Wiskunde D

5 HAVO

Katern 2

ConTeXt College

© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaart geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaarden ze geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie http://creativecommons.org/licenses/by/3.0).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

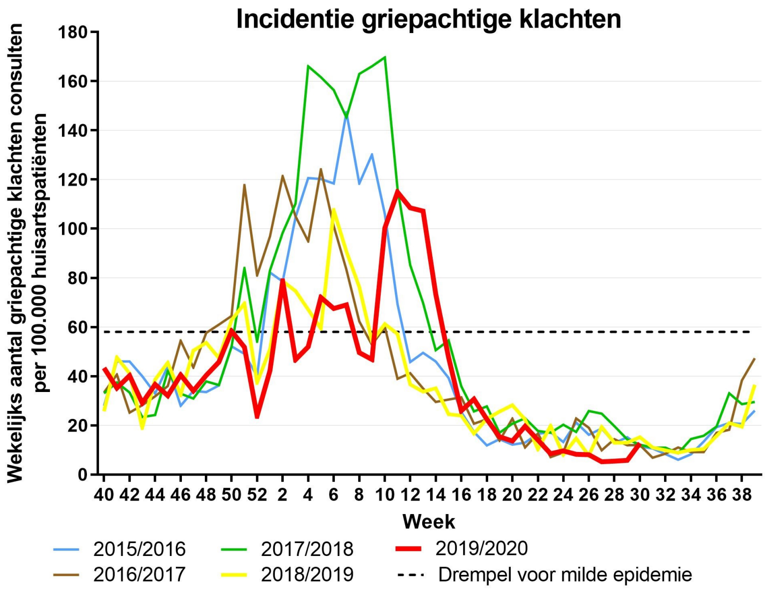
Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Verschillen en verbanden

1.1 Het begrip toets

Inleiding



Figuur 1.1 **bron: RIVM**

Vaak worden uitspraken over de hele bevolking gedaan op basis van een steekproef. Dat brengt natuurlijk risico's met zich mee. Immers ook als (bijvoorbeeld) in werkelijkheid 15% van de bevolking het afgelopen jaar griep heeft gehad, kan in een steekproef door toevallige omstandigheden dit percentage wel eens anders liggen. Hoe kun je zo een steekproef gebruiken om te schatten hoeveel grieppatiënten er zijn geweest?

Je leert in dit onderwerp

- het begrip hypothese toetsen;
- de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese en beslissingsvoorschrift.

Voorkennis

- werken met binomiale en normale kansverdelingen.

Verkennen

Opgave V1

Uit onderzoek blijkt dat in een bepaalde week 3,9% van de Nederlandse bevolking griep heeft gehad.
In een klas van 25 leerlingen hebben diezelfde week 4 leerlingen de griep gehad, dat is maar liefst 16%.

a Hoe groot is de kans daarop als die 3,9% inderdaad voor de hele Nederlandse bevolking geldt?

b Hoeveel grieppatiënten verwacht je in deze klas als die 3,9% inderdaad geldt?

c Kun je nu zonder meer zeggen dat de 3,9% niet klopt als je meer dan het verwachte aantal grieppatiënten in de klas aantreft?

d Bij welk aantal grieplijders in deze klas heb je minder dan 5% kans dat je het percentage van 3,9% grieppatiënten ten onrechte verwerpt?

Uitleg

Het is algemeen bekend dat ongeveer 50% van de pasgeborenen een meisje is. Maar een gynaecoloog die een eigen telling van het geslacht van geboren kinderen bijhoudt, kan de indruk krijgen dat het percentage meisjes hoger is dan 50%. Bijvoorbeeld omdat er bij de laatste 80 bevallingen 48 meisjes geboren zijn. Dit kun je als volgt onderzoeken.

- Je kiest een variabele om te onderzoeken, in dit geval het aantal meisjes.
- De bekende bewering is: het deel meisjes is 50%. Dit heet de 'nulhypothese' H_0.
- Een alternatieve bewering is: het deel meisjes is groter dan 50%. Dit is de 'alternatieve hypothese' H_1.
- Je stelt vast hoeveel bevallingen je gaat onderzoeken, bijvoorbeeld 100.
- Je besluit bij welk aantal meisjes uit deze 100 bevallingen de nulhypothese niet meer wordt geaccepteerd, bijvoorbeeld bij 55 of meer. Dit heet het 'beslissingsvoorschrift'. De mogelijke waarden 55 tot en met 100 vormen samen het 'kritieke gebied'.
- Je voert het onderzoek uit en telt het aantal meisjes, bijvoorbeeld 57.
- De waarde 57 ligt in het kritieke gebied. De conclusie die uit dit onderzoek wordt getrokken, is dan: de nulhypothese is niet juist, want het deel meisjes is groter dan 50%.

Figuur 1.2

Zelfs als het onderzoek goed wordt uitgevoerd, kan het gebeuren dat je een foute conclusie trekt. Daarom is het belangrijk dat je met de volgende zaken rekening houdt.

- De steekproefomvang (hier 100) moet groot genoeg zijn.
- Vóórdat de resultaten van het onderzoek bekend zijn, moet je vaststellen wanneer de nulhypothese niet meer wordt geaccepteerd.
- Er moet een willekeurig gekozen groep worden onderzocht.

En zelfs dan kan er nog een foute conclusie worden getrokken. Als de nulhypothese verworpen wordt op grond van de toets, terwijl deze eigenlijk wel waar is, heet dat een 'fout van de eerste soort'.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**. Welke conclusie trek je als er 54 meisjes worden geboren in de onderzoeksgroep (in plaats van 57)?

Opgave 2

Zelfs als het onderzoek goed wordt uitgevoerd, kan het gebeuren dat je een foute conclusie trekt.

a Waarom kan er een foute conclusie worden getrokken?

b Waarom wordt de kans op het trekken van een foute conclusie kleiner, als de steekproefomvang groter wordt gemaakt?

c 'Vóórdat de resultaten van het onderzoek bekend zijn, moet worden besloten wanneer de nulhypothese niet meer wordt geaccepteerd.'
Waarom moet dat?

d Waarom mag het onderzoek niet worden uitgevoerd met de 80 waarnemingen van de gynaecoloog?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Statistische methoden kunnen worden gebruikt om een bewering over een populatie te controleren. Dit heet **een hypothese toetsen**.

De **nulhypothese** H_0 is de gangbare bewering (bijvoorbeeld op grond van voorgaand onderzoek).

De **alternatieve hypothese** H_1 is een bewering die de nulhypothese bestrijdt.

Om een hypothese te toetsen moet je:

- een variabele kiezen;
- de nulhypothese vaststellen;
- de alternatieve hypothese vaststellen;
- het **beslissingsvoorschrift** vaststellen (beslissen wanneer welke hypothese wordt geaccepteerd of verworpen);
- een, uiteraard willekeurige, steekproef nemen van voldoende omvang;
- de steekproef analyseren en vergelijken met het beslissingsvoorschrift;
- de conclusie trekken.

In het beslissingsvoorschrift wordt afgesproken bij welke uitkomsten van de steekproef de nulhypothese wordt aangenomen of verworpen. De uitkomsten waarbij de nulhypothese wordt verworpen heet het **kritieke gebied**.

Als de nulhypothese verworpen wordt op grond van de toets, terwijl deze eigenlijk wel waar is, heet dat een **fout van de eerste soort**.

Voorbeeld 1

Een computerprogramma moet volkomen willekeurig de getallen 0 en 1 genereren. Het aantal gegenereerde nullen en enen zou dan even groot zijn.

Het vermoeden bestaat dat het programma niet zuiver is en vaker een 0 genereert dan een 1.
Beschrijf een hypothesetoets om dit te controleren.

Antwoord

X is het aantal nullen in de steekproef. p is het deel van de gegenereerde getallen dat 0 is. Het soort kansverdeling is niet genoemd.

$\text{H}_0 : p = 0{,}5$

$\text{H}_1 : p > 0{,}5$

De steekproefgrootte n is (bijvoorbeeld) 50.

Het kritieke gebied is (bijvoorbeeld) $X \geq 35$.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Hoe wordt de uitwerking wanneer het vermoeden zou zijn: het programma genereert vaker een 1 dan een 0?

b Veronderstel dat het programma toch goed werkt, dus dat de kans op elke nul $0{,}5$ is. De verdeling van het aantal nullen is dan binomiaal. Hoe groot is de kans dat er dan precies 35 nullen voorkomen bij $n = 50$?

c Veronderstel dat het programma toch goed werkt, dus dat de kans op elke nul $0{,}5$ is. De verdeling van het aantal nullen is dan binomiaal. Hoe groot is de kans dat er dan 35 of meer nullen voorkomen?

d Hoe groot is dus de kans op een fout van de eerste soort?

Voorbeeld 2

De inhoud van een fles cola is ongeveer $1{,}5$ L.
Omdat de fabrikant volgens de Europese richtlijnen niet te veel klanten mag teleurstellen, moet hij zijn flessen vullen met voldoende cola. De Europese richtlijn schrijft voor: het volume V van de cola moet gemiddeld 1530 mL zijn. De standaardafwijking van V moet maximaal 18 mL zijn.

Beschrijf hoe je de inhoud van zo'n colafles toetst met een steekproefgrootte van 1.

Figuur 1.3

Antwoord

V is het volume van de cola in mL. De verdeling is niet bekend.
De standaardafwijking σ_V is 18 mL.

$\text{H}_0 : V = 1530$ mL.

$\text{H}_1 : V < 1530$ mL.

De steekproefgrootte: $n = 1$.

Het kritieke gebied is (bijvoorbeeld) $V < 1512$ mL.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Hoe ziet de hypothesetoets er uit voor een literfles met een vereiste inhoud van 1020 mL en een standaardafwijking van 12 mL?

b Veronderstel dat de hoeveelheid cola normaal verdeeld is. Waarom maakt het nu niet uit of het $<$-teken of het $\leq$-teken wordt gebruikt?

c Veronderstel dat de fabrikant de flessen volgens de Europese richtlijnen vult en dat de hoeveelheid cola per fles normaal verdeeld is. Hoe groot is dan de kans dat de nulhypothese toch wordt verworpen als het kritieke gebied $V < 1008$ mL is?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2** nog eens.

a Waarom is een steekproef van 1 fles cola eigenlijk onzinnig?

Neem aan dat de inhoud van de colaflessen normaal is verdeeld en dat je een steekproef van 100 flessen doet. Je kijkt dan naar de gemiddelde inhoud van die flessen.

b Hoe moet je de hypothesetoets aanpassen?

c Hoe groot is nu de kans dat de nulhypothese toch wordt verworpen als het kritieke gebied $\overline{V} < 1512$ mL is?

Verwerken

Opgave 6

Er wordt onderzocht of een inpakmachine voor rollen koekjes goed is afgesteld. Er zouden 20 koekjes in een rol moeten gaan.
Beschrijf de variabele, nulhypothese en alternatieve hypothese van de toets.

Opgave 7

De lengte van vrouwen is bij benadering normaal verdeeld. In 1999 was de gemiddelde lengte van de vrouwen in Nederland 167 cm. De standaardafwijking van de lengte was $6{,}5$ cm. Het is niet ondenkbaar dat de lengte van de Nederlandse vrouw sinds die tijd groter is geworden. Een onderzoeksbureau onderzoekt dit door middel van een aselecte steekproef van 100 vrouwen in Nederland. Vooraf stellen de onderzoekers dat ze zullen concluderen dat de Nederlandse vrouw langer is geworden, als de gemiddelde lengte in die steekproef 169 cm of meer is.

a Noteer de variabele, nulhypothese, alternatieve hypothese, standaardafwijking, steekproefomvang en het kritieke gebied.

b Als de lengte van vrouwen niet is toegenomen sinds 1999, hoe groot is dan de kans dat een vrouw langer is dan 169 cm?

c Waarom is het dus zinloos om in dit geval een steekproef van 1 persoon te nemen?

Opgave 8

Een leraar denkt uit jarenlange ervaring te weten dat $\frac{6}{10}$ deel van de leerlingen zich aan zijn planning houdt. Zijn nieuwe collega vermoedt dat dit deel hoger is. Ze besluiten het te onderzoeken met een hypothesetoets. Ze hebben samen 80 leerlingen. Ze spreken een grens af van 54: bij 54 of meer leerlingen die ‘bij’ zijn krijgt de nieuwe collega gelijk.

a Noteer de variabele(n), de nulhypothese, de alternatieve hypothese en het kritieke gebied.

b Neem aan dat de kans dat een leerling ‘bij’ is, $\frac{6}{10}$ is. Hoe groot is dan de kans dat de ervaren collega gelijk krijgt?

c En hoe groot is dan de kans dat de ervaren collega geen gelijk krijgt, ook al is de kans dat een leerling ‘bij’ is $0{,}6$?

Opgave 9

Een fabrikant van verf stelt dat hun witte verf een oppervlakte dekt van 15 m^2 per liter. Omdat dit een goede dekking is, besluit een schildersbedrijf met deze verf te gaan werken. Na een tijdje gelooft het management van het schildersbedrijf echter dat de voorgestelde dekking van 15 m^2 per liter te hoog is. Er lijkt namelijk meer verf nodig te zijn dan berekend: de ingekochte emmers zijn sneller op dan verwacht.

Het besluit is om de dekking van de verf te toetsen. Het besluit wordt: bij een dekking van minder dan $13{,}5$ m^2 per liter is deze inderdaad niet goed genoeg, en wordt een andere verfsoort gebruikt.

a Noteer de variabele(n), de nulhypothese, de alternatieve hypothese en het kritieke gebied.

b Het management lijkt voorzichtig met hun keuze. Noem redenen waarom ze niet direct over zouden overstappen op nieuwe verf.

Opgave 10

Bij het uitvoeren van statistische hypothesetoetsen kan de conclusie fout zijn, zelfs als het onderzoek helemaal goed wordt uitgevoerd. Welke twee foute conclusies kunnen er worden getrokken?

Toepassen

Opgave 11: Suikerziekte

Een onderzoeker voert een hypothesetoets uit naar de toename van suikerziekte onder Nederlanders. De gegevens van het onderzoek zijn:

X is het aantal Nederlanders met suikerziekte in een steekproef.

p is het deel van de mensen uit de steekproef met suikerziekte.

$H_0 : p = \frac{1}{15}$ en $H_1 : p > \frac{1}{15}$.

De steekproefomvang is 1000.

De onderzoeker wil het heel zeker weten als het aantal Nederlanders met suikerziekte is gestegen. Hij wil dus de kans dat H_1 wordt aangenomen terwijl H_0 waar is, klein maken.

a Welk kritieke gebied moet hij kiezen om ervoor te zorgen dat deze kans kleiner is dan 10%?

b Welk kritieke gebied moet hij kiezen om ervoor te zorgen dat deze kans kleiner is dan 5%?

c Welk kritieke gebied moet hij kiezen om ervoor te zorgen dat deze kans kleiner is dan 1%?

Testen

Opgave 12

Iemand beweert dat 10% van het niet-brildragende deel van de Nederlandse bevolking contactlenzen draagt. Maar hij raakt na een paar keer vragen aan het twijfelen, wellicht is dat percentage toch hoger. Hij besluit om zijn mening te toetsen in een representatieve steekproef van 50 personen.

a Hoe luiden de nulhypothese en de alternatieve hypothese?

b Als hij bij 10 of meer personen in de steekproef met contactlenzen zijn oorspronkelijke mening verwerpt, hoe groot is dan de kans dat hij dit ten onrechte doet?

c Als hij bij 100 of meer personen met contactlenzen in een steekproef van 500 zijn oorspronkelijke mening verwerpt, hoe groot is dan de kans dat hij dit ten onrechte doet?

Opgave 13

Het vulgewicht van kilopakken suiker van merk A is volgens de fabrikant normaal verdeeld met een gemiddelde van 1002 gram en een standaardafwijking van 3 gram. In een restaurant worden 10 van die pakken suiker gekocht en de restauranthouder ontdekt dat in die 10 pakken gemiddeld maar 999 gram suiker zit.

a Mag de restauranthouder op grond van deze steekproef zonder meer aannemen dat de fabrikant zijn vulmachine moet bijstellen?

b Hoe groot is de kans dat de restauranthouder ten onrechte reclameert?

c De fabrikant controleert zijn vulmachine door 100 pakken te wegen. Hij vindt een gemiddelde gewicht van 1001 gram. Omdat dit aan de lage kant is besluit hij zijn vulmachine bij te stellen. Hoe groot is de kans dat hij dit terecht doet?

1.2 Binomiale toetsen

Inleiding

Meestal ga je er van uit dat bij het verwekken van kind de kans op een jongen even groot is als die op een meisje: de kans op een meisje is 50% is je nulhypothese. Als bij een zekere Nederlandse gemeente in een bepaald jaar 60% van de geboren kinderen een meisje is dan denk je niet meteen dat de kans op een meisje nu wel 60% moet zijn geworden, maar je vraagt je wel af of de kans op een meisje in Nederland soms meer dan 50% is geworden. Zo'n hypothese kun je heel goed toetsen bijvoorbeeld door te kijken naar de geboren kinderen van het volgende jaar. Maar wanneer zeg je nu dat de kans op een meisje niet langer 50% is?

Je leert in dit onderwerp

- hypothesen toetsen met behulp van de binomiale kansverdeling;
- het begrip significantieniveau;
- bij een gegeven significantieniveau een binomiale toets uitvoeren.

Voorkennis

- werken met binomiale kansverdelingen;
- de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese en kritiek gebied.

Verkennen

Opgave V1

In 2016 was in de Nederlandse gemeente A 60% van de geboren kinderen een meisje. Je vraagt je af of de kans op een meisje in Nederland soms meer dan 50% is geworden. Je neemt in 2017 een steekproef van 650 in dat jaar geborenen door heel Nederland en vraagt of het een jongen dan wel een meisje betreft.

a Wat is de nulhypothese en wat de alternatieve hypothese in dit geval?

b Stel je voor dat er in je steekproef 348 meisjes voorkomen. Hoe groot is nu de kans dat de nulhypothese ten onrechte wordt verworpen?

c Stel je eens voor dat je de kans dat de nulhypothese ten onrechte wordt verworpen maximaal 1% wilt hebben. Wat wordt dan het kritieke gebied van de toets?

Uitleg

Omdat het uitvoeren van een hypothesetoets afhangt van een steekproef, bestaat er een kans op een foute conclusie. De kans op de foute conclusie
'H_0 is juist, maar H_1 wordt geaccepteerd'
wordt het significantieniveau genoemd. Deze significantie mag niet te groot zijn. In de praktijk wordt voor deze kans vaak 10% of 5% gebruikt. Bij belangrijk of nauwkeurig onderzoek wordt meestal 1% gebruikt.

Als het significantieniveau (de foutkans) is gekozen, kun je daarmee het kritieke gebied berekenen. Bekijk de volgende toets:

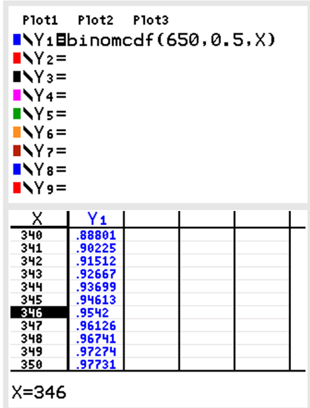
M is het aantal meisjes in een steekproef met steekproefomvang n en p is het deel van de steekproef dat meisje is.
$H_0 : p = 0{,}5$ en $H_1 : p > 0{,}5$.
Neem aan dat M binomiaal verdeeld is.
De steekproefomvang $n = 650$.
Het significantieniveau (de kans dat H_0 juist is, maar H_1 wordt geaccepteerd) mag maximaal 5% zijn.
Als H_0 juist is, geldt: $p = 0{,}5$. Voor de grens g van het kritieke gebied moet dus gelden:

$\text{P}(M > g | p = 0{,}5 \text{ en } n = 650) \leq 0{,}05$

Ofwel: $\text{P}(M \leq g | p = 0{,}5 \text{ en } n = 650) \leq 0{,}95$.

De grafische rekenmachine geeft $g = 346$.

Als er dus meer dan 346 meisjes in de steekproef worden geteld, mag je met een significantie van 5% besluiten dat het deel meisjes in de steekproef groter dan $0{,}5$ is.



Figuur 2.1

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**.

a Het significantieniveau van de toets is 5%. Leg uit wat dit significantieniveau precies betekent.

b Waarom werk je hier met de waarde van p (het deel meisjes) die bij H_0 hoort?

c Reken het kritieke gebied van deze toets na.

Opgave 2

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**.

a Voer deze toets nog eens uit, maar nu met een significantie van 1%. Geef in dit geval het kritieke gebied.

b Welke invloed heeft het verkleinen van de significantie op het kritieke gebied?

c Hoe verandert het kritieke gebied als de significantie lager wordt gemaakt? Wat is er aan de hand als de nulhypothese dan toch wordt verworpen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Veronderstel dat voor een binomiale stochast X de gangbare opvatting is dat $p = p_0$ het deel is van de elementen van een steekproef met een bepaalde eigenschap. Iemand bestrijdt deze opvatting en beweert dat $p > p_0$.

Hier wordt dus $\text{H}_0 : p = p_0$ tegen $\text{H}_1 : p > p_0$ getoetst.

Omdat X een binomiale stochast is, heet dit een **binomiale toets** van de **proportie** (= deel).

Bij statistisch onderzoek wordt vaak geëist, dat de kans op de fout 'H_0 wordt verworpen terwijl deze toch waar is' klein is. De waarde van deze foutkans heet het **significantieniveau** of de **onbetrouwbaarheidsdrempel**. Dit wordt aangegeven met de Griekse letter α. De waarde van de significantie moet vooraf worden afgesproken, bijvoorbeeld: $\alpha = 0{,}05$.

Met deze waarde van de significantie kun je het kritieke gebied bij steekproefomvang N berekenen:
$\text{P}(\text{H}_0 \text{ verwerpen} \mid \text{H}_0 \text{ is waar}) = \text{P}(X \geq g \mid p = p_0 \text{ en } n = N) \leq \alpha$
De berekende g is dan de grens van het kritieke gebied.

Er wordt onderscheid gemaakt tussen drie verschillende soorten toetsen. Deze hangen af van de alternatieve hypothese:

- als $\text{H}_1 : p > p_0$ spreek je van een **rechtszijdige toets**;
- als $\text{H}_1 : p < p_0$ spreek je van een **linkszijdige toets**;
- als $\text{H}_1 : p \neq p_0$ spreek je van een **tweezijdige toets**.

Bij de tweezijdige toets bestaat het kritieke gebied (meestal) uit twee delen. De onbetrouwbaarheidsdrempel α_0 verdeel je dan in twee gelijke delen voor elk deel van het kritieke gebied.

Voorbeeld 1

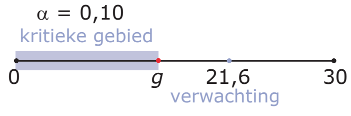
Voor een toets heeft tot nu toe 72% van de leerlingen een voldoende gescoord. Een klas van 30 leerlingen maakt de toets. Bij hoeveel voldoendes is het resultaat significant lager dan 72%, bij een significantieniveau van 10%?

Antwoord

'Vertaal' deze vraag naar een linkszijdige binomiale toets.

- Stochast X is het aantal van de 30 kandidaten dat een voldoende heeft en is binomiaal verdeeld.
- $\text{H}_0 : p = 0{,}72$
- $\text{H}_1 : p < 0{,}72$
- $n = 30$
- $\alpha = 0{,}1$

Er geldt: $\text{P}(X \leq g \mid p = 0{,}72 \text{ en } n = 30) \leq 0{,}1$
Dit levert op: $g = 17$ en dus wordt het kritieke gebied $X \leq 17$.



Figuur 2.2

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Reken na, dat het kritieke gebied gelijk is aan $X \leq 17$.

b Bepaal nogmaals het kritieke gebied, maar nu met een betrouwbaarheid van 95%.

Opgave 4

Je toetst $\text{H}_0 : p = 0{,}35$ tegen $\text{H}_1 : p > 0{,}35$ met een significantieniveau van 5%.

a Bepaal het kritieke gebied bij een steekproef met grootte 100.

b Doe hetzelfde bij een steekproef met grootte 1000.

c Welke invloed heeft de grootte van de steekproef op de grens van het kritieke gebied?

d Waarom neemt men niet altijd een zo groot mogelijke steekproef?

Voorbeeld 2

Om te bepalen of een dobbelsteen zuiver is, kun je bijvoorbeeld 50 keer met deze dobbelsteen werpen en het aantal keren 'zes ogen' tellen. Bij hoeveel keer 'zes ogen' mag je dan besluiten dat hij niet zuiver is? Neem een significantieniveau van 1%.

Antwoord

Je kunt deze vraag 'vertalen' naar een tweezijdige binomiale toets:

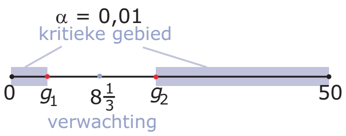
- X is het aantal keren 'zes' gegooid met een dobbelsteen, X is binomiaal verdeeld.
- (De verwachte waarde van X is $50 \cdot \frac{1}{6} = 8\frac{1}{3}$.)
- $\text{H}_0 : p = \frac{1}{6}$
- $\text{H}_1 : p \neq \frac{1}{6}$
- steekproefgrootte 50
- $\alpha = 0{,}01$

Nu moet $\text{P}\left(X \leq g_1 \text{ of } X > g_2 | p = \frac{1}{6} \text{ en } n = 50\right) \leq 0{,}01$.

Je bepaalt de twee grenzen daarom uit:

- $\text{P}\left(X \leq g_1 | p = \frac{1}{6} \text{ en } n = 50\right) \leq 0{,}005$
- $\text{P}\left(X \geq g_2 | p = \frac{1}{6} \text{ en } n = 50\right) \leq 0{,}005$

Hieruit volgt $g_1 = 1$ en $g_2 = 16$. De kritieke gebieden zijn dus $0 \leq X \leq 1$ en $16 \leq X \leq 50$.



Figuur 2.3

Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Waarom is deze toets tweezijdig?

b Hoe wordt de onbetrouwbaarheidsdrempel α hier verwerkt?

c Bereken het kritieke gebied bij een significantieniveau van 5%.

Opgave 6

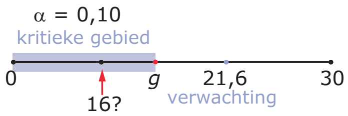
Bij een spel moet er met een achtvlaksdobbelsteen gegooid worden. Manon vermoedt dat deze dobbelsteen niet zuiver is. Ze gooit er 100 keer mee en telt hoe vaak ze acht ogen gooit. Bij hoeveel keer ‘acht ogen’ mag Manon besluiten dat de dobbelsteen niet zuiver is? Neem een significantieniveau van $2{,}5$%.

Voorbeeld 3

Gegeven is een toets die door 72% van de leerlingen voldoende werd gemaakt.
De toets is nog een keer gemaakt door een groep van 30 leerlingen. 16 leerlingen hebben de toets voldoende gemaakt. Is deze toets bij een significantie van 10% slechter gemaakt dan tot nu toe?

Antwoord

Bekijk de afbeelding.



Figuur 2.4

Voor de grens g van het kritieke gebied geldt:
de kans dat er g of minder leerlingen een voldoende hebben gehaald, is kleiner dan de significantie $0{,}1$. En er geldt: de kans dat er meer dan g leerlingen een voldoende hebben gehaald, is groter dan $0{,}1$.

Dus ook geldt: als 16 in het kritieke gebied ligt, ligt 16 links van g en is de kans op 16 of minder leerlingen met een voldoende kleiner dan $0{,}1$.

Door te controleren of geldt dat $\text{P}(X \leq 16) < 0{,}1$ is direct duidelijk of 16 in het kritieke gebied ligt. Je hoeft het kritieke gebied niet meer te bepalen. Deze kans wordt overschrijdingskans genoemd.

Hier geldt $\text{P}(X \leq 16 | p = 0{,}72 \text{ en } n = 30) = 0{,}0225$. Omdat dit kleiner is dan de significantie $(0{,}1)$, is de conclusie: deze toets is met een significantie van 10% slechter gemaakt dan tot nu toe.

Opmerking: bij een tweezijdige toets kan de proportie van de steekproef links of rechts van de proportie van de populatie liggen. In dat geval kies je de bijbehorende overschrijdingskans (links of rechts) en vergelijk je met $\frac{1}{2}\alpha$.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Waarom is het in dit geval niet nodig om het kritieke gebied vast te stellen?

b Wat betekent het als de overschrijdingskans kleiner is dan de onbetrouwbaarheidsdrempel?

c Wat betekent het als de overschrijdingskans groter is dan de onbetrouwbaarheidsdrempel?

Opgave 8

Je toetst $H_0 : p = 0{,}75$ tegen $H_1 : p \neq 0{,}75$ met een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha = 0{,}05$.

a Bepaal het kritieke gebied als je een representatieve steekproef met omvang 100 gebruikt.

b Stel dat je vooraf hebt bepaald dat in de steekproef 80 elementen de betreffende eigenschap hebben. Laat zien hoe je in zo'n geval sneller te werk kunt gaan.

Verwerken

Opgave 9

Op een school slaagt elk jaar ongeveer 96% van de eindexamenkandidaten. Het afgelopen jaar viel het resultaat behoorlijk tegen. Slechts 92 van de 107 kandidaten haalden het eindexamen. Op andere scholen in de buurt waren er geen grote veranderingen ten opzichte van de slagingspercentages van de voorafgaande jaren. Er wordt geroepen: "De kwaliteit van de school holt achteruit". Een van de geslaagden is het daarmee niet eens: "Nee, dat is niet waar. Dat kan eens een jaar voorkomen. Die kans bestaat nou eenmaal".

a Toets de uitspraak van deze geslaagde leerling. Hoe luiden de nulhypothese en de alternatieve hypothese?

b Bereken de kans op 92 of minder geslaagden als de nulhypothese waar is.

c Krijgt de geslaagde leerling gelijk als het significantieniveau $0{,}01$ is?

Opgave 10

In 2015 zijn er in Nederland 170510 baby's geboren. 83083 meisjes en 87427 jongens. Toets met deze getallen of de kans op een meisje kleiner is dan de kans op een jongen.
De nulhypothese is dan weer: de kans op een meisje is $0{,}5$.

a Neem aan dat het aantal meisjes binomiaal is verdeeld. Welke parameters heeft deze verdeling?

b Voer de toets uit. Moet de nulhypothese worden verworpen of geaccepteerd als de onbetrouwbaarheidsdrempel $0{,}1$% is?

Opgave 11

Iemand wil de zuiverheid van een dobbelsteen controleren en besluit er 600 keer mee te werpen. Hij let op de uitkomsten 1 en 2. Bij welke aantallen zal hij besluiten dat de dobbelsteen onzuiver is als hij een betrouwbaarheid van $99{,}9$% hanteert?

Opgave 12

Het hoofd van de personeelsadministratie van een bedrijf weet dat het aantal ziekteverzuimdagen op alle dagen van de week ongeveer even groot was. Maar nu er nieuwe werktijden zijn ingevoerd, wil zij onderzoeken of het aantal ziekteverzuimdagen op maandag veel groter is geworden dan op de andere dagen van de week. Om dit te onderzoeken vraagt zij het aantal ziekteverzuimdagen per werkdag op in een bepaalde maand. In deze tabel zie je de resultaten.

dag	ma	di	wo	do	vr
aantal ziekteverzuimdagen	95	61	58	63	11

Tabel 2.1

a Hoeveel ziekteverzuimdagen zou je op maandag mogen verwachten als het ziekteverzuim onafhankelijk is van de weekdag?

b Het vermoeden van het hoofd van de personeelsadministratie kun je met deze gegevens toetsen. Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese. Je mag uitgaan van een binomiale verdeling.

c Krijgt het hoofd van de personeelsadministratie gelijk? Neem een significantieniveau van $\alpha = 0{,}05$.

Opgave 13

Bij een loterij die elke week plaatsvindt, moet je op een formulier met daarop de getallen 1 tot en met 19, drie getallen aankruisen. Nadat de inlevertijd is verstreken, worden aselect drie getallen getrokken. Een deelnemer die op zijn lot ten minste twee van de drie getrokken getallen heeft aangekruist, krijgt een prijs.

a Toon aan dat, afgerond op twee decimalen, de kans op een prijs gelijk is aan $0{,}05$.

b Een deelnemer beweert dat zijn kans op een prijs groter is dan $0{,}05$. Deze bewering wordt getoetst. Er wordt een significantieniveau van 1% gekozen. Gedurende 100 weken wordt het aantal prijzen van deze persoon bijgehouden. Hij wint 11 prijzen. Voer een toets uit om te beoordelen of de deelnemer gelijk heeft.

