgeleide als $f'(x)$ of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ of $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$.

De grafiek van $f'(x)$ is de **hellingsgrafiek** van f.

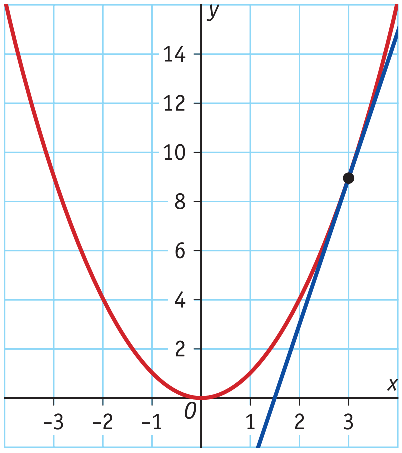


Figuur 1.5

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Bereken zonder de grafische rekenmachine het differentiaalquotiënt van deze functie voor $x = 3$. Stel met behulp daarvan een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.



Figuur 1.6

Antwoord

Berekening van het differentiaalquotiënt.
Het differentiequotiënt van f op het interval $[3{,}3 + h]$ is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h} =$$

$$= \frac{6h+h^2}{h} = 6 + h \text{ (mits } h \neq 0)$$

Als h naar 0 gaat, dan gaat $6 + h$ naar 6.
Het differentiaalquotiënt van f voor $x = 3$ is dus 6.

Het getal 6 is het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$. Deze raaklijn is een rechte lijn en heeft daarom een vergelijking van de vorm: $y = 6x + b$.
b bepaal je door de coördinaten van een punt van de raaklijn in de vergelijking in te vullen: het raakpunt.
Omdat $f(3) = 3^2 = 9$, gaat deze raaklijn door $(3{,}9)$.

Vul dit in de vergelijking in: $9 = 6 \cdot 3 + b$ geeft $b = -9$.

De vergelijking van de raaklijn is $y = 6x - 9$.

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** de functie $f(x) = x^2$.
Stel zonder hulp van de grafische rekenmachine de formule op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = -2$.

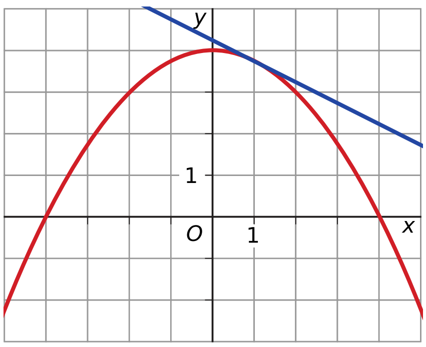
Opgave 4

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$ met domein $[-5{,}5]$.

a Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[1{,}1 + h]$.

b Welke hellingswaarde heeft de grafiek voor $x = 1$?

c Deze hellingswaarde is tevens de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 1$. Stel een vergelijking van die raaklijn op.



Figuur 1.7

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Stel een voorschrift op voor de afgeleide van deze functie.
Bereken met behulp daarvan het differentiaalquotiënt van f voor $x = 3$.

Antwoord

Het differentiequotiënt op $[x,x+h]$ voor willekeurige x is gelijk aan:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{(x+h)-x} = \frac{(x^2+h^2+2xh)-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$

Als h naar 0 nadert, krijg je de afgeleide: $f'(x) = 2x$.

De gevonden afgeleide functie is het hellingsgetal van de grafiek van f voor willekeurige x, dus ook voor $x = 3$: $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$.

a Met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[x,x+h]$ bepaal je de afgeleide van de functie $f(x)$. Stel de formule van de afgeleide functie op. Laat duidelijk zien hoe je eraan komt.

b De lijn met vergelijking $y = -2x + 8$ raakt de grafiek bij $x = 4$.
Laat zien dat de helling van de grafiek bij $x = 4$ gelijk is aan de helling van de raaklijn.

Verwerken

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 4x$.

a Bereken het hellingsgetal van de grafiek van f voor $x = 1$ met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[1,1+h]$. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

b Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van f.

c Bereken met behulp van $f'(x)$ nogmaals de hellingswaarde voor $x = 1$.
Ga na dat je dezelfde uitkomst krijgt als bij a.

d Voor welke waarde van x heeft de grafiek van f' een nulpunt?
Welke betekenis heeft dit punt voor de grafiek van f?

e Welke nulpunten heeft f?
Bereken de helling van de grafiek van f in haar nulpunten.

f De grafiek van f heeft precies één punt waarin de helling 2 is. Bereken de coördinaten van dit punt.

Opgave 7

Een constante functie heeft als voorschrift $f(x) = c$.

Toon aan dat de afgeleide van een constante functie altijd de waarde 0 heeft.

Opgave 8

Een autofabrikant maakt als enige een kleine stadsauto. Voor de totale opbrengst van de verkoop van die auto's geldt: $TO = 900q - 60q^2$ waarin TO wordt uitgedrukt in duizenden euro en q de geplande productieomvang in honderdtallen per jaar voorstelt. Er wordt van uitgegaan dat alle geproduceerde auto's ook worden verkocht.

a Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van deze opbrengstfunctie.

b Welke betekenis heeft $TO'(q)$ voor de opbrengstfunctie?

c Bereken $TO'(4)$.

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}1x^2 + 6x$ op het interval $[0{,}80]$.

a Stel een formule op voor de afgeleide f'.

b Stel een formule op voor de raaklijn aan de grafiek van f in het rechter nulpunt.

Toepassen

Opgave 10: Vrije val

Voor een lichaam in vrije val (bijvoorbeeld een parachutespringer voordat hij zijn valscherm opent) geldt bij benadering $s(t) = 4{,}9t^2$, waarin s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconden is.

a Bereken de gemiddelde snelheid gedurende de eerste tien seconden vrije val.

b De snelheid na tien seconden vrije val is groter dan de gemiddelde snelheid over de eerste tien seconden. Laat dit door middel van een berekening zien.

c Stel een formule op voor de snelheid v als functie van t door het interval $[t, t + h]$ te gebruiken.

d Na hoeveel seconden vrije val beweegt het lichaam met een snelheid van 120 km/h?

Opgave 11: Afbraak van giftige stof in water

De hoeveelheid van een bepaalde giftige stof in het water van een meertje wordt minder: de stof breekt op natuurlijke wijze af. Voor die hoeveelheid geldt $H(t) = 20 \cdot 0{,}8^t$ waarin H de hoeveelheid in milligram per liter is en t de tijd in dagen, die is verstreken sinds de stof in het water terechtkwam.

a Hoeveel gram per liter is er gemiddeld in de eerste vier dagen verdwenen?

b De afbreeksnelheid van deze giftige stof is op $t = 0$ hoger dan op $t = 4$. Bepaal beide afbreeksnelheden met de grafische rekenmachine en leg uit waarom ze verschillen.

c Je zou de afbreeksnelheid ook moeten kunnen berekenen met behulp van een differentiequotiënt.
Daarbij doet zich echter een probleem voor. Welk probleem?

Testen

Opgave 12

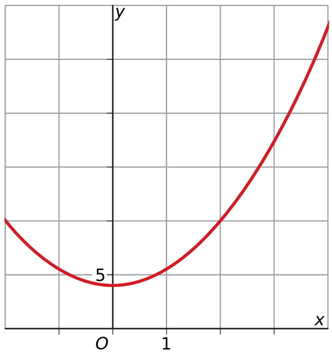
Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 1{,}5x^2 + 4$ op het interval $[-2{,}4]$.

a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op dit interval.

b Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide $f'(x)$.

c Bereken: $\left[\frac{\text{d}y}{\text{d}x}\right]_{x=2}$.

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.



Figuur 1.8

Opgave 13

De kosten K (euro) voor de productie van q liter van een bepaalde chemische stof bedragen $K(q) = 0{,}1q^2 + 0{,}7q + 12$.

a Met behulp van het differentiequotiënt over het interval $[q, q + h]$ kun je een formule opstellen voor $K'(q)$. Stel die formule op. Laat duidelijk zien hoe je te werk gaat.

b Hoe kun je aan de gevonden afgeleide zien dat de kosten blijven stijgen bij toenemende q?

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het bepalen van een differentiaalquotiënt.

- **Veranderingen, differentiëren en de TI84**
- **Veranderingen, differentiëren en de TInspire**
- **Veranderingen, differentiëren en de Casio**
- **Veranderingen, differentiëren en de HPprime**
- **Veranderingen, differentiëren en de NumWorks**

1.2 Differentiëren

Inleiding

Je hebt gezien dat bij een functie vaak een afgeleide (functie) is op te stellen. Die afgeleide zegt iets over de veranderingen van de grafiek van de functie. En dus over de helling van die functie.
Het differentiëren is een handige techniek om afgeleiden te vinden.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van een functie bepalen met behulp van differentieerregels;
- de hellingwaarde bepalen met de afgeleide;
- bepalen waar de grafiek een bepaalde hellingwaarde heeft.

Voorkennis

- met behulp van een differentiequotiënt de afgeleide (of hellingsfunctie) van een functie bepalen;
- een hellingsfunctie gebruiken om de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek op te stellen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

In de applet zie je (rood) de grafiek van functies f van de vorm $f(x) = a \cdot x^p + b$.
In blauw zie je de grafiek van de bijbehorende hellingsfunctie, de afgeleide.

Stel je in $a = 1$, $b = 0$ en $p = 2$ dan heb je de grafiek van $f(x) = x^2$.

a Ga na, dat dan de gevonden hellingsgrafiek overeen komt met de grafiek van $y = 2x$.
Controleer dat je deze afgeleide ook krijgt door het differentiaalquotiënt op $[x, x+h]$ te berekenen.

b Bekijk ook andere kwadratische functies van de vorm $f(x) = ax^2 + b$. Probeer vooraf te bedenken welk voorschrift bij de hellingsfunctie zou moeten passen. En controleer dan of je gelijk hebt.
Doe hetzelfde voor derdegraadsfuncties van de vorm $f(x) = ax^3 + b$.
En voor functies van de vorm $f(x) = ax^4 + b$ en $f(x) = ax^5 + b$.
Werk bijvoorbeeld in tweetallen en bedenk een manier om de afgeleide te vinden zonder met differentiequotiënten te werken.

Uitleg

Gegeven is de functie $f(x) = a \cdot x^2$. Op het interval $[x, x+h]$ kan het differentiequotiënt bepaald worden.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \frac{2axh + ah^2}{h} = 2ax + ah$

Als h naar 0 nadert, blijft er alleen $2ax$ over. Dit is de afgeleide van f, dus $f'(x) = 2ax$.

De afgeleide van $f(x) = ax^2$ is $f'(x) = 2ax$.
Net zo: de afgeleide van $g(x) = ax^3$ is $g'(x) = 3ax^2$.

In het algemeen is van $f(x) = ax^n$ de afgeleide $f'(x) = nax^{n-1}$ voor elke waarde van a.
Deze regel kun je gebruiken om een afgeleide te bepalen, dat heet differentiëren. Deze specifieke regel heet de machtsregel.

Als je functies bij elkaar optelt, bepaal je de afgeleide door de afgeleiden apart te bepalen en ze dan weer bij elkaar op te tellen. Dit heet de somregel.
Gegeven is bijvoorbeeld de functie: $f(x) = x^3 + 5x^2 - 25x + 10$.
Deze functie kun je (in gedachten) opdelen in vier opgetelde functies:
$f_1(x) = 1x^3$, $f_2(x) = 5x^2$, $f_3(x) = \text{-}25x^1$ en $f_4(x) = 10x^0$.
Bepaal de afgeleide van deze afzonderlijke functies en tel ze bij elkaar op:
$f'(x) = 3 \cdot 1x^{3-1} + 2 \cdot 5x^{2-1} + 1 \cdot \text{-}25x^{1-1} + 0 \cdot 10^{0-1} = 3x^2 + 6x - 25$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met behulp van differentiëren de afgeleide van een functie kunt bepalen. Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

- **a** $f(x) = 12x^5$
- **b** $g(x) = 12x^5 + 20$
- **c** $h(x) = 12x^5 + 20x^3 + 17$
- **d** $k(x) = 12x^5 + 20x^3 + 5x^2 - 10x + 15$

Opgave 2

Een lineaire functie heeft de vorm $f(x) = ax + b$.

- **a** Laat met behulp van een differentiequotiënt zien dat dan $f'(x) = a$.
- **b** Laat zien, dat dit ook uit de machtsregel voor differentiëren volgt.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De afgeleide van een functie $y = f(x)$ kun je bepalen door h naar 0 te laten naderen in het differentiequotiënt:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Voor veel soorten functies zijn hieruit algemene regels af te leiden waarmee je de afgeleide op een eenvoudiger manier kunt vinden. Dergelijke regels heten **differentieerregels** en het toepassen ervan noem je **differentiëren**.

- **Machtsregel**
  De afgeleide van de machtsfunctie $f(x) = cx^n$ is $f'(x) = ncx^{n-1}$ voor elke waarde van c en voor gehele positieve waarden van n.
- **Constanteregel**
  De afgeleide van een constante (functie) is 0: als $f(x) = c$, dan is $f'(x) = 0$.
- **Somregel**
  De afgeleide van de som van twee functies is de som van de afgeleiden van die functies: als $f(x) = u(x) + v(x)$ dan is $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. Deze regel geldt ook bij een verschil van twee functies.

Voorbeeld 1

Bepaal de afgeleide van de functie $f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x - 100$.

Antwoord

Schrijf eerst de functie als een som (verschil) van machtsfuncties en constante functies:

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x^1 - 100$

Pas nu de differentieerregels toe. De afgeleide is dan:

$f'(x) = 3x^{3-1} + 4 \cdot 2x^{2-1} - 12 \cdot 1x^{1-1} - 0 = 3x^2 + 8x - 12$

Opgave 3

Bepaal de afgeleide van de volgende functies door te differentiëren met behulp van de differentieerregels.

a $f(x) = 8x^3 - 50x + 70$

b $f(x) = 10 + 3x - 9x^2 - 12x^4$

c $f(x) = \frac{1}{3}x^6 - 5x^2$

d $f(x) = 100 - 25x - x^4$

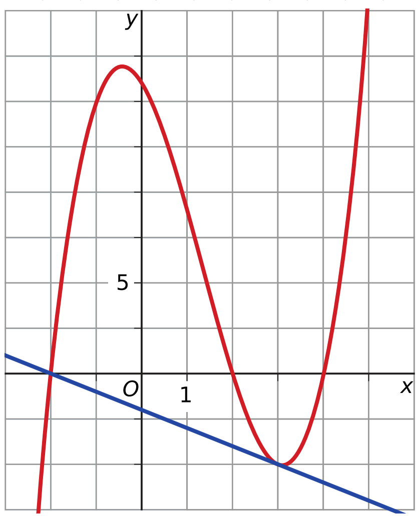
Voorbeeld 2

Stel door middel van differentiëren de vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van de functie $g(x) = \left(x^2 - 4\right)(x - 4)$ voor $x = 3$.

Antwoord

Voor de vergelijking van de raaklijn heb je het hellingsgetal $g'(3)$ nodig.
Deze functie is geschreven als het product van twee functies en niet als som. Schrijf het functievoorschrift eerst als een som (verschil) van machtsfuncties en constante functies. Haakjes wegwerken geeft:
$g(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

De afgeleide is:
$g'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 4x^1 - 1 \cdot 4x^0 + 0 = 3x^2 - 8x - 4$



Figuur 2.2

De vergelijking van de raaklijn heeft de vorm $y = ax + b$.

$g'(3) = -1$, dus de vergelijking is $y = -x + b$.

Omdat $g(3) = -5$ gaat de raaklijn door het punt $(3, -5)$.
Dat vul je in de vergelijking in: $-5 = -3 + b$ geeft $b = -2$.

De vergelijking van de raaklijn is: $y = -x - 2$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $y = (x^2 - 4)(x - 6)$.

a Een functievoorschrift in deze vorm is handig als je de nulpunten van de functie wilt bepalen. Bereken die nulpunten.

b Als je met hellingsgetallen van deze functie wilt werken moet je eerst de haakjes wegwerken. Bepaal de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ van deze functie.

Met behulp van deze afgeleide kun je de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek opstellen. In het voorbeeld kun je nog eens zien hoe dat gaat.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van deze functie voor $x = 2$. Plot beide vervolgens ter controle op de grafische rekenmachine.

Voorbeeld 3

De kosten K (euro) bij de productie van q eenheden (in honderdtallen) van een bepaald product bedragen:
$K(q) = 0{,}5q^3 - 4{,}5q^2 + 40q + 80$
Er zijn twee waarden van q waarin de kosten stijgen met een snelheid van € 40,00 per stuk. Welke twee waarden van q zijn dat?

Antwoord

De snelheid waarmee de functiewaarden stijgen afhankelijk van q is ongeveer $K'(q)$.
Nu is: $K'(q) = 1{,}5q^2 - 9q + 40$.
Er geldt $K'(q) = 40$ als:

$$\begin{aligned} 1{,}5q^2 - 9q + 40 &= 40 \\ 1{,}5q^2 - 9q &= 0 \\ 1{,}5q(q - 6) &= 0 \\ q &= 0 \vee q = 6 \end{aligned}$$

De oplossingen van deze vergelijking zijn $q = 0$ en $q = 6$. Dus bij een productie van 0 en 600 stuks stijgen de kosten met een snelheid van € 40,00 per stuk.

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je differentiëren kunt toepassen in de economie. Neem voor de kostenfunctie $K(q) = 0{,}1q^3 - q^2 + 4q$ met K in euro.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Bereken de snelheid waarmee de kosten stijgen voor $q = 0$.

c Voor welke waarde van q stijgen de kosten met een snelheid van € 4,00 per eenheid?

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 10x - 35$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Bereken het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$. Controleer je antwoord met de dy/dx-functie op de grafische rekenmachine.

c Er zijn punten op de grafiek van f waarin de helling de waarde 10 heeft. Bereken de coördinaten van die punten. Controleer daarna of je de juiste punten hebt gevonden met de dy/dx-functie op de grafische rekenmachine.

Verwerken

Opgave 7

Bepaal telkens de afgeleide van de gegeven functie. Bepaal ook het hellingsgetal van de grafiek voor $x = 1$ of $t = 1$ en controleer zo mogelijk je antwoord op de grafische rekenmachine.

a $f(x) = x^3 - 4x$

b $g(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 12x - 35$

c $s(t) = 60t - 4{,}9t^2$

d $H(t) = 2\left(t^2 - 4\right)$

e $V(x) = 5 - (x-3)^2$

f $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

g $TW(q) = 0{,}5q^3 - 6q^2 - 25q + 112$

h $K(x) = \left(3x^2 - 2a\right)(ax - 1)$

Opgave 8

Bepaal van elk van de volgende functies de afgeleide. Bereken vervolgens de punten van de grafiek waar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn de waarde 0 heeft. Rond je antwoord indien nodig af op één decimaal. Controleer je antwoorden op de grafische rekenmachine.

a $f(x) = x^4 - 8x^2$

b $TW(q) = -q^3 + 3q^2 + 3q + 6$

c $v(t) = t(t-1)^2$

d $TW(p) = 40p - 0{,}02p^2$

Opgave 9

y is een functie van x waarvoor geldt: $y = x^3 - 25{,}5x^2 + 180x + 120$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

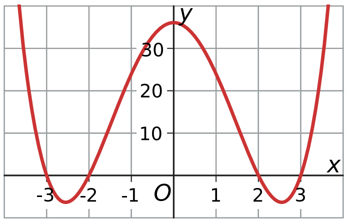
b Deze afgeleide heeft twee nulwaarden. Welke betekenis hebben die nulwaarden voor de functie?

c Bereken de nulwaarden van de afgeleide y'.

d Voor welke waarden van x is de functie dalend?
Wat betekent dit voor $y'(x)$?

Opgave 10

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.



Figuur 2.3

a Laat zien hoe je uit het functievoorschrift de nulpunten van de grafiek van f kunt afleiden.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken het snijpunt van de raaklijnen aan de grafiek van f voor $x = -2$ en voor $x = 2$.

d Los op: $f'(x) = 0$.

e Wat betekent het antwoord van d voor de grafiek van f?

Toepassen

Opgave 11: De baan van een kogel

Een voorwerp wordt afgeschoten met een bepaalde beginsnelheid en onder een bepaalde hoek. Wanneer je de luchtweerstand verwaarloost, is zijn kogelbaan parabolisch. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de grafiek van de functie $h(x) = 1{,}5 - 0{,}01(x - 10)^2$. Hierin is h de hoogte in meter van het afgeschoten voorwerp boven de grond en x de afstand in meter over de grond tot recht onder het afgeschoten voorwerp.

a Op welke hoogte werd het voorwerp afgeschoten?

b Bereken $h'(0)$.

c Wat betekent dit getal voor de kogelbaan?

d Bereken het punt van de kogelbaan waarin $h'(x) = 0$. Welke betekenis heeft dit punt?

e In het hoogste punt van de kogelbaan is de afgeleide nul. Toch beweegt de kogel daar met een zekere snelheid. Kun je dit verklaren?

