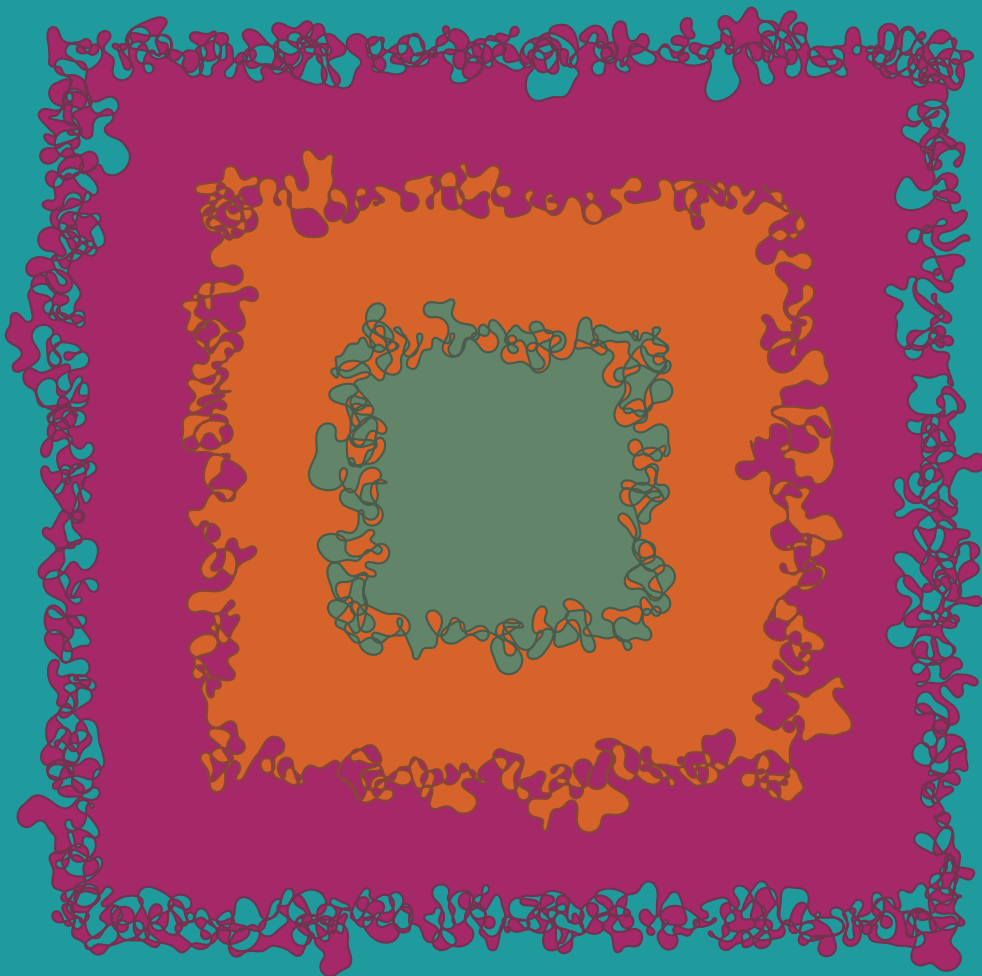


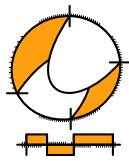
Wiskunde A

5 VWO

Katern 1

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Rijen 5

- 1.1 Rijen beschrijven 6
- 1.2 Verschilrijen en somrijen 15
- 1.3 Rekenkundige rijen 22
- 1.4 Meetkundige rijen 29
- 1.5 Dynamische modellen 36
- 1.6 Totaalbeeld 44

2 Kansmodellen 51

- 2.1 Kansverdelingen 52
- 2.2 Normale verdelingen 63
- 2.3 Kansvariabelen optellen 75
- 2.4 Wortel-n-wet 82
- 2.5 Normaal of niet? 90
- 2.6 Totaalbeeld 103

Register 113

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Rijen

1.1	Rijen beschrijven	6
1.2	Verschilrijen en somrijen	15
1.3	Rekenkundige rijen	22
1.4	Meetkundige rijen	29
1.5	Dynamische modellen	36
1.6	Totaalbeeld	44

1.1 Rijen beschrijven

Inleiding

Vaak heb je bij het voorspellen van groei- en vervalprocessen te maken met 'losse' getallen. Denk maar aan het saldo van een spaarrekening met een maandelijkse rentebijschrijving, de wekelijkse tellingen van een bepaald soort vogels, etc.

Vooraf het berekenen van het saldo op je spaarrekening is natuurlijk van groot belang...



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip rij;
- rijen beschrijven met een directe formule;
- rijen beschrijven door middel van recursie.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt op 1 januari 2012 een saldo van € 1240,00.

En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten. Verder ga je aan het begin van elke maand 50 euro naar die spaarrekening overmaken, te beginnen op 1 februari 2012. Je krijgt aan het eind van elke maand rente van 0,5% over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.

- Hoe hoog is je saldo op 1 januari 2013?
- Wanneer is je saldo meer dan € 3000,00?

Uitleg

Stel je wilt een kamer huren voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.

Omdat je weet dat er jaarlijkse huurverhogingen zijn, wil je afspreken hoe hoog de jaarlijkse huurverhoging maximaal bedraagt. Je kunt dit op twee manieren afspreken:

- De jaarlijkse huurverhoging is (maximaal) 60 euro.
- De jaarlijkse huurverhoging is (maximaal) 2%.

Om de huurprijzen te vergelijken zet je ze voor de komende jaren op een rij. Noem de huurprijs bij de eerste afspraak h_1 en die bij de tweede h_2 . Je krijgt dan twee rijen getallen. De startdatum is 1 januari van een bepaald jaar en dan is het aantal huurjaren $n = 0$. De rij getallen voor h_1 kun je op twee manieren maken:

- De huurprijs na n jaren is: $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$.
Je berekent de huurprijs direct uit de huurjaren.
- De huurprijs na n jaren is 60 meer dan die na $n - 1$ huurjaren:
 $h_1(n) = h_1(n - 1) + 60$.
Je berekent de huurprijs door te kijken naar de prijs van het jaar ervoor. Dit heet 'recursie'.

Voor de rij h_2 gaat dit op vergelijkbare wijze.

Opgave 1

Bekijk het verhaal van het huren van een kamer in de **Uitleg**. Neem aan dat de jaarlijkse huurverhoging 60 euro is.

- Maak eerst zelf een tabel met huurprijzen voor $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- Hoe heb je jouw tabel gemaakt: met behulp van recursie of door direct de prijzen te berekenen?
- Licht zowel de formule bij de directe berekening als die bij de recursie toe. Leg duidelijk het verschil tussen beide uit.

Opgave 2

Bij het verhaal in de **Uitleg** is ook sprake van een jaarlijkse huurverhoging van 2%.

- Maak ook hiervoor een tabel met huurprijzen voor $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- Hoe heb je jouw tabel gemaakt: met behulp van recursie of door direct de prijzen te berekenen?
- Stel een formule op voor het berekenen van de huurprijs h_2 door middel van recursie.
- Stel ook een formule op voor $h_2(n)$ waarmee je de huurprijs van jaar n direct kunt berekenen.

huurprijs per jaar		
	jr.verhoging 60 euro	jr.verhoging 2%
n	h_1	h_2
0	2880	2880,00
1	2940	2937,60
2	3000	2996,35
3	3060	3056,28
4	3120	3117,40
5	3180	3179,75
6	3240	3243,35
7	3300	3308,21
8	3360	3374,38
9	3420	3441,87
10	3480	3510,70
11	3540	3580,92
12	3600	3652,54
13	3660	3725,59
14	3720	3800,10
15	3780	3876,10
16	3840	3953,62

Figuur 1.2

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **rij** getallen $u(n)$ is een functie waarbij n alleen de waarden 0, 1, 2, 3, 4, ... (alle positieve gehele getallen en 0) aanneemt. De functiewaarden $u(n)$ vormen de **termen van de rij**.

De eerste term van de rij is dan $u(0)$, de tweede term is $u(1)$, enz. In plaats van $u(n)$ wordt soms u_n geschreven.

In plaats van n wordt ook de letter t gebruikt, zeker als het om tijd gaat.

Meestal wordt de rij genummerd vanaf 0, maar als dat beter uitkomt wordt ook wel vanaf 1 genummerd. Voordeel van nummeren vanaf 0 is dat de formules vaak eenvoudiger zijn, nadeel is dat bijvoorbeeld de tiende term $u(9)$ is.

Je kunt op twee manieren een formule voor een rij maken:

- **directe formule:**

Elke term $u(n)$ wordt direct berekend vanuit n , bijvoorbeeld:
 $u(n) = 2880 \cdot 1,02^n$.

Dit is vooral ook handig voor de grafische rekenmachine, want dan kun je een rij als functie invoeren. Zet je de stapgrootte in de tabel op 1, dan heb je de rij snel voor je neus. Maar directe formules zijn niet altijd gemakkelijk te vinden.

- **recursieformule:**

Elke term $u(n)$ wordt berekend vanuit zijn voorganger $u(n-1)$, bijvoorbeeld:

$$u(n) = u(n-1) \cdot 1,02.$$

Maar dan moet wel de eerste term bekend zijn: $u(0) = 2880$.

Anders kun je de rij niet opbouwen vanaf het begin.

Hoe je op je grafische rekenmachine met rijen werkt zie je in het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Je wilt een kamer huren voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.

Bij een jaarlijkse huurverhoging van € 60 is de huurprijs na n jaren:
 $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$.

Bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren:
 $h_2(n) = 2880 \cdot 1,02^n$.

Bereken met je grafische rekenmachine tot welk jaar de huurverhoging in procenten voordeliger is.

Antwoord

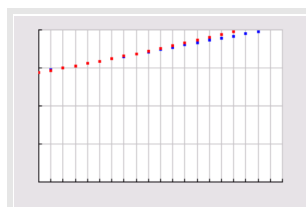
Omdat dit twee directe formules zijn kun je beide als functie in je grafische rekenmachine invoeren.

Maar je rekenmachine heeft een speciale instelling of menu om met rijen te werken. Daarmee maak je snel een tabel van beide rijen samen. Je ziet dat tot $n = 6$ de huurverhoging in procenten het gunstigst is.

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=2880+n*60
u(nMin)=2880
v(n)=2880*1.02^n
v(nMin)=2880
w(n)=
w(nMin)=
    
```

n	u(n)	v(n)
0	2880	2880
1	2940	2937.6
2	3000	2996.4
3	3060	3056.3
4	3120	3117.4
5	3180	3179.8
6	3240	3243.3
7	3300	3308.2
8	3360	3374.4
9	3420	3441.9
10	3480	3510.7



Figuur 1.3

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Waarom zijn de twee gegeven formules directe formules?
- Maak tabellen bij beide formules op je grafische rekenmachine.
- Maak ook tabellen bij beide formules op je grafische rekenmachine. Doe eventueel eerst het **Practicum**.
- Ga na, dat tot $n = 6$ de huurverhoging in procenten het gunstigst is.

Voorbeeld 2

Je wilt een kamer huren voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.

Bij een jaarlijkse huurverhoging van € 60 is de huurprijs na n jaren:
 $h_1(n) = h_1(n-1) + 60$ met $h_1(0) = 2880$.

Bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren:
 $h_2(n) = h_2(n-1) \cdot 1,02$ met $h_2(0) = 2880$.

Bereken met je grafische rekenmachine tot welk jaar de huurverhoging in procenten voordeliger is.

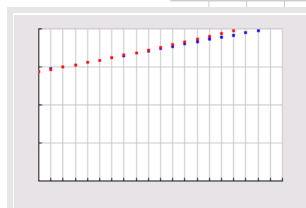
Antwoord

Omdat dit twee recursieformules zijn kun je beide alleen invoeren als je rekenmachine is ingesteld op werken met rijen. Dan maak je ook snel een tabel van beide rijen samen. Je ziet dat tot $n = 6$ de huurverhoging in procenten het gunstigst is.

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=u(n-1)+60
u(nMin)=2880
v(n)=u(n-1)*1.02
v(nMin)=2880
w(n)=
w(nMin)=
    
```

n	u(n)	v(n)
0	2880	2880
1	2940	2937.6
2	3000	2996.4
3	3060	3056.3
4	3120	3117.4
5	3180	3179.8
6	3240	3243.3
7	3300	3308.2
8	3360	3374.4
9	3420	3441.9
10	3480	3510.7



Figuur 1.4

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Waarom zijn de twee gegeven formules recursieformules?
- Maak tabellen bij beide formules op je grafische rekenmachine. Bekijk eventueel het **Practicum** nog eens.
- Maak grafieken bij beide rijen.
- Ga na, dat tot $n = 6$ de huurverhoging in procenten het gunstigst is.

Voorbeeld 3

Je hebt op 1 januari 2008 een saldo van € 1240,00.

En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten. Verder ga je aan het begin van elke maand 50 euro naar die spaarrekening overmaken, te beginnen op 1 februari 2008. Je krijgt aan het eind van elke maand rente van 0,5% over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.

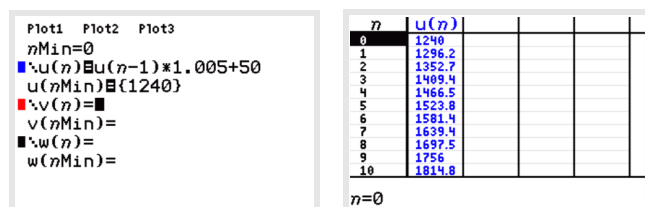
Wanneer is je saldo meer dan € 3000,00?

Antwoord

Nu is het maken van een directe formule nog niet eenvoudig. Maar de recursie is wel eenvoudig: je vermenigvuldigt telkens je saldo met 1,005 en telt er 50 euro bij op. Neem je $t = 0$ op 1-1-2008 en t in maanden, dan geldt voor het saldo S :

$$S(t) = S(t-1) \cdot 1,005 + 50 \text{ met } S(0) = 1240.$$

Voer dit in je GR in en bekijk de tabel van de rij. Op $t = 30$ zit je voor het eerst boven de 3000 euro. Dan heb je 30 maanden gespaard.



Figuur 1.6

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** wordt bekeken hoe je bij een rij een formule kunt maken. Een directe formule is altijd het handigst, dan hoeft je de rij niet vanaf het begin op te bouwen, maar kun je elke waarde direct berekenen. Maar niet altijd is zo'n directe formule gemakkelijk te vinden.

- Licht de gevonden recursieformule toe. Waarom moet je bij een recursieformule ook altijd minstens één term van de rij weten?
- Laat zien hoe de recursie werkt door met de hand de eerste vier termen van de rij te berekenen. Controleer je antwoorden door op de grafische rekenmachine een tabel te maken bij deze rij.

Opgave 6

Hier zie je een aantal rijen waarvan de regelmaat is gegeven. Stel telkens zowel een recursieformule als een directe formule op. Nummer de termen steeds vanaf 0.

- De even getallen: 0, 2, 4, 6, 8, ...
- De oneven getallen: 1, 3, 5, 7, 9, ...
- De kwadraten: 1, 4, 9, 16, 25, ...
- De faculteiten: 1, 1, 2, 6, 24, 120, ...



Figuur 1.5

Verwerken

Opgave 7

Bekijk de rij 2, 5, 8, 11, 14, ... (elke term is 3 groter dan de voorgaande term).

- Schrijf de volgende vijf termen op.
- Beschrijf de rij met een directe formule.
- Beschrijf de rij met een recursieformule.

Opgave 8

Bekijk de rij 2, 6, 18, 54, 162, ... (elke term is 3 maal de voorgaande term).

- Schrijf de tiende term op.
- Beschrijf de rij met een directe formule.
- Beschrijf de rij met een recursieformule.

Opgave 9

A en B huren elk een winkelpand voor € 20.000 per jaar. De huur voor A wordt jaarlijks verhoogd met € 1000, die van B wordt jaarlijks verhoogd met 4%.

- Stel een formule op voor de huur a_n van A in jaar n (nummer de jaren met 0, 1, 2, ...).
- Stel een formule op voor de huur b_n van B in jaar n (nummer de jaren met 0, 1, 2, ...).
- Na hoeveel jaren wordt de huur van B groter dan die van A?
B nummert de jaren toch liever met 1, 2, 3, ...
- Hoe luidt dan de formule voor zijn huur?
A betreft zijn pand in 2003 en wil de jaren nummeren met 2003, 2004, 2005, ...
- Hoe luidt dan de formule voor zijn huur?

Opgave 10

Hieronder staat van een aantal rijen het begin. Het vervolg raad je zelf wel. Stel voor elke rij een mogelijke directe formule op. Begin de nummering met 0.

- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$
- 6, 11, 16, 21, ...
- 1, -2, 4, -8, 16, -32, ...
- $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots$
- 1024, 512, 256, 128, 64, 32, ...
- $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$
- 13, 8, 3, -2, -7, ...
- $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$

Opgave 11

Stel recursieformules op voor de rijen bij b, c, d, e en g van de vorige opgave indien mogelijk.

Opgave 12

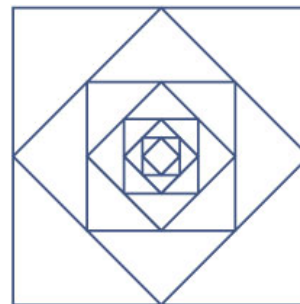
De rij $t_0, t_1, t_2, \dots$ is gegeven door de directe formule $t_n = n^2 + n$.

- Schrijf de eerste 10 termen op.
- Bepaal de kleinste n waarvoor $t_n > 1000$.

Opgave 13

Bij een vierkant V_0 met zijden van 1 meter zijn de middens van de zijden de hoekpunten van een kleiner vierkant V_1 . Net zo maak je V_2 bij V_1 , enzovoort. Laat $O(n)$ de oppervlakte van V_n in m^2 zijn en $Z(n)$ de lengte van zijn zijde in m.

- Hoe lang zijn de zijden van V_5 en hoe groot is de oppervlakte van V_5 ?
- Stel een directe formule op voor $Z(n)$ en voor $O(n)$.
- Stel een recursieformule op voor $Z(n)$ en voor $O(n)$.
- Breng de rij $O(0), O(1), O(2), \dots$ met de grafische rekenmachine in beeld. Kun je daarmee bepalen voor welke n (in theorie) $O(n)$ kleiner wordt dan 1 mm^2 ? Zo nee, probeer een andere manier.



Figuur 1.7

Toepassen

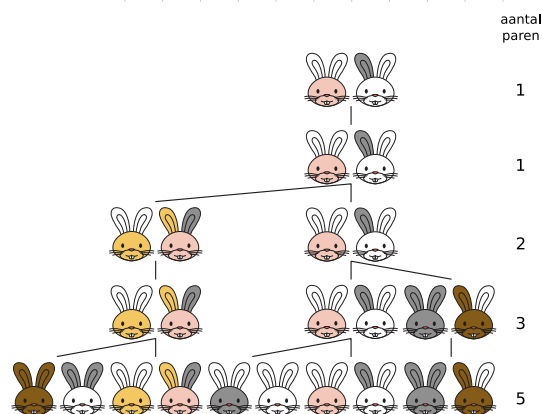
Opgave 14: Konijnen

Fibonacci was een Italiaanse wiskundige.

In zijn boek "Liber Abaci" stelt Fibonacci een eenvoudige vraag:

"Als een konijnenpaar elke maand een jong konijnenpaar voortbrengt, dat na twee maanden zelf ook weer een nieuw konijnenpaar voortbrengt, hoeveel konijnenparen heb je dan na verloop van tijd, verondersteld dat ze allen in leven blijven?"

- Zet deze redenering voort.
Hoeveel konijnenparen zijn er dan vijf maanden na de start?
- Het aantal konijnenparen per maand vormt de rij u_n .
Maak van deze rij een tabel met n van 0 t/m 6.
- Er zit een bepaalde regelmaat in deze rij, maar hij is niet eenvoudig te vinden. Zoek de regelmaat.
- Bereken de achtste en de negende term.
- Hoeveel konijnenparen zijn er na een jaar?



Figuur 1.8

Opgave 15: Hectometerpaaltjes

In Nederland staan langs alle provinciale en rijkswegen hectometerpaaltjes. Na iedere hectometer (100 meter) staat er zo'n paaltje. Deze worden gebruikt om bijvoorbeeld de locatie van een ongeval precies door te kunnen geven. En op de radio hoor je vaak bij welke hectometerpaal er geflitst wordt. De palen geven de afstand aan vanaf het begin van de weg in kilometer. Achter de komma staan de hectometers aangegeven.

Bekijk de afbeelding van een hectometerpaaltje met daarop 78,1 kilometer. Gebruik bij elk van de volgende vragen dit paaltje als uitgangspunt.



Figuur 1.9 bron: Wikipedia

- Ga in gedachten tien hectometerpaaltjes terug, welk getal staat erop?
- Ga in gedachten honderd hectometerpaaltjes vooruit, welk getal staat erop?
- Is hier sprake van een rekenkundige of een meetkundige rij? Geef een bijpassende directe formule en een bijpassende recursieformule.
- Hoeveel paaltjes verder staat er 105,5 kilometer?

Testen

Opgave 16

De rij $t_0, t_1, t_2, \dots$ is gegeven door de directe formule $t_n = 1 + 2n$.

- Schrijf de eerste twaalf termen op.
- Hoe groot is de 100-ste term?
- Aan welke recursieformule voldoet deze rij?
- Geef de eerste zes termen van een andere rij die aan dezelfde recursie voldoet maar een andere beginterm heeft.

Opgave 17

De rij $u(0), u(1), u(2), \dots$ is gegeven door $u(n) = 10 + \frac{1}{2}n(n+1)$.

- Schrijf de eerste tien termen op.
- Gebruik de grafische rekenmachine om de kleinste n te vinden waarvoor geldt: $u(n) > 10^6$.

Opgave 18

Bij de volgende beginstukken van rijen ligt het vervolg voor de hand. Geef bij elk geval een directe en een recursieformule bij nummering vanaf 0.

- 4, 8, 12, 16, 20, ...
- $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$
- 1, -2, 4, -8, 16, -32, ...
- $\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, \dots$

Practicum

Met de volgende practica leer je enkele technieken op de GR die bij het **werken met rijen** onontbeerlijk zijn. Voor wiskunde A zijn de eerste twee paragrafen van het practicum voldoende.

- [Rijen met de TI84](#)
- [Rijen met de TIInspire](#)
- [Rijen met de Casio fx-CG50](#)
- [Rijen met de HP prime](#)
- [Rijen met de NumWorks](#)

Overigens kun je voor het echte werken met rijen veel beter **Excel** gebruiken. Deze tabel kun je gemakkelijk maken:

- met directe formules:
in cel B4 zet je: $=2880 + \$A4 * 60$
in cel C4 zet je: $=2880 * 1,02^{\$A4}$
en dan naar beneden kopiëren.
- met recursieformules:
in cel B4 zet je 2880 en in cel B5: $=\$B4 + 60$
in cel C4 zet je 2880 en in cel B5: $=\$B4 * 1,02$
en dan naar beneden kopiëren.

1.2 Verschilrijen en somrijen

Inleiding

Heb je te maken met een vaste huurverhoging per jaar, dan weet je hoeveel je jaarlijks meer moet gaan betalen voor je studentenkamer. Maar heb je een vaste procentuele huurverhoging, dan weet je dat niet onmiddellijk. Je betaalt dan immers een vast percentage van een steeds hoger wordend bedrag.

En hoe zit het met het bedrag dat je in totaal kwijt bent als je bijvoorbeeld de kamer vijf jaar huurt?



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip verschilrij en het begrip somrij en de bijbehorende notaties;
- de som van een aantal termen van een rij berekenen met de rekenmachine.

Voorkennis

- rijen in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met directe formules en recursieformules.

Verkennen

Opgave V1

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.

- bij een jaarlijkse huurverhoging van 60 euro betaal je na n jaar $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$ euro/jaar.
- bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren:
 $h_2(n) = 2880 \cdot 1,02^n$ euro/jaar.

- Bij de eerste manier van huur verhogen betaal je elk jaar 60 euro meer. Hoe zit dat bij de tweede manier?
- En hoeveel ben je bij beide manieren telkens gerekend over de eerste vijf jaar in totaal kwijt?

Uitleg

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.

- bij een jaarlijkse huurverhoging van 60 euro betaal je na n jaar $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$ euro/jaar.
- bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren:
 $h_2(n) = 2880 \cdot 1,02^n$ euro/jaar.

Bij de eerste manier van huur verhogen betaal je elk jaar 60 euro meer. Bij de tweede manier is dit telkens een ander bedrag. De rij $V(n) = h_2(n) - h_2(n-1)$ brengt die getallen in beeld. Dit is de verschilrij van rij h_2 . Je geeft hem wel aan als $V(n) = \Delta h_2(n)$.

Je kunt hem met de grafische rekenmachine wel maken, maar alleen met de goede instellingen en/of het goede menu.

Wil je weten hoeveel je over de eerste vijf jaar gerekend aan huur moet betalen, dan moet je in het eerste geval $S(4) = h_1(0) + h_1(1) + h_1(2) + h_1(3) + h_1(4)$ uitrekenen. Een korte schrijfwijze hiervoor is:

$$S(4) = \sum_{n=0}^4 h_1(n)$$

Je rekenmachine heeft een aantal functies om dit mee te berekenen.

En voor rij h_2 gaat dit net zo...

Opgave 1

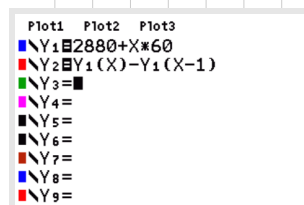
In de **Uitleg** is sprake van rijen van verschillen. Die verschilrijen maak je met je grafische rekenmachine. Maar dan moet je wel de directe formule van de rij hebben.

- Maak de verschilrij V_1 bij h_1 . Hij is nogal saai. Waarom is dat zo?
- Maak nu de verschilrij V_2 bij h_2 .
- Hoeveel is $V_2(5)$?
- Waarom bestaan $V_1(0)$ en $V_2(0)$ eigenlijk niet?

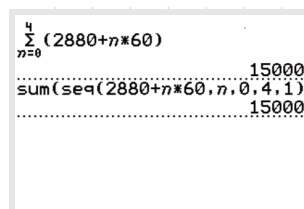
Opgave 2

De verschilrijen in de **Uitleg** gaan over de jaarlijkse huurverhoging. Maar je kunt ook kijken naar het totaalbedrag dat je gerekend over een aantal jaren kwijt bent aan huur. Je moet daarvoor de termen van de rijen h_1 en h_2 optellen.

- $S_1(5) = h_1(0) + h_1(1) + h_1(2) + h_1(3) + h_1(4) + h_1(5)$. Hoe kun je dit korter opschrijven?
- Bereken $S_1(5)$ met je grafische rekenmachine. Wat stelt dit bedrag precies voor?
- Bereken ook $S_2(5)$ met je grafische rekenmachine.
- Is de procentuele huurverhoging de eerste zes jaar gunstiger?



Figuur 2.2



Figuur 2.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **verschilrij** van een rij $u(n)$ is de rij $V(n) = \Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$.

Je kunt hem met de grafische rekenmachine maken, maar soms alleen als je een directe formule van de rij hebt ingevoerd.

De **somrij** van een rij $u(n)$ is de rij $S(n) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + \dots + u(n)$.

Een korte schrijfwijze hiervoor is:

$$S(n) = \sum_{k=0}^n u(k)$$

De Griekse hoofdletter Σ (Sigma) wordt gebruikt als somteken. Je rekenmachine heeft een aantal functies om dit mee te berekenen. Pas er wel voor op dat de som van de eerste n termen gelijk is aan $S(n-1)$ omdat je bij 0 begint te nummeren.

Zo is de som van de derde tot en met de twintigste term gelijk aan:

$$S(19) - S(1) = \sum_{k=2}^{19} u(k)$$

Voor je rekenmachine is dat allemaal geen probleem...

Maar let wel goed op in situaties dat er genummerd wordt vanaf 1.

Voorbeeld 1

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880 per jaar.

Bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren:

$$h_2(n) = 2880 \cdot 1,02^n \text{ euro/jaar.}$$

Stel een formule op voor jaarlijkse huurverhogingen.

Bereken de totale huurprijs over de eerste 10 jaren.

Antwoord

De formule voor de jaarlijkse huurverhogingen is de formule voor de verschilrij van h_2 :

$$V(n) = \Delta h_2(n) = h_2(n) - h_2(n-1) = 2880 \cdot 1,02^n - 2880 \cdot 1,02^{n-1}$$

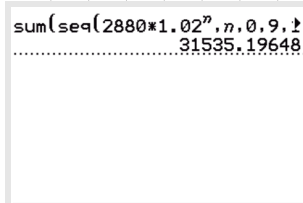
Dit kun je herleiden:

$$V(n) = 2880 \cdot 1,02^{n-1} (1,02 - 1) = 57,6 \cdot 1,02^{n-1}.$$

Merk op dat bij de verschilrij moet worden genummerd vanaf $n = 1$.

De totale huurprijs over de eerste 10 jaar is: $S(9) = \sum_{n=0}^9 2880 \cdot 1,02^n$.

Met de grafische rekenmachine vind je: $S(9) \approx 31535,20$.



sum(seq(2880*1.02^n, n, 0, 9, 1))
31535.19648

Figuur 2.4

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** worden de verschil en som van een rij met huurprijzen nog eens bekeken.

- De nummering van de huurprijzen begint bij 0. Hoe zit dat met de verschilrij? En met de somrij?
- Maak een tabel van de verschilrij zonder er eerst een formule voor af te leiden.
- Voer zelf de afleiding van de formule voor de verschilrij uit. Ga na, dat de waarden van die verschilrij overeenkomen met de tabel bij b.
- Leg uit, waarom de totale huurprijs over de eerste 10 jaren $S(9)$ is en niet $S(10)$.
- Bereken met je grafische rekenmachine $\sum_{n=0}^8 2880 \cdot 1,02^n$. Wat heb je nu precies berekend?

Voorbeeld 2

Gegeven is de rij kwadraten door $k_n = n^2$ met n een geheel getal en $n \geq 1$. Bekijk de verschilrij en stel er een formule voor op. Stel op grond van de verschilrij een recursieformule voor de rij kwadraten op.