Toepassen

Opgave 14: Onderdelen produceren

In een fabriek wordt een cilindervormig onderdeeltje voor machines gemaakt. Voor de diameter van dit onderdeel, D (μm, micrometer), geldt: D is normaal verdeeld met een gemiddelde van 10 μm en een standaardafwijking van $0{,}2$ μm. De geproduceerde onderdelen worden als volgt gecontroleerd: Er wordt een steekproef genomen van de geproduceerde onderdelen met een omvang van 100. Deze onderdelen worden gepast in een rond gat met $D = 10{,}3$ μm. Het aantal niet passende onderdelen wordt geteld. Ga uit van een significantie van 5%.

a Hoe groot is de kans dat een onderdeel niet in het gat past?

b Voer een hypothesetoets uit om te bepalen hoeveel niet passende onderdelen er in de steekproef mogen zitten vóór men het productieproces gaat bijstellen.

Opgave 15: Fout van de tweede soort

Bij het toetsen van hypothesen kan er nog een andere fout optreden, namelijk dat de nulhypothese niet wordt verworpen, terwijl deze toch niet klopt. Deze fout heet 'fout van de 2e soort'. De kans op deze fout is alleen te berekenen als de waarde van p in de populatie bekend is. Maar dat is bijna nooit zo. Deze fout kan wel worden onderzocht.

Bekijk de volgende toets:
M is het aantal keren munt bij het werpen met een geldstuk, M is binomiaal verdeeld.
De indruk bestaat dat het geldstuk niet zuiver is. Er wordt een toets uitgevoerd met steekproefomvang 100, om te bepalen of het geldstuk zuiver is.

Er wordt een significantie van 5% gebruikt.

a Bepaal het kritieke gebied.

b Neem nu voor het kritieke gebied $M \geq 59$. Onderzoek de kans dat H_0 niet verworpen wordt, terwijl H_0 niet juist is, dus als $p > 0{,}5$. Doe dit door een tabel te maken waarin p loopt van $0{,}50$ tot $0{,}60$ met stapjes van $0{,}02$ en bij deze waarden de gevraagde kans te berekenen.

c Hoe kan deze foutkans worden verkleind?

d Voer de opdrachten a en b nog een keer uit, maar nu met een steekproefomvang 1000. Vergelijk de beide uitkomsten.

Testen

Opgave 16

Op het instituut voor toegepast psychologisch onderzoek onderzoekt men helderziendheid. Mensen die beweren helderziend te zijn, worden uitgenodigd voor het volgende experiment. De helderziende wordt opgesloten in een kamer. Hij krijgt een serie van drie zeer verschillende plaatjes. Op hetzelfde ogenblik ontvangt een ander persoon in dezelfde ruimte dezelfde drie plaatjes. Deze persoon krijgt de opdracht om zich vijf minuten lang op één van de drie plaatjes te concentreren. Na die vijf minuten moet de helderziende dan aangeven op welk plaatje de ander zich geconcentreerd heeft. De twee deelnemers kunnen elkaar niet zien. Ze hebben een koptelefoon op waardoor ze steeds een nieuwe opdracht krijgen. Dit proces wordt in totaal 40 keer herhaald met steeds nieuwe series plaatjes. De nulhypothese die men wil toetsen luidt: de helderziende is niet helderziend. Dat kan men toetsen met behulp van het aantal keren dat de helderziende hetzelfde plaatje aangeeft als de ander. Als de nulhypothese waar is dan is het aantal keren 'hetzelfde plaatje' binomiaal verdeeld.

a Welke parameters heeft deze binomiale verdeling?

b Helderziende X geeft 17 keer het juiste plaatje aan. Bereken de kans dat dit gebeurt als de nulhypothese juist is.

c Bereken de kans dat de nulhypothese ten onrechte verworpen wordt als er afgesproken wordt dat er sprake is van helderziendheid bij meer dan 20 juiste plaatjes.

d Er wordt afgesproken dat het significantieniveau $0{,}05$ is. Wordt helderziende Y helderziend verklaard als hij 18 plaatjes goed heeft?

Opgave 17

Een kweker wil onderzoeken of zijn kruisingsmethode als resultaat heeft dat 25% van de bessenstruiken gevoelig is voor meeldauw. Hij constateert dat van de 100 bessenstruiken er 33 last hebben van meeldauw.
Mag hij nu met een significantieniveau van 5% aannemen dat toch maar 25% gevoelig is voor meeldauw?

1.3 Normale toetsen

Inleiding

Het toetsen van hypothesen kun je ook doen als een stochast normaal is verdeeld.
Een goed voorbeeld is de controle door de consumentenbond van het vulgewicht van kilopakken suiker. Ook daarbij speelt de significantie een grote rol. Maar bovendien wordt er vaak een steekproef getrokken met een bepaalde grootte n uit een normaal verdeelde populatie. En dan moet je met de wortel-n-wet rekening houden.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- het gemiddelde μ van een normaal verdeelde stochast toetsen;
- de wortel-n-wet gebruiken bij een steekproef van grootte n.

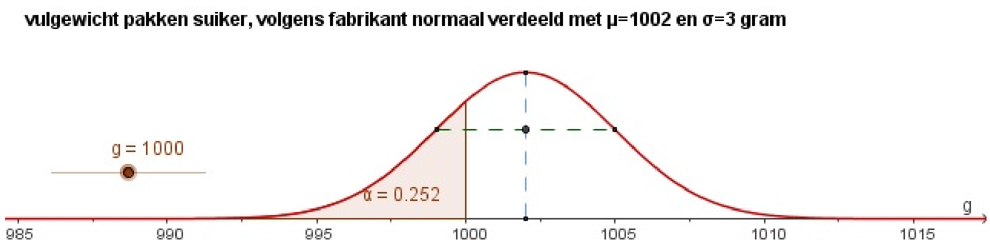
Voorkennis

- werken met binomiale toetsen;
- de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese en beslissingsvoorschrift en significantieniveau gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet



Figuur 3.2

Volgens de fabrikant is het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal verdeeld met $\mu(G) = 1002$ en $\sigma(G) = 3$.
Omdat de consumentenbond veel klachten heeft binnengekregen waarin wordt gemeld dat de pakken suiker van deze fabrikant te weinig suiker bevatten, wordt er door hen getwijfeld aan dit gemiddelde. De consumentenbond stelt dat $\mu(G) < 1002$.

Ze onderzoeken de bewering van de fabrikant door een pak suiker te wegen.
Ze vinden dat de fabrikant ongelijk heeft als dit pak suiker minder dan 998 gram weegt.

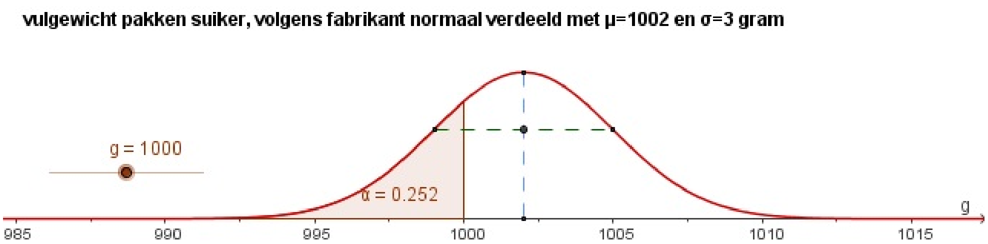
a Hoe groot is de kans dat men toevallig minder dan 998 gram suiker vindt?

b Wat zegt dit over de kans dat de consumentenbond een fout maakt?

c Hoe zou de consumentenbond dit resultaat kunnen verbeteren?

Uitleg 1

Bekijk de applet



Figuur 3.3

Een fabrikant beweert: het gewicht G (gram) van mijn pakken suiker is normaal verdeeld. Het gemiddelde gewicht $\mu(G) = 1002$ en de standaardafwijking $\sigma(G) = 3$.
De nulhypothese is dus:
H_0: $\mu(G) = 1002$
Een consumentenorganisatie twijfelt aan dit gemiddelde en komt met de alternatieve hypothese:
H_1: $\mu(G) < 1002$

De nulhypothese wordt getoetst door één pak suiker te wegen. Als beslissingsvoorschrift wordt genomen: H_0 wordt verworpen als dit pak suiker minder dan 998 gram weegt.

In deze situatie is de kans op onterecht verwerpen van H_0:
$\text{P}(G < 998 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = 3) \approx 0{,}091$

Er is dus iets meer dan 9% kans dat de consumentenorganisatie ten onrechte beweert dat de fabrikant ongelijk heeft. Het significantieniveau is dus 9%.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.

a Reken na dat de kans op de genoemde fout ongeveer $0{,}091$ is.

b Stel dat de consumentenorganisatie vindt dat de fabrikant ongelijk heeft, als het gewogen pak suiker minder dan 997 gram weegt. Wat is nu in drie decimalen de kans op onterecht verwerpen van H_0?

c Welk bezwaar zit er aan deze toets?

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1**.

a Er is hier sprake van een 'enkelzijdige normale toets op het gemiddelde'. Leg die naam uit.

b Waarom voert de consumentenorganisatie een enkelzijdige toets uit? Met wat voor soort toets zou de kwaliteitsafdeling van de fabrikant testen? Waarom?

c Wat moet de conclusie zijn als de consumentenorganisatie vooraf een significantieniveau van 5% wilde hanteren?

d Bij welk gewicht zou er bij een significantieniveau van 5% sprake zijn van een significant verschil?

Uitleg 2

Een fabrikant beweert: het gewicht G (gram) van mijn pakken suiker heeft een gemiddelde $\mu(G) = 1002$ en een standaardafwijking $\sigma(G) = 3$.
Merk op dat er NIET bij staat dat het gewicht G van de suiker normaal verdeeld is.

Toch geldt: het gemiddelde gewicht $\overline{G}$ van de pakken suiker in een steekproef van bijvoorbeeld 100 is WEL normaal verdeeld. Anders gezegd: als er veel steekproeven genomen worden, zijn de gemiddelde steekproefgewichten normaal verdeeld. Dit is de centrale limietstelling.

Om zijn bewering te kunnen toetsen moeten het gemiddelde van de steekproef $\overline{G}$ en de standaardafwijking van dit gemiddelde $\sigma\left(\overline{G}\right)$ bekend zijn. $\overline{G}$ wordt berekend uit de steekproefgegevens. $\sigma\left(\overline{G}\right)$ bereken je uit de standaardafwijking die de fabrikant opgeeft met gebruikmaking van de wortel-n-wet:

$\sigma\left(\overline{G}\right) = \frac{\sigma(G)}{\sqrt{n}}$

Als beslissingsvoorschrift wordt genomen: H_0 wordt verworpen als dit pak suiker minder dan 998 gram weegt. Hieruit volgt de overschrijdingskans:

$\text{P}\left(\overline{G} < 998 | \mu(G) = 1002 \text{ en } \sigma\left(\overline{G}\right) = \frac{3}{\sqrt{100}}\right)$

Met een grotere steekproef wordt de onbetrouwbaarheidsdrempel, het significantieniveau, kleiner. En de betrouwbaarheid van de toets dus groter.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

a Waarom kan de consumentenorganisatie met grote zekerheid H_0 verwerpen als het gemiddelde gewicht van 100 pakken suiker minder dan 998 gram is?

b Stel dat in de steekproef het gemiddelde gewicht minder dan 1000 gram is. Kan de consumentenorganisatie dan met een betrouwbaarheid van 99% de nulhypothese verwerpen?

Opgave 4

Bekijk nogmaals **Uitleg 2**. Neem nu aan de consumentenorganisatie een steekproef van 8 pakken hanteert.

a Geef de waarden van $\mu(\overline{G})$ en $\sigma(\overline{G})$.

b Stel dat in de steekproef het gemiddelde gewicht minder dan 1000 gram is. Wat is de conclusie als de consumentenorganisatie een significantieniveau van 1% hanteert?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Er wordt beweerd dat stochast X verdeeld is met gemiddelde $\mu(X) = \mu$.
Iemand anders vertrouwt dit gemiddelde niet en vermoedt $\mu(X) \neq \mu$.

Om dit te toetsen is een steekproef nodig met grootte n. De steekproefgemiddelden $\overline{X}$ van dergelijke steekproeven zijn altijd normaal verdeeld met $\mu(\overline{X}) = \overline{X}$ en $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

Je kunt nu vaststellen of de afwijking van $\mu(\overline{X}) = \overline{X}$ ten opzichte van $\mu(X)$ significant is.
Om deze berekening uit te kunnen voeren, moet de standaardafwijking bekend zijn.

De **toets van het (normaal verdeelde) gemiddelde** ziet er bijvoorbeeld zo uit:

- X is de gekozen variabele
- $H_0 : \mu(X) = \mu$
- $H_1 : \mu(X) \neq \mu$
- De steekproefomvang is n
- $\overline{X}$ is het berekende steekproefgemiddelde en $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma}{n} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ (wortel-n-wet)

Het kritieke gebied bereken je uit het gekozen **significantieniveau** α, bijvoorbeeld zo:

$$\text{P}\left(\overline{X} < g_1 \text{ of } \overline{X} > g_2 | \mu(X) = \mu \text{ en } \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

Hierin zijn g_1 en g_2 de grenswaarden van het kritieke gebied.

In dit geval spreek je van een tweezijdige toets. Er is sprake van een linkszijdige toets bij het toetsen van $\mu(X) < \mu$ of van een rechtszijdige toets indien $\mu(X) > \mu$.

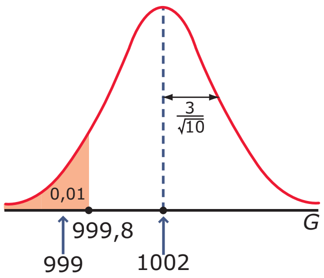
Het significantieniveau moet uiteraard vooraf worden gekozen.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Volgens de fabrikant is het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal verdeeld met $\mu(G) = 1002$ en $\sigma(G) = 3$.

Omdat de consumentenorganisatie veel klachten heeft gekregen dat de pakken suiker van deze fabrikant te weinig suiker bevatten, wordt er door hen getwijfeld aan dit gemiddelde. De consumentenorganisatie stelt dat $\mu(G) < 1002$.
In een steekproef van 10 is het gemiddelde 999 gram. Is dit bij een significantieniveau van 1% voldoende reden om aan te nemen dat de fabrikant ongelijk heeft?



Figuur 3.4

Antwoord

G is het gewicht van pakken suiker in gram.

- H$_0$: $\mu(G) = 1002$
- H$_1$: $\mu(G) \leq 1002$
- $\overline{G} = 999$ en $\sigma(\overline{G}) = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0{,}95$

$$\mathrm{P}\left(\overline{G} < 999 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0{,}0008 < 0{,}01$$

Het in de steekproef gevonden gemiddelde geeft inderdaad aanleiding om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken bij een significantieniveau van 1%.

Je kunt dit ook bepalen door eerst het kritieke gebied te berekenen.

$$\mathrm{P}\left(\overline{G} \leq g | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 0{,}01$$

Dit geeft $g \approx 999{,}79$.
Het kritieke gebied is $\overline{G} < 999{,}79$ en 999 valt binnen het kritieke gebied.

Opgave 5

Je ziet in **Voorbeeld 1** hoe de consumentenorganisatie met een steekproef van 10 pakken het gewicht van kilopakken suiker controleert.

a Reken na dat $\mathrm{P}\left(\overline{G} < 999 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0{,}0008$.

b Reken na dat $g \approx 999{,}79$.

c Voer de toets nog eens uit, maar nu met een betrouwbaarheid van 99,5%. Is er nog steeds sprake van een significante afwijking?

d In plaats van een steekproef van 10 pakken wordt een steekproef van 50 pakken suiker genomen. Bij welke gewichten krijgt de consumentenorganisatie nu met 99% betrouwbaarheid gelijk?

Opgave 6

In een fabriek heeft men het vermoeden dat het koolstofgehalte van een bepaalde staalsoort groter is dan $0{,}200\%$. Uit een steekproef van 80 metingen wordt een gemiddelde gevonden van $0{,}213\%$. De standaardafwijking van het koolstofgehalte is bekend en bedraagt $\alpha = 0{,}041\%$.

a Formuleer een geschikte nulhypothese en een alternatieve hypothese.

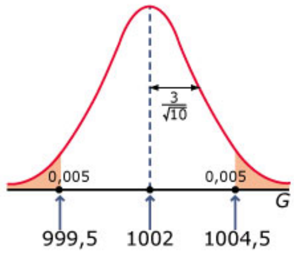
b Toets de hypothese met een onbetrouwbaarheidsdrempel van $0{,}01$. Wat is je conclusie?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Volgens de fabrikant is zijn vulmachine zo ingesteld dat het gewicht G (gram) van zijn pakken suiker normaal verdeeld is met $\mu(G) = 1002$ en $\sigma(G) = 3$.

De fabrikant test zijn vulmachine door van een steekproef van 10 pakken suiker het gemiddelde gewicht te berekenen. Hij doet (uiteraard) een dubbelzijdige toets.
Wat is het beslissingsvoorschrift bij een significantieniveau van 1%?



Figuur 3.5

Antwoord

- $\text{H}_0 : \mu(G) = 1002$
- $\text{H}_1 : \mu(G) \neq 1002$
- $\overline{G}$ is onbekend en $\sigma\left(\overline{G}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0{,}95$

$\text{P}\left(\overline{G} \leq g_1 \text{ of } \overline{G} \geq g_2 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 0{,}01$ geeft:

$g_1 \approx 999{,}56$ en $g_2 \approx 1004{,}44$.
Het kritieke gebied wordt daarom $\overline{G} < 999{,}6$ of $\overline{G} > 1004{,}4$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je bij een tweezijdige toets te werk kunt gaan.

a Waarom is dit een tweezijdige toets? Wat gebeurt er met de onbetrouwbaarheidsdrempel α?

b Voer de beschreven toets zelf uit, maar nu met een significantieniveau van 5%.

Opgave 8

In een medisch laboratorium worden voortdurend cholesterolgehaltes in bloedmonsters bepaald. De gebruikte apparatuur wordt elk uur gecontroleerd met behulp van een ijkmonster. Hiervan is bekend dat het gemiddelde 175 mg per 100 mL zou moeten zijn. De controlemetingen aan het ijkmonster leveren op: 168, 170, 188, 170, 174, 190, 188, 171.
Is er met een significantie van $\alpha = 0{,}01$ reden om aan te nemen dat de meetapparatuur niet goed meer werkt?

Gebruik de standaardafwijking van de controlemetingen als schatting voor de standaardafwijking van de populatie.

Verwerken

Opgave 9

Een consumentenbond toetst of verpakkingen van maaltijdmixen goed zijn gevuld.

a Leg uit dat de toets links-, rechts- of tweezijdig is.

b Het gewicht G in gram van een maaltijdmix is ingesteld als $\mu(G) = 50$ en $\sigma(G) = 2$. De steekproefgrootte is 100. Wat is het kritieke gebied bij een significantieniveau van 1%?

Opgave 10

Een firma die accu's levert voor rekenmachines, beweert dat die accu's geschikt zijn om gemiddeld zo'n apparaat $8{,}5$ weken te laten werken. De firma gaat ervan uit dat die levensduur normaal is verdeeld met een standaarddeviatie van $1{,}5$ weken.
In een aselect gekozen groep van 60 rekenmachines doe je de accu's van deze firma. De gemiddelde levensduur van de accu's blijkt $8{,}2$ weken te zijn. Kun je op grond van dit resultaat met een betrouwbaarheid van 97% de bewering van de firma verwerpen?

Opgave 11

Volgens een wetenschappelijk tijdschrift is het gewicht van zeventienjarigen normaal verdeeld met een gemiddelde van $54{,}2$ kg en een standaarddeviatie van $4{,}7$ kg. Om deze bewering te toetsen wordt door een kritische lezer door middel van een steekproef van 200 aselect gekozen zeventienjarigen het gewicht bepaald.

a Als het gemiddelde gewicht in de steekproef $53{,}3$ kg is, heeft het tijdschrift dan met een significantie van $2{,}5$% gelijk?

b Bij welk significantieniveau verwerp je de mening van het tijdschrift?

c Bij welk significantieniveau had je de mening van het tijdschrift verworpen als je in een veel kleinere steekproef van 10 zeventienjarigen hetzelfde gemiddelde gewicht had aangetroffen? Geef een verklaring voor het verschil met het antwoord bij b.

Opgave 12

Vacuüm verpakte vleeswaren mogen maximaal 0,022% natriumnitriet bevatten. Bij de Nederlandse Voedsel- en Warenautoriteit controleren ze dit percentage. Natriumnitriet remt de groei van de bacterie die botulisme veroorzaakt en zorgt voor behoud van de kleur van de vleeswaren. Maar een te hoog gehalte is giftig.

a Formuleer de hypothese die getoetst wordt. Neem aan dat het natriumnitrietpercentage normaal verdeeld is.

b Is de toets eenzijdig of tweezijdig? Formuleer ook de alternatieve hypothese.

Hieronder zie je 25 meetresultaten:

0,0219	0,0226	0,0225	0,0225	0,0216
0,0219	0,0220	0,0216	0,0229	0,0226
0,0214	0,0219	0,0226	0,0220	0,0212
0,0225	0,0223	0,0215	0,0221	0,0223
0,0224	0,0215	0,0228	0,0223	0,0223

Tabel 3.1

c Toets met behulp van deze steekproef of er reden is tot bezorgdheid. Neem een significantieniveau van 5%.

Opgave 13

Op een pak melk staat: "Het natuurlijke vetgehalte van melk - zoals die van de koe komt - varieert van 3,7% tot 4,3%".
Volle melk wordt in de fabriek altijd afgeroomd tot 3,5%. Een consumentenorganisatie besluit na te gaan of volle melk 3,5% vet bevat. In een aselecte steekproef van 20 pakken volle melk vindt ze de percentages die je in de tabel ziet. Men veronderstelt dat het vetgehalte van pakken melk normaal verdeeld is.

percentage	frequentie
$3{,}445- < 3{,}455$	1
$3{,}455- < 3{,}465$	0
$3{,}465- < 3{,}475$	4
$3{,}475- < 3{,}485$	3
$3{,}485- < 3{,}495$	3
$3{,}495- < 3{,}505$	4
$3{,}505- < 3{,}515$	2
$3{,}515- < 3{,}525$	2
$3{,}525- < 3{,}535$	1

Tabel 3.2

a Schat met behulp van deze steekproef het gemiddelde en de parameter σ van de normale verdeling.

b Toets met significantieniveau 0,05 of de consumentenorganisatie op grond van de steekproef de bewering op het pak kan verwerpen.

Toepassen

Opgave 14: Vulmachine instellen

Een fabrikant produceert een vloeistof in vaten van ruim 100 liter. Door middel van steekproeven voert de kwaliteitsdienst controles op de inhoud uit. Het nemen van steekproeven kost geld, dus worden er zo weinig mogelijk steekproeven genomen.

a De vulmachine staat ingesteld op vullen met 100,5 liter per vat. De standaardafwijking van dit vulproces is 1 liter. De kwaliteitsdienst wil zo weinig mogelijk steekproeven nemen. Maar de dienst wil ook met een significantie van hoogstens 1% weten of er gemiddeld minstens 100 liter in de vaten zit. Hoeveel vaten moet de dienst testen?

Het aantal vaten dat moet worden getest bij een significantie van 1% hangt af van de instelling van het vullen van het vat. Dit gaat met stapjes van 0,1 liter. Hoe hoger de instelling, hoe minder vaten er hoeven te worden getest, maar hoe meer het vullen kost. Het testen van een vat kost € 10,00 euro. 1 liter vloeistof kost € 1,50. De kwaliteitsdienst controleert steeds een partij van 1000 vaten door daar een aantal van te testen.

b Op welke instelling moet de fabrikant de vulmachine zetten, zodat de kosten voor steekproef nemen en vloeistof samen zo laag mogelijk zijn?

Opgave 15: Student's t-toets

Bij een normale toets van het gemiddelde gebruik je de standaardafwijking van de steekproef.
William Sealy Gosset (1876—1937) was een Engelse statisticus, die publiceerde onder het pseudoniem ‘Student’. Hij heeft onderzoek gedaan naar de fout die hierdoor ontstaat, immers ook die standaardafwijkingen zullen per steekproef iets verschillen.
Hij ontdekte dat er in dat geval beter een iets andere verdeling dan de normale verdeling gebruikt kan worden. Deze verdeling wordt de Student- of t-verdeling (onder die letter t vind je hem vaak op de grafische rekenmachine) genoemd.
Voor de Studentverdeling moet de steekproefomvang bekend zijn. Als deze n is, is het aantal vrijheidsgraden $n - 1$.

a Teken met behulp van bijvoorbeeld de grafische rekenmachine de normale verdeling en de t-verdeling. Gebruik bij de normale verdeling $\mu = 0$ en $\sigma = 1$. Bij de Studentverdeling is dit vaak automatisch het geval. Neem een steekproefomvang 2.

b Leg aan de hand van deze grafieken uit dat het steekproefgemiddelde bij de Studentverdeling een grotere afwijking van het gemiddelde moet hebben om de nulhypothese te kunnen verwerpen, dan bij de normale verdeling.

c Vanaf welke steekproefomvang is te zeggen dat de Studentverdeling en de normale verdeling op elkaar lijken?

Testen

Opgave 16

In een melkfabriek worden flessen machinaal gevuld. De gedoseerde hoeveelheid per fles is normaal verdeeld. Bij juiste instelling is de verwachte hoeveelheid 250 g per fles. Een kwaliteitsinspecteur neemt een steekproef van 9 flessen en vindt voor het gemiddelde 252 g. De standaardafwijking is 2 g.
Toets, met significantieniveau $\alpha = 0{,}05$, $H_0 : \mu = 250$ g tegen $H_1 : \mu \neq 250$ g.

Opgave 17

Een partij kobaltchloride wordt bij levering door de ontvanger gekeurd op het gehalte kobalt. Volgens de leverancier is het gehalte 16,4%. Hieronder zie je de resultaten van de metingen.

16,2	15,8	16,1	15,8	15,9
15,9	16,2	16,1	16,2	16,0
15,8	15,9	16,1	15,8	16,0
16,0	16,0	15,9	16,2	16,2
16,0	16,1	16,0	15,9	16,3

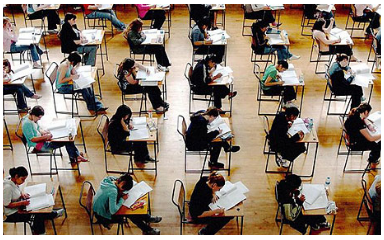
Tabel 3.3

Toets met behulp van deze resultaten of de leverancier gelijk heeft. Je mag aannemen dat het gehalte kobalt normaal verdeeld is. Neem als significantieniveau 0,02.

1.4 Bijzondere toetsen

Inleiding

Je hebt nu kennis gemaakt met binomiale toetsen en met het toetsen van het gemiddelde van een normale verdeling. Er bestaan nog veel andere soorten toetsen, afhankelijk van het type kansverdeling dat er achter zit. Maar ook een zogenaamde tekentoets vereist een speciale aanpak, hoewel het daarbij gewoon om een binomiale verdeling gaat. Je vergelijkt dan twee sets gegevens met elkaar, bijvoorbeeld het cijfer voor het SE (schoolexamen) en het CE (centraal examen).



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de tekentoets gebruiken;
- het verschil van twee normaal verdeelde stochasten toetsen.

Voorkennis

- binomiale en normale toetsen uitvoeren.

Verkennen

Opgave V1

De inspectie voor het onderwijs vergelijkt van een bepaalde school de cijfers voor wiskunde B van het SE (schoolexamen) en het CE (centraal examen).

a Kun je een manier te bedenken om vast te stellen of de CE-cijfers significant afwijken van de SE-cijfers?

b Waarom zou de inspectie daarin zijn geïnteresseerd?

Uitleg 1

Bij statistisch onderzoek wordt vaak onderzoek gedaan met meerdere statistische variabelen. Deze worden dan vergeleken. Hier wordt een situatie bekeken waarbij onderzoek wordt gedaan met paren waarnemingen.

In de voedselindustrie wordt gewerkt met smaakpanels, groepen mensen die bijvoorbeeld beoordelen of een gerecht smaakvoller wordt als het anders wordt klaargemaakt. De leden van het smaakpanel proeven hierbij beide gerechten en geven aan of het ze het eerste of het tweede gerecht smaakvoller vinden. Er zijn drie mogelijke uitkomsten: het tweede gerecht is smaakvoller, van gelijke smaak of minder smaakvol. Deze uitkomsten worden bijvoorbeeld +, 0 en − genoemd.

Figuur 4.2

Bij onveranderde smaak is de verwachting dat er evenveel + als − zal zijn. Daarom kun je hier toetsen met de binomiale toets op proportie:

X is het aantal + (binomiaal verdeeld)
$H_0 : p = 0{,}5$
$H_1 : p > 0{,}5$

Deze toets wordt tekentoets genoemd. Deze toets werkt dus zelfs bij sommige kwalitatieve variabelen.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

a Waarom heet deze wijze van toetsen een tekentoets?

b Waarom moet daarbij altijd als nulhypothese $p = 0{,}5$ worden gehanteerd?

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1**. Stel dat er bij de smaaktest van de 15 keer 10 keer $+$ uit is gekomen.

a Waarom mag je nu niet concluderen dat er 5 keer $-$ uit is gekomen?

b Veronderstel dat er toch 5 keer $-$ uit kwam. Mag je er nu met een significantie van 10% van uitgaan dat de nieuwe bereidingswijze smaakvollere gerechten tot gevolg heeft?

Uitleg 2

Bij de normale toets werd onderzoek gedaan naar de juistheid van een bewering over het gemiddelde. Het gaat hier over één statistische variabele.

Maar bij statistisch onderzoek wordt vaak onderzoek gedaan met meerdere stochastische variabelen. Deze worden dan vergeleken. Bijvoorbeeld een onderzoek waarbij onderzocht wordt of de gemiddelden van twee variabelen gelijk zijn. Ga hierbij uit van de volgende veronderstellingen:

- De gemiddelden van beide populaties zijn bekend.
- Beide variabelen zijn normaal verdeeld.
- De standaardafwijkingen van beide verdelingen zijn bekend.

Altijd is het verschil van twee normale verdelingen weer een normale verdeling.

Stel dat het aantal sterftegevallen door griep per gemeente normaal verdeeld is.
In 2015 gaf een steekproef $\mu_{15} = 20$ en $\sigma_{15} = 2{,}3$.
In 2016 gaf een steekproef $\mu_{16} = 21$ en $\sigma_{16} = 3{,}0$.

Verschillen deze gemiddelden significant?
Als de gemiddelden niet zouden verschillen, kun je uitgaan van verdeling van het verschil V met
$\mu_V = 0$ en

$\sigma_V = \sqrt{2{,}3^2 + 3{,}0^2} \approx 3{,}8$.

Het verschil tussen de gemiddelden is hier $\mu_{16} - \mu_{15} = 1$.
De overschrijdingskans van dit verschil is $\text{P}(V > 1) \approx 0{,}3957 > 0{,}05$.

Dat wil zeggen dat er geen significant verschil is tussen de aantallen sterftegevallen van 2015 en 2016.

Deze toets heet een verschiltoets voor gemiddelden.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

a Waaraan is zichtbaar dat hier een verschiltoets moet worden toegepast en dus geen hypothesetoets zoals eerder in dit hoofdstuk beschreven?

b Wat is het toegepaste significantieniveau van deze toets?

c Het verschil tussen de gemiddelden is hier $\mu_{16} - \mu_{15} = 1$. Wat moet je doen als je μ_{16} en μ_{15} in deze berekening verwisselt?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms wil je bij statistisch onderzoek twee verschillende populaties vergelijken door hypothesetoetsen toe te passen. Hier worden twee soorten toetsen genoemd.

De **tekentoets** is geschikt om twee populaties te vergelijken door middel van steekproeven met bij elkaar horende paren van waarnemingen. Deze waarnemingen moeten te vergelijken zijn met begrippen als meer/minder, groter/kleiner, kleuriger/minder kleurig, enzovoort. De eventuele waarden van de waarnemingen worden niet gebruikt.

Met tekens (bijvoorbeeld +, $-$ en 0) wordt aangegeven hoe en of een paar waarnemingen van elkaar verschilt. Als de populaties niet verschillen, zal het aantal + en $-$ gelijk zijn en daarmee zal de kans op een + $0{,}5$ zijn. Je kunt dan toetsen met een binomiale verdeling met $p = 0{,}5$.

De **verschiltoets voor gemiddelden** wordt gebruikt om uitspraken over het verschil tussen de gemiddelden van twee populaties steekproeven te doen. De populatie hoeft niet normaal verdeeld zijn. Deze toets is gebaseerd op de volgende uitgangspunten:

- Steekproefgemiddelden zijn normaal verdeeld.
- Het verschil van twee normale verdelingen is ook weer normaal verdeeld.

Als de populaties niet verschillen, zullen de gemiddelden ervan ook niet verschillen. Het (normaal verdeelde) verschil van de gemiddelden heeft hier dus altijd een gemiddelde van 0. Je toetst met een normale verdeling of het verschil significant van 0 afwijkt.