Opgave 12: Gemiddelde totale kosten

Voor de productiekosten van een bepaald artikel geldt: $TK = 1200 + 0{,}2q^2$. Hierin is q het aantal geproduceerde eenheden van dat artikel en stelt TK de totale kosten in euro voor. De productiekosten per eenheid worden gegeven door $GTK = \frac{TK}{q}$. Je noemt dit wel de gemiddelde totale kosten.

a Druk de gemiddelde totale kosten uit in q.

b Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van GTK bekijken. Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van GTK? Welke economische betekenis heeft deze asymptoot?

c Je kunt bij deze functie (nog) geen afgeleide bepalen. Maar je kunt er wel een (benadering van de) hellingsgrafiek bij tekenen met de grafische rekenmachine. Teken die hellingsgrafiek en bepaal met behulp daarvan bij welke productie de gemiddelde totale kosten zo laag mogelijk zijn.

d Welke waarde benadert de helling van de grafiek van GTK als de productie heel erg groot is? En welke betekenis heeft dat voor de productiekosten per eenheid?

Testen

Opgave 13

Bepaal bij elk van deze functies de afgeleide. Soms moet je eerst het functievoorschrift nog bewerken.

a $f(x) = x^6 + 8x - 12$

b $f(x) = -1{,}5x^3 + 4x$

c $f(x) = x\left(x^2 - 2x\right)$

d $f(x) = (2x + 1)^2$

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$.

a Bereken het hellingsgetal van deze functie in het punt $(0,0)$ met behulp van de afgeleide.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(0,0)$.

c Er zijn twee punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0. Welke twee punten zijn dat?

d De grafiek van f heeft in een bepaald punt een grootste hellingsgetal. In welk punt is dat?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de machtsregel en de somregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.3 Extremen berekenen

Inleiding

Als je een functievoorschrift hebt, kun je met de grafische rekenmachine een bijpassende grafiek tekenen. Je kunt dan de extreme waarden door de machine laten berekenen. Nadeel daarvan is dat je vaak niet zeker weet of je alle extremen in beeld hebt. Verder kan je rekenmachine ze alleen maar benaderen. Met behulp van de afgeleide van de functie kun je extremen echt berekenen: het zijn de punten van de grafiek waarin de afgeleide overgaat van positief in negatief of omgekeerd.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- extremen berekenen met behulp van de afgeleide van een functie;
- het berekenen van extremen toepassen in praktijksituaties.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van de grafische rekenmachine en met behulp van hellingsgrafieken.

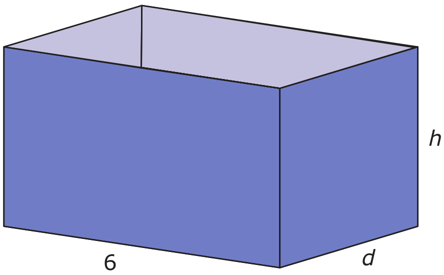
Verkennen

Opgave V1

Iemand bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte en de hoogte van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.)

Probeer dit probleem zelf op te lossen. Denk bijvoorbeeld aan het kiezen van geschikte variabelen.



Figuur 3.2

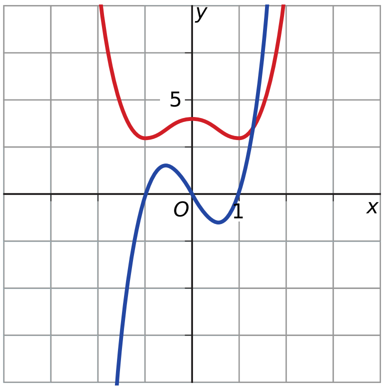
Uitleg

Bekijk de applet.

In een maximum van een grafiek gaat de grafiek over van stijgen naar dalen. De helling gaat op dat punt over van positief naar negatief. De grafiek van de afgeleide is de hellingsgrafiek en gaat op hetzelfde punt over van positief naar negatief.

Bekijk de grafiek (rood) van de functie $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$. De andere grafiek (blauw) is de grafiek van de afgeleide f', de hellingsgrafiek. Je ziet dat:

- de grafiek van f een minimum heeft als de afgeleide overgaat van negatief naar positief (voor $x = -1$ en voor $x = 1$);
- de grafiek van f een maximum heeft als de afgeleide overgaat van positief naar negatief (voor $x = 0$).

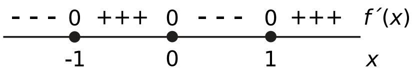


Figuur 3.3

Voor het bepalen van extremen gebruik je de waarden van x waar de afgeleide overgaat van positief in negatief of andersom. Dit is bij een nulpunt van de afgeleide.
Als de afgeleide 0 is, heeft de grafiek van de functie een horizontale raaklijn.

De extremen van de functie $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ bereken je dus zo:

- Bereken eerst voor welke x-waarden de afgeleide 0 is:
  $f'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 4x = 0$.
  Hieruit vind je: $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$
- Maak een tekenschema van f' of bekijk de grafiek van f. Controleer of de afgeleide van teken wisselt.
- Bereken de extremen:
  minimum $f(-1) = 3$, maximum $f(0) = 4$ en minimum $f(1) = 3$.



Figuur 3.4

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je bij een functie de extreme waarden berekent.

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Bereken de nulpunten van de afgeleide.

c Maak een tekenschema van f' of bekijk de grafiek van f en bepaal de extremen van f.

Theorie en voorbeelden

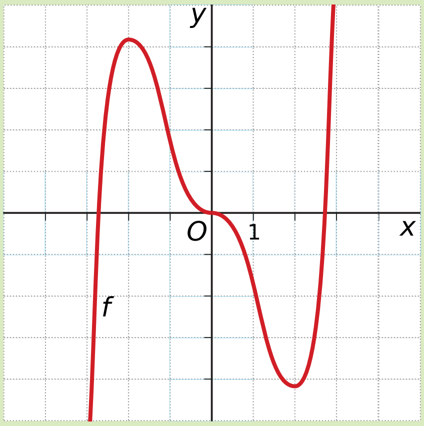
Om te onthouden

Bekijk de applet.

Extreme waarden berekenen gaat bij een functie, waarvan $f(x)$ het functievoorschrift is, als volgt:

- Bepaal met behulp van differentiëren de afgeleide en los $f'(x) = 0$ op. Houd rekening met het domein van de functie.
- Bekijk de grafiek van de afgeleide of maak een **tekenschema** van de afgeleide.
- Gaat $f'(x)$ voor $x = a$ over van negatief in positief (en hoort a tot het domein van de functie), dan heeft f een minimum van $f(a)$.
- Gaat $f'(x)$ voor $x = b$ over van positief in negatief (en hoort b tot het domein van de functie), dan heeft f een maximum van $f(b)$.

Als de afgeleide niet van teken wisselt, dan is er geen sprake van een extreme waarde.



+ + + + 0 - - - 0 - - - 0 + + $f'(x)$

-2 0 2 x

Figuur 3.5

Voorbeeld 1

Bereken de extremen van de functie: $f(x) = 25x^4 - 800000x - 12345$.

Antwoord

Dit is een functie die je niet zo makkelijk in beeld krijgt. Je werkt daarom met een tekenschema.

$f'(x) = 100x^3 - 800000$

$f'(x) = 100x^3 - 800000 = 0$ oplossen geeft: $x = \sqrt[3]{8000} = 20$.

Maak een tekenschema van de afgeleide. Door zowel links als rechts van $x = 20$ een getal te kiezen en dit in de afgeleide in te vullen zie je of de afgeleide daar positief of negatief is.
Kies bijvoorbeeld $x = 0$ en $x = 25$.

$f'(0) = -800000$ en negatief en $f'(25) = 762500$ en positief.

− − − − − − − − 0 + + + + + f'

dalend 20 stijgend f x

Figuur 3.6

Aan het tekenschema is te zien dat er inderdaad een extreme waarde is voor $x = 20$.
In dit geval is het een minimum: $f(20) = -12012345$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}1x^3 - 120x$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Bereken de nulpunten van de afgeleide.

c Bereken de extremen van f.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3$.

a Bereken de waarden van x waarvoor $f'(x) = 0$.

b Deze functie heeft voor $x = 0$ een horizontale raaklijn. Heeft de functie ook een extreme waarde voor $x = 0$?

c Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{x}$. Wat is er aan de hand in $x = 0$?

A. De functie en de afgeleide hebben er beide de waarde 0, maar er is geen extreme waarde.
B. De functie en de afgeleide hebben er beide de waarde 0 en er is een minimum van $f(0) = 0$.
C. Alleen de functie heeft er de waarde 0 en $f'(0)$ is onbekend. Er is geen extreme waarde.
D. Alleen de functie heeft er de waarde 0 en $f'(0)$ is onbekend. Er is een minimum van $f(0) = 0$.

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100x^2$ en $g(x) = x^2 \cdot (x - 10)^2$.

a Bereken algebraïsch de snijpunten van beide grafieken.

b Bereken met behulp van differentiëren de extremen van g.

c Door welk getal moet je het getal 100 in het functievoorschrift van f vervangen, zodat de grafiek door het punt gaat waarin g een maximum heeft?

Voorbeeld 2

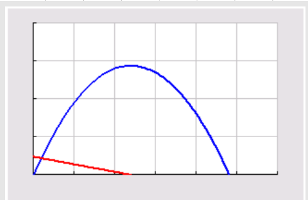
De opbrengst R bij de verkoop van een product hangt af van het aantal producten q dat er verkocht wordt. Niet altijd neemt de opbrengst toe als je meer verkoopt, want soms moet je om meer te kunnen verkopen de prijs per stuk laten zakken.

Voor dit product kan de opbrengst onder bepaalde economische omstandigheden worden gegeven door: $R = -q^2 + 24q$, waarin R in honderden euro en q in duizenden eenheden.

Bij welk aantal verkochte producten is de opbrengst maximaal?

Antwoord

Bekijk de grafiek van R en de hellingsgrafiek van R. Het hellingsgetal van de raaklijn in een top is 0. Dit zie je ook terug in de grafiek; je ziet dat waar de hellingsgrafiek de horizontale as snijdt, de grafiek van R een maximum heeft. In het voorbeeld is dit voor $q = 12$ het geval. Deze waarde kun je ook met behulp van de afgeleide van R berekenen.


Figuur 3.7

$R'(q) = -2q + 24$

Er moet gelden $R(q) = 0$, dus $-2q + 24 = 0$.

Dit geeft $q = 12$.

Conclusie: bij een verkoop van 12000 eenheden is de opbrengst maximaal.

Opgave 5

Een bedrijf maakt gebruik van een opbrengstformule $R = -2q^2 + 49q$, waarbij R de opbrengst in honderden euro is en q het aantal gefabriceerde producten in honderdtallen.

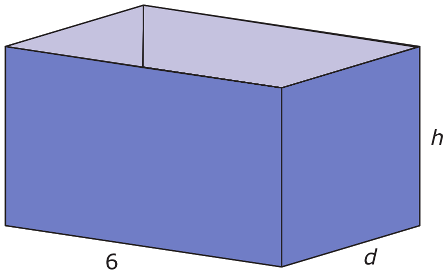
a Geef de afgeleide van $R(q)$.

b Bij welke productie is de opbrengst maximaal?

Voorbeeld 3

Alex bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte d en de hoogte h van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.)



Figuur 3.8

Antwoord

Noem de diepte d en de hoogte h, beide in dm.
Vanwege de inhoud van 1 m^3 = 1000 dm^3, geldt: $1000 = 6 \cdot d \cdot h$ en hieruit volgt $h = \frac{1000}{6d}$.

Voor de totale oppervlakte A in m^2 geldt: $A = 6d + 12h + 2dh$.
Als je nu de eerder gevonden uitdrukking invult in de oppervlakteformule, vind je

$$A = 6d + 12 \cdot \left(\frac{1000}{6d}\right) + 2d \cdot \left(\frac{1000}{6d}\right) = 6d + \frac{12000}{6d} + \frac{2000d}{6d} = 6d + \frac{2000}{d} + \frac{1000}{3}$$

Van deze functie van d moet je het minimum bepalen. Omdat je een functie van deze vorm nog niet kunt differentiëren, doe je dat met behulp van de grafische rekenmachine. Ga na dat je vindt: $d \approx 18{,}26$. De bijbehorende waarde voor de hoogte kun je dan ook berekenen.

Opgave 6

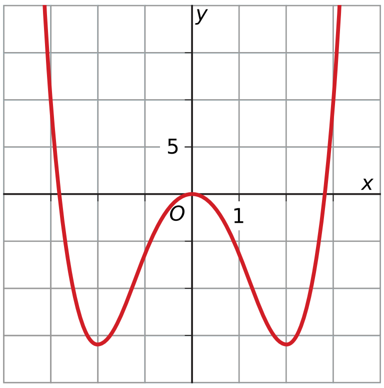
Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Licht toe dat de eerste formule voor de oppervlakte van de opbergbak juist is.

b Controleer met de grafische rekenmachine dat de minimale oppervlakte inderdaad bij $d \approx 18{,}26$ ligt.

Verwerken

Opgave 7



Figuur 3.9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 8x^2$.

Bereken met behulp van differentiëren alle extremen van deze functie.

Opgave 8

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4000 - 10x^2$ en $g(x) = (x - 10)(x^2 - 400)$.

a Om de grafieken van beide functies op de grafische rekenmachine in beeld te krijgen moet je de instellingen aanpassen. Bereken algebraïsch eerst de nulpunten van beide functies.

b Nu weet je welke waarden voor x je het beste kunt instellen. Bereken de extremen van beide functies. Geef je antwoorden zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

c Je kunt nu de grafieken mooi in beeld krijgen. Los op: $f(x) \geq g(x)$

Opgave 9

Een fabrikant verkoopt zelfrijzend bakmeel voor € 2,25 per kilogram. Voor de kosten TK voor productie en opslag geldt:

q (honderd kg)	1	2	3	4	5	6
TK (euro)	75	100	125	200	400	800

Tabel 3.1

a Hoeveel stijgen de kosten gemiddeld per kilogram als de productie toeneemt van 400 naar 500 kg?

b Voor de kosten heeft de fabrikant de formule $TK = 10q^3 - 60q^2 + 130q$ laten opstellen.
Ga na dat deze formule past bij de gegevens in de tabel.

c Stel een formule op voor de winst TW als functie van q.

d Bepaal met behulp van differentiëren de maximale winst.

Opgave 10

De winst W van een bedrijf wordt gegeven door de formule: $W = -0{,}25q^3 + 9q^2 - 33q - 50$.
Hierbij is q de productie in duizenden en W de winst in honderden euro.

Bepaal met behulp van differentiëren bij welke productie de winst maximaal is.
Geef ook de maximale winst.

Opgave 11

In een kaasmakerij ligt een voorraad van 600 kg kaas. De bedrijfsleider wil die voor een zo hoog mogelijke totale opbrengst verkopen. Er zijn twee mogelijkheden:

- de kaas ineens verkopen voor € 10,00 per kilo, de partij brengt dan € 6000,00 op;
- de kaas een tijdje laten indrogen; deze verliest dan aan gewicht, maar wint aan smaak, waardoor de prijs met € 0,25 per procent gewichtsvermindering toeneemt.

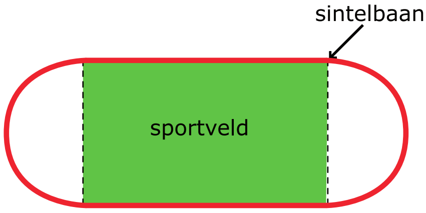
a Bereken de opbrengst van de partij kaas bij 5 procent indrogen.

b Noem het indrogingspercentage p. Stel een formule op voor de totale opbrengst van de partij kaas als functie van p.

c Bereken met behulp van differentiëren het gunstigste indrogingspercentage.

Toepassen

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. Het sportveld is net zo lang als de rechte stukken. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.



Figuur 3.10

Je kunt een formule opstellen voor de oppervlakte van dit sportveld als functie van de lengte of de breedte ervan of als functie van de straal van de cirkel. Als je dat doet kun je **differentiëren toepassen om extremen te bepalen**.

Opgave 12

Bekijk het probleem van de afmetingen bepalen van het zo groot mogelijke rechthoekige sportveld binnen een atletiekbaan.

a Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.

Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.

b Noem de oppervlakte van het sportveld A, de lengte ervan l en de straal van de cirkel r. Welke formules kun je nu opstellen?

c Stel een formule op voor $A(r)$.

d Voor welke waarde van r is $A(r)$ maximaal? Maak gebruik van differentiëren.
Geef ook de afmetingen van het sportveld. Rond je antwoorden af op één decimaal.

Opgave 13

Een fabrikant verpakt zijn hagelslag al jaren in doosjes met een vierkante bodem van 8 bij 8 cm. Ze hebben de vorm van een balk met een hoogte van 21 cm.
De fabrikant vraag zich af of hij de inhoud van het doosje kan vergroten door de afmetingen anders te kiezen, zonder meer karton te gebruiken. Het gaat erom de inhoud zo groot mogelijk te maken bij een gelijkblijvende oppervlakte. Het grondvlak blijft vierkant. Welke afmetingen moet de fabrikant kiezen?

a Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.

Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.

b Noem de zijde (in cm) van het grondvlak x en de hoogte h.

Welke twee formules kun je opstellen?

c Hoeveel karton heeft de fabrikant nodig voor zijn huidige doosjes?

Verwerk het antwoord in de oppervlakteformule en isoleer h uit de verkregen vergelijking.

d Stel een formule op voor de inhoud van de doosjes als functie van de zijde x.

e Voor welke waarde van x is de inhoud maximaal? Maak gebruik van differentiëren.
Rond je antwoord op drie decimalen.

f Bepaal de afmetingen van de doosjes met een maximale inhoud in millimeter nauwkeurig.

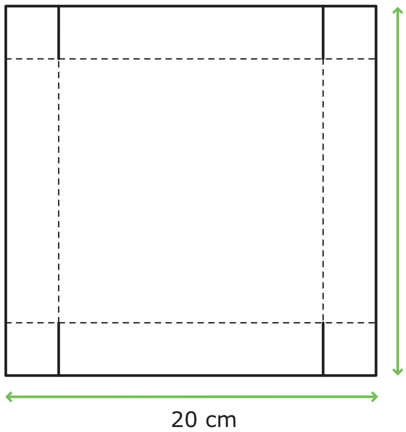
Opgave 14

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

a Stel dat je de zijde van het ingeknipte vierkantje x noemt. Welke functie $I(x)$ kun je dan opstellen voor de inhoud van dit bakje?

b Welke waarden kan x allemaal aannemen?

c Bereken de maximale inhoud van het bakje.



Figuur 3.11

Testen

Opgave 15

Bereken bij deze functies de extremen met behulp van een teken-overzicht van de afgeleide.

a $f(x) = -x^4 + 2x^3$

b $y = x^2(x - 6)$

Opgave 16

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^5 - 80000x^2 + 2557$.

a Bepaal de extreme waarden van deze functie met behulp van de grafische rekenmachine.

b Bereken de extremen met behulp van differentiëren.

c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = 0$?

1.4 Buigpunten

Inleiding

Zodra de helling van de grafiek overgaat van toenemende stijging (of daling) naar afnemende stijging (of daling), of omgekeerd, spreek je van een buigpunt. In zo'n buigpunt heeft de helling een (lokaal) maximum of minimum. Je vindt buigpunten dus door naar de extremen van de afgeleide te zoeken.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de extremen van een afgeleide bepalen met behulp van de tweede afgeleide;
- het berekenen van buigpunten toepassen in praktijksituaties.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van differentiëren.

Verkennen

Opgave V1

Bij de productie van grote aantallen van een artikel hangen de kosten af van de productieomvang q. Bij een toenemende productieomvang stijgen soms in het begin de kosten steeds langzamer, terwijl ze bij grotere waarden van q weer sneller gaan stijgen (bijvoorbeeld omdat er vanaf een zekere productieomvang duurdere apparatuur en/of duurdere arbeidskrachten nodig zijn).

De kostenfunctie $TK = 0{,}1q^3 - q^2 + 4q$ beschrijft zo'n situatie.

De afgeleide van deze functie wordt in de economie de marginale kostenfunctie MK genoemd.

a Stel een formule op voor MK.

b Hoe kun je uit MK het beschreven verloop van TK afleiden?

c Waarom zou je het punt waar MK minimaal is een buigpunt noemen?