Antwoord

De verschilrij is $V(n) = \Delta k_n = n^2 - (n-1)^2$.

Haakjes uitwerken geeft: $V(n) = 2n - 1$ met $n \geq 2$.

Dus is $k_n - k_{n-1} = 2n - 1$.

En dat betekent: $k_n = k_{n-1} + 2n - 1$.

De recursieformule is daarom: $k_n = k_{n-1} + 2n - 1$ met $k_1 = 1$ en n geheel en $n \geq 2$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** wordt de rij kwadraten bekeken.

- Leid zelf de formule voor de verschilrij V_n af. Waarom moet $n \geq 2$?
- Bereken V_{100} zowel met behulp van de formule voor V_n als vanuit de kwadratenrij zelf.
Bekijk nu de rij met derde machten: $d_n = n^3$ voor $n \geq 1$.
- Leid een formule af voor de verschilrij van d_n .
- Je ziet in **Voorbeeld 2** hoe je door naar de verschilrij te kijken een recursieformule voor de kwadratenrij kunt maken. Maak nu een recursieformule voor de rij met derde machten.

Voorbeeld 3

De beroemde rij van Fibonacci is: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Wat valt je op als je de bijbehorende verschilrij bekijkt?

Bereken de som van de eerste 100 termen van de rij van Fibonacci.

Antwoord

De verschilrij is: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Behalve de eerste term is de verschilrij gelijk aan de rij zelf, alleen de nummering verschuift met 2. (Denk er om dat er geen nulde term is bij de verschilrij!)

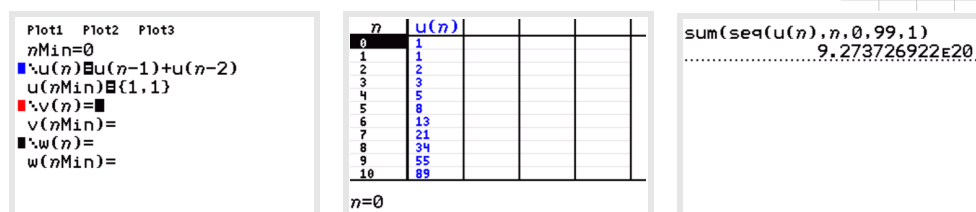
Noem nu de termen van de rij van Fibonacci $f(n)$ met $n = 0, 1, 2, \dots$

Dan is dus de verschilrij: $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1) = f(n-2)$.

De rij van Fibonacci heeft daarom als recursieformule:

$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ met $f(0) = 1$ en $f(1) = 1$.

Nu kun je de rij in de grafische rekenmachine invoeren en de som van de eerste 100 termen laten berekenen door de machine. (Het kost wat rekentijd...)



Figuur 2.5

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** maak je kennis met de rij van Fibonacci. Je zult er later nog toepassingen van tegenkomen.

- Stel zelf de recursieformule van deze rij op.
- Bereken nu met je grafische rekenmachine de som van de eerste 20 termen van de rij van Fibonacci.

Opgave 6

Gegeven is de rij $t(i) = 5i + 2$ voor $i \geq 0$.

- Stel een formule op voor de verschilrij $V(i)$.
- Bereken $\sum_{i=0}^5 t(i)$. Is dit nu de vierde, vijfde of de zesde term van de somrij $S(i)$? Is het $S(4)$, $S(5)$ of $S(6)$?
- Welke termen van $t(i)$ moet je optellen om $\sum_{i=2}^5 t(i)$ te berekenen? Waarom is dit gelijk aan $S(5) - S(1)$?

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de rij $t(n) = 2n + 1$ met $n \geq 0$.

- Schrijf de eerste zes termen van de verschilrij $V(n)$ op.
- Schrijf de eerste zes termen van de somrij $S(n)$ op.
- Bereken $S(19)$.
- Bereken $\sum_{n=10}^{19} t(n)$.

Opgave 8

Bekijk de rij 2, 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, ...

Je hoeft niet op zoek te gaan naar een directe formule, hoewel die wel is te vinden. De n de term van deze rij is $u(n)$ met $n \geq 0$.

- Welke verschilrij hoort er bij deze rij?
- Beschrijf de verschilrij met een directe formule.
- Leid nu voor $u(n)$ een recursieformule af.
- $S(n)$ is de bijbehorende somrij. Bereken $S(20)$.
- Bereken ook $\sum_{n=15}^{20} u(n)$.

Opgave 9

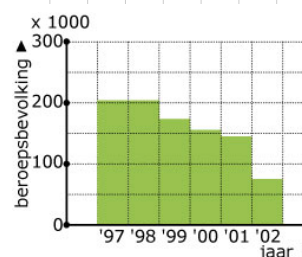
Dit toenamediagram kun je opvatten als de weergave van zes termen van een verschilrij.

- Schrijf de grootte (ongeveer) van deze termen op.
- Stel dat de beroepsbevolking aan het begin van 1997 bestond uit 3 miljoen personen. Hoe groot ongeveer was dan de beroepsbevolking aan het eind van 1997? En aan het eind van 1999?
- Is er een verband tussen toenamediagrammen en verschilrijen?
- Welke uitspraken over de periode 1997 tot en met 2002 hieronder zijn juist?
 - De beroepsbevolking is elk jaar toegenomen.
 - Over de hele periode is de beroepsbevolking afgenomen.
 - In 2002 is de beroepsbevolking minder toegenomen dan in 2001.
 - Aan het eind van 2002 was de beroepsbevolking kleiner dan aan het eind van 2001.

Opgave 10

De rij $t_0, t_1, t_2, \dots$ is gegeven door $t_n = 0,5n^2 + 1,5n + 1$.

- Schrijf de eerste tien termen van deze rij op.
- Schrijf de eerste negen termen op van de verschilrij.
- Schrijf de eerste acht termen op van de verschilrij van die verschilrij.



Figuur 2.6

Bekijk nu de rij $u_0, u_1, u_2, \dots$ met $u_n = n^2 + 5n$.

- d Bepaal weer een stuk van de verschilrij en de verschilrij van de verschilrij. Is er een overeenkomst met het antwoord van c? Geef een verklaring.

Toepassen

Opgave 11: Stoelen in een theater

In een theater zijn 30 rijen met stoelen. Op de eerste rij staan 40 stoelen, op de tweede rij 42, op de derde rij 44, enzovoort.

Hoeveel stoelen staan er in dit theater?

Opgave 12: Salarisverhoging

Iemand heeft een nieuwe baan. Zij begint met een jaarsalaris van € 31500. Elk jaar wordt haar salaris met 1,5% verhoogd.

- a Stel dat deze persoon tien jaar lang deze baan houdt. Hoeveel verdient zij dan in totaal in die tien jaar? Rond af op honderden euro.
- b Bepaal de jaarlijkse salarisverhogingen in de eerste zes jaar.

Testen

Opgave 13

De rij $u_0, u_1, u_2, \dots$ is gegeven door de directe formule $u_n = n^2 - n$.

- a Bereken de eerste vijf termen van de verschilrij V_n van deze rij.
- b Stel een directe formule op voor V_n . Maak hiermee een recursieformule voor u_n .
- c Bereken de eerste vijf termen van de somrij van deze rij.
- d Bereken $\sum_{n=6}^8 u_n$.

Practicum

Met de volgende practica leer je enkele technieken op de GR die bij het **werken met rijen** onontbeerlijk zijn. Voor wiskunde A zijn de eerste twee paragrafen van het practicum voldoende.

- [Rijen met de TI84](#)
- [Rijen met de TIInspire](#)
- [Rijen met de Casio fx-CG50](#)
- [Rijen met de HP prime](#)
- [Rijen met de NumWorks](#)

Overigens kun je voor het echte werken met rijen veel beter **Excel** gebruiken. Deze tabel kun je gemakkelijk maken:

- met directe formules:
in cel B4 zet je: $=2880+\$A4*60$
in cel C4 zet je: $=2880*1,02^{\$A4}$
en dan naar beneden kopiëren.
- met recursieformules:
in cel B4 zet je 2880 en in cel B5: $=\$B4+60$
in cel C4 zet je 2880 en in cel B5: $=\$B4*1,02$
en dan naar beneden kopiëren.

1.3 Rekenkundige rijen

Inleiding

Het voorbeeld van het huren van een studentenkamer met twee manieren van huur verhogen is niet voor niks gekozen om met rijen kennis te maken. Bij de éne soort huurverhoging wordt de jaarlijkse huur met een vast bedrag verhoogd. Rijen waarbij je de termen kunt bepalen door (vanaf de eerste term) steeds hetzelfde getal op te tellen bij de voorgaande term heten rekenkundige rijen. Dergelijke rijen ga je nu nader bestuderen.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip rekenkundige rij;
- de somformule voor een rekenkundige rij.

Voorkennis

- rijen in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met directe formules en recursieformules;
- werken met de verschilrij en de somrij bij een gegeven rij.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de beroemde wiskundige **Carl Friedrich Gauss**. Over hem gaat het verhaal dat hij als 11-jarig jongetje door zijn leraar de (in de ogen van de leraar) vervelende opdracht kreeg om de getallen 1 t/m 100 op te tellen.

Waarop de kleine Carl na enig nadenken zei: 'Het antwoord is 5050'.

- Hoe vond hij dit zo snel uit zijn hoofd?
- En wat heeft dit met de titel van dit onderdeel te maken?



Figuur 3.1



Figuur 3.2

Uitleg

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar. Bij een jaarlijkse huurverhoging van 60 euro betaal je $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$ euro/jaar.

Bij deze manier van huur verhogen betaal je elk jaar 60 euro meer. Bekijk je de grafiek van deze rij op je grafische rekenmachine dan zie je een rij punten die op een rechte lijn liggen: h_1 is een lineaire functie. Je noemt een rij waarbij de directe formule een lineaire functie is een **rekenkundige rij**.

Wil je weten hoeveel je over de eerste vijf jaar gerekend aan huur moet betalen, dan moet je

$$S(4) = h_1(0) + h_1(1) + h_1(2) + h_1(3) + h_1(4) = 2880 + 2940 + 3000 + 3060 + 3120$$

uitrekenen. Dat kun je uit het hoofd doen.

Je zet dan de optelling twee keer onder elkaar en telt ze op:

$$2880 + 2940 + 3000 + 3060 + 3120$$

$$3120 + 3060 + 3000 + 2940 + 2880 \quad +$$

$$6000 + 6000 + 6000 + 6000 + 6000$$

Dus je krijgt: $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6000 = 15.000$ in totaal.

Deze handigheid kun je bij elke rekenkundige rij toepassen. De som van de eerste n termen is dan:

$$S(n-1) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term}).$$

Opgave 1

In de **Uitleg** is sprake van een rekenkundige rij.

- Hoe kun je aan de directe formule van een rij zien dat hij rekenkundig is?
- Hoe ziet de recursieformule van een rekenkundige rij er altijd uit?

Opgave 2

Bij rekenkundige rijen kun je de som van een aantal termen op een handige manier vinden zonder de grafische rekenmachine te hoeven gebruiken.

- Bereken $100 + 150 + 200 + 250 + \dots + 900$ op dezelfde manier als in de **Uitleg**.
- Bereken nu $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$ op deze manier.

Opgave 3

Een rekenkundige rij ziet er altijd zo uit: $a, a + v, a + 2 \cdot v, a + 3 \cdot v, a + 4 \cdot v, \dots$

- Hoe ziet de directe formule van deze rij $u(n)$ er uit?
- Hoe ziet de recursieformule van deze rij er uit?
- Bereken de som van de eerste 10 termen van deze rij.
- Bereken de som van de eerste n termen van deze rij.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **rekenkundige rij** is een rij waarvan de directe formule een lineaire functie is. Dit betekent dat elke term ontstaat door bij zijn voorganger een vast getal v op te tellen. De rij ziet er dus uit als $a, a + v, a + 2v, a + 3v, \dots$

- directe formule: $u(n) = a + n \cdot v$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- recursieformule: $u(n) = u(n-1) + v$ met $u(0) = a$ en $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

De **verschilrij van een rekenkundige rij** is nogal saai: alle verschillen zijn gelijk aan v .

Voor de **somrij van een rekenkundige rij** kun je gebruik maken van de methode die bij de **Uitleg** is gebruikt. Dan blijkt dat de som van de eerste n termen is:

$$S(n-1) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

ofwel:

$$S(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} u(k) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (u(0) + u(n-1)).$$

Voorbeeld 1

Je ziet hier het begin van drie rijen:

- rij u : 10, 15, 20, 25, ...
- rij v : 10, 20, 40, 80, ...
- rij w : 10, 40, 90, 160, ...

Welke van deze rijen is (waarschijnlijk) een rekenkundige rij? Stel een daarbij passende directe formule op.

Antwoord

Om te onderzoeken of een rij rekenkundig is bekijk je de verschillen tussen opvolgende termen. Als die steeds hetzelfde getal v opleveren, heb je te maken met een rekenkundige rij. Dit is alleen het geval bij rij u .

De directe formule voor rij u vind je door vast te stellen, dat:

- $u(0) = 10$;
- het verschil tussen twee opvolgende termen is steeds 5.

De gevraagde directe formule wordt: $u(n) = 10 + 5n$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Opgave 4

Welke van de volgende rijen zijn rekenkundig? Geef van elke rekenkundige rij de directe formule en het complete recursievoorschrift. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 1**.

- a** 5, 14, 23, 32, 41, ...
- b** 320, 160, 80, 40, ...
- c** 10, 2, -6, -14, ...

- d 1, 4, 9, 16, ...
- e 1, 3, 9, 27, ...
- f 2, 6, 18, 54, ...
- g $5, 5\sqrt{3}, 15, 15\sqrt{3}, 45, \dots$

Voorbeeld 2

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar. Bij een jaarlijkse huurverhoging van 60 euro betaal je na n jaar

$$h_1(n) = 2880 + n \cdot 60 \text{ euro/jaar.}$$

Hoeveel betaal je in totaal gerekend over de eerste 10 jaar?

Antwoord

Je moet $S(9)$ berekenen:

$$S(9) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (u(0) + u(9)) = 5 \cdot (2880 + 3420) = 31500.$$

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe de somformule voor een rekenkundige rij wordt gebruikt. Gegeven is de rij $h_n = 2400 + 50n$ met $n \geq 0$.

- a Bereken de som van de eerste 10 termen van deze rij met je grafische rekenmachine.
- b Bereken de som van de eerste 10 termen van deze rij met de somformule voor een rekenkundige rij.
- c Bereken $\sum_{n=5}^9 h_n$. Gebruik weer de somformule.

Opgave 6

Janna is net 16 geworden en wil graag een scooter kopen. Ze leent daartoe op 1 juli 2011 € 2500 van de bank. Ze zal dit terug betalen in 25 maandelijkse termijnen van 100 euro. Maar de bank vraagt rente: elke maand 1% over het bedrag dat op dat moment nog niet is afgelost.

- a Hoeveel moet Janna op 1 augustus aan de bank betalen?
- b En hoe groot is dat bedrag op 1 september? En op 1 oktober?
- c Waarom heet dit wel een lineaire aflossingsvorm?
- d De rij met te betalen bedragen is een rekenkundige rij. Stel voor die rij een directe formule $B(t)$ op. Neem $t = 0$ op 1 juli 2011 en geef aan welke waarden t aanneemt.
- e Bereken met behulp van de somformule voor een rekenkundige rij hoeveel Janna in totaal aan de bank betaalt voor haar scooter.

Voorbeeld 3

Een rekenkundige rij is gegeven door $u(n) = a + n \cdot v$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Stel een formule op voor de som van de 11de tot en met de 26ste term.

Antwoord

Gebruik nu dat de som van n opeenvolgende termen is:

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term}).$$

Hier is de eerste term $u(10) = a + 10v$.

En de laatste term is $u(25) = a + 25v$.

Er zijn 16 termen op te tellen, dus:

$$\sum_{k=10}^{25} u(k) = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (2a + 35v) = 16a + 280v.$$

Opgave 7

Je ziet in **Voorbeeld 3** hoe je een formule kunt opstellen voor de som van een deel van een rekenkundige rij $u(n) = a + n \cdot v$ met $n \geq 0$.

- a Stel een formule op voor $S(20)$.
- b Stel een formule op voor $\sum_{n=10}^{20} u(n)$.

Verwerken**Opgave 8**

De rij $t_0, t_1, t_2, \dots$ is gegeven door $t_n = 5n + 2$.

- a Laat zien dat dit een rekenkundige rij is.
- b Schrijf de som van de eerste zeven termen met het Σ -symbool en bereken die som.
- c Schrijf de som van de daarop volgende zeven termen met het Σ -symbool en bereken die som.

Opgave 9

Hieronder staan telkens de twee eerste termen van een rekenkundige rij $r(n)$ met $n \geq 0$. Schrijf bij elk geval de eerste zeven termen op en geef een directe formule voor de rij.

- a 5, 7
- b 5, 2
- c $1, \frac{9}{10}$
- d 5, 5

Bij elk van deze rijen kun je naar de som van een aantal termen kijken.

- e Bepaal bij elk van deze rijen de som van de eerste 12 termen.
- f Bepaal bij elk van deze rijen ook $\sum_{n=5}^{10} r(n)$.

Opgave 10

Bereken:

a $\sum_{n=0}^{20} (50 + 2,5n)$

b $\sum_{n=10}^{20} (50 + 2,5n)$

Opgave 11

Van een rekenkundige rij is de derde term 10 en de zevende term 22. Bepaal een recursieformule en een directe formule voor de rij. Geef duidelijk je nummering aan!

Toepassen

Opgave 12: Lineaire hypotheek

Iemand koopt een huis voor € 240.000. Dit geld leent hij bij een bank, dat heet een hypotheek. Hij komt met de bank overeen dat hij deze hypotheek in 30 jaar volledig aflost in even grote bedragen per jaar. Daar bovenop moet hij de bank jaarlijks rente betalen over zijn schuld van dat jaar, het rentepercentage wordt voor 30 jaar vastgezet op 4%. Om het eenvoudig te houden is $t = 0$ het moment waarop hij het geld leent en begint zijn aflossing een jaar later op $t = 1$.

- Hoeveel moet deze persoon op $t = 1$ aan de bank betalen aan aflossing en rente?
- En hoe groot is dat bedrag op $t = 2$? En op $t = 3$?
- Waarom heet dit wel een lineaire hypotheek? En waarom komt hij niet veel voor?
- De rij met te betalen bedragen is een rekenkundige rij. Stel voor die rij een directe formule op. Geef aan welke waarden t aanneemt.
- Bereken met behulp van de somformule voor een rekenkundige rij hoeveel hij in totaal aan de bank betaalt voor dit huis.

Testen

Opgave 13

Bereken $1024 + 1022 + 1020 + \dots + 4 + 2$.

Opgave 14

Bereken:

a $\sum_{i=0}^{20} \left(8 + \frac{1}{3}i\right)$

b $\sum_{k=1}^{100} (5 + 2k)$

1.4 Meetkundige rijen

Inleiding

Het voorbeeld van het huren van een studentenkamer met twee manieren van huur verhogen is niet voor niets gekozen om met rijen kennis te maken. Bij de éne soort huurverhoging wordt de jaarlijkse huur met een vast percentage verhoogd. Rijen waarbij je de termen kunt bepalen door (vanaf de tweede term) steeds de voorganger met hetzelfde getal te vermenigvuldigen heten meetkundige rijen. Dergelijke rijen ga je nu nader bestuderen.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip meetkundige rij;
- de somformule voor een meetkundige rij.

Voorkennis

- rijen in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met directe formules en recursieformules;
- werken met de verschilrij en de somrij bij een gegeven rij.

Verkennen

Opgave V1

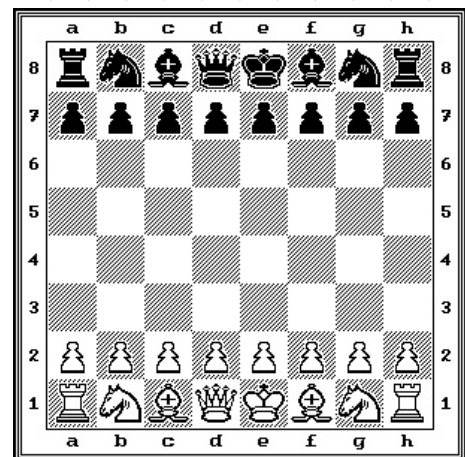
Er bestaat een mythe over de uitvinding van het schaakspel. Die vertelt dat de uitvinder ervan (Sissah ben Dahir) van zijn koning elke willekeurige beloning mocht vragen. Hij vroeg: 1 graankorrel voor het eerste veld van het schaakbord, 2 voor het tweede veld, 4 voor het derde veld, 8 voor het vierde veld, enz.

- Hoeveel graankorrels horen er dan bij het 64ste veld?
- Hoeveel graankorrels vroeg hij in totaal? Enig idee hoeveel graan dat is?

Uitleg

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880 per jaar. Bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% betaal je $h_2(n) = 2880 \cdot 1,02^n$ euro/jaar.

Bekijk je de grafiek van deze rij op je grafische rekenmachine dan zie je een rij punten die op een kromme stijgende lijn liggen: h_2 is een exponentiële functie. Je noemt een rij waarbij de directe formule een exponentiële functie is een **meetkundige rij**.



Figuur 4.1

Wil je weten hoeveel je over de eerste vijf jaar gerekend aan huur moet betalen, dan moet je

$$S(4) = h_2(0) + h_2(1) + h_2(2) + h_2(3) + h_2(4) =$$

$$S(4) = 2880 + 2880 \cdot 1,02 + 2880 \cdot 1,02^2 + 2880 \cdot 1,02^3 + 2880 \cdot 1,02^4$$

$$S(4) = 2880 + 2880 \cdot 1,02 + 2880 \cdot 1,02^2 + 2880 \cdot 1,02^3 + 2880 \cdot 1,02^4$$

$$1,02 \cdot S(4) = 2880 \cdot 1,02 + 2880 \cdot 1,02^2 + 2880 \cdot 1,02^3 + 2880 \cdot 1,02^4 + 2880 \cdot 1,02^5$$

$$S(4) - 1,02 \cdot S(4) = 2880 - 2880 \cdot 1,02^5$$

Dus je krijgt: $(1 - 1,02) \cdot S(4) = 2880 \cdot (1 - 1,02^5)$.

$$\text{En dus is } \sum_{n=0}^4 2880 \cdot 1,02^n = \frac{2880(1-1,02^5)}{1-1,02} \approx 14987,64.$$

Opgave 1

In de **Uitleg** is sprake van een meetkundige rij.

- Hoe kun je aan de directe formule van een rij zien dat hij meetkundig is?
- Hoe ziet de recursieformule van een meetkundige rij er altijd uit?

Opgave 2

Bij meetkundige rijen kun je de som van een aantal termen op een handige manier vinden zonder de grafische rekenmachine te hoeven gebruiken.

- Bereken $100 + 200 + 400 + 800 + \dots + 12800$ op dezelfde manier als in de **Uitleg**.
- Bereken nu $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{10}$ op deze manier.

Opgave 3

Een meetkundige rij ziet er altijd zo uit: $a, a \cdot r, a \cdot r^2, a \cdot r^3, a \cdot r^4, \dots$

- Hoe ziet de directe formule van deze rij $u(n)$ er uit?
- Hoe ziet de recursieformule van deze rij er uit?
- Bereken de som van de eerste 10 termen van deze rij.
- Bereken de som van de eerste n termen van deze rij.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **meetkundige rij** is een rij waarvan de directe formule een exponentiële functie is. Dit betekent dat elke term ontstaat door zijn voorganger met een vast getal r te vermenigvuldigen. De rij ziet er dus uit als $a, a \cdot r, a \cdot r^2, a \cdot r^3, \dots$

Meestal wordt in plaats van groeifactor het woord **reden** gebruikt voor de vaste vermenigvuldigingsfactor.

- directe formule: $u(n) = a \cdot r^n$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- recursieformule: $u(n) = u(n-1) \cdot r$ met $u(0) = a$ en $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

De **verschilrij van een meetkundige rij** is:

$$V(n) = a \cdot r^n - a \cdot r^{n-1} = a(r-1) \cdot r^{n-1}.$$

Voor de **somrij van een meetkundige rij** kun je gebruik maken van de techniek die bij de **Uitleg** is gebruikt. Dan blijkt dat de som van de eerste n termen is:

$$S(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} a \cdot r^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Voorbeeld 1

Je ziet hier het begin van drie rijen:

- rij u : 10, 15, 20, 25, ...
- rij v : 10, 20, 40, 80, ...
- rij w : 10, 40, 90, 160, ...

Welke van deze rijen is (waarschijnlijk) een meetkundige rij? Stel een daarbij passende directe formule op.

Antwoord

Om na te gaan of een rij meetkundig is, deel je steeds een term door zijn voorganger. Komt daar steeds hetzelfde getal r (de reden, de groeifactor) uit, dan heb je met een meetkundige rij te maken. Hier is dat de rij v .

De directe formule voor rij v vind je door vast te stellen, dat:

- $v(0) = 10$;
- de reden is $r = 2$.

De gevraagde directe formule wordt: $v(n) = 10 \cdot 2^n$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Opgave 4

Welke van de volgende rijen zijn meetkundig? Geef van elke meetkundige rij de directe formule en het complete recursievoorschrift. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 1**.

- a** 5, 14, 23, 32, ...
- b** 320, 160, 80, 40, ...
- c** 10, 2, -6, -14, ...
- d** 1, 4, 9, 16, ...
- e** 1, 3, 9, 27, ...
- f** 2, 6, 18, 54, ...
- g** $5, 5\sqrt{3}, 15, 15\sqrt{3}, 45, \dots$

Voorbeeld 2

De uitvinder van het schaakbord vroeg als beloning: 1 graankorrel voor het eerste veld van het schaakbord, 2 voor het tweede veld, 4 voor het derde veld, 8 voor het vierde veld, enz.

Hoeveel graankorrels zijn dat samen?

Antwoord

Je ziet dat er van een meetkundige rij sprake is: $a_n = 2^n$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ (Het eerste veld krijgt nummer 0.)

Het totaal aantal graankorrels is nu:

$$S(63) = \sum_{k=0}^{63} 1 \cdot 2^k = \frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe de somformule voor een meetkundige rij wordt gebruikt. Gegeven is de rij $a_n = 2^n$ met $n \geq 0$.

- Bereken de som van de eerste 20 termen van deze rij met je grafische rekenmachine.
- Bereken de som van de eerste 20 termen van deze rij met de somformule voor een meetkundige rij.
- Bereken $\sum_{n=5}^{19} a_n$. Gebruik weer de somformule.

Voorbeeld 3

Jan is op 31-12-2000 geboren. In de jaren 2000 t/m 2016 zetten zijn ouders aan het eind van elk jaar € 500,00 op zijn spaarrekening. Ze zijn steeds uitgegaan van 4% rente per jaar en laten dit geld staan tot zijn zeventiende verjaardag. (Er worden ook geen extra stortingen gedaan.)

Hoeveel geld staat er op Jan's zeventiende verjaardag op deze spaarrekening?

Antwoord

Er worden tot Jan's zeventiende verjaardag 17 bedragen gestort (de laatste keer wordt er niets gestort, die 500 euro krijgt Jan voor zijn verjaardag).

- Op 31-12-2000 de eerste 500 euro, die 17 jaar rente oplevert: $500 \cdot 1,04^{17}$.
- Op 31-12-2001 de tweede 500 euro, die 16 jaar rente oplevert: $500 \cdot 1,04^{16}$.
- Op 31-12-2002 de derde 500 euro, die 15 jaar rente oplevert: $500 \cdot 1,04^{15}$.

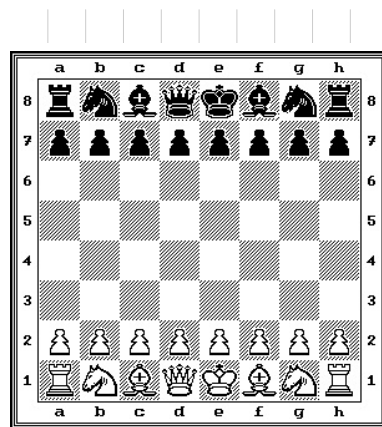
enzovoorts...

In totaal is dit $500 \cdot 1,04^{17} + 500 \cdot 1,04^{16} + 500 \cdot 1,04^{15} + \dots + 500 \cdot 1,04$ euro.

Dit is de som van een meetkundige rij zonder nulde term. Dus staat er op Jan's spaarrekening op 31-12-2017:

$$\sum_{k=0}^{17} (500 \cdot 1,04^k) - 500 = \frac{500(1-1,04^{18})}{1-1,04} - 500 \approx 12322,71 \text{ euro.}$$

(In werkelijkheid kan het bedrag iets anders zijn i.v.m. het jaarlijks afronden op centen.)



Figuur 4.2

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** gaat het over sparen met een vast jaarlijks spaarbedrag en een vaste jaarlijkse rente.

Stel je voor dat je vanaf je 16e verjaardag ($t = 0$) elke maand 50 euro op een nieuwe spaarrekening zet. Je krijgt een rente van 0,5% per maand.

- Hoeveel heb je twee maanden na je verjaardag op deze spaarrekening staan? En drie maanden na je verjaardag?
- Waarom is er telkens sprake van de som van een meetkundige rij?
- Stel voor die meetkundige rij een directe formule $B(t)$ op. Neem t in maanden vanaf je verjaardag.
- Bereken met behulp van de somformule voor een meetkundige rij hoeveel je totale saldo S na 24 maanden sparen bedraagt.

Opgave 7

Iemand huurt vanaf 1 januari 2010 een appartement voor € 550 per maand. Zij houdt rekening met een huurverhoging van 5% per jaar.

- Hoeveel moet zij jaarlijks aan huur betalen over het jaar 2011? En over 2012?
- Stel een formule op voor de jaarlijks huurbedragen h_n , met $n = 0$ in 2010.
- Hoeveel betaalt ze in totaal aan huur gerekend over de eerste 10 jaar?

Verwerken

Opgave 8

De rij $t_0, t_1, t_2, \dots$ is gegeven door $t_n = 3 \cdot 2^{n+1}$.

- Laat zien dat dit een meetkundige rij is.
- Schrijf de som van de eerste zeven termen met het Σ -symbool en bereken die som.
- Schrijf de som van de daarop volgende zeven termen met het Σ -symbool en bereken die som.