Voorbeeld 1

De inspectie voor het onderwijs vergelijkt van een bepaalde school de cijfers voor wiskunde B van het SE (schoolexamen) en het CE (centraal examen). In de tabel vind je de gegevens van een klas van 19 leerlingen.

leerling	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
SE-cijfer	6,0	6,7	5,8	7,1	5,4	6,5	8,8	6,9	7,9	5,1	6,1	6,1	6,4	7,4	5,9	6,2	7,1	6,8	6,3
CE-cijfer	6,4	6,3	5,2	6,5	5,4	6,1	9,0	6,8	7,5	5,6	6,0	6,5	6,0	6,5	6,0	6,6	7,0	6,6	6,4

Tabel 4.1

De inspectie besluit om een tekentoets toe te passen met een significantieniveau van 5%. Een + geeft aan dat de leerling het CE beter heeft gemaakt, een – dat het CE minder is gemaakt. Mag de inspectie op grond hiervan concluderen dat het CE slechter is gemaakt?

Antwoord

leerling	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
teken	+	–	–	–	0	–	+	–	–	+	–	+	–	–	+	+	–	–	+

Tabel 4.2

Een + geeft aan dat de leerling het CE beter heeft gemaakt, een – dat het CE minder is gemaakt. Een 0 geeft aan dat de twee resultaten niet verschillen. Dit paar waarnemingen wordt niet meegeteld. De reden is dat er anders een (te) grote kans op de fout 'H$_1$ is juist, maar wordt niet geaccepteerd' kan optreden.

- X is het aantal minnen (CE slechter) in de steekproef ($n = 18$). X is binomiaal verdeeld.
- H$_0$: $p = 0{,}5$ (altijd bij de tekentoets)
- H$_1$: $p > 0{,}5$

$\text{P}\left(X \geq 11 | n = 18 \text{ en } p = 0{,}5\right) \approx 0{,}2403 > 0{,}05$

De inspectie mag op grond hiervan deze conclusie niet trekken.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Waarom is $n = 18$ en niet $n = 19$?

b Reken na dat $\text{P}\left(X \geq 11 | n = 18 \text{ en } p = 0{,}5\right) \approx 0{,}2403$.

c Stel dat het CE-cijfer van leerling 5 een $5{,}2$ was geweest. Had dan de inspectie met een significantieniveau van 10% mogen concluderen dat het CE slechter is gemaakt?

Voorbeeld 2

Twee groepen hebben dezelfde toets gemaakt. De scores van beide groepen zijn normaal verdeeld. Groep A heeft een gemiddelde score gehaald van $6{,}4$ met een standaardafwijking van $0{,}7$. Groep B heeft een gemiddelde score gehaald van $7{,}9$ met een standaardafwijking van $0{,}9$.

Als je een onbetrouwbaarheidsdrempel van 10% neemt, kun je dan zeggen dat de scores van groep B significant beter zijn dan die van groep A?

Antwoord

Noem V het verschil van beide scores.

V is normaal verdeeld met een gemiddelde van $7{,}9 - 6{,}4 = 1{,}5$ en een standaardafwijking van $\sqrt{0{,}7^2 + 0{,}9^2} = \sqrt{1{,}3}$.

Wanneer de scores van groep B hetzelfde zouden zijn als die van groep A, zou het verschil 0 moeten zijn. De nulhypothese is daarom H_0: $\mu_V = 0$ (altijd) en de alternatieve hypothese luidt H_1: $\mu_V > 0$.

P$\left(V > g | \mu_V = 0 \text{ en } \sigma_V = \sqrt{1{,}3}\right) < 0{,}1$ geeft $g \approx 1{,}46$.

Omdat $\mu_V = 7{,}9 - 6{,}4 = 1{,}5 > 1{,}46$ is de afwijking voldoende om te concluderen dat de cijfers van groep B significant beter zijn.

Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Reken na dat $g \approx 1{,}46$.

b Als je een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5% hanteert, kun je dan ook concluderen dat de cijfers van groep B significant beter zijn dan die van groep B?

c Stel dat er een fout is gemaakt en dat groep B gemiddeld een 7,8 heeft gehaald. De standaardafwijking blijft hetzelfde. Welke conclusie trek je nu bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 10%?

Opgave 6

Twee machines vullen pakken met suiker. De machines horen de pakken met een gelijke hoeveelheid suiker te vullen. Om te controleren of dit zo is, worden van beide machines steekproeven genomen.

Bij machine A is het gemiddelde gewicht van de pakken suiker in de steekproef 1002 gram met een standaardafwijking van 2,5 gram. Bij machine B is het gemiddelde gewicht van de pakken suiker in de steekproef 1008 gram met een standaardafwijking van 3,6 gram.

Verschillen de gemiddelde vulgewichten van machine A en machine B significant van elkaar? Neem een significantie van 10%.

Verwerken

Opgave 7

De ondernemingsraad van een bedrijf beweert dat het ziekteverzuim op afdeling A significant hoger is dan op afdeling B. De raad legt de directie het volgende overzicht voor over het percentage ziekteverzuim:

maand	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
afd.A	9	9	8	10	12	13	12	12	10	11	8	12
afd.B	7	10	9	8	11	11	7	9	9	10	10	7

Tabel 4.3

De directie besluit hierop een tekentoets toe te passen met een significantieniveau van 5%.

a Beschrijf de tekentoets, geef de nulhypothese, de alternatieve hypothese, de steekproefgrootte en de onbetrouwbaarheidsdrempel.

b Onderzoek of de ondernemingsraad gelijk krijgt.

Opgave 8

De diameters van machinaal geproduceerde bouten en de bijbehorende moeren zijn normaal verdeeld: de diameter van de moer is normaal verdeeld met een gemiddelde van $8{,}10$ mm en een standaarddeviatie van $0{,}05$ mm. De diameter van de bout is normaal verdeeld met een gemiddelde van $8{,}05$ mm en een standaardafwijking van $0{,}03$ mm. De bouten passen in de moeren als het verschil in diameter van de moer en de bout minder dan $0{,}02$ mm is. Er wordt regelmatig gecontroleerd of de machines die deze bouten en moeren maken niet moeten worden bijgesteld, omdat te veel moeren niet op de bouten passen. Wekelijks wordt een steekproef van 100 bouten en moeren getest.

a Waarom is hier sprake van een tweezijdige toets?

b Stel de nulhypothese en de alternatieve hypothese op.

c Welke standaardafwijking moet er worden gehanteerd? Waarom speelt nu ook de wortel-n-wet ($\sqrt{n}$-wet) een rol?

d Voer de toets uit met een significantieniveau van 5%. Bij welk gemiddelde verschil in de steekproef worden de machines bijgesteld?

Opgave 9

In een laboratorium worden twee geneesmiddelen voor dezelfde ziekte getest op muizen die men kunstmatig aan deze ziekte laat lijden. Ze worden met één van beide middelen behandeld.
Elke dag wordt bijgehouden hoeveel dieren er genezen zijn. De helft van de muizen kreeg geneesmiddel A toegediend, de andere helft geneesmiddel B.
De resultaten staan in deze tabel.

dagnummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
middel A	2	5	4	6	3	3	6	3	2	2	2	4	6	9	4	2	3	2	4	9
middel B	3	8	6	9	2	4	8	5	5	2	5	5	3	11	8	4	5	0	5	1

Tabel 4.4

Onderzoekers in dit laboratorium toetsen de mening dat beide middelen even goed werken met een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5%. Er wordt een tekentoets uitgevoerd.

a Stel een nulhypothese en een alternatieve hypothese op.

b Stel vast of beide middelen op grond van de resultaten in deze test inderdaad even goed werken binnen de gegeven betrouwbaarheidseis.

Opgave 10

Bekijk de resultaten van 19 leerlingen voor het SE en het CE.

leerling	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
SE-cijfer	6,0	6,7	5,8	7,1	5,4	6,5	8,8	6,9	7,9	5,1	6,1	6,1	6,4	7,4	5,9	6,2	7,1	6,8	6,3
CE-cijfer	6,4	6,3	5,2	6,5	5,4	6,1	9,0	6,8	7,5	5,6	6,0	6,5	6,0	6,5	6,0	6,6	7,0	6,6	6,4

Tabel 4.5

Eerder is hier een tekentoets mee uitgevoerd, waaruit bleek dat de resultaten niet significant verschilden. Omdat hier waarden bekend zijn, kan ook gebruik worden gemaakt van een verschiltoets. Ga na of uit deze toets met een significantieniveau van 5% volgt dat het SE beter is gemaakt dan het CE.

Toepassen

Opgave 11: Voetlengtes

Open het bestand **Voetlengtes van 100 mannen en 100 vrouwen**. De gangbare opvatting is dat mannen gemiddeld grotere voeten hebben dan vrouwen. Je wilt deze opvatting toetsen met een significantieniveau van 5% met behulp van de gegevens in dit bestand.

a Kun je met deze meetgegevens een tekentoets uitvoeren?

b Je toetst het verschil in voetlengtes van mannen en vrouwen. Maakt het verschil of je twee willekeurige groepen mannen en vrouwen onderzoekt of een groep van 100 echtparen?

c Voer de toets uit. Wordt de hierboven gedane uitspraak bevestigd?

Testen

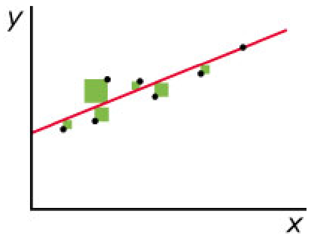
Opgave 12

Je hebt in dit onderdeel met twee soorten toetsen kennis gemaakt. Beschrijf hoe deze toetsen in elkaar zitten en onder welke omstandigheden je ze toepast.

1.5 Verbanden

Inleiding

Behalve het onderzoeken van verschillen tussen statistische variabelen is het onderzoeken naar verbanden een belangrijke tak van sport: wanneer bestaat er een verband tussen twee statistische variabelen? Bestaat er bijvoorbeeld een verband tussen het aantal overvliegende ooievaars en het aantal geboorten in een bepaalde streek? Of bestaat er een verband tussen lengte en gewicht bij scholieren?



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- de (statistische) samenhang tussen twee variabelen te beschrijven en te interpreteren;
- te werken met correlatiecoëfficiënt en regressielijn.

Voorkennis

- soorten statistische variabelen herkennen;
- de begrippen onderzoek, steekproef, populatie en representatief, simulatie.

Verkennen

Opgave V1

Om te onderzoeken of er een verband bestaat tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud heb je gegevens nodig. Op het werkblad **LengteGewicht22h4.xls** vind je de gegevens van een 4HAVO-klas van 22 leerlingen.

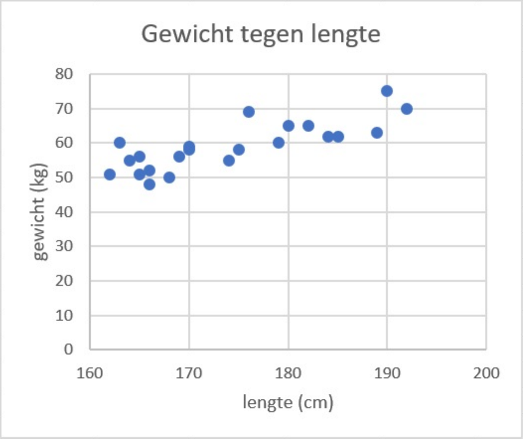
a Welke vier gegevens zijn er verzameld?

b Welke afspraken moet je maken bij het verzamelen van deze gegevens? Beschrijf er een paar. (Denk om de manier van meten!)

c Bekijk het getekende spreidingsdiagram. Trek je op grond van de gegevens op het werkblad de conclusie dat er zo'n verband bestaat? En is dat dan uitsluitend een statistisch verband of is het ook een oorzakelijk verband, m.a.w. wordt een groter gewicht veroorzaakt door een grotere lengte?

Uitleg 1

Je wilt onderzoeken of er een verband bestaat tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud. Op het werkblad **LengteGewicht22H4.xls** vind je de gegevens van een steekproef van 22 leerlingen. Hiernaast is een spreidingsdiagram van die gegevens getekend.
Is er binnen deze groep leerlingen sprake van een verband tussen lengte en gewicht?



Figuur 5.2

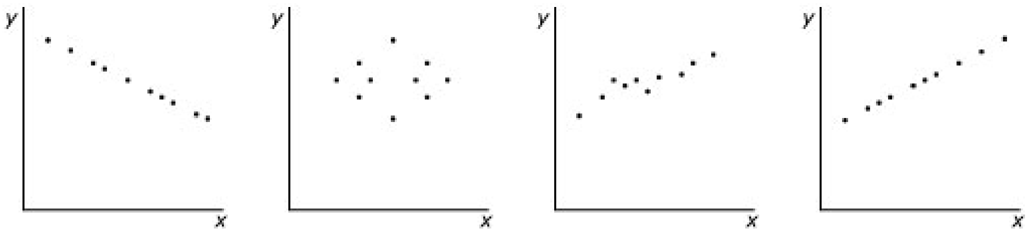
Als je de figuur bekijkt, zie je dat bij grotere lengtes vaak ook grotere gewichten horen.
Er lijkt dus een zeker verband te zijn.
Maar de getekende punten liggen zeker niet op één lijn, dus hoe sterk is het verband?

De vorm van de puntenwolk, het spreidingsdiagram, zegt iets over de samenhang tussen twee variabelen. Zie daarvoor de afbeeldingen hieronder.

Een ander woord voor statistisch verband of samenhang is correlatie.

De mate van correlatie wordt uitgedrukt in de correlatiecoëfficiënt r.

Correlatie zegt iets over de statistische samenhang van twee variabelen en niets over een eventuele causale relatie (dus een oorzaak-gevolgrelatie) tussen de twee variabelen. Er is samenhang tussen de verkoop van handschoenen en de verkoop van winterbanden, maar de oorzaak is dan het mogelijke koude winterweer.



$r_{xy} = -1$ $r_{xy} = 0$ $r_{xy} = 0{,}6$ $r_{xy} = 1$

Figuur 5.3

Opgave 1

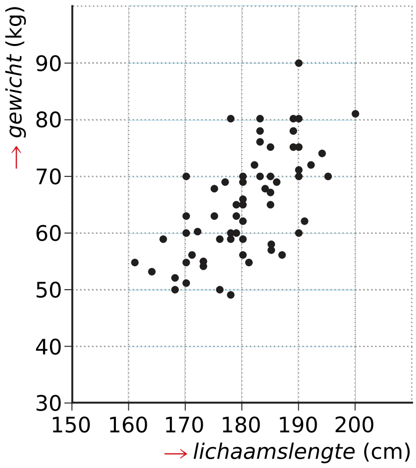
Bekijk de spreidingsdiagrammen voor de variabelen *lengte* (cm) en *gewicht* (kg) van een groep jongens.

a Tussen welke waarden liggen de gewichten van jongens met een lengte van 170 cm in dit diagram?

b Bij welke lengte is de spreiding van de gewichten het grootst?

c Is er sprake van een verband tussen lengte en gewicht bij deze jongens?

d Is er een sterk verband tussen de lengte en gewicht bij deze jongens als je kijkt naar de uitleg?



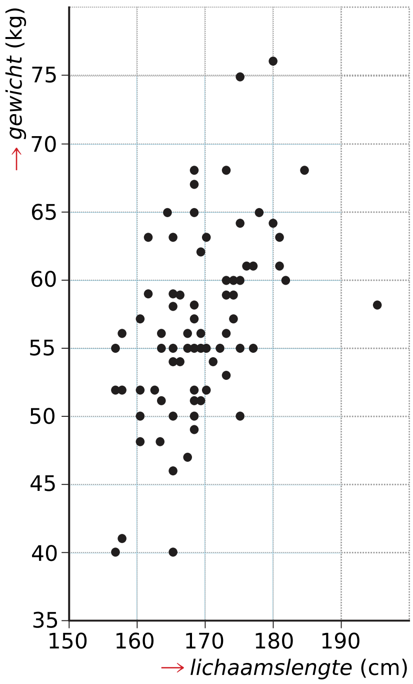
Figuur 5.4

Opgave 2

Bekijk het spreidingsdiagram voor de variabelen *lengte* (cm) en *gewicht* (kg) van een groep meisjes.

a Is er sprake van een statistisch verband tussen lengte en gewicht bij deze meisjes?

b Vergelijk de afbeelding van de meisjes met die van de jongens uit de vorige opgave. In welke afbeelding vind je het verband sterker, bij de jongens of bij de meisjes?



Figuur 5.5

Opgave 3

Geef van de volgende variabelen aan of er sprake is van een oorzakelijk verband of niet.

a Het aantal verkochte ijsjes en het aantal verdrinkingen op een dag.

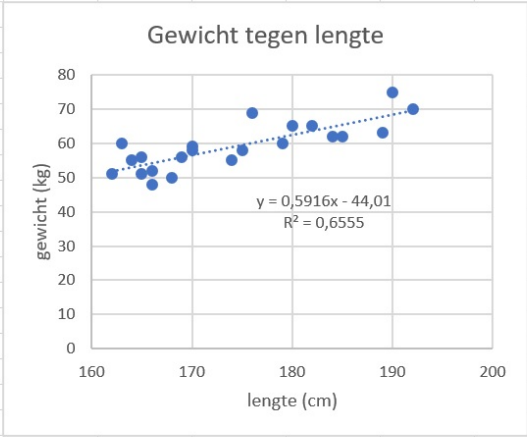
A. oorzakelijk verband
B. geen oorzakelijk verband

b Het aantal uur dat kinderen buiten spelen en het aantal kinderen dat op een dag met schaafwonden bij de huisarts komt.

A. oorzakelijk verband
B. geen oorzakelijk verband

Uitleg 2

Je wilt onderzoeken of er een verband bestaat tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud. Op het werkblad **LengteGewicht22H4.xlsx** vind je de gegevens van een steekproef van 22 leerlingen. Hiernaast is een spreidingsdiagram van die gegevens getekend.
Er is binnen deze groep leerlingen sprake van een verband tussen lengte en gewicht, maar hoe beschrijf je dit verband?



Figuur 5.6

Je ziet in de figuur hoe Excel automatisch het kwadraat van de correlatiecoëfficiënt r berekend en een best passende lijn door de puntenwolk trekt. Deze lijn heet de regressielijn of trendlijn. En r^2 heet de determinatiecoëfficiënt.

Bij de trendlijn kun je ook zelf een formule opstellen. Daarvoor lees je eerst twee geschikte punten op de trendlijn af, bijvoorbeeld $(160,50)$ en $(190,68)$.

Met behulp van deze punten kun je de formule opstellen. Je vindt:

$G = 0{,}6 \cdot l - 46$

Hiermee kun je voorspellingen doen over bijvoorbeeld het gewicht van iemand in de doelgroep van 2 meter.

Opgave 4

Je ziet in **Uitleg 2** hoe Excel een lijn door de puntenwolk trekt en de bijbehorende formule berekent.

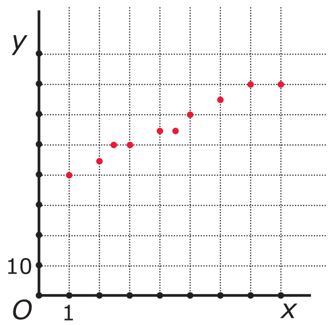
a Je ziet in de uitleg hoe je zelf de formule voor de trendlijn kunt berekenen.
Voer die berekening uit.

Je kunt nu met behulp van de gevonden regressielijn (trendlijn) voorspellingen doen.

b Hoe zwaar zou iemand van $2{,}00$ m volgens de regressielijn moeten zijn?

Opgave 5

Bekijk dit spreidingsdiagram.



Figuur 5.7

a Maak een tabel van de 10 meetpunten. Voer deze gegevens in je grafische rekenmachine in.

b Bereken de coördinaten van het punt $(\overline{x},\overline{y})$.

c Als je door deze punten ‘op het oog’ een regressielijn zou willen tekenen, hoe groot wordt dan de richtingscoëfficiënt ongeveer?

d Bereken nu de correlatiecoëfficiënt en stel een vergelijking op van de regressielijn van y op x.

e Welke waarde zou y moeten hebben volgens deze regressielijn als $x = 10$?

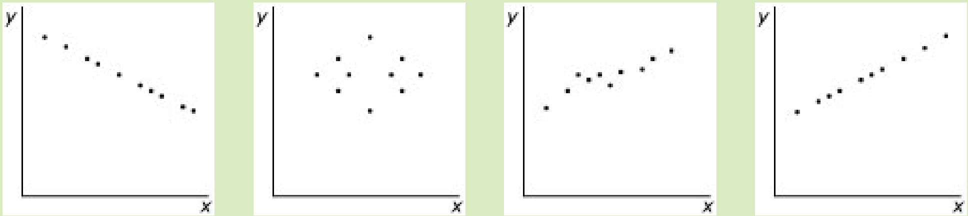
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Wanneer je binnen een dataset zoekt naar een verband tussen twee statistische variabelen, gebruik je een **puntenwolk** of **spreidingsdiagram** (Engels: scatter plot).

Afhankelijk van de vorm van een puntenwolk kun je vastellen of er een verband tussen beide variabelen is en zo ja, of dat verband sterk is. Een maat daarvoor is de **correlatiecoëfficiënt** r, een getal met waarden vanaf - 1 tot en met 1. Hoe dichter r bij 1 of - 1 ligt, hoe sterker het verband. In een volgend voorbeeld staan vuistregels om aan te geven of de samenhang zwak, matig of sterk is.

In een spreidingsdiagram kun je met een **regressielijn** de (lineaire) samenhang weergeven. Hoe je deze trendlijn en de correlatiecoëfficiënt berekent, zie je in het **Practicum**.



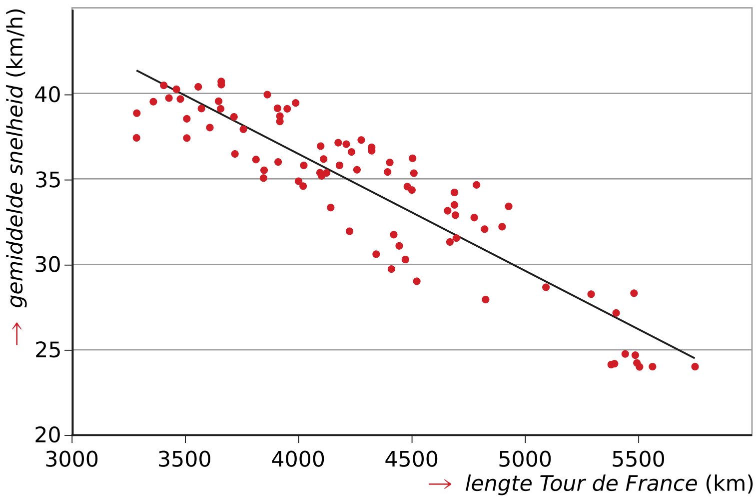
$r_{xy} = -1$ $r_{xy} = 0$ $r_{xy} = 0{,}6$ $r_{xy} = 1$

Figuur 5.8

Let op! Je stelt alleen vast dat er een **statistische samenhang** tussen beide variabelen is. Het is de vraag of dat verband ook causaal is. Je kunt dus niets zeggen over oorzaak en gevolg. Er kan best een derde variabele de oorzaak zijn van de samenhang.

Voorbeeld 1

In deze figuur staan twee statistische variabelen. Op de horizontale as staat de totale lengte van de Tour de France in kilometer. Op de verticale as staat de gemiddelde snelheid van de winnaar.



Figuur 5.9

Welke samenhang is er tussen de lengte van de Tour de France en de gemiddelde snelheid van de winnaar?

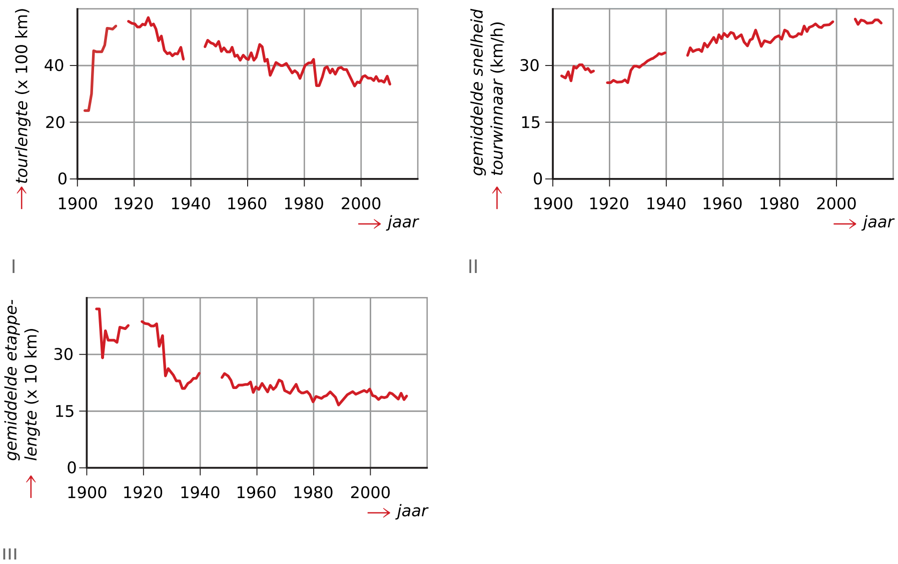
Antwoord

Als je kijkt naar de afbeelding, lijkt er een (sterke) negatieve samenhang te zijn. Hoe korter de Tour de France, hoe hoger de gemiddelde snelheid van de winnaar.

Maar pas op met oorzaak en gevolg. De oorzaak van een hogere gemiddelde snelheid van de winnaar hoeft niet de afnemende lengte van het parcours te zijn.

Opgave 6

Bekijk de drie grafieken:



Figuur 5.10

Twee van de grafieken kun je combineren tot een spreidingsdiagram.

- **a** Hoe komt het dat je deze grafieken kunt combineren tot een spreidingsdiagram?
- **b** De drie grafieken hebben allemaal twee gaten. Wat betekent dit en wat is de oorzaak?
- **c** Welke twee (van de drie) grafieken tonen gecombineerd het spreidingsdiagram uit het voorbeeld?
- **d** Welke samenhang wordt zichtbaar, als je steeds twee andere grafieken combineert?

Opgave 7

Het is gevaarlijk om conclusies te trekken. Het gegeven spreidingsdiagram suggereert dat de gemiddelde snelheid van de winnaar omlaag gaat, als een Tour de France langer gemaakt wordt.

- **a** Geef drie redenen waarom de gemiddelde snelheid van de winnaar los staat van de tourlengte.
- **b** Noem nog een tweetal variabelen die vermoedelijk een sterke samenhang hebben met de gemiddelde snelheid van de winnaar.
- **c** Noem een tweetal variabelen die vermoedelijk een zwakke of geen samenhang hebben met de gemiddelde snelheid van de winnaar.

Voorbeeld 2

De mate van samenhang is in een getal uit te drukken: de correlatiecoëfficiënt. Deze correlatiecoëfficiënt r kun je bijvoorbeeld met Excel of met de grafische rekenmachine laten uitrekenen. Zie het **Practicum**. Vervolgens kun je met vuistregels conclusies trekken.

- Als $r \leq -0{,}7$ dan is er sprake van sterke negatieve samenhang.
- Als $-0{,}7 < r \leq -0{,}3$ dan is er sprake van matige negatieve samenhang.
- Als $-0{,}3 < r < 0$ dan is er sprake van zwakke negatieve samenhang.
- Als $0 < r < 0{,}3$ dan is er sprake van zwakke positieve samenhang.
- Als $0{,}3 \leq r < 0{,}7$ dan is er sprake van matige positieve samenhang.
- Als $r \geq 0{,}7$ dan is er sprake van sterke positieve samenhang.

Opgave 8

Om te onderzoeken of er enig verband bestaat tussen de lengte van een vader en die van zijn zoon zijn de lengtes van 12 vaders en die van hun oudste zoons gemeten op het moment dat die zoons volwassen werden. De gegevens staan in deze tabel.

lengte vader v in cm	173	168	178	170	180	165	185	175	180	178	183	188
lengte zoon z in cm	180	175	180	173	183	175	180	173	188	178	180	185

Tabel 5.1

a Teken een spreidingsdiagram (een puntenwolk) bij deze gegevens.

b Bereken de correlatiecoëfficiënt in twee decimalen nauwkeurig.

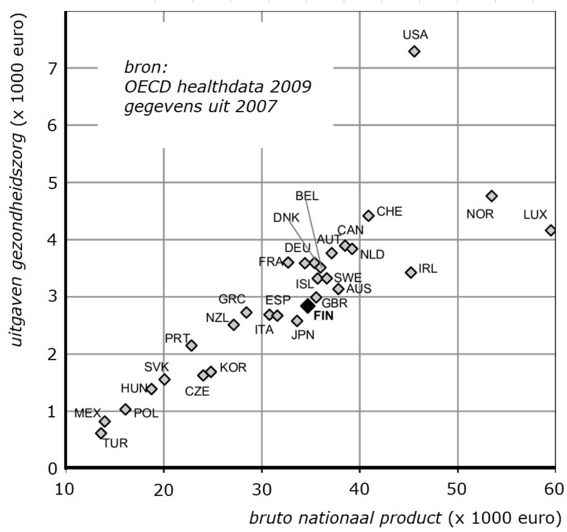
c Bestaat er een lineair verband tussen v en z?

Voorbeeld 3

Bekijk het spreidingsdiagram. Daarin zijn de resultaten weergegeven van een onderzoek in dertig landen. Het bnp en de ug zijn gemiddelden per inwoner.

Je kunt door deze punten een trendlijn tekenen. De bijbehorende correlatiecoëfficiënt is een maat voor de sterkte van het verband. Is de lijn dalend, dan is de correlatiecoëfficiënt negatief en is ook de richtingscoëfficiënt van de trendlijn negatief.

Je kunt ook een trendlijn door deze gegevens tekenen. In de praktijk heb je de gegevens vaak in een database beschikbaar. De trendlijn bereken en teken je dan met de computer. Hier doen we het zonder gebruik te maken van de computer. Voor het berekenen van een trendlijn met de computer, zie het **Practicum**.



Figuur 5.11

Welke vergelijking past bij deze trendlijn?

Antwoord

Je zoekt twee punten. Deze punten moeten niet te dicht bij elkaar liggen, bijvoorbeeld TUR en NLD: $(13; 0{,}5)$ en $(39; 3{,}9)$.

De vergelijking van de trendlijn is *ug* = $0{,}131 \cdot$ *bnp* $-1{,}20$.

Opgave 9

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.

a Waarom moet je de punten niet te dicht bij elkaar kiezen om de vergelijking van een trendlijn op te stellen?

b Stel zelf de vergelijking van de trendlijn op.

Opgave 10

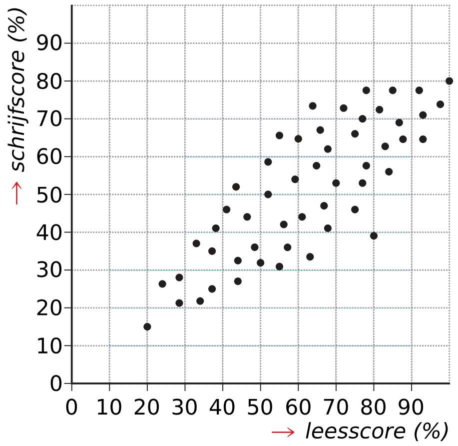
Een basisschool heeft een leestest en schrijftest Nederlands afgenomen bij de leerlingen in groep acht. De resultaten zijn verwerkt in een puntenwolk.

Er lijkt een verband te zijn tussen de schrijfscore S en de leesscore L.

a Stel een formule op voor het lineaire verband tussen S en L.

b Geef met behulp van de formule uit a een schatting van de schrijfscore bij een leesscore van 80%.

c Geef met behulp van de formule uit a een schatting van de leesscore bij een schrijfscore van 10%.



Figuur 5.12

Verwerken

Opgave 11

Bekijk het spreidingsdiagram. Op de horizontale as staat *kniehoogte* in cm en op de verticale as de *mouwlengte* in cm. De getallen stellen het aantal vrouwen voor die bij een bepaalde kniehoogte en mouwlengte horen. Je kunt hiervan een puntenwolk maken.

Statistisch onderzoek 1947

De Bijenkorf - Amsterdam

5001 vrouwen met leeftijd > 18 jr.

mouwlengte in cm	kniehoogte in cm 34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	
71																			1			1
70																						
69														1			1				1	3
68										2	2	1		3	3	2	2					15
67											3	1	2	4	2	2	3		1			18
66										4	5	5	4	6	10	7	7	3			1	52
65							1		2	7	3	15	13	26	16	11	6	3	1	1	1	106
64					1		2	2	5	5	13	22	26	31	22	18	4	4	4			159
63						3	1	5	5	20	36	44	48	40	29	16	6	4	2	1		260
62						2	6	15	21	61	61	84	62	59	27	14	6	1	2			421
61					3	2	6	29	43	65	99	111	91	61	33	9	7	1				560
60					3	5	17	40	68	112	117	121	84	49	31	2	2	2				653
59			1	1	2	11	20	60	110	108	88	66	72	22	12	3	1		1			578
58				3	8	21	50	72	110	141	103	90	34	22	5	1						660
57			1	2	9	28	60	80	92	87	72	53	20	12	2	1						519
56		1	2	4	13	30	50	79	82	60	40	32	8	3		1						405
55			3	6	11	27	38	46	46	39	14	16	1	3								250
54			4	7	11	17	32	37	23	14	8	4	1	1	3	1						163
53			3	6	6	16	12	17	15	8	6											89
52		1	2	3	5	9	13	10	5	4	1											53
51		1	2		4	4	5	2	2	1	1											22
50	1					3		1	3		3											11
49			1	2																		3
	1	3	19	34	76	178	313	495	632	738	675	665	466	343	195	88	45	18	12	2	3	5001

Figuur 5.13

Welke mate van samenhang verwacht je op grond van deze resultaten tussen *kniehoogte* (cm) en het *mouwlengte* (cm)?