Uitleg

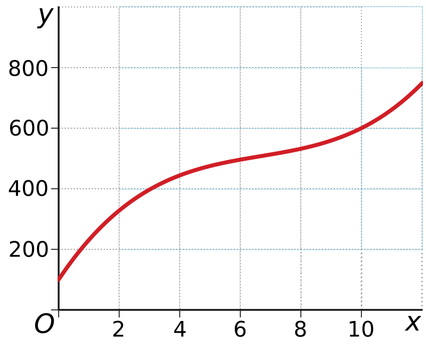
Bekijk de applet.

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 20x^2 + 150x + 100$.
De functiewaarden stijgen voortdurend:

- ongeveer tot $x = 7$ is er afnemende stijging;
- ongeveer vanaf $x = 7$ is er toenemende stijging.

Het punt waarin de helling overgaat van toenemend naar afnemend (of omgekeerd) heet een buigpunt van de grafiek.

Om dit buigpunt te schatten, kijk je naar het verloop van de helling van de grafiek. Die helling neemt eerst af en daarna weer toe. Zij heeft een minimale waarde bij het buigpunt. Om het buigpunt exact te berekenen zoek je een minimum van de afgeleide.



Figuur 4.2

De afgeleide is: $f'(x) = 3x^2 - 40x + 150$.
Een minimum van deze functie vind je door differentiëren. Bepaal de afgeleide van f', de afgeleide van de afgeleide dus. Je spreekt dan van de tweede afgeleide die je aangeeft met f''.
Hier is $f''(x) = 6x - 40$.

Los eerst op: $f''(x) = 6x - 40 = 0$.

Dit geeft $x = \frac{40}{6} \approx 6{,}67$.
Maak eventueel een tekenschema van de tweede afgeleide.

De tweede afgeleide wisselt bij $x \approx 6{,}67$ van teken, er is een buigpunt met $f(6{,}67) \approx 507{,}41$.
Het buigpunt is $(6{,}67; 507{,}41)$.

Opgave 1

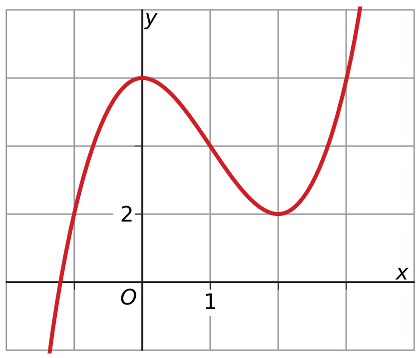
In de **Uitleg** zie je wat een buigpunt van een grafiek is en hoe je dit buigpunt kunt berekenen.

a Voer de berekening zelf uit en bepaal het buigpunt in breuken, dus zonder af te ronden.

b Is in dit buigpunt ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn 0? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

Bekijk de figuur met een deel van de grafiek van $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$.



Figuur 4.3

a Zolang $x < 1$ wordt de helling van de grafiek steeds kleiner. Wat betekent dit voor de afgeleide van de hellingsfunctie $f'(x)$?

A. Die is dan dalend.
B. Die is dan negatief.
C. Die heeft dan een minimum.

b Het punt $(1,4)$ van de grafiek van f noem je een buigpunt omdat de helling daar overgaat van dalend in stijgend. Wat weet je van de afgeleide in dit buigpunt? En van de afgeleide van de afgeleide?

A. De afgeleide is minimaal, de afgeleide van de afgeleide is 0.
B. De afgeleide is minimaal, de afgeleide van de afgeleide ook.
C. De afgeleide is negatief, de afgeleide van de afgeleide is 0.
D. De afgeleide is 0, de afgeleide van de afgeleide is minimaal.

c De afgeleide van de afgeleide noem je de tweede afgeleide van de gegeven functie. Met behulp van de tweede afgeleide kun je het buigpunt met de hand berekenen. Laat zien hoe dat gaat.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

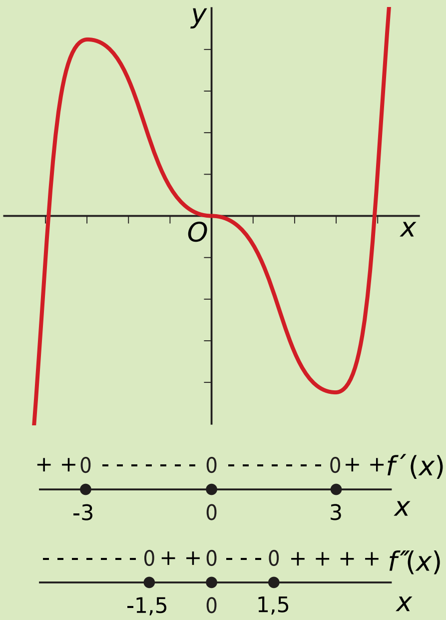
Bij toenemende stijging (daling) of afnemende stijging (daling) kijk je naar de veranderingen van de helling:

- Bij toenemende stijging wordt de helling steeds groter: f' stijgt. De afgeleide van f' is dan positief.
- Bij toenemende daling wordt de helling steeds kleiner: f' daalt. De afgeleide van f' is dan negatief.
- Bij afnemende stijging wordt de helling steeds kleiner: f' daalt. De afgeleide van f' is dan negatief.
- Bij afnemende daling wordt de helling steeds groter: f' stijgt. De afgeleide van f' is dan positief.

De afgeleide van f' heet de **tweede afgeleide** van f.

De tweede afgeleide noteer je als: f'' of $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ (spreek uit: ‘d twee y d x-kwadraat’).

Het punt waarin de helling overgaat van toenemend naar afnemend (of omgekeerd) heet een **buigpunt** van de grafiek.
Je vindt die buigpunten door naar de extremen van de afgeleide te zoeken. Dat doe je met behulp van de tweede afgeleide.



Figuur 4.4

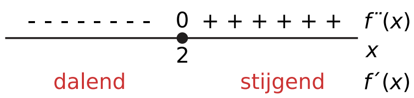
Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 2x + 3$.
Onderzoek of de grafiek van deze functie een buigpunt heeft.
Zo ja, bereken de coördinaten ervan.

Antwoord

Bepaal eerst de afgeleide: $f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 2$
Je vindt een buigpunt door de extremen van de afgeleide te bepalen.
Differentieer daarom deze afgeleide nog eens: $f''(x) = 3x - 6$.

Los op: $f''(x) = 3x - 6 = 0$.
Dit geeft $x = 2$.
Maak een tekenschema:



Figuur 4.5

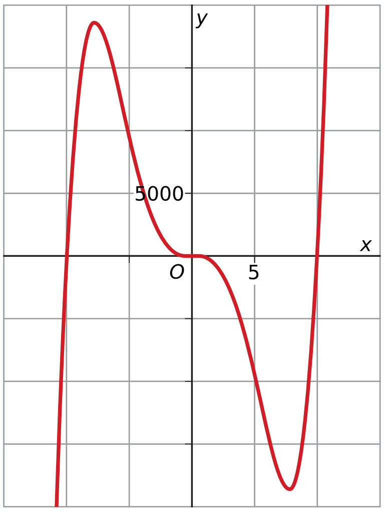
De tweede afgeleide wisselt bij $x = 2$ van teken, er is een buigpunt met $f(2) = -1$.
Het buigpunt is $(2, -1)$.

Opgave 3

Functies kunnen meerdere buigpunten hebben. Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3(x^2 - 100)$.

a Bereken met behulp van differentiëren de extremen van deze functie.

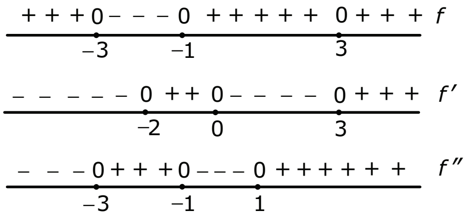
b Bereken met behulp van de tweede afgeleide de buigpunten van deze grafiek.



Figuur 4.6

Opgave 4

Van een functie zijn de tekenschema's van $f(x)$, $f'(x)$ en $f''(x)$ gegeven door de figuren.



Figuur 4.7

a Hoeveel buigpunten boven de x-as heeft de grafiek van f?

b Schets een mogelijke grafiek van f.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 10$.

a Bereken de buigpunten van f met de hand.

b Laat ook zien dat uit de functievoorschriften van de afgeleide en de tweede afgeleide volgt dat de grafiek van f op $\langle 0,1 \rangle$ toenemend dalend is.

Voorbeeld 2

Bij de productie van grote aantallen van een artikel hangen de kosten af van de productieomvang q. Bij een toenemende productieomvang stijgen soms in het begin de kosten steeds langzamer, terwijl ze bij grotere waarden van q weer sneller gaan stijgen (bijvoorbeeld omdat er vanaf een zekere productieomvang duurdere apparatuur en/of duurdere arbeidskrachten nodig zijn).

De kostenfunctie $TK = 0{,}1q^3 - q^2 + 4q$ beschrijft zo'n situatie.

De afgeleide van deze functie wordt in de economie de marginale kostenfunctie MK genoemd. Hoe kun je uit MK het beschreven verloop van TK afleiden?

Antwoord

$MK = 0{,}3q^2 - 2q + 4$

MK stelt de hellingsfunctie van TK voor. Als je daarvan de grafiek bekijkt, zie je dat $MK > 0$ en dat MK in het begin afneemt en later weer toeneemt.

Het minimum van MK bereken je door $MK' = TK'' = 0$ op te lossen. Je vindt $q = 3\frac{1}{3}$.

Tot $q = 3\frac{1}{3}$ is $MK > 0$ en MK dalend. Voor TK betekent dit een afnemende stijging.

Voorbij $q = 3\frac{1}{3}$ is $MK > 0$ en MK stijgend. Voor TK betekent dit een toenemende stijging.

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Laat zien dat de marginale kosten voor $q = 0$ positief zijn.

b Laat met een berekening zien voor welke waarde van q de marginale kosten minimaal zijn.
Welke economische betekenis heeft dit?

c Waarom betekent $TK' = MK > 0$ en $MK' < 0$ dat TK een afnemende stijging vertoont?

Opgave 7

Vaak is de opbrengst TO (euro) bij de productie van een artikel afhankelijk van de arbeidstijd a in uren per dag.
Een verband kan worden beschreven door de functie
$TO(a) = -\frac{1}{3}a^3 + 8a^2$.

a Bekijk de grafiek van TO. De opbrengst stijgt in het begin progressief (steeds sterker). Schat tot hoeveel arbeidstijd dat ongeveer zo is.

b Het antwoord op a kun je nauwkeurig berekenen met behulp van differentiëren. Laat zien hoe dat gaat.

c Hoeveel bedraagt de grootste opbrengststijging per extra arbeidsuur?

Verwerken

Opgave 8

Bepaal met behulp van differentiëren van de volgende functies alle buigpunten met de hand. Rond je antwoorden niet af.

a $f(x) = 0{,}5x^3 + 6x^2 - 90$

b $f(x) = 4x^2 - 0{,}5x^4$

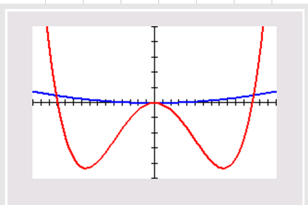
Opgave 9

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 0{,}25x^2(x^2 - 144)$.

a Bekijk hoe de grafieken van beide functies er op de grafische rekenmachine uit kunnen zien. Hoe moet je het venster dan instellen?

b Los op: $f(x) > g(x)$.

c Bereken de buigpunten van de grafiek van g. Rond je antwoorden niet af.



Figuur 4.8

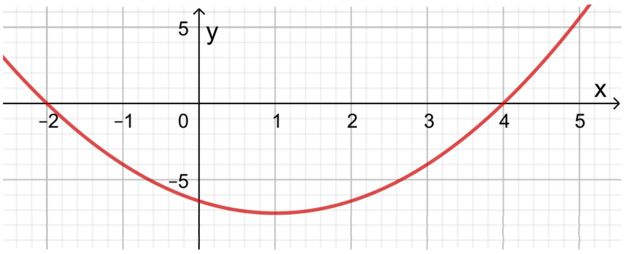
Opgave 10

Een ondernemer maakt een bepaald product waarop hij het monopolie heeft. Voor zijn productiekosten in honderden euro geldt de formule $TK = 0{,}5q^3 - 4q^2 + 11q + 4$ waarin q de geproduceerde hoeveelheid in honderden kilo's is.

a De snelheid waarmee de kosten stijgen is eerst afnemend, later toenemend. Er is een punt in de grafiek waarbij die snelheid van afnemend naar toenemend omslaat.
Bij welke productie zit het omslagpunt? Rond je antwoord af op gehele kilogrammen nauwkeurig.

b De hoeveelheid producten die hij aanbiedt aan zijn afnemers heeft invloed op de prijs. Er geldt: $p = 11 - q$ waarin p de prijs in honderden euro is. Ga ervan uit dat deze ondernemer zijn totale productie ook verkoopt. Bij welke productie is zijn winst maximaal? Licht het antwoord toe met behulp van differentiëren.

Opgave 11



Figuur 4.9

Bekijk de grafiek van de afgeleide van een functie, gemaakt in GeoGebra.

a Bij welke waarden van x heeft deze functie extremen?

b Bij welke waarden van x heeft de grafiek van deze functie een buigpunt?

c Heeft de raaklijn in het buigpunt een positieve of een negatieve richtingscoëfficiënt?

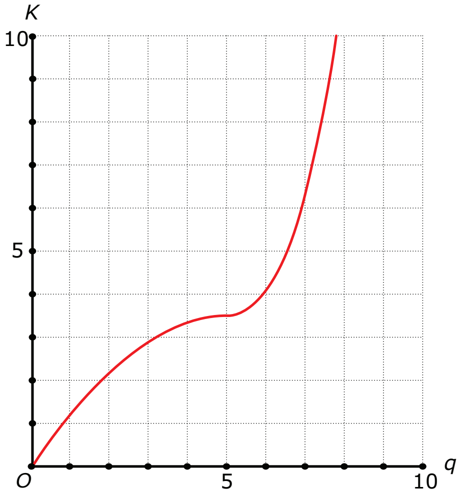
Toepassen

Opgave 12: Kurkentrekkers

In een bedrijf worden kurkentrekkers gefabriceerd. De totale kosten bij de productie kun je aflezen in de grafiek. Een wiskundige van het bedrijf heeft hierbij de volgende formules bedacht:

- $K = -0{,}1q^2 + 1{,}2q$ als $0 \leq q < 5$
- $K = 0{,}1q^3 - 1{,}1q^2 + 3{,}7q$ als $q \geq 5$

Hierin is q de productie (in duizendtallen) en K de totale kosten (in duizenden euro). De toename van de totale kosten bij een toename van de productie met één kurkentrekker noem je de marginale kosten. Deze marginale kosten mogen benaderd worden door $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}q}$.



Figuur 4.10

a Toon door berekening aan dat de marginale kosten bij elke productie positief zijn. Hoe is dit ook uit de grafiek af te leiden?

b Toon door berekening aan dat de marginale kosten het kleinst zijn voor $q = 5$.
Hoe is dit ook uit de grafiek af te leiden? Is hier sprake van een buigpunt?

c Bereken de gemiddelde totale kosten per kurkentrekker bij een productie van 7000 stuks. Hoe kun je uit de grafiek afleiden bij welke andere productie de gemiddelde kosten per kurkentrekker even groot zijn als bij een productie van 7000 stuks? Leid deze andere productie uit de grafiek af en controleer het antwoord met de formules.

(bron: examen wiskunde A vwo 1989)

Testen

Opgave 13

Onderzoek telkens of de functie met het genoemde functievoorschrift een buigpunt heeft. Zo ja, bereken de coördinaten van dit buigpunt. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x$

b $f(x) = 0{,}25x^4 - 5x^3 + 4x^2$

Opgave 14

Van een functie f is de afgeleide gegeven door $f'(x) = 4x - 0{,}5x^2$.

a Bereken de x-waarde van het buigpunt.

b Op grond van deze afgeleide kun je een schets maken van de grafiek van de functie als je weet dat de y-waarde van het buigpunt 10 is. Maak een mogelijke schets van de grafiek van f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het buigpunt.

Opgave 15

Een verffabriek gebruikt de functie $TK = 0{,}5q^3 - 3q^2 + 6q$ voor de productiekosten voor een bepaald soort verf. Hierin is q de hoeveelheid geproduceerde verf in duizenden liters per dag en verder stelt TK de kosten in duizenden euro voor.

a De marginale kosten zijn de meerkosten per liter die ontstaan bij de productie van 1 liter extra. Bereken de marginale kosten bij een productie van 3000 liter verf per dag met een geschikt differentiequotiënt.

b Je kunt de marginale kosten goed benaderen met behulp van de afgeleide: $MK = TK'$. Bereken ook op deze manier de marginale kosten bij een productie van 3000 liter per dag.

c De ondernemer produceert het liefst een hoeveelheid waarbij de marginale kosten minimaal zijn. Bij welke productie in liter per dag is dat het geval?

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Afgeleide functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- definitie afgeleide — limiet — vergelijking raaklijn
- differentieerregels — machtsregel voor gehele positieve n — somregel — constante-regel
- extremen — tekenschema afgeleide
- buigpunt — tweede afgeleide — buigraaklijn

Activiteitenlijst

- afgeleiden bepalen — vergelijking van een raaklijn opstellen
- afgeleiden bepalen m.b.v. differentieerregels
- extremen berekenen m.b.v. de afgeleide
- buigpunten berekenen m.b.v. de tweede afgeleide

Achtergronden

De differentiaalrekening is min of meer tegelijkertijd en zonder dat ze het van elkaar wisten door twee van de allergrootste geleerden van hun tijd uitgevonden:

- In Engeland bedacht **sir Isaac Newton (1642—1727)** zo rond 1665 zijn 'fluxierekening' toen hij zich in die periode bezig hield met beweging, snelheid en versnelling. Hij publiceerde zijn resultaten echter niet.
- In Duitsland schreef **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716)** in 1675 het manuscript waarin hij zijn theorie rond het berekenen van hellingen en van oppervlaktes onder krommen uiteen zette.

Lees ook op deze site: **Grafieken en verandering, differentiaalrekening**.

Testen

Opgave 1

Differentieer de functies.

a $f(x) = 4x^5 - 12x^2 + 60x + 100$

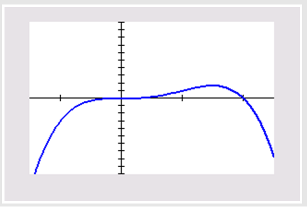
b $E(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}$

c $f(x) = (x+3)^2$

d $GTK(q) = \frac{0{,}5q^3+20q^2+60q}{q}$

Opgave 2

Bekijk de grafiek van $f(x) = 2x^3 - x^4$ op het interval [-1,5; 2,5].



Figuur 5.1

a De grafiek heeft twee punten waarin de raaklijn horizontaal loopt. Bereken met behulp van differentiëren de x-coördinaten van die twee punten en geef aan of het een maximum, een minimum of een buigpunt is.

b De grafiek van f heeft behalve $(0,0)$ nog een buigpunt. Bereken de coördinaten van dat punt.

c Stel de raaklijn op aan de grafiek in het bij b bedoelde buigpunt.

Opgave 3

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0{,}5x^3 - 6x$.

a Bereken de extremen van deze functie met behulp van differentiëren.

b Laat zien dat $(0,0)$ het buigpunt is van de grafiek van f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het buigpunt.

Opgave 4

Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoersmiddel in grotere bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt zijn afzet q, in duizendtallen, uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0{,}1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1{,}5q^3 - 22{,}5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

a Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?

b Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q.

c Stel een formule op voor de winst TW als functie van de afzet q.

d Bepaal met behulp van differentiëren de prijs van één autoped bij maximale winst.

e Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q.

Bepaal met behulp van differentiëren bij welke afzet GTK minimaal is.

Opgave 5

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \left(x^2 - 4\right)(2x + 1)$ en $g(x) = x^2 - 4$.

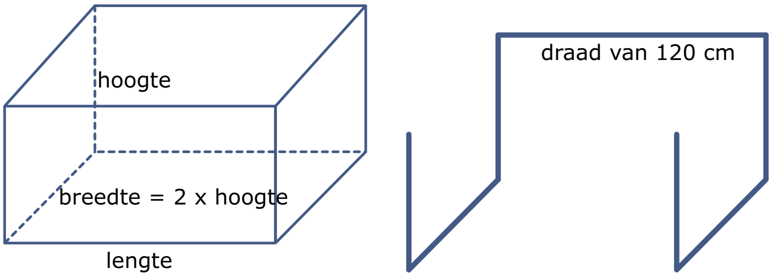
a Bepaal algebraïsch de nulpunten en de toppen van de grafiek van f.

b Los op: $f(x) > g(x)$.

Toepassen

Opgave 6: Maximaal bakje

Een bedrijf maakt plastic bakjes: bodem en zijvlakken van deze bakjes zijn rechthoeken; de breedte van de bakjes is tweemaal zo groot als de hoogte. Om de bakjes te verstevigen wordt een gebogen metaaldraad met een lengte van 120 cm aangebracht zoals in de tekeningen is aangegeven.