Opgave 9

Hieronder staan telkens de twee eerste termen van een meetkundige rij $r(n)$ met $n \geq 0$. Schrijf bij elk geval de eerste zeven termen op en geef een directe formule voor de rij.

- 3, 6
- 1, -2
- 100, 10
- 5, 5

Bij elk van deze rijen kun je naar de som van een aantal termen kijken.

- Bepaal bij elk van deze rijen de som van de eerste 12 termen.
- Bepaal bij elk van deze rijen ook $\sum_{n=5}^9 r(n)$.

Opgave 10

Van een meetkundige rij is de derde term 10 en de zevende term 40. Bepaal een recursieformule en een directe formule voor de rij. Geef duidelijk je nummering aan!

Opgave 11

Twee huurders huren elk een huis tegen een jaarhuur van € 3000 in het eerste jaar. De jaarhuur van huurder A wordt elk jaar met € 140 verhoogt, die van huurder B met 4%.

- Stel formules op voor hun jaarhuur in de opeenvolgende jaren.
- In welk jaar gaat B meer huur betalen dan A? (Gebruik de grafische rekenmachine).
- Hoeveel is A over de eerste tien jaar aan huur kwijt?
- Hoeveel is B over de eerste tien jaar aan huur kwijt?

Opgave 12

Je leent bij een kredietbank een bepaald bedrag tegen een rente van 1,3% per maand.

Laat zien dat dit overeen komt met een jaarrente van ongeveer 16,8%.

Toepassen**Opgave 13: Hypotheekvormen**

Iemand wil € 240.000 lenen van een bank, om een huis te kopen of een zaak te beginnen. De bank wil 5% rente per jaar hebben en de lening moet in 30 jaar worden terugbetaald. Hoe ga je zo'n schuld aflossen? Twee bekende methoden zijn:

Lineair afbetalingssysteem

Een lineair afbetalingssysteem, waarbij je elk jaar $\frac{1}{30}$ ste deel van de schuld terugbetaalt en jaarlijks rente betaalt over de nog uitstaande restschuld.

Stel je leent op 1-1-2010 ($t = 0$ in jaren) en je betaalt voor het eerst op 31-12-2010.

- Je betaalt dus op $t = 1$: $8000 + 0,05 \cdot 240000$ euro.
- Je betaalt op $t = 2$: $8000 + 0,05 \cdot 232000$ euro.

Enzovoorts...

In jaar t betaal je: $B(t) = 8000 + 0,05 \cdot (240000 - 8000(t - 1))$ euro. $B(t)$ is een rekenkundige rij, dus je berekent je totale kosten voor deze lening met de somformule voor zo'n rij.

Annuïteiten afbetalingssysteem

Een afbetalingssysteem met annuïteiten, waarbij je elk jaar evenveel betaalt, rente en aflossing samen (in het begin veel rente en weinig aflossing, later andersom). Natuurlijk betaal je ook nu rente over je restschuld.

Noem de annuïteit A , je leent op 1-1-2010 en betaalt op 31-12 van elk jaar.

- Je restschuld op $t = 1$ is: $240000 \cdot 1,05 - A$ euro.
- Je restschuld op $t = 2$ is: $240000 \cdot 1,05^2 - A \cdot 1,05 - A$ euro.

Na t jaar is je restschuld: $S(t) = 240000 \cdot 1,05^t - A \cdot 1,05^{t-1} - A \cdot 1,05^{t-2} - \dots - A$. Je hebt alles afbetaald als dit samen 0 is. Hieruit bereken je de annuïteit en je totale kosten.

- Bij een lineair afbetalingssysteem betaal je elk jaar evenveel aflossing en rente over de restschuld. Maak hierbij een tabel van jaarlijks te betalen bedragen en bereken het totaalbedrag dat je hiervoor kwijt bent als de situatie zich verder niet wijzigt.
- Bij een afbetalingssysteem gebaseerd op annuïteiten betaal je elk jaar een vast bedrag. Bereken de grootte van dit bedrag en het totaalbedrag dat je hiervoor kwijt bent als de situatie zich verder niet wijzigt.

Testen

Opgave 14

Bereken $1024 + 512 + 256 + \dots + 4 + 2 + 1$.

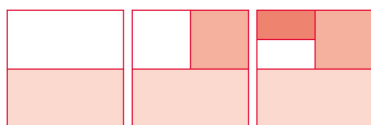
Opgave 15

Bereken:

- $\sum_{i=0}^{10} 100 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i$
- $\sum_{k=5}^{10} 4 \cdot (-2)$

Opgave 16

Een wit vierkant van 1 m^2 wordt in stappen rood gekleurd. In stap 1 wordt de helft gekleurd, in elke volgende stap de helft van het dan nog witte deel.



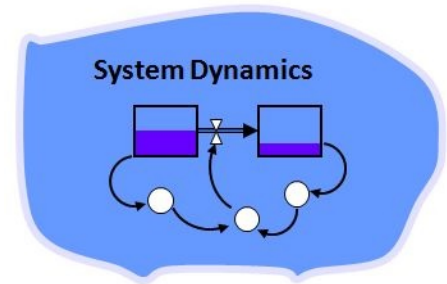
Figuur 4.3

- Hoe groot is de oppervlakte van het nog witte deel na drie stappen?
- Stel een formule op voor de oppervlakte van het rode deel na n stappen.
- Na hoeveel stappen is het witte deel kleiner dan 1 cm^2 ?
Bekijk de drie rijen gevormd door
 - de lengte van de opeenvolgende witte stukken;
 - de oppervlakten van die stukken;
 - de oppervlakten van de opeenvolgende rode stukken.
- Ga voor elk van die rijen na of hij rekenkundig of meetkundig is.

1.5 Dynamische modellen

Inleiding

Een belangrijke toepassing van (vooral meetkundige) rijen zijn de discrete dynamische modellen. Daarbij verandert een bepaalde hoeveelheid (geld, aantal mensen, dieren of planten, oppervlakte bosgrond, etc.) met de tijd. Die tijd wordt dan met vaste stapgrootte doorlopen, bijvoorbeeld maandelijks, of jaarlijks.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip discreet dynamisch model;
- recursieformules opstellen bij een discreet dynamisch model;
- in lineaire situaties een directe formule opstellen bij een discreet dynamisch model.

Voorkennis

- rijen in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met directe formules en recursieformules;
- werken met rekenkundige en meetkundige rijen en hun somformules.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt op 1 januari 2012 een saldo van € 1240.

En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten. Verder ga je aan het begin van elke maand 50 euro naar die spaarrekening overmaken, te beginnen op 1 februari 2012. Je krijgt aan het eind van elke maand 0,5% rente over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.

- Stel voor dit spaarsysteem een recursieformule op.
- Probeer een bijpassende directe formule te vinden.



Figuur 5.2

Uitleg

Je hebt op 1 januari 2012 een saldo van € 1240.

En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten. Verder ga je aan het begin van elke maand 50 euro naar die spaarrekening overmaken, te beginnen op 1 februari 2012. Je krijgt aan het eind van elke maand 0,5% rente over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.

Bekijk het probleem bij **Verkennen V1** nog eens. Je krijgt aan het eind van elke maand 0,5% rente over het saldo van dat moment en je stort dan weer € 50.

De recursieformule is: $K(t) = K(t-1) \cdot 1,005 + 50$ met $K(0) = 1240$.

Je noemt dit wel een 'discreet dynamisch model': dynamisch omdat het kapitaal met de tijd verandert en discreet omdat het over vaste tijdstappen van 1 maand gaat. Hierbij kun je in Excel zo'n **werkblad spaarkapitaal** maken.

Het maken van een directe formule gaat zo:

- op $t = 0$ is: $K(0) = 1240$;
- op $t = 1$ is: $K(1) = 1240 \cdot 1,005 + 50$;
- op $t = 2$ is: $K(2) = 1240 \cdot 1,005^2 + 50 \cdot 1,005 + 50$;
- op $t = 3$ is: $K(3) = 1240 \cdot 1,005^3 + 50 \cdot 1,005^2 + 50 \cdot 1,005 + 50$;

en na t maanden:

$$K(t) = 1240 \cdot 1,005^t + 50 \cdot 1,005^{t-1} + 50 \cdot 1,005^{t-2} + \dots + 50.$$

Met de somformule voor een meetkundige rij kun je dit nog korter schrijven.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je een voorbeeld van een discreet dynamisch model.

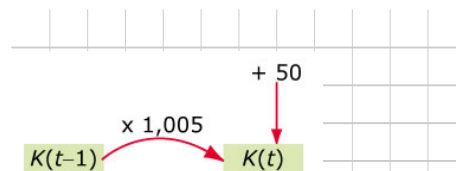
- Waarom heet dit model zo?
- Vanuit de recursieformule wordt een directe formule afgeleid. Schrijf die formule korter met behulp van de somformule voor een meetkundige rij.

Opgave 2

Een bosbouwer verkoopt hout van bomen die hij zelf aanplant. Stel je voor dat hij op een bepaald stuk bos ongeveer 5000 bomen heeft geplant. Na een aantal jaren zijn de eerste bomen groot genoeg om te kunnen worden gekapt. Maar om ook daarna elk jaar opbrengst van dit perceel te hebben zal hij

- de meeste bomen moeten laten staan;
- nieuwe bomen aanplanten.

Hij besluit elk jaar 15% van de bomen te kappen en dan weer 1000 aan te planten.



Figuur 5.3

Hij plant dus meer aan dan hij kapt, teneinde de opbrengst te verhogen. Op dit perceel is namelijk wel ruimte voor zo'n 7000 bomen.

- Onderzoek hoe het aantal bomen dat er jaarlijks op dit perceel staat, gaat verlopen. Maak een grafiek.
- Zal het aantal bomen de 7000 gaan overstijgen, denk je?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Wanneer een bepaalde hoeveelheid H met de tijd t in vaste tijdstappen verandert en je beschrijft die verandering met één of meer recursieformules, dan spreek je van een **discreet dynamisch model**.

Door de recursie uit te voeren ontstaat een rij getallen voor $H(t)$.

Deze **lineaire differentievergelijking** is er een voorbeeld van:

- $H(t) = g \cdot H(t-1) + b$
- $H(0) = c$

Door uitschrijven kun je hier een directe formule bij opstellen:

$$H(t) = c \cdot g^t + b \cdot g^{t-1} + b \cdot g^{t-2} + \dots + b.$$

Met de somformule voor een meetkundige rij schrijf je dit als:

$$H(t) = c \cdot g^t + b \cdot \frac{1-g^t}{1-g} = \frac{b}{1-g} + \left(c - \frac{b}{1-g}\right) \cdot g^t.$$

Vaak zijn discrete dynamische modellen echter veel ingewikkelder en bestaan ze ook uit meerdere vergelijkingen. In de voorbeelden zul je daar iets van aantreffen...

Voorbeeld 1

Staatsbosbeheer heeft op een bepaald perceel waarop ongeveer 6000 bomen van een bepaalde soort kunnen staan. Dit perceel is bedoeld als productiebos: na een aantal jaren zijn de eerste bomen groot genoeg om te kunnen worden gekapt. Om een stabiele jaarlijkse opbrengst te hebben wordt er jaarlijks maar 18% van de bomen gekapt en worden er 1000 aangeplant. Het eerste jaar zijn er 5000 bomen geplant.

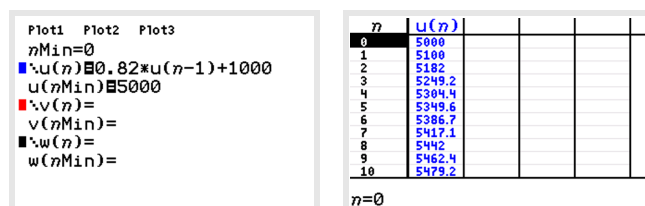
Stel een dynamisch model op voor het aantal bomen op dit perceel en breng het verloop ervan in beeld.

Antwoord

Noem het aantal bomen B , dan is:

- $B(t) = 0,82 \cdot B(t-1) + 1000$
- $B(0) = 5000$

Met Excel of met je GR maak je hierbij snel een tabel.



Figuur 5.4

Je kunt hierbij ook een directe formule opstellen door de recursie uit te schrijven:

$$B(t) = 5000 \cdot 0,82^t + 1000 \cdot 0,82^{t-1} + 1000 \cdot 0,82^{t-2} + \dots + 1000.$$

Met de somformule voor een meetkundige rij:

$$B(t) = 5555\frac{5}{9} - 555\frac{5}{9} \cdot 0,82^t.$$

Uiteindelijk zullen er jaarlijks ongeveer 5556 bomen op dit perceel staan.

Opgave 3

Bekijk in de **Theorie** wat een lineaire differentievergelijking is.

Stel je voor dat je bij een bank een rente van 12% per jaar kunt krijgen. Je spaart € 1500,00 per jaar en je bent gestart op 1 januari 2000.

- Stel een lineaire differentievergelijking op voor $K(t)$, het kapitaal aan het begin van het t -de jaar.
- Maak een tijdgrafiek bij de rij met saldi. Wat gebeurt er met het saldo als t toeneemt?
- Op welk tijdstip is het saldo meer dan € 20000,00?

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** tref je een model aan voor het kappen en aanplanten van bos.

- Leg uit hoe de lineaire differentievergelijking in dit voorbeeld uit de gegevens kan worden afgeleid.
- Maak zelf een tabel van het aantal bomen met je grafische rekenmachine en bepaal de grenswaarde voor het aantal bomen.
- Laat zien hoe je met behulp van de somformule voor een meetkundige rij de directe formule voor $B(t)$ af kunt leiden.
- Leg uit hoe je de grenswaarde van 5556 bomen uit de directe formule kunt afleiden.

Voorbeeld 2

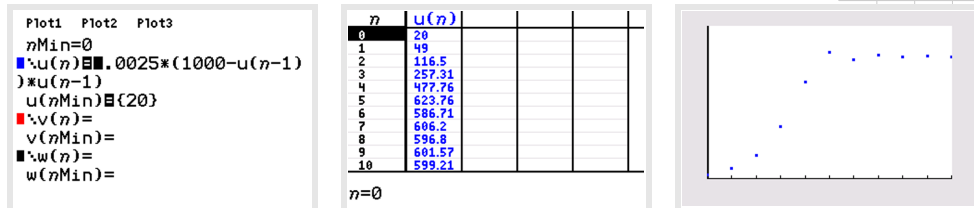
De Belgische wiskundige Pierre François Verhulst (1804—1849) ontdekte dat de meeste populaties niet exponentieel groeien. Hij ontwikkelde op basis van een aangenomen maximale populatieomvang M een beter passend model: het logistische groeimodel. Daarbij hoort een recursieformule van de vorm

- $H(t) = c \cdot (M - H(t - 1)) \cdot H(t - 1)$
- $H(0) = b$

Neem $M = 1000$, $b = 20$ en $c = 0,0025$ en laat met je grafische rekenmachine zien dat H naar een bepaalde grenswaarde toe groeit.

Antwoord

Je kunt deze rij in de GR of in Excel invoeren. Je ziet dat $H(t)$ inderdaad naar de grenswaarde 600 nadert.



Figuur 5.5

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** vind je een voorbeeld van het logistische groeimodel.

Neem nu $M = 1200$, $b = 100$ en $c = 0,002$.

- Voer zelf dit groeimodel in op je grafische rekenmachine.
- Nadert deze rij een grenswaarde? En zo ja welke waarde is dat?

Voorbeeld 3

Onder verstedelijking wordt de trek van de bevolking van een bepaalde regio van het platteland naar de steden verstaan. De tabel geeft daarover informatie voor deze regio.

(S = stedelijk gebied, P = platteland)

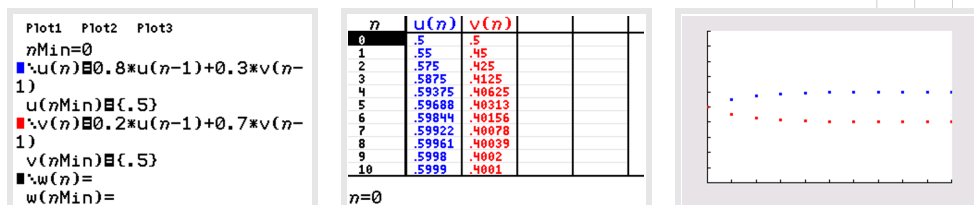
Hierbij kun je dit dynamische model opstellen:

- $S(t) = 0,8 \cdot S(t-1) + 0,3 \cdot P(t-1)$
- $P(t) = 0,2 \cdot S(t-1) + 0,7 \cdot P(t-1)$

Onderzoek of er een soort van evenwichtstoestand ontstaat v.w.b. de verdeling van de bevolking van deze regio over stad en platteland.

Antwoord

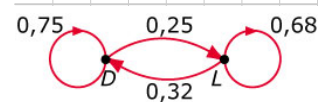
Je kunt ook zo'n stelsel rijen in de GR of in Excel invoeren. Bekijk eventueel het **Practicum**. Begin bijvoorbeeld met een verdeling van 50% op het platteland en 50% in stedelijke gebieden. Je ziet dat $S(t)$ en $P(t)$ in dit model naar een evenwicht toegroeien.



Figuur 5.6

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** zie je een stelsel van twee lineaire differentievergelijkingen. Stel je voor dat er maar twee softwarebedrijven zijn die een internetbrowser op de markt brengen. Noem die browsers bijvoorbeeld 'Discoverer' en 'Landscape'. Beide bedrijven beconcurreren elkaar heftig, zodat de gebruikers van een internetbrowser



Figuur 5.7

jaarlijks reikhalzend uitzien naar de nieuwste versie van de Discoverer of van Landscape. Ervaren gebruikers wisselen ook nogal eens van browser. In deze graaf zie je de wisselingen in beeld gebracht.

- a Stel bij deze graaf een stelsel differentievergelijkingen op. Noem het aantal gebruikers van de Discoverer $D(t)$ en dat van Landscape $L(t)$.
- b Maak op je grafische rekenmachine de grafieken van de rijen $D(t)$ en $L(t)$ voor $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$. Ga er van uit dat $D(0) = 0,5$ en $L(0) = 0,5$.
- c Bereken met die differentievergelijkingen hoeveel procent van de gebruikers uiteindelijk in de evenwichtssituatie de Discoverer zal gebruiken.

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de lineaire differentievergelijking $u(t) = u(t-1) \cdot 0,6 + 20$ met $u(0) = 100$.

- a Maak een grafiek bij deze lineaire differentievergelijking.
- b Stel een directe formule bij deze lineaire differentievergelijking op.
- c Op welke waarde komt $u(t)$ uiteindelijk uit?

Opgave 8

In 1999 heeft iemand onverwacht € 500.000 gekregen. Hij heeft dit bedrag op 1 januari 2000 op een renterekening gezet tegen 5% rente per jaar (dat kon in die tijd). Hij haalde elke maand € 2500 van deze rekening. Het saldo van de renterekening S_n veranderde daardoor maandelijks.

- a Stel hierbij een recursieformule op.
- b Maak een grafiek van de rij S_n . Beschrijf het verloop van het saldo.
- c Na hoeveel jaar zou het geld op deze renterekening op zijn geweest als de spaarrente zo was gebleven?
- d Stel een directe formule op voor het saldo S_n .

Opgave 9

In 2000 leefden er in een natuurgebied 2000 konijnen. Hun aantal is in de jaren daarna telkens met 5% toegenomen.

- a Stel een recursieformule op voor het aantal konijnen $K(t)$ waarin t het aantal jaren na 2000 is.
- b Stel een directe formule op voor $K(t)$.
- c Maak een grafiek en een tabel van de rij $K(t)$. In welk jaar is het aantal konijnen meer dan verdubbeld?

Opgave 10

Als je melk uit de koelkast haalt en in een glas schenkt loopt de temperatuur op vanaf $T(0) = 6$ °C (de temperatuur binnen de koelkast) naar de kamertemperatuur van 20 °C. De toename van de temperatuur per minuut is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

- a Leg uit, dat hieruit deze recursieformule is af te leiden: $T(t+1) = T(t) + c \cdot (20 - T(t))$ waarin t het aantal minuten voorstelt.

Neem aan dat $c = 0,1$.

- b Maak een grafiek van deze rij en bepaal na hoeveel minuten de temperatuur van de melk minder dan 1 °C verschilt van de kamertemperatuur.
- c Laat zien hoe de grenswaarde uit de gegeven recursieformule is af te leiden.

Opgave 11

Er wordt een nieuw maandblad voor jongeren opgericht. Aanvankelijk groeit het aantal abonnees sterk. Van het eerste blad werden 3000 exemplaren verkocht, maar van het tweede waren dat er al 5670, een stijging van ongeveer 90%. De redactie hoopt dat het aantal abonnees voorlopig met hetzelfde percentage zal blijven stijgen.

Ze gaan er van uit dat die stijging de komende maanden zo door gaat.

- a Stel een daarbij passende differentievergelijking op voor het aantal abonnees $A(t)$ in maand t . Neem aan dat $t = 0$ de maand van de eerste oplage voorstelt.

- b Waarom is dit groeimodel voor het aantal abonnees van dit blad onwaarschijnlijk?

Na verloop van tijd wordt de groei van het aantal abonnees echter kleiner. Voor $A(t)$ blijkt de volgende recursieformule te gelden:

$$A(t) = 1,95 \cdot A(t-1) - 0,00002 \cdot (A(t-1))^2$$

- c Teken de bijpassende grafiek, weer uitgaande van $A(0) = 3000$.
- d Op hoeveel abonnees zal dit maandblad uiteindelijk uitkomen?

Testen**Opgave 12**

Iemand heeft een miljoen op de bank gezet tegen een rente van 6% per jaar. Hij gaat er van leven en haalt maandelijks € 1500 van deze rekening voor zijn levensonderhoud.

- a Stel hierbij een lineaire differentievergelijking op.
- b Teken een bijpassende grafiek en bepaal daarmee of de rij van saldi S_t naar een grenswaarde toegroeit.
- c Stel een directe formule op voor S_t en leid ook daaruit de evenwichtswaarde af.

Opgave 13

Een viskwekerij heeft een bepaald bassin waarin maximaal 5000 meervallen kunnen leven. De kweker zet daarin 1000 meervallen uit. Het aantal meervallen zal dan gaan groeien, maar omdat er maximaal 5000 meervallen in het bassin kunnen leven, zal de groei gaan afnemen naarmate het aantal meervallen dichterbij de 5000 komt.

De kweker veronderstelt daarom dat de toename van het aantal meervallen per jaar recht evenredig is met het verschil tussen het aantal meervallen en het maximale aantal van 5000:

$$\Delta N_t = c \cdot (5000 - N_t),$$

waarin N_t het aantal meervallen na t jaar is.

- Is er hier sprake van een logistisch groeimodel?
- Toon aan dat de veronderstelling van de kweker leidt tot een groeimodel met als bijbehorende differentievergelijking:

$$N_{t+1} = (1 - c) \cdot N_t + 5000 \cdot c.$$
- Na een jaar zijn er ongeveer 1600 meervallen in het bassin. Bereken c .
- Teken een grafiek van N_t . Vanaf welk moment gaat het aantal meervallen minder snel toenemen?

Practicum

Met de volgende practica leer je enkele technieken op de GR die bij het **werken met rijen** onontbeerlijk zijn. Voor wiskunde A zijn de eerste twee paragrafen van het practicum voldoende. Wil je echter stelsels van twee recursieformules in beeld brengen, dan moet je ook de vierde paragraaf bekijken.

- [Rijen met de TI84](#)
- [Rijen met de TIInspire](#)
- [Rijen met de Casio fx-CG50](#)
- [Rijen met de HP prime](#)
- [Rijen met de NumWorks](#)



Figuur 5.8

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Rijen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- rij, termen van een rij — directe formule — recursie en recursieformule
- verschilrij — somrij
- rekenkundige rij — somformule van een rekenkundige rij
- meetkundige rij — somformule van een meetkundige rij
- discreet dynamisch model

Activiteitenlijst

- rijen beschrijven met een directe formule — rijen beschrijven met een recursieformule
- de verschilrij van een rij bepalen — de som van (de eerste) n termen van een rij berekenen
- werken met rekenkundige rijen, o.a. de somformule toepassen
- werken met meetkundige rijen, o.a. de somformule toepassen
- meetkundige rijen toepassen bij discrete dynamische modellen

Achtergronden

Leonardo van Pisa (1170–1250) (bijgenaamd Fibonacci) was één der eersten die over rijen schreef. In zijn boek 'Liber Abaci' beschreef hij een model voor de ontwikkeling van een populatie konijnen.

Hij ging uit van één paar konijnen, en nam aan:

- elk paar is na zijn tweede levensmaand volwassen;
- elke maand komt er per volwassen paar een paar jongen bij;
- er gaan geen konijnen dood.

De vraag die hij wilde beantwoorden was: hoeveel paren konijnen zijn er aan het eind van één jaar?

Het aantal konijnen dat je onder deze aannames per maand hebt geeft de rij: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

Dit is de beroemde **rij van Fibonacci**.

De bijbehorende recursieformule is $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 1$ voor $n = 2, 3, 4, 5, \dots$

Een bijpassende directe formule is niet eenvoudig te vinden, maar hij bestaat wel.

De rij van Fibonacci komt op veel plaatsen voor. Onder andere in de spiralen in de bloem van een zonnebloem en in de schubben op een dennenappel. Maar ook de beroemde 'Gulden Snede' heeft met de rij van Fibonacci te maken. Op het internet bestaan heel veel sites over deze rij, zoek maar eens.



Figuur 6.1

Testen

Opgave 1

Stel bij deze rijen zowel een mogelijke directe formule als een mogelijke recursieformule op.

- a 7, 14, 28, 56, 112, ...
- b 5, 8, 11, 14, 17, ...

Opgave 2

Bekijk de rijen uit de vorige opgave nog eens.

- a Welke van beide rijen zou een rekenkundige rij kunnen zijn? Licht je antwoord toe.
- b Bereken van de rekenkundige rij bedoeld in a de som van de eerste 100 termen.
- c Bekijk nu de andere rij. Waarom zou dat een meetkundige rij kunnen zijn? Motiveer weer je antwoord.
- d Bereken van de meetkundige rij bedoeld in c de som van de eerste 100 termen.

Opgave 3

Kees betaalt elk jaar op 1 januari € 100 premie voor een inboedelverzekering. De maatschappij waarbij hij verzekerd is belegt dat geld. Gemiddeld maken ze daarmee per jaar 9% winst.

Na 16 jaar te hebben betaald krijgt Kees op 2 januari een schadegeval van € 3500, dat door de polis wordt gedekt. De verzekeringsmaatschappij betaalt hem dus uit.

Heeft de maatschappij nu winst of verlies geleden op de verzekering van Kees?

Geef een duidelijke toelichting.

Opgave 4

Een gepensioneerde heeft een kapitaal K op de bank dat uitstaat tegen 7,2% rente per jaar. De bank schrijft elke laatste dag van de maand rente over het dan aanwezige saldo bij. Op elke eerste dag van de maand neemt deze gepensioneerde een bedrag O op, de eerste opname vindt één maand na storting van het beginkapitaal plaats.

- a Toon aan dat het saldo na de n de opname is:

$$S_n = 1,0058^n \cdot K - (1,0058^{n-1} + 1,0058^{n-2} + \dots + 1,0058 + 1) \cdot O$$
 Neem nu aan dat $K = 100000$ en $O = 2000$, beide in euro.
- b Hoe groot is het saldo na 12 opnamen?
- c Na hoeveel maanden is het kapitaal op deze manier 'op'? Leg ook uit waarom er aanhalingstekens zijn gebruikt.

Opgave 5

Een A4-tje is een vel papier van (afgerond) 297 mm bij 210 mm.

- a Ga na dat de lengte en de breedte zich verhouden als $\sqrt{2} : 1$ (bij goede benadering).

Twee A4'tjes met de lange zijden tegen elkaar vormen een vel A3.

- b Ga na dat de lengte en de breedte van een A3 zich ook verhouden als $\sqrt{2} : 1$ (bij goede benadering).
- c Ga na: als je een rechthoek met breedte b en lengte $b\sqrt{2}$ in twee gelijke helften verdeelt door een lijn evenwijdig met de korte zijden, verhouden de lengte en de breedte van de twee helften zich weer als $\sqrt{2} : 1$.

Het standaardvel A0 is (afgerond) 1189 mm bij 841 mm. Halveren geeft A1; nog drie keer halveren geeft A4.

- d Ga na dat de oppervlakte van zo'n vel A0 praktisch 1 m^2 is.
- e Laat l_n de lengte in m zijn van A_n . Stel een recursieformule en een directe formule op voor de rij $l_0, l_1, l_2, \dots$
- f Doe hetzelfde voor de rij der oppervlakten van A_n (kies zelf namen en eenheden).
- g Bereken nauwkeurig de lengte en breedte van een vel A0 uit de gegevens: de oppervlakte is 1 m^2 en lengte en breedte verhouden zich als $\sqrt{2} : 1$.

Opgave 6

Een gasfles is gevuld met een hoeveelheid gas onder druk. De fles loopt langzaam leeg door een lekkende afsluiter. Het verlies per uur is recht evenredig met de druk in de fles, dus ook met de hoeveelheid gas in de fles.

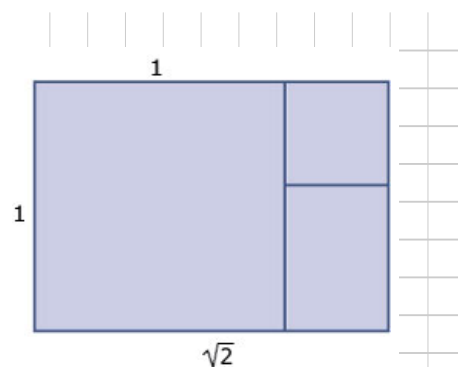
Stel per uur is het verlies 4% van de aan het begin van het uur aanwezige hoeveelheid gas. Aan het begin is de hoeveelheid gas 100 liter, na 1 uur is dus $0,04 \cdot 100$ liter ontsnapt, in het tweede uur ontsnapt $0,04 \cdot (100 - 0,04 \cdot 100)$ liter.