Opgave 12

Bekijk de tabel met de correlatiecoëfficiënten van een aantal variabelen van de lengte van een vrouw.

	gewicht	bovenwijdte	taille	heup	ruglengte	rugbreedte	vuistomvang	kniehoogte	voetlengte
lengte	0,2124	-0,0779	-0,1578	-0,0107	0,5933	0,0647	0,2668	0,8263	0,6737

Tabel 5.2

a Welke variabelen hebben een sterke samenhang met lengte?

b Welke variabelen hebben een matige samenhang met lengte?

c Welke variabelen hebben een zwakke samenhang met lengte?

Opgave 13

Soms is er wel een samenhang tussen twee statistische variabelen, maar kun je niet spreken van een causale (oorzaak-gevolg) relatie. Leg uit dat er een samenhang is tussen ijsverkoop en de verkoop van zonnebrillen, maar dat er geen oorzaak-gevolgrelatie is tussen deze twee.

Opgave 14

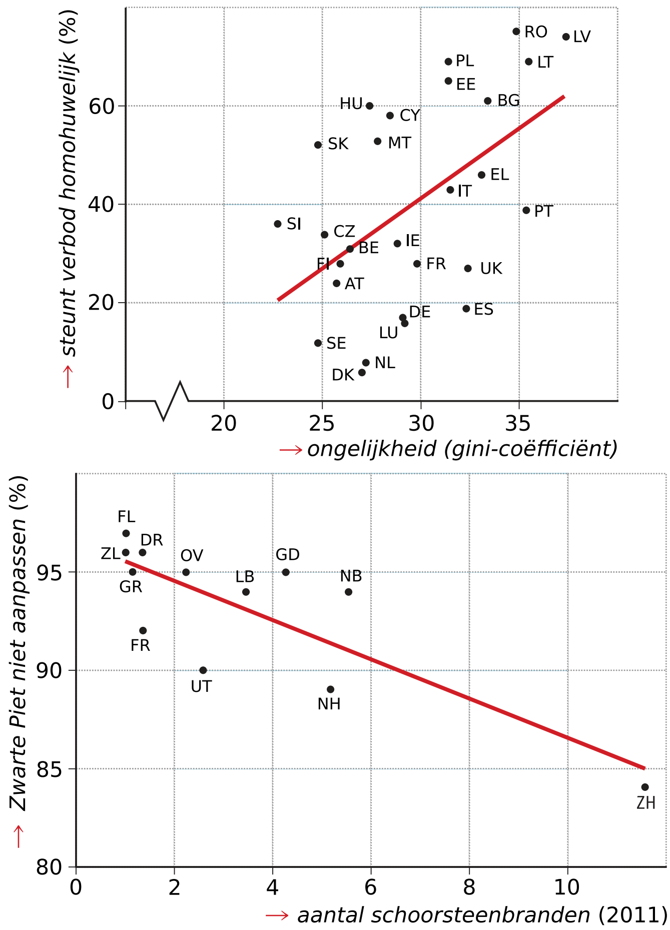
Bekijk deze puntenwolken.

a Wat stelt een punt voor in de eerste figuur? En in de tweede figuur?

b Tussen welke statistische variabelen wordt in de figuren gezocht naar samenhang?

c Beschrijf de samenhang tussen de variabelen op grond van de puntenwolken en de getekende trendlijn.

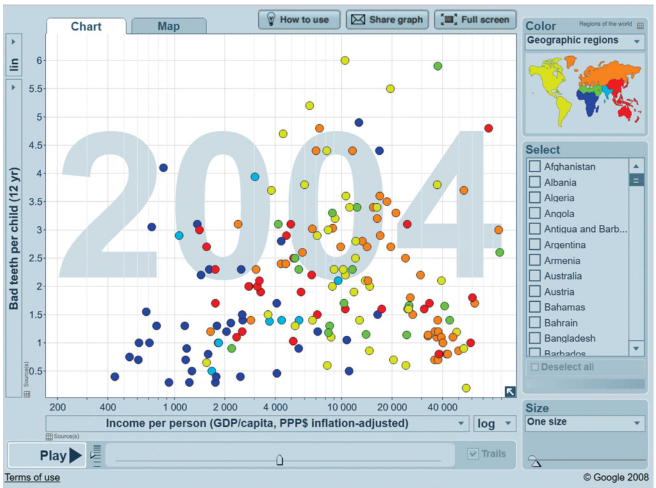
d Geef waar mogelijk een verklaring bij de puntenwolken.



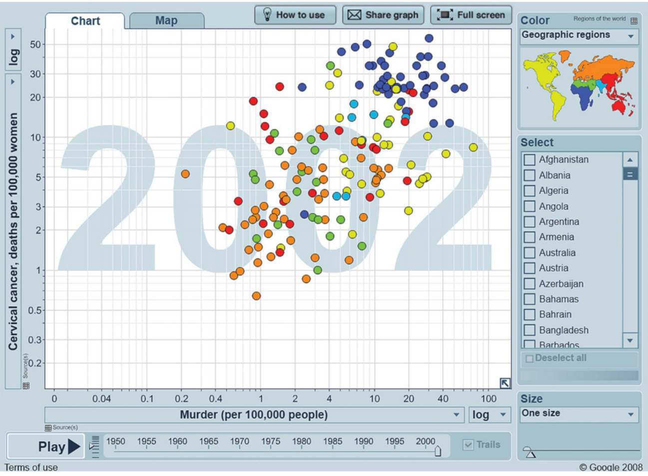
Figuur 5.14

Opgave 15

Met Gapminder (zie http://ww.gapminder.org/world) kun je puntenwolken bekijken. Je kunt de statistische variabelen zelf kiezen en door op play te drukken kun je het verloop in de tijd zien. Let wel op de schaalverdelingen: lin = lineair; log = logaritmisch. Wil je de lineaire samenhang zien, dan moeten beide schalen op lin staan.



Figuur 5.15



Figuur 5.16

a Door de vorm van de puntenwolk kun je een uitspraak doen over de lineaire samenhang. Bekijk de afbeeldingen en doe een uitspraak over de lineaire samenhang.

b Bij welke puntenwolk is er wel samenhang, maar geen lineaire samenhang?

Opgave 16

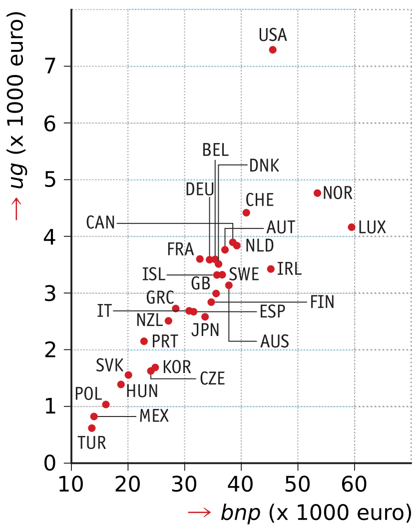
Bekijk de puntenwolk Bruto nationaal product (bnp) - Uitgaven gezondheidszorg (ug). Daarin zijn de resultaten weergegeven van een onderzoek in 30 landen. Het *bnp* en de *ug* zijn gemiddelden per inwoner.

a Is er een statistische samenhang?

b Is er een oorzakelijk verband?

c Stel een vergelijking op van een trendlijn die dit verband beschrijft.

d Hoeveel procent van het BNP wordt in Nederland uitgegeven aan de gezondheidszorg?

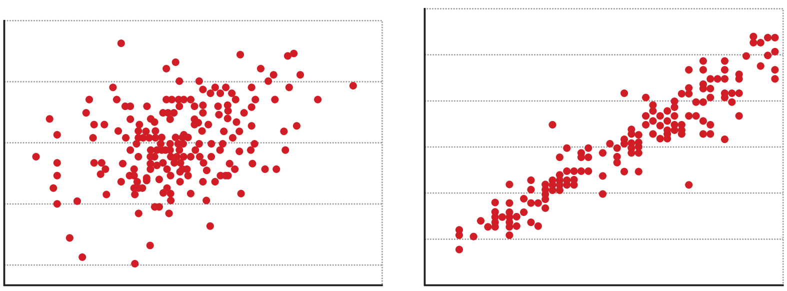


Figuur 5.17

Toepassen

Opgave 17: Huwelijken

In een onderzoek onder 199 echtparen is gevraagd naar de lengte en de leeftijd van de man en de vrouw. Onder andere werd onderzocht of er bij bepaalde eigenschappen van de gehuwden sprake was van een bepaalde statistische samenhang. Dit heeft geresulteerd in de volgende twee puntenwolken:

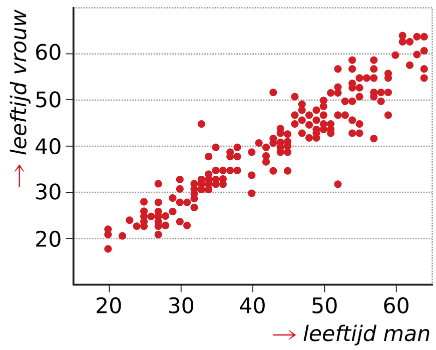


Figuur 5.18

Een van beide puntenwolken heeft betrekking op de leeftijden van de twee huwelijkspartners, waarbij de gegevens van de man op de horizontale as zijn uitgezet en die van de vrouw op de verticale as. De andere puntenwolk heeft betrekking op de lengte van beide partners. Ook hier zijn de gegevens van de man weer op de horizontale as uitgezet.

a Beredeneer dat, op basis van de vorm van de puntenwolk, de linker puntenwolk zeer waarschijnlijk betrekking heeft op de lengte en de rechter puntenwolk op de leeftijd.

b Bekijk de puntenwolk. Onderzoek met behulp van de puntenwolk of het in de betreffende 199 huwelijken vaker voorkomt dat de man ouder is dan de vrouw of dat het omgekeerde juist vaker voorkomt. Laat duidelijk zien hoe je tot je antwoord gekomen bent.



Figuur 5.19

Op basis van dergelijke puntenwolken wil men soms een schatting maken van de lengte of de leeftijd van een vrouw als men de lengte of de leeftijd van de man kent. Hoewel dit soort schattingen altijd een grote mate van onzekerheid hebben, is het toch mogelijk om aan te geven bij welk van de twee puntenwolken een dergelijke schatting het meest betrouwbaar zal zijn.

c Beredeneer bij welk van de twee puntenwolken, die met de leeftijden of die met de lengtes, een dergelijke schatting het meest betrouwbaar zal zijn.

In de tabel is een aantal kengetallen weergegeven uit het onderzoek.

	leeftijd man (jaar)	leef tijd vrou (jaa	lengte man (cm)	lengte vrouw (cm)
ge- mid del- de	42,6	40,	173	160
mi- nim	20	18	156	141
ma mu	64	64	195	176
sta daa afw kin	11,6	11,	6,9	6,2

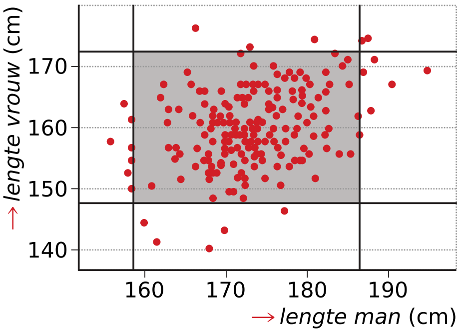
Tabel 5.3

Ervan uitgaande dat de lengtes en de leeftijden van de huwelijkspartners nagenoeg normaal verdeeld zijn, is met behulp van deze gegevens uit te rekenen dat 95% van de lengtes van de mannen tussen de 159,2 cm en 186,8 cm zal liggen.

d Leg uit hoe je aan deze waarden komt.

e Bepaal tussen welke twee lengtes 95% van de vrouwen zit.

Omdat 5% van de mannen buiten de berekende grenzen zal vallen, evenals 5% van de vrouwen, concludeert de onderzoeker dat in totaal 10% van de punten uit de puntenwolk buiten de getekende rechthoek zullen vallen.



Figuur 5.20

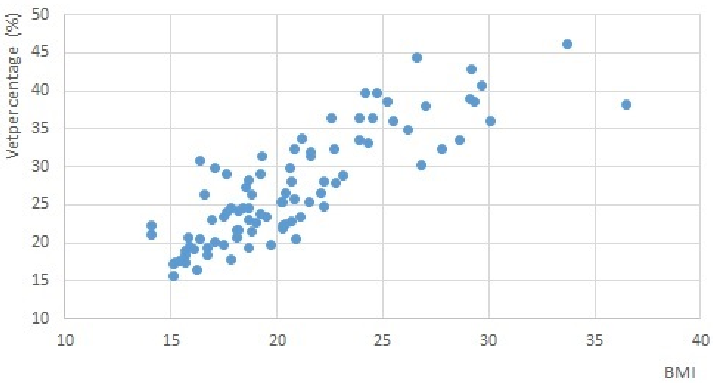
f Beargumenteer of je het met die conclusie eens bent of niet.

(bron: voorbeeldopgave Statistiek – syllabus havo A)

Testen

Opgave 18

Bekijk de puntenwolk BMI-Vetpercentage. Daarin zijn de resultaten weergegeven van een onderzoek onder 90 jongeren. BMI is een getal dat samenhangt met lengte en gewicht, vetpercentage is het percentage van het lichaamsgewicht dat bestaat uit vet.



Figuur 5.21

a Is er een statistische samenhang? Geef een schatting van de correlatiecoëfficiënt.

b Is er een oorzakelijk verband?

c Bij deze puntenwolk kun je een trendlijn tekenen die door $(15,17)$ en $(30,42)$ gaat. Welke formule hoort bij deze trendlijn?

d Voorspel met behulp van de gevonden trendlijn het vetpercentage van iemand met een BMI van 21.

Practicum

Met deze practica leer je hoe je de **de trendlijn** met de grafische rekenmachine tekent en berekent.

- **Trendlijn, correlatie en de TI84**
- **Trendlijn, correlatie en de TInspire**
- **Trendlijn, correlatie en de Casio**
- **Trendlijn, correlatie en de HPprime**
- **Trendlijn, correlatie en de NumWorks**

Met het volgende practicum kun je zien hoe je **de trendlijn en de correlatiecoëfficiënt in Excel** berekent. Dat is handig als je een grote set gegevens hebt. Je treft er ook in aan hoe je de **regressielijn**, dat is de meest geschikte lijn door de puntenwolk, kunt tekenen en er door Excel de vergelijking van kunt laten opstellen. In Excel heet die lijn de 'trendlijn'. In het volgende onderdeel hoor je daar meer over.

- **Correlatie en regressie**

OPMERKING:
Natuurlijk is het veel mooier om een eigen dataset met gegevens van leerlingen in jouw jaargroep te gebruiken. Die moet je dan wel eerst zelf maken: statistisch onderzoek!

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp ‘Verschillen en verbanden’ doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- begrip hypothese toetsen — nulhypothese — alternatieve hypothese — fout van de eerste soort — kritieke gebied
- binomiale toets — significantieniveau — eenzijdig en tweezijdig toetsen
- normale toetsing van het gemiddelde
- tekentoets — normale verschiltoets
- puntenwolk, spreidingsdiagram — correlatiecoëfficiënt — trendlijn, regressielijn

Activiteitenlijst

- bij hypothese toetsen de kans op een fout van de eerst soort bepalen
- een binomiale toets uitvoeren bij gegeven significantieniveau
- een normale toets van het gemiddelde uitvoeren bij gegeven significantieniveau
- een tekentoets of een normale verschiltoets uitvoeren bij gegeven significantieniveau
- in een puntenwolk een trendlijn, regressielijn tekenen en er een formule van opstellen — op grond van een (door Excel) gegeven correlatiecoëfficiënt bepalen of er in een puntenwolk sprake is van een sterke of een minder sterke samenhang

Achtergronden

In de **inductieve statistiek** probeer je om aan de hand van een steekproef informatie omtrent de gehele populatie te krijgen. Maar zo krijg je alleen beperkte informatie. De inductieve statistiek geeft methoden om daarmee uitspraken over de populatie als geheel te doen. Bekende methoden zijn hypothesen toetsen, schattingsmethoden, correlatie en regressie.

Francis Galton (1822—1911) richtte aan het Londense University College een leerstoel in de eugenetica op. De wiskundigen die deze leerstoel bezetten hebben veel voor de ontwikkeling van de mathematische statistiek betekend. Zij ontwikkelden vooral de methoden van statistische toetsing. **Ronald Fischer (1890—1962)** en zijn volgelingen ontwikkelden methoden die geschikt zijn voor kleine steekproeven en vonden diverse verdelingen die juist voor die situatie geschikt zijn. Verder formuleerden zij de principes van het hypothese toetsen en vonden een techniek die bekend werd als de variantieanalyse. De variantieanalyse draaide om het met wiskundige methoden scheiden van ‘echte effecten’ en ‘fouten’. Als een experiment een echt effect oplevert, blijkt uit de methode hoe sterk dit effect is in verhouding tot de fout.

Vanaf de jaren '20 van de vorige eeuw werd de statistiek voor wiskundigen een steeds volwaardiger onderwerp van onderzoek, waardoor de methoden sterk werden verfijnd en een exactere onderbouwing kregen. In 1928 publiceerden **Jerzy Neyman (1894—1981)** en **Egon Pearson (1895—1980)** (zoon van Karl Pearson) enkele geschriften waarin begrippen als ‘fout van de tweede soort’ en ‘betrouwbaarheidsinterval’ werden ingevoerd. In die tijd begon ook de industrie steeds meer de statistische methoden toe te passen, met name bij kwaliteitscontrole. Bovendien werd er gezocht naar steeds betere methoden om goede representatieve steekproeven te nemen.

Vanaf 1939 werd door **Abraham Wald (1902—1950)** de statistische beslissingstheorie ontwikkeld. Hierin werd de statistiek opgevat als een spel met de natuur als tegenstander. Hoewel dit een zeer algemene theorie is wordt hij tegenwoordig door heel veel statistici gebruikt.

Testen

Opgave 1

Een fabrikant beweert dat hoogstens 20% van de door hem geleverde producten niet deugt. Omdat de fabrikant toegeeft dat het percentage wel eens 20% zou kunnen zijn, is de nulhypothese $\text{H}_0 : p = 0{,}2$.
Om dit te toetsen kun je bijvoorbeeld een steekproef van 40 producten nemen.

a Hoe luidt de alternatieve hypothese?

b Wat stelt p voor?

Als significantieniveau wordt 5% genomen.

c Wat wil dat zeggen?

d Bij welke aantallen wordt de nulhypothese verworpen?

Opgave 2

De belastingdienst beweert dat wel 30% van de Nederlanders op enigerlei wijze de belasting ontduikt. Deze mening wil je toetsen met een significantieniveau van 5%.

a Bepaal het kritieke gebied in een steekproef van 400 Nederlanders.

b Je neemt een steekproef van 20000 Nederlanders die belasting betalen. Bepaal ook nu het kritieke gebied.

Opgave 3

In een tijdschrift stond: “In 2009 behaalde, landelijk gezien, 75% van de kandidaten op het vwo die examen deed in het vak wiskunde A een voldoende.” Een vwo-school had dat jaar 66 eindexamenkandidaten waarvan er 44 examen deden in wiskunde A. Slechts 7 kandidaten behaalden een onvoldoende. Bepaal de grootst mogelijke betrouwbaarheid waarmee je nog juist aan de uitspraak gedaan in het tijdschrift mag twijfelen.

Opgave 4

Een geldstuk is zuiver als de kans op munt gelijk is aan de kans op kruis. Of dat zo is, kun je onderzoeken door maar vaak genoeg met dit geldstuk te gooien.

a Is er met een significantie van 1% reden om aan te nemen dat het geldstuk niet zuiver is, als 47 van de 100 keer kruis gegooid wordt?

b Stel dat er 1000 keer wordt gegooid. Bij welk aantal keren kruis is er nu reden om aan te nemen dat het geldstuk niet zuiver is? Neem weer $\alpha = 0{,}01$.

Opgave 5

Op het etiket van een pot jam staat dat het percentage rietsuiker 12,4% is. Om dit te controleren wordt het percentage rietsuiker van 20 willekeurige potten jam bepaald.

11,9	11,1	11,4	12,6
11,6	11,4	11,7	11,8
11,8	11,8	12,4	12,5
11,7	12,3	11,3	12,2
11,9	12,6	11,7	11,8

Tabel 6.1

a Formuleer de hypothesen in deze situatie. Neem aan dat het percentage rietsuiker normaal verdeeld is.

b Schat met deze resultaten de standaardafwijking in het percentage rietsuiker.

Gebruik de gevonden waarde bij de rest van deze opgave.

c Toets je hypothese met een significantieniveau $\alpha = 0{,}10$.

d Bij welk gemiddeld percentage zou de nulhypothese verworpen worden?

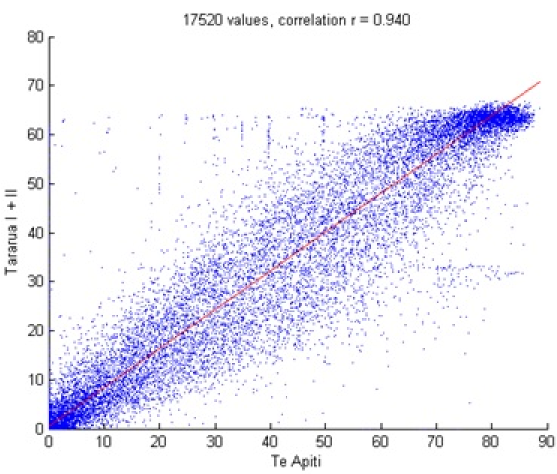
Opgave 6

In Nieuw-Zeeland staan grote windmolenparken. Twee daarvan zijn Te Apiti en Taranua. Deze parken zetten een deel van de windenergie om in elektrische energie. Van beide windparken is het elektrisch vermogen 17520 keer gemeten. De meetwaarden zijn in een puntenwolk gezet. Bekijk de afbeelding. Het vermogen werd gemeten in megawatt, MW.

a Hoeveel bedraagt het maximale vermogen van beide parken?

b Is er een statistisch verband? Is er een causaal verband?

c In de figuur is een trendlijn getekend. Leg uit waarom deze trendlijn door (0,0) gaat.



Figuur 6.1

d Stel de vergelijking van de trendlijn op door V_{tar} uit te drukken in V_{tea}, waarbij V het vermogen van het betreffende park is.

Toepassen

Opgave 7: The Great Blackout

Op 9 november 1965 viel de stroom uit in New York City, een storing die 24 uur duurde: 'The Great Blackout'. Negen maanden later schreven de kranten over een geboorte-explosie in New York City. De tabel vermeldt het aantal geboorten in New York City in een periode van 270 tot 290 dagen na 'The Great Blackout', in augustus 1966.
Het gemiddelde aantal geboorten per dag dat over deze periode ongeveer 435 bedraagt, blijkt echter niet zo veel hoger te liggen dan het gemiddelde over het gehele jaar 1966 dat 430 bedraagt. Neem aan dat het aantal geboorten per dag in New York City over het gehele jaar 1966 redelijk constant is.

a Laat zien dat het aantal dagen in de periode van 4 tot en met 23 augustus waarop het geboortegemiddelde boven het jaargemiddelde ligt, niet significant hoog is. Neem een significantieniveau van 5%.

In de 20 dagen voorafgaande aan 4 augustus 1966 bleek op zo veel dagen het aantal geboorten kleiner te zijn dan 430, dat men van een significante afwijking kan spreken bij een significantieniveau van 5%.

b Op hoeveel dagen was er sprake van een aantal geboorten beneden het gemiddelde?

4 augustus 1966 was een donderdag. Op de drie zondagen in de periode van 4 - 23 augustus 1966 was het aantal geboorten kleiner dan 379. Neem aan dat het aantal geboorten in New York City normaal is verdeeld met een gemiddelde van 430 en een standaardafwijking van 40 in de 50 weken die volgen op de periode van 4 - 23 augustus 1966.

c Toon aan dat tot op twee decimalen de kans dat op een willekeurig gekozen dag het aantal geboorten kleiner is dan 379, gelijk is aan $0{,}10$.

In de 50 zondagen die volgen op de periode van 4 - 23 augustus 1966 blijken er 10 zondagen te zijn met een aantal geboorten kleiner dan 379.

d Is het aantal zondagen met een aantal geboorten kleiner dan 379 significant hoog? Neem $\alpha = 5\%$.

dag	aantal geboorten
04-08	448
05-08	466
06-08	377
07-08	344
08-08	448
09-08	438
10-08	455
11-08	468
12-08	462
13-08	405
14-08	377
15-08	451
16-08	497
17-08	458
18-08	429
19-08	434
20-08	410
21-08	351
22-08	467
23-08	508

Tabel 6.2

Examen

Opgave 8: Basketballen

Jaarlijks controleert de materiaalcommissaris of de ballen van Flits voldoen aan de eisen die de basketbalbond stelt. Deze zijn:

> De omtrek van de bal mag niet minder bedragen dan 75 cm en niet meer dan 78 cm. Het gewicht mag niet minder zijn dan 600 g en niet meer dan 650 g.

Bij zo'n controle komt hij tot de ontdekking dat het gewicht van de ballen klopt, maar dat de omtrek van 15 ballen niet in orde is. Omdat hierbij ook een redelijk aantal nieuwe ballen is, stelt hij zich in verbinding met de leverancier: het bedrijf Balfa. Dit bedrijf beweert dat het dagelijks 125 ballen produceert, waarvan de omtrek normaal verdeeld is met een gemiddelde van $76,5$ cm en een standaarddeviatie van $0,70$ cm. Neem aan dat deze gegevens juist zijn.

a Toon aan dat men kan verwachten dat 4 ballen in de dagproductie niet voldoen aan de eisen die de bond stelt aan de omtrek.

b Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat in een aselecte steekproef van 5 door Balfa gemaakte ballen, elke bal voldoet aan de eisen die de bond stelt aan de omtrek.

Op grond van de eigen gegevens beweert de verkoper van Balfa dat gemiddeld hoogstens één op de twintig ballen niet aan alle eisen van de bond voldoet. De materiaalcommissaris heeft zo zijn twijfels. Zij spreken met elkaar af de bewering van de verkoper te toetsen door middel van een aselecte steekproef van 15 stuks bij een significantieniveau van 5%. Indien het resultaat de verkoper in het ongelijk stelt, krijgt Flits de 15 nieuwe ballen uit de steekproef gratis. X is het aantal ballen in de steekproef dat niet voldoet aan de eisen van de bond.

c Bereken de kleinste waarde van X waarbij Flits de ballen gratis krijgt.

(bron: examen vwo wiskunde A in 1990, tweede tijdvak)

Opgave 9: Kwaliteitscontrole

In een fabriek worden plastic zakken gevuld met suiker. De vulmachine staat afgesteld op 510 gram. Neem aan dat het gewicht van de zakken suiker normaal verdeeld is met een gemiddelde μ van 510 gram en een standaardafwijking s van 4 gram.

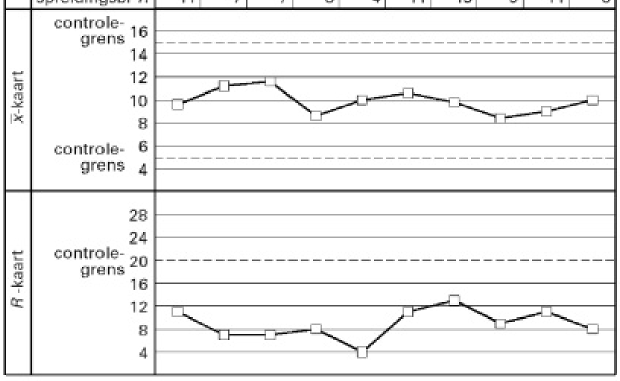
a Bereken hoeveel procent van alle zakken een gewicht minder dan 500 gram zal hebben.

Om de kwaliteit van het vulproces te bewaken, wordt elk uur een aselecte steekproef van 5 zakken suiker genomen. Van elke zak noteert men het gewicht. Ook wordt van de steekproef het totale gewicht T berekend.

b Bereken de kans dat het totale gewicht van de steekproef minder is dan 2525 gram.

Verder bepaalt men van elke steekproef het gemiddelde gewicht $\overline{x}$ en de spreidingsbreedte R (dat is het verschil tussen de grootste en de kleinste meting). Men noteert al deze gegevens op een controlekaart, de $\overline{x}/R$-kaart. Op de $\overline{x}/R$-kaart hieronder staan de meetresultaten van 10 steekproeven. Iedere steekproef bestaat uit 5 zakken. Op de controlekaart worden de afwijkingen van 500 gram bij ieder van deze 5 zakken genoteerd als x_1, x_2, x_3, x_4 en x_5. Zo heeft de derde zak van de tweede steekproef een gewicht van 509 gram. Dit is genoteerd als 9. Het gemiddelde van de eerste steekproef is $509{,}6$ gram. Dit wordt dan genoteerd als $9{,}6$. De spreidingsbreedte van de eerste steekproef is $515–504 = 11$ gram.

steekproefnr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	12	8	10	8	11	9	12	2	5	12
x_2	15	12	13	13	12	14	11	11	8	12
x_3	7	9	15	11	8	●	7	9	7	13
x_4	4	12	12	6	9	●	16	10	9	8
x_5	10	15	8	5	10	●	3	10	16	5
totaal T	48	56	58	43	50	53	49	42	45	50
gemiddelde $\overline{x}$	9,6	11,2	11,6	8,6	10	10,6	9,8	8,4	9	10
spreidingsbr R	11	7	7	8	4	11	13	9	11	8



Figuur 6.2

Bij steekproef nummer 6 zijn enkele gegevens onleesbaar geworden.

c Welke getallen kunnen hier bijvoorbeeld gestaan hebben? Licht je antwoord toe.

Bij de controle van het vulproces met behulp van de $\overline{x}/R$-kaart let men erop of $\overline{x}$ of R de zogeheten controlegrenzen overschrijden. Deze controlegrenzen zijn in de grafieken met stippellijnen aangegeven. Zodra bij een steekproef een van deze grenzen overschreden wordt, slaat men alarm. Op een gegeven moment slaat men alarm bij een steekproef, terwijl met de waarde van $\overline{x}$ niets mis is.

d Wat zouden de vijf gewichten in deze steekproef bijvoorbeeld kunnen zijn? Licht je antwoord toe.

De zakken zijn bedrukt met het bedrijfslogo. Soms is dit logo onscherp afgedrukt. Volgens de afdeling Verpakkingen heeft 5% van de zakken een onscherp logo. Een werknemer van die afdeling vermoedt echter dat dit percentage hoger is dan 5%. Er wordt een steekproef getrokken van 50 zakken. Op 6 van de 50 zakken is het bedrijfslogo onscherp.

e Onderzoek of de 6 zakken met het onscherpe bedrijfslogo voldoende aanleiding zijn om de werknemer in het gelijk te stellen. Neem als significantieniveau $\alpha = 0{,}025$.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2001, eerste tijdvak)

Opgave 10: Vakkenkeuze

In het voorjaar van 1994 zijn bij een onderzoek naar vakkenkeuze 344 jongens en 493 meisjes ondervraagd die toen eindexamen havo deden. Nederlands was voor iedereen verplicht. Havo-leerlingen moesten naast Nederlands nog ten minste 5 andere vakken kiezen. In deze tabel is te zien door hoeveel procent van de ondervraagden de andere vakken zijn gekozen.

Vakkenkeuze van jongens en meisjes op havo		
vak	jongens (in %)	meisjes (in %)
Duits	31,1	46,7
Engels	98,8	97,6
Frans	10,2	38,5
Aardrijkskunde	19,2	28,2
Geschiedenis	25,3	30,2
Economie	60,2	47,9
Handelswetenschappen	43,0	29,8
Wiskunde A	43,3	62,3
Wiskunde B	54,7	22,3
Biologie	23,5	45,2
Natuurkunde	57,6	17,0
Scheikunde	42,2	24,5
Tekenen	7,0	15,2
Maatschappijleer	2,9	4,5
Muziek	0,9	3,4
Handenarbeid	2,3	4,9
Textiele werkvormen	0,0	0,4
Spaans	0,0	0,6

Tabel 6.3

a Toon aan dat van de ondervraagde leerlingen meer meisjes dan jongens economie deden.

De meeste leerlingen hadden naast Nederlands 5 vakken gekozen. Sommige leerlingen hadden naast Nederlands 6 vakken gekozen. Geen van de leerlingen had naast Nederlands meer dan 6 vakken gekozen.

b Bereken hoeveel procent van de ondervraagde meisjes een extra vak deed.