Figuur 5.2

a Bereken de maximale inhoud die deze bakjes kunnen krijgen.

b Als het goed is blijkt bij a dat de lengte van het bakje viermaal zo groot is als de hoogte. Toon aan dat bij elke draadlengte een maximale inhoud ontstaat als de breedte tweemaal de hoogte en de lengte viermaal de hoogte is.

Opgave 7: ChemoTech

Onder de **marginale kosten** (de meerkosten) wordt in de economie de extra kosten verstaan die de verkoop van één extra eenheid oplevert. Voor marginale opbrengst en - winst bestaan vergelijkbare definities. Deze marginale kosten zijn bij grote hoeveelheden goed te benaderen door middel van een afgeleide.

ChemoTech is een bedrijf dat o.a. een bepaald chemisch onkruidbestrijdingsmiddel produceert. Afhankelijk van het aantal werknemers dat het bedrijf voor de productie daarvan inzet wordt er meer of minder kilo van dit product per maand gemaakt. Bij de productie van een bepaald chemisch onkruidbestrijdingsmiddel heeft de bedrijfsleiding onderzocht hoeveel kilo bestrijdingsmiddel worden geproduceerd per maand afhankelijk van het aantal werknemers. Dit **Excelbestand bij product CT-216X3** laat dat zien.
Een arbeidsplaats kost gemiddeld € 1500 per maand en de kosten voor de apparatuur en de gebouwen bedragen ongeveer € 30000,00 per maand. Je kunt op basis van deze gegevens een tabel opstellen waarin de totale kosten TK per maand (in duizenden euro) afhangen van de hoeveelheid bestrijdingsmiddel q die men maandelijks kan produceren.

Figuur 5.3

Bij een productie van 3000 kg/mnd zijn de kosten € 63750.
Bij een productie van 3001 kg/mnd zijn de kosten ongeveer € 63756,75.
De marginale kosten bij $q = 3$ zijn derhalve $MK(3) \approx 6{,}75$ euro.

Ga zelf na, dat $TK'(3) = 6{,}75$ (precies).
Je ziet dat de marginale kosten bij $q = 3$ goed kunnen worden benaderd met behulp van de afgeleide van TK. Dit blijkt telkens op te gaan...

a Maak die tabel en ga na dat deze functie er bij past: $TK = 0{,}25q^3 - 3q^2 + 18q + 30$.

b Laat zien, dat de marginale kosten bij een productie van 4500 kg/mnd goed kunnen worden benaderd door de marginale kosten op $q = 4$. Welke economische betekenis hebben deze marginale kosten?

c Als je de grafiek van de totale kostenfunctie bekijkt, zie je dat ze eerst afnemend stijgen. Bereken tot welke productieomvang (in kilogram) dat het geval is.

d Het bedrijf gaat dit onkruidbestrijdingsmiddel op de markt brengen voor een prijs die door de harde concurrentie ongeveer vast ligt op € 18,00 per kilogram. Stel een formule op voor de totale winst TW in duizenden euro per maand.

e Bij welke geproduceerde hoeveelheid maakt het bedrijf winst?

f Bereken de maximale winst als het bedrijf de geproduceerde hoeveelheid bestrijdingsmiddel ook inderdaad verkoopt.

Stel je voor dat dit bedrijf geen concurrentie zou hebben bij de verkoop van dit onkruidbestrijdingsmiddel. In dat geval is de vraagprijs afhankelijk van de hoeveelheid die men op de markt brengt: een lage prijs betekent een flinke verkoop, een hoge prijs een minder goede verkoop. Neem aan dat geldt: $p = 58{,}5 - 3q$.

g Hoe hoog is nu de maximaal bereikbare winst? Is die hoger of lager dan in de voorgaande situatie van een vaste prijs?

Examen

Opgave 8: Toltunnel

Het aantal personenauto's (A) dat per dag van een nieuw aan te leggen toltunnel gebruik zal maken, is volgens een verkeersdeskundige te berekenen met de formule
$A = 400T^2 - 9150T + 46800$
Hierbij is T het toltarief in euro. Toltarieven hoger dan 7 euro blijven buiten beschouwing. Met het oog op een snelle doorstroming zal de betaling op elektronische wijze geschieden. Hierdoor is het mogelijk om een toltarief van bijvoorbeeld € 2,67 in rekening te brengen omdat dit niet op praktische bezwaren stuit.

a Bereken de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's bij een toltarief van € 2,00.

b Onderzoek bij welk toltarief de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's maximaal is. Geef je antwoord in centen nauwkeurig.

c Bereken met hoeveel procent het aantal personenauto's afneemt als bij een tarief van € 2,40 een tariefsverhoging van 5% wordt toegepast.

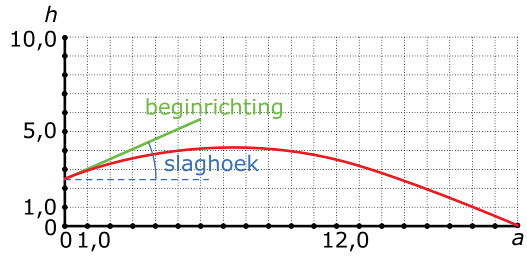
Bij een zeker toltarief leidt een tariefsverhoging van 6% er toe, dat het aantal personenauto's dat dagelijks de tunnel gebruikt met 2,8% afneemt.

d Bereken in gehelen nauwkeurig met hoeveel procent de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's door deze tariefsverhoging zal toenemen.

(bron: examen wiskunde A vwo 1992, aangepast)

Opgave 9: Tennis

Bij sporten als volleybal en tennis is de service erg belangrijk, dat wil zeggen de manier waarop de bal in het spel gebracht wordt. We bekijken hier de service bij tennis. De speler staat bij het serveren 12 meter van het net. Het net is 1 meter hoog. We nemen aan dat de speler de bal raakt op een hoogte van 2,5 meter boven de grond en ter vereenvoudiging gaan we er van uit dat de speler de bal precies in de lengterichting van het veld slaat. In de eerste figuur zie je een mogelijke baan van de bal.



Figuur 5.4

De hoogte van de onderkant van de bal in meter ten opzichte van de grond noemen we h. De horizontale afstand in meter noemen we a. Het verband tussen h en a hangt af van de snelheid waarmee de bal geslagen wordt en van de beginrichting. Deze beginrichting wordt bepaald door de slaghoek. Dit is de hoek waaronder de bal geslagen wordt. Zie eerste figuur.

a Neem aan dat de bal onder een hoek van 15° geslagen wordt met een snelheid van v m/s. Bij deze hoek geldt bij benadering het volgende verband tussen a en h:

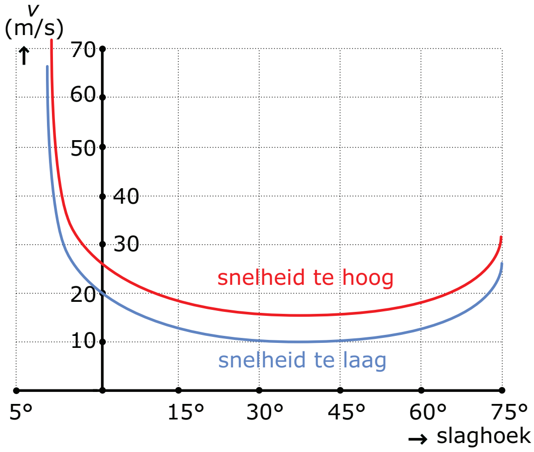
$$h = \frac{-5,36}{v^2}a^2 + 0,27a + 2,50$$

Een speler slaat de bal met een snelheid van 17 m/s. Bereken met behulp van differentiëren de grootste hoogte boven de grond die deze bal bereikt.

In deze vereenvoudigde situatie spreken we van een geldige service als:

- de speler die serveert 12 meter van het net staat;
- de bal precies in de lengterichting van het veld geslagen wordt;
- de bal over het net gaat zonder dit te raken;
- de bal neerkomt op een afstand van ten hoogste 7 meter voorbij het net.

In een artikel over dit onderwerp stond deze grafiek. Daarin is weergegeven bij welke combinaties van slaghoek en snelheid een geldige service verkregen wordt. Een speler die de bal slaat onder een hoek van 30° moet volgens deze grafiek de bal slaan met een snelheid van ongeveer 11 tot 13 m/s. Slaat hij te zacht dan komt de bal niet over het net. Slaat hij te hard dan komt de bal te ver voorbij het net op de grond. Een profspeler slaat bij een geldige service de bal met een snelheid van 150 km/h.



Figuur 5.5

b Bepaal met behulp van de grafiek de beginrichting van een mogelijke baan van deze bal.

Neem nu aan dat de bal onder een hoek van 10° geslagen wordt. Bij deze hoek geldt bij benadering de volgende formule voor het verband tussen a en h:

$$h = \frac{-5{,}16}{v^2}a^2 + 0{,}18a + 2{,}50$$

Voor een geldige service moet de bal over het net gaan zonder dit te raken. De snelheid is te laag als in bovenstaande formule bij afstand $a = 12$ de hoogte $h \leq 1$ is. Volgens de grafiek is een snelheid van 16 m/s of minder te laag voor een geldige service. Echter, met behulp van een berekening is na te gaan dat de figuur hier erg onnauwkeurig is getekend.

c Welke snelheden (in m/s) zijn volgens de formule te laag voor een geldige service? Geef je antwoord in ten minste één decimaal nauwkeurig.

Voor een geldige service moet de bal bovendien ten hoogste 7 meter voorbij het net de grond raken. Uit deze eis volgt ook een voorwaarde voor v.

d Welke getallen moet je in de bovenstaande formule invullen om deze voorwaarde te krijgen? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A vwo 2000, eerste tijdvak)

2

Logaritmische functies

2.1 Logaritmen

Inleiding

Bij exponentiële verbanden zoals die bij bijvoorbeeld bacteriegroei optreden moet je soms vragen beantwoorden als: 'Op welk tijdstip heb je 1000 bacteriën?'
Daarbij ontstaan vergelijkingen waarin exponentiële functies voorkomen. Die kun je nog niet algebraïsch oplossen. Je kunt alleen oplossingen zoeken (vaak benaderen) met de grafische rekenmachine. In dit onderwerp leer hoe je logaritmen kunt gebruiken om dergelijke vergelijkingen wel algebraïsch op te lossen.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip logaritme kennen;
- logaritmen berekenen, uit het hoofd waar dat kan;
- logaritmen schatten;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, ook met de grafische rekenmachine;
- werken met de begrippen macht, grondtal en exponent.

Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van de hoeveelheid bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren.

Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 1000 bacteriën?

Figuur 1.1

Uitleg

Voor de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt $B = 6 \cdot 2^t$.
Na hoeveel tijd zijn er 120 bacteriën?

Om deze vraag te beantwoorden moet je de vergelijking $6 \cdot 2^t = 120$, ofwel $2^t = 20$, oplossen. Zo'n vergelijking kun je al oplossen met de grafische rekenmachine, je vindt dan $t \approx 4{,}322$.
De exacte oplossing schrijf je als $t = {}^{2}\log(20)$.
Dit heet de logaritme van 20 voor het grondtal 2.

Een oplossing van een exponentiële vergelijking schrijf je als een logaritme. Omdat exponentiële functies ofwel altijd stijgend (bij een grondtal groter dan 1) ofwel altijd dalend (bij een grondtal tussen 0 en 1) zijn, heeft een vergelijking als $g^x = a$ precies één oplossing: $x = {}^{g}\log(a)$ als $a > 0$.
Deze oplossing kun je vinden door $g^x = a$ met de grafische rekenmachine op te lossen.

Opgave 1

Neem de vergelijking $2^t = 30$.

a Geef de oplossing van deze vergelijking. Rond af op twee decimalen.

b Hoe schrijf je die oplossing als logaritme?

c Als de hoeveelheid bacteriën gegeven wordt door $h = 2^t$, met t in uren, na hoeveel uur heb je dan 100 bacteriën? Geef je oplossing als logaritme, maar ook afgerond op twee decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

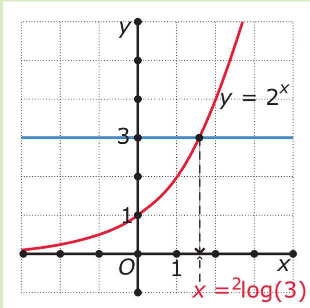
Bekijk de applet: Logaritme

De oplossing van de vergelijking $g^x = a$ heet de **logaritme** van a voor grondtal g. Notatie: $x = {}^{g}\log(a)$.
Omdat deze vergelijking alleen oplossingen heeft als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en als $a > 0$, bestaat ${}^{g}\log(a)$ alleen onder deze voorwaarden. Vooralsnog bepaal je $x = {}^{g}\log(a)$ meestal door de vergelijking $g^x = a$ met de grafische rekenmachine op te lossen.

In het algemeen wordt als definitie van logaritme gebruikt:

- uit $g^x = y$ volgt $x = {}^{g}\log(y)$;
- uit $x = {}^{g}\log(y)$ volgt $g^x = y$.

De uitdrukkingen $x = {}^{g}\log(y)$ en $g^x = y$ zijn volledig gelijkwaardig als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en als $y > 0$.
Je noemt de exponentiële functie en de logaritme met hetzelfde grondtal wel inverse (tegengestelde) bewerkingen, ze zijn elkaars terugrekenbewerkingen.



Figuur 1.2

Voorbeeld 1

Luchtschepen zijn gevuld met gas dat regelmatig aangevuld moet worden om voldoende draagvermogen te houden. Een luchtschip met een inhoud van 3000 m^3 verliest elke tien dagen ongeveer 2% van zijn gas. Als er minder dan 2400 m^3 over is, kan het niet meer vliegen.
Hoeveel dagen nadat het geheel is gevuld, is dit het geval?

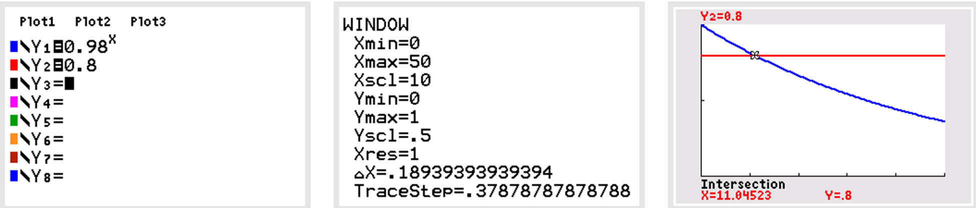
Figuur 1.3

Antwoord

De hoeveelheid gas in het luchtschip is $G(t) = 3000 \cdot 0{,}98^t$ met G in m^3 en t in eenheden van tien dagen.

De vraag kun je vertalen naar het oplossen van: $3000 \cdot 0{,}98^t < 2400$.

De bijbehorende vergelijking is: $3000 \cdot 0{,}98^t = 2400$.
Na delen door 3000 levert dit op: $0{,}98^t = 0{,}8$.
Met de intersect-functie van de grafische rekenmachine vind je: $t \approx 11{,}04$. De oplossing van de vergelijking is daarom: $t = {}^{0,98}\log(0{,}8) \approx 11{,}04$.



Figuur 1.4

Het luchtschip kan 110 dagen vliegen zonder bijvullen. Op de 111^e^ dag kan het niet meer vliegen.

Opgave 2

Na hoeveel dagen is de beginhoeveelheid gas van 3000 m^3 in het luchtschip verminderd tot 2800 m^3 als er elke tien dagen ongeveer 2% vervliegt?

a Welke vergelijking moet je oplossen?

b Je kunt de vergelijking eerst vereenvoudigen. Wat krijg je?

c Schrijf nu de oplossing van de vergelijking als logaritme.

d Geef het antwoord ook afgerond op twee decimalen.

Opgave 3

Geef de oplossingen van de vergelijkingen. Schrijf het antwoord als logaritme en bereken (zo nodig) in drie decimalen nauwkeurig.

a $2^x = 7$

b $3^x = 81$

c $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$

d $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 0{,}01$

Voorbeeld 2

Soms kun je van een logaritme zelf (zonder rekenmachine) de uitkomst bedenken:

- ${}^{2}\log(16)$ is de oplossing van $2^t = 16 = 2^4$. Dus ${}^{2}\log(16) = 4$.
- ${}^{3}\log\left(\frac{1}{9}\right)$ is de oplossing van $\left(\frac{1}{9}\right)^t = 3 = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2}$. Dus ${}^{3}\log\left(\frac{1}{9}\right) = -2$.
- ${}^{10}\log(10000) = 4$, want $10^4 = 10000$.
- ${}^{10}\log(0{,}001) = -3$, want $10^{-3} = 0{,}001$.
- ${}^{3}\log\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right) = -1\frac{1}{2}$, want $3^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$.
- ${}^{\frac{1}{2}}\log(8) = -3$, want $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$.

Opgave 4

Bereken de logaritmen exact.

a ${}^{5}\log(125)$

b ${}^{5}\log\left(\frac{1}{25}\right)$

c ${}^{4}\log(64)$

d ${}^{\frac{1}{4}}\log(64)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right)$

f ${}^{2}\log\left(\sqrt{2}\right)$

Voorbeeld 3

Je kunt de grootte van een logaritme schatten met behulp van machten van het grondtal:

- ${}^{2}\log(40)$ is een getal tussen 5 en 6, want $2^5 = 32$ en $2^6 = 64$.
- ${}^{10}\log(400)$ is een getal tussen 2 en 3, want $10^2 = 100$ en $10^3 = 1000$.
- ${}^{10}\log(0{,}05)$ is een getal tussen -2 en -1, want $10^{-2} = 0{,}01$ en $10^{-1} = 0{,}1$.
- ${}^{0{,}5}\log(20)$ is een getal tussen -5 en -4, want $0{,}5^{-5} = 32$ en $0{,}5^{-4} = 16$.

Opgave 5

Geef van de logaritmen aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen ze liggen.

a ${}^{5}\log(150)$

b ${}^{10}\log(758)$

c ${}^{2}\log(60)$

d ${}^{2}\log\left(\frac{1}{7}\right)$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(20)$

f ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{5}\right)$

Opgave 6

Bereken de logaritmen en rond af op één decimaal.

a ${}^{5}\log(150)$

b ${}^{10}\log(758)$

c ${}^{2}\log(60)$

d ${}^{2}\log\left(\frac{1}{7}\right)$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(20)$

f ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{5}\right)$

Opgave 7

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme maar ook afgerond op één decimaal.

a $5 \cdot 3^x = 3000$

b $1{,}7^t = 525$

c $572 \cdot 0{,}6^t = 30$

Opgave 8

Iemand zet op 1 januari 2014 een kapitaal van € 10000,00 op de bank tegen een vaste rente van 8% per jaar.

In welke maand van welk jaar is dit kapitaal uitgegroeid tot € 15000,00 als hij niets opneemt of bijstort? Gebruik bij de berekening een logaritme.

Verwerken

Opgave 9

Welke van de logaritmen zijn eenvoudig zonder rekenmachine te berekenen? Bereken deze logaritmen. Bereken ook de overige logaritmen en rond af op één decimaal.

a ${}^{4}\log(64)$

b ${}^{4}\log(400)$

c ${}^{\frac{1}{3}}\log(60)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(81)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right)$

f ${}^{0,1}\log(1000000)$

Opgave 10

Bereken en rond af op drie decimalen.

a ${}^{2,5}\log(100)$

b ${}^{0,7}\log(20)$

c ${}^{2,3}\log(0{,}05)$

d ${}^{15,2}\log(2{,}3)$

Opgave 11

Geef bij de logaritmen steeds aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen ze liggen.

a ${}^{6}\log(30)$

b ${}^{3}\log(70)$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(10)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(0{,}01)$

Opgave 12

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme, maar ook afgerond op één decimaal.

a $10 \cdot 10^{x} = 0{,}1$

b $0{,}5 \cdot 2^{x} = 30$

c $54 \cdot 0{,}8^{t} = 27$

Opgave 13

Schrijf de oplossingen van de vergelijkingen als logaritme, maar ook afgerond op twee decimalen.

a $15 \cdot 0{,}4^x + 7 = 52$

b $17 \cdot 4^x + 9 = 400$

c $15 \cdot 2^x - 3 = 0$

Opgave 14

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Bereken in minuten nauwkeurig hoelang het duurt voordat de kolonie zich heeft verdrievoudigd. Maak bij de berekening gebruik van een logaritme.