- a De hoeveelheden nog aanwezig gas na 0, 1, 2, ... uur vormen een meetkundige rij. Met welke reden? Stel een directe formule voor die rij op.
- b Hoeveel ontsnapt dus in het n -de uur?
- c Zowel uit het antwoord bij a als uit dat bij b kun je een formule halen voor de hoeveelheid gas die in de eerste n uur ontsnapt. Ga na of je hetzelfde krijgt.

Opgave 7

Bij de geboorte van zijn eerste kleinzoon stopt opa € 50 in een potje. Bij de eerste verjaardag doet hij daar € 100 bij, bij de tweede verjaardag € 150, enzovoort, telkens € 50 meer. Hij doet dat voor het laatst op de zestiende verjaardag, en geeft dan meteen het hele bedrag aan zijn kleinzoon.

- a Hoe groot is dat bedrag?



Figuur 6.2

Bij de geboorte van haar eerste kleindochter pakt oma het anders aan. Zij stort € 350 op een spaarrekening die 3% rente per jaar geeft, en herhaalt dit jaarlijks, voor het laatst op de zestiende verjaardag.

- b** Hoe groot is het bedrag op de spaarrekening op de dag na de zestiende verjaardag? (Je hoeft er geen rekening mee te houden dat de bank de rente op centen afrondt).

Bij de geboorte van die kleindochter pakt de andere oma het nog anders aan. Zij werkt met dezelfde bedragen als de opa, maar stort ze op een spaarrekening die 3% rente per jaar geeft.

- c** Hoe groot is het bedrag op de spaarrekening op de zestiende verjaardag?

Opgave 8

Pas gezette koffie heeft een temperatuur van zo'n 80 °C. Schenk je deze koffie in een kopje en zet je dat in de kamer dan wordt de temperatuur lager totdat hij de kamertemperatuur (20 °C) benadert.

De daling van de temperatuur per minuut is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

- a** Leg uit, dat hieruit deze differentievergelijking is af te leiden: $T_{t+1} = T_t + c \cdot (T_t - 20)$, waarin t het aantal minuten voorstelt na het inschenken.

Neem aan dat $c = -0,05$.

- b** Maak een grafiek van de rij T_t . Welke grenswaarde zal de rij T_t bereiken?
- c** Laat zien hoe de grenswaarde uit de gegeven recursieformule is af te leiden.
- d** Bepaal na hoeveel minuten de temperatuur van de koffie minder dan 1 °C verschilt van de kamertemperatuur.

Toepassen

Opgave 9: Varkenscyclus

In de economie is de **varkenscyclus** een bekend dynamisch vraag-en-aanbodmodel. Op de varkensmarkt kunnen de aanbieders van varkens namelijk niet onmiddellijk reageren op een prijsverandering omdat het vetmesten van varkens tijd kost.

De volgende modelaannames worden gehanteerd:

- Bij een lage prijs van varkensvlees wordt het aantal aanbieders kleiner, bij een hoge prijs juist groter.
- Bij een laag aanbod van varkensvlees wordt de prijs hoger, bij een hoog aanbod wordt de prijs juist lager.
- Het vetmesten van een varken duurt ongeveer 0,5 jaar.

Nu kan de vrager onmiddellijk reageren op elke prijsverandering, maar de aanbieder niet want meer vlees aanbieden betekent meer varkens vetmesten en dat kost tijd.

Noem de prijs p , de aangeboden hoeveelheid q_A en de gevraagde hoeveelheid q_V .

Een mogelijk stelsel modelformules is dan: $q_A(t) = p(t-1) - 15$ en $q_V(t) = 400 - 1,5p(t)$.

Hierin is t de tijd in stappen van 0,5 jaar.

In het Excel bestand **Model varkenscyclus** zie je wat de computer er van maakt. Je ziet dat de rij getallen $p(t)$ naar een **evenwichtsprijs** nadert.

- Leg uit dat de gegeven modelformules in overeenstemming zijn met de aannames.
- Waar vind je de periode van 0,5 jaar (nodig voor het vetmesten van een varken) terug?
- Welke evenwichtsprijs levert het model op?
- Stel een differentievergelijking op voor de rij $p(t)$ er van uitgaande dat vraag en aanbod elkaar in evenwicht houden.

Opgave 10: Prooidier-roofdier modellen

In veel natuurgebieden is er sprake van een wisselwerking tussen de roofdieren en hun prooi, zoals vossen en konijnen. Modellen die zo'n wisselwerking bestuderen heten **prooi-roofdiermodellen**. De Italiaanse wiskunde **Vito Volterra** en de Amerikaanse wiskundige **Alfred J. Lotka** ontwierpen in 1925/1926 een dynamisch model voor dergelijke wisselwerkingen. Als $P(t)$ het aantal prooidieren en $R(t)$ het aantal roofdieren op tijdstip t is, zien hun vergelijkingen er in discrete vorm zo uit:

- $P(t) = P(t-1) \cdot (a - b \cdot R(t-1))$
- $R(t) = -R(t-1) \cdot (c - d \cdot P(t-1))$

Hierin zijn a , b , c en d positieve getallen. Bekijk maar eens met behulp van een rekenblad in Excel of je grafische rekenmachine hoe dit model zich gedraagt.

De eerste vergelijking laat zien dat de prooidieren bij afwezigheid van de roofdieren ($b = 0$) exponentieel toenemen. De uitdrukking $a - b \cdot R(t-1)$ laat echter zien, dat de groeifactor vermindert afhankelijk van het aantal roofdieren R dat een periode eerder op ze heeft kunnen jagen.

De vergelijking voor de roofdieren kent een vergelijkbare interpretatie.

Kies waarden voor a , b , c en d en reken een prooi-roofdiermodel door. Onderzoek wat er of er een evenwichtssituatie ontstaat waarin de aantallen stabiliseren. Het beste kun je een rekenblad in Excel maken waarin deze vier parameters instelbaar zijn zodat je wat realistische resultaten krijgt...

Tegenwoordig bestaan er diverse aangepaste prooi-roofdiermodellen en animaties ervan op internet. Bekijk bijvoorbeeld dit **artikel uit de Scholarpedia**.



Figuur 6.3

Examen

Opgave 11: Ureum-gehalte

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 g toeneemt. Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo verversd worden dat de wettelijke norm van 2 g ureum per m^3 water niet overschreden wordt. In een model gaan we er van uit dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken en dat de verversing van het water 's nachts plaatsvindt. Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 m^3 verversd wordt (dus 3% van het totaal). We beginnen de eerste dag met 0 g ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 g ureum in het water. Na het verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 g ureum over.

a Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 g ureum in het water zit.

b In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

c Toon aan dat voor de hoeveelheid ureum (notatie U_n) aan het begin van de n de dag dag geldt $U_n = 0,8 \cdot U_{n-1} + 400$.

Stel je voor dat het water 0 g ureum aan het begin van de eerste dag bevat.

d Toon aan dat de hoeveelheid ureum in gram aan het begin van de n de dag rechtstreeks kan worden berekend met de formule: $U_n = 2000 - 2500 \cdot (0,8)^n$.

e Leg met behulp van deze formule uit dat aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm wordt voldaan.

f In de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden. Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(bron: examen wiskunde A havo van voor 1990)

Opgave 12: Nationaal inkomen

In de afgelopen 20 jaar is het wereldinkomen (het totale inkomen van alle mensen samen) sneller gegroeid dan de wereldbevolking. Dat betekent dat het gemiddeld inkomen per hoofd van de bevolking is gestegen. In de theorie van de economische groei spelen de kapitaalgoederen een belangrijke rol. Bij kapitaalgoederen kun je bijvoorbeeld denken aan machines. De kapitaalgoederen hebben een grote invloed op de productie. Hier zie je een eenvoudig model voor economische groei:

- $I_t = S_t$.
 I_t zijn investeringen in jaar t ; S_t zijn besparingen in jaar t . De investeringen zijn steeds gelijk aan de besparingen.
- $I_t = K_{t+1} - K_t$.
 K_t is hoeveelheid kapitaalgoederen in jaar t . De investeringen leiden uitsluitend tot uitbreiding van de kapitaalgoederen.
- $S_t = s \cdot Y_t$.
 Y_t is het nationaal inkomen in jaar t . De besparingen zijn steeds een vast gedeelte van het nationaal inkomen; s heet de spaarquote.
- $K_t = k \cdot Y_t$.
De hoeveelheid kapitaalgoederen is gelijk aan k keer de productiecapaciteit. Omdat wordt aangenomen dat de productiecapaciteit volledig wordt benut, is de productiecapaciteit gelijk aan het nationaal inkomen; k heet de kapitaalcoëfficiënt.

Kies $s = 0,3$, $k = 2$ en $K_0 = 200$. Alle bedragen zijn steeds in miljoenen dollars.

- Toon aan dat volgens het model geldt: $K_{t+1} = 1,15 \cdot K_t$.
- Voor welke t geldt dat het nationaal inkomen Y_t voor het eerst boven de 1 miljard dollar komt? Licht je antwoord toe.

De spaarquote en de kapitaalcoëfficiënt bepalen de groei van het nationaal inkomen. Ontwikkelingslanden hebben lage gemiddelde inkomens en kunnen nauwelijks sparen: s is laag. In de figuur zie je dat dit leidt tot een vicieuze cirkel van armoede.

- Toon aan dat ook volgens het model geldt: als s afneemt, dan neemt de groei van het nationaal inkomen af.

(bron: voorbeeldexamen vwo wiskunde A1,2 uit 1998)



Figuur 6.4

2

Kansmodellen

2.1	Kansverdelingen	52
2.2	Normale verdelingen	63
2.3	Kansvariabelen optellen	75
2.4	Wortel-n-wet	82
2.5	Normaal of niet?	90
2.6	Totaalbeeld	103

2.1 Kansverdelingen

Inleiding

Een bedrijf is geïnteresseerd in de tijd die nodig is om een klant te helpen, de transactietijd. Je kunt die tijd in klassen indelen (bijvoorbeeld van hele minuten) en zo bijhouden hoeveel minuten een transactie duurt. Je maakt dan een kansverdeling voor de variabele transactietijd t . Maar de transactietijd kan in feite elke (positieve) reële waarde aannemen. Door steeds kleinere tijdsintervallen te nemen kun je een kansverdeling voor deze continue kansvariabele opstellen, benaderen.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip kansvariabele en bijbehorende synoniemen toevalsvariabele en statistische variabele;
- het begrip kansverdeling bij een continue variabele, in het bijzonder de normale verdeling;
- werken met (de vuistregels van) een normale kansverdeling.

Voorkennis

- de vuistregels voor klokvormige frequentieverdelingen
- centrummaten (met name gemiddelde en mediaan) en spreidingsmaten (met name de standaardafwijking)

Verkennen

Opgave V1

Een bedrijf heeft door tellingen een frequentieverdeling opgesteld voor de tijd die nodig is om een klant te helpen. Voor deze transactietijd (in minuten) geldt:

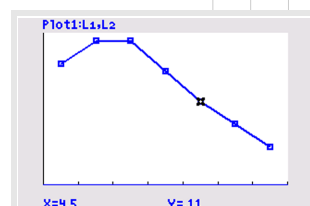
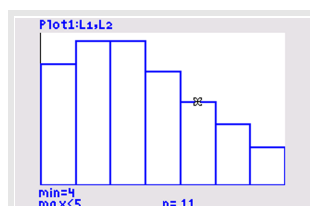
t (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(T = t)$	0,16	0,19	0,19	0,15	0,11	0,08	0,05	0,04	0,03	0,01

Tabel 1.1

Je kunt dit opvatten als een kansverdeling voor de variabele T . T kan in feite elke (positieve) reële waarde aannemen. Door steeds kleinere tijdsintervallen te nemen kun je een kansverdeling voor deze continue variabele benaderen. Het lijndiagram laat dit al een beetje zien. (Merk op dat voor de juiste figuren de klassenmiddens van elke minuut moeten worden ingevoerd in de grafische rekenmachine.)

L1	L2	L3	L4	L5	2
.5	.16				
1.5	.19				
2.5	.19				
3.5	.15				
4.5	.11				
5.5	.08				
6.5	.05				

L2(8)=					



Figuur 1.2

- Hoe groot is de kans dat een klant hoogstens 4 minuten transactietijd kost?
- Hoe geef je die kans in het staafdiagram weer? En in het lijndiagram?
- Hoe bepaal je de kans dat een klant minder dan 4,75 minuten transactietijd kost?

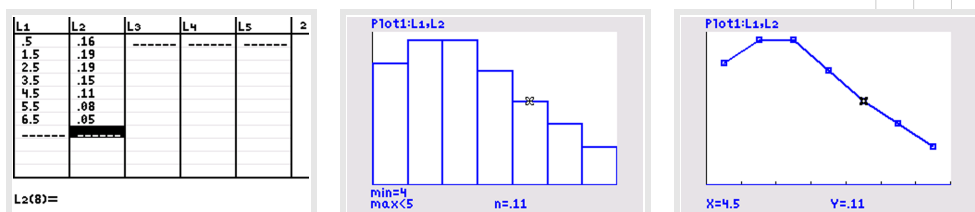
Uitleg 1

Een bedrijf noemt de tijd die nodig is om een klant te helpen de transactietijd. Het bedrijf heeft door tellen de relatieve frequenties van die transactietijd vastgesteld.

t (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(T = t)$	0,16	0,19	0,19	0,15	0,11	0,08	0,05	0,04	0,03	0,01

Tabel 1.2

Vat dit op als een kansverdeling voor de statistische variabele T . De kansverdeling kun je invoeren op de grafische rekenmachine om er vervolgens een histogram of een lijndiagram bij te maken.



Figuur 1.3

- De kans dat een klant hoogstens vier minuten transactietijd kost, is dan:
 $P(T \leq 4) = 0,16 + 0,19 + 0,19 + 0,15 = 0,69$
Dit is de oppervlakte van de eerste vier staafjes van het histogram.
Het is ook de oppervlakte onder het lijndiagram vanaf $t = 0$ tot $t = 4$.
- De kans dat een klant hoogstens 4,75 minuten transactietijd kost, kun je benaderen door de oppervlakte te schatten onder het lijndiagram die de middens van de bovenkanten van de staafjes verbindt vanaf $t = 0$ tot $t = 4,75$.

T kan in werkelijkheid elke positieve waarde aannemen. Door meer metingen te doen, kun je een kansverdeling voor deze variabele opstellen met heel veel staafjes, zelfs zo veel staafjes dat de middens van hun bovenkanten een vloeiende kromme vormen.

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** de tabel met de relatieve frequentie van de transactietijd.

- Hoe groot is de kans op een transactietijd van twee minuten?
- Hoe groot is de kans op een transactietijd van meer dan acht minuten?

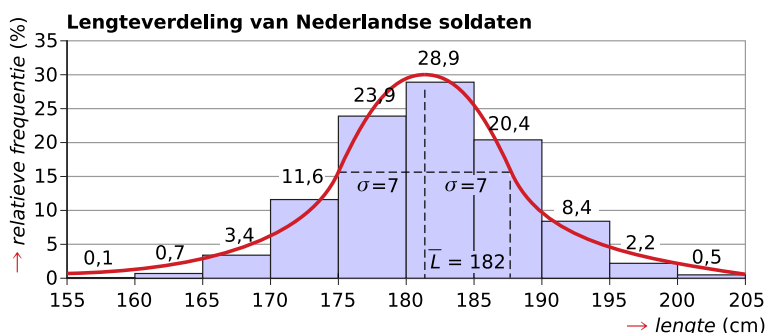
Opgave 2

Bekijk de diagrammen van de relatieve frequentieverdeling van de transactietijd in **Uitleg 1**.

- Waarom kun je T hier opvatten als discreet?
- Waarom is T in werkelijkheid een continue variabele?
- Hoe moet het bijbehorende kanshistogram er ongeveer uitzien als je T continu neemt?
- Als je T als discrete variabele opvat, hoeveel seconden heb je dan maximaal gewacht als je in de klasse $T = 3$ minuten valt?
- Bepaal de kans $P(T \leq 3)$ als je T als discrete variabele opvat.
- Schat de kans $P(T \leq 3)$ in het geval je T opvat als continue variabele.

Uitleg 2

Bekijk het histogram van de verdeling van de lichaamslengte van een groep soldaten.



Figuur 1.4

De lichaamslengte L lijkt discreet door de indeling in klassen. In werkelijkheid is de lichaamslengte een continue toevalsvariabele. In de figuur is een passende kromme getekend die de continue verdeling van de lichaamslengte L benadert. De benadering wordt beter als je meer klassen maakt.

De grafiek heeft een klokvormige frequentieverdeling die wordt bepaald door gemiddelde $\bar{L} = 182$ en standaardafwijking (ook wel standaarddeviatie genoemd) $\sigma(L) = 7$. L is normaal verdeeld. Het gemiddelde van een normale verdeling wordt μ (spreek uit 'mu') genoemd. Er geldt:

- het hoogste punt van elke normale verdeling zit bij μ .
- een maat voor de spreiding is de standaardafwijking σ .
- elke normale verdeling is symmetrisch ten opzichte van μ in het midden.
- hoe verder je bij μ vandaan gaat (naar links of naar rechts), hoe dichter de hoogte van de normale verdeling bij 0 komt.

Kansen bepaal je door de bijpassende oppervlakte onder de grafiek te schatten. De totale oppervlakte onder deze kromme is altijd 1 of 100%.

Je kunt ook de al bekende vuistregels voor de normale verdeling gebruiken om kansen te benaderen. Van de oppervlakte onder de normaalkromme:

- ligt ongeveer 68% tussen $X = \mu - \sigma$ en $X = \mu + \sigma$
- ligt ongeveer 95% tussen $X = \mu - 2\sigma$ en $X = \mu + 2\sigma$
- ligt ongeveer 100% tussen $X = \mu - 3\sigma$ en $X = \mu + 3\sigma$

Opgave 3

Bekijk de relatieve frequentieverdeling van de lengtes van een groep soldaten op een kazerne in [Uitleg 2](#).

- Waarom is L een continue toevalsvariabele?
- Welk percentage hoort bij het hele gebied onder de kromme?
- Een klokvormige verdeling is symmetrisch. Waarom volgt uit die symmetrie dat $P(L \leq 182) = 0,5$?
- Hoeveel is $P(175 \leq L \leq 189)$.
- Hoeveel is $P(L \leq 189)$.
- Maak een schatting van $P(L \leq 174)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een statistische variabele waarvan de frequenties afhangen van het toeval hoort een frequentieverdeling. Bij relatieve frequenties spreek je van een **kansverdeling**.

Bij een discrete variabele kun je die weergeven door een histogram.

Bij een continue variabele kun je die weergeven door een vloeiende kromme door (de middens van) de bovenkanten van zeer veel denkbeeldige dunne staafjes.

Bij een continue variabele is de kans gelijk aan de oppervlakte op een interval onder die vloeiende kromme. De totale oppervlakte onder deze kromme is altijd 1 of 100%.

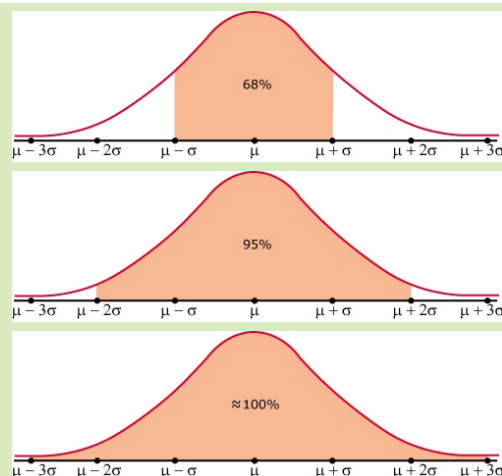
Bekijk de applet.

Een veelvoorkomende kansverdeling is de **normale verdeling**, de verdeling in de vorm van een klok.

Van deze kansverdeling wordt de vorm, de **normaalkromme**, volledig bepaald door het gemiddelde $\mu = \bar{X}$ en de standaardafwijking (of standaarddeviatie) σ .

Voor een normaal verdeelde variabele X geldt:

- het hoogste punt zit bij $X = \mu$.
- de spreiding is de standaardafwijking σ .
- er is symmetrie ten opzichte van de lijn $X = \mu$.
- de hoogte komt steeds dichterbij 0 als X verder van μ af ligt.
- van de oppervlakte onder de normaalkromme ligt:
ongeveer 68% tussen $X = \mu - \sigma$ en $X = \mu + \sigma$
ongeveer 95% tussen $X = \mu - 2\sigma$ en $X = \mu + 2\sigma$
ongeveer 100% tussen $X = \mu - 3\sigma$ en $X = \mu + 3\sigma$



Figuur 1.5

Opmerking: het woord normaal in 'normale verdeling' zegt iets over de vorm van de verdeling. De bovenstaande eigenschappen mag je dan gebruiken.

Voorbeeld 1

In een callcenter is de transactietijd T de tijd die nodig is om een klant te woord te staan. T is een continue kansvariabele.

Waarom zal T niet normaal verdeeld zijn?

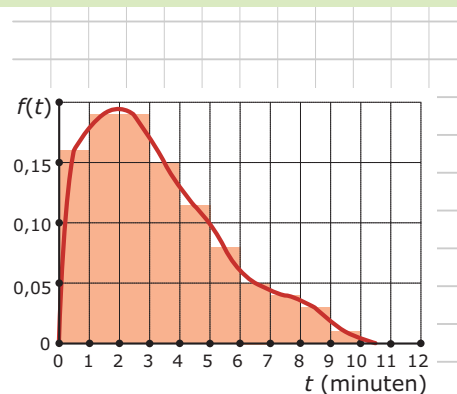
Hoe zou je $P(T \leq 4,5)$ kunnen bepalen?

Antwoord

De bijbehorende kansverdeling zal niet symmetrisch zijn: de kans op een kleine transactietijd is veel groter dan die op een grote.

Schat de oppervlakte onder de kromme om $P(T \leq 4,5)$ te bepalen, bijvoorbeeld door de staafjes met een klassenbreedte van 1 te gebruiken.

Dan vind je $P(T \leq 4,5) \approx 0,73$.



Figuur 1.6

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- Waarom is de transactietijd niet normaal verdeeld?
- Hoe groot is de kans op meer dan tien minuten transactietijd?
- Laat zien, hoe je $P(T \leq 4,5)$ kunt bepalen.

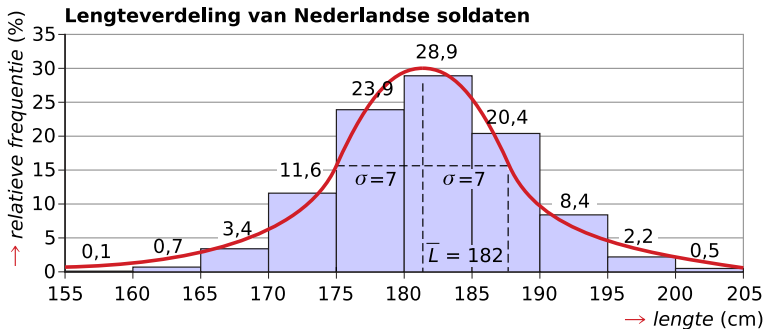
Opgave 5

Het lijkt misschien dat in de praktijk bij vrijwel alle continue statistische variabelen een normale verdeling past. Dat is niet het geval: in veel situaties is een verdeling niet symmetrisch. In welke van de volgende gevallen is de verdeling niet symmetrisch?

- het vulgewicht van machinaal gevulde pakken suiker
- de armlengte van volwassen mannen
- het gewicht van volwassen mannen
- het inkomen van alle Nederlanders
- de wachttijd bij een helpdesk

Voorbeeld 2

Bekijk de applet



Figuur 1.7

Bekijk de normaalkromme bij een toevalsvariabele L . Bij elke waarde van L wordt de oppervlakte van het gebied links van die waarde onder de kromme berekend. Voor elke normale toevalsvariabele L geldt bij benadering:

- 68% van de waarden die L kan aannemen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$;
- 95% van de waarden die X kan aannemen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.

Controleer de eerste vuistregel voor de variabele L met $\mu(L) = 182$ en $\sigma(L) = 7$.

Antwoord

Tussen $182 - 7 = 175$ en $182 + 7 = 189$ zitten twee hele staven en $\frac{4}{5}$ van de daaropvolgende staaf. Dat is $23,9 + 28,9 + \frac{4}{5} \cdot 20,4 = 69,12\%$. Dat is ongeveer 68%.

Controleer op dezelfde manier de tweede vuistregel: 95% zit tussen $182 - 14$ en $182 + 14$.

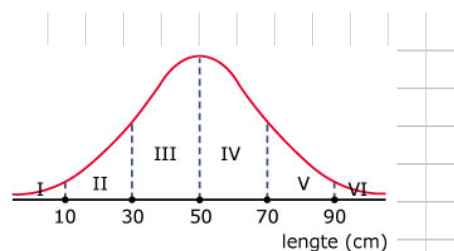
Opgave 6

In **Voorbeeld 2** worden de vuistregels gecontroleerd voor een normale verdeling met $\mu = 182$ en $\sigma = 7$.

- Controleer de tweede vuistregel zelf.
- Hoeveel procent hoort er volgens de vuistregels bij het gebied tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu - \sigma$?
- Teken een normaalkromme met $\mu = 170$ en $\sigma = 10$. Met grenzen $\mu - 2\sigma$, $\mu - \sigma$, μ , $\mu + \sigma$ en $\mu + 2\sigma$ kun je het gebied onder de normaalkromme in zes delen verdelen. Zet in elk van die delen het juiste percentage.
- Hoeveel procent zit er in het gebied tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$?

Opgave 7

De lengtes van de buxusplanten bij een plantenkweker zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van 50 cm en een standaardafwijking van 20 cm. De normaalkromme geeft de lengteverdeling weer. De buxusteler verdeelt de planten in zes categorieën van 20 cm.



Figuur 1.8

- Bepaal bij benadering hoeveel procent van de planten tot elke categorie behoren.
- Hoeveel procent van de planten is groter dan 70 cm?
- Hoeveel procent van de planten heeft een lengte tussen 30 en 90 cm?
- Hoeveel procent van de planten is minstens 30 cm lang?

Verwerken

Opgave 8

Een supermarkt verkoopt spliterwten in pakken van 500 gram. Veel klanten vermoeden dat in minstens een derde van de pakken te weinig spliterwten zitten. Zij dienen een klacht in bij de directie. Een consumentenorganisatie wordt gevraagd de klacht te onderzoeken. Zij neemt een steekproef van 100 pakken. Het gemiddelde gewicht van de pakken blijkt 502 gram met een standaardafwijking van 8 gram. Verder blijkt het gewicht van de pakken spliterwten normaal verdeeld te zijn.

- Maak een klokvormige kromme bij de verdeling van de pakken spliterwten.
- Ongeveer hoeveel pakken uit de steekproef wijken meer dan één keer de standaardafwijking af van het gemiddelde?
- Ongeveer hoeveel pakken uit de steekproef hebben een gewicht van minder dan 510 gram?
- Kun je bepalen hoeveel procent van de pakken meer weegt dan 511 gram?
- Maak een schatting van het percentage van de pakken dat minder weegt dan 500 gram. Worden de klagers in het gelijk gesteld?

Opgave 9

In een fabriek worden kilopakken suiker machinaal gevuld. Volgens de Europese norm mag niet meer dan 2,5% van de pakken suiker minder dan 1000 gram bevatten, maar deze fabriek lijkt daar moeite mee te hebben.

Bekijk de vulgewichten van dertig pakken suiker uit deze fabriek.

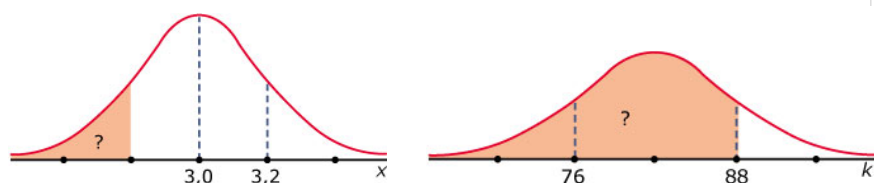
998,3	994,9	1003,5	999,6	1001,0	1001,1
997,9	1003,0	999,5	999,4	991,7	998,0
1001,8	997,8	999,3	995,1	1000,0	998,8
996,3	999,9	999,5	998,6	999,0	1001,5
1000,8	1001,4	998,1	997,5	995,3	998,2

Tabel 1.3

- Hoeveel procent van deze pakken suiker is lichter dan 1000 gram?
- Maak een histogram van de vulgewichten uit de tabel. Gebruik klassen met een klassenbreedte van 1 gram. Laat zien dat de fabrikant met een beetje goede wil kan beargumenteren dat de vulgewichten van deze machine bij benadering een symmetrische klokvormige verdeling hebben.
- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van deze vulgewichten in één decimaal.

Opgave 10

Bekijk de twee normale verdelingen. Ga er van uit dat de gegeven waarden passen bij de vuistregels.



Figuur 1.9

- Geef bij elk van deze normaalkrommen de waarden van μ en σ .
- Bepaal het percentage dat hoort bij het aangegeven gebied.

Opgave 11

Een maat voor iemands intelligentie is het intelligentiequotiënt (IQ). Dat is de score op een intelligentietest vergeleken met die van leeftijdsgenoten. Het IQ is normaal verdeeld met een gemiddelde van 100 en een standaardafwijking van 15.

- Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ tussen 85 en 115?
- Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van meer dan 130?
- Hoe groot is de kans dat het IQ van een willekeurige voorbijganger minder is dan 130?
- Met welk IQ behoort je tot de mensen die de 16% laagste scores hebben?

Opgave 12

Van twee leeftijdsgroepen zijn de scores voor een test verzameld. De scores van beide groepen zijn bij benadering normaal verdeeld. Bekijk de gemiddelden en de standaardafwijkingen in het overzicht.

	12-jarigen	16-jarigen
aantal tests	500	800
μ	48	56
σ	8	12

Tabel 1.4

- Hoe groot ongeveer is de kans dat een 12-jarige beter scoorde dan een gemiddelde 16-jarige?
- Schets de twee bijbehorende normaalkrommen langs één horizontale as en geef speciale aandacht aan de tophoogten van de twee krommen. Zijn ze even hoog? Zo nee, welke ligt hoger?

Opgave 13

De firma Sanove fabriceert stukken zeep. De stukken zeep worden machinaal gemaakt. De machine is zo ingesteld dat het gewicht van de stukken zeep normaal verdeeld is met een gemiddelde van 93 gram en een standaardafwijking van 1,4 gram.