Bij het onderzoek werd ook gevraagd of je, als je opnieuw zou mogen kiezen, weer precies hetzelfde vakkenpakket gekozen zou hebben. De onderzoekers vermoedden dat ten minste de helft van de kandidaten ontevreden was over hun huidige pakket. Een onderwijsdeskundige was het daar niet mee eens. Kort voor het onderzoek beweerde hij dat minder dan de helft van alle havo-eindexamenkandidaten achteraf liever een ander pakket gekozen zou hebben.
Neem aan dat de groep van 837 ondervraagde leerlingen een aselecte steekproef vormt uit alle havo-eindexamenkandidaten. Van deze groep zouden 359 leerlingen een ander pakket gekozen hebben, zo bleek uit het onderzoek.

c Onderzoek of bij een significantieniveau van 1% het onderzoeksresultaat voldoende aanleiding geeft om de onderwijsdeskundige gelijk te geven.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2001, tweede tijdvak)

Opgave 11: Stoppen met roken

Veel mensen beginnen op jonge leeftijd met roken en proberen daar op latere leeftijd weer mee op te houden. Dat lukt niet altijd. Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) publiceert regelmatig cijfers waarmee het rookgedrag van Nederlanders kan worden bestudeerd. In de tabel vind je enkele getallen.

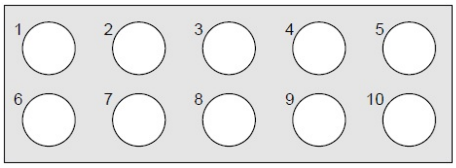
rokers en aantallen sigaretten		
jaar	2001	2005
aantal Nederlanders, in miljoenen	16,0	16,3
percentage rokers	33,3%	29,5%
gemiddeld aantal sigaretten per roker per jaar	4526	4271

Tabel 6.4

a Bereken met hoeveel procent het totale aantal gerookte sigaretten in 2005 is afgenomen ten opzichte van 2001.

Er zijn veel hulpmiddelen om minder te gaan roken of er zelfs helemaal mee te stoppen. Eén daarvan is het gebruik van tabletten van het merk Fumostop. Om na te gaan of Fumostop een middel is dat inderdaad helpt, wordt het volgende onderzoek uitgevoerd. Uit alle zware rokers wordt aselect een groep van 18 proefpersonen gekozen. Elke proefpersoon krijgt 10 tabletten die uiterlijk niet van elkaar verschillen. De tabletten zijn verpakt in doordrukstrips met bij elk tablet een nummer. Zie figuur.

Elke proefpersoon moet 10 dagen lang iedere dag bij het opstaan één willekeurig gekozen tablet innemen, het nummer van dat tablet noteren en bijhouden hoeveel sigaretten hij die dag rookt. Wat de proefpersonen niet weten maar de onderzoekers wel, is dat 5 van de tabletten inderdaad van het merk Fumostop zijn. De andere 5 tabletten bevatten geen enkele werkzame stof. We geven de 'echte' tabletten aan met F en de andere tabletten met NF. Aan de genoteerde tabletnummers kunnen de onderzoekers zien wanneer de F- en de NF-tabletten ingenomen zijn. Nico is één van de 18 proefpersonen. De mogelijkheid bestaat dat hij om de dag een F-tablet inneemt, waarmee bedoeld wordt dat hij de ene dag een F-tablet en de andere dag een NF-tablet inneemt.



Figuur 6.3

b Bereken de kans dat hij om de dag een F-tablet inneemt.

De proefpersonen kiezen hun tabletten iedere dag dus volledig aselect. Het kan dus gebeuren dat een proefpersoon de eerste dag een van de tabletten met nummer 1 of nummer 2 kiest.

c Bereken hoe groot de kans is dat 6 of meer proefpersonen op de eerste dag van het onderzoek een van de tabletten met nummer 1 of 2 kiezen.

De onderzoekers vermoeden dat het gebruik van F-tabletten leidt tot het roken van minder sigaretten. Om dat na te gaan, wordt van elke proefpersoon bijgehouden hoeveel sigaretten hij in totaal heeft gerookt op de vijf dagen met een F-tablet en op de vijf dagen met een NF-tablet. Het resultaat vind je in de tabel hieronder.

aantal sigaretten																		
proefpersoon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
bij gebruik van F-tabletten	106	90	109	72	103	118	124	103	89	87	92	145	101	100	97	112	104	101
bij gebruik van NF-tabletten	112	108	132	92	96	120	145	129	101	104	127	138	124	121	139	100	93	118

Tabel 6.5

d Onderzoek met behulp van een tekentoets of er voldoende aanleiding is om het vermoeden van de onderzoekers te bevestigen. Neem hierbij als significantieniveau 5%.

Van de mensen die in 2006 rookten, rookte 24,5% per dag 20 sigaretten of meer. Rokers rookten toen gemiddeld 11,4 sigaretten per dag. Tine wil onderzoeken of het aantal sigaretten per dag normaal verdeeld zou kunnen zijn. Ze bedenkt de volgende aanpak: "Als er sprake is van een normale verdeling, dan kan ik de bijbehorende standaardafwijking berekenen. Daarna kan ik nagaan of die waarde – in combinatie met dat gemiddelde 11,4 – tot een conclusie leidt."

e Bereken die standaardafwijking en toon daarmee aan dat het aantal sigaretten dat een roker per dag in 2006 rookte, niet normaal verdeeld kan zijn.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2010, eerste tijdvak)

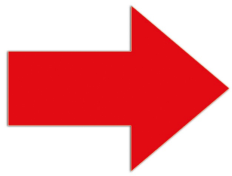
2

Meetkundige berekeningen

2.1 Vectoren en inproduct

Inleiding

Verplaatsingen (van bijvoorbeeld schepen, vliegtuigen, e.d.) kun je aangeven met vectoren. Vectoren hebben een lengte en een richting, de hoek ten opzichte van een vooraf afgesproken hoofdrichting (zoals het Noorden, of de positieve x-as. Je kunt ze in onderling loodrechte componenten ontbinden, die je weer kunt berekenen met behulp van sinus en cosinus.
Maar je kunt ze ook optellen, aftrekken, vermenigvuldigen met een getal en zelfs met elkaar vermenigvuldigen.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal, ook met kentallen;
- het inproduct van twee vectoren berekenen;
- de hoek tussen twee vectoren berekenen met behulp van het inproduct.

Voorkennis

- het begrip vector met draaihoek, lengte;
- vectoren in componenten ontbinden en die componenten berekenen met sinus en cosinus;
- bij een vector die is gegeven door twee loodrechte componenten de draaihoek en de lengte berekenen.

Verkennen

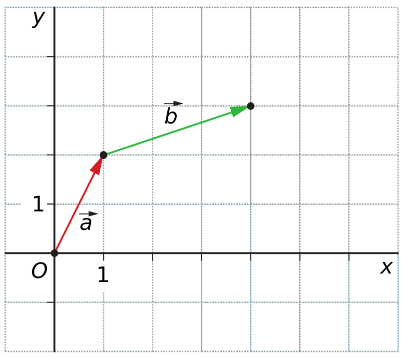
Opgave V1

Bekijk de applet

Voor vectoren in een cartesisch assenstelsel Oxy is standaard de positieve x-as de hoofdrichting. Elke hoek wordt gemeten vanaf die hoofdrichting tegen de wijzers van de klok in. Een vector kan worden beschreven door een component in de x-richting en een component in de y-richting:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De groottes van de componenten heten de kentallen. Elke vector heeft een lengte die je aangeeft met $|\vec{a}|$.



Figuur 1.2

a Hoeveel bedraagt de lengte van vector $\vec{a}$?

Elke vector heeft een richting die bepaald wordt door de draaihoek α ten opzichte van de positieve x-richting.

b Bereken de draaihoek van $\vec{a}$.

c Maakt het voor vector $\vec{a}$ wat uit als hij niet in $O(0,0)$ begint?

d Welke kentallen heeft de vector $3 \cdot \vec{a}$? Wat is er aan deze vector anders dan aan vector $\vec{a}$, de lengte of de richting?

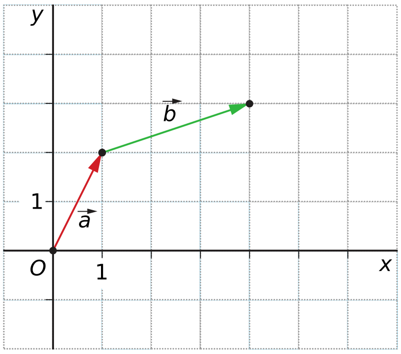
e Je ziet ook vector $\vec{b}$. Wat stelt $\vec{a} + \vec{b}$ voor? Kun je daarvan de kentallen bepalen?

Uitleg 1

Bekijk de applet

Voor vectoren in een cartesisch assenstelsel Oxy is standaard de positieve x-as de hoofdrichting. Elke hoek wordt gemeten vanaf die hoofdrichting tegen de wijzers van de klok in. Een vector kan worden beschreven door een component in de x-richting en een component in de y-richting:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Figuur 1.3

De groottes van de componenten heten de kentallen.

De lengte van deze vector is $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

De draaihoek α, ook wel de richtingshoek genoemd, bepaal je uit $\tan(\alpha) = \frac{a_y}{a_x} = \frac{2}{1} = 2$.

Hieruit volgt: $\alpha \approx 63{,}4°$.

Zo'n vector heeft geen vast startpunt, alleen de richting en de lengte zijn eigenschappen van elke vector.

In de eerste figuur zie je dat vector $\vec{a}$ vanuit de oorsprong O is getekend. Dit punt wordt het aangrijpingspunt genoemd. Er zijn gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben. Het aangrijpingspunt van vector $\vec{b}$ is $(1,2)$.

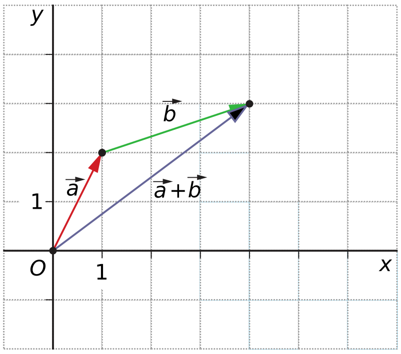
Je kunt een vector verlengen, de componenten worden dan beide met hetzelfde getal vermenigvuldigd: $3 \cdot \vec{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Het tegengestelde van $\vec{a}$ is $-\vec{a} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Voer je twee verplaatsingen na elkaar uit, dan doorloop je de vectoren na elkaar. Je legt ze dus achter elkaar, ‘staart aan kop’. De vector vanaf het allereerste startpunt tot het allerlaatste eindpunt is dan de som van beide vectoren, de vectoren worden opgeteld.

Je ziet dat dit eenvoudig kan door de kentallen op te tellen:

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



Figuur 1.4

Als je twee vectoren van elkaar wilt aftrekken, dan bedenk je dat dit gaat door het tegengestelde van de tweede vector bij de eerste op te tellen: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \text{-}\,\vec{b}$.

Opgave 1

Gegeven zijn de vectoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ \text{-}1 \end{pmatrix}$.

a Teken vector $\vec{c}$ in een cartesisch assenstelsel. Neem de oorsprong als aangrijpingspunt.

b Teken vector $\vec{d}$ in een cartesisch assenstelsel. Neem punt $(1,4)$ als aangrijpingspunt.

c Bereken de richtingshoeken van beide vectoren. Rond af op gehelen graden.

Opgave 2

In **Uitleg 1** zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeven.

a Teken $\vec{p_1} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p_1}$.

b Teken $\vec{p_2} = \vec{a} - \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p_2}$.

c Teken $\vec{p_3} = 3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p_3}$.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je kunt twee vectoren ook met elkaar vermenigvuldigen. Een manier om dit te doen heet het inproduct van twee vectoren. Onder het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ versta je:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

Hierin zijn $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$ de lengtes van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en is φ de hoek tussen beide vectoren. Deze afspraak gaat je straks in staat stellen om hoeken te berekenen.

$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zijn de twee eenheidsvectoren in een cartesisch xy-assenstelsel.

Deze twee vectoren maken een hoek van 90° en hebben daarom een inproduct van 0:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = |\vec{e}_x| \cdot |\vec{e}_y| \cdot \cos(90°) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Zo is ook:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = |\vec{e}_x| \cdot |\vec{e}_x| \cdot \cos(0°) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

En ook geldt $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$.

Elke vector is te schrijven als een samenstelling van eenheidsvectoren. Neem bijvoorbeeld:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\,\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y$ en

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\,\vec{e}_x + 1\,\vec{e}_y$.

Voor het inproduct van beide krijg je dan:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(-2\,\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y\right) \cdot \left(2\,\vec{e}_x + 1\,\vec{e}_y\right)$$

Neem nu aan dat ook voor het inproduct van twee vectoren de regels voor het wegwerken van haakjes gelden. Gebruik verder de regels hierboven. Je vindt dan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1.$$

Kennelijk hoef je alleen de overeenkomstige kentallen te vermenigvuldigen en de twee uitkomsten op te tellen om het inproduct van beide vectoren te krijgen.

Opgave 3

Het inproduct van twee vectoren wordt gegeven door kentallen in een cartesisch assenstelsel te bepalen, en de vectoren te ontleden in eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

a Laat zien dat het inproduct van $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ inderdaad $-2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1$ is door haakjes weg te werken.

b Bereken op dezelfde manier met behulp van eenheidsvectoren het inproduct van $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Opgave 4

In het algemeen geldt voor het inproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is. Neem nu $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gebruik het inproduct van beide vectoren om de hoek φ ertussen te berekenen.

Opgave 5

Neem $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en bereken het inproduct van beide vectoren. Gebruik dit inproduct om de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te berekenen.

Opgave 6

Neem $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ en laat zien dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **vector** $\vec{v}$ is een grootheid met lengte en richting.

Je kunt hem beschrijven door

- de **lengte** r van de vector, en
- de **richtingshoek** α, de hoek die de vector met de x-richting maakt.

De richtingshoek wordt linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten.

Je kunt een vector beschrijven met **kentallen**: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

De lengte van deze vector is $|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

De getekende vector heeft de oorsprong O als aangrijpingspunt. Er zijn echter gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben. In de wiskunde zijn twee vectoren gelijk als hun lengtes en hun richtingshoeken gelijk zijn. Het aangrijpingspunt is dus geen eigenschap van een vector. Een vector die vanuit punt A naar punt B wijst, schrijf je als $\overrightarrow{AB}$.

Vector $\vec{v}$ maak je langer (of korter) door hem met een getal te vermenigvuldigen: $k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} k \cdot v_x \\ k \cdot v_y \end{pmatrix}$.

Als $k = -1$ dan krijg je $-\vec{v}$, het tegengestelde van $\vec{v}$.

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je optellen door ze ‘staart aan kop’ te leggen. Je krijgt dan de somvector van $\vec{a}$ en $\vec{b}$: $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$.

De kentallen van $\vec{r}$ ontstaan door de overeenkomstige kentallen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ op te tellen.

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je aftrekken door gebruik te maken van $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + -\vec{b}$.

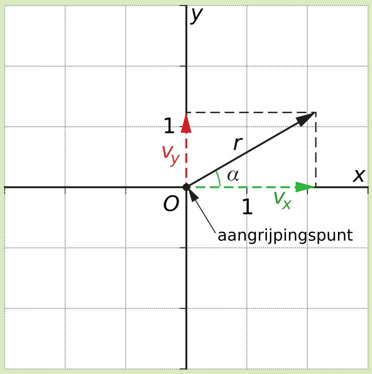
Als je $\vec{a}$ en $-\vec{a}$ optelt krijg je de nulvector $\vec{0}$. De nulvector heeft geen richting en lengte 0.

Het **inproduct** of **inwendig product** van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is.

Als $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$, dan is $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.



Figuur 1.5

Dus: $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

Hiervan kun je goed gebruik maken bij het berekenen van de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Belangrijk is nog dat van twee onderling loodrechte vectoren het inproduct altijd 0 is omdat de hoek tussen beide 90° is.

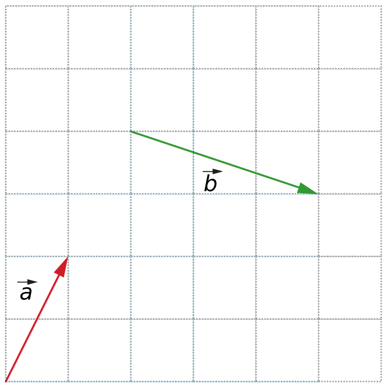
Voorbeeld 1

Als je de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ optelt, krijg je

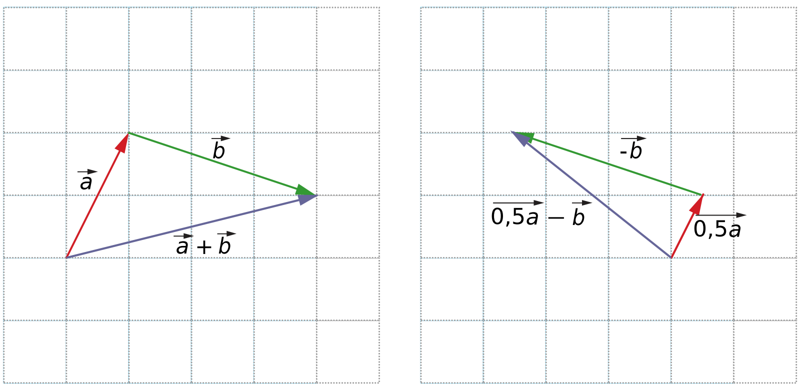
$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bij het tekenen van deze optelling, leg je de ene vector na de andere. Dit heet de ‘staart aan kop’ methode.

Op dezelfde manier maak je zelf bijvoorbeeld $0{,}5\,\vec{a} - \vec{b}$.



Figuur 1.6



Figuur 1.7

Bekijk de applet

Opgave 7

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je vectoren kunt optellen en aftrekken en vermenigvuldigen met een getal. Daarin zijn gegeven de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a Teken de vector $2\,\vec{a}$ en bepaal de kentallen ervan.

b Teken de vector $2\,\vec{a} + 1{,}5\,\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

c Teken de vector $-2\,\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

d Teken de verschilvector van $-\vec{a}$ en $\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

Opgave 8

Gegeven zijn in een cartesisch assenstelsel de punten $A(3,4)$ en $B(5,2)$ en de vectoren $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ en $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$.

a Laat zien dat $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

Gegeven zijn in een cartesisch assenstelsel de punten $A\left(a_x,a_y\right)$ en $B\left(b_x,b_y\right)$ en de vectoren $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ en $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$.

b Laat zien dat $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

Voorbeeld 2

Een sportvliegtuigje vliegt vanaf vliegveld O eerst naar een punt dat 3 km oostelijker en 5 km noordelijker ligt en van daaruit naar een punt dat 2 km oostelijker en 4 km zuidelijker ligt.
Beschrijf deze vlucht als de som van twee vectoren en bereken de lengte van de vlucht. De retourvlucht is de kortste route terug.
Bereken de vector die de retourvlucht beschrijft en de bijbehorende afstand en draaihoek (ten opzichte van het oosten).

Antwoord

Voer een assenstelsel in met in $O(0,0)$ het startpunt van de vlucht, de x-as als oostelijke richting en de y-as als noordelijke richting.

De vlucht kun je dan beschrijven als $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

De lengte van de vlucht is

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|=\sqrt{3^2+5^2}+\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{34}+\sqrt{20}\approx 10{,}3 \text{ km.}$$

De retourvlucht is $-\vec{v}=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$.

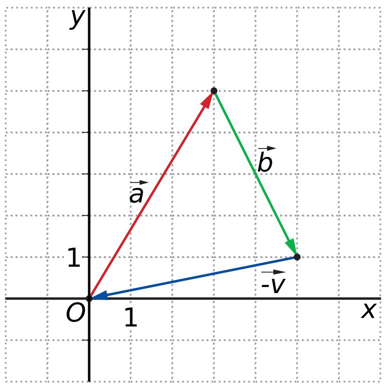
En de lengte van de retourvlucht is

$$|-\vec{v}|=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{26}\approx 5{,}1 \text{ km.}$$

Voor de draaihoek φ die daarbij hoort, geldt:

$\tan(\varphi-180°)=\frac{-1}{-5}=0{,}2$.

Dit geeft $\varphi\approx 191°$.



Figuur 1.8

Opgave 9

Een sportvliegtuigje vliegt vanaf O eerst naar een punt dat 2 km westelijker en 5 km noordelijker ligt en daarvandaan naar een punt dat 6 km oostelijker en 7 km zuidelijker ligt.

a Teken deze vlucht in een cartesisch assenstelsel met in $O(0,0)$ het startpunt van de vlucht, de x-as als oostelijke richting en de y-as als noordelijke richting.

b Beschrijf deze vlucht als de som van twee vectoren en bereken de lengte in km van de vlucht.

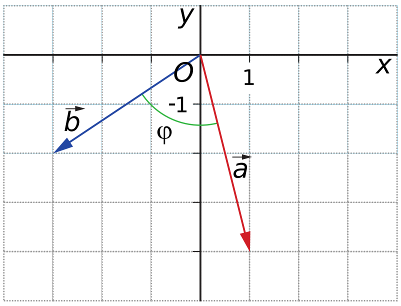
c De retourvlucht is de kortste weg terug. Geef de vector die de retourvlucht beschrijft en de bijbehorende draaihoek (ten opzichte van het oosten) en lengte.

d Bereken in km de lengte van de retourvlucht.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Figuur 1.9

Antwoord

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot -3 + -4 \cdot -2 = 5$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$, dus $5 = \sqrt{17} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos(\varphi)$.

Voor de hoek φ tussen beide vectoren geldt: $\cos(\varphi) = \frac{5}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}}$.

Dus $\varphi \approx 70{,}3°$.

Opgave 10

De hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ is ongeveer 70,3°.

a Controleer dit met een berekening.

b Bereken de hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ in één decimaal nauwkeurig.

c In de applet kun je andere vectoren kiezen. Bereken zelf telkens de hoek ertussen met behulp van het inproduct. In de applet vind je het antwoord.

Opgave 11

Met behulp van voorbeelden kun je uitzoeken wanneer twee vectoren een inproduct van 0 hebben.

a Geef een voorbeeld van twee vectoren waarvoor dat geldt. Laat door berekening zien dat het inproduct dan ook 0 is.

b Toon algebraïsch aan dat de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} kb \\ -ka \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.

c Geef ook een voorbeeld van twee vectoren waarvan het inproduct gelijk is aan het product van hun lengtes.

Verwerken

Opgave 12

Bereken telkens de hoek tussen de gegeven vectoren in graden nauwkeurig.

a $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

b $\vec{p}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ en $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

c $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ en $\vec{w}=\begin{pmatrix}-4\\12\end{pmatrix}$

Opgave 13

Een zeilboot vaart op het IJsselmeer vanuit de haven van Enkhuizen naar een punt dat 5 km oostelijker en 3 km zuidelijker ligt en van daaruit naar een punt dat 2 km westelijker en 8 km noordelijker ligt.

a Teken deze zeiltocht in een cartesisch assenstelsel met in $O(0,0)$ het startpunt, de x-as als oostelijke richting en de y-as als noordelijke richting.

b Beschrijf de zeiltocht als de som van twee vectoren en bereken de lengte in km van deze zeiltocht.

c De retourvaart is de kortste weg terug. Geef de vector die de retourtocht beschrijft met de bijbehorende en draaihoek (t.o.v. het oosten).

d Bereken in km de lengte van de retourvaart.

Opgave 14

Gegeven zijn de vectoren:

$\vec{a}=\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-15\\17\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{e}=\begin{pmatrix}13\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{f}=\begin{pmatrix}13\\-25\end{pmatrix}$.

Bepaal de kentallen van de vectoren

- $\vec{v_1}=\vec{b}+\vec{c}$
- $\vec{v_2}=\vec{f}+0{,}5\,\vec{c}$
- $\vec{v_3}=\vec{a}-\vec{e}-2\,\vec{d}$
- $\vec{v_4}=\vec{e}+\vec{d}-\vec{b}$

Opgave 15

a Bereken de hoek tussen $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ in graden nauwkeurig.

b Geef een vector $\vec{c}$ die loodrecht staat op $\vec{b}$ en twee keer zo lang is.

Opgave 16

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met hoekpunten $A(-23,61)$, $B(7,51)$, $C(-3,91)$ en $D(-33,101)$. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van $ABCD$.

a Bepaal de componenten van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$. Toon met behulp van deze twee vectoren aan dat vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen vectoren $\overrightarrow{SA}$ en $\overrightarrow{SB}$.

Toepassen

Opgave 17: Bootje in een sloot

Een bootje wordt door een jongen en een twee keer zo sterke man aan touwen die beide aan dezelfde plek op de boeg van de boot zijn bevestigd door het midden van een sloot getrokken. De jongen en de man lopen ieder aan een andere kant van de sloot. De boot blijft in het midden van de sloot varen. De man trekt met een kracht van 10 N en onder een hoek van 20° met de vaarrichting.

a Construeer in een bovenaanzicht de vectoren die de twee trekkrachten voorstellen.

b Bereken de richtingshoek van de kracht die de jongen uitoefent in graden nauwkeurig.

c Welke arbeid verrichten beiden samen als ze het bootje 1 km voort trekken?

d Verrichten ze beiden evenveel arbeid?

Opgave 18: Gegeven hoek tussen twee vectoren

Voor welke exacte waarde(n) van a is de hoek tussen de vectoren $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix}$ gelijk aan 45°?

Testen

Opgave 19

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a Bereken de lengte van beide vectoren in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de richtingshoek van beide vectoren in graden nauwkeurig.

c Bereken de kentallen van de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$ en $0{,}5\,\vec{a} - \vec{b}$.

d Bereken de kentallen van de vector $\vec{c}$ zo, dat $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opgave 20

Gegeven is de vierhoek $PQRS$ met $P(-27,21)$, $Q(23,21)$, $R(33,51)$ en $S(3,61)$.

a Toon aan dat deze vierhoek een vlieger is.

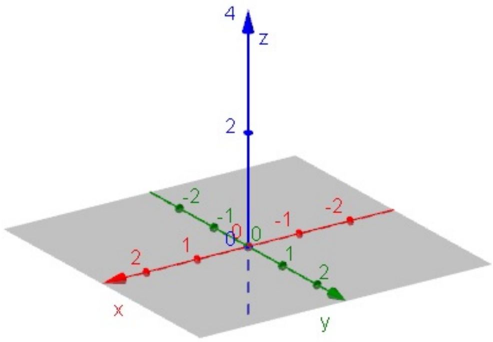
b Bereken de grootste hoek van deze vierhoek.

c A,B,C en D zijn de middens van de opeenvolgende zijden van de vlieger. Wat voor bijzondere vierhoek is $ABCD$? Toon dit ook aan!

2.2 Coördinaten in 3D

Inleiding

Het werken met coördinaten en vectoren in meetkundige situaties is vooral zo handig omdat je het snel kunt uitbreiden van een tweedimensionaal Oxy-assenstelsel naar een driedimensionaal $Oxyz$-assenstelsel.



Figuur 2.1 Figuurapplet

Je leert in dit onderwerp

- werken met coördinaten en vectoren in een 3D cartesisch assenstelsel;
- afstand tussen twee punten berekenen in 3D;
- ruimtelijke figuren in een 3D cartesisch assenstelsel tekenen.

Voorkennis

- werken in een cartesisch assenstelsel in 2D;
- met vectoren rekenen in 2D.

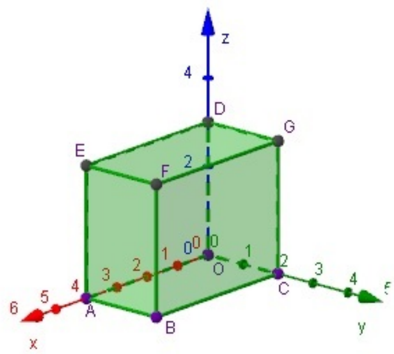
Verkennen

Opgave V1

Hier zie je een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$-assenstelsel.

Punt F heeft de coördinaten $(4,2,3)$.
Je ziet: eerst de x-coördinaat, dan de y-coördinaat en tenslotte de z-coördinaat.

Zo is vector $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Figuur 2.2 Figuurapplet

a Schrijf de coördinaten van alle andere hoekpunten van balk $OABC.DEFG$ op.

b Schrijf de kentallen van de vectoren $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{EG}$ en $\overrightarrow{AG}$.

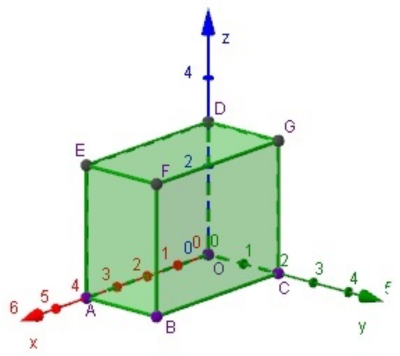
c Hoe bereken je de lengte van $\overrightarrow{OF}$?

d Hoe zou je de afstand van punt A tot punt G berekenen?

Uitleg 1

In de ruimte kun je elk punt van coördinaten voorzien door een x-as, een y-as en een z-as loodrecht op elkaar te zetten en van dezelfde schaalverdeling te voorzien. Het snijpunt van de drie assen is O. Je hebt dan een driedimensionaal cartesisch assenstelsel.

Hier zie je een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$-assenstelsel met balk $OABC.DEFG$.
Punt F heeft de coördinaten $(4{,}2{,}3)$.
Je ziet: eerst de x-coördinaat, dan de y coördinaat en tenslotte de z-coördinaat.
De coördinaten van enkele andere hoekpunten zijn:
$O(0{,}0{,}0)$, $A(4{,}0{,}0)$, $B(4{,}2{,}0)$ en $D(0{,}0{,}3)$.



Figuur 2.3

In een 3D assenstelsel kun je ook werken met vectoren, alleen in plaats van twee kentallen heb je er nu drie. Zo is:

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verder is:

$$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ook het midden van een lijnstuk kun je op dezelfde manier berekenen als in een gewoon tweedimensionaal assenstelsel. Ga na dat voor het midden M van lijnstuk BF geldt: $M\left(\frac{4+4}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = M(4; 2; 1{,}5)$.

De lengte van $\overrightarrow{OF}$ kan worden berekend door de stelling van Pythagoras uit te breiden naar drie dimensies: $\left|\overrightarrow{OF}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{29}$.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Werken met coördinaten en vectoren in drie dimensies is in veel gevallen een eenvoudige uitbreiding van het werken in twee dimensies.

a Beschrijf de vectoren $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DF}$ en $\overrightarrow{DB}$ met kentallen.

b Bereken het midden N van lijnstuk EG. Laat zien dat N ook het midden van lijnstuk DF is.

c Laat zien door twee keer de stelling van Pythagoras in een rechthoekige driehoek toe te passen hoe de lengte van $\overrightarrow{OF}$ wordt berekend.

d Bereken de lengtes van de vectoren $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{EC}$ en $\overrightarrow{DF}$.

Opgave 2

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je afstanden tussen punten kunt berekenen in 3D.

a Bereken de afstand tussen de punten B en D.

M is het midden van BF en N is het midden van EG.

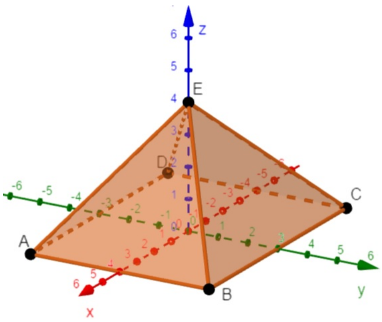
b Bereken $|MN|$.

Opgave 3

Getekend is piramide $ABCD.E$ in een 3D cartesisch assenstelsel.

a Geef de coördinaten van de hoekpunten van de piramide.

b Beschrijf de vectoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ en $\overrightarrow{CE}$ met kentallen.



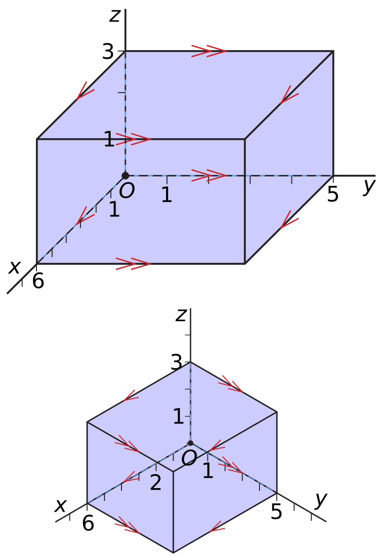
Figuur 2.4

Uitleg 2

Je wilt berekeningen uitvoeren in een balk met ribben van 6, 5 en 3. Het werken met coördinaten en vectoren kan daarbij handig zijn, dus je wilt deze balk in een 3D-assenstelsel tekenen.
Hoe doe je dit?

Teken op gewoon roosterpapier de y-as naar rechts, de z-as omhoog en de x-as schuin naar voren. De maatstreepjes op de x-as neem je iets dichter bij elkaar dan die op de andere twee assen, om de figuur beter te laten lijken. Zie de eerste figuur.