Toepassen

Opgave 15: Geldwaarde van huizen

Iemand koopt op 1 juli 2014 een huis van € 250.000. In de krant heeft hij gelezen dat de afgelopen vijftig jaar de waarde van de huizen gemiddeld met 7% per jaar gestegen is.
Neem aan dat de waardestijging elk jaar hetzelfde was.

a Hoeveel bedroeg de waarde van het huis op 1 juli 1995?

b Hoeveel jaar geleden was het huis € 200.000 waard? Schrijf je antwoord als een logaritme en benader het daarna in jaren nauwkeurig.

c Bereken ook hoeveel jaar geleden het huis nog € 50.000 waard was. Schrijf het antwoord als een logaritme.

Testen

Opgave 16

Bereken de volgende logaritmen exact.

a ${}^{2}\log\left(\sqrt{32}\right)$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(27)$

Opgave 17

Geef bij de volgende logaritmen eerst aan tussen welke opeenvolgende gehele getallen ze liggen. Geef daarna een benadering in drie decimalen.

a ${}^{2}\log(513)$

b ${}^{0{,}4}\log(25)$

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing als logaritme en geef daarna een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $6 \cdot 4^x = 35$

b $1050 \cdot 1{,}08^t = 1800$

Opgave 19

In een tank zit 150 liter verontreinigde vloeistof. Deze vloeistof wordt verwijderd door spoelen met water. Hierdoor verdwijnt elke keer 15% van de vloeistof. Men wil stoppen met spoelen als er minder dan 10 liter verontreinigde vloeistof over is.

Bereken hoe vaak men moet spoelen. Schrijf het antwoord als logaritme en geef een benadering van deze logaritme.

2.2 Eigenschappen

Inleiding

Je hebt nu wel het begrip logaritme leren kennen als oplossing van een exponentiële vergelijking, maar nog geen methode gezien om willekeurige logaritmen rechtstreeks te bepalen (benaderen) met de rekenmachine.
Er zit wel een functie [LOG] op, maar daarmee kun je nog niet op alle rekenmachines voor elk willekeurig grondtal de logaritme van een getal vinden. Je hebt de eigenschappen van logaritmen nodig. Die ga je nu nader bekijken.

Je leert in dit onderwerp

- eigenschappen van logaritmen gebruiken;
- logaritmen berekenen met de grafische rekenmachine;
- exponentiële en logaritmische vergelijkingen algebraïsch oplossen.

Voorkennis

- werken met het begrip logaritme;
- logaritmen bepalen vanuit exponentiële vergelijkingen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet dat $g^x = y$ gelijkwaardig is met $x = {}^g\log(y)$. Dat levert alvast twee eigenschappen van logaritmen op.

a Hoe volgt hier uit dat ${}^g\log(g^x) = x$?

b Welke andere eigenschap volgt hier rechtstreeks uit?

c Wat gebeurt er als je twee logaritmen optelt, is ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a+b)$?

Uitleg 1

Voor het saldo S op een spaarrekening t jaar na een eenmalige storting van € 4000,00 en een jaarlijkse rente van 5% geldt: $S(t) = 4000 \cdot 1{,}05^t$.

De tijd die nodig is om het saldo te verdubbelen vind je door de vergelijking $1{,}05^t = 2$ op te lossen.

De verdubbelingstijd is $t = {}^{1{,}05}\log(2)$ jaar.

De tijd die nodig is om het saldo te verdrievoudigen vind je door de vergelijking $1{,}05^t = 3$ op te lossen.

De verdrievoudigingstijd is $t = {}^{1{,}05}\log(3)$ jaar.

De verzesvoudigingstijd vind je door de verdubbelingstijd en de verdrievoudigingstijd op te tellen:
${}^{1{,}05}\log(2) + {}^{1{,}05}\log(3) = {}^{1{,}05}\log(6) = {}^{1{,}05}\log(2 \cdot 3)$
Dit maakt deze eigenschap van de logaritme aannemelijk:

- ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$

Op soortgelijke wijze verklaar je de eigenschap:

- ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$

De grondtallen moeten gelijk zijn om logaritmen op te mogen tellen of van elkaar af te mogen trekken.

De verachtvoudigingstijd van het saldo is $t_8 = {}^{1{,}05}\log(8)$.
De verachtvoudigingstijd vind je ook door drie keer de verdubbelingstijd te nemen:
$3 \cdot {}^{1{,}05}\log(2) = {}^{1{,}05}\log(8) = {}^{1{,}05}\log\left(2^3\right)$
Dit past bij de eigenschap:

- $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log\left(a^p\right)$

Opgave 1

In **Uitleg 1** zie je in welke tijd een saldo verdubbelt dan wel verdrievoudigt.

a Hoe lang duurt het voor het saldo 2 keer zo groot (dus € 8000) geworden is? Schrijf het antwoord als logaritme. Bereken deze logaritme op één decimaal nauwkeurig.

b Hoe lang duurt het voor het saldo 3 keer zo groot geworden is? Schrijf het antwoord als logaritme. Bereken deze logaritme op één decimaal nauwkeurig.

c Hoe lang duurt het voor het saldo 6 keer zo groot geworden is? Schrijf het antwoord als logaritme. Bereken deze logaritme op één decimaal nauwkeurig.

d Het antwoord bij a kun je krijgen door het antwoord bij b van dat bij c af te trekken. Controleer dit en geef een verklaring.

e Bij d heb je een voorbeeld van een eigenschap van logaritmen die in **Uitleg 1** staat vermeld. Om welke eigenschap gaat het hier?

Opgave 2

Bij exponentiële afname komt het begrip halveringstijd voor.

a Geef een omschrijving van het begrip halveringstijd. Maak hierbij gebruik van een logaritme.

b Bereken in maanden nauwkeurig de halveringstijd in het geval een hoeveelheid jaarlijks met 7% afneemt.

c De radioactieve stof Strontium heeft een halveringstijd van 28 jaar. Bereken in drie decimalen nauwkeurig de groeifactor per jaar.

Uitleg 2

Het kost veel tijd om ${}^{2}\log(100)$ te berekenen door $2^x = 100$ op te lossen met de grafische rekenmachine. Het kan ook anders. De rekenmachine kent een knop logaritme, die werkt met grondtal 10. Het is daarom handig als je van grondtal kunt veranderen.

Ga uit van $2^x = 100$.

$$\begin{aligned} 2^x &= 100 \\ {}^{10}\log\left(2^x\right) &= {}^{10}\log(100) \\ x \cdot {}^{10}\log(2) &= {}^{10}\log(100) \\ x &= \frac{{}^{10}\log(100)}{{}^{10}\log(2)} \end{aligned}$$

neem aan beide zijden de ${}^{10}\log$

eigenschap: $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log\left(a^p\right)$

beide zijden delen door ${}^{10}\log(2)$

Dit is een andere manier om ${}^{2}\log(100)$ te noteren:

${}^{2}\log(100) = \frac{{}^{10}\log(100)}{{}^{10}\log(2)}$

Nu kan een ${}^{2}\log$ worden berekend met een ${}^{10}\log$ op de grafische rekenmachine:

${}^{2}\log(100) = \frac{\log(100)}{\log(2)} \approx 6{,}64$

Daarbij hoef je geen grondtal in te vullen, want de rekenmachine werkt met grondtal 10.

Dit werkt ook voor andere grondtallen. In het algemeen geldt:

- ${}^{g}\log(a) = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$

De meeste rekenmachines hebben ook de mogelijkheid om het grondtal van de logaritme direct in te voeren. Vaak moet je dan de Amerikaanse notatie $\log_{g}(x)$ gebruiken. Je ziet dat daarin het grondtal een andere plaats krijgt.

Opgave 3

a Bereken ${}^{3}\log(300)$ op de manier van **Uitleg 2**.

b Je kunt zelf nagaan welk grondtal door de logknop van de rekenmachine wordt gebruikt. Bereken daartoe $\log(10)$. Welk grondtal gebruikt te rekenmachine dus standaard?

Opgave 4

Bereken in één decimaal.

a ${}^{5}\log(90)$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log(20)$

c ${}^{4}\log\left(\frac{1}{3}\right)$

d ${}^{0,1}\log(300)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een definitie van **logaritme** is:
$x = {}^{g}\log(y)$ is de oplossing van $g^{x} = y$.

Let op! Controleer of, en zorg dat bij gebruik van de logaritme ${}^{g}\log(y)$ geldt:
$0 < g < 1$ of $g > 1$ en $y > 0$.

Logaritmen hebben **eigenschappen** of **rekenregels**.

- ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$
- ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^{p})$
- ${}^{g}\log(a) = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$

Opmerking 1: je kunt door de laatste regel ${}^{g}\log(a)$ met de logaritmetoets op de rekenmachine berekenen. De meeste rekenmachines hebben ook de mogelijkheid om het grondtal van de logaritme direct in te voeren. Vaak moet je dan de Amerikaanse notatie $\log_g(x)$ gebruiken. Daarin krijgt het grondtal een andere plaats.

Opmerking 2: het grondtal 10 wordt vaak weggelaten: ${}^{10}\log(a) = \log(a)$.

Voorbeeld 1

De eigenschappen van logaritmen stellen je in staat met logaritmen te rekenen. Bijvoorbeeld:

- ${}^{6}\log(24) + 2 \cdot {}^{6}\log(3) = {}^{6}\log(24) + {}^{6}\log\left(3^2\right) = {}^{6}\log\left(24 \cdot 3^2\right) = {}^{6}\log(216) = 3$
- ${}^{2}\log(12) + {}^{0,5}\log(12) = {}^{2}\log(12) + \frac{{}^{2}\log(12)}{{}^{2}\log(0,5)} =$
  ${}^{2}\log(12) - {}^{2}\log(12) = 0$ want ${}^{2}\log(0,5) = {}^{2}\log\left(2^{-1}\right) = -1$
- ${}^{2}\log(7) \cdot {}^{7}\log(8) = \frac{\log(7)}{\log(2)} \cdot \frac{\log(8)}{\log(7)} = \frac{\log(8)}{\log(2)} = {}^{2}\log(8) = 3$
- $2^{{}^{2}\log(7)} = 7$

Opgave 5

Gebruik de eigenschappen van logaritmen om te laten zien dat de uitdrukkingen waar zijn en controleer ze daarna door de logaritmen uit te rekenen.

a ${}^{2}\log(16) + {}^{2}\log(8) = {}^{2}\log(128)$

b ${}^{2}\log(16) - 3 \cdot {}^{2}\log(2) = {}^{2}\log(2)$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(16) = -{}^{2}\log(16)$

d ${}^{2}\log(80) + {}^{0,5}\log(5) = 4$

Opgave 6

Bereken met behulp van de eigenschappen van logaritmen.

a ${}^{2}\log(72) - 2 \cdot {}^{2}\log(3)$

b ${}^{2}\log(80) + {}^{0,5}\log(5)$

Schrijf als één logaritme.

c ${}^{2}\log(7) + {}^{3}\log(81)$

d $0,5 \cdot {}^{2}\log(36) - 1$

Voorbeeld 2

Los de vergelijking ${}^{2}\log(x) = 3$ op.

Antwoord

Gebruik de regel dat de logaritme de terugrekenfunctie van een exponentiële functie met hetzelfde grondtal is. Neem aan beide zijden de exponentiële functie met grondtal 2. Dit geeft:

$$\begin{aligned} {}^{2}\log(x) &= 3 \\ 2^{{}^{2}\log(x)} &= 2^3 \\ x &= 2^3 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a ${}^{5}\log(x) = 2$

b ${}^{4}\log(2x) = 0$

c ${}^{\frac{1}{4}}\log\left(x^2\right) = -4$

d ${}^{2}\log(\sqrt{x}) = 5$

Voorbeeld 3

Los de vergelijking $\log(x) + \log(2x) = 3$ op.

Antwoord

Bij het oplossen van dergelijke vergelijkingen gebruik je de eigenschappen van logaritmen:

$$\begin{aligned} \log(x) + \log(2x) &= 3 \\ \log\left(2x^2\right) &= 3 \\ 2x^2 &= 10^3 = 1000 \\ x &= -\sqrt{500} \vee x = \sqrt{500} \end{aligned}$$

gebruik ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$

terugrekenen vanuit een 10-logaritme

Omdat je geen logaritme uit een negatief getal kunt trekken, is er maar één oplossing mogelijk: $x = \sqrt{500}$.

Opgave 8

Los op.

a $\log(5x) + \log(x) = 1$

b $\log(4) - \log(5x) = 2$

Verwerken

Opgave 9

Bereken en gebruik indien nodig de grafische rekenmachine. Rond in dat geval af op drie decimalen.

a ${}^{5}\log(625)$

b ${}^{2}\log(100)$

c ${}^{8}\log(8000)$

d $\log(40) + \log(25)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log(0{,}0003)$

f ${}^{7}\log\left(\sqrt{7}\right)$

Opgave 10

Gebruik de eigenschappen van logaritmen om te berekenen.

a $\log(5) + \log(20)$

b ${}^{5}\log(100) - {}^{5}\log(4)$

c $2 \cdot {}^{6}\log(3) + {}^{6}\log(4)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(45) - {}^{\frac{1}{3}}\log(5)$

Opgave 11

Er staat een bedrag van € 2600,00 op de bank. De rente bedraagt 2% per jaar.
Bepaal de verdubbelingstijd.

Opgave 12

Los op. Rond indien nodig af op één decimaal.

a $10 \cdot 5^x = 0{,}16$

b ${}^{4}\log(x+1) = 3$

c $\log(8x) + \log(x) = 3$

d $\log(2x) - 2 \cdot \log(x) = 1$

Opgave 13

Een hoeveelheid groeit exponentieel met groeipercentage p.

Toon aan dat de verdubbelingstijd T wordt gegeven door $T = \frac{\log(2)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$.

Toepassen

Opgave 14: Radioactiviteit

Een radioactieve stof vervalt volgens de formule:
$N(t) = N(0) \cdot 0{,}89^t$
N is de hoeveelheid in milligram en t de tijd in jaren.

a Bereken de halveringstijd.

b Een laboratorium heeft 800 mg van deze stof. Bereken met behulp van de halveringstijd hoelang het duurt voordat deze hoeveelheid minder dan 50 mg is geworden.

c Bereken tot op een maand nauwkeurig hoelang het duurt voordat 60 mg van deze stof minder dan 15 mg is geworden.

Opgave 15: Halfwaardetijd

Bij radioactieve stoffen wordt in plaats van het woord halveringstijd vaak het woord halfwaardetijd gebruikt. In een laboratorium bevindt zich 800 g van het radioactieve natrium-24. Deze stof heeft een halfwaardetijd van 15 uur.

a Laat zien hoe lang het duurt tot er nog maar 100 g van het natrium-24 over is.

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

c Bereken tot op een kwartier nauwkeurig hoe lang het duurt tot er van de 800 g natrium-24 nog maar 160 g over is.

Testen

Opgave 16

Iemand koopt een huis voor € 200.000 en verwacht dat de waarde van het huis per jaar 10% zal stijgen.

a Hoe lang duurt het voordat het huis € 300.000 waard is? Schrijf het antwoord als logaritme en bereken die logaritme tot op de maand nauwkeurig.

b Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis twee keer zo groot is geworden?

c Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis drie keer zo groot is geworden?

d Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis zes keer zo groot is geworden? Laat zien hoe je dit kunt berekenen met behulp van de antwoorden bij b en c.

e Hoe kun je het antwoord van vraag d in één keer berekenen?

Opgave 17

Een suikerpatiënt moet zich een injectie met insuline toedienen op het moment dat er nog maar een derde deel van de vorige injectie insuline in zijn bloed zit. De hoeveelheid insuline in het bloed neemt per uur met 8% af.

Hoeveel tijd zit er tussen twee opeenvolgende injecties? Schrijf de oplossing als logaritme en geef een benadering in uren nauwkeurig.

Opgave 18

Omstreeks 1650 groeide de wereldbevolking met een percentage van 0,3 % per jaar.

Schrijf de verdubbelingstijd als logaritme en geef een benadering in gehele jaren.

Opgave 19

Los algebraïsch op:

a $600 \cdot 0{,}5^t = 20$

b ${}^{5}\log(1 - x) = 2$

c ${}^{2}\log\left(3x^2\right) = 5$

2.3 Logaritmische schaal

Inleiding

Exponentiële groei is vaak ook nogal explosieve groei. Vaak heb je al snel te maken met veel grotere getallen dan waarmee je begon. Dat is lastig bij het maken van grafieken waaruit je met enige nauwkeurigheid wilt kunnen aflezen. Het lukt bijna niet om in één grafiek zowel de (kleine) beginwaarden als de (hele grote) waarden na verloop van tijd te laten zien.
Er is echter speciaal grafiekenpapier bedacht om dit probleem op te lossen. Het is zo gemaakt, dat een grafiek van een exponentiële functie er op dit papier als een rechte lijn uitziet.

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische schalen te werken;
- logaritmisch grafiekenpapier te gebruiken;
- het voorschrift van een exponentiële functie op te stellen vanaf enkellogaritmisch papier.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies;
- werken met logaritmen.

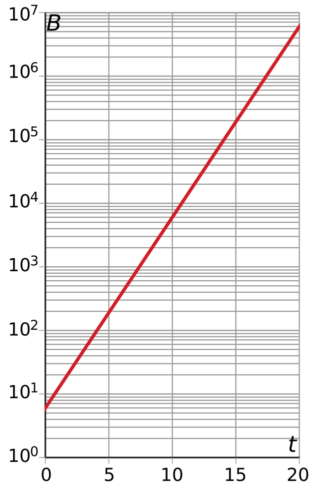
Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur. Hier zie je een grafiek van B als functie van t. Op de verticale as is een bijzondere schaalverdeling gebruikt.

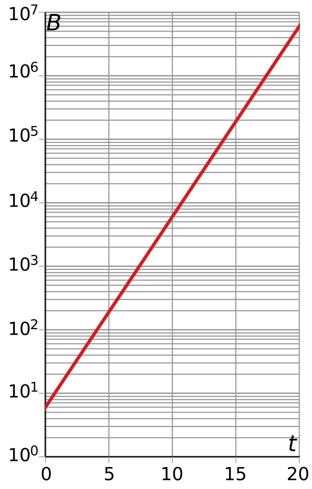
a Wat is er voor bijzonders aan die schaalverdeling?

b Teken zelf eens zo'n schaalverdeling op de verticale as en maak de grafiek van B als functie van t.



Figuur 3.1

Uitleg



Figuur 3.2

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur. Bekijk de grafiek van B als functie van t. Op de B-as is een zogenaamde logaritmische schaalverdeling gebruikt.

In plaats van een lineaire verdeling zoals $0, 1, 2, 3, 4$, enzovoort, zet je dan de machten van 10 neer: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 enzovoort.

Om de uitkomsten voor B op de juiste plek te zetten, gebruik je een 10-logaritme. Bijvoorbeeld op $t = 12$ heb je $B = 6 \cdot 2^{12} = 24576$ bacteriën. Dat getal ligt tussen 10^4 en 10^5. De logaritme van dat getal is: $\log(24576) \approx 4{,}39$. Je zet het daarom op $4{,}39$ eenheden boven de horizontale as, bij $10^{4{,}39}$ dus.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal.

Opgave 1

Als je voor de grafiek van de exponentiële functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ op de B-as een speciale (logaritmische) schaalverdeling gebruikt, ziet de grafiek eruit als een rechte lijn, zie de **Uitleg**.

a Zijn op deze schaalverdeling de afstanden tussen twee maatstreepjes steeds even groot?

b Laat zien dat de punten die horen bij $B(5)$ en $B(10)$ goed zijn getekend.

In feite staat op de verticale as de waarde van B op de plek van $\log(B)$. Neem maar eens een gewoon stuk roosterpapier en maak een assenstelsel met $\log(B)$ uitgezet tegen t.

c Maak eerst een tabel van $\log(B)$ afhankelijk van t.

d Zet de bijbehorende punten in een assenstelsel. Als het goed is, krijg je een rechte lijn als grafiek.

e Met de eigenschappen van logaritmen kun je laten zien dat $\log(B)$ ook echt een lineaire functie van t is. Toon aan dat $B = 6 \cdot 2^t$ is te herleiden tot $\log(B) = \log(2) \cdot t + \log(6)$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

a Maak een grafiek van $\log(y)$ uitgezet tegen x. Neem x van 0 tot 15.

b Vervang de getallen op de verticale as door de bijbehorende y-waarden. Je krijgt dan weer een grafiek van y als functie van x, maar nu met een logaritmische schaal op de verticale as.

c Lees uit de laatste grafiek af hoe groot $f(10)$ is en controleer het antwoord met het gegeven functievoorschrift.

d Laat zien dat $\log(y)$ een lineaire functie van x is.