Het kan gebeuren dat de machine niet goed functioneert. Dan hebben te veel stukken zeep niet het gewenste gewicht. De afdeling Quality Control (QC) van Sanove gebruikt verschillende manieren om dit te controleren. Eén van deze manieren heet de 2_{2s} -regel.

Bij de 2_{2s} -regel wordt per dag drie keer aselekt een stuk zeep gekozen. De machine wordt opnieuw ingesteld zodra die dag twee keer 'achter elkaar' het gewicht van een stuk zeep meer dan twee keer de standaardafwijking afwijkt van het gemiddelde. Als van de eerste twee gecontroleerde stukken zeep het gewicht meer dan twee keer de standaardafwijking van het gemiddelde afwijkt, vindt die dag geen derde controle plaats.

Er is een kans dat QC de machine opnieuw laat instellen terwijl de machine in orde is. Hoe groot is deze kans ongeveer?

Toepassen

Opgave 14: Kilopakken suiker vullen

In een fabriek worden kilopakken suiker machinaal gevuld. Volgens de Europese norm mag niet meer dan 2,5% van de pakken suiker minder dan 1000 gram bevatten. Bekijk het bestand [met de vulgewichten van honderd pakken suiker](#).

- Maak een histogram van de vulgewichten van machine 1. Gebruik klassen met een klassenbreedte van 1 gram. Laat zien dat de vulgewichten van deze machine bij benadering een symmetrische klokvormige verdeling hebben.
- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van deze vulgewichten in gehele grammen nauwkeurig.
- Hoeveel procent van de pakken suiker is volgens dit histogram lichter dan 1000 gram?
- Je kunt het histogram benaderen door een normaalkromme met het zojuist berekende gemiddelde en de standaardafwijking.
Hoeveel procent van de pakken is lichter dan 1000 gram volgens deze normale verdeling?
- Hoeveel procent van de vulgewichten wijkt volgens de vuistregels van de normale verdeling minder dan één standaardafwijking van het gemiddelde af? Klopt dat met deze frequentieverdeling?

Opgave 15: Lichaamslengtes van 5001 vrouwen

Open het bestand [Enkele lichaamsafmetingen van 5001 vrouwen uit 1947](#). Hierin zie je o.a. een tabel met lichaamslengtes in cm van de 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

- Bereken met Excel de gemiddelde lichaamslengte en de standaardafwijking.

- b** Teken met Excel een histogram van de lichaamslengtes en benader dit met een normaalkromme waarin je gemiddelde en standaardafwijking aangeeft.

Neem nu verder aan dat de lichaamslengte L van vrouwen normaal is verdeeld met de eerder berekende waarden voor het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ .

- c** Is statistische variabele L een discrete of een continue statistische variabele?

Beargumenteer je antwoord.

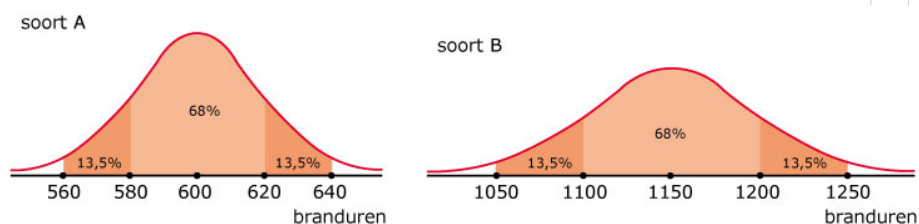
- d** 95% van de lichaamslengtes zit tussen $\mu - a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a ?

- e** Welke minimale lengte hebben de 16% grootste lichaamslengtes?

Testen

Opgave 16

Van twee soorten lampen is de levensduur van 500 exemplaren gemeten. Het aantal branduren blijkt vrijwel normaal verdeeld te zijn. Bekijk de bijpassende normaalkrommen. Enkele percentages zijn gegeven.



Figuur 1.10

Van soort A is het gemiddelde $\mu_A = 600$ branduren en de standaardafwijking $\sigma_A = 20$ uur.

- a** Hoeveel procent van de lampen van soort A brandt minder dan 600 uur?
- b** Hoeveel procent van de lampen van soort A brandt minder dan 620 uur?
- c** Hoeveel is het gemiddeld aantal branduren van de lampen van soort B? En hoeveel is de standaardafwijking van de lampen van soort B?

Beargumenteer je antwoord.

- d** Waarom heeft de normale verdeling bij soort B een top die minder hoog is dan die van de normale verdeling van soort A?
- e** Ongeveer hoeveel procent van de lampen van soort B brandt langer dan 1250 uur?

Opgave 17

Bij een groep van 1000 mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

- a** Maak een normaalkromme bij de bloeddrukverdeling van deze groep mannen.

2.2 Normale verdelingen

Inleiding

Bij heel veel continue toevalsvariabelen blijkt een mooie symmetrische klokvormige kromme te horen. Dat geldt voor het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, e.d.

De beroemde wiskundige Gauss (1777–1855) vond er een formule voor. Sinds die tijd spreek je van een ‘Gausskromme’ of ook wel ‘normaalkromme’. Het vulgewicht van pakken suiker is bijvoorbeeld ongeveer normaal verdeeld.

Je leert in dit onderwerp

- een normale kans berekenen;
- een grenswaarde berekenen bij een gegeven linker- of rechtergrens, kans, gemiddelde en standaardafwijking;
- het gemiddelde of de standaardafwijking van een normale kansvariabele berekenen.

Voorkennis

- het begrip continue kansvariabele;
- de normaalkromme;
- de vuistregels voor de normaalkromme gebruiken;
- kansrekenen.

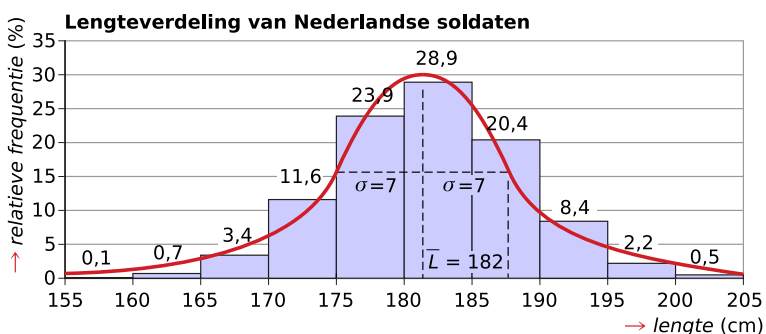


Figuur 2.1

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de lengteverdeling van een groep soldaten op een bepaalde kazerne.



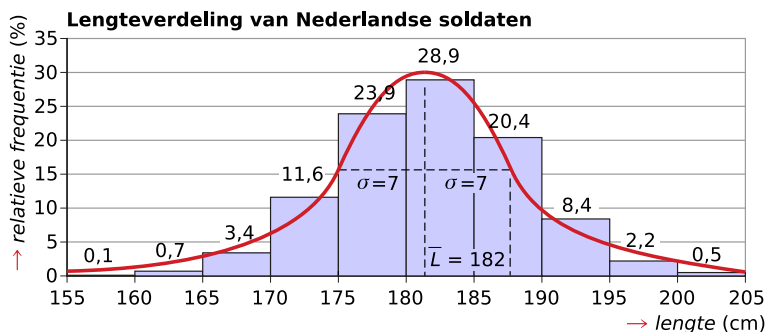
Figuur 2.2

Bij de lengte L hoort een normaalkromme met gemiddelde $\mu(L) = 182$ en standaardafwijking $\sigma(L) = 7$ cm.

- Wat stelt $P(L < 175)$ in dit voorbeeld voor?
- Waarom kun je deze kans uit de figuur gemakkelijk berekenen maar $P(L < 171)$ veel minder makkelijk?
- Wat kun je zeggen van $P(L = 175)$?

Uitleg

Bekijk de figuur met de lengteverdeling van een groep soldaten op een kazerne. Bij de lengte L (cm) hoort een normaalkromme met een gemiddelde van 182 centimeter en een standaardafwijking van 7 centimeter. Anders gezegd: L is een normaal verdeelde kansvariabele.



Figuur 2.3

Bedenk wel dat de gegevens van de soldaten op hele lengtes zijn afgerond. Als je vraagt naar het percentage soldaten met een lengte van 180 centimeter, dan moet je goed afspreken wat je bedoelt: precies 180 centimeter, of afgerond 180 centimeter.

Vanaf nu hanteer je de afspraak dat je bij normale verdelingen geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk is dat dit moet. Dit betekent dat: $P(162 < L < 178) = P(162 \leq L < 178) = P(162 < L \leq 178) = P(162 \leq L \leq 178)$ als L normaal verdeeld is.

De 'normale kans' dat een soldaat van deze kazerne tussen de grenswaarden 165 en 180 centimeter lang is, gegeven dat $\mu(L) = 182$ en $\sigma(L) = 7$, noteer je als:

$$P(165 \leq L < 180 | \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$$

| betekent: 'gegeven dat'.

In de figuur is dit het gebied onder de normaalkromme tussen de linkergrenswaarde $L = 165$ en de rechtergrenswaarde $L = 180$. Je hebt de grafische rekenmachine of Excel nodig om dergelijke kansen te kunnen berekenen: de vuistregels zijn te beperkt.

Bekijk het [Practicum](#).

Opgave 1

Bekijk het histogram van de lengteverdeling van de soldaten in de [Uitleg](#).

- Hoeveel is $P(165 \leq L < 180)$ volgens het histogram? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.
- Bepaal $P(165 \leq L < 180 | \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$ met de grafische rekenmachine.
- Bereken de kans dat een soldaat tussen 166 en 177 centimeter lang is.
- Bereken hoeveel procent van de soldaten kleiner dan 166 centimeter is.
- Bereken hoeveel procent van de soldaten langer dan 192 centimeter is.

Opgave 2

Bekijk de lengteverdeling van de soldaten in de [Uitleg](#).

- Controleer de vuistregels met behulp van de grafische rekenmachine.
- Hoeveel procent van de soldaten heeft volgens de normaalkromme een lengte die minder dan drie standaardafwijkingen van het gemiddelde afwijkt?
Noteer je antwoord met één decimaal.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Continue kansvariabelen zoals het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, en dergelijke zijn vaak **normaal verdeeld**. Je spreekt dan van een **normale kansvariabele** of **normale statistische variabele**.

De wiskundige Gauss (1777—1855) vond een formule voor de grafiek van de bijpassende normaalkromme of gausskromme. In de grafische rekenmachine is de formule voor die normaalkromme geprogrammeerd. Daarmee kun je de normaalkromme schetsen en de bijbehorende kansen berekenen, ook als die niet met de vuistregels zijn te bepalen.

De kans die wordt weergegeven door de gekleurde oppervlakte noteer je als:

$$P(165 \leq L < 180 | \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$$

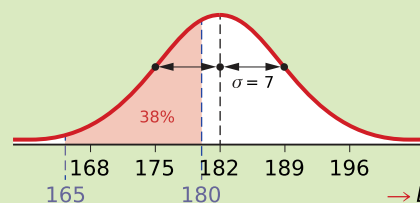
| betekent: 'gegeven dat'.

Omdat $P(L = 165) = 0$ is die kans hetzelfde als $P(165 < L < 180)$.

Als je wilt berekenen wat de kans is dat iemand afgerond een lengte heeft van 165 centimeter, dan moet je $P(164,5 < X < 165,5)$ berekenen.

Hanteer de afspraak dat je bij een normale verdeling geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk in de vraagstelling naar voren komt dat dit moet.

Hoe je dit op de grafische rekenmachine of in Excel invoert, zie je in het [Practicum](#).



Figuur 2.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

De lengte L van een groep soldaten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 182$ centimeter en een standaardafwijking van $\sigma = 7$ centimeter.

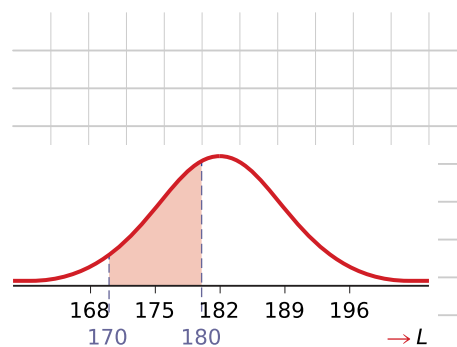
Bereken $P(170 < L < 180)$, $P(L < 180)$, $P(L = 180)$ en bereken het percentage soldaten dat langer is dan 1,75 meter.

Antwoord

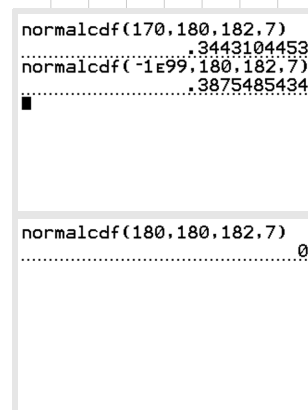
Al deze kansen zijn met de grafische rekenmachine te vinden.

Bekijk het **Practicum**.

- $P(170 < L < 180) \approx 0,3443$
- $P(L < 180) \approx 0,3875$
- $P(L = 180) = 0$
- 'Bereken het percentage soldaten dat langer is dan 1,75 meter' kun je vertalen naar:
 $P(L > 175 | \mu = 182 \text{ en } \sigma = 7) \approx 0,8413$. Dat is gelijk aan ongeveer 84,13%.



Figuur 2.5



Figuur 2.6

Opgave 3

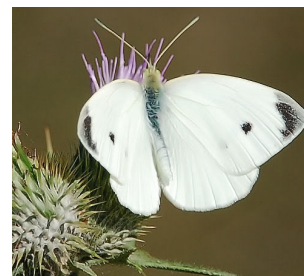
Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- Wat betekent $P(162 < L < 178)$ in dit verband?
- Hoeveel procent van de soldaten heeft een lengte tussen 171 en 178 centimeter?
- Hoeveel procent van de soldaten heeft een lengte van precies 171 centimeter?
- Hoeveel procent van de soldaten van deze kazerne heeft een lengte vanaf $\mu - 1,5 \cdot \sigma$ tot $\mu + 1,5 \cdot \sigma$?

Opgave 4

Bioloog Peter Adriaanse heeft van 1000 koolwitjes de spanwijdte van de vleugels gemeten. Hij vond dat deze spanwijdte ongeveer normaal is verdeeld met een gemiddelde van 5,2 centimeter en een standaardafwijking van 0,8 centimeter.

- Hoeveel procent van de gemeten koolwitjes had een spanwijdte van meer dan 6 centimeter?
- Hoeveel van de gemeten koolwitjes hadden een spanwijdte tussen de 5 en de 6 centimeter?
- Hoe groot is de kans op een koolwitje met een spanwijdte van minstens 6,5 centimeter?



Figuur 2.7

Opgave 5

Het gewicht G van een bepaalde appelsoort is normaal verdeeld met een gemiddelde van 150 gram en een standaardafwijking van 17 gram.

- Hoe groot is de kans dat een appel van deze soort minder dan 140 gram weegt?
- Hoeveel procent van deze appels heeft een gewicht dat minder dan 10 gram afwijkt van het gemiddelde?
Een groenteboer heeft nog 340 van deze appels.
- Hoeveel daarvan zijn lichter dan 120 gram?
Een klant koopt een zak met vijf appels van de groenteboer.
- Wat is de kans dat minstens vier appels lichter zijn dan 120 gram?

Voorbeeld 2**Bekijk de applet: Normale verdeling**

De lengte L van een groep soldaten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu(L) = 182$ cm en een standaardafwijking van $\sigma(L) = 7$ cm.

Welke lengtes hebben de 20% langste soldaten in deze groep?

Antwoord

Vertaal deze vraag in: bereken grenswaarde g als $P(L > g) = 0,20$.

De grafische rekenmachine heeft hiervoor een speciale functie. Die stelt je in staat om vanuit een gegeven kans de grenswaarde terug te vinden. Alleen is die functie ingesteld op 'kleiner-of-gelijk'-kansen.

Omdat $P(L > g) = 0,20$ betekent dat $P(L < g) = 1 - P(L > g) = 0,80$ kun je die functie hier toch gebruiken.

De uitkomst is: $g = 187,9$.

De 20% langste soldaten zijn 187,9 cm of langer.

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

- Welke lengtes hebben de 20% kleinste soldaten in deze groep?
- 10% van de soldaten zit boven het gemiddelde, maar is toch niet langer dan a centimeter. Bereken a .

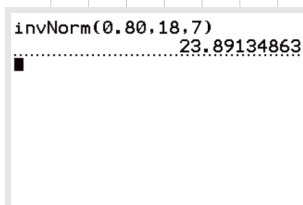
Opgave 7

Ga uit van de normaal verdeelde lengtes van de soldaten. De gemiddelde lengte is 182 centimeter en de standaardafwijking is 7. Men besluit voor deze 1200 soldaten T-shirts aan te schaffen in drie maten: S (small), M (medium) en L (large). Deze maten worden zo gemaakt dat elke maat precies voor $\frac{1}{3}$ deel van de soldaten geschikt is.

- Voor welke lengtes is maat S geschikt?
- Voor welke lengtes is maat M geschikt?



Figuur 2.8



Figuur 2.9

Voorbeeld 3

In een suikerfabriek is het vulgewicht van kilopakken suiker ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Maar ongeveer 25% van de pakken bevat minder dan 1000 gram.

De fabrikant wil dat niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat.

Hij kan dit bijvoorbeeld bewerkstelligen door het gemiddelde vulgewicht μ te verhogen, maar dat is een te dure oplossing.

De fabrikant kan dit ook voor elkaar krijgen door de vulmachine nauwkeuriger te laten werken: hij verkleint de standaardafwijking σ .

Bekijk de applet.

Hoe bereken je de aangepaste μ of σ ?

Antwoord

De toevalsvariabele X is het gewicht van een pak suiker uit de suikerfabriek.

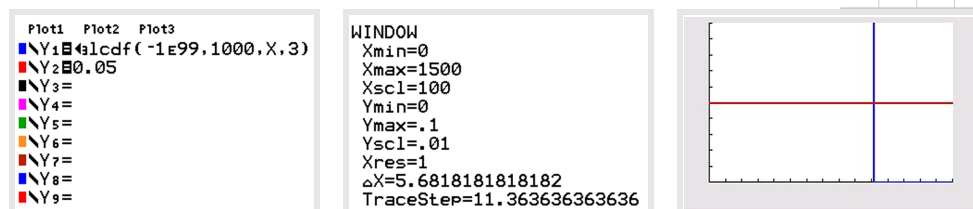
Los op:

$P(X < 1000 | \mu = x \text{ en } \sigma = 3) = 0,05$ voor de aanpassing van het gemiddelde of

$P(X < 1000 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = x) = 0,05$ voor de aanpassing van de standaardafwijking.

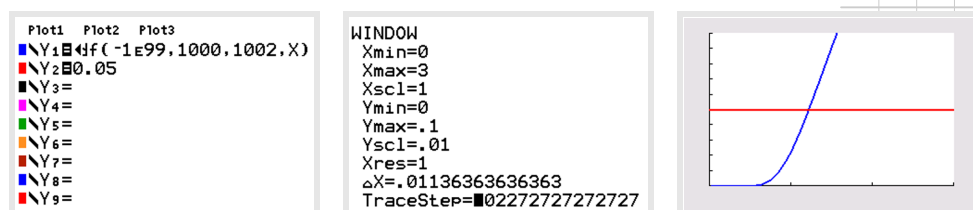
Om te zien hoe je dit doet, bekijk je het **Practicum**.

Voor y_1 voer je de uitdrukking links van het isgelijktteken in, met de variabele x als gemiddelde of als standaardafwijking. De horizontale lijn is de lijn $y_2 = 0,05$.



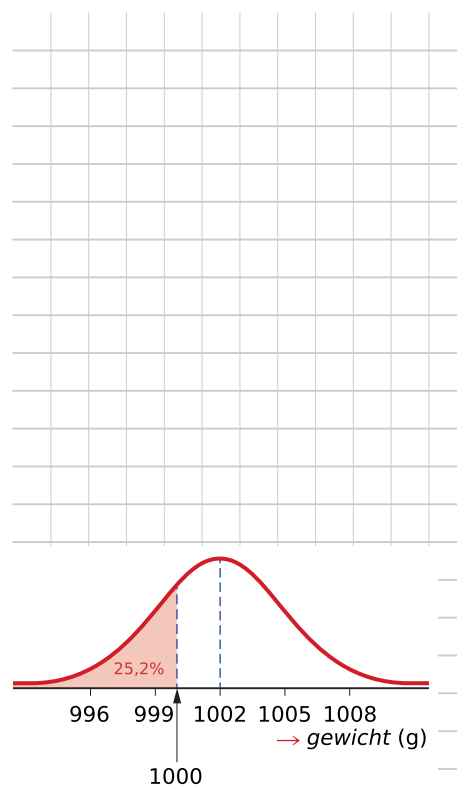
Figuur 2.11

Als de standaardafwijking gelijk blijft (3 gram), dan moet het gemiddelde toenemen van 1002 gram naar 1004,9 gram om aan de nieuwe eis te kunnen voldoen.



Figuur 2.12

Als het gemiddelde gelijk blijft (1002 gram), dan moet de standaardafwijking afnemen van 3 gram naar 1,22 gram om aan de nieuwe eis te kunnen voldoen.



Figuur 2.10

Opgave 8

Gebruik de gegevens van de suikerfabriek in **Voorbeeld 3**.

- Waarom is dit voor de fabrikant een dure oplossing?
- Wat verandert er aan de normaalkromme van de suikerpakken en wat blijft er gelijk als het gemiddelde vulgewicht groter wordt?
- Bereken met de grafische rekenmachine in drie decimalen na wat de nieuwe standaardafwijking moet worden als niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram mag bevatten.
- Welke mogelijke voor- en nadelen heeft deze oplossing voor de fabrikant?
- Wat verandert er aan de normaalkromme van de suikerpakken en wat blijft er gelijk als de standaardafwijking van het vulgewicht kleiner wordt?

Opgave 9

- De eisen worden aangescherpt: niet meer dan 2,5% van de pakken suiker mag minder dan 1000 gram wegen. Welk gemiddeld vulgewicht moet je dan hanteren?
- Is het mogelijk om te eisen dat 0% van de pakken te licht is? Licht je antwoord toe.

Verwerken

Opgave 10

Bereken de volgende kansen. Rond af op vier decimalen.

- $P(L < 174 | \mu(L) = 178 \text{ en } \sigma(L) = 5)$
- $P(3 < X < 5 | \mu(X) = 4,3 \text{ en } \sigma(X) = 1,2)$
- $P(Y > 1200 | \mu(Y) = 1180 \text{ en } \sigma(Y) = 113)$

Opgave 11

Een vulmachine vult kilopakken rijst. Het ingestelde vulgewicht van de machine komt overeen met het gemiddelde gewicht van de pakken rijst. De gewichten zijn normaal verdeeld. Het gemiddelde gewicht van een pak rijst is 1010 gram en de standaardafwijking is 9 gram.

- Hoeveel procent van de pakken weegt minder dan 1000 gram?
- Hoeveel procent van de pakken weegt meer dan 1000 gram?
- Hoe groot is de kans op een pak dat meer dan 5 gram te zwaar is?
- Hoeveel procent van de pakken is meer dan 20 gram te licht?
- Hoe groot is de kans op een pak dat tussen de 1005 en de 1015 gram weegt?

Opgave 12

Een bakker bakt kerststollen van 1000 gram.

- Hoeveel bedraagt de standaardafwijking als het gemiddelde gewicht 1000 gram is en 5% van de stollen minder weegt dan 900 gram?

- b** Als de standaardafwijking van de stollen 60 gram is, hoeveel procent van de stollen weegt dan minder dan 900 gram?
- c** Hoe groot is het gemiddelde gewicht van de stollen bij een standaardafwijking van 65 gram als 5% van de stollen minder weegt dan 900 gram?
- d** Hoe groot is het gewicht van de 3% zwaarste kerststollen als het gemiddelde gewicht 1000 gram is en de standaardafwijking 62,5 gram?

Opgave 13

Bij de serieproductie van een bepaald type auto wordt het plaatsen van het stuur door mensen gedaan. Deze handeling kost gemiddeld 55 seconden. De handelingstijd T blijkt ongeveer normaal te zijn verdeeld rond dit gemiddelde met een standaardafwijking van 4 seconden.

Er worden in een bepaalde maand 1200 van deze auto's geproduceerd.

- a** Schat het aantal auto's waarbij het langer dan 60 seconden heeft geduurd om het stuur te plaatsen.
- b** Hoeveel tijd hebben de 3% snelste handelingstijden gekost?
De fabrikant van deze auto's onderzoekt of een machine de mens kan vervangen. De gemiddelde afhandelingstijd is dan ook 55 seconden, maar de standaardafwijking wordt veel kleiner. Nu duurt maar 1% van alle afhandelingstijden meer dan 60 seconden.
- c** Welke standaardafwijking geldt voor deze machine?

Opgave 14

Twee hardlopers op de 400 meter trainen samen. Op basis van vele wedstrijden gaat de trainer uit van een normaal verdeeld snelheidsverschil tussen deze twee van gemiddeld 0 m/s met een standaardafwijking van 0,205 m/s.

De laatste zes wedstrijden die deze twee hardlopers samen hebben gelopen, geven de volgende snelheden.

loper A	9,2	9,2	8,8	8,9	8,8	8,5
loper B	9,2	9,0	9,0	8,9	8,7	9,1

Tabel 2.1

Zoals je uit de gegevens kunt afleiden, bleef het snelheidsverschil bij de eerste vijf wedstrijden binnen een marge van één standaardafwijking rondom het gemiddelde snelheidsverschil, uitgaande van de eerder beschreven normale verdeling van het snelheidsverschil.

- a** Bereken de procentuele kans dat bij vijf wedstrijden achter elkaar het snelheidsverschil beperkt blijft tot maximaal één standaardafwijking rondom het gemiddelde snelheidsverschil. Kan dit een reden voor de trainer zijn om te twijfelen aan de juistheid van het normaal verdeelde model voor het snelheidsverschil?

De laatste van de zes wedstrijden springt eruit met een groot verschil in snelheid.

- b** Bereken de procentuele kans op minimaal een dergelijk snelheidsverschil, uitgaande van de eerder beschreven normale verdeling van het snelheidsverschil. Kan dit een reden voor de trainer zijn om te twijfelen aan de juistheid van het normaal verdeelde model voor het snelheidsverschil?
- c** Vergelijk het gemiddelde snelheidsverschil en de bijbehorende standaardafwijking van de gekozen normale verdeling en die van de gegevens van de zes wedstrijden met elkaar en leg uit wat dit voor de hardlopers kan betekenen.

Gebruik daarbij in ieder geval:

- een schets met beide normaalkrommen boven één horizontale as van snelheidsverschillen;
- het verschil in de kans op een groter snelheidsverschil dan 0,6 m/s.

De trainer past vanwege de uitkomsten van de laatste zes wedstrijden de standaardafwijking van de gekozen normale verdeling aan: zij wil daarmee haar (voorspellings)model beter laten aansluiten op de werkelijkheid. Ze blijft ervan uitgaan dat de beide hardlopers gemiddeld even snel zijn, maar de standaardafwijking kiest zij zo, dat de kans op een snelheidsverschil dat groter is dan 0,6 m/s maximaal vier procent is.

- d** Bereken de nieuwe standaardafwijking in drie decimalen.

Opgave 15

De accu van een tablet van het merk Sempel gaat gemiddeld 2,60 jaar mee met een standaardafwijking van 0,32 jaar. De tableteigenaars zijn hiermee niet tevreden en daarom wil Sempel de productiestraat van deze accu's aanpassen.

Er zijn aanpassingen mogelijk die de gemiddelde levensduur zullen verhogen: per extra levensweek zijn de kosten hiervan € 0,01 per tablet.

Andere aanpassingen zorgen voor een kleinere standaardafwijking, maar deze aanpassingen kosten per extra levensweek € 0,02 per tablet.

Sempel wil de productiestraat zodanig aanpassen dat de kans dat de accu meer dan twee jaar meegaat minstens 97,5% wordt. Echter: de totale extra kosten per tablet door de aanpassingen mogen niet hoger zijn dan 1,4 eurocent.

Onderzoek of er mogelijkheden zijn voor Sempel om de productiestraat zodanig aan te passen dat aan beide voorwaarden wordt voldaan.

Toepassen

Opgave 16: Kniehoogtes van 5001 vrouwen

Open het bestand **Enkele lichaamsafmetingen van 5001 vrouwen uit 1947**.

Hierin zie je een tabel met kniehoogtes in cm van de 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

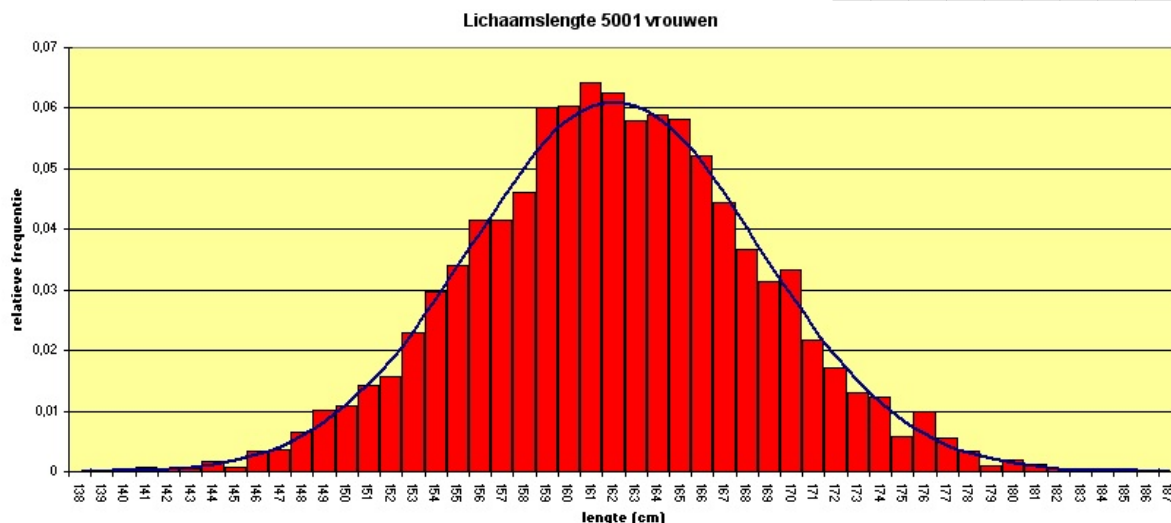
- Bereken met Excel (of een ander statistiekprogramma) de gemiddelde kniehoogte en de standaarddeviatie.
- Teken een histogram en benader dit met een normaalkromme. Lukt dit in jouw ogen goed genoeg om aan te nemen dat K , de kniehoogte van de vrouwen, normaal verdeeld is?