Je kunt ook zowel de x-as als de y-as schuin naar voren tekenen. Dan teken je de maatstreepjes op de y-as ook dichter bij elkaar. Dit zie je in de tweede figuur.
Verder zie je in de figuren hoe je van evenwijdigheid gebruik maakt om een keurige parallelprojectie te krijgen. Natuurlijk mag je zelf kiezen welke de ribben van 6, welke die van 5 en welke die van 3 worden. Het is handig om er voor te zorgen dat drie ribben op de assen komen te liggen, zodat één van de hoekpunten $O(0,0,0)$ wordt.



Figuur 2.5

Opgave 4

In **Uitleg 2** zie je hoe je een balk in een cartesisch 3D-assenstelsel kunt weergeven.
Neem aan dat $OABC$ het grondvlak is met $B(6,5,0)$ en dat $DEFG$ het bovenvlak is met $D(0,0,3)$.

a Wat is het voordeel van het tekenen in een 3D-assenstelsel?

b Geef de coördinaten van alle overige hoekpunten van balk $OABC.DEFG$.

c Bereken de lengte van $\overrightarrow{AG}$.

Opgave 5

Teken een balk met ribben van 4, 7 en 5 in een 3D cartesisch assenstelsel.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In de ruimte kun je elk punt van coördinaten voorzien door een x-as, een y-as en een z-as loodrecht op elkaar te zetten en van dezelfde schaalverdeling te voorzien. Hun snijpunt is de oorsprong $O(0,0,0)$. Je hebt dan een **driedimensionaal cartesisch assenstelsel** gemaakt.

Een **punt** P heeft in 3D cartesisch assenstelsel de coördinaten (x,y,z).

Een **vector** $\vec{v}$ heeft in een 3D cartesisch assenstelsel drie kentallen: $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$. Je kunt met vectoren op dezelfde wijze rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen met een getal) als je in een 2D cartesisch assenstelsel gewend bent.

De **lengte** van vector $\vec{v}$ is: $|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$.

Als $P(x_P,y_P,z_P)$ en $Q(x_Q,y_Q,z_Q)$ dan is $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$.

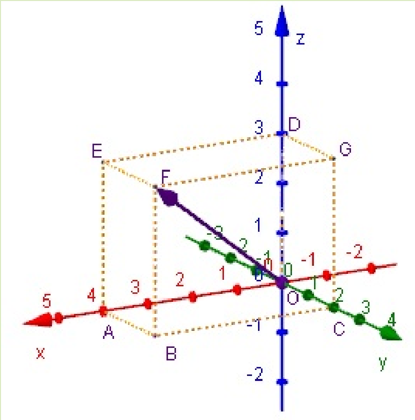
En de lengte van vector $\overrightarrow{PQ}$ is:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}.$$

Het midden M van lijnstuk PQ is $M\left(\frac{x_P+x_Q}{2},\frac{y_P+y_Q}{2},\frac{z_P+z_Q}{2}\right)$.

De kubus die je hier ziet is een **parallelprojectie**, wat betekent dat lijnen die in werkelijkheid parallel zijn, dat ook in de figuur zijn. In een parallelprojectie zit elk midden van een lijnstuk ook echt in de figuur in het midden van dat lijnstuk.

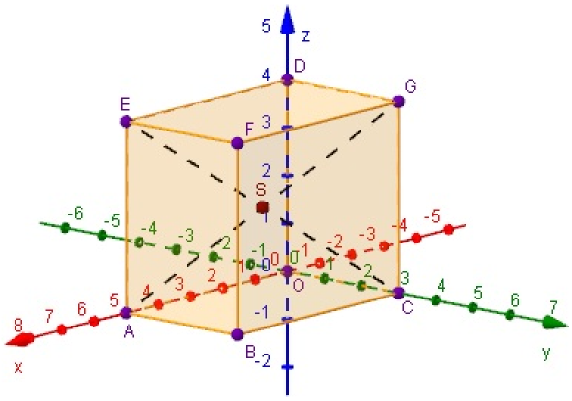
In de kubus is vector $\overrightarrow{CE}$ getekend.



Figuur 2.6 Figuurapplet

Voorbeeld 1

Je ziet hier in een 3D cartesisch assenstelsel een balk $OABC.DEFG$ met $A(5,0,0)$, $C(0,3,0)$ en $D(0,0,4)$. De lijnstukken AG en CE snijden elkaar in punt S.
Bereken de lengte van lijnstuk ES.



Figuur 2.7 **Figuurapplet**

Antwoord

Deze lengte kun je eenvoudig meetkundig berekenen door rechthoek $ACGE$ te tekenen en daarin met de stelling van Pythagoras te werken. Je moet dan wel inzien, dat $ACGE$ een rechthoek is en in een vlakke afbeelding van een ruimtelijke figuur zijn rechte hoeken niet altijd duidelijk. Rekenen met coördinaten en vectoren gaat daarentegen bijna altijd goed zonder rechte hoeken te herkennen.

Lees uit de figuur af dat $A(5,0,0)$, $C(0,3,0)$, $G(0,3,4)$ en $E(5,0,4)$. Verder is S het midden van bijvoorbeeld AG. (In een parallelprojectie zoals deze figuur zit elk midden van een lijnstuk ook echt in de figuur in het midden van dat lijnstuk.) En dus is $S(2{,}5; 1{,}5; 2)$.

Hieruit volgt $\overrightarrow{ES} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

En dus is de lengte van ES: $\left|\overrightarrow{ES}\right| = \sqrt{(-2{,}5)^2 + (1{,}5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12{,}5}$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Reken de coördinaten van S na en bereken exact de lengte van $\overrightarrow{AS}$.

M is het midden van BF.

b Bereken exact de lengte van SM.

c Punt N is het midden van OM. Bereken exact de afstand dit punt tot punt E.

P ligt op CG zo, dat $PG : PC = 1 : 3$.

d Bereken exact de afstand P tot punt S.

Opgave 7

Hier zie je een regelmatige vierzijdige piramide in een cartesisch 3D-assenstelsel. Het grondvlak $OABC$ is dus een vierkant met $A(4,0,0)$ en de top $T(2,2,6)$ ligt recht boven het midden van het snijpunt S van de diagonalen van dit vierkant.

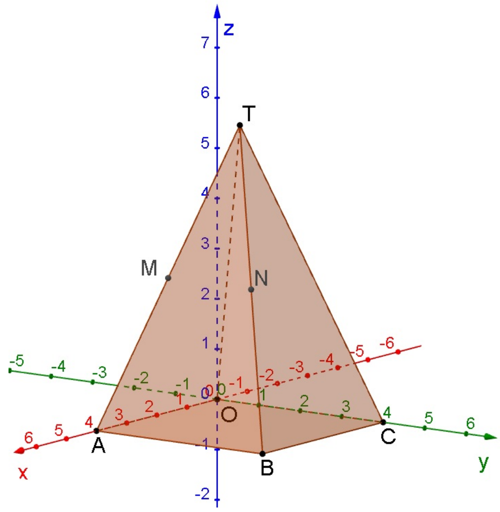
M is het midden van AT en N het midden van BT.

a Laat zien dat $\overrightarrow{ST}$ evenwijdig is met de z-as.

b Bereken exact de lengte van CM.

c Wat voor soort vierhoek is $COMN$? En hoe kun je dat afleiden uit de vectoren $\overrightarrow{OC}$ en $\overrightarrow{MN}$?

d Bereken exact de oppervlakte van vierhoek $COMN$.



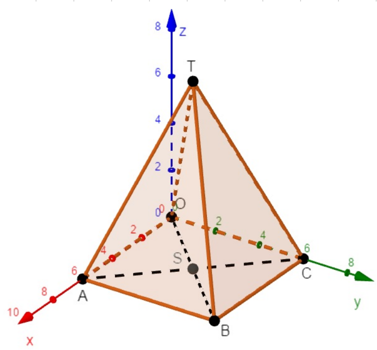
Figuur 2.8

Voorbeeld 2

Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $T.OABC$ met $OA = 6$ en $TS = 8$, waarbij S het snijpunt van OB en AC is.
Geef de coördinaten van de overige hoekpunten en teken deze piramide in een 3D cartesisch assenstelsel.

Antwoord

$O(0,0,0)$, $A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$, $C(0,6,0)$ en $T(3,3,8)$.
Teken in een 3D-assenstelsel eerst het grondvlak $OABC$.
Zet een kruis in het grondvlak om S te bepalen en ga van daaruit 8 naar boven om T te vinden. (T ligt recht boven S omdat de piramide regelmatig is.)



Figuur 2.9

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**. Verder is M het midden van AT en N het midden van BC.

a Geef de coördinaten van M en N en bereken de lengte van $\overrightarrow{MN}$.

b Bereken de hoek tussen de ribben AB en AT ofwel $\angle TAB$.

Opgave 9

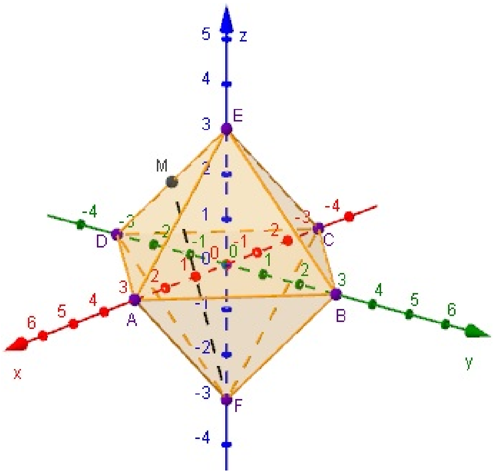
Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is de hoogte 4 en het grondvlak $ABCD$ een vierkant met $A(0,0,0)$ en $C(2,4,0)$.

a Bepaal de coördinaten van alle andere hoekpunten

b Teken de piramide.

Voorbeeld 3

Je ziet hier een 3D cartesisch assenstelsel waarin ook negatieve coördinaten voorkomen. De getekende figuur is een regelmatig achtvlak (octaëder) met $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $E(0,0,3)$ en $F(0,0,-3)$. M is het midden van ED. Bereken de lengte van FM.



Figuur 2.10 **Figuurapplet**

Antwoord

Een zuiver meetkundige aanpak is waarschijnlijk het snelst. Bijvoorbeeld met de stelling van Pythagoras in een geschikte driehoek. Maar je kunt ook gewoon gaan rekenen zonder echt de figuur te gebruiken.

M ligt midden tussen $D(0,-3,0)$ en $E(0,0,3)$ en is daarom $M(0;-1{,}5;1{,}5)$.
En dus is de lengte van FM:

$$\left|\overrightarrow{FM}\right| = \sqrt{(0-0)^2 + (-1{,}5-0)^2 + (1{,}5--3)^2} = \sqrt{22{,}5}.$$

Opgave 10

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Bereken exact de lengte van BM.

b Bereken exact de lengte van CM.

N is het midden van BF.

c Bereken exact de lengte van MN.

Opgave 11

Van de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is $A(2,-2,0)$, $B(2,2,0)$ en $T(0,0,4)$.

a Teken deze piramide in een cartesisch 3D-assenstelsel. Geef ook de coördinaten van C en D.

b Bereken exact de lengtes van de vier opstaande ribben van de piramide.

Punt P ligt op BT zo, dat $BP : PT = 3 : 1$.

c Bereken exact $\left|\overrightarrow{DP}\right|$.

Verwerken

Opgave 12

Gegeven zijn de punten $A(2,5,-6)$ en $B(-1,7,-4)$.

a Geef de kentallen van $\overrightarrow{AB}$.

b Bereken exact de lengte van $\overrightarrow{AB}$.

Opgave 13

Gegeven is balk $OABC.DEFG$ met $A(6,0,0)$, $C(0,4,0)$ en $D(0,0,6)$.

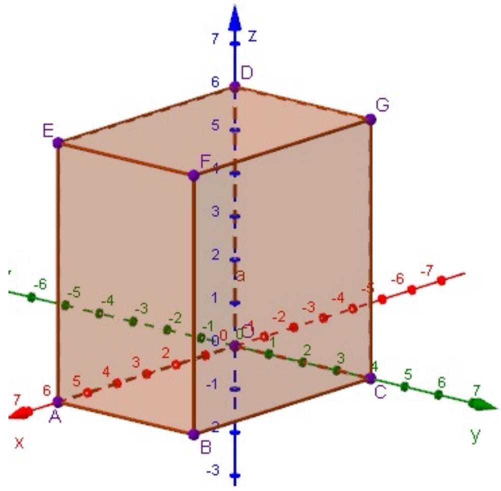
a Geef de coördinaten van de overige hoekpunten van deze balk.

M is het midden van AB en N is het midden van CG.

b Bepaal de kentallen van $\overrightarrow{MN}$ en de lengte van lijnstuk MN.

P is het midden van MN.

c Hoe ver ligt P exact van punt F?



Figuur 2.11 **Figuurapplet**

Opgave 14

Gegeven is in een cartesisch 3D-assenstelsel de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ met $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$ en $T(0,0,8)$.

a Maak een tekening van deze piramide in een 3D assenstelsel.

b Punt P ligt op CT zo, dat $|CP| : |PT| = 3 : 1$. Bereken exact de lengte van AP.

c Je kunt de grootte van $\angle APB$ berekenen met behulp van de cosinusregel in ΔABP. Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

Opgave 15

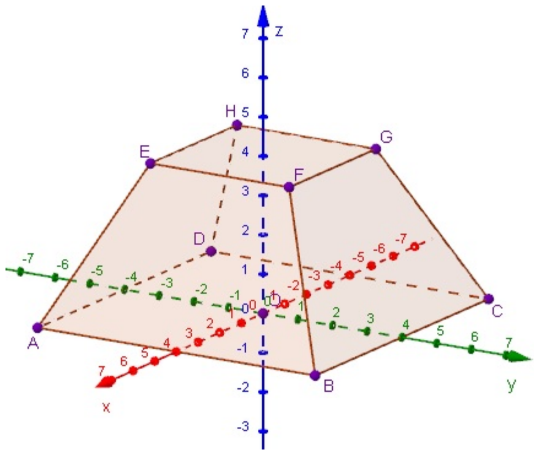
Je ziet hier een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$ met $|AB| = 8$ en $|EF| = 4$. Verder hebben alle punten in het bovenvlak $EFGH$ een z-coördinaat van 4.

a Lees de coördinaten van alle hoekpunten van deze afgeknotte piramide uit de figuur af.

b Bereken exact de lengtes van de opstaande ribben van deze afgeknotte piramide.

c Bereken exact de oppervlakte van de afgeknotte piramide.

d Bereken in graden nauwkeurig de grootte van $\angle EGC$.



Figuur 2.12 **Figuurapplet**

Opgave 16

Gegeven zijn vector $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $A(4,-3,0)$. Geef de coördinaten van punt B.

Opgave 17

Gegeven is in een cartesisch 3D-assenstelsel de kubus $ABCD.EFGH$ met $A(4,0,0)$, $D(0,3,0)$ en AE evenwijdig aan de z-as.

a Teken de kubus in een assenstelsel.

Geef de coördinaten van de andere hoekpunten.

b Bereken exact de lengte van AG.

c Bepaal de coördinaten van het punt M waar alle vier de lichaamsdiagonalen van de kubus doorheen gaan.

Toepassen

Opgave 18: Tetraëder

Een tetraëder is een regelmatig viervlak. Dat is een piramide waarvan alle vier de vlakken (inclusief het grondvlak) gelijkzijdige driehoeken zijn. Van het tetraëder $C.OAB$ is gegeven dat $A(6,0,0)$ en dat het grondvlak OAB in het xy-vlak ligt.

Bereken exact de coördinaten van de top C van dit tetraëder.

Testen

Opgave 19

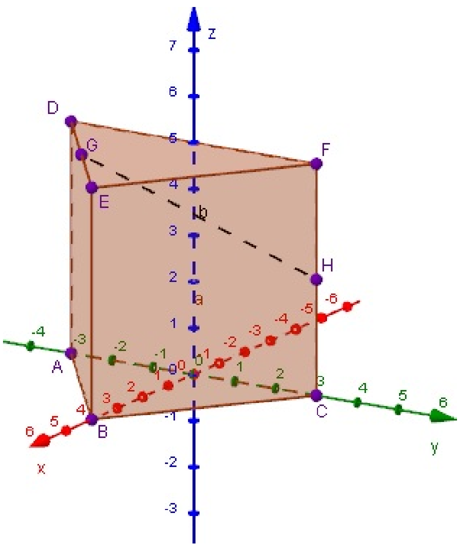
Je ziet hier prisma $ABC.DEF$. Alle punten in het bovenvlak DEF hebben een z-coördinaat van 5. De coördinaten van de hoekpunten kun je uit de figuur aflezen.

a Schrijf van alle hoekpunten de coördinaten op.

G is het midden van DE en H dat van CF.

b Bereken de afstand tussen beide punten.

c Bereken de grootte van $\angle GHB$ in graden nauwkeurig.



Figuur 2.13 **Figuurapplet**

Opgave 20

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ zijn alle zijden even lang. Het grondvlak $ABCD$ is een vierkant in het xy-vlak met $A(4,1,0)$ en $B(7,4,0)$.

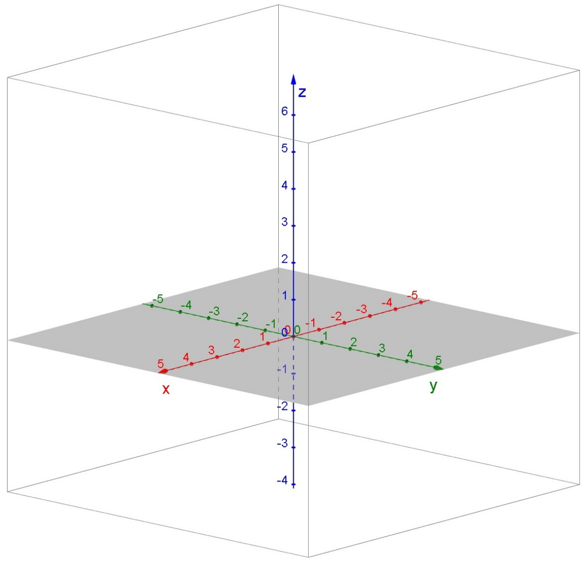
Bepaal de coördinaten van alle andere hoekpunten van de piramide en teken hem in een cartesisch 3D-assenstelsel

Practicum: GeoGebra VI

Je hebt bij het onderwerp ‘Analytische meetkunde’ leren werken met **GeoGebra**.

Je kunt dit programma ook gebruiken bij het werken in een cartesisch 3D-assenstelsel $Oxyz$.

Je kiest dan in GeoGebra voor ‘3D graphics’ of wel het ‘3D tekenvenster’. Je krijgt dan (na wat draaien en de letters bij de assen plaatsen) dit te zien.



Figuur 2.14

Hierin kun je allerlei 3D-figuren maken. Het is vaak handig om eerst de coördinaten van de hoekpunten in te voeren via de invoerbalk (onderaan of links naast de figuur).

2.3 Inproduct in 3D

Inleiding

Hier zie je condenssporen van vliegtuigen. Als een vliegtuig met een constante snelheid en een vaste koers beweegt ontstaan ze bij mooi weer in hogere luchtlagen. Door de ‘bewegende’ snelheidsvector ontstaan er lijnen in de lucht. Soms lijken ze loodrecht op elkaar te staan. Hoe kun je bepalen welke hoek twee vectoren met elkaar maken?

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met vectoren en hun inproduct in een 3D assenstelsel;
- hoeken tussen vectoren en lijnen in 3D uitrekenen.

Voorkennis

- met vectoren rekenen in 2D, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- ruimtelijke figuren in een 3D assenstelsel tekenen en interpreteren;
- werken met coördinaten en vectoren in een 3D assenstelsel.

Verkennen

Opgave V1

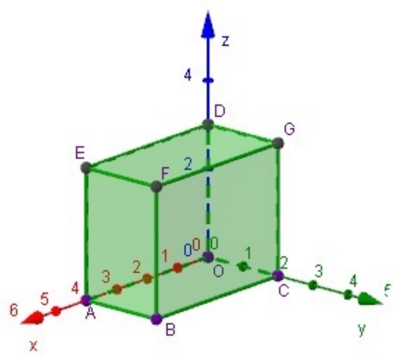
Hier zie je een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$-assenstelsel.

Punt F heeft de coördinaten $(4,2,3)$.

Zo is vector $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a Bereken de hoek tussen $\overrightarrow{OF}$ en $\overrightarrow{OB}$.

b Bereken de hoek tussen $\overrightarrow{OF}$ en $\overrightarrow{EG}$.



Figuur 3.2 Figuurapplet

Uitleg 1

Hier zie je een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$-assenstelsel.

Punt F heeft de coördinaten $(4,2,3)$.

Zo is $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Je ziet dat ook in 3D geldt: $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF}$, controleer maar met hun kentallen.

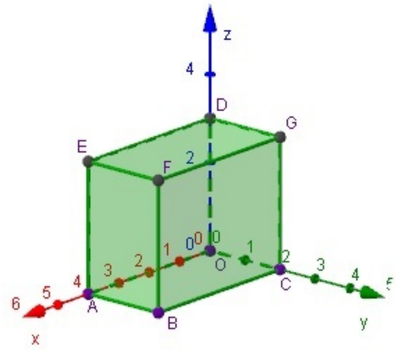
Je kunt met vectoren in 3D precies net zo rekenen als met vectoren in 2D. Je kunt ze optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal door dit met de corresponderende kentallen te doen. Ook het inproduct van twee vectoren blijft op dezelfde manier geldig, er komt alleen een extra kental bij kijken:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)$$

De hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{EO}$ en $\overrightarrow{EF}$ is 90°. Met het inproduct kun je dit narekenen:

$\overrightarrow{EO} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ geeft $\overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{EF} = -4 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + -3 \cdot 0 = 0$

En dus is $\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EF}\right)\right) = 0$ en daarom $\angle\left(\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EF}\right) = 90°$.



Figuur 3.3 **Figuurapplet**

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. De vectoren $\overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{BF}$ staan loodrecht op elkaar.

a Laat dit zien met behulp van het inproduct.

b Ga door berekening na dat de vectoren $\overrightarrow{OD}$ en $\overrightarrow{DF}$ loodrecht op elkaar staan.

c Laat ook zien dat $\overrightarrow{OD}$ en $\overrightarrow{DB}$ niet loodrecht op elkaar staan.

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1**. Neem $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AF}$.

Gebruik het inproduct van beide vectoren om de hoek φ ertussen in graden nauwkeurig te berekenen.

Opgave 3

Zie **Uitleg 1**. Neem $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{DF}$. Deze vectoren hebben geen gemeenschappelijk aangrijpingspunt. Toch maken ze een hoek met elkaar.

Gebruik het inproduct van beide vectoren om de hoek φ ertussen in graden nauwkeurig te berekenen.

Uitleg 2

Gegeven zijn de punten $A(2,4,3), B(5,5,5)$ en $C(-1,4,2)$.

Bekijk de lijnen AB en AC. Ze maken een hoek met elkaar. Hij wordt bepaald door de richtingen van beide lijnen. De richting van lijn AB wordt bepaald door $\overrightarrow{AB}$ en de richting van lijn AC wordt bepaald door $\overrightarrow{AC}$. Dergelijke vectoren noem je richtingsvectoren.

De hoek tussen de lijnen is hetzelfde als de hoek tussen de vectoren. Met behulp van het inproduct kun je de hoek uitrekenen:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

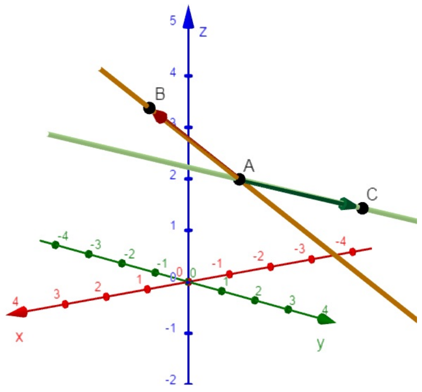
Het inproduct van beide vectoren is -11, dus

$-11 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos(\varphi)$, waarbij φ de hoek is tussen beide vectoren.

Dit geeft $\varphi \approx 158°$.

De hoek tussen de vectoren is dus ongeveer $158°$.

Omdat je de scherpe hoek neemt, is de hoek tussen de lijnen ongeveer $22°$.



Figuur 3.4 **Figuurapplet**

Opgave 4

Bekijk **Uitleg 2**.

a Waarom zijn $\overrightarrow{CA}$ en $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$ ook goede richtingsvectoren voor lijn AC?

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen AB en BC.

Opgave 5

Zie **Uitleg 2**. Bekijk de lijnen AC en AG. Ze maken een hoek met elkaar, eigenlijk zou je zo moeten kunnen zie hoe groot die hoek is. Hij wordt bepaald door de richtingen van beide lijnen. De richting van lijn AC wordt bepaald door $\overrightarrow{AC}$ en de richting van lijn AG wordt bepaald door $\overrightarrow{AG}$. Dergelijke vectoren noem je richtingsvectoren.

a Waarom zijn $\overrightarrow{CA}$ en $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$ ook goede richtingsvectoren voor lijn AC?

b Gebruik $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AG}$ om de hoek tussen de lijnen AC en AG te berekenen.

c Gebruik $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{AG}$ om de hoek tussen de lijnen AC en AG te berekenen.

Opgave 6

Gegeven zijn de punten $A(4,2,0), B(8,-1,5)$ en $C(-5,6,-3)$.

Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen AB en BC.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder het **inproduct** of **inwendig product** van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ versta je

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is.

Als beide vectoren in een cartesisch assenstelsel zitten, dan kun je ze met hun kentallen beschrijven: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$.

In dat geval is het inproduct te berekenen door de overeenkomstige kentallen te vermenigvuldigen en het resultaat op te tellen:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

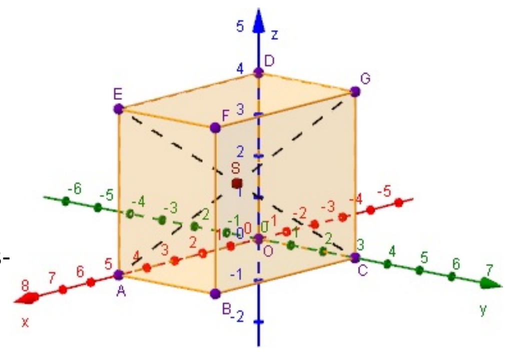
Hiervan kun je goed gebruik maken bij het berekenen van de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Belangrijk is nog dat van twee onderling loodrechte vectoren het inproduct altijd 0 is omdat de hoek tussen beide $90°$ is.

De hoek tussen twee lijnen is gelijk aan de scherpe hoek tussen een vector op de éne lijn en een vector op de andere lijn. Zo'n vector noem je een **richtingsvector** van de lijn.

Voorbeeld 1

Je ziet hier in een 3D cartesisch assenstelsel een balk $OABC.DEFG$ met $A(5,0,0)$, $C(0,3,0)$ en $D(0,0,4)$.

Bereken de hoek tussen $\overrightarrow{EF}$ en $\overrightarrow{AG}$.



Figuur 3.5 **Figuurapplet**

Antwoord

Ga na, dat de hoek tussen $\overrightarrow{EF}$ en $\overrightarrow{AG}$ hetzelfde is als de hoek tussen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AG}$. Je kunt dan de gevraagde hoek beter zien.

Verder is $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Hun inproduct is $9 = 3 \cdot \sqrt{50} \cdot \cos(\varphi)$.

Voor de hoek φ tussen beide vectoren geldt: $\cos(\varphi) = \frac{9}{3 \cdot \sqrt{50}}$. En dus is $\varphi \approx 64{,}9°$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 1** bereken je de hoek tussen twee vectoren met behulp van het inproduct.

a Bereken op dezelfde manier de hoek tussen $\overrightarrow{ED}$ en $\overrightarrow{EC}$

b Laat zien dat $\overrightarrow{DG}$ en $\overrightarrow{BF}$ loodrecht op elkaar staan.

c De vectoren $\overrightarrow{DG}$ en $\overrightarrow{BF}$ maken een rechte hoek met elkaar, maar hebben geen gemeenschappelijk aangrijpingspunt. Hoe kun je die rechte hoek dan toch zichtbaar maken?

Opgave 8

De punten $A(4,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(-4,0,0)$, $D(0,-4,0)$ en $T(0,0,6)$ zijn de hoekpunten van een piramide. Punt M is het midden van ribbe AT.

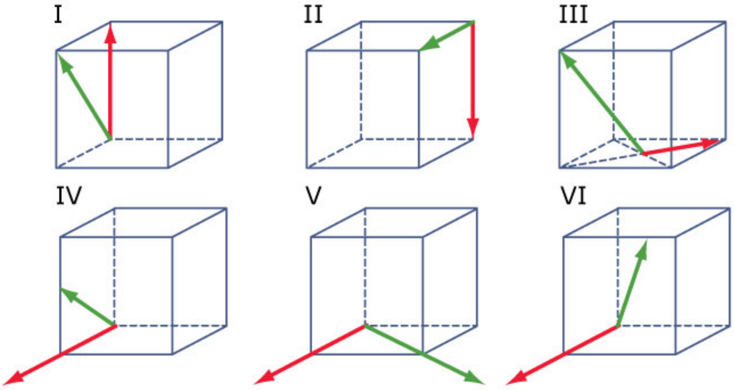
a Bereken de hoek tussen $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OM}$. Geef je antwoord in graden nauwkeurig.

b Bereken de grootte van $\angle ATC$ in graden nauwkeurig.

c Laat met behulp van het inproduct van vectoren zien dat vierhoek $ABCD$ een vierkant is.

Opgave 9

Je ziet hier zes keer een kubus met daarin twee vectoren $\vec{a}$ (rood) en $\vec{b}$ (groen) getekend. De ribben van de kubus zijn steeds 4 cm. Als een vector langer is dan het lijnstuk waar hij op ligt, dan is hij precies twee keer zo lang als dat lijnstuk. In situatie VI eindigt de blauwe vector op de bovenste ribbe van het voorvlak.



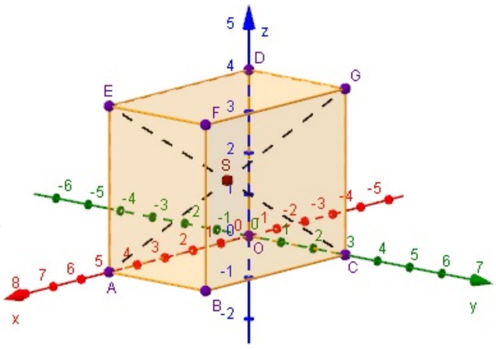
Figuur 3.6

Bereken in elke getekende situatie het inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Voorbeeld 2

Je ziet hier in een 3D cartesisch assenstelsel een balk $OABC.DEFG$ met $A(5,0,0)$, $C(0,3,0)$ en $D(0,0,4)$.

Bereken de hoek tussen de lijnen AG en EC.



Figuur 3.7 **Figuurapplet**

Antwoord

Ga na, dat de hoek tussen AG en EC hetzelfde is als de hoek tussen de richtingsvectoren $\overrightarrow{AG}$ en $\overrightarrow{EC}$.

Verder is $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Hun inproduct is $18 = \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} \cdot \cos(\varphi)$.

Voor de hoek φ tussen beide vectoren geldt: $\cos(\varphi) = \frac{18}{50}$. En dus is $\varphi \approx 68{,}9°$.

Opgave 10

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je de hoek tussen twee lijnen kunt bepalen met behulp van het inproduct van twee richtingsvectoren van die lijnen.

a Wat is een richtingsvector van een lijn?

b Bereken met behulp van het inproduct de hoek tussen de lijnen AF en AG.

Ook lijnen die elkaar helemaal niet snijden kunnen toch wel een hoek ten opzichte van elkaar maken. Neem bijvoorbeeld de lijnen OB en EF.

c Waarom snijden deze lijnen elkaar niet? Hoe zou je hun onderlinge hoek toch zichtbaar kunnen maken?

d Bereken onderlinge de hoek van de lijnen OB en EF met behulp van het inproduct van hun richtingsvectoren.

Opgave 11

De punten $A(4,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(-4,0,0)$, $D(0,-4,0)$ en $T(0,0,6)$ zijn de hoekpunten van een piramide.

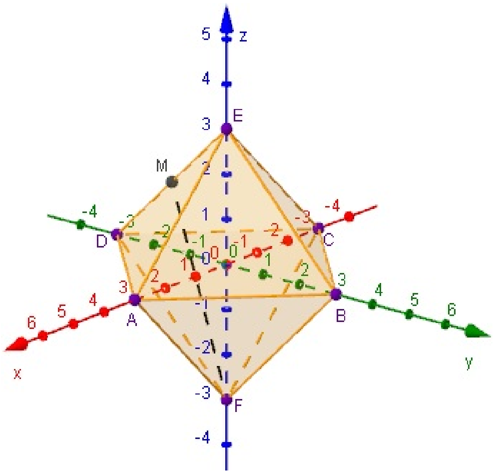
a Bereken de hoek tussen de lijnen AT en BT. Geef je antwoord in graden nauwkeurig.

b Welke hoek maken de lijnen AT en BC met elkaar? Geef je antwoord in graden nauwkeurig.