Theorie en voorbeelden

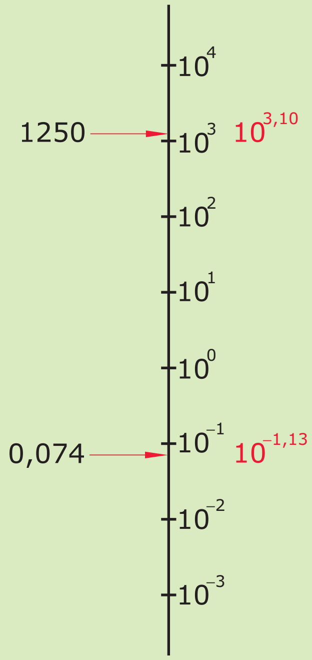
Om te onthouden

Bij een **logaritmische schaalverdeling** zet je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar uit. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen in dezelfde schaalverdeling plaatsen. Met behulp van de 10-**logaritme** ([LOG] op je rekenmachine) kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- $\log(1250) \approx 3{,}10$ dus $1250 \approx 10^{3{,}10}$.
  Je plaatst 1250 dus op 3,10 eenheden boven 10^0, net boven 10^3.
- $\log(0{,}074) \approx -1{,}13$ dus $0{,}074 \approx 10^{-1{,}13}$.
  Je plaatst 0,074 dus op 1,13 eenheden onder 10^0, net onder 10^{-1}.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal. Er bestaat ook speciaal **enkellogaritmisch papier**.

Omdat elke rechte lijn op enkellogaritmisch papier de grafiek is van een exponentiële functie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een exponentieel verband bestaat en om een bijpassende formule op te stellen.



Figuur 3.3

Voorbeeld 1

Laat zien hoe je op een logaritmische schaal de getallen 7250 en 0,002 aan kunt geven. Laat ook zien, hoe je af kunt lezen welke waarden a en b hebben.

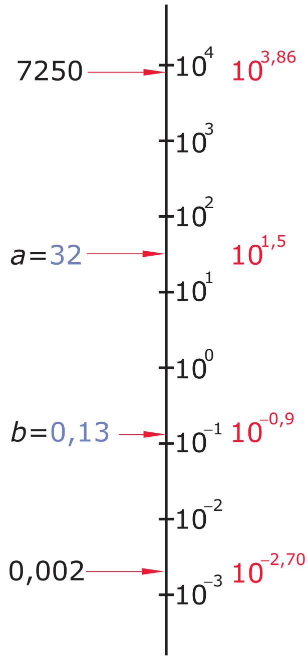
Antwoord

Eerst 7250 en 0,002 omrekenen:

- $\log(7250) \approx 3{,}86$ dus $7250 \approx 10^{3{,}86}$. Je plaatst 7250 dus op 3,86 eenheden boven 10^0, dat is tussen 10^3 en 10^4.
- $\log(0{,}002) \approx -2{,}70$ dus $0{,}002 \approx 10^{-2{,}70}$. Je plaatst 0,002 dus op 2,70 eenheden onder 10^0, dat is tussen 10^{-2} en 10^{-3}.

Nu aflezen:

- $a \approx 10^{1{,}5} \approx 32$
- $b \approx 10^{-0{,}9} \approx 0{,}13$



Figuur 3.4

Opgave 3

Je weet nu hoe je getallen kunt plaatsen op een logaritmische schaal en hoe je van zo'n schaal waarden kunt aflezen. Teken zelf zo'n logaritmische schaal.

a Geef de getallen 20, 20000 en 0,02 op deze schaal aan.

b Gebruik deze schaal om groottes te vergelijken. Begin met een mens van 1,80 m groot. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.

c De Mount Everest is ongeveer 8,884 km hoog. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.

d Een amoebe is een eencellig organisme met een afmeting van 0,003 tot 0,8 millimeter.
Geef deze getallen op je schaalverdeling aan.

e Op je schaalverdeling is a het getal dat midden tussen 10^3 en 10^4 in zit. Bereken a in gehelen nauwkeurig.

Opgave 4

Maak zelf een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling, of gebruik een blad enkellogaritmisch papier. Gegeven is de functie $N(t) = 12000 \cdot 0{,}8^t$.

a Teken de grafiek van $N(t)$ in jouw assenstelsel (of op het enkellogaritmische papier).

b Toon met behulp van de eigenschappen van logaritmen aan dat er tussen $\log(N)$ en t een lineair verband bestaat.

Opgave 5

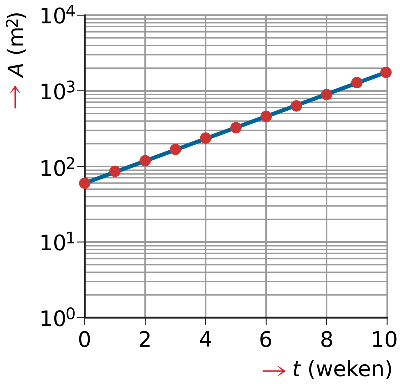
Elk verband van de vorm $y = b \cdot g^x$ kan worden geschreven als $\log(y) = \log(g) \cdot x + \log(b)$.

a Leg uit dat dit betekent dat elke exponentiële functie op enkellogaritmisch papier een rechte lijn als grafiek heeft.

b Het omgekeerde geldt ook: als $\log(y) = a \cdot x + b$, dan is y een exponentiële functie van x. Hoe bewijs je dat?

Voorbeeld 2

Bekijk de grafiek van de groei van waterplanten. De oppervlakte A (m^2) is een functie van de tijd t (weken). Stel een bijpassende formule op.



Figuur 3.5

Antwoord

De grafiek is een rechte lijn met alleen op de verticale as een logaritmische schaal. Er bestaat daarom een exponentieel verband tussen A en t, en wel: $A = b \cdot g^t$.

Uit de figuur lees je af:

- bij $t = 0$ hoort $A \approx 60$, dus $b \approx 60$;
- bij $t = 8$ hoort $A \approx 900$.

De groeifactor per acht weken is ongeveer $\frac{900}{60}$.

De groeifactor per week is ongeveer $\left(\frac{900}{60}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}40$.

Je vindt dus: $A(t) \approx 60 \cdot 1{,}40^t$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** staat een rechte lijn in een assenstelsel waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft. Daar kun je een functievoorschrift bij opstellen van de vorm $A = b \cdot g^t$.

a Lees de waarden voor A bij $t = 2$ en $t = 10$ af.

b Stel met behulp van deze waarden $A(t)$ op.

c Waarom is het handiger om de waarde bij $t = 0$ te gebruiken?

Opgave 7

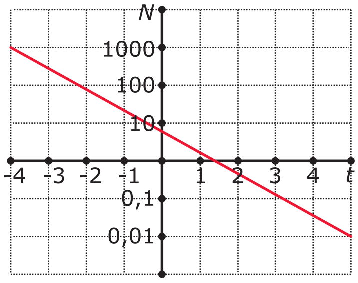
Bekijk de grafiek van de functie $N(t)$.

a Welke coördinaten heeft het snijpunt van de twee assen?

b Lees twee waarden voor $N(t)$ uit de grafiek af en stel een formule op voor $N(t)$.

c Bereken ter controle met die formule het snijpunt met de getekende t-as.

d Waarom heeft het geen zin om te vragen naar de oplossingen van $N(t) = 0$?



Figuur 3.6

Voorbeeld 3

De effectieve geluidsdruk p (pascal, 1 Pa = 1 N/m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies. De waarden van p variëren echter nogal: de gehoordrempel ligt bij ongeveer 0,00002 Pa, de pijngrens bij 200 Pa. Daarom voerde Alexander Graham Bell een praktischer grootheid in, het geluidsdrukniveau L uitgedrukt in decibel (dB). Het verband tussen L en p wordt gegeven door $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$.

Hierin is $p_0 = 0{,}00002$ Pa.
Hoe groot is de effectieve geluidsdruk van een rijdende scooter (75 dB)? Hoeveel dB bedraagt het geluidsdrukniveau van twee van die scooters?

Antwoord

Voor de rijdende scooter geldt: $L = 75$ en dus $75 = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$.

Hieruit volgt:

$$\frac{75}{20} = \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$$

$$10^{\frac{75}{20}} = \frac{p}{0{,}00002}$$

$$p = 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{75}{20}} \approx 0{,}1125$$

Heb je twee van die rijdende scooters, dan is hun totale effectieve geluidsdruk ongeveer $2 \cdot 0{,}1125 = 0{,}2250$ Pa. Daarbij hoort een geluidsdrukniveau van ongeveer $L = 20 \cdot \log\left(\frac{0{,}2250}{0{,}00002}\right) \approx 81$ dB.

Opgave 8

Bekijk de formule van het geluidsdrukniveau L (dB) afhankelijk van de effectieve geluidsdruk p (pascal, Pa) in **Voorbeeld 3**.

a Leg uit, waarom een decibelschaalverdeling eigenlijk een logaritmische schaal is.

b In een bibliotheek is het erg rustig met een geluidsdrukniveau van ongeveer 35 dB. Hoeveel bedraagt daar de effectieve geluidsdruk?

c Je loopt op de stoep, het autoverkeer levert een geluidsdrukniveau van ongeveer 55 dB. Iemand zet opeens een elektrische drilboor aan van 95 dB. Hoeveel bedraagt het totale geluidsdrukniveau op dat moment?

d Als het geluidsdrukniveau tijdens een concert toeneemt van 110 naar 130 dB, hoeveel keer zo groot wordt dan de effectieve geluidsdruk?

Verwerken

Opgave 9

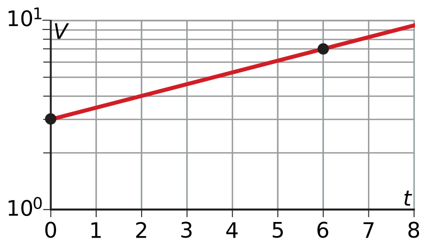
De bevolking van een middelgrote stad groeit vanaf 1 januari 2010 met (ongeveer) 6% per jaar. Op 1 januari 2010 zijn er 80000 inwoners.

a Stel een formule op voor het aantal inwoners A afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010.

b Teken op enkellogaritmisch papier de grafiek van $A(t)$ en schat daarmee het aantal inwoners op 1 januari 2025. Controleer je antwoord door berekenen.

Opgave 10

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend van een toenemende hoeveelheid V als functie van de tijd t.



Figuur 3.7

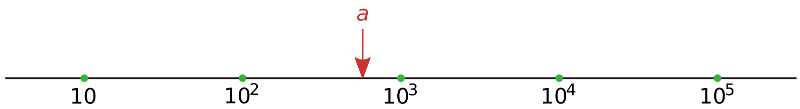
a Geef een formule voor $V(t)$.

b Bereken de waarde van t waarvoor $V(t) = 5$. Rond af op twee decimalen. Controleer je antwoord met de grafiek.

c Voor negatieve waarden van t heeft de grafiek een snijpunt met de t-as. Bereken de bijbehorende waarde van t. Rond af op twee decimalen.

Opgave 11

Lees het getal a af op deze logaritmische schaal.



Figuur 3.8

Opgave 12

Bekijk de tabel met gegevens over een bacteriecultuur. t is gegeven in uren, en $N(t)$ in aantallen.

t (uur)	0	1	2	3	4	5	6
N	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 3.1

a Teken de bijbehorende grafiek op enkellogaritmisch papier.

b Is er sprake van exponentiële groei?

c Stel een formule op voor N als functie van t.

Opgave 13

De batterij van een laptop verliest bij gebruik ongeveer 6% per uur aan batterijduur. Als er nog maar voor 10% aan batterij is, geeft de laptop een waarschuwing dat de batterij opgeladen moet worden.

a Stel een formule op voor het resterende acculadingspercentage P van de accu na u uren gebruik, als je uitgaat van een volle batterij.

b Bereken hoelang je de laptop kunt gebruiken voordat je een melding krijgt dat de batterij opgeladen moet worden. Geef je antwoord in uren.

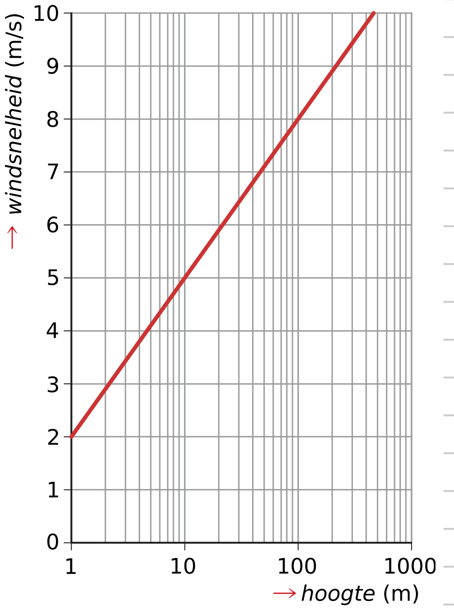
c Laat zien, dat de grafiek van P afhankelijk van u op enkellogaritmisch papier een rechte lijn is.

Toepassen

Opgave 14: Windsnelheid

De windsnelheid neemt toe met de hoogte. De windsterkte is onder meer afhankelijk van de ruwheid van het terrein en de stabiliteit van de atmosfeer. In de grafiek zijn de resultaten weergegeven van metingen op dagen met een neutrale atmosfeer.

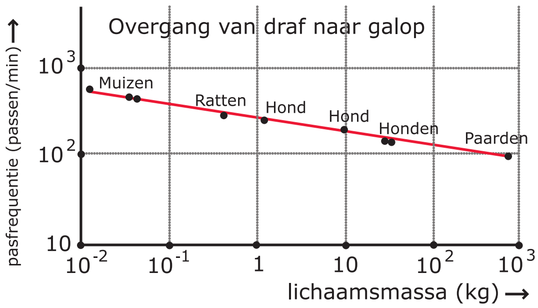
Het verband tussen de windsnelheid w en de hoogte h kan worden geschreven in de vorm $w = a \cdot \log(h) + b$. Toon met een berekening aan dat $a = 3$ en $b = 2$.



Figuur 3.9

Opgave 15: Pasfrequentie afhankelijk van lichaamsmassa

Bekijk de grafiek. Je ziet voorbeelden van zoogdieren die bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) overgaan van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt, hangt af van de lichaamsmassa (kg). Noem de lichaamsmassa m (kg) en de pasfrequentie P. De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden.



Figuur 3.10

a Omdat op beide assen een logaritmische schaal is gebruikt, is in feite $\log(P)$ uitgezet tegen $\log(m)$. Voor het punt dat hoort bij paarden geldt dan ongeveer $\log(m) = 2{,}9$ en $\log(P) = 2{,}0$. Bepaal zelf de bijpassende waarden van het punt dat bij een kleine hond hoort.

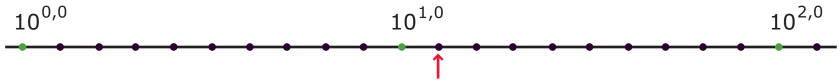
b Leid nu een formule af voor $\log(P)$ als functie van $\log(m)$.

c Met behulp van de eigenschappen van logaritmen kun je nu een formule afleiden voor P als functie van m. Laat zien hoe dat gaat.

Testen

Opgave 16

Teken een getallenlijn met een logaritmische schaalverdeling (neem deze figuur over).



Figuur 3.11

a Welk getal hoort bij het pijltje?

b Teken een pijltje dat hoort bij het getal 2.

c Geef aan waar 55 en waar $10^{0,5}$ moeten staan.

d Geef ook $3\frac{1}{4}$ en $10^{\frac{1}{4}}$ aan.

Opgave 17

Bij een biologisch experiment groeit in een vijver een waterplant. De waterplant bedekt een steeds groter deel van het wateroppervlak. Elke week meet men de oppervlakte die de waterplant bedekt. De meetwaarden staan in de tabel.

aantal weken	0	1	2	3	4	5	6
oppervlakte (dm^2)	40	57	89	134	200	305	447

Tabel 3.2

a Zet de punten $(0,40),(1,57),...,(6,447)$ uit op enkellogaritmisch papier.

b Trek door deze punten zo goed mogelijk een rechte lijn.

c Van welk type groei is hier sprake? Waar zie je dat aan?

d Stel een formule op voor de oppervlakte die de waterplant bedekt, afhankelijk van de tijd t in weken.

2.4 Logaritmische functies

Inleiding

Logaritmen ontstaan als inverse bewerking van exponentiële functies. Ook met logaritmen kun je functievoorschriften maken. Het prototype is de functie $f(x) = {}^{g}\log(x)$. Alle functies die hieruit door de bekende transformaties kunnen ontstaan noem je logaritmische functies. En die ga je nu bekijken...

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische functies te werken;
- de karakteristieken van logaritmische functies te bepalen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies;
- transformaties van functies toepassen;
- werken met logaritmen.

Verkennen

Opgave V1

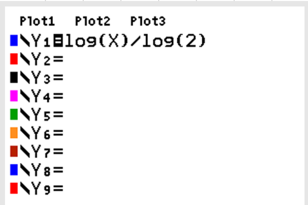
Op je grafische rekenmachine kun je de grafiek van $f(x) = {}^{2}\log(x)$ in beeld brengen.

Je voert dan in: $y_1 = \frac{\log(x)}{\log(2)}$ of $y_1 = \log_2(x)$.

a Breng de grafiek in beeld. Welk domein en welk bereik heeft de functie?

b Welke asymptoot heeft de grafiek van f?

c Bekijk de tabel met je GR. Bij welke waarden van x krijg je gehele functiewaarden?



Figuur 4.1

Uitleg

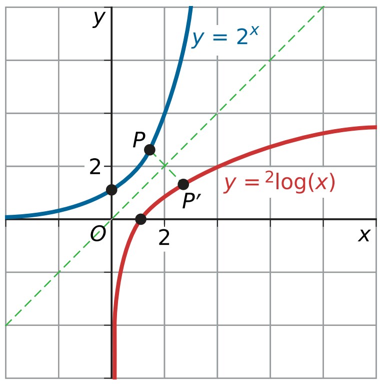
Bekijk de applet.

Je ziet hier de grafieken van $y_1 = 2^x$ en van $y_2 = {}^{2}\log(x)$.

Beide grafieken zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Dat komt omdat uit $y = 2^x$ volgt $x = {}^{2}\log(y)$ en om de grafiek van y_2 te krijgen, moet je x en y verwisselen.

De karakteristieken van een logaritmische functie zijn daarom af te leiden uit die van de bijbehorende exponentiële functie door x en y te verwisselen. Beide functies $y = g^x$ en $y = {}^{g}\log(x)$ zijn elkaars terugrekenfunctie.



Figuur 4.2

Opgave 1

Gegeven zijn de functies $y_1 = 2^x$ en $y_2 = {}^2\log(x)$.

a Plot beide grafieken op de grafische rekenmachine.

b Het punt $(4,2)$ ligt op de grafiek van y_2. Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

c Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1.

d Welk verband bestaat er tussen het bereik van y_1 en het domein van y_2?

e Welke asymptoot heeft y_2?

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

De eigenschappen van y_2 kun je afleiden uit die van y_1.
Geef het domein, het bereik en de asymptoot van de functie y_2.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

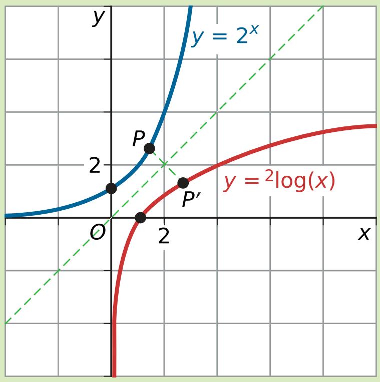
Bekijk de applet.

Een functie zoals $f(x) = {}^g\log(x)$ heet een **logaritmische functie**.
Er moet gelden: $g > 0$ en $g \neq 1$.

De grafieken van de functies $y = g^x$ en $y = {}^g\log(x)$ zijn elkaars terugrekenfunctie en dus elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$. De karakteristieken van $y = {}^g\log(x)$ zijn daarom af te leiden uit die van $y = g^x$:

- het domein is $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$
- het bereik is $B_f = \mathbb{R}$ (alle reële getallen) ofwel $\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend
- het snijpunt met de x-as (nulpunt) vind je door op te lossen: ${}^g\log(x) = 0$
- de y-as ($x = 0$) is de verticale asymptoot van de grafiek

Alle functies die door verschuiven en/of herschalen uit $y = {}^g\log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.

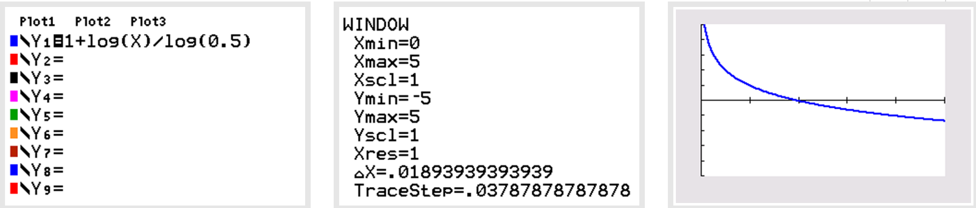


Figuur 4.3

Voorbeeld 1

Gegeven is de logaritmische functie $f(x) = 1 + {}^{0,5}\log(x)$.
Hoe ontstaat de grafiek van $f(x)$ uit die van $y = {}^{0,5}\log(x)$?
Geef de karakteristieken van deze functie en plot de grafiek.