Neem aan dat de kniehoogte K van de vrouwen inderdaad normaal is verdeeld met de eerder berekende waarden voor het gemiddelde μ en de standaarddeviatie σ .

- 90% van de kniehoogtes zit tussen $\mu - a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a ? Rond af op één decimaal.
- Welke minimale lengte hebben de 20% grootste kniehoogtes?

Opgave 17: Lengtes van 5001 vrouwen

Volgens het onderzoek van Freudenthal en Sittig uit 1947 waren de lengtes van vrouwen die bij de Bijenkorf winkelden normaal verdeeld met een gemiddelde van 162 cm en een standaarddeviatie van 6,5 cm. Ga bij het beantwoorden van de onderstaande vragen steeds uit van die normale verdeling als model voor de lichaamslengte van deze 5001 vrouwen.



Figuur 2.13

- Hoeveel procent van deze vrouwen was langer dan 170 cm?
- Hoeveel procent van deze vrouwen had een lengte tussen 160 en 170 cm?
- Hoe groot is de kans dat een vrouw die je toen bij de Bijenkorf tegen kon komen 160 cm lang was? (Neem aan dat alle lengtes op gehele cm zijn afgerond.)

- d Hoe lang waren de 10% kleinste vrouwen?
- e En hoe lang waren de 10% langste vrouwen?

Opgave 18: Zwangerschap

In het 'Moeders voor moeders babyboek' staat dat 75% van de zwangere vrouwen bevalt tussen 14 dagen vóór en 14 dagen na de uitgerekende datum. Bij het bepalen van deze uitgerekende datum gaat men uit van een zwangerschap van 40 weken. De zwangerschapsduur is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 280 dagen.

Met behulp van deze gegevens kun je berekenen dat de bijbehorende standaardafwijking, afgerond op één decimaal, gelijk is aan 12,2 dagen.

In 2002 vonden er in Nederland 199205 bevallingen plaats. Van een aantal van deze bevallingen duurde de zwangerschap minder dan 36 weken.

- a Bereken bij hoeveel bevallingen dit het geval was.
De standaardafwijking kan nauwkeuriger worden bepaald.
- b Bereken deze standaardafwijking in twee decimalen.

(naar: examen VWO wiskunde A 1,2 uit 2005, 2e tijdvak)

Testen

Opgave 19

Een zakje Cup-a-soup moet 17 g bevatten. Het gewicht van zakjes is normaal verdeeld. De vulmachine is zo ingesteld dat het vulgewicht 19 g bedraagt met een standaardafwijking van 1,5 g. Het vulgewicht komt overeen met het gemiddelde gewicht.

- a Hoe groot is de kans dat een zakje minder dan 17 g weegt?
- b Hoe groot is de kans dat een zakje Cup-a-Soup meer dan 17 g weegt?
- c Hoeveel weegt 90% van deze zakjes op zijn hoogst?
- d Hoeveel weegt 90% van deze zakjes op zijn minst?



Figuur 2.14

Opgave 20

Bij een groep van 1000 mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

- a Hoeveel mannen hebben een bloeddruk die meer dan drie keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?
- b Hoeveel procent van de mannen heeft een bloeddruk van meer dan 150?
- c Hoeveel bedraagt de bloeddruk van de 10% mannen met de hoogste bloeddruk?

Opgave 21

Het vulvolume V van een pak melk is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,02 liter en een standaardafwijking van 0,015 liter. De consument verwacht 1 liter melk te kopen.

- a** Hoeveel procent van de melkpakken bevat minder dan 1 liter melk?

Het percentage dat je bij a hebt gevonden, wordt door de supermarkt die deze pakken verkoopt als te hoog bevonden. De supermarkt verlangt van de fabrikant dat het vulvolume wordt verhoogd, totdat maximaal 1% van de pakken minder dan 1 liter melk bevat.

- b** Bereken het vulvolume dat de fabrikant dan moet instellen. Geef het antwoord in milliliter nauwkeurig

Practicum

Met de volgende practica kun je zien hoe je normale kansen berekent met de **grafische rekenmachine**. Doe alleen de onderdelen die betrekking hebben op de normale verdeling.

- [Kansverdelingen met de TI84](#)
- [Kansverdelingen met de TIInspire](#)
- [Kansverdelingen met de Casio fx-CG50](#)
- [Kansverdelingen met de HP-prime](#)
- [Kansverdelingen met de NumWorks](#)

Maar je kunt ook heel goed normale kansen berekenen met behulp van **Excel**. Bekijk daartoe het practicum:

- [Normale verdeling](#)

2.3 Kansvariabelen optellen

Inleiding

Een reistraject bestaat uit een tramreis gevolgd door een busreis. Op beide vervoersmiddelen zul je even moeten wachten voordat ze aankomen: hoe lang zal je wachttijd gemiddeld zijn op dit totale reistraject?

Je kunt dat berekenen met een kansverdeling voor de totale wachttijd. Uit deze kansverdeling volgen regels voor het optellen van beide wachttijden. Dan blijkt je de gemiddelde totale wachttijd en de bijbehorende standaardafwijking ook zonder kansverdeling eenvoudig en snel te kunnen berekenen.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip som/verschil van twee of meer kansvariabelen;
- regels voor de verwachting en de standaardafwijking van de som en het verschil van onafhankelijke statistische variabelen.

Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij een statistische variabele;
- verwachting en standaardafwijking bij een kansverdeling berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Een reiziger gaat heen met de tram en terug met de bus. Op de tram hoeft hij maximaal twee minuten te wachten en op de bus terug maximaal drie minuten. Ga ervan uit dat de wachttijd voor de tram onafhankelijk is van de wachttijd voor de bus.

Voor de wachttijden, in hele minuten, van deze reiziger op de tram (T) en de bus (B) gelden de kansverdelingen hiernaast.

- Maak een kansverdeling van de totale wachttijd $T + B$ op dit traject.
- Kun je zeggen dat de verwachtingswaarde van $T + B$ gelijk is aan de som van de verwachtingswaarde van T en die van B ? En hoe zit dat met de standaardafwijkingen?

t	0	1	2
$P(T = t)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b	0	1	2	3
$P(B = b)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabel 3.1

Uitleg

Een reiziger gaat heen met de tram en terug met de bus. Op de tram hoeft hij maximaal twee minuten te wachten en op de bus terug maximaal drie minuten. Ga ervan uit dat de wachttijd voor de tram onafhankelijk is van de wachttijd voor de bus.

Voor de wachttijden, in hele minuten, van deze reiziger op de tram (T) en de bus (B) gelden de kansverdelingen hiernaast.

Bij de totale wachttijd past deze kansverdeling:

$t + b$	0	1	2	3	4	5
$P(T + B = t + b)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

Tabel 3.3

Voor het gemiddelde (de verwachting) geldt: $\bar{T} = 1$, $\bar{B} = 1,5$ en $\bar{T} + \bar{B} = 2,5$.

Je kunt de gemiddelden optellen.

Maar standaardafwijkingen kun je niet zomaar optellen. Dat komt omdat de standaardafwijking de wortel is uit opgetelde kwadraten van afwijkingen. En kwadraten kun je wel optellen, maar als je dan worteltrekt dan krijg je de wortel uit die kwadraten die je hebt opgeteld.

Omdat $(\sigma(T + B))^2 = (\sigma(T))^2 + (\sigma(B))^2$ geldt voor de standaardafwijking:

$$\sigma(T + B) = \sqrt{(\sigma(T))^2 + (\sigma(B))^2}$$

Deze optelregels gelden voor zowel discrete als continue variabelen, mits de variabelen onafhankelijk zijn.

Opgave 1

Bekijk de kansverdelingen in de [Uitleg](#).

- Beschrijf hoe $P(T + B = 5)$ wordt berekend.
- Welke aanname is bij het berekenen van de kansverdeling van $T + B$ gedaan?

Opgave 2

- Bereken de verwachtingswaarden van T , B en $T + B$ en ga na dat $\bar{T} + \bar{B} = \overline{T + B}$.
- Bereken de standaardafwijkingen van T , B en $T + B$ en ga na dat $\sigma(T + B) = \sqrt{(\sigma(T))^2 + (\sigma(B))^2}$.

Opgave 3

Een karamelreep en een kokosreep worden als duo verkocht. Het gemiddelde gewicht van de karamelreep is 25 gram met een standaardafwijking van 1,1 gram. Het gemiddelde gewicht van de kokosreep is 55 gram met een standaardafwijking van 1,8 gram.

- Hoeveel bedraagt het gemiddelde gewicht van de twee repen samen? En welke standaardafwijking hoort daarbij?
- Hoe groot is de kans dat de twee repen samen minder dan 77,5 gram wegen?

t	0	1	2
$P(T = t)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b	0	1	2	3
$P(B = b)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabel 3.2

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Vaak heb je met de **som van een aantal kansvariabelen** te maken. Als de kansvariabelen X en Y **onafhankelijk** van elkaar zijn, geldt voor $X + Y$:

- voor het gemiddelde (de verwachting): $\mu(X + Y) = \mu(X) + \mu(Y)$
- voor de standaardafwijking: $\sigma(X + Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$

Het maakt hierbij niet uit of de variabelen X en Y discreet of continu zijn.

Soms heb je ook met het **verschil van twee onafhankelijke kansvariabelen** X en Y te maken. Dan geldt:

- voor het gemiddelde (de verwachting): $\mu(X - Y) = \mu(X) - \mu(Y)$
- voor de standaardafwijking: $\sigma(X - Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$

Bijzonder is dat zowel de som als het verschil van meerdere onafhankelijke normaal verdeelde kansvariabelen zelf ook weer een normaal verdeelde kansvariabele is.

Voorbeeld 1

Het gewicht van een zak aardappelen is normaal verdeeld. Een supermarkt verkoopt zakken aardappelen met verschillende gewichten:

- zakken van 500 gram met een standaardafwijking van 30 gram.
- zakken van 1 kilo met een standaardafwijking van 54 gram.
- zakken van 1,5 kilo met een standaardafwijking van 80 gram.

Voor een aardappelsoufflé is minimaal 1450 gram aardappel nodig, anders stort de soufflé in.

Welke aankoop is de beste keuze: een zak aardappelen van 1,5 kilo of de combinatie van een zak aardappelen van 1 kilo en een zak van 500 gram?

Antwoord

De gewichten van een zak aardappelen van 1500 gram, van 1 kilo en van 500 gram hebben niets met elkaar te maken: de gewichten zijn onafhankelijk van elkaar.

De kans op minstens 1450 gram aardappelen in een zak aardappelen met een gemiddeld gewicht van 1,5 kilo is ongeveer gelijk aan 72%.

De kans op minstens 1450 gram aardappelen bij de combinatie van een zak van 1 kilo en een zak van 500 gram kun je berekenen met behulp van het gemiddelde van de twee zakken samen, C met de bijbehorende standaardafwijking:

$$\mu(C) = 1000 + 500 = 1500 \text{ gram en } \sigma(C) = \sqrt{54^2 + 30^2}.$$

De gevraagde kans voor deze combinatie blijkt ongeveer 79%.

De combinatie van een zak aardappelen van 1 kilo plus een zak aardappelen van 500 gram is de beste keuze.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Reken zelf de twee percentages in het voorbeeld na.
- Maak met je grafische rekenmachine de normaalkromme van het gewicht van een zak aardappelen van (gemiddeld) 1500 gram en de normaalkromme van toevalsvariabele C , het gewicht van de combinatie van een zak aardappelen van 1 kilo en een zak van 500 gram.
- Bereken de kans op minstens 1450 gram aardappelen in de combinatie van drie zakken aardappelen van elk 500 gram en vergelijk je antwoord met de twee percentages in het voorbeeld.
Welk van de drie mogelijkheden geeft uiteindelijk de grootste kans op minstens 1450 gram aardappelen?

Voorbeeld 2

De diameter M van een bepaald soort moeren is normaal verdeeld met $\mu(M) = 13,20$ en $\sigma(M) = 0,10$ millimeter.

Bij deze moeren horen bouten waarvan de diameter B ook normaal is verdeeld: $\mu(B) = 13,05$ en $\sigma(B) = 0,10$ millimeter.

Deze bouten passen nog in de moeren als hun diameter maximaal 0,25 millimeter kleiner is dan die van de moeren.

Hoeveel procent van de bouten past niet?

Antwoord

Kijk naar het verschil $V = M - B$ van de diameter van een bout en een moer. Dit verschil is ook normaal verdeeld met

- $\mu(V) = \mu(M - B) = \mu(M) - \mu(B) = 13,20 - 13,05 = 0,15$ mm.
- $\sigma(V) = \sigma(M - B) = \sqrt{(\sigma(M))^2 + (\sigma(B))^2} = \sqrt{0,10^2 + 0,10^2} \approx 0,14$ mm.

De bouten passen als $0 \leq V \leq 0,25$.

De kans hierop is $P(0 \leq V \leq 0,25 | \mu = 0,15 \text{ en } \sigma = 0,14) \approx 0,62$.

Conclusie: 38% van de bouten past niet in de moeren.

Opgave 5

Gebruik de gegevens van machinaal geproduceerde moeren en bijbehorende bouten uit **Voorbeeld 2**.

- Bereken in vier decimalen de kansen op:
 - een bout en een moer die passen.
 - een bout en een moer die niet passen.
- Leg uit waarom een bout en een moer passen als $V \leq 0,25$.
- Leg uit waarom een bout en een moer niet passen als $V < 0$.



Figuur 3.1

Opgave 6

Het bedrijf in **Voorbeeld 2** produceert meer bouten en moeren in diverse afmetingen.

Voor een ander type bout met bijpassende moer geldt: de diameter van de moer is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,10 millimeter en een standaardafwijking van 0,05 millimeter. De diameter van de bout is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,05 millimeter en een standaardafwijking van 0,03 millimeter.

De bouten passen in de moeren als het verschil van de diameter van de moer en de bout minder dan 0,02 millimeter is.

- a Hoeveel procent van deze bouten past niet in de bijbehorende moer?
- b Hoeveel procent van deze bouten is te dik voor een moer?

Verwerken

Opgave 7

Elk weekend verkoopt Iris op de markt haar zelfgemaakte sieraden. Gemiddeld is haar weekendomzet € 63,00 met een standaardafwijking van € 2,07. Maar tijdens weekenden met festiviteiten verdient ze gemiddeld € 97,00 met een standaardafwijking van € 2,46.

Wat is de verwachte omzet nadat Iris een gewoon weekend en een feestweekend op de markt heeft gestaan? Welke standaardafwijking hoort daarbij?

Opgave 8

Perry en Kyra doen als duo mee aan een wedstrijd. Zij moeten, ieder voor zich, een atletiekparcours vol hindernissen doorlopen.

Tijdens de trainingen hebben ze hun gegevens bijgehouden. Zo blijkt Perry gemiddeld 11,5 minuten over dit parcours te doen, met een standaardafwijking van 0,8 minuten. Kyra doet er gemiddeld 10,5 minuten over, maar haar standaardafwijking is 1 minuut.

Ga ervan uit dat de parcouurstijden van Perry en Kyra normaal verdeeld zijn.

- a Hoe groot is de kans dat Perry en Kyra in deze wedstrijd als duo tussen de 20 en de 21 minuten scoren?
- b Hoe groot is de kans dat Perry tijdens deze wedstrijd meer dan 1 minuut sneller is dan Kyra?

Opgave 9

Bas zit in een kunstklas en is bezig met een 39 meter lange draadfiguur van ijzerdraad en koperdraad. Bij de bouwmarkt koopt hij van beide metalen een rol draad. De lengte van een rol metaal draad is normaal verdeeld.

Een rol koperdraad is gemiddeld 10 meter lang, met een standaardafwijking van 9 centimeter. Een rol ijzerdraad is gemiddeld 30 meter lang en heeft een standaardafwijking van 13 centimeter.

- a Wat is de te verwachten totale lengte van de door Bas gekochte rollen ijzer- en koperdraad samen? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

De kans dat Bas minder dan de benodigde 39 meter draad heeft gekocht, zal heel klein zijn.

- b Laat zien dat deze kans inderdaad bijzonder klein is.

Opgave 10

Bekijk de twee kansverdelingen op basis van klassenmiddens. De statistische variabelen (kansvariabelen) X en Y zijn onafhankelijk van elkaar.

x	1	2		y	5	10	15
$P(X = x)$	0,15	0,85		$P(Y = y)$	0,25	0,40	0,35

Tabel 3.4

Laat zien dat:

- a $\overline{X + Y} = \overline{X} + \overline{Y}$
- b $\sigma(X + Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$
- c $\overline{Y - X} = \overline{Y} - \overline{X}$
- d $\sigma(Y - X) = \sqrt{(\sigma(Y))^2 + (\sigma(X))^2}$

Opgave 11

Het paard is, samen met de koe ons zwaarste huisdier. Deze opgave gaat over paarden van twee verschillende rassen: de arabier en het Friese paard.

Een arabier weegt gemiddeld 450 kilo met een standaardafwijking van 50 kilo. Een Fries paard weegt gemiddeld 600 kilo met een standaardafwijking van 85 kilo.

Omdat er op paardenstoeterijen steeds meer machinaal wordt gewerkt en paarden daardoor in en op machines staan, is hun gewicht alleen daarom al van belang voor paardenfokkers en -trainers.

- a Hoe groot is de kans dat een willekeurige arabier en een willekeurig Fries paard samen meer dan 1200 kilo wegen?
- b Hoe groot is de kans dat de gewichten van een willekeurige arabier en een willekeurig Fries paard minder dan 75 kilo van elkaar verschillen?
- c Hoe groot is de kans dat in een groep van acht willekeurige Friese paarden er minstens één is die minder weegt dan een gemiddelde arabier?

Toepassen

Opgave 12: Gegevens van leerlingen

Gebruik het bestand [Gegevens 154 leerlingen](#). Bekijk de tabel met gegevens van 154 meisjes en jongens.

- a Onderzoek in hoeverre de lichaamslengte van de meisjes en de lichaamslengte van de jongens (bij benadering) normaal verdeeld zijn.

Ga ervan uit dat de lichaamslengtes van deze meisjes en jongens normaal verdeeld zijn met de gemiddelden en standaardafwijkingen zoals je die in a hebt berekend.

- b Hoeveel procent van de jongens is langer dan het gemiddelde meisje in deze groep?
- c Wat is de kans dat een willekeurige jongen uit deze groep langer is dan een willekeurig meisje uit deze groep?

Opgave 13: Schoonmaakmiddelen

Een fabrikant van schoonmaakmiddelen heeft één filiaal in Nederland, speciaal voor de Nederlandse markt. De afzet van dit Nederlandse filiaal blijkt jaar in jaar uit heel stabiel met een gemiddelde van 24850 liter. De kans op een jaar waarin er meer dan 25000 liter schoonmaakmiddel wordt besteld is slechts 8%, zo heeft de administratieve afdeling berekend.

De afzet wisselt per kwartaal; de kwartaalafzetten zijn volgens de administratieve afdeling onafhankelijk van elkaar. Zowel in het eerste als in het vierde kwartaal van een jaar wordt gemiddeld 6250 liter afgezet met een standaardafwijking van 61 liter. Maar in het tweede kwartaal wordt ieder jaar duidelijk meer schoonmaakmiddel afgenomen en in het derde kwartaal juist veel minder. De administratieve afdeling heeft ondertussen ook kunnen achterhalen dat er in het derde kwartaal jaarlijks gemiddeld 5625 liter wordt besteld met een standaardafwijking van 52 liter.

Hoeveel schoonmaakmiddel wordt er jaarlijks gemiddeld in het tweede kwartaal afgenomen en met welke standaardafwijking?

Testen

Opgave 14

Literpakken melk worden machinaal gevuld. Zo'n pak heeft een inhoud die normaal is verdeeld met een gemiddelde van 1,010 liter en een standaardafwijking van 0,006 liter. De vulmachine staat ingesteld op het gieten van gemiddeld 1,005 liter melk in zo'n pak met een standaardafwijking van 0,004 liter. Ook dit vulvolume is normaal verdeeld.

- a In hoeveel procent van de gevallen gaat bij het vullen melk verloren?
- b Het gemiddelde vulvolume kan worden ingesteld. Hoeveel moet dit bedragen opdat in niet meer dan 1% van de gevallen melk verloren gaat bij het vullen van een pak?

2.4 Wortel-n-wet

Inleiding

Als je iedere dag hetzelfde reistraject naar school aflegt en daarbij dagelijks een tijd moet wachten op je bus, zou je ook willen weten welke gemiddelde tijd je wekelijks of maandelijks in totaal op je bus naar school moet wachten.

In deze paragraaf leer je dat er handige rekenregels zijn voor de totale wachttijd op de bus en voor de bijbehorende standaardafwijking.

Je zult ook zien dat de standaardafwijking van de gemiddelde wachttijd per dag op je bus naar school afhangt van de hoeveelheid dagen dat je deze bus naar school neemt, hoe vreemd dat misschien in eerste instantie ook lijkt!

Je leert in dit onderwerp

- de wortel-n-wet gebruiken voor het berekenen van de verwachtingswaarden en de standaardafwijking van (het gemiddelde) van een herhaling van kansvariabelen.

Voorkennis

- een kansverdeling opstellen bij een kansvariabele;
- de regels voor de verwachting en de standaardafwijking van de som van verschillende kansvariabelen.

Verkennen

Opgave V1

Een scholier gaat regelmatig met de bus naar school. Hij hoeft altijd maar maximaal drie minuten op de bus te wachten. Voor de wachttijd T , in hele minuten, geldt de volgende kansverdeling:

t	0	1	2	3
$P(T = t)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabel 4.1

Deze week gaat de betreffende scholier 5 keer met de bus.

- Hoeveel wachttijd verwacht hij in totaal? En hoeveel gemiddeld per keer?
- Bereken de standaardafwijking van zijn totale wachttijd? Hoeveel bedraagt die standaardafwijking dan gemiddeld per keer?

Uitleg

Een scholier gaat regelmatig met de bus naar school. Hij hoeft altijd maar maximaal drie minuten op de bus te wachten. Voor de wachttijd T , in hele minuten, geldt de volgende kansverdeling:

t	0	1	2	3
$P(T = t)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabel 4.2

Hieruit volgt dat $\bar{T} = 1,5$, $\text{Var}(T) = 1,25$ en $\sigma(T) = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Om de gemiddelde wachttijd en de bijbehorende standaardafwijking te berekenen als de scholier vijf keer met de bus gaat, hoef je niet eerst een kansverdeling te maken. Je kunt de optelregels voor de som van onafhankelijke variabelen gebruiken. Als Z de totale wachttijd van de scholier is als hij vijf keer met de bus gaat, dan geldt:

- $\bar{Z} = \bar{T} + \bar{T} + \bar{T} + \bar{T} + \bar{T} = 5 \cdot \bar{T} = 7,5$
- $\sigma(Z) = \sqrt{(\sigma(T))^2 + (\sigma(T))^2 + (\sigma(T))^2 + (\sigma(T))^2 + (\sigma(T))^2} = \sqrt{5 \cdot (\sigma(T))^2} = \sqrt{6,25} = 2,5$

De standaardafwijking van Z is $\sqrt{5 \cdot (\sigma(T))^2} = \sqrt{5} \cdot \sigma(T)$.

Om de gemiddelde wachttijd per keer te berekenen als de scholier vijf keer met de bus gaat, deel je het gemiddelde van Z door 5. Het gemiddelde is 1,5. De bijbehorende standaardafwijking wordt $\frac{2,5}{5} = 0,5$. Ga na dat dit hetzelfde is als $\frac{\sigma(Z)}{\sqrt{5}}$. Dit is niet dezelfde standaardafwijking als de scholier maar één keer met de bus gaat. Dit heet de wortel-n-wet.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

- Leg uit waarom het handig is dat je de genoemde optelregels kunt gebruiken.
- Leg uit waarom er sprake is van vijf 'onafhankelijke' statistische variabelen.

Opgave 2

Stel dat de scholier twintig keer met de bus gaat en dat M de totale wachttijd (min) is.

- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van M .
- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking per keer.

Opgave 3

In een doosje theezakjes zitten twintig zakjes thee. Ieder theezakje weegt gemiddeld 1,75 gram met een standaardafwijking van 0,085 gram.

- Hoeveel is het gemiddelde nettogewicht in een ongeopend doosje theezakjes? En hoe groot is de bijbehorende standaardafwijking?
- Hoe groot is het gemiddelde gewicht van een theezakje uit een nog ongeopend doosje? En wat is de bijbehorende standaardafwijking?
- Welk verband bestaat er tussen de twee standaardafwijkingen die je net hebt berekend?

Ondertussen zijn er al zes theezakjes gebruikt.

- Hoe groot is het gemiddelde nettogewicht van het doosje met de overgebleven theezakjes? En hoe groot is de bijbehorende standaardafwijking?
- Hoe groot is het gemiddelde gewicht van een theezakje uit het doosje waar al zes theezakjes uit gebruikt zijn? En hoe groot is de bijbehorende standaardafwijking?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Heb je te maken met n onafhankelijke gelijke kansvariabelen X , dan geldt voor kansvariabele S , de som van deze n kansvariabelen:

- $\bar{S} = n \cdot \bar{X}$ of, als X normaal verdeeld is: $\mu(S) = n \cdot \mu(X)$
- $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

Dit heet de **wortel-n-wet**.

Voor de kansverdeling die hoort bij het gemiddelde $\bar{X}$ van n onafhankelijke gelijke kansvariabelen X geldt:

- $\mu(\bar{X}) = \frac{\bar{S}}{n} = \frac{n \cdot \bar{X}}{n} = \bar{X}$ of, als X normaal verdeeld is:

$$\mu(\bar{X}) = \frac{\mu(S)}{n} = \frac{n \cdot \mu(X)}{n} = \mu(X)$$
- $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(S)}{n} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma(X)}{n} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Voorbeeld 1

Op doosjes paperclips van een bepaald merk staat: circa 100 stuks. Door tellingen is gebleken dat in deze doosjes het aantal paperclips normaal is verdeeld met gemiddeld 104,3 paperclips en een standaardafwijking van 3,5. Je haalt tien doosjes van die paperclips. Hoeveel paperclips verwacht je dat er totaal in de doosjes zitten en met welke standaardafwijking?

En hoeveel is de verwachtingswaarde van de gemiddelde inhoud van 10 doosjes en hoe groot is de standaardafwijking van de gemiddelde inhoud van 10 doosjes?



Figuur 4.1

Antwoord

Neem aan dat het aantal paperclips X in elk doosje niet afhangt van het aantal in de andere doosjes.

Het totale aantal paperclips in 10 doosjes is S . Dan geldt:

- $\mu(S) = 10 \cdot \mu(X) = 10 \cdot 104,3 = 1043$
- $\sigma(S) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X) = \sqrt{10} \cdot 3,5 \approx 11,1$

De verwachting is 1043 paperclips met een standaardafwijking van ongeveer 11.

Voor het gemiddelde inhoud van 10 doosjes $\bar{X}$ geldt:

- $\mu(\bar{X}) = \frac{\mu(S)}{10} = \bar{X} = 104,3$
- $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sqrt{10} \cdot \sigma(X)}{10} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{10}} \approx 1,1$

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je koopt vijf van die doosjes paperclips.

- Hoeveel paperclips verwacht je dat er totaal in de vijf doosjes zitten?
- Welke standaardafwijking heeft het aantal paperclips in deze vijf doosjes samen?

Opgave 5

Bekijk nogmaals **Voorbeeld 1**. Je koopt vijf van die doosjes paperclips.

- Hoeveel paperclips verwacht je dat er gemiddeld in een doosje zitten?
- Welke standaardafwijking heeft het gemiddelde aantal paperclips per doosje in deze steekproef van vijf doosjes?

Opgave 6

In een fabriek worden pakken met 1 kilo meel gevuld. De vulmachine is afgesteld op een gemiddeld vulgewicht van 1002 gram met een standaardafwijking van 4 gram. De pakken worden op hun beurt verpakt met een plastic folie in pakketten van 10 pakken.

- Bereken het gemiddelde gewicht van deze pakketten.
- Welke standaardafwijking geldt voor het gewicht van deze pakketten?
- Welk verwachtingswaarde en standaardafwijking geldt voor het gemiddelde van de pakken meel uit zo'n pakket?
Op een pallet worden 100 pakketten geplaatst.
- Welk gewicht verwacht je dat op het pallet is geplaatst en welke standaardafwijking geldt hiervoor?
- Welke verwachtingswaarde en standaardafwijking gelden voor een pak meel dat uit een pallet wordt genomen?

Verwerken

Opgave 7

Het gewicht van een glas is 50 gram met een standaardafwijking van 2,8 gram.

De glazen worden in doosjes van zes verpakt.

- Wat is het gemiddelde gewicht van zo'n doosje?
- Welke standaardafwijking hoort daarbij? Geef je antwoord in gram en rond af op één decimaal.

Opgave 8

Jenna en Iris spelen een zelfbedacht spel met knikkers. Op basis van heel vaak spelen hebben ze berekend dat de volgende kansstabel bij het spel hoort:

k	-2	-1	0	2	3
$P(K = k)$	0,0032	0,1634	0,3456	0,2473	0,2405

Tabel 4.3

Kansvariabele K is het aantal knikkers winst/verlies per keer dat het spel wordt gespeeld.

- Hoe groot is het verwachte aantal knikkers winst/verlies na 35 keer spelen?
Welke standaardafwijking hoort daarbij?
- Wat is het gemiddelde aantal knikkers per spel dat je verwacht na 35 keer spelen?
Geef ook de bijbehorende standaardafwijking.

Opgave 9

Een bepaald type dvd-recorder wordt in dozen verpakt die een gemiddelde hoogte van 10 centimeter hebben met een standaardafwijking van 4 millimeter. Bij een groothandel wordt een aantal van deze dozen in een magazijn opgeslagen.