Opgave 12

Dit is een regelmatig achtvlak (octaëder) met $A(3{,}0{,}0)$, $B(0{,}3{,}0)$, $E(0{,}0{,}3)$ en $F(0{,}0{,}-3)$. M is het midden van ED.

Bereken de hoek die de lijnen FM en BE met elkaar maken. Rond af op één decimaal.



Figuur 3.8 **Figuurapplet**

Verwerken

Opgave 13

Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen de vectoren

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Opgave 14

Welke van de volgende vectoren staan loodrecht op elkaar?

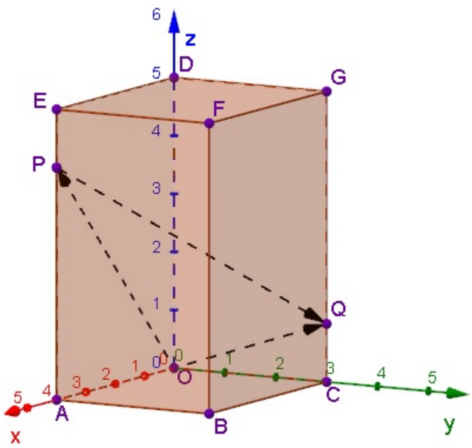
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 15

Van de balk $OABC.DEFG$ zijn de lengtes van de ribben $|OA| = 4$, $|OC| = 3$ en $|OD| = 5$. Punt P ligt op ribbe AE zo, dat $|EP| = 1$. Punt Q ligt op ribbe CG zo, dat $|CQ| = 1$.

a Laat met behulp van hun kentallen zien, dat $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$.

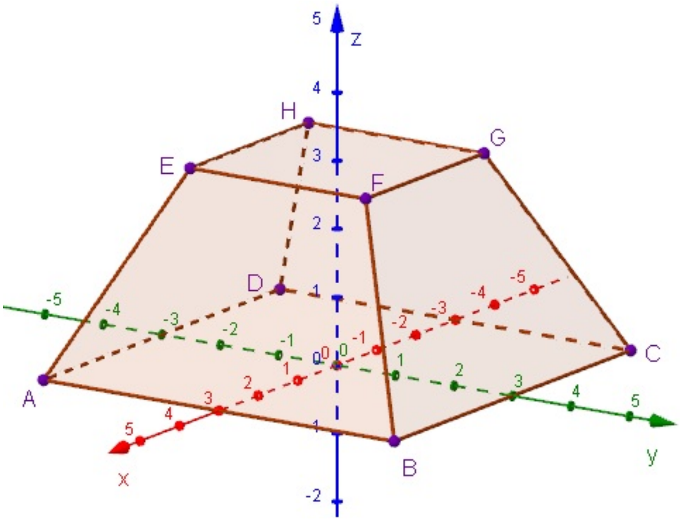
b Bereken $\angle POQ$ in graden nauwkeurig.



Figuur 3.9 **Figuurapplet**

Opgave 16

Hier zie je een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$.



Figuur 3.10 **Figuurapplet**

a Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de lijnen AE en CG met elkaar maken.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoeken van het voorvlak $ABFE$.

Opgave 17

Gegeven is de vector $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

a Geef twee verschillende vectoren die loodrecht staan op $\vec{v}$.

b Bereken voor welke p de vector $\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\4\\p\end{pmatrix}$ loodrecht staat op $\vec{v}$.

Opgave 18

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is de top $T(0,0,4)$ en zijn $A(2,-2,0)$ en $B(2,2,0)$ gegeven. M is het midden van AT en N is het midden van DT.

a Bereken de hoek tussen de lijnen AT en CM met behulp van het inproduct van hun richtingsvectoren.

b Bereken de hoeken van vierhoek $BMNC$. Laat zien dat deze vierhoek een symmetrisch trapezium is.

c Bereken de oppervlakte van vierhoek $BMNC$ op één decimaal nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 19: Gegeven hoek, welke vector?

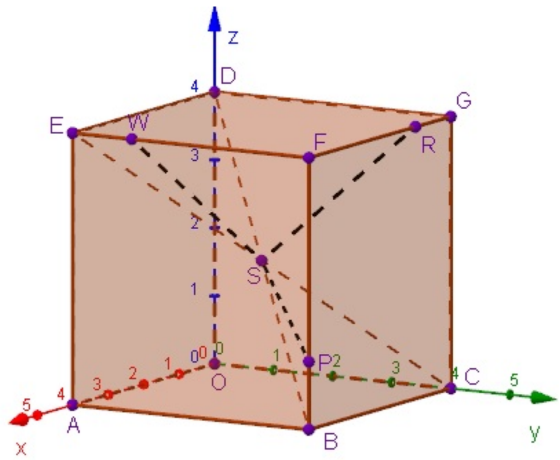
Is er een p waarvoor de vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ p \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ p \end{pmatrix}$ een hoek van 60° met elkaar maken?

Opgave 20: Kubus in kubus

Hier zie je een kubus $OABC.DEFG$ met ribben van 4 cm. Verder is gegeven $|EW| = |BP| = |GR| = 1$ cm.

a Toon aan dat P, R, S en W hoekpunten zijn van kubus $PQRS.TUVW$.

b Teken de figuur met kubus $PQRS.TUVW$ er in.



Figuur 3.11 **Figuurapplet**

Testen

Opgave 21

a Bereken met behulp van het inproduct de hoek tussen de vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in graden nauwkeurig.

b Voor welke a staan de vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar?

Opgave 22

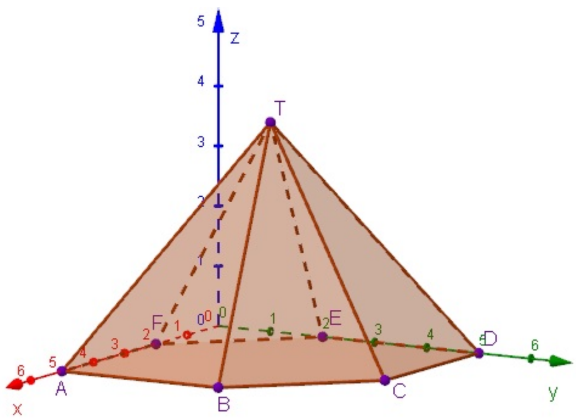
De punten $A(5,0,0)$, $B(5,3,0)$, $C(3,5,0)$, $D(0,5,0)$, $E(0,2,0)$, $F(2,0,0)$ en $T(2{,}5; 2{,}5; 4)$ zijn de hoekpunten van de piramide $T.ABCDEF$.

a Bereken de hoek die de vectoren $\overrightarrow{AT}$ en $\overrightarrow{CT}$ met elkaar maken.

b Bereken de hoek tussen de lijnen BT en BD.

De lijnen BT en FE hebben geen snijpunt, maar maken wel een hoek ten opzichte van elkaar.

c Waar in de figuur kun je die hoek zien? Bereken de grootte ervan in graden nauwkeurig.

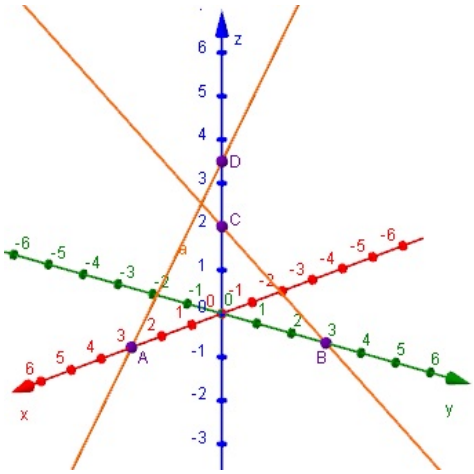


Figuur 3.12 **Figuurapplet**

2.4 Punten, lijnen, vlakken

Inleiding

Zijn dit twee snijdende lijnen? Of kruisen ze elkaar? En wat versta je ook alweer onder ‘kruisende lijnen’? En hoe bepaal je hun kortste onderlinge afstand? En hoe kunnen vlakken ten opzichte van elkaar liggen?
Over dergelijke vragen gaat dit onderdeel...



Figuur 4.1 Figuurapplet

Je leert in dit onderwerp

- bepalen of punten wel of niet op een lijn of in een vlak liggen;
- onderzoeken of lijnen elkaar snijden of kruisen, of evenwijdig zijn;
- onderzoeken of lijnen en/of vlakken elkaar snijden of niet.

Voorkennis

- met vectoren rekenen in 3D, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met aanzichten van ruimtelijke figuren.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je een constructie met staalkabels en vier stalen masten in een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$-assenstelsel. Alle masten zijn evenwijdig aan de z-as en 5 m hoog. De constructie dient ter ondersteuning van een grote tent met een vierkant grondvlak van 10 m bij 10 m.

Punt P heeft de coördinaten $(4,4,5)$, punt Q is $(6,4,5)$.
In de figuur lijken allerlei kabels elkaar te snijden, maar dat is gezichtsbedrog.

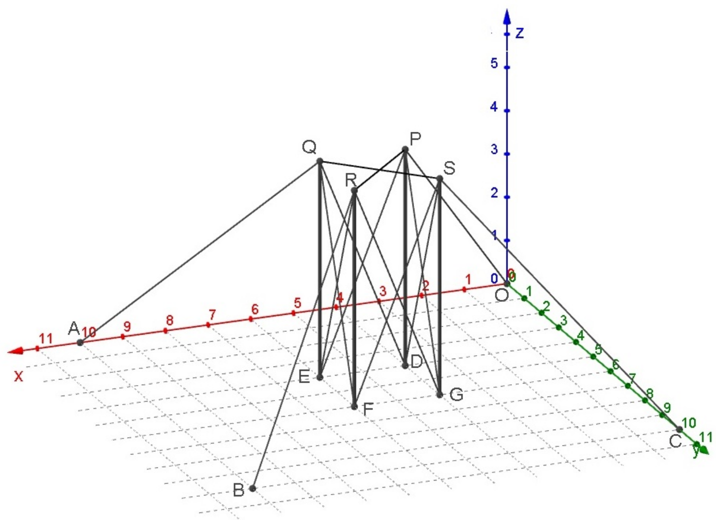
a Snijden de kabels FS en GR elkaar? En waarom?

b Snijden de kabels EP en GR elkaar? En waarom?

c Snijden de lijnen AQ en CS elkaar? En waarom?

d Snijden de lijnen AQ en FS elkaar? En waarom?

e Hoe ver liggen de lijnen EP en GR van elkaar?



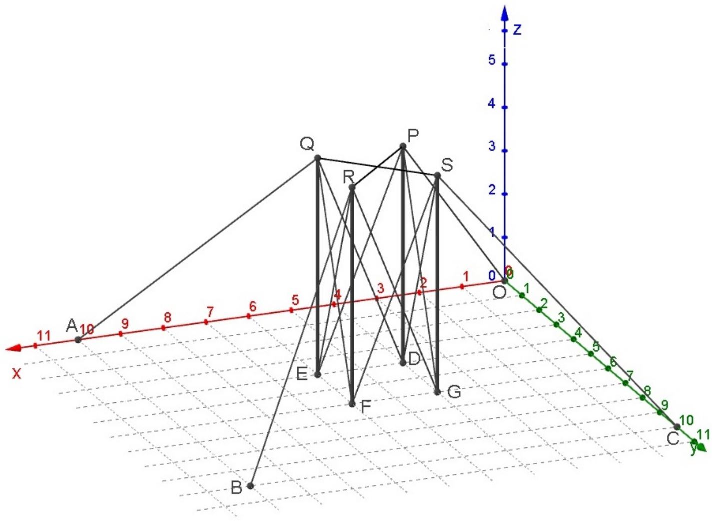
Figuur 4.2 Figuurapplet

Uitleg 1

Hier zie je een constructie met staalkabels en vier stalen masten in een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$-assenstelsel. Alle masten zijn evenwijdig aan de z-as en 5 m hoog. De constructie dient ter ondersteuning van een grote tent met een vierkant grondvlak van 10 m bij 10 m.

Punt P heeft de coördinaten $(4,4,5)$, punt Q is $(6,4,5)$.
In de figuur lijken allerlei kabels elkaar te snijden, maar dat is gezichtsbedrog, draai de figuur maar.

Zo liggen de kabels (en dus de lijnen) FS en GR in hetzelfde vlak $FGSR$. Lijnen die in hetzelfde vlak liggen lopen evenwijdig of snijden elkaar. Evenwijdig zijn ze niet en dus snijden ze elkaar.
Maar de lijnen FS en DQ liggen niet in hetzelfde vlak. Deze lijnen zijn niet evenwijdig, maar ze snijden elkaar ook niet. Het zijn kruisende lijnen.



Figuur 4.3 **Figuurapplet**

Aanzichten helpen bij het beoordelen van de onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken. Bijvoorbeeld zie je in een bovenaanzicht dat punt D in het vlak $BOPR$ ligt. En zie je in een vooraanzicht dat de lijnen AQ en OP elkaar snijden.

Soms kun je met coördinaten redeneren. Bijvoorbeeld de lijnen EP en DS lijken wel evenwijdig. Gelukkig weet je van al deze punten de coördinaten: $E(6,4,0)$, $P(4,4,5)$, $D(4,4,0)$ en $S(4,6,5)$. Dus zijn de richtingsvectoren van beide lijnen:

$$\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Deze vectoren hebben niet dezelfde richting en dus zijn deze lijnen niet evenwijdig.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1** en vooral de figuur.

a De lijnen BR en FQ lijken een snijpunt te hebben. Waarom is dat toch niet het geval? Hoe noem je hun onderlinge ligging?

b Waarom liggen de punten E en G in vlak $ACSQ$?

c De lijnen BR en FS lijken evenwijdig. Is dat ook zo? Licht je antwoord toe met vectoren.

Opgave 2

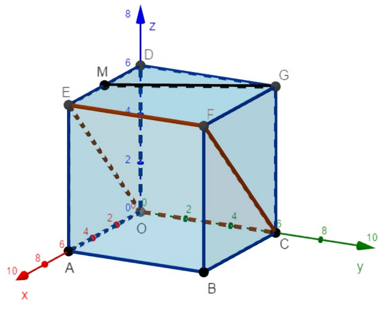
Bekijk **Uitleg 1**.

a Toon met behulp van het bovenaanzicht aan dat inderdaad punt D in vlak $BOPR$ ligt.

b Waarom kun je zeggen dat de lijnen AQ en OP elkaar snijden?

c Bepaal met behulp van het boven- en zijaanzicht de coördinaten van het snijpunt van de lijnen AQ en OP.

Uitleg 2



Figuur 4.4 **Figuurapplet**

Bekijk kubus $OABC.DEFG$. Punt M ligt op het midden van ribbe DE. Verder is vlak $OCFE$ getekend.

Een vlak is in alle richtingen onbegrensd. Net zoals een lijn geen begin en eind heeft.

Het is dus zinvol om te vragen naar de onderlinge ligging van vlak $OCFE$ en lijn GM.

Merk op dat de lijnstukken DE en GM in hetzelfde vlak liggen ($DEFG$). De lijnstukken zijn niet evenwijdig, dit betekent dat de lijnen DE en GM elkaar snijden. En daarom snijdt lijn GM vlak $OCFE$.

Omdat lijn GM vlak $OCFE$ snijdt, snijden de vlakken DMG en $OCFE$ elkaar. Merk ook op dat vlak DMG hetzelfde is als vlak $DEFG$.

Opgave 3

Bekijk de kubus uit **Uitleg 2**.

a Bepaal de onderlinge ligging van lijn DG en vlak $OCEF$.

b Bepaal de onderlinge ligging van lijn GM en vlak $ABFE$.

Opgave 4

Bekijk de kubus uit **Uitleg 2**.

a Bepaal de onderlinge ligging van de vlakken DGM en $ABFE$.

b Punt P is het midden van lijnstuk OD. Bepaal de onderlinge ligging van de vlakken PDM en $ACGE$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **punt** is een positie in de ruimte zonder afmetingen. Een punt kan op een lijn of in een vlak liggen.

Een **lijn** wordt bepaald door twee punten, door twee punten gaat precies één lijn die naar beide kanten onbegrensd is.

- Twee lijnen met dezelfde richting(svector) zijn evenwijdig.
- Twee lijnen met dezelfde richting(svector) en een gemeenschappelijk punt vallen samen.
- Twee lijnen die niet dezelfde richting(svector) hebben snijden elkaar als ze in hetzelfde vlak liggen.
- Twee lijnen die niet dezelfde richting(svector) hebben **kruisen** elkaar als ze niet in hetzelfde vlak liggen.

Een **vlak** wordt bepaald door drie punten die niet op één lijn liggen, door drie van die punten gaat precies één vlak dat naar alle kanten onbegrensd is. Een vlak kan ook bepaald worden door:

- een lijn met een punt dat daar niet op ligt;
- twee snijdende lijnen;
- twee evenwijdige lijnen.

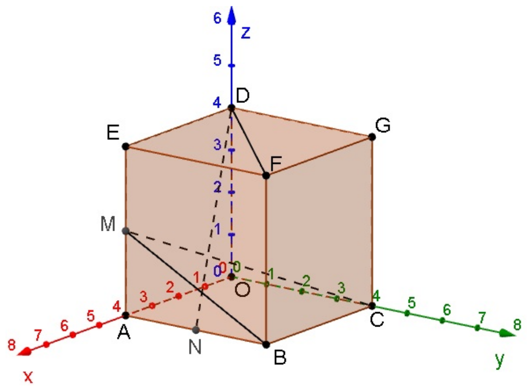
De **onderlinge ligging** van lijnen en vlakken:

- Een lijn l is evenwijdig met een vlak V als hij in een ander vlak ligt dat evenwijdig is met V.
- Een lijn l snijdt een vlak V als hij in een ander vlak ligt dat niet evenwijdig is met V.
- Een lijn l ligt in een vlak V als twee punten van de lijn in V liggen.
- Twee vlakken zijn evenwijdig als ze geen gemeenschappelijke punten hebben. Dat is bijvoorbeeld zo als twee snijdende lijnen in het éne vlak evenwijdig zijn aan twee snijdende lijnen in het andere vlak.
- Twee vlakken snijden elkaar als ze één of meer gemeenschappelijke punten hebben. Ze hebben dan een snijlijn.

Voorbeeld 1

Van de kubus $OABC.DEFG$ is M het midden van AE en N het midden van AB.
Bepaal de onderlinge ligging van de lijnen:

- DF en MB
- MC en DN
- BG en DN



Figuur 4.5 **Figuurapplet**

Antwoord

Voor de onderlinge ligging van DF en MB kun je zo redeneren:

- DF en MB zijn niet evenwijdig, vergelijk eventueel hun richtingsvectoren.
- MB en punt F liggen in het voorvlak.
- Punt D ligt niet in het voorvlak.
- DF en MB liggen dus niet in één vlak en kunnen elkaar daarom niet snijden.
- DF en MB zijn kruisende lijnen.

Voor de onderlinge ligging van CM en DN kun je zo redeneren:

- CM en DN zijn niet evenwijdig, vergelijk eventueel hun richtingsvectoren.
- CM en punt H liggen in het vlak HMC.
- Ligt punt N ook in dat vlak?
- MN en CD zijn evenwijdig (richtingsvectoren) en vormen dus vlak $MNCH$.
- CM en DN liggen in vlak $MNCH$ en zijn dus evenwijdig.

Voor de onderlinge ligging van BG en DN kun je zo redeneren:

- Beide lijnen liggen in vlak $ABGD$.
- De lijnen zijn niet evenwijdig, dus snijden ze elkaar.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** wordt beredeneerd dat de lijnen BG en DN elkaar snijden.

a Welke y-coördinaat heeft het snijpunt?

b Bekijk een bovenaanzicht (met de applet of teken het zelf) en bepaal zo de x-coördinaat van het snijpunt.

c Bekijk het vooraanzicht en bepaal zo de z-coördinaat van het snijpunt.

Opgave 6

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de onderlinge ligging van lijnen kunt beredeneren. Gegeven is de kubus $OABC.DEFH$ met $A(6,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $D(0,0,6)$. M is het midden van AE. Op de ribben van deze kubus liggen $P(6,2,0)$, $Q(6,5,0)$ en $R(0,2,6)$.
Beredeneer de onderlinge ligging van de lijnen:

a EF en OD

b PR en QG

c PR en CM

d QR en CM

e PR en BG

f PQ en AB

Opgave 7

Het prisma $ABC.DEF$ is gegeven door $A(0,-3,0)$, $B(4,0,0)$, $C(0,3,0)$ en $D(0,-3,4)$. Verder is M het midden van AB en N het midden van BC.

a Beredeneer dat de zijvlaksdiagonalen AE en BF elkaar kruisen.

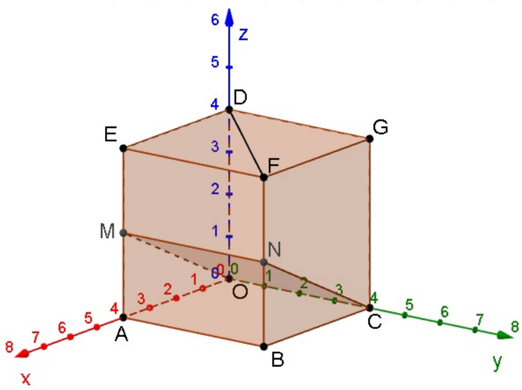
b Beredeneer dat de lijnen DM en FN elkaar snijden. Welke coördinaten heeft hun snijpunt S?

c Welke hoek maken de lijnen DM en FN met elkaar?

Voorbeeld 2

Van de kubus $OABC.DEFG$ is M het midden van AE en N het midden van BF.

- Bepaal de onderlinge ligging van de lijn DF en het vlak $OMNC$.
- Bepaal ook de onderlinge ligging van de lijn DG en het vlak $OMNC$.



Figuur 4.6 **Figuurapplet**

Antwoord

Voor de onderlinge ligging van DF en vlak $OMNC$ kun je zo redeneren:

- D en F liggen niet in vlak $OMNC$.
- DF ligt in vlak $OBFD$.
- Lijn ON ligt in vlak $OMNC$ en in vlak $OBFD$.
- DF en ON liggen dus in één vlak en hebben een snijpunt.
- DF en vlak $OMNC$ snijden elkaar.

Voor de onderlinge ligging van DG en vlak $OMNC$ kun je zo redeneren:

- D en G liggen niet in vlak $OMNC$.
- DG ligt in vlak $OCGD$.
- Lijn OC ligt in vlak $OMNC$ en in vlak $OCGD$.
- DG en OC zijn evenwijdig.
- DG en vlak $OMNC$ zijn evenwijdig.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je de onderlinge ligging van een lijn en een vlak kunt beredeneren. Gegeven is de kubus $OABC.DEFG$ met $A(6,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $D(0,0,6)$.
Beredeneer de onderlinge ligging van:

a Vlak AGE en lijn DC.

b Vlak AGE en lijn DB.

c Vlak ACD en lijn EG.

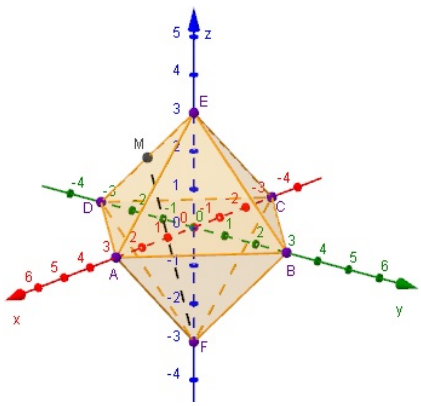
d Vlak ACD en lijn BF.

Opgave 9

Dit is een regelmatig achtvlak (octaëder) met $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $E(0,0,3)$ en $F(0,0,-3)$. M is het midden van ED.

a Beredeneer dat lijn AE evenwijdig is met het vlak FBC.

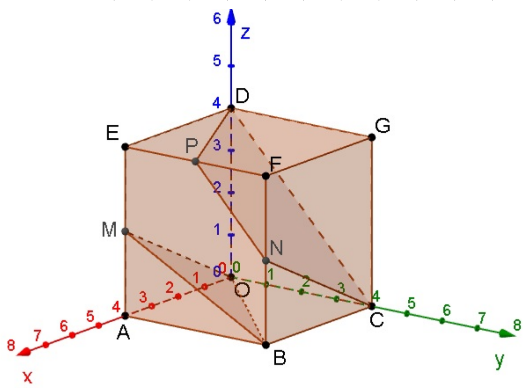
b Beredeneer dat FM het vlak BCE snijdt en bepaal hun snijpunt S.



Figuur 4.7 **Figuurapplet**

Voorbeeld 3

Van de kubus $OABC.DEFG$ is M het midden van AE, N het midden van BF en P het midden van EF.
Bepaal de onderlinge ligging van de vlakken OMB en $DPNC$.



Figuur 4.8 **Figuurapplet**

Antwoord

Voor de onderlinge ligging van de vlakken OMB en $DPNC$ kun je zo redeneren:

- Als je ook maar één punt kunt vinden dat in beide vlakken ligt, snijden ze elkaar.
- PN en MB liggen beide in vlak $ABFE$.
- PN en MB zijn niet evenwijdig (richtingsvectoren) en snijden elkaar in vlak $ABFE$.
- Dit snijpunt ligt in beide vlakken.
- De vlakken OMB en $DPNC$ snijden elkaar.

Opgave 10

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de onderlinge ligging van vlakken kunt beredeneren. Gegeven is de kubus $OABC.DEFG$ met $A(6,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $D(0,0,6)$. M is het midden van AE en N dat van CG. Beredeneer de onderlinge ligging van de vlakken:

a OMB en CFD

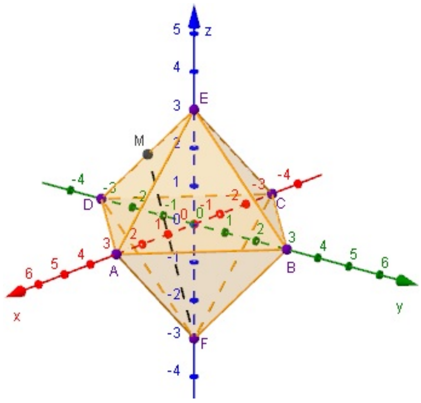
b OMB en NFD

Opgave 11

Dit is een regelmatig achtvlak (octaëder) met $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $E(0,0,3)$ en $F(0,0,-3)$. M is het midden van ED.

a Beredeneer dat de vlakken DAF en BCE evenwijdig zijn.

b Beredeneer dat de vlakken DAF en BCM niet evenwijdig zijn.



Figuur 4.9 **Figuurapplet**

Verwerken

Opgave 12

Welke beweringen zijn waar?

A. Als twee lijnen in eenzelfde vlak liggen, dan snijden ze elkaar.

B. Een vlak wordt bepaald door drie punten, die niet op één lijn liggen.

C. Twee lijnen die niet dezelfde richtingsvector hebben snijden elkaar.

D. Twee vlakken die geen gemeenschappelijke punten hebben, zijn evenwijdig.

Opgave 13

Gegeven is kubus $OABC.DEFG$. Punt M ligt op het midden van ribbe FG.

Bepaal de onderlinge ligging van de lijnen AM en EF.

Opgave 14

Gegeven is een piramide $T.ABCD$ in een cartesisch assenstelsel door $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$, $D(-4,-4,0)$ en $T(0,0,12)$. Punt M is het midden van BT en punt N is het midden van CT.

a Is $AMND$ een vierhoek, dus een vlakke figuur? Licht je antwoord toe.

b Hebben de lijnen AM en OT een snijpunt? Licht je antwoord toe.

c Beredeneer de coördinaten van het snijpunt S van AM en DN.

d Bereken in één decimaal de hoek waaronder AM en DN elkaar snijden in graden nauwkeurig.

Opgave 15

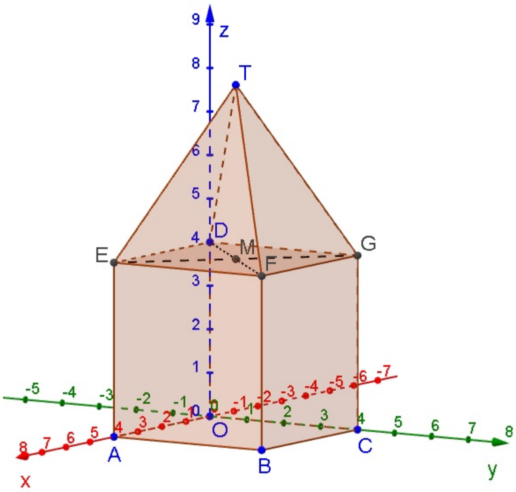
Hier zie je een regelmatige vierzijdige piramide boven op een kubus. De piramide is even hoog als de kubus.

a Beredeneer dat de lijnen BF en ET elkaar kruisen.

b Beredeneer dat de lijnen AG en ET elkaar snijden. Bepaal ook hun snijpunt.

c Beredeneer de onderlinge ligging van lijn BF en vlak DGT. Als ze elkaar snijden, bepaal dan hun snijpunt.

d Beredeneer de onderlinge ligging van lijn BM en vlak EFT. Als ze elkaar snijden, bepaal dan hun snijpunt.



Figuur 4.10 Figuurapplet

Opgave 16

Een veelvlak $ABCD.EFGH$ heeft als hoekpunten $A(4,-3,0)$, $B(4,3,0)$, $C(-4,3,0)$, $D(-4,-3,0)$, $E(2,-1,4)$, $F(2,1,4)$, $G(-2,1,4)$ en $H(-2,-1,4)$.

a Is dit veelvlak een afgeknotte piramide? Licht het antwoord toe.

b De lijnen AE en BF snijden elkaar. Waarom weet je dat zeker? Bepaal met behulp van aanzichten hun snijpunt S.

Opgave 17

Kubus $OABC.DEFG$ is in een cartesisch assenstelsel gegeven door $A(4,0,0)$, $C(0,4,0)$ en $D(0,0,4)$. K is het midden van AE en L dat van CG. Punt M ligt op het verlengde van ribbe FG zo, dat $|FG| = |GM|$. Punt N ligt op het verlengde van ribbe OC zo, dat $|OC| = |CN|$.

a Laat zien, dat $BLDK$ een vlakke vierhoek is.

b Beredeneer dat de lijn MN in het vlak $BLDK$ ligt.

Toepassen

Opgave 18: Regelmatig driezijdig prisma

Van het regelmatige driezijdige prisma $ABC.DEF$ zijn het voorvlak en het achtervlak gelijkzijdige driehoeken. Gegeven is $A(4,-3,0)$, $B(4,3,0)$, $D(-4,3,0)$ en $E(-4,-3,0)$. Verder is M het midden van EF en N het midden van DF.

a Bepaal de coördinaten van de punten C en F.

b Beredeneer dat de lijnen AM en BN elkaar snijden. Bereken ook exact het snijpunt S.

c Beredeneer de onderlinge ligging van de lijnen BM en CN.

Testen

Opgave 19

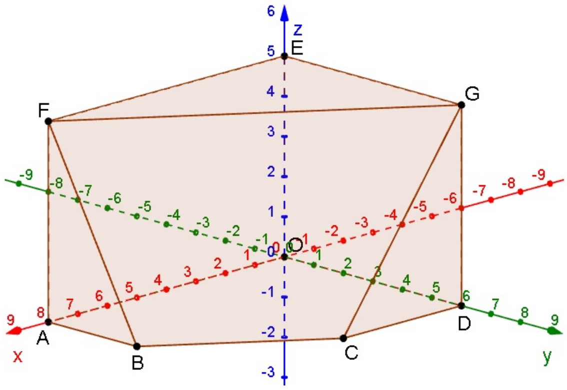
In een cartesisch assenstelsel is $OABCD.EFG$ een afgeknotte balk met $A(8,0,0)$, $B(8,3,0)$, $C(4,6,0)$, $D(0,6,0)$, $E(0,0,5)$, $F(8,0,5)$ en $G(0,6,5)$.

a Toon aan dat $BCGF$ een (vlakke) vierhoek is.

b Beredeneer de onderlinge ligging van de lijnen FG en OE.

c Beredeneer de onderlinge ligging van lijn AD en vlak $BCGF$.

d M is het midden van lijnstuk FG. Beredeneer dat BM en EA elkaar kruisen.



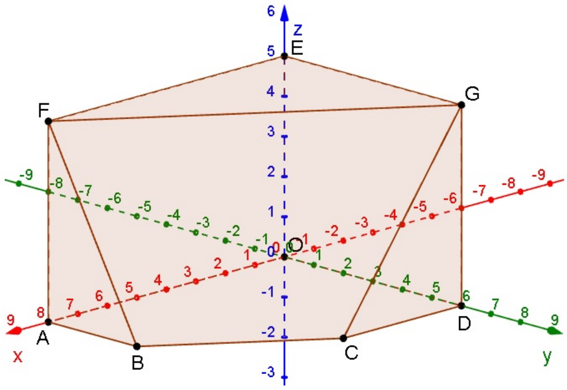
Figuur 4.11 Figuurapplet

Opgave 20

In een cartesisch assenstelsel is $OABCD.EFG$ een afgeknotte balk met $A(8,0,0)$, $B(8,3,0)$, $C(4,6,0)$, $D(0,6,0)$, $E(0,0,5)$, $F(8,0,5)$ en $G(0,6,5)$.

a Beredeneer dat FB en GC elkaar snijden en bepaal hun snijpunt.

b Welke hoek maken FB en GC met elkaar?