Antwoord



Figuur 4.4

- De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = {}^{0,5}\log(x)$ door deze 1 eenheid in de y-richting te verschuiven.
- Omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt, is de grafiek dalend.
- Verder moet $x > 0$, hieruit volgt $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$.
- De verticale asymptoot is $x = 0$, de grens van het domein.
- Het snijpunt met de x-as (nulpunt):

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 1 + {}^{0,5}\log(x) &= 0 \\ {}^{0,5}\log(x) &= -1 \\ x &= 0{,}5^{-1} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Het snijpunt met de x-as is $(2,0)$.

Opgave 3

Maak de grafiek van de functie $f(x) = 2 + {}^{3}\log(x)$.

a Schrijf het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f op.

b Voor welke waarde van x is $f(x) = 0$?

c Voor welke waarden van x geldt $f(x) > 0$?

d Voor welke waarden van x geldt $f(x) < 0$?

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = {}^{0,5}\log(x + 5) + 1$.

a Door welke verschuiving en/of herschaling ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{0,5}\log(x)$?

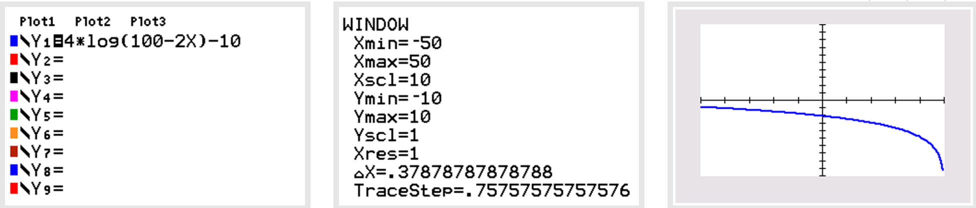
b Bepaal de asymptoot, het domein en het bereik van f.

c Bereken het nulpunt van f.

Voorbeeld 2

Gegeven is de logaritmische functie $f(x) = 4 \cdot \log(100 - 2x) - 10$.
Hoe ontstaat de grafiek van $f(x)$ uit die van $y = \log(x)$?
Geef de karakteristieken van deze functie en plot de grafiek.

Antwoord



Figuur 4.5

- De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \log(x)$ door herschalen met $-\frac{1}{2}$ in de x-richting, vervolgens -100 verschuiven in de x-richting, daarna herschalen met 4 in de y-richting en ten slotte -10 verschuiven in de y-richting.

Door de grote getallen is het verstandig om systematisch de karakteristieken te zoeken:

- $100 - 2x > 0$ geeft: $D_f = \langle \leftarrow, 50 \rangle$.
  Hiermee bepaal je de vensterinstellingen van de grafische rekenmachine voor de x-as.
- De verticale asymptoot is $x = 50$, de grens van het domein.
- Het bereik is $B_f = \mathbb{R}$, want deze functie kan ontstaan uit $y = \log(x)$, de standaard 10-logaritme.

Plot de grafiek.

- Het snijpunt met de x-as (nulpunt):

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
4 \cdot \log(100 - 2x) - 10 &= 0 \\
\log(100 - 2x) &= 2{,}5 \\
100 - 2x &= 10^{2{,}5} \\
-2x &= 10^{2{,}5} - 100 \\
x &= \frac{10^{2{,}5} - 100}{-2} \\
x &\approx -108{,}11
\end{aligned}$$

Het snijpunt met de x-as is ongeveer $(-108{,}11; 0)$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**. Plot de grafiek van de functie $f(x) = -20 + 3 \cdot {}^{2}\log(x + 40)$.

a Door welke verschuivingen en/of herschaling ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{2}\log(x)$?

b Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f.

c Bereken het nulpunt van f. Rond af op één decimaal.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = -2 + 2 \cdot {}^{0,3}\log(x-1)$. Plot de grafiek.

a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f.

b Door welke verschuiving en/of herschaling ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{0,3}\log(x)$?

c Bereken algebraïsch het nulpunt van f.

Verwerken

Opgave 7

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{5}\log(x)$ en $g(x) = 5^x$.

a Voor welke waarde van x is $f(x) = 3$?

b Voor welke waarde van x is $g(x) = 125$?

c In welke lijn zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld?

d Het punt $\left(\frac{1}{25}, -2\right)$ op de grafiek van f heeft een spiegelbeeld op de grafiek van g.
Geef de coördinaten van dit spiegelbeeld.

Opgave 8

Plot de grafieken van de functies $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(x)$.

a Voor welke waarde van x is $f(x) = 3$?

b Voor welke waarde van x is $g(x) = -3$?

c Het punt $\left(\frac{1}{8}, 3\right)$ op de grafiek van f heeft een spiegelbeeld op de grafiek van g.
Geef de coördinaten van dit spiegelbeeld.

d Geef nog een punt op de grafiek van f en het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van g.

e Plot de grafieken van f en g in één figuur en los op: $f(x) = g(x)$

Opgave 9

Plot de grafiek van de functie $f(x) = -1 + 3 \cdot \log(x+4)$.

a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f.

b Door welke verschuivingen en/of herschaling ontstaat de grafiek van f uit die van $y = \log(x)$?

c Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van f.

Opgave 10

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(2-x)$.

a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van de functies f en g.

b Beschrijf hoe de grafiek van g door verschuiving en herschaling uit die van f kan ontstaan.

c Plot de grafiek van de functies f en g en los op: $f(x) = g(x)$

d In welke lijn zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld?

Opgave 11

Lichtgevoeligheid van de sensor van een fototoestel wordt uitgedrukt in een gevoeligheidsgetal. Het meest gebruikte systeem hiervoor is het ISO-systeem (International Standards Organisation). Op filmrolletjes (ouderwets...) staat meestal ook een ander gevoeligheidsgetal vermeld, de DIN-waarde. Het verband tussen ISO en DIN wordt gegeven door de formule

$y = 1 + a \cdot \log(x)$

Hierin geeft x de lichtgevoeligheid in ISO aan en y de lichtgevoeligheid in DIN. Een sensor die staat ingesteld op 100 ISO heeft een DIN-waarde 21.

Figuur 4.6

a Bereken a.

b Maak de grafiek. De meest gangbare sensors hebben een ISO-waarde tussen 50 en 6400.

c Wat is de ISO waarde van een sensor met een gevoeligheid van 31 DIN?

Toepassen

Opgave 12: Touchscreen

Bij het ontwerpen van touchscreens (aanraakschermen) voor moderne media als tablets en mobiele telefoons besteedt men veel aandacht aan het gebruiksgemak. Gebruikers willen immers snel kunnen navigeren. Bekijk de afbeelding van een touchscreen met een menu dat bestaat uit dertien knoppen. De tijd die je nodig hebt om in een menu de juiste knop te vinden, hangt mede af van het aantal knoppen in het menu. Volgens de psycholoog Hick kun je deze benodigde tijd T berekenen met de formule: $T(n) = b \cdot {}^{2}\log(n + 1)$.

Hierbij is T de tijd in seconden, n het aantal knoppen in het menu en b een positieve constante die afhangt van de behendigheid van de gebruiker.

Figuur 4.7

a Om de juiste knop te vinden op het touchscreen van de foto heeft Irene 8 seconden nodig. Bereken met de formule van Hick haar waarde van b in één decimaal.

Pim is veel handiger met een touchscreen dan zijn vader. Hij kan in een menu met 16 knoppen even snel de juiste knop vinden als zijn vader in een menu met 4 knoppen. Dit betekent dat zijn b-waarde (b_p) kleiner is dan de b-waarde van zijn vader (b_v).

b Onderzoek of dit betekent dat de b-waarde van Pim precies half zo groot is als die van zijn vader.

Sommige gebruikers vinden een menu met veel knoppen onoverzichtelijk. Daarom deelt men een menu soms op in submenu's met minder knoppen. Als er bijvoorbeeld in totaal achttien knoppen zijn, kan de ontwerper ervoor kiezen om:

methode I: één menu van achttien knoppen te maken

of

methode II: een menu met drie knoppen te maken, waarbij na elk van de drie mogelijke keuzes weer een submenu met zes knoppen verschijnt.

De gebruiker wint hiermee overzichtelijkheid, want hij weet nu precies in welk submenu hij moet zoeken, maar hij verliest tijd doordat hij twee keer (in een menu) de juiste knop moet zien te vinden. Als $b = 0{,}9$ duurt het keuzeproces bij methode II minstens $0{,}5$ seconden langer dan bij methode I.

c Toon met behulp van de formule voor $T(n)$ aan dat dit juist is.

Uit de formule van Hick volgt dat één menu met alle knoppen altijd sneller werkt dan een opdeling in submenu's. Dus één menu met $p \cdot q$ knoppen is altijd sneller dan een hoofdmenu met p knoppen, gevolgd door p submenu's met elk q knoppen.

d Neem $b = 1$ en toon aan dat $T(p)+T(q)$ altijd groter is dan $T(p \cdot q)$.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2014, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 13

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften

$f(x) = 2 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$ en $g(x) = {}^{3}\log(x-2)$.

a Bepaal domein, bereik en asymptoot van f en teken de grafiek van f.

b Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$?

c Bepaal domein, bereik en asymptoot van g en teken de grafiek van g.

d Hoe kan de grafiek van g ontstaan uit die van $y = {}^{3}\log(x)$?

e Los op in drie decimalen nauwkeurig: $f(x) = g(x)$.

Opgave 14

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = k \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constanten G_0 en k hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

a Mark (8 jaar) woont in Nederland en heeft een lengte van $1{,}30$ m en weegt $26{,}3$ kg. Bereken k in gehelen nauwkeurig. Neem aan dat Mark wat lengte en gewicht betreft een gemiddeld Nederlands kind is.

b Helen is $1{,}40$ m lang. Schat haar gewicht in kg.

Practicum: Logaritmische functies

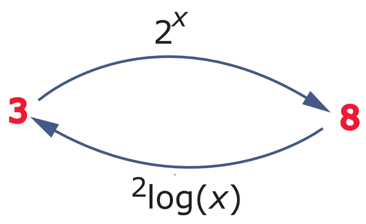
Met deze applet maak je logaritmische functies van de vorm $y = a \cdot {}^{g}\log(b(x-c)) + d$.
Verzin eerst zo'n functie (neem de waarden van a, b, c en d niet te groot), bedenk hoe hij kan ontstaan uit $y = {}^{g}\log(x)$ en wat de karakteristieken zijn. Controleer dan je antwoord met de applet.

Bekijk de applet.

2.5 Logaritmische vergelijkingen

Inleiding

Onder andere bij het berekenen van nulpunten van functies ben je al vergelijkingen tegengekomen waarin logaritmen voorkomen. Uit de definitie volgt dat je vanuit een logaritme kunt terugrekenen door een exponentiële functie met hetzelfde grondtal te gebruiken. Hiermee kun je vergelijkingen met logaritmen oplossen. Soms gebruik je er ook de eigenschappen van logaritmen bij. Bij ongelijkheden moet je ook nog rekening houden met het domein van de logaritme!



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen en ongelijkheden met logaritmen oplossen;
- logaritmische functies herleiden naar exponentiële functies en omgekeerd.

Voorkennis

- werken met logaritmische functies;
- de eigenschappen van logaritmen gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

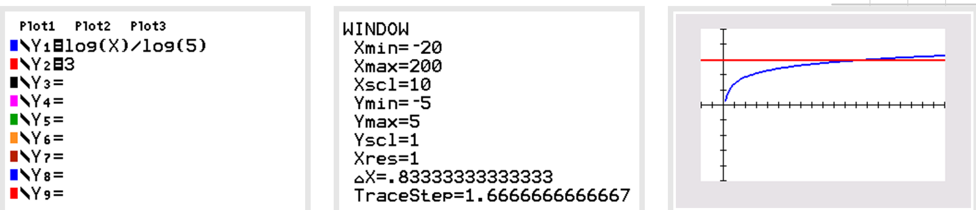
Los op: ${}^{5}\log(x) < 3$.

Uitleg

Los op: ${}^{5}\log(x) < 3$.

Zo'n ongelijkheid los je op met behulp van grafieken.

- Eerst los je de bijbehorende vergelijking ${}^{5}\log(x) = 3$ algebraïsch op door aan beide zijden een exponentiële functie met grondtal 5 toe te passen: $x = 5^3 = 125$.
- Vervolgens bekijk je de grafieken van $y_1 = {}^{5}\log(x)$ en $y_2 = 3$. Daarbij moet je vooral letten op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.
- De oplossing wordt: $0 < x < 125$.



Figuur 5.2

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot {}^{2}\log(x) + 16$.

a Plot de grafiek van f.

b Bepaal algebraïsch voor welke waarde van x geldt: $f(x) = 38$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot {}^{2}\log(x) + 16$.

De ongelijkheid $3 \cdot {}^{2}\log(x) + 16 \leq 38$ moet worden opgelost.

a Bepaal domein, bereik en asymptoot van f.

b Lees de oplossing van de ongelijkheid af uit de grafiek van f.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **logaritmische vergelijking** ${}^{g}\log(x) = a$ moet gelden:
$g > 0$ en $g \neq 1$ en $a > 0$.

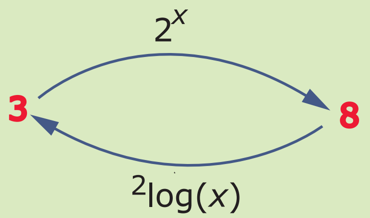
De oplossing vind je als volgt:

$$\begin{aligned} {}^{g}\log(x) &= a \\ g^{{}^{g}\log(x)} &= g^{a} \\ x &= g^{a} \end{aligned}$$

De **logaritmische ongelijkheid** ${}^{g}\log(x) < a$ los je als volgt op:

- Los de bijbehorende vergelijking ${}^{g}\log(x) = a$ op.
- Plot en bekijk de grafieken van $y_1 = {}^{g}\log(x)$ en $y_2 = a$.
- Lees de oplossing uit de grafiek af, waarbij je let op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.

Bij ingewikkelder vergelijkingen waarin meerdere logaritmen voorkomen, heb je vaak ook nog de eigenschappen van het optellen of aftrekken van logaritmen nodig.



Figuur 5.3

Voorbeeld 1

Los op: $10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1) \leq 45$.

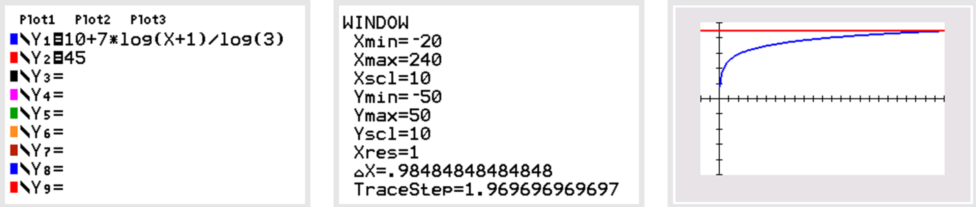
Antwoord

Plot de grafieken van $y_1 = 10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1)$ en $y_2 = 45$ op de grafische rekenmachine. Bedenk vooraf voor de logaritmische functie dat het domein $\langle -1, \rightarrow \rangle$ is, met een verticale asymptoot $x = -1$. Bepaal hiermee en met $y_2 = 45$ de vensterinstellingen.

Los de bijbehorende vergelijking op.

$$\begin{aligned} 10 + 7 \cdot {}^{3}\log x + 1 &= 45 \\ {}^{3}\log(x+1) &= 5 \\ x + 1 &= 3^5 = 243 \\ x &= 242 \end{aligned}$$

Bekijk de grafiek en lees de oplossing af: $-1 < x \leq 242$.



Figuur 5.4

Opgave 3

Los op: $2 + 3 \cdot {}^{2}\log(x - 4) \leq 11$

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^{0{,}5}\log(x + 5)$.

a Los algebraïsch op: $f(x) = -3$

b Bepaal domein, bereik en de vergelijking van de asymptoot van f en teken de grafiek.

c Los op: $f(x) \geq -3$

Opgave 5

Plot met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(5 - 2x)$.

a Bepaal van beide functies het domein.

b Noteer van beide functies de vergelijking van de asymptoot.

c Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

d Los op: $f(x) > g(x)$

Voorbeeld 2

Los op: ${}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x + 2) = 3$.

Antwoord

Ga stap voor stap te werk.

$$\begin{aligned}
{}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x+2) &= 3 && \text{logaritmen optellen}\\
{}^{2}\log(x(x+2)) &= 3 && \text{beide zijden een exponentiële functie met grondtal 2 toepassen}\\
x(x+2) &= 8 && \text{haakjes wegwerken en op 0 herleiden}\\
x^2 + 2x - 8 &= 0 && \text{ontbinden in factoren}\\
(x-2)(x+4) &= 0 && \text{oplossingen opschrijven}\\
x = -4 \vee x &= 2
\end{aligned}$$

Vanwege het domein van een logaritme moet $x > 0$ en $x + 2 > 0$. Alleen $x = 2$ voldoet hier aan en dit is daarom de enige oplossing van de gegeven vergelijking.

Opgave 6

Los algebraïsch op.

${}^{6}\log(x) + {}^{6}\log(x - 1) = 1$

Opgave 7

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = 4$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) \leq 4$

c $-5 + 4 \cdot {}^{2}\log(x-2) = 11$

d $-5 + 4 \cdot {}^{2}\log(x-2) \leq 11$

e ${}^{3}\log(x-2) = 1 + 5 \cdot {}^{3}\log(2)$

f $\log(2x) - \log(x-1) = 2$

Voorbeeld 3

De effectieve geluidsdruk p (in pascal, 1 Pa = 1 Nm^{-2}, dus 1 newton per m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies. De waarden van p variëren echter nogal: de gehoordrempel ligt bij ongeveer 0,00002 Pa, de pijngrens bij 200 Pa. Daarom voerde Alexander Graham Bell een praktischer grootheid in, het geluidsdrukniveau L uitgedrukt in decibel, dB.

Het verband tussen het geluidsdrukniveau L en de effectieve geluidsdruk p wordt gegeven door $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$.

Hierin is $p_0 = 0{,}00002$ Pa, de gehoorgrens.
Laat zien dat p een exponentiële functie van L is.

Antwoord

Herleid de gegeven formule naar de vorm $p = ...$

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

$p_0 = 0{,}00002$ invullen

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$$

beide zijden /20

$$\frac{L}{20} = \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$$

als $x = {}^{g}\log(y)$ dan $g^x = y$

$$10^{\frac{L}{20}} = \frac{p}{0{,}00002}$$

beide zijden $\times 0{,}00002$

$$p = 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{L}{20}}$$

Omdat $10^{\frac{L}{20}} = \left(10^{\frac{1}{20}}\right)^L \approx 1{,}12^L$ kun je dit noteren als: $p \approx 0{,}00002 \cdot 1{,}12^L$. Inderdaad is p een exponentiële functie van L.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt de gegeven formule van de effectieve geluidsdruk herleid tot een exponentiële functie van de vorm $p = a \cdot g^L$.

a Voer zelf de herleiding uit zonder naar het voorbeeld te kijken.

b Hoeveel bedraagt de effectieve geluidsdruk bij een geluidsdrukniveau van 20 dB?

c Hoeveel bedraagt het geluidsdrukniveau bij een effectieve geluidsdruk van 0,001 Pa?

Opgave 9

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats:

$h = -19 \log(p) + 57$

waarin:

- p de druk in hectopascal,
- h de hoogte in km boven zeeniveau is.

Je kunt deze formule herleiden naar de vorm $p = a \cdot g^h$.

a Laat zien, hoe dat gaat.

b Je kunt de formule ook de vorm $p = a \cdot 10^{k \cdot h}$ geven. Hoe ziet de formule er dan uit?

Verwerken

Opgave 10

Plot de grafiek van de functie: $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x)$

a Noteer het domein en het bereik van f.

b Los algebraïsch op: $f(x) < 0$.

Opgave 11

Plot de grafiek van de functie: $g(x) = -10 + 2 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(x-1)$

a Noteer het domein en het bereik van g.

b Los algebraïsch op: $g(x) \geq -14$

Opgave 12

Los algebraïsch op.

a ${}^{3}\log(x) = 2 \cdot {}^{3}\log(5)$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2)$

c $5 - {}^{2}\log(x) = 0$

d ${}^{5}\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^{5}\log(3)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2-x)$

f ${}^{5}\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^{5}\log(x)$

Opgave 13

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = -1 + \log(4-x)$.

a Bepaal van beide functies het domein, het bereik en de asymptoot.

b Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

c Los op: $f(x) \leq g(x)$.

d Los op: $f(x) > g(x)$.