- Er worden 15 dozen op elkaar geplaatst. Bereken de verwachtingswaarde van de hoogte van de stapel dozen en geef de bijbehorende standaardafwijking.
- Bij het vervoer van deze dozen gebruikt men een vrachtwagen met een hoogte van 2,5 meter en een standaardafwijking van 1,9 centimeter. Bij het beladen van deze vrachtwagen wil men stapels maken van 25 dozen. Welke standaardafwijking voor de hoogte mag een doos dan hebben?
- Zal het altijd lukken om 25 dozen op elkaar te stapelen in een vrachtwagen? Leg uit waarom.

Opgave 10

Voor de dagproductie geldt dat het gemiddelde gewicht van een pak suiker 1002 gram is met een standaardafwijking van 3 gram. Je trekt een steekproef van tien pakken suiker uit die dagproductie.

- a Welk gemiddelde gewicht zal de totale hoeveelheid suiker T in die steekproef hebben? En welke standaardafwijking hoort daarbij?
- b Bereken de kans dat het totale gewicht in de steekproef meer is dan 10 kilo.
- c Welk gemiddelde gewicht zullen de pakken suiker in de steekproef hebben? En welke standaardafwijking hoort daarbij?
- d Bereken de kans dat het gemiddelde gewicht van de pakken in de steekproef meer is dan 1 kilo.

Opgave 11

Een groenteboer verkoopt bakjes met fruit. Er zijn bakjes aardbeien van 300 gram met een standaardafwijking van 10 gram. Er zijn bakjes bramen van 200 gram met een standaardafwijking van 8 gram. En er zijn bakjes frambozen van 100 gram met een standaardafwijking van 5 gram.

Els maakt jam met deze drie soorten fruit. Ze heeft ook geleisuiker nodig. De juiste verhouding is 1 kilo suiker op 1 kilo fruit.

Els koopt één bakje aardbeien, twee bakjes bramen en drie bakjes frambozen.

- a Hoeveel gram fruit verwacht Els te kopen? En welke standaardafwijking hoort daarbij?
- b Een pak geleisuiker van 1 kilo heeft een standaardafwijking van 12 gram.

Bereken de kans dat Els te weinig suiker heeft in verhouding tot het fruit dat ze heeft.

Toepassen

Opgave 12: Preiplanten kweken

Een tuinder zaait zaadjes voor preiplanten. In een doosje zitten tien zakjes met zaadjes. Uit één zakje zaadjes komen bij de tuinder gemiddeld twintig preiplanten op, met een standaardafwijking van 3,2.

- a Hoeveel preiplanten kweekt de tuinder gemiddeld met één doosje zaadjes?
En welke standaardafwijking hoort daarbij?
- b De tuinder zaait de zaadjes uit drie doosjes.
Bereken de kans dan er minder dan 580 preiplantjes opkomen.
De tuinder vindt deze kans te groot. Hij besluit de omstandigheden in zijn kas zo aan te passen dat er gemiddeld meer preiplanten opkomen. De standaardafwijking blijft gelijk.
- c Bereken wat het nieuwe gemiddelde per zakje moet worden zodat de kans op minder dan 580 opkomende plantjes kleiner is dan 1%. Rond je antwoord af op gehele getallen.

Opgave 13: Gewicht raden

Op de kermis is er een spelletje waarbij je het gewicht moet raden van een zak met kauwgomballen. Je legt € 10,00 in. Als je het gewicht op 0,5 gram nauwkeurig raadt, win je € 50,00. Als je het gewicht op 1 gram nauwkeurig raadt, win je € 25,00. En anders win je niets.

Kyra heeft voorkennis. Ze weet dat één kauwgombal 5 gram weegt, met een standaardafwijking van 0,1 gram. In de zak zitten 55 kauwgomballen en de zak weegt niets.

Bepaal de verwachtingswaarde van de winst van Kyra.

Testen

Opgave 14

In een doos zitten vier kaartjes met daarop de getallen 3, 7, 11 en 15.

- Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor het getal bij het trekken van één kaartje uit de doos.
- Bereken vanuit de bijbehorende kansverdeling de verwachtingswaarde van de som van de getallen van twee getrokken kaartjes bij trekken met terugleggen. Bereken voor deze som ook de standaardafwijking.
- Welk verband bestaat er met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking die je bij a hebt berekend?
- Bereken vanuit de bijbehorende kansverdeling de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het gemiddelde van de getallen op twee getrokken kaartjes. Welk verband bestaat er nu met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking die je bij a hebt berekend?
- Trek met teruglegging drie kaartjes uit de doos. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som en van het gemiddelde van de getallen op de drie getrokken kaartjes.

Opgave 15

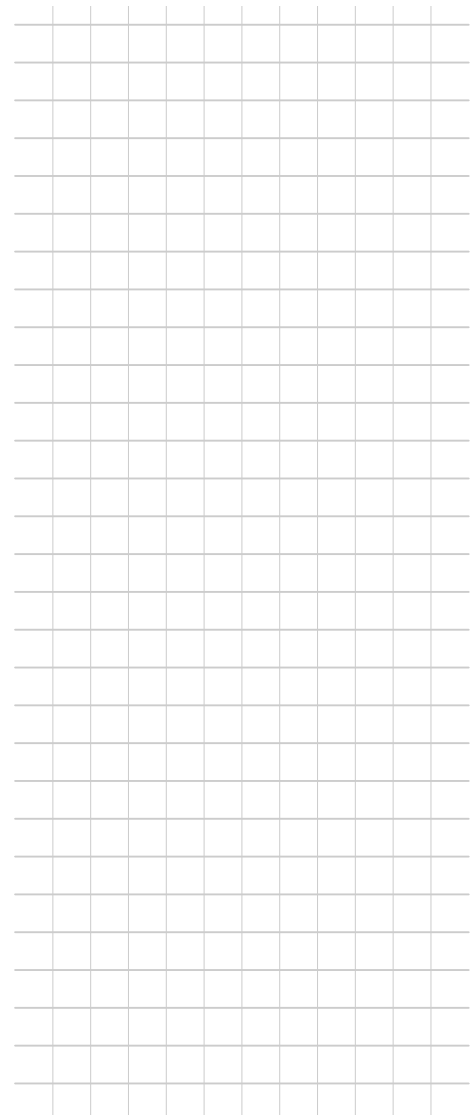
In de maand december zijn er kerstzegels verkrijgbaar. Ze worden in een bepaald jaar aangeboden op een velletje van twee blokken met twee bij vijf zegels. De afmetingen van de blokken (zonder rand) zijn 15,5 bij 7,75 cm met een standaardafwijking van 0,75 mm in beide richtingen.

Bereken de afmetingen en de standaardafwijkingen van deze zegels.

Decemberzegels
2015



Figuur 4.2



2.5 Normaal of niet?

Inleiding

Als je de gewichten van zo'n 1000 aselekt gekozen vrouwen uit de leeftijdsgroep van $20 - < 30$ jaar meet, krijg je ongeveer een klok-vormige frequentieverdeling. Maar mag je nu zeggen dat er sprake is van een normale kansverdeling?

Er bestaat normaal-waarschijnlijkheidspapier. Op dat papier wordt een cumulatief relatief frequentiepolygoon een rechte lijn als er van een normale kansverdeling sprake is. Met behulp van de vuist-regels kun je vanaf dat papier dan het gemiddelde en de standaard-afwijking aflezen.

Als deze gegevens normaal verdeeld zijn, wil je ze wellicht ver-gelijken met de gegevens van een groep vrouwen uit een andere leeftijdsklasse die ook normaal verdeeld zijn maar met een ander gemiddelde en/of standaard afwijking. Dat kan o.a. door de gege-vens van beide kansvariabelen te standaardiseren.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- een cumulatief relatief frequentiepolygoon tekenen op nor-maal-waarschijnlijkheidspapier en bepalen of een frequentie-verdeling normaal verdeeld is;
- wat standaardiseren is en wat de standaardnormale kansver-delung is;
- de z -waarde berekenen en toepassen bij het vergelijken van normale kansverdelingen.

Voorkennis

- werken met normale kansverdelingen;
- kansen berekenen bij normale kansverdelingen;
- grenswaarden terugzoeken bij normale kansen;
- een cumulatief frequentiepolygoon maken bij een frequentie-tabel of histogram.

Verkennen

Opgave V1

Bij een landelijk onderzoek zijn de gewichten bepaald van 1000 aselekt gekozen volwassen vrouwen van 20– < 30 jaar, zie tabel. De frequentieverdeling lijkt op die van een normale kansverdeling. Kun je nu zonder meer een normale kansverdeling als rekenmodel gebruiken voor deze groep vrouwen?

- Ga na of deze frequentieverdeling voldoet aan de vuistregels voor een normale verdeling.
- Is het voldoen aan de vuistregels voldoende reden om te concluderen dat een normale verdeling een bruikbaar rekenmodel is?

Tijdens het onderzoek wordt ook de gewichten van vrouwen uit andere leeftijdsklassen verzameld.

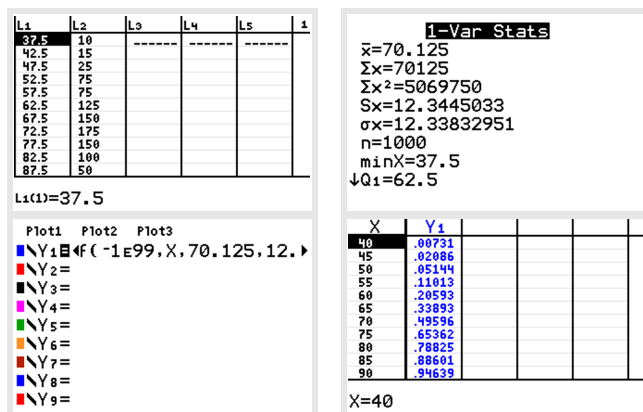
De ene leeftijdsklasse kent net wat hogere gewichten dan de andere: bij de ene is b.v. gewichtsklasse 35– < 40 leeg en zijn de twee extra klassen 105– < 110 en 110– < 115 benodigd.

- Vanwege ergonomische redenen willen de onderzoekers per leeftijdsklasse weten hoeveel standaardafwijkingen een gewicht van 78,5 kg afligt van het gemiddelde gewicht in die leeftijdsklasse.

Hoe kunnen ze dat voor elkaar krijgen?

Uitleg 1

Bij een landelijk onderzoek zijn de gewichten bepaald van 1000 aselekt gekozen volwassen vrouwen van 20– < 30 jaar, zie tabel. De frequentieverdeling lijkt op die van een normale verdeling met $\mu(L) = 70,125$ en $\sigma(L) = 12,338$. Kun je nu zonder meer een normale verdeling als rekenmodel gebruiken voor deze groep vrouwen?



Figuur 5.4

Zet je op **normaal waarschijnlijkheidspapier** kansen van de vorm $P(L \leq 40 | \mu = 70,125 \text{ en } \sigma = 12,338)$ uit, dan krijg je een rechte lijn. Elke zuivere cumulatieve normale verdeling wordt op normaal waarschijnlijkheidspapier een rechte lijn.

Maak je van de gegeven frequentieverdeling een cumulatieve relatieve frequentieverdeling en zet je die uit op normaal waarschijnlijkheidspapier, dan zou je een rechte lijn moeten krijgen (je zet de cumulatieve relatieve frequenties uit tegen de rechter klassen-

gewicht	frequentie
35-<40	10
40-<45	15
45-<50	25
50-<55	75
55-<60	75
60-<65	125
65-<70	150
70-<75	175
75-<80	150
80-<85	100
85-<90	50
90-<95	25
95-<100	15
100-<105	10

Figuur 5.2

gewicht	frequentie
35-<40	10
40-<45	15
45-<50	25
50-<55	75
55-<60	75
60-<65	125
65-<70	150
70-<75	175
75-<80	150
80-<85	100
85-<90	50
90-<95	25
95-<100	15
100-<105	10

Figuur 5.3

grenzen). Je zult zien, dat de cumulatieve relatieve frequentieverdeling en de normale verdeling goed overeenkomen! Kennelijk zijn deze gewichten ongeveer normaal verdeeld!

Opgave 1

Bestudeer **Uitleg 1**. Neem (print) een aantal bladen normaal waarschijnlijkheidspapier. Ga uit van een normale verdeling met $\mu = 70,125$ en $\sigma = 12,338$.

- Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de waarden van $P(L \leq g)$ bij deze normale verdeling voor $g = 40, 45, 50, \dots, 105$. Denk er om dat alle kansen als percentages moeten worden gegeven.
- Wordt je grafiek een rechte lijn?
- Waar in je figuur vind je μ terug? Kun je ook σ terugvinden?

Opgave 2

Neem nu de tabel met de werkelijke gewichten van de 1000 vrouwen.

- Maak hierbij een tabel met cumulatieve relatieve frequenties.
- Zet deze cumulatieve relatieve frequenties uit tegen de bovengrenzen van elke klasse op het normaal waarschijnlijkheidspapier waar de normale verdeling van de vorige opgave op staat.
- Verschilt je grafiek veel van de grafiek van de normale verdeling? Waarom moet je de bovengrenzen van de klassen gebruiken?
- Kun je concluderen dat de gewichten van deze 1000 vrouwen normaal zijn verdeeld?

Uitleg 2

Een groenteboer krijgt van twee boerderijen A en B peren aangeleverd. Hij heeft het idee dat het gewicht van de geleverde peren per boerderij verschilt. Hij wil van beide boerderijen steekproeven nemen om deze met elkaar te vergelijken, maar hun kisten met peren verschillen nogal in grootte, zie tabel.

De kansvariabelen zijn G_A , het gewicht van een kist van boerderij A, en G_B , het gewicht van een kist van boerderij B.

Om eerlijk te vergelijken vermindert hij een gemeten gewicht eerst met het bijbehorende gemiddelde μ , waarna hij het resultaat deelt door de standaardafwijking σ . De waarde die daar uitrolt is de z -waarde $z = \frac{G - \mu}{\sigma}$ van het gemeten gewicht G .

Dit noem je 'standaardiseren'. Beide normaalkrommen worden daarmee verschoven zodat hun top op de verticale as ligt. Alleen de standaardafwijking bepaalt dan de 'breedte' ervan. De z -waarde is daarom de hoeveelheid standaardafwijkingen die het gemeten gewicht afwijkt van het verwachte gewicht.

De groenteboer ontdekt dat meerdere kleine kisten een z -waarde van minder dan $-1,5$ hebben. Het gewicht van deze kisten is meer dan $1,5$ standaardafwijking lager dan hun verwachte gewicht. De groenteboer begrijpt dat hij de gewichten van de kleine kisten van boerderij B nader moet onderzoeken.

	A	B
	grote kist	kleine kist
μ (kg)	61,5	28,9
σ (g)	208	106

Tabel 5.1

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** wat onder standaardiseren van een normale verdeling wordt verstaan.

- Welke z -waarde heeft een grote kist met een gewicht van 62 kilo? Voldoet hij aan de 95%-norm?
- Hoeveel standaardafwijkingen meer of minder weegt een kleinere kist met een gewicht van 28,85 kilo dan de gemiddelde kleinere kist?
- Bereken in twee decimalen welk gewicht de kleinere kist met z -waarde $-1,5$ heeft.

Opgave 4

Bekijk weer **Uitleg 2**.

- Welke z -waarde krijgt een grote kist peren als hij precies het gemiddelde gewicht van 61,5 kg heeft?
Waarom geldt dit ook voor een kleine kist peren die zijn gemiddelde gewicht heeft?
Waarom kun je ze daarom eerlijk vergelijken?
- Reken voor een kleinere kist peren na dat kisten die een gewicht hebben dat precies één standaardafwijking meer is dan het gemiddelde, een z -waarde van 1 hebben.
Welke z -waarde hebben kisten die precies één standaardafwijking minder wegen dan het gemiddelde?

Theorie en voorbeelden**Om te onthouden**

Zet je bij een normaal verdeelde kansvariabele X met verwachting $\mu(X)$ en standaardafwijking $\sigma(X)$ op **normaal-waarschijnlijkheidspapier** kansen van de vorm $P(X \leq g)$ uit tegen g , dan krijg je een rechte lijn. Elke zuivere cumulatieve normale kansverdeling wordt op normaal-waarschijnlijkheidspapier een rechte lijn. Zet daarbij de cumulatieve relatieve frequenties uit tegen de **bovengrenzen** van de klassen.

Vaak liggen op het normaal-waarschijnlijkheidspapier de punten van de cumulatieve relatieve frequentieverdeling niet precies op een rechte lijn. Trek dan een rechte lijn die zo goed mogelijk bij de getekende punten past. Je benadert op die manier de frequentieverdeling door de normale kansverdeling die bij die lijn hoort. Schat de verwachtingswaarde door af te lezen welk getal er bij 50% hoort.

Omdat één van de twee vuistregels zegt dat bij een normale verdeling 68% in het interval $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ligt, is bij 84% de waarde van $\mu + \sigma$ af te lezen. Bepaal zo σ .

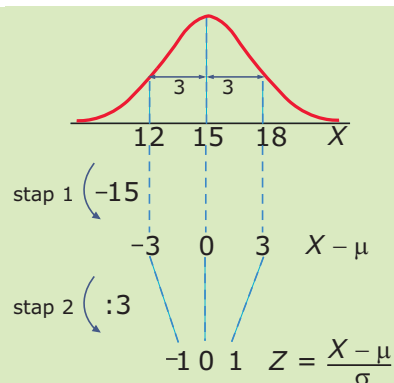
Is van twee verschillende kansvariabelen X en Y al bekend dat ze normaal verdeeld zijn met $\mu(X) \neq \mu(Y)$ en/of $\sigma(X) \neq \sigma(Y)$ en moeten steekproefwaarnemingen van beide variabelen met elkaar vergeleken worden, dan kun je beide kansvariabelen **standaardiseren**.

Zoals bekend hangt de vorm van de normaalkromme af van het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ . Neem je $\mu = 0$ en $\sigma = 1$, dan krijg je de **standaard normaalkromme**.

Elke normaal verdeelde kansvariabele X is om te zetten naar de standaardnormaal verdeelde kansvariabele Z door van alle x -waarden het gemiddelde af te trekken en de figuur te versmallen door te delen door de standaardafwijking: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Dit heet de **z-waarde**.

Er geldt: $P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

Met behulp van z -waarden van twee verschillende kansvariabelen zijn steekproeven van deze twee variabelen met elkaar te vergelijken.



Figuur 5.5

Voorbeeld 1

Bekijk de tabel met de diameters (millimeter) van machinaal geproduceerde moeren. Ga na dat deze diameters normaal zijn verdeeld en bereken het gemiddelde en de standaardafwijking.

Antwoord

De grafische rekenmachine geeft $\bar{M} \approx 13,20$ en $\sigma(M) \approx 0,10$ waarin M de diameter van een moer voorstelt.

Op normaal-waarschijnlijkheidspapier verschillen de cumulatieve relatieve frequentieverdeling vanuit de tabel en de cumulatieve normale kansverdeling met $\mu(M) = 13,20$ en $\sigma(M) = 0,10$ vrijwel niet van elkaar. Maak beide op een blad normaal-waarschijnlijkheidspapier.

Conclusie: M is normaal verdeeld met $\mu(M) = 13,20$ en $\sigma(M) = 0,10$.

Opgave 5

Bekijk de tabel met diameters van machinaal geproduceerde moeren in **Voorbeeld 1**.

- Reken het gemiddelde en de standaardafwijking na.
- Teken op normaal-waarschijnlijkheidspapier de cumulatieve normale verdeling bij dit gemiddelde en deze standaardafwijking.
- Teken op hetzelfde papier de cumulatieve relatieve frequentieverdeling van de moeren.
- Ga na dat de verdelingen van b en c redelijk goed overeenkomen.



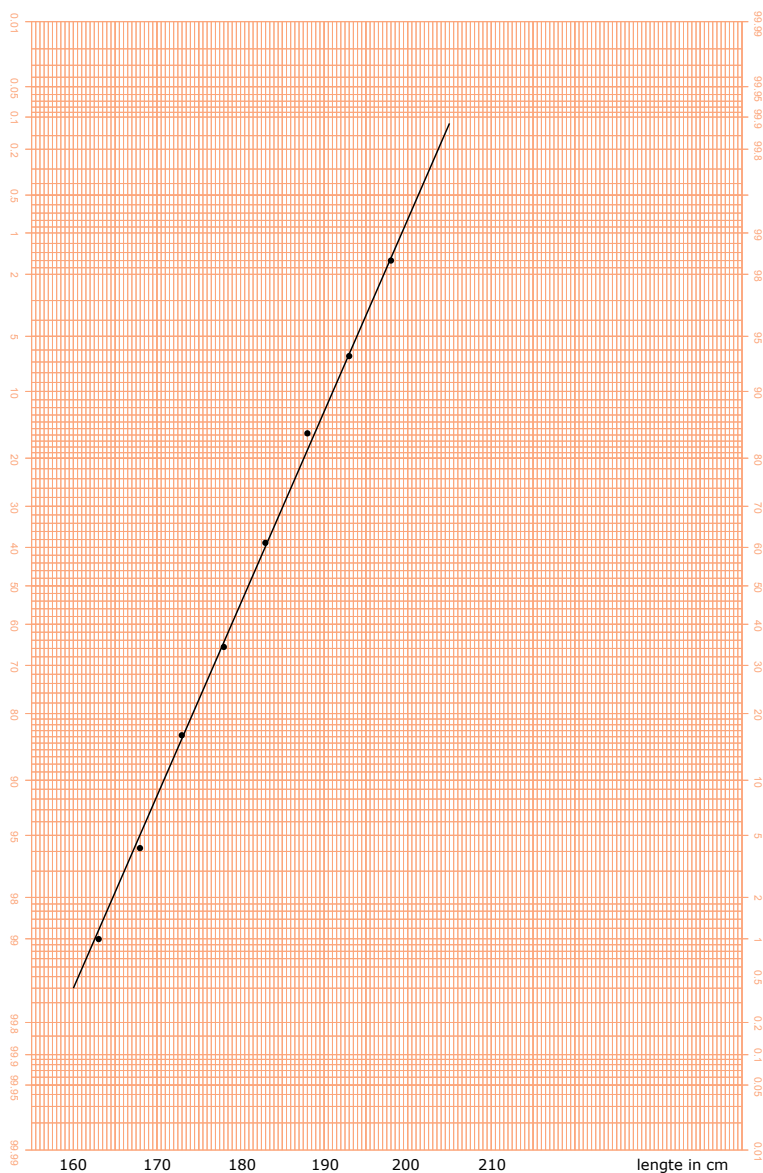
diameter	percentage
12,8-<12,9	0,1
12,9-<13,0	2,1
13,0-<13,1	13,6
13,1-<13,2	34,1
13,2-<13,3	34,0
13,3-<13,4	13,6
13,4-<13,5	2,0
13,5-<13,6	0,1

Figuur 5.6

Voorbeeld 2

De lengteverdeling van Nederlandse mannen boven de twintig jaar is bij benadering klokvormig. In deze figuur op normaal waarschijnlijkheidspapier zie je hoe deze kansverdeling wordt benaderd door een rechte lijn.

Bepaal vanuit de figuur het gemiddelde en de standaardafwijking van de lengte X van de Nederlandse man in centimeter.



Figuur 5.7

Antwoord

Op de lengteverdeling van Nederlandse mannen boven de twintig jaar zijn de lengtes bij 50% en 84% af te lezen:

- bij 50% zit de gemiddelde lengte van $\mu \approx 181$ cm.
- bij 84% zit volgens de vuistregels $\mu + \sigma \approx 189$ cm.

Dit geeft een gemiddelde van ongeveer 181 cm met een standaardafwijking van $189 - 181 = 8$ cm.

Opgave 6

Wanneer een cumulatieve relatieve frequentieverdeling op normaal-waarschijnlijkheidspapier vrijwel een rechte lijn oplevert, is er sprake van een normale kansverdeling. In **Voorbeeld 2** zie je hoe je dan het gemiddelde en de standaardafwijking van de kansverdeling uit de figuur afleest.

Ga na dat de in het voorbeeld vermelde waarden inderdaad correct zijn.

Opgave 7

In een fabriek worden kilopakken suiker machinaal gevuld. Volgens de Europese norm mag niet meer dan 2,5% van de pakken suiker minder dan 1000 gram bevatten. Gebruik het bestand **De vulgewichten van honderd pakken suiker**.

- Maak een tabel met cumulatieve relatieve frequenties van deze vulgewichten. Gebruik klassen met een klassenbreedte van 1 gram.
- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van deze vulgewichten in één decimaal.
- Teken op normaal-waarschijnlijkheidspapier de cumulatieve relatieve frequentieverdeling.
- Zijn de vulgewichten (bij goede benadering) normaal verdeeld? Zo ja, trek dan de rechte lijn die hoort bij deze normale verdeling.
- Laat zien dat het gemiddelde vulgewicht en de bijbehorende standaardafwijking die je uit de figuur afleest, overeenkomen met de berekende waarden.
- Welke vulgewichten hebben de 10% zwaarste pakken suiker? Lees je antwoord uit de figuur af.

Voorbeeld 3

Bekijk de lengte in een groep zeventienjarige jongens en in een groep zeventienjarige meisjes. Bij de jongens is de gemiddelde lengte 180 centimeter en de standaardafwijking 7 centimeter. Bij de meisjes is de gemiddelde lengte 170 centimeter en de standaardafwijking 6 centimeter.

Een jongen en een meisje uit deze groepen krijgen verkering. Ze zijn beiden erg lang: de jongen 197 centimeter en het meisje 187 centimeter.

Wie is de grootste uitschieter in zijn of haar groep?

Antwoord

De jongen heeft een z -waarde van $\frac{197-180}{7} \approx 2,43$.

Het meisje heeft een z -waarde van $\frac{187-170}{6} \approx 2,83$.

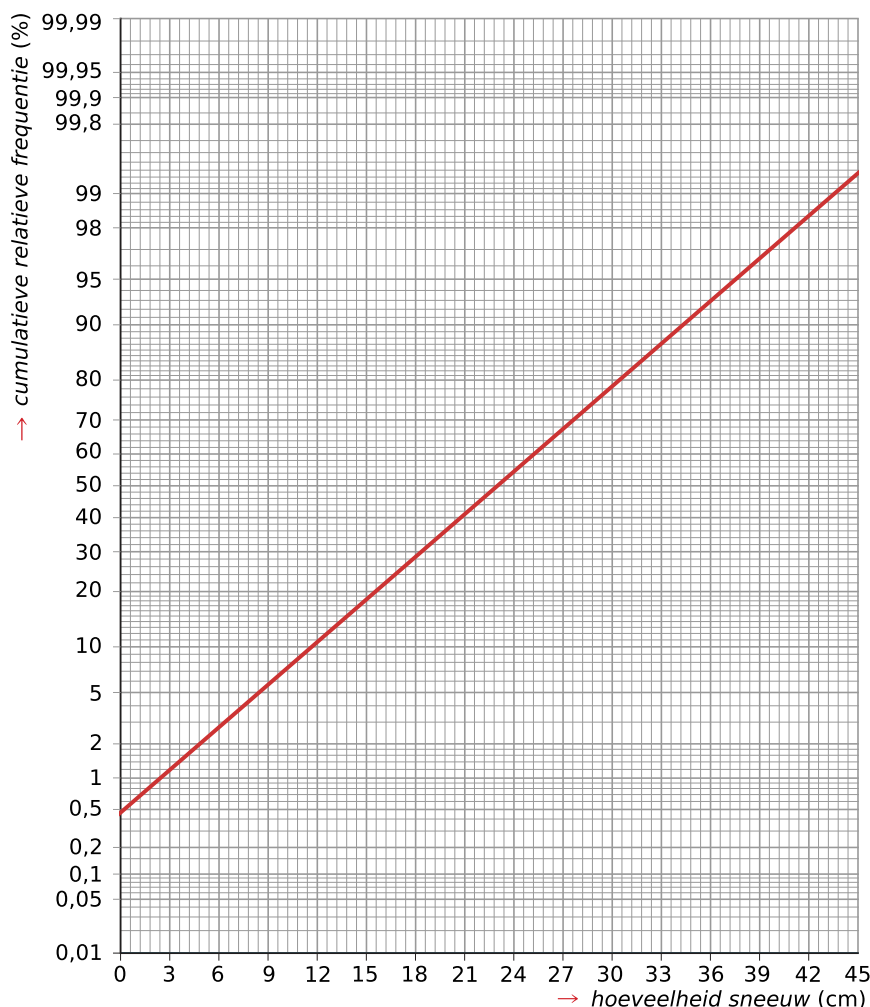
Het meisje is de grootste uitschieter in haar groep: ze wijkt bijna drie standaardafwijkingen af van de gemiddelde meisjeslengte.

Verwerken

Opgave 9

In een noordelijk gelegen stad sneeuwt het in het winterseizoen regelmatig.

Van de hoeveelheid sneeuw die afgelopen winter per dag dat het sneeuwde viel, is een grafiek op normaal-waarschijnlijkheidspapier gemaakt.



Figuur 5.8

- a** Leg uit hoe je uit deze grafiek kunt aflezen hoeveel procent van de dagen dat het sneeuwde er meer dan 18 centimeter sneeuw per dag viel.
- b** Leg uit waarom de hoeveelheid sneeuw die per sneeuwdag viel normaal verdeeld is en bepaal de gemiddelde hoeveelheid sneeuw die per sneeuwdag viel. Bepaal ook de bijbehorende standaardafwijking.

Opgave 10

Amerikaanse schoenmaten van mannen liggen tussen de 5,5 (onze maat 38) en de 13,5 (onze maat 48). De gemiddelde Amerikaanse schoenmaat voor mannen is 11 (onze maat 45) met een standaardafwijking van 1,5.

- a Bepaal de z -waarden van de Amerikaanse schoenmaten voor mannen in de tabel.

- b Welke van de z -waarden kun je zonder berekening bepalen?

Welke van de z -waarden kun je met een hele simpele berekening bepalen, dus zonder de formule voor de z -waarde te gebruiken?

Licht je antwoord toe.

De reguliere schoenmaten lopen door tot maat 13,5 en deze schoenmaat heeft een z -waarde van net geen 2.

- c Schat nu met behulp van de vuistregels van de normale verdeling minstens hoeveel procent van de Amerikaanse mannen zulke grote voeten heeft, dat hun schoenmaat zeker groter is dan 13,5.

- d Een Amerikaanse man blijkt een schoenmaat te hebben met z -waarde 3.

Welke uitzonderlijke schoenmaat heeft deze man?

Opgave 11

Bekijk de tabel met de bloeddruk in mm Hg (millimeter kwikdruk) van een groep mannen en een groep vrouwen.

- a Bereken van beide groepen de gemiddelde bloeddruk en de standaardafwijking van de bloeddruk.
- b Welke klassenindeling is hier gehanteerd?
- c Laat met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier zien dat de bloeddruk van de mannen niet normaal is verdeeld.
- d Trek een rechte lijn die de verdeling zo goed mogelijk benadert. Doe dat en lees het gemiddelde en de standaardafwijking af die bij die lijn passen. Wijken de waarden veel af van de berekende waarden?
- e Is de bloeddruk van de vrouwen wel normaal verdeeld?

Opgave 12

Statistische variabele X is normaal verdeeld met gemiddelde 12 en standaardafwijking 2.

Statistische variabele Y is normaal verdeeld met gemiddelde 18 en standaardafwijking 3.

- a Schets voor beide statistische variabelen de normaalkrommen boven dezelfde horizontale as.

Beide statistische variabelen kun je omzetten naar de standaardnormale verdeling.

- b Schets de normaalkromme bij de standaardnormale verdeling.

- c Bereken met de standaardnormale verdeling de z -waarde van de 5% grootste waarden en gebruik deze z -waarde om voor zowel

schoenmaat	z -waarde
5,5	
6	
8,5	
10,25	
11	
12,5	
13,25	
13,5	

Tabel 5.2

Bloeddruk 150 personen in mm Hg		
	mannen	vrouwen
bloeddruk	frequentie	frequentie
105	2	1
110	4	3
115	6	5
120	16	15
125	15	12
130	6	6
135	7	7
140	7	7
145	7	8
150	2	5
155	1	3
160	1	2
165	1	1
	75	75

Figuur 5.9

statistische variabele X als Y de grenswaarde van de grootste 5% te bepalen.

Voor de statistische variabele X geldt dat de kans dat een waarde kleiner is dan 9 gelijk is aan ongeveer 6,7%.

Je ziet vrij snel welke z -waarde het getal 9 heeft voor statistische variabele X . Met deze z -waarde kun je snel bepalen voor welke waarde y van statistische variabele Y geldt dat de kans dat een waarde kleiner is dan y ook gelijk is aan 6,7%.

- d Bepaal y op de hier gesuggereerde manier (dus zonder de functies voor de normale verdeling op de grafische rekenmachine).

Opgave 13

De burgemeester van een kleine plaats in Nederland beweert dat het gemiddelde inkomen in zijn gemeente € 45000,00 is met een standaardafwijking van € 5500,00.

De rijksoverheid neemt een steekproef van 73 gezinnen. Het blijkt dat het gemiddelde inkomen in de steekproef € 38000,00 is.

- a Bereken de z -waarde van het steekproefresultaat.
b Gebruik de gevonden z -waarde om te beantwoorden hoe waarschijnlijk je de bewering van de burgemeester over het gemiddelde inkomen in zijn gemeente vindt.

Ga ervan uit dat het inkomen van de inwoners van deze plaats normaal is verdeeld, wat heel bijzonder is. Ga uit van de door de burgemeester genoemde gegevens.

Familie Van Veelen heeft een inkomen van € 59550,00 en is van plan naar deze plaats te verhuizen.

- c Gebruik de z -waarde van het inkomen van de familie Van Veelen om in te schatten of de kans dat er al inwoners zijn die € 59550,00 of meer verdienen groter zal zijn dan nul.

Toepassen

Opgave 14: Vogels die voedsel zoeken

Vogels die hun voedsel in bomen en struiken zoeken, doen dat vaak bij voorkeur op een specifieke hoogte. Gedurende een winter zijn in een bos voedselzoekende vogels geobserveerd. In de tabel staat de verdeling over verschillende hoogtes van 400 waarnemingen bij pimpelmezen.

hoogte (meter)	< 1,5	1,5 – 3	3 – 5	5 – 7	7 – 10	10 – 15	> 15
aantal waarnemingen	24	26	51	72	122	92	13

Tabel 5.3

Toon met behulp van normaal-waarschijnlijkheidspapier aan dat de waargenomen hoogtes bij benadering normaal verdeeld zijn. Lees uit de tekening af hoe groot het gemiddelde en de standaardafwijking van deze verdeling zijn. Geef beide antwoorden in decimeter. Licht je werkwijze toe.

(naar: examen vwo wiskunde A in 2002, eerste tijdvak)

Opgave 15: Taaltoets en rekentoets

Marieke moet zowel een taaltoets als een rekentoets maken om voor haar vervolgstudie in aanmerking te komen. Bij de taaltoets haalt ze 62 punten en voor de rekentoets haalt ze 70 punten.

De scores voor de taaltoets zijn normaal verdeeld met een gemiddelde score van 55 punten en een standaardafwijking van 8 punten. De scores voor de rekentoets zijn ook normaal verdeeld met een gemiddelde van 55 punten en een standaardafwijking van 14 punten.

Je ziet dat Marieke bovengemiddeld gescoord heeft. Welke toets heeft zij het beste gemaakt?

Beantwoord deze vraag op (minimaal) drie manieren:

1. met behulp van z -waarden
2. met behulp van grafieken op een blad normaal-waarschijnlijkheidspapier
3. op (een) andere, zelf te bedenken manier(-en)

Testen

Opgave 16

Hierin zie je een tabel met kniehoogtes in cm van 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

- a Bereken de gemiddelde kniehoogte en de standaarddeviatie.
- b Teken op normaal-waarschijnlijkheidspapier de bijbehorende cumulatieve relatieve frequentieverdeling.
- c Ga na, dat de gemiddelde kniehoogte en de standaardafwijking die je uit de figuur kunt aflezen overeen komen met de berekende waarden.
- d Zijn de kniehoogtes bij benadering normaal verdeeld?
- e 60% van de kniehoogtes zit tussen $\mu - a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a ? Lees je antwoord uit de figuur af.
- f Welke minimale lengte hebben de 15% grootste kniehoogtes? Lees je antwoord uit de figuur af.

Statistisch onderzoek 1947			
De Bijenkorf - Amsterdam			
5001 vrouwen met leeftijd > 18 jr.			
mouw- lengte	frequentie	knie- hoogte	frequentie
49	3	34	1
50	11	35	3
51	22	36	19
52	53	37	34
53	89	38	76
54	163	39	178
55	250	40	313
56	405	41	495
57	519	42	632
58	660	43	738
59	578	44	675
60	653	45	665
61	560	46	466
62	421	47	343
63	260	48	195
64	159	49	88
65	106	50	45
66	52	51	18
67	18	52	12
68	15	53	2
69	3	54	3
70	0		5001
71	1		
	5001		

Figuur 5.10

Opgave 17

Literpakken melk worden machinaal gevuld. Een oude vulmachine geeft een inhoud die normaal is verdeeld met een gemiddelde van 1,010 liter en een standaardafwijking van 0,006 liter. De nieuwe vulmachine staat ingesteld op het gieten van gemiddeld 1,005 liter melk in zo'n pak met een standaardafwijking van 0,002 liter. Ook dit vulvolume is normaal verdeeld.

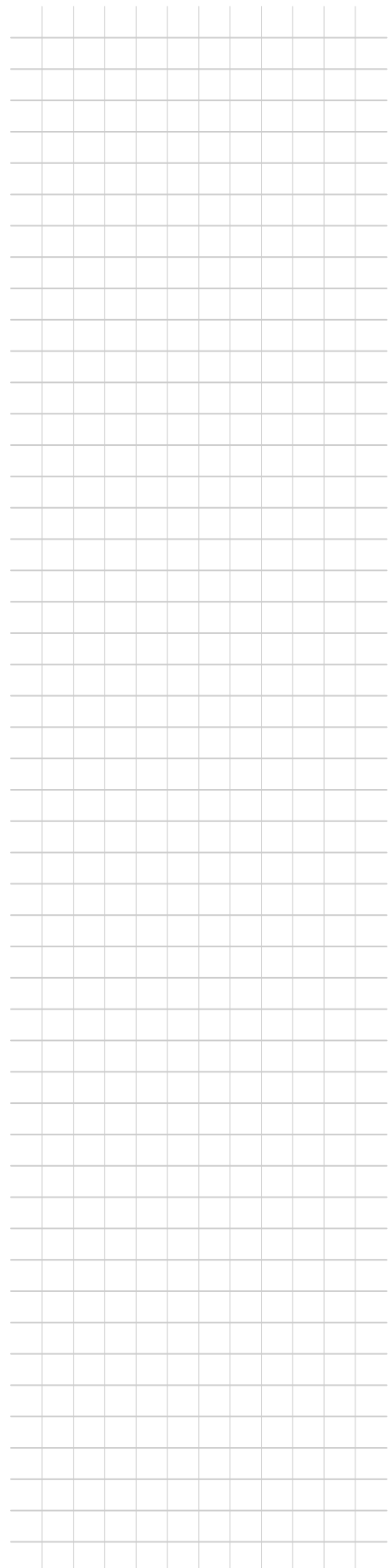
Een literpak met een inhoud van minder dan 1 L bevat te weinig melk.

- a Welk van beide machines geeft de minste literpakken die te weinig melk bevatten?
- b Laat met behulp van z -waarden zien, welke van beide vulmachines te vaak pakken met te weinig melk geeft.

Practicum

Hier vind je een **leeg blad normaal-waarschijnlijkheidspapier** in drie kleuren.

- **normaal waarschijnlijkheidspapier (paars)**
- **normaal waarschijnlijkheidspapier (oranje)**
- **normaal waarschijnlijkheidspapier (grijs)**



2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Kansmodellen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- continue kansvariabele — normale verdeling, normaalkromme — vuistregels
- kansen bij een normaal verdeelde variabele berekenen
- toevalsvariabelen optellen en aftrekken
- de wortel-n-wet voor een steekproef uit een normale verdeling
- normaal-waarschijnlijkheidspapier — standaardnormale kansvariabele, z -waarde

Activiteitenlijst

- een normale verdeling herkennen — eigenschappen van de normaalkromme
- kansen berekenen bij een normale toevalsvariabele — grenswaarden berekenen bij gegeven normale kansen — μ of σ berekenen bij een normaal verdeelde variabele
- μ en σ berekenen bij de som of het verschil van twee kansvariabelen
- de wortel-n-wet toepassen
- met behulp van normaal-waarschijnlijkheidspapier onderzoeken of een statistische variabele normaal verdeeld is — standaardiseren om normaalverdelingen te vergelijken

Achtergronden

In 1718 publiceerde **Abraham de Moivre (1667–1754)** 'The Doctrine of Chance', een boek over kansrekening waarin de eerste definitie van statistische onafhankelijkheid verschijnt, naast de aanpak van allerlei problemen op het gebied van dobbelen en andere kansspelen.

Bij de bestudering van herhaalde trekkingen (met teruglegging) van een schijf uit een vaas met alleen zwarte en witte schijven waarbij de kans op een zwarte en een witte schijf even groot is, ontdekte De Moivre dat een bijpassende kansverdeling een histogram heeft dat netjes klokvormig is. Later werd dit probleem gesimuleerd met het **bord van Galton** waarin balletjes naar beneden vallen op een aantal rijen met pinnen.

De Moivre bestudeerde ook sterftetabellen en werkte aan de theorie van de wiskunde rond levensverzekeringen.

In 1733 leidt hij een formule voor de normaalverdeling af.

De Duitse wiskundige **Carl Friedrich Gauss (1777–1854)** toonde aan dat de verdeling van meetfouten de normaalverdeling was



Figuur 6.1 Abraham de Moivre

en de bijbehorende verdelingskromme heet naar hem dan ook de gausskromme. In 1812 publiceerde de Franse wiskundige **Pierre-Simon Laplace (1749–1827)** over deze onderwerpen het boek 'Théorie analytique des probabilités', wat tientallen jaren lang als standaardwerk over waarschijnlijkheidsrekening was.

Testen

Opgave 1

Bloeddruk wordt gemeten in mm Hg (spreek uit: millimeter kwik). Bij een groep van duizend mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

- a Hoeveel van de mannen hebben naar schatting een bloeddruk van minder dan 141 mm Hg?
- b Hoeveel mannen hebben naar schatting een bloeddruk die meer dan twee keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?
- c Maak op basis van de normaalkromme een schatting van het percentage mannen dat een bloeddruk heeft van meer dan 150 mm Hg en vergelijk dat met het daadwerkelijke percentage mannen met een dergelijke bloeddruk.

Opgave 2

In een fabriek worden sokken machinaal vervaardigd. De gemiddelde lengte van een sok blijkt 47 centimeter te zijn. De lengte van de sokken is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 0,2 centimeter. De sokken worden in paren verkocht. In de fabriek worden paren gevormd door willekeurig twee sokken bij elkaar te stoppen.

- a Als één sok een lengte heeft van 46,5 centimeter, hoe groot is dan de kans dat het lengteverschil met de andere sok van het paar meer dan 0,7 centimeter is?
- b Wat is de kans dat als de eerste sok een lengte heeft van 49,5 centimeter, het lengteverschil met de andere sok van het paar meer dan 0,7 centimeter is? Waarom is deze kans niet gelijk aan de kans uit a?
- c Wat kun je zeggen over de lengte van de 5% kortste sokken? Rond af op één decimaal.

De fabrikant vindt dat te veel sokken een lengte hebben die je bij c hebt berekend. Hij past daarom de standaardafwijking aan zodat nog maar 4% van de sokken korter is dan die lengte, in plaats van 5%. Het gemiddelde blijft gelijk.

- d Bereken de nieuwe standaardafwijking. Rond af op twee decimalen.
- e Wat gebeurt er met de normaalkromme van de soklengte als de standaardafwijking van 0,2 wijzigt in de standaardafwijking die je bij d hebt berekend?

Opgave 3

In een fabriek verpakt een machine in kleine zakjes poedermelk voor in de koffie. Elk van die zakjes hoort 3 gram melkpoeder te bevatten. De fabrikant heeft zijn machine zo afgesteld dat het vulgewicht van deze zakjes normaal is verdeeld met een gemiddelde van 3,1 gram en een standaardafwijking van 0,06 gram.

- a** Hoeveel procent van de zakjes melkpoeder die deze machine produceert, is te licht?

De fabrikant voldoet hiermee niet aan de richtlijnen van de Europese Unie. Die schrijven voor dat niet meer dan 1% van de zakjes poedermelk minder dan 3 gram mag bevatten.

- b** De fabrikant besluit om iets meer melkpoeder in de zakjes te doen. Op welk gemiddelde vulgewicht moet hij de machine instellen om aan de richtlijn van de EU te voldoen? Ga ervan uit dat de standaardafwijking van de verdeling van de vulgewichten hetzelfde blijft.

- c** Je koopt een doosje met daarin twintig zakjes van het melkpoeder dat nog het oorspronkelijke gemiddelde van 3,1 gram heeft.

Hoeveel gram melkpoeder verwacht je gemiddeld per zakje in het doosje met twintig zakjes? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

- d** Hoe groot is de kans dat je in totaal minder dan $20 \cdot 3 = 60$ gram melkpoeder hebt gekocht?

Licht je antwoord toe met behulp van je kennis over de normaal-kromme.

Opgave 4

In een bedrijf wordt onder andere margarine geproduceerd. Het eindproduct wordt via een vulmachine in kuipjes gegoten, die volgens het opschrift een inhoud hebben van 500 gram. De gewichten van de gevulde kuipjes blijken normaal verdeeld te zijn. De standaardafwijking is ongeacht het vulgewicht waarop de vulmachine ingesteld staat steeds 4 gram. Het gemiddelde gewicht van zo'n kuipje is gelijk aan het vulgewicht waarop de machine is ingesteld.

De kuipjes worden verpakt in kartonnen dozen waarvan het gewicht normaal verdeeld is. Het gemiddelde gewicht van zo'n doos is 400 gram met een standaardafwijking van 15 gram. In één doos gaan twintig kuipjes.

- a** Het gewicht van de volle dozen is ook weer normaal verdeeld. Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het gewicht van een volle doos margarinekuipjes.

De keuringsdienst van waren gaat regelmatig na of de fabriek wel voldoende margarine in de kuipjes doet. Daartoe neemt de dienst één volgepakte doos uit de dagproductie en weegt die. Als het totale gewicht meer dan 50 gram naar beneden afwijkt van het gemiddelde, krijgt de fabrikant een boete.

- b** Hoe groot is de kans op een boete als de fabrikant het vulgewicht van 500 gram aanhoudt?

Natuurlijk zou de keuringsdienst van waren ook de twintig kuipjes zonder de bijbehorende doos kunnen wegen. Ook nu wordt een boete gegeven als 50 gram minder dan het gemiddelde gemeten zou worden.

- c Waarom is deze controle eerlijker dan de eerste?

Na verloop van tijd veranderen de eisen die de keuringsdienst van waren stelt. In het vervolg zullen honderd kuipjes op hun gewicht worden gecontroleerd. Daarbij mag er maximaal één zijn die minder dan 495 gram weegt.

- d Hoe groot is nu de kans op een boete, aangenomen dat de fabrikant de machine nog steeds op 500 gram heeft ingesteld?

Opgave 5

Een schroefas van een schip verbindt de motor met de schroef. Deze as wordt op een of meer plaatsen ondersteund door een lager. Dit lager is een bronzen bus waarvan de binnendiameter zo goed mogelijk passend wordt gemaakt om de diameter van de as en waarin zich goed geoliede kogels bevinden die het draaien van de as mogelijk maken.

Er wordt gestreefd naar een binnendiameter van 15,0 millimeter van de bussen (en dus de lagers) en naar een diameter van 14,9 millimeter voor de assen. Na fabricage zijn zowel de binnendiameter van de lagers als de diameters van de assen normaal verdeeld:

- Voor de assen geldt: $\mu = 14,9$ mm en $\sigma = 0,1$ mm.
- Voor de lagers geldt: $\mu = 15,0$ mm en $\sigma = 0,1$ mm.

Assen met een diameter groter dan 15,1 millimeter en lagers met een binnendiameter kleiner dan 14,8 millimeter worden na een test afgekeurd.

- a Hoeveel procent van de assen en hoeveel procent van de lagers zal worden afgekeurd na een test?
- b Bereken de diameter waarvoor geldt: de kans op een as met die diameter is gelijk aan de kans op een lager met die binnendiameter.

Uit een grote hoeveelheid, die evenveel assen als lagers bevat, neem je willekeurig een as en een lager.

- c Hoe groot is de kans dat de lager niet om de as past?

Opgave 6

De scores van een IQ-test in Nederland zijn bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 100.

15,8% van de mensen heeft een IQ van 85 of lager.

- a Bereken de standaardafwijking bij deze IQ-test.

Als je een IQ hebt dat hoger is dan 130, dan word je hoogbegaafd genoemd.

- b Bereken de z -waarde die hoort bij een IQ van 130.

Rond af op drie decimalen.



Figuur 6.2

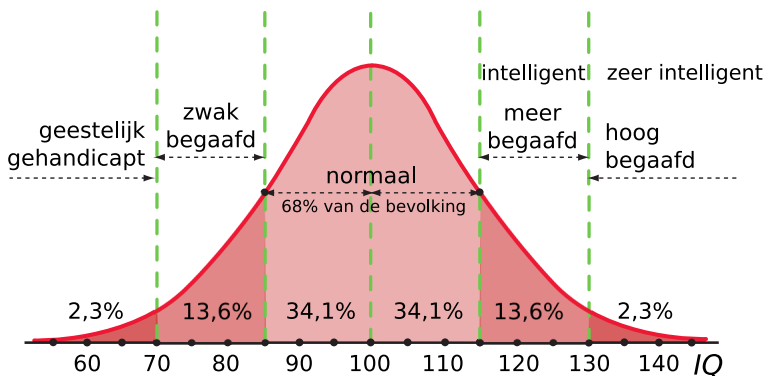
- c In een ander land zijn de IQ-scores ook normaal verdeeld en de z-waarde die hoort bij hoogbegaafdheidsgrens is daar gelijk aan 1,923.

Welke uitspraak kun je nu doen over het verschil tussen beide landen?

Toepassen

Opgave 7: Intelligentiequotiënt

In het begin van de vorige eeuw werd er veel waarde gehecht aan het zogenaamde **intelligentiequotiënt (IQ)** van met name kinderen. In 1904 werd de psycholoog **Alfred Binet (1857–1911)** door de Franse overheid gevraagd een test te ontwerpen om 'slimme' van 'domme' kinderen te onderscheiden.



Figuur 6.3

Binet ontwierp een intelligentietest waarmee hij de intelligentieleeftijd van een kind vaststelde. Wanneer de intelligentieleeftijd wordt gedeeld door de werkelijke leeftijd (en met 100 vermenigvuldigd) dan krijg je het IQ. Dit IQ is normaal verdeeld met een gemiddelde dat op 100 is gesteld. Zo is de Stanford-Binet intelligentieschaal ontwikkeld. Bekijk de normale verdeling van de IQ's zoals Binet die aantrof.

- Welk gemiddelde en welke standaardafwijking heeft het IQ volgens de Stanford-Binet-schaal?
- Is het IQ afhankelijk van je leeftijd?
- Hoeveel procent van de mensen heeft een minder dan normale intelligentie?
- Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van boven de 140?
- Welk IQ heeft de meest intelligente 10% van de bevolking volgens de Stanford-Binet-schaal?

Opgave 8: Zwangerschap

De zwangerschapsduur bij mensen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 266 dagen en een standaarddeviatie van 16 dagen.

- Bij een premature geboorte wordt het kind minstens drie weken voor het gemiddelde geboren. Hoe groot is de kans daar op?
- In 7% van de gevallen duurt een zwangerschap zo lang dat de geboorte moet worden ingeleid. Vanaf welke zwangerschapsduur gebeurt dit dus?

- c In 1973 beweerde een vrouw dat ze 310 dagen zwanger was geweest omdat op de dag van de bevalling haar man al 310 dagen als marinier van huis was. Hoe groot is de kans op een zwangerschap van minstens 310 dagen?

Examen

Opgave 9: Cakemeel

In een fabriek worden pakken met cakemeel gevuld. Op zo'n pak wordt vermeld: 'Inhoud 500 gram'. Veronderstel dat de inhoud per pak normaal verdeeld is met een gemiddelde van 500 g en met een standaarddeviatie van 4 g.

- a Bereken in één decimaal het percentage pakken dat minder dan 495 g cakemeel bevat.

Volgens de fabrikant betekent de vermelding 'Inhoud 500 gram' dat slechts 25% van de pakken minder dan 500 g inhoud heeft. Als een pak een inhoud van minder dan 500 g heeft, spreekt hij van ondergewicht. Veronderstel bij de volgende drie vragen dat de fabrikant gelijk heeft en dat de standaarddeviatie van de normaal verdeelde inhoud 4 g bedraagt.

- b Bereken in één decimaal de gemiddelde inhoud per pak.

In een rek van een kruidenierswinkel staan 20 pakken cakemeel afkomstig van bovengenoemde fabriek. Daarvan hebben er 5 een ondergewicht. Een klant neemt aselekt 3 pakken uit het rek.

- c Bereken in twee decimalen de kans dat geen van deze 3 pakken een ondergewicht heeft.
- d Een banketbakker koopt 16 pakken rechtstreeks van de fabriek. Bereken in drie decimalen de kans dat hij minder dan 8000 g cakemeel heeft gekocht.

(bron: examen wiskunde A vwo 1986, eerste tijdvak)

Opgave 10: Zeepoeder

Een grootwinkelbedrijf heeft in zijn assortiment een eigen merk zeepoeder. Het bedrijf beschikt over een vulmachine met een vulcapaciteit van 7536 kg per dag. Van de door de machine gevulde pakken is het gewicht normaal verdeeld, met een standaardafwijking van 40 g ongeacht de inhoud. De keuringsdienst van waren eist dat, op één decimaal, slechts 4,0% van de in de handel gebrachte pakken minder mag bevatten dan op de pakken vermeld staat. Het bedrijf brengt zeepoeder op de markt in kleine pakken, waarop vermeld staat dat zij 1 kg zeepoeder bevatten.

De vulmachine is ingesteld op 1070 g per pak.

- a Onderzoek of aan de eis van de keuringsdienst van waren wordt voldaan.
- De bedrijfsleiding overweegt om naast de kleine pakken met opschrift 1 kg ook gezinspakken met opschrift 2,5 kg op de markt te brengen.
- b Op hoeveel gram per pak moet de vulmachine ingesteld worden voor de gezinspakken om aan de eis van de keuringsdienst van waren te voldoen?

- c Neem aan dat het aantal geproduceerde kleine pakken twee maal zo groot is als het aantal gezinspakken. Hoeveel gezinspakken kunnen er dan maximaal per dag worden geproduceerd?

(bron: examen wiskunde A vwo 1984, eerste tijdvak)

Opgave 11: Bewaking

Een zekere bank wordt 's nachts intensief bewaakt. Meerdere malen per nacht doet één van de bewakers een ronde door het gebouw. Op zo'n ronde moet hij zich op vijftien plaatsen melden door een speciale code in te toetsen in een meldkastje. De computer in de controlekamer registreert de tijdstippen waarop dit gebeurt. Ook schrijft de procedure voor dat de tijdstippen van vertrek en terugkomst worden geregistreerd. De kastjes zijn zodanig op de route geplaatst dat de zestien loopafstanden vrijwel even lang zijn. Uit overzichten over langere tijd blijkt dat, in het geval dat er niets bijzonders valt op te merken, de lengte van de tijdsintervallen tussen twee opeenvolgende meldingen van de bewaker vrijwel normaal verdeeld is met een gemiddelde van 3,6 minuten en een standaarddeviatie van 0,7 minuten. In het geval dat een melding langer dan vijf minuten uitblijft, wordt een bewaker in de controlekamer automatisch gewaarschuwd dat er mogelijk iets aan de hand is. De bewaker heeft zich zojuist gemeld bij het vijfde kastje.

- a Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de volgende melding langer dan 5,0 minuten uitblijft.
- b Veronderstel dat de lengtes van de 16 tijdsintervallen bij een ronde door het gebouw onder normale omstandigheden onafhankelijk van elkaar zijn. Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de totale tijd van een ronde door het gebouw langer is dan 60,0 minuten.

Tijdens zo'n ronde kijkt de bewaker wel enige keren in de gang naar de kluis, maar hij gaat er niet in. In de gang naar de kluis is namelijk een alarminstallatie aangebracht die in directe verbinding staat met de meldkamer op het hoofdbureau van de politie. In het plafond zijn (onzichtbaar) vijf roterende sensoren aangebracht. 's Nachts gaat het alarm automatisch af zodra minstens één van deze sensoren geactiveerd wordt. De sensoren werken geheel onafhankelijk van elkaar. Voor elke sensor afzonderlijk geldt dat de kans op alarm (de detectiekans) in het geval dat iemand 's nachts de sensor passeert, gelijk is aan 0,45.

- c Toon met een berekening aan dat de kans dat het alarm bij de politie afgaat als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, ongeveer gelijk is aan 95%.

De directie vindt deze kans te klein. Zij wil de sensorinstallatie zo laten verbeteren dat de kans op alarm als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, groter is dan 99,5%. Volgens de chef van de beveiliging kan dit op twee manieren bereikt worden:

- Het aantal sensoren met een detectiekans van 0,45 wordt uitgebreid; per bij te plaatsen sensor kost dit € 8000,00.
- Een aantal van de aanwezige sensoren wordt omgeruild tegen een nieuw type met een detectiekans van 0,80; per in te ruilen sensor kost dit € 9000,00.

- d** Bereken hoeveel men minimaal moet uitgeven om de sensorinstallatie zodanig te verbeteren dat aan de wens van de directie wordt voldaan.

(bron: examen wiskunde A vwo 1991, tweede tijdvak)

Opgave 12: Lengte van vrouwen

In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceert. Deze fabriek nam alleen personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm. De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen omdat ze niet aan deze eis voldeden. De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van deze aanstellingsvoorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van volksgezondheid. Neem aan dat de lengte van de Amerikaanse vrouwen in de betreffende leeftijdsgroep normaal verdeeld is met een gemiddelde μ en standaarddeviatie σ .

- a** Stel, uitgaande van het genoemde percentage, een verband op tussen μ en σ .

Neem aan dat $\mu = 160,4$ cm.

- b** Toon aan dat $\sigma \approx 7,2$ cm.

Stel je voor dat de groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 cm V wordt genoemd. Voor de mediaan (m) van de lengte van de vrouwen van V geldt dat 50% van de vrouwen uit V langer is dan m .

- c** Toon aan dat $m \approx 172,6$, uitgaande van $\mu = 160,4$ cm en $\sigma = 7,2$ cm.

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91% sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte van volwassenen was volgens hem in de periode 1948-1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselekt gekozen groep van 10.000 vrouwen in de leeftijd 18 tot 65 jaar werden 1243 vrouwen aangetroffen met een lengte van meer dan 172,6 cm.

- d** Als je aanneemt dat de standaardafwijking niet is veranderd, wat is dan de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens dit recente onderzoek?

b

bovengrens 93

d

directe formule 8

discreet dynamisch model 38

k

kansvariabelen, som van 77

kansvariabelen, verschil van
77

kansverdeling 55

l

lineaire differentievergelijking
38

m

meetkundige rij 29, 30

n

normaalkromme 56

normaal-waarschijnlijkheidspapier 93

normale kansvariabele 65

normale statistische variabele
65

normale verdeling 65

o

onafhankelijk 77

r

recursieformule 8

reden 30

rekenkundige rij 23, 24

rij 8

s

somrij 17

somrij van een meetkundige rij
31

somrij van een rekenkundige
rij 24

standaard normaalkromme
94

standaardiseren 93

t

termen van de rij 8

v

verdeling, normale 55

verschilrij 17

verschilrij van een meetkundige rij 31

verschilrij van een rekenkundige rij 24

w

wortel-n-wet 84

z

z waarde 94

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

9. Rijen

10. Kansmodellen



www.math4all.nl