Opgave 14

Druk q uit in p:

a $p = 15 - {}^{3}\log(5 - q)$

b $p = 600 + 15 \cdot \log\left(\frac{q}{200}\right)$

Opgave 15

De formule $t = {}^{0,8}\log\left(\frac{6000-N}{20}\right)$ is te herleiden tot een formule waarbij N een functie is van t.

Toon dat aan.

Toepassen

Opgave 16: Breedte van wegen

In de jaren vijftig deed de Amerikaan D.L. Gerlough onderzoek naar de voetgangersveiligheid van wegen. Als er veel verkeer over een weg gaat, is er voor voetgangers weinig gelegenheid om veilig over te steken. Daarom stelde Gerlough de zogenaamde veilige norm op. Een weg voldoet aan deze veilige norm wanneer er zich gemiddeld elke minuut een gelegenheid voordoet om veilig over te steken. Dat lukt alleen als het aantal auto's dat per uur passeert onder een maximum blijft. Dit maximum is N_{max} en het is afhankelijk van de breedte van de weg. Gerlough beperkte zich in zijn onderzoek tot wegen met een breedte tussen 2 meter en 9 meter. Hij kwam tot de volgende formule:

$N_{\text{max}} = \frac{8289,3}{B} \cdot (1,778 - \log(B))$

In deze formule is B de breedte van de weg in meters. Vanzelfsprekend is deze formule een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model is enig inzicht te krijgen in de veiligheid bij de aanleg van wegen.

a Over een weg passeren in de spits 800 auto's per uur. Bereken in decimeters nauwkeurig hoe breed deze weg ten hoogste mag zijn zonder dat de veilige norm wordt overschreden.

Bij een brede weg duurt het oversteken langer dan bij een smalle weg. Voor wegen die voldoen aan de veilige norm betekent dit dat er bij een brede weg per uur minder auto's mogen passeren dan bij een smalle weg. De grafiek van N_{max} moet dus dalend zijn. De formule voor N_{max} moet hiermee in overeenstemming zijn.

b Leg uit hoe je uitsluitend aan de hand van de formule voor N_{max} – dus zonder gebruik van de grafische rekenmachine – kunt beredeneren dat hier sprake is van een dalende functie.

Een weg die voldoet aan de veilige norm, wordt 0,50 meter breder gemaakt. Volgens de formule neemt N_{max} daardoor met 126 af.

c Onderzoek met behulp van de grafische rekenmachine hoe breed de weg oorspronkelijk was. Geef je antwoord in decimeters nauwkeurig.

(bron: examen wiskunde A1,2 in 2005, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 17

Los algebraïsch op:

a ${}^{7}\log(x-5)=0$

b ${}^{0,25}\log(x)=-{}^{0,25}\log(5)$

c ${}^{4}\log(x)=0{,}5-{}^{4}\log(3)$

d ${}^{\frac{1}{2}}\log(x)+{}^{\frac{1}{2}}\log(2x)=0$

Opgave 18

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x)={}^{3}\log(2x)$ en $g(x)={}^{3}\log(6-x)$.

a Bepaal domein, bereik en de asymptoot van beide functies.

b Bereken voor welke x geldt $f(x)=-2$.

c Los algebraïsch op: $f(x)>9$.

d Bereken voor welke x geldt $g(x)=0$.

e Los algebraïsch op: $f(x)=g(x)$.

f Los algebraïsch op: $f(x)\geq g(x)$.

Opgave 19

De formule $k=4\cdot\log\left(\frac{D+10}{100}\right)+5$ is zo te herschrijven dat D een exponentiële functie is van k.

Toon dat aan.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met logaritmen**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Logaritmische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- logaritme — grondtal
- definitieformules — eigenschappen van logaritmen
- logaritmische schaal
- logaritmische functie
- logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden

Activiteitenlijst

- logaritmen gebruiken om exponentiële vergelijkingen op te lossen
- definitieformules en eigenschappen van logaritmen gebruiken — vergelijkingen met logaritmen oplossen
- werken met logaritmische schalen — functievoorschrift bepalen van exponentiële functie op enkellogaritmisch papier
- de karakteristieken van een logaritmische functie bepalen
- logaritmische vergelijkingen/ongelijkheden oplossen

Achtergronden

In 1614 verscheen ‘Mirifici logarithmorum canonis descriptio’ van **sir John Napier (1550—1617)**. Hierin staat de eerste beschrijving van logaritmen. In het voorwoord legt Napier uit dat zijn doel was het vinden van een eenvoudige manier om grote getallen te vermenigvuldigen, te delen, te kwadrateren en er wortels uit te trekken. Hij voerde een bepaalde handeling op die grote getallen uit waardoor hij er getallen van maakte waarmee hij door eenvoudig optellen en aftrekken hetzelfde resultaat verkreeg als andere door lastige vermenigvuldigingen en delingen. Die handeling (een functie zou je nu zeggen) noemde hij ‘logaritme nemen’ (‘logos arithmos’ is ‘verhouding van getallen’).

Figuur 6.1

Een voorbeeld:

Stel je wilt $a \cdot b = 1296 \cdot 63508$ berekenen. Je neemt van beide getallen de logaritme (grondtal 10): $\log(1296) = 3{,}112605...$ en $\log(63508) = 4{,}8028284....$
Nu gebruik je de rekenregel: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$.
Dus is $\log(a \cdot b) = 3{,}112605... + 4{,}8028284... = 7{,}915433...$
Tenslotte werk je die logaritme weer weg en je vind het antwoord 82306368.

Je ziet hoe Napier van een vervelende vermenigvuldiging $1296 \cdot 63508$ een gemakkelijke optelling maakte! In de tijd dat er geen elektronische rekenmachines waren, was dit een enorm belangrijke stap vooruit, voor het berekenen van de logaritmen werden tabellenboeken gemaakt (die tot voorbij het midden van de vorige eeuw in gebruik waren, ook op school). Napier's logaritmen hadden trouwens nog niet het grondtal 10 (zoals in het voorbeeld), dat laatste is het werk van **Henry Briggs (1561—1630)**. Hij las in 1615 de Latijnse versie van Napier's geschrift en was er meteen van onder de indruk. Hij suggereerde Napier zijn logaritme zo aan te passen, dat $\log(1) = 0$ en het grondtal 10 is. Ze werden het eens en Briggs maakte een tabel voor logaritmen van getallen gebaseerd op grondtal 10.

Testen

Opgave 1

Iemand verwachtte in 2002 dat de jaren daarna aandelen 11% per jaar in waarde zouden stijgen.

a Hoelang duurt het in dat geval totdat de waarde van de aandelen 1,5 keer zo groot is geworden? Rond af op gehele jaren.

b Iemand koopt voor € 2000,00 aandelen. Bereken na hoeveel jaar dit bedrag is verdubbeld. Bereken ook na hoeveel jaar het bedrag is verdrievoudigd en na hoeveel jaar het is verzesvoudigd. Laat zien hoe hiermee de eigenschap ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$ kan worden toegelicht.

Opgave 2

Een doorzichtige kunststof absorbeert per cm 27% van het licht dat er doorheen valt.

Bereken in mm nauwkeurig hoe dik de kunststof moet zijn om 50% van het licht te absorberen.

Opgave 3

Los algebraïsch op.

a ${}^{\frac{1}{3}}\log(x+2) = -2$

b ${}^{2}\log(x) = 5 - {}^{2}\log(16)$

c ${}^{5}\log\left(4x^2\right) = 2 + {}^{5}\log(x)$

d $10 + 5 \cdot {}^{2}\log(x-5) \leq 100$

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x+10) + 4$ en $g(x) = \log(-x)$.

a Bepaal van beide functies domein, bereik en de vergelijking van de asymptoot.

b Bepaal van beide functies algebraïsch het nulpunt.

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq g(x)$.

Gegeven is de functie $h(x) = f(x) + g(x)$.

d Toon aan dat $h(x) = \log\left(-100000x - 10000x^2\right)$.

Opgave 5

De luchtdruk p in millibar hangt af van de hoogte h (kilometer) boven het zeeniveau. Bij benadering geldt

$$h = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

waarin p_0 de luchtdruk op zeeniveau voorstelt.

a Neem aan dat $p_0 = 1010$ millibar. Plot de grafiek van h als functie van p.

In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 400 millibar gemeten. De luchtdruk op zeeniveau is op dat moment 1010 millibar.

b Bereken hoe hoog het vliegtuig vliegt.

c Neem aan dat $p_0 = 1010$. Druk p uit in h. Rond waar nodig af op drie decimalen.

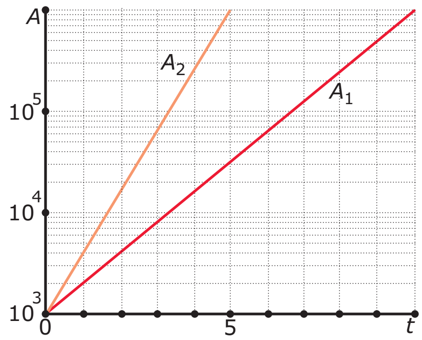
d Verklaar waarom de grafiek van h met $p_0 = 930$ millibar ontstaat door de grafiek bij a in verticale richting te verschuiven.

De bemanning van een vliegtuig gaat uit van 1000 millibar op zeeniveau en berekent dat het vliegtuig zich op 3 kilometer hoogte bevindt. De luchtdruk op zeeniveau is echter 1030 millibar.

e Hoe hoog bevindt het vliegtuig zich in werkelijkheid? Rond af op meters.

Opgave 6

In een laboratorium is onderzocht hoe de toename van het aantal bacteriën in 10 gram salade afhankelijk is van de temperatuur. Bekijk in de grafiek de resultaten bij een temperatuur van 0 en bij een temperatuur van 4 graden Celcius.



Figuur 6.2

a Van hoeveel bacteriën is bij het onderzoek uitgegaan?

b Geef zowel voor A_1 als A_2 de formule van het aantal bacteriën A na t dagen.

c Bereken hoeveel keer zo veel bacteriën er na tien dagen bij 4 °C zijn vergeleken met de situatie bij 0 °C.

d Bereken hoeveel de verdubbelingstijd bij een koeling bij 4 °C bedraagt.

Volgens de onderzoekers is er bij de toename van het aantal bacteriën als functie van de temperatuur sprake van toenemende stijging. Voor temperaturen boven 0 °C geldt: wordt de temperatuur a keer zo hoog, dan wordt de verdubbelingstijd a^2 keer zo klein.

e Geef de verdubbelingstijd van de bacterie bij 6 °C. Doe dat ook bij 10 °C.

Toepassen

Opgave 7: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip ‘zuurgraad’ gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $[H_3O^+]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $[H_3O^+] = 10^{-7}$ mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van 10^{-7}: $pH = -\log(10^{-7}) = 7$. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: $pH = -\log[H_3O^+]$.

a Bij geconcentreerd zwavelzuur is $[H_3O^+] = 18$ mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?

b Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van $11{,}5$. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie in mol/L?

c Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie van zure regen?

d Vanaf welke H_3O^+ concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?

e De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijke pH van de huid is ongeveer $5{,}5$. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie dan?

Opgave 8: C-14 methode

In levende organismen komt behalve het radioactieve koolstof C-14 ook het niet-radioactieve C-12 voor. Gelukkig is de verhouding van de hoeveelheid C-14 ten opzichte van C-12 zeer klein. Deze verhouding is constant $1 : 10^{12}$. Wanneer een organisme sterft verandert de verhouding door radioactief verval van C-14. Door de verhouding te meten kan de ouderdom van resten organisch materiaal berekend worden. De halveringstijd van C-14 is 5730 jaar.

a Een archeoloog vindt een bot waarvan de verhouding C-14 : C-12 gelijk is aan $1 : 10^{13}$. Hoeveel jaar is dat bot ongeveer oud?

b Bij een Egyptische mummie blijkt de verhouding van C-14 en C-12 ongeveer $0{,}65$ keer de verhouding van C-14 en C-12 in levende organismen te zijn. Benader de ouderdom van deze mummie.

c In 1947 zijn aan de westzijde van de Dode Zee de Dode-Zeerollen (oudtestamentische handschriften) gevonden. De verhouding van C-14 en C-12 in de perkamenten rollen bleek tussen de 77% en de 81% van die bij levende organismen te zijn. Vanaf hoeveel jaar voor het begin van de jaartelling tot hoeveel jaar erna zijn de Dode-Zeerollen geschreven?

d Een 4500 jaar oude kist werd in een hunebed (grafkelder in de provincie Drenthe) aangetroffen. Hoe groot is de verhouding van de aangetroffen hoeveelheid C-14 en C-12 ongeveer in vergelijking met die van een houten kist uit onze tijd?

Examen

Opgave 9: Vliegtuiglawaai

Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. In milieuwetten is vastgelegd welke geluidsbelasting (hoeveel geluid) nog toegestaan is. Door deze wetten worden de groeimogelijkheden van het vliegverkeer beperkt. In deze opgave nemen we aan dat alle vliegtuigen hetzelfde geluidsniveau hebben. Dit geluidsniveau geven we aan met L. De waarde van L bepaalt hoeveel vliegtuigen jaarlijks maximaal mogen passeren. Dit maximale aantal noemen we N. Voor een gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk gold aan het eind van de vorige eeuw de voorwaarde:

$$20 \cdot \log(N) = 202 - \frac{4}{3}L$$

Door het gebruik van nieuwe technieken neemt het geluidsniveau L van vliegtuigen af.

a In een zekere periode nam L af van 75 dB naar 70 dB. Toon door berekening aan dat N in die periode meer dan verdubbelde.

b Bereken de maximale waarde van L waarbij er een half miljoen (500000) vliegtuigen mogen passeren.

In 2001 werd een nieuwe milieuwet van kracht. Voor het gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk geldt sindsdien:

$$20 \cdot \log(N) = 248 - 2L$$

De oude en de nieuwe formule leverden in 2001 dezelfde waarde van N op.

c Bereken welke waarde L in 2001 had.

d Laat zien dat de formule voor de nieuwe situatie is te herleiden tot: $N \approx 2{,}512 \cdot 10^{12} \cdot 0{,}794^{L}$.

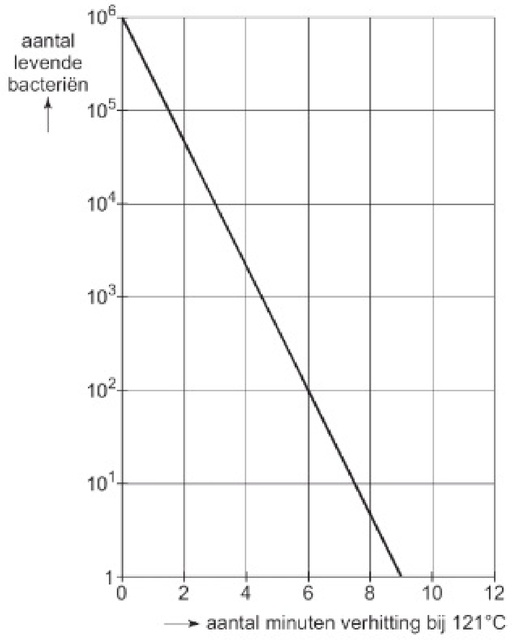
(bron: naar examen wiskunde A1 vwo 2003, tweede tijdvak, opgave 4)

Opgave 10: Sterilisatie

Om voedingswaren tegen bederf te beschermen, worden ze tijdelijk verhit. Men noemt dit steriliseren. Er zijn verschillende sterilisatiemethoden. In deze opgave kijken we naar het sterilisatieproces bij twee soorten bacteriën. De temperatuur bij dat proces is 121 °C. Naarmate de bacteriën korter aan deze temperatuur zijn blootgesteld, zullen er meer bacteriën overleven. In de figuur zie je een overlevingsgrafiek van de Bacillus stearothermophilus. Bij een overlevingsgrafiek heeft de verticale as altijd een logaritmische schaalverdeling. Het aantal bacteriën bij aanvang van het sterilisatieproces stelt men altijd op 1 miljoen. We gaan er steeds vanuit dat voor verschillende soorten bacteriën de overlevingsgrafieken rechte lijnen zijn indien de verticale as een logaritmische schaalverdeling heeft. Bij de grafiek hoort een formule van de vorm:

$$N_t = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot t}$$

Hierin is N_t het aantal bacteriën na t minuten en is r de sterftefactor. De sterftefactor is afhankelijk van het type bacteriën. Met behulp van de grafiek kun je berekenen dat de sterftefactor r van de Bacillus stearothermophilus ongeveer gelijk is aan 2,2.



Figuur 6.3

a Toon dat met een berekening aan.

De D-waarde is de tijd in minuten die nodig is om het aantal bacteriën te reduceren tot 10% van het oorspronkelijke aantal. Net als de sterftefactor is de D-waarde afhankelijk van de soort bacteriën.

b Bereken voor de Bacillus stearothermophilus de D-waarde met behulp van bovenstaande formule en leg uit hoe je deze D-waarde kunt controleren met behulp van de figuur.

Men heeft ook van andere bacteriën de D-waarde bepaald. Voor de Clostridium botulinum is deze D-waarde gelijk aan 2,55 minuten. Met dit gegeven kunnen we de overlevingsgrafiek van de Clostridium botulinum tekenen. Ook voor deze overlevingsgrafiek beginnen we weer met 1 miljoen bacteriën.

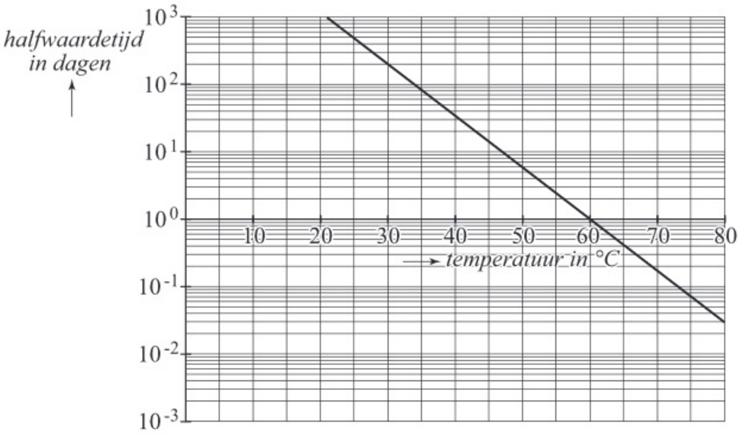
c Teken deze overlevingsgrafiek in de gegeven figuur op de **bijlage**. Licht je werkwijze toe.

(bron: examen wiskunde A1,2 vwo 2006, tweede tijdvak)

Opgave 11: Honing

Honing bestaat grotendeels uit vocht en suikers en voor een klein gedeelte uit andere stoffen, zoals enzymen en mineralen. De kwaliteit van honing hangt onder andere af van de concentratie van het enzym diastase: hoe meer diastase, hoe beter de kwaliteit van de honing. De concentratie van diastase in honing wordt aangeduid met het diastasegetal.

Door het bewaren van honing gaat er diastase verloren en neemt dus het diastasegetal af. De snelheid waarmee dat gebeurt, hangt af van de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard. Een maat waarmee de afname van het diastasegetal kan worden weergegeven, is de zogeheten halfwaardetijd. Dat is de tijd waarin het diastasegetal wordt gehalveerd. Bekijk de grafiek waarin deze halfwaardetijd is uitgezet tegen de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard.



Figuur 6.4

a Wat is beter: honing bewaren bij een lage temperatuur of bij een hoge temperatuur? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van de grafiek.

Het diastasegetal is bij de meeste soorten honing direct na winning niet hoger dan 30. Als het diastasegetal lager is dan 8, mag de honing alleen nog maar als bakkershoning worden verkocht.

Een bepaald type honing heeft bij winning een diastasegetal van 28. Deze honing wordt gedurende drie jaar bewaard bij een temperatuur van 25 °C. Ga ervan uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

b Laat met behulp van de grafiek in zien dat deze honing na drie jaar bakkershoning is geworden.

Soms versuikert honing. Er ontstaan dan suikerkorrels op de bodem van een pot honing. Versuikerde honing wordt weer vloeibaar door de honing te verhitten. Uit de grafiek blijkt dat het diastasegetal wordt gehalveerd als honing 24 uur lang op een temperatuur van 60 °C wordt gehouden. Een partij honing met een diastasegetal van 27 wordt gedurende een bepaalde tijd op een temperatuur van 60 °C gehouden. Ga er nog steeds van uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

c Bereken hoelang het duurt totdat deze partij bakkershoning is geworden.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2008, eerste tijdvak)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

www.math4all.nl

Werkblad bij Opgave 10 op pagina 85.