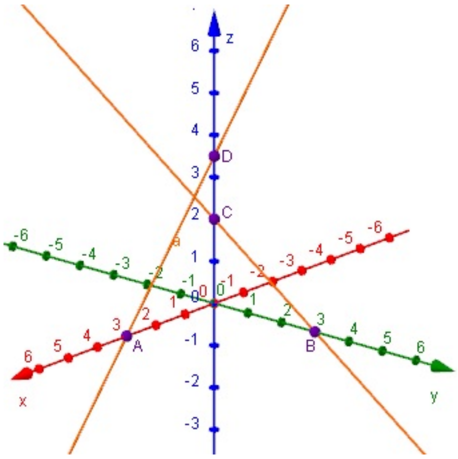


Figuur 4.12 Figuurapplet

2.5 Hoeken en afstanden

Inleiding

Nu je meer weet over de onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken kun je beter hoeken en afstanden berekenen. Je gebruikt bij het berekenen van hoeken vooral het inproduct van twee vectoren. Bij het berekenen van (kortste) onderlinge afstanden moet je vaak werken met goed gekozen aanzichten.
Over dergelijke vragen gaat dit onderdeel...



Figuur 5.1 **Figuurapplet**

Je leert in dit onderwerp

- de hoek tussen twee lijnen, lijn en vlak, twee vlakken berekenen;
- hoeken in ruimtelijke figuren berekenen;
- de afstand tussen twee evenwijdige en tussen twee kruisende lijnen berekenen;
- de afstand van een punt tot een vlak en van een lijn tot een daarmee evenwijdig vlak berekenen.

Voorkennis

- met vectoren rekenen in 3D, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met aanzichten van ruimtelijke figuren.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je een constructie met staalkabels en vier stalen masten in een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$-assenstelsel. Alle masten zijn evenwijdig aan de z-as en 5 m hoog. De constructie dient ter ondersteuning van een grote tent met een vierkant grondvlak van 10 m bij 10 m.

Punt P heeft de coördinaten $(4,4,5)$, punt Q is $(6,4,5)$.

a Hoe ver ligt punt P van lijn BR?

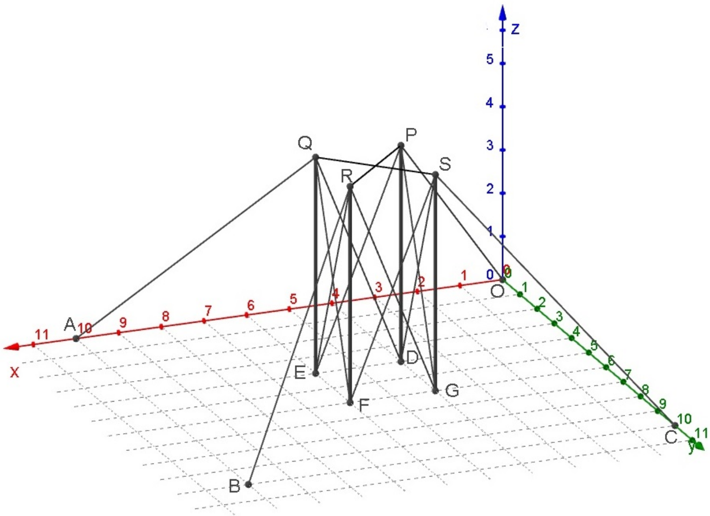
b Hoe ver liggen de lijnen EP en GR van elkaar?

c Hoe groot is de (kortste) afstand tussen de lijnen BR en GS?

d Hoe groot is de hoek die de lijnen BR en GS met elkaar maken?

e Hoe groot is de hoek die BR maakt met het grondvlak $OABC$?

f Hoe ver ligt punt F van vlak $BCSR$ af?



Figuur 5.2 Figuurapplet

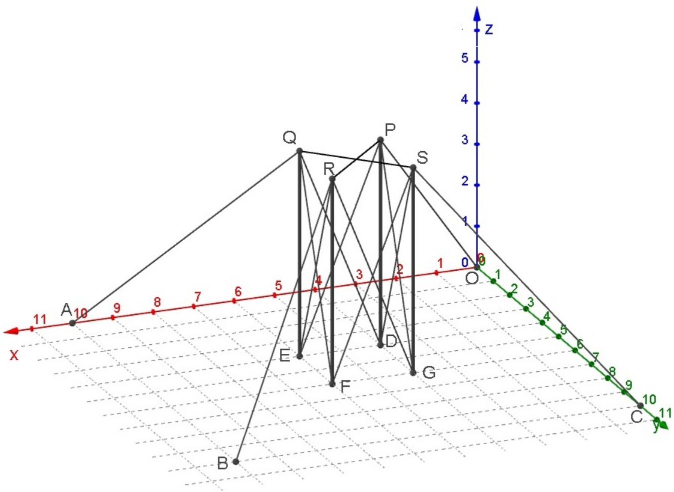
Uitleg 1

Hier zie je een constructie met staalkabels en vier stalen masten in een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$-assenstelsel. Alle masten zijn evenwijdig aan de z-as en 5 m hoog. De constructie dient ter ondersteuning van een grote tent met een vierkant grondvlak van 10 m bij 10 m.

Punt P heeft de coördinaten $(4,4,5)$, punt Q is $(6,4,5)$. In de figuur komen allerlei afstanden voor. Bij afstand is de vaste afspraak dat het altijd gaat om de kortste afstand. Die wordt meestal loodrecht op een lijn of een vlak gemeten.

Wil je weten hoe ver punt P van lijn BR af ligt, dan teken je vlak $OBPR$. Daarin teken je een lijnstuk vanuit P loodrecht op BR. De gevraagde afstand is de lengte van dat lijnstukje is 2.

Wil je de afstand tussen de kruisende lijnen BR en GS bepalen, dan merk je op dat GS verticaal (in de z-richting) loopt. En BR ligt in het verticale vlak $OBRP$. Dus maak je een aanzicht in de richting van BO. Je ziet dan dat de afstand tussen beide lijnen gelijk is aan de lengte van $\overrightarrow{SM}$ waarin M het snijpunt van SQ en RP is. De gevraagde afstand is dus $\left|\overrightarrow{SM}\right| = \sqrt{2}$.



Figuur 5.3 Figuurapplet

Wil je de afstand tussen punt F en vlak $BCSR$ berekenen, dan kun het beste zo kijken dat je dit vlak als een lijn ziet. Je moet daarvoor een vooraanzicht maken, dus in de x-richting kijken. Je kunt dan de gevraagde afstand aangeven met een lijnstukje vanuit F en loodrecht op het vlak (dat je als een lijn ziet). De lengte van dit lijnstukje kun je dan met gelijkvormigheid berekenen.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1** en vooral de figuur.

a De afstand van punt P tot lijn BR kun je tekenen in een vlak waar beide in liggen. Maak een tekening waarin de afstand van P tot BR zichtbaar wordt en laat zien hoe je die afstand berekent.

b De lijnen BR en GS kruisen elkaar. Maak een tekening waarin hun onderlinge afstand zichtbaar wordt.

c Bereken de afstand van punt Q tot vlak $BCSR$.

Opgave 2

Een veelvlak $ABCD.EFGH$ heeft als hoekpunten $A(4,-3,0)$, $B(4,3,0)$, $C(-4,3,0)$, $D(-4,-3,0)$, $E(2,-1,4)$, $F(2,1,4)$, $G(-2,1,4)$ en $H(-2,-1,4)$.

a Bereken de afstand van punt F tot lijn AE. Rond af op twee decimalen.

b Bereken exact de afstand tussen de kruisende lijnen AE en CG.

c De lijn EH loopt evenwijdig met vlak $BCGF$. Hoe groot is in twee decimale nauwkeurig hun onderlinge afstand?

d Waarom heeft het geen zin om naar de onderlinge afstand van lijn AE en vlak $BCGF$ te vragen?

Uitleg 2

Hier zie je een constructie met staalkabels en vier stalen masten in een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$-assenstelsel. Alle masten zijn evenwijdig aan de z-as en 5 m hoog. De constructie dient ter ondersteuning van een grote tent met een vierkant grondvlak van 10 m bij 10 m.

Punt P heeft de coördinaten $(4,4,5)$, punt Q is $(6,4,5)$.
In de figuur komen allerlei hoeken voor.

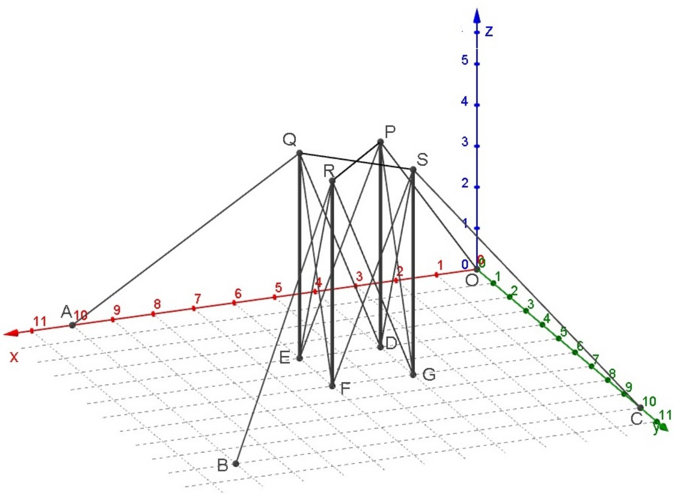
De lijnen BR en AQ maken een hoek φ met elkaar. Die hoek kun je berekenen vanuit de richtingsvectoren van beide lijnen.

$$\overrightarrow{BR} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De hoek bepaal je met het inproduct: $\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{AQ} = -4 \cdot -4 + -4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 25$

En $25 = \sqrt{57} \cdot \sqrt{57} \cdot \cos(\varphi)$ geeft $\varphi \approx 64°$.

De hoek tussen de lijnen BR en AQ is ongeveer 64°.



Figuur 5.4 **Figuurapplet**

De hoek die lijn BR maakt met het grondvlak $OABC$ is de hoek tussen deze lijn en zijn loodrechte projectie op het vlak BF. Deze hoek bereken je vanuit de richtingsvectoren $\overrightarrow{BR}$ en $\overrightarrow{BF}$.

Onder de hoek tussen twee vlakken versta je de grootste hoek tussen een lijn in het éne vlak en een lijn in het andere vlak. In de praktijk neem je twee lijnen die loodrecht op de snijlijn van beide vlakken staan en bereken je daar de hoek tussen.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

a Waarom kun je de hoek tussen de lijnen BR en AQ ook berekenen zonder het inproduct te gebruiken?

b Bereken zonder het inproduct te gebruiken de hoek tussen BR en AQ.

GR en EP zijn twee kruisende lijnen. Maar ook die maken een hoek met elkaar.

c Leg uit waarom de hoek tussen GR en EP even groot is als de hoek tussen de lijnen GR en FS. Bereken daarmee de hoek φ tussen GR en EP.

Opgave 4

Bekijk **Uitleg 2** en vooral de figuur.

a Bereken de hoek die de lijnen BR en GS met elkaar maken in graden nauwkeurig.

b Bereken de hoek die lijn BR met het grondvlak $OABC$ maakt in graden nauwkeurig.

c Bereken de hoek tussen de vlakken $BCSR$ en $OAPQ$ in graden nauwkeurig.

Opgave 5

Een veelvlak $ABCD.EFGH$ heeft als hoekpunten $A(4,-3,0)$, $B(4,3,0)$, $C(-4,3,0)$, $D(-4,-3,0)$, $E(2,-1,4)$, $F(2,1,4)$, $G(-2,1,4)$ en $H(-2,-1,4)$.

a Bereken de hoek tussen de snijdende lijnen AE en BF in graden nauwkeurig.

b Bereken de hoek tussen de kruisende lijnen AE en CG in graden nauwkeurig.

c Bereken de hoek die lijn BF maakt met vlak $ABCD$ in graden nauwkeurig.

d Bereken de hoek die de vlakken $AEHD$ en $BCGF$ met elkaar maken in graden nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder de **afstand** van twee meetkundige objecten versta je altijd hun kortste onderlinge afstand.

- De afstand van punt P tot punt Q is $|\overrightarrow{PQ}|$.
- De afstand van punt P tot lijn l is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op l.
- De afstand van punt P tot vlak V is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op V.
- De afstand tussen twee kruisende lijnen l en m is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op l tot het vlak door m en evenwijdig met l.
- De afstand tussen twee evenwijdige lijnen l en m is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op lijn l tot lijn m.
- De afstand tussen een lijn l en vlak V die evenwijdig zijn, is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op lijn l tot vlak V.
- De afstand tussen twee evenwijdige vlakken V en W is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op vlak V tot vlak W.

Een **hoek** tussen twee lijnen, een lijn en een vlak, of twee vlakken, is altijd scherp. Tenzij anders vermeld geef je een hoek in graden nauwkeurig.

- De hoek tussen twee lijnen bepaal je door de hoek tussen hun richtingsvectoren te berekenen.
- De hoek tussen een lijn l en een vlak V is de hoek tussen l en zijn loodrechte projectie l' op V.
- De hoek tussen twee vlakken V en W is gelijk aan de hoek tussen een lijn in V en een lijn in W die beide loodrecht op de snijlijn van V en W staan.

Voorbeeld 1

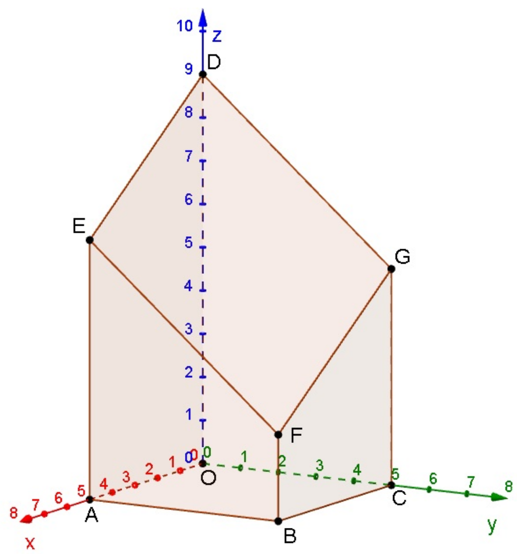
Dit is een schuin afgeknotte balk $OABC.DEFG$ met $E(5,0,6)$ en $G(0,5,5)$.
Het scheve bovenvlak $DEFG$ is geen rechthoek, de hoek bij hoekpunt D is kleiner dan 90°. Bereken de grootte van deze hoek.

Antwoord

$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Voor het inproduct van beide vectoren geldt:
$12 = \sqrt{34} \cdot \sqrt{41} \cdot \cos(\angle EDG)$.

En dus is $\angle EDG \approx 71°$.



Figuur 5.5 Figuurapplet

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**. Zie hoe je daar een hoek berekent.
De hoek in vlak $DEFG$ die bij E zit, kun je meteen afleiden uit $\angle EDG \approx 71°$.

a Bereken die hoek met behulp van de vectoren $\overrightarrow{ED}$ en $\overrightarrow{EF}$.

b Hoe groot is de hoek tussen de lijnen ED en EF?

c Waarom is de hoek tussen de vlakken $OAED$ en $OCGD$ geen $71°$?

Opgave 7

Een regelmatige vierzijdige piramide heeft als hoekpunten $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$, $D(-4,-4,0)$ en $T(0,0,6)$.

a Bereken de hoek tussen de lijnen AT en CT.

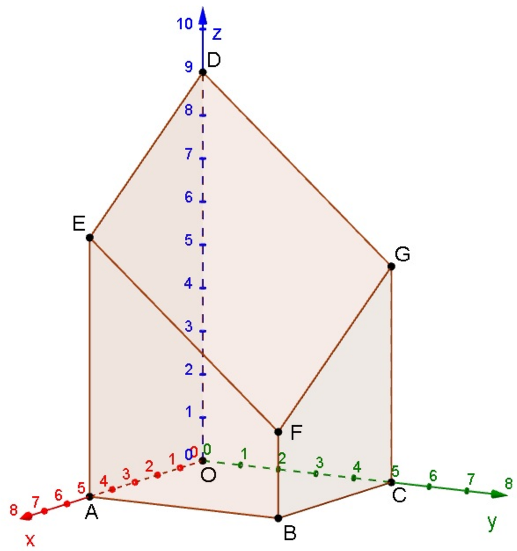
b Hoe groot is de hoek tussen de lijnen AT en TB?

c Hoe groot is de hoek tussen de lijnen AT en BC?

Voorbeeld 2

Dit is een schuin afgeknotte balk $OABC.DEFG$ met $E(5,0,6)$ en $G(0,5,5)$.

- Bepaal de afstand tussen de kruisende lijnen AB en DG.
- Bepaal de afstand tussen de evenwijdige lijnen EF en DG.
- Bepaal de afstand tussen punt O en vlak $ACGE$.



Figuur 5.6 **Figuurapplet**

Antwoord

Ga eerst na, dat F het punt $(5,5,2)$ moet zijn.

Om de afstand tussen de kruisende lijnen AB en DG te bepalen, maak je een vlak door bijvoorbeeld DG dat evenwijdig is met AB. Dat is het vlak $OCGD$ (het yz-vlak). In een zijaanzicht zie je dat de afstand van elk punt van AB tot dat vlak 5 is. Dat is dus ook de afstand tussen beide lijnen. Je kunt het kortste verbindingslijnstuk tekenen door AB te verlengen en DG te verlengen tot hij de y-as snijdt in P. Het lijnstuk door P, evenwijdig met CB tot het punt Q op lijn AB is dit kortste verbindingslijnstuk.

De afstand tussen de evenwijdige lijnen EF en DG is de lengte van het lijnstuk in het vlak $DEFG$ vanuit (bijvoorbeeld) punt E en loodrecht op DG.

$\angle EDR = 71{,}252...°$ (zie vorige voorbeeld) en $|ED| = \sqrt{34}$.

$\sin(\angle EDR) = \frac{|ER|}{\sqrt{34}}$ geeft $|ER| \approx 5{,}5$.

De afstand tussen de evenwijdige lijnen EF en DG is ongeveer $5{,}5$.

Het snijpunt van de diagonalen AC en OB is M.

Omdat de ribben AE en CG recht omhoog gaan is $|OM|$ de afstand tussen O en vlak $ACGE$.

$|OM| = \frac{1}{2}|OB| = \frac{1}{2}\sqrt{50} = 2{,}5\sqrt{2}$.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**. Zie hoe je daar afstanden berekent.

a Waarom moet F het punt $(5,5,2)$ zijn?

b Bepaal de afstand tussen de kruisende lijnen AE en DG.

c Bereken de afstand tussen de kruisende lijnen OA en DG. Rond af op twee decimalen.

d Wat is exact de afstand van punt B tot het vlak $ACGE$?

Opgave 9

Een regelmatige vierzijdige piramide heeft als hoekpunten $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$, $D(-4,-4,0)$ en $T(0,0,6)$. Rond de antwoorden in deze vraag af op twee decimalen.

a Bereken de afstand tussen de lijnen AT en DB.

b Bereken de afstand tussen de lijnen AT en BC.

c Bereken de afstand van punt B tot vlak ADT.

Voorbeeld 3

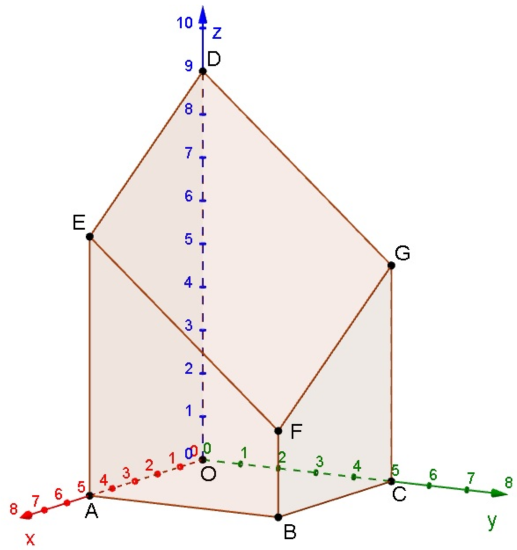
Dit is een schuin afgeknotte balk $OABC.DEFG$ met $E(5,0,6)$ en $G(0,5,5)$.
Bereken de hoek tussen de vlakken $OABC$ en $DEFG$.

Antwoord

Je moet dan eerst de snijlijn van beide vlakken tekenen:

- Verleng DG tot hij OC snijdt in K.
- Verleng DE tot hij OA snijdt in L.
- KL is de bedoelde snijlijn.

Teken vervolgens lijn OS loodrecht op KL.
Teken ook lijnstuk SD.
Beide lijnstukken staan loodrecht op de snijlijn KL van beide vlakken, dus de gevraagde hoek is $\angle OSD$. Deze is gelijk aan $45°$.



Figuur 5.7 Figuurapplet

Opgave 10

Bekijk **Voorbeeld 3**. Er wordt beschreven hoe je de hoek tussen de vlakken $OABC$ en $DEFG$ kunt berekenen.

a Teken zelf de figuur en daarin de snijlijn van beide vlakken.

b Bereken de lengte van OS.

c Laat nu zien, dat de hoek tussen beide vlakken inderdaad $45°$ is.

Opgave 11

Een regelmatige vierzijdige piramide heeft als hoekpunten $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$, $D(-4,-4,0)$ en $T(0,0,6)$.

a Bereken de hoek tussen de vlakken ADT en BCT.

De hoek tussen de vlakken ABT en BCT is niet meteen te berekenen. Je moet daartoe de lengtes berekenen van een lijnstuk AP dat loodrecht staat op BT en een lijnstuk CP dat ook loodrecht staat op BT. Je kunt je dan in ΔAPC de gewenste hoek berekenen.

b Voer die berekening uit.

Verwerken

Opgave 12

Welke beweringen zijn waar?

A. De afstand tussen twee kruisende lijnen is altijd 0.

B. De afstand tussen twee evenwijdige vlakken V en W is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op vlak V tot vlak W.

C. De hoek tussen twee lijnen kun je bepalen door de hoek tussen hun richtingsvectoren te berekenen.

D. De hoek tussen twee vlakken kun je niet bepalen.

Opgave 13

Gegeven is balk $OABC.DEFG$ in een cartesisch assenstelsel door $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$ en $D(0,0,6)$.

a Hoe groot is de afstand tussen de lijnen AB en CG?

b Bereken exact afstand tussen de lijnen AG en EF.

c Bereken de hoek tussen de lijnen AG en EF.

d Bereken de hoek tussen de vlakken $OABC$ en $ABGD$.

Opgave 14

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$ in een cartesisch assenstelsel door $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$, $D(-4,-4,0)$ en $E(4,-4,8)$. Punt M ligt op AE zo, dat $|AM| = 2$. Punt N is het midden van FG.

a Bereken exact de afstand van punt M tot punt N.

b Hoe groot is de afstand van punt N tot lijn EH?

c Bereken exact de afstand van punt N tot lijn HD.

d Bereken exact de afstand van punt N tot vlak $ACGE$.

e Bereken in één decimaal nauwkeurig de afstand van lijn MN tot lijn DC.

f Bereken in één decimaal nauwkeurig de afstand van lijn MN tot lijn BF.

Opgave 15

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$ in een cartesisch assenstelsel door $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$, $D(-4,-4,0)$ en $E(4,-4,8)$. Punt S is het snijpunt van de lijnen EG en FH. Punt T is het snijpunt van de lijnen AG en EC.

a Bereken de hoek tussen de lijnen AF en AS.

b Bereken de hoek tussen de kruisende lijnen BC en AS.

c Hoe groot is de hoek die lijn TS met vlak $ABCD$ maakt?

d Bereken de hoek die lijn AS met vlak $ABCD$ maakt.

e Bereken de hoek die lichaamsdiagonaal EC met diagonaalvlak $DBFH$ maakt.

f Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de vlakken BCS en $ADHE$.

Opgave 16

Gegeven is een prisma $ABC.DEF$ in een cartesisch assenstelsel door $A(6,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,-4,0)$, $D(6,0,8)$, $E(0,4,8)$ en $F(0,-4,8)$. Punt Q is het midden van AD.

a Hoeveel bedraagt de afstand van lijn AD tot vlak $CBEF$?

b Bereken exact de afstand tussen de kruisende lijnen BQ en CF.

c Hoe groot is de hoek die BQ met CF maakt?

d Bereken de hoek die lijn BQ met vlak $CBEF$ maakt.

e P ligt op lijnstuk EF. De hoek die lijn PQ met het vlak ABC maakt kan variëren. Tussen welke waarden?

f Bereken de hoek tussen de vlakken QEF en ABC.

Opgave 17

Een afgeknotte balk $OABC.DEFG$ is in een cartesisch assenstelsel gegeven door $A(8,0,0)$, $B(8,8,0)$, $C(0,8,0)$, $E(8,0,10)$, $F(8,8,4)$ en $G(0,8,6)$.

a Bepaal de coördinaten van punt D.

b Geef de afmetingen en hoeken van het bovenvlak.

c Bereken de afstand van punt A tot lijn DG in één decimaal nauwkeurig.

d Bereken de afstand tussen de lijnen EF en OA.

e Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen vlak $DEFG$ en het grondvlak $OABC$.

Toepassen

Opgave 18: Afgeknotte piramide

De afgeknotte piramide $OABC.DEFG$ is in een cartesisch assenstelsel gegeven door $A(4,0,0)$, $B(8,4,0)$, $C(4,8,0)$, $D(0,4,0)$, $E(3,1,6)$ en $H(0,4,6)$. M is het midden van BT en N is het midden van DT.

a Bepaal de coördinaten van de punten F en G.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de lijnen BF en DH met elkaar maken.

c Bereken de afstand tussen de lijnen BF en AC.

d Bereken de afstand van punt F tot vlak $ACGE$.

Testen

Opgave 19

Van een kubus $ABCD.EFGH$ met $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$, $D(-4,-4,0)$ en $E(4,-4,8)$ is een punt afgezaagd. Het zaagvlak is driehoek PQR, waarbij P, Q en R de middens van respectievelijk EF, BF en FG zijn.

a Bereken de afstand van punt R tot lijn PQ.

b Bereken de afstand van punt P tot vlak HDB.

c Bereken de afstand van punt N tot lijn HD.

d Bereken de afstand tussen de lijnen AG en BQ.

e Bereken de hoek tussen de lijnen PQ en PR.

f Bereken de hoek tussen de vlakken PQR en $ABCD$.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Meetkundige berekeningen**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- vector, lengte, richtingshoek — kentallen en componenten van een vector — vectoren optellen, aftrekken en scalair vermenigvuldigen — inproduct van twee vectoren
- driedimensionaal cartesisch assenstelsel — coördinaten en vectoren in zo'n 3D-assenstelsel — lengte van een vector in 3D
- inproduct van twee vectoren in 3D — richtingsvector van een lijn
- onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken — snijdende, kruisende, evenwijdige en samenvallende lijnen — afstand tussen meetkundige figuren
- hoeken en afstanden tussen meetkundige figuren

Activiteitenlijst

- werken met vectoren
- in een 3D-assenstelsel coördinaten aflezen en vectoren van kentallen voorzien — meetkundige figuren gegeven door coördinaten van (enkele) hoekpunten tekenen in een 3D-assenstelsel
- inproduct gebruiken om de hoek tussen twee vectoren te berekenen — de hoek tussen twee lijnen berekenen
- de onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken herkennen en benoemen
- hoeken en afstanden tussen meetkundige figuren herkennen en berekenen

Achtergronden

Sir William Rowan Hamilton (1805—1865) was een Ierse wiskundige, natuurkundige en astronoom die belangrijke bijdragen leverde aan de ontwikkeling van de optica, dynamica en algebra.

Hamilton was de eerste die het begrip **vector** introduceerde.
Hij werkte daarmee in drie dimensies en voor hem was een vector een pijl vanuit de oorsprong van een driedimensionaal assenstelsel naar een punt in de ruimte.

Hamilton werd in het bijzonder bekend door het hamiltonformalisme (een wiskundig nauwkeurige herformulering van de klassieke mechanica) en de door hem uitgedachte quaternionen (een vierdimensionale uitbreiding van de getallentheorie).

Figuur 6.1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de vectoren $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ en $\vec{w}=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$.

a Bereken exact de lengte van beide vectoren.

b Bereken de hoek tussen de vectoren. Rond af op één decimaal.

c Geef een vector die loodrecht staat op $\vec{w}$.

d Geef de kentallen van vector $\vec{z}=\vec{v}-3\vec{w}$.

Opgave 2

Gegeven is een prisma $OABC.DEFG$, waarin $OAED$ en $OCGD$ vierkanten zijn met zijden van 8 cm. Punt M is het midden van AE en punt N ligt op CG zo, dat $|CN|=2$ cm. S is het snijpunt van OB en AC en T is het snijpunt van DF en EG.

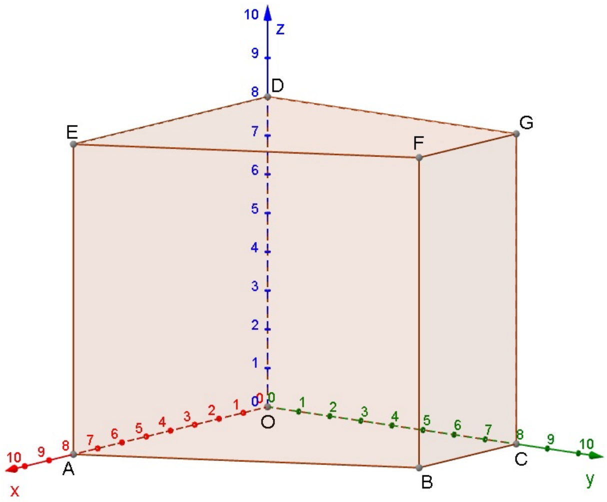
a Bereken exact $|OS|$.

b Lijn OT snijdt lijn BF in punt P. Bereken $|BP|$.

c Beredeneer dat de lijnen MN en OD elkaar kruisen en bereken hun onderlinge afstand.

d Bereken de hoek die de lijnen MN en OD met elkaar maken in graden nauwkeurig.

e Bereken de hoek die de vlakken $ABFE$ en $OCGD$ met elkaar maken in graden nauwkeurig.



Figuur 6.2 **Figuurapplet**

Opgave 3

De afgeknotte piramide $OABC.DEFG$ is in een cartesisch assenstelsel gegeven door $A(4,0,0)$, $B(8,4,0)$, $C(4,8,0)$, $D(0,4,0)$, $E(3,1,6)$ en $H(0,4,6)$.

Bepaal de coördinaten van de punten F en G.

Opgave 4

Gegeven zijn de punten $A(2,5,-4)$,$B(-5,3,8)$ en $C(0,2,-2)$.

a Bereken exact de lengte van de vector $\overrightarrow{AB}$.

b Bereken de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.

c Geef een punt D waarvoor geldt dat $\overrightarrow{AD}$ loodrecht staat op $\overrightarrow{AB}$.

Opgave 5

Gegeven zijn de punten $A(6,5,0)$, $B(-6,5,0)$, $C(-6,-5,0)$, $D(6,-5,0)$, $E(3,0,6)$ en $F(-3,0,6)$. $ABCD$ is het grondvlak (de zoldervloer) van de zolder van een boerderij waarvan EF de nok van het dak is. Het dak bestaat uit twee symmetrische trapezia $ABFE$ en $CDEF$ en twee gelijkbenige driehoeken DAE en BCF. Alle afmetingen zijn in m.

a Bereken exact de totale oppervlakte van het dak.

b Bereken de hoek die de twee grootste vlakken waaruit het dak bestaat, met elkaar maken.

c Bereken de afstand tussen de lijnen AE en CF. Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

d Bereken in cm nauwkeurig de afstand tussen punt D en vlak DAE.

Opgave 6

Van een regelmatig driezijdig prisma $ABC.DEF$ zijn de driehoeken ABC en DEF gelijkzijdig. De drie opstaande vlakken zijn congruente rechthoeken. $|AB| = 6$ en $|AD| = 3$. Gegeven zijn $A(0,-3,0)$ en $B(0,3,0)$. P is het midden van AB, Q dat van BC en R dat van CF.

a Bereken de afstand tussen de kruisende lijnen AD en PR.

b Construeer de doorsnede van vlak PQR met het prisma.

c Teken de in b bedoelde doorsnede op ware grootte. Schrijf de daartoe noodzakelijke berekeningen op.

d Bereken de hoek die vlak PQR met het grondvlak ABC maakt.

e Bereken de afstand van punt F tot vlak PQR.

Opgave 7

De afgeknotte piramide $OABC.DEFG$ is in een cartesisch assenstelsel gegeven door $A(4,0,0)$, $B(8,4,0)$, $C(4,8,0)$, $D(0,4,0)$, $E(3,1,6)$ en $H(0,4,6)$. M is het midden van BT en N is het midden van DT.

a Bepaal de coördinaten van de punten F en G.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de lijnen BF en DH met elkaar maken.

c Bereken de afstand tussen de lijnen BF en AC.

d Bereken de afstand van punt F tot vlak $ACGE$.

Opgave 8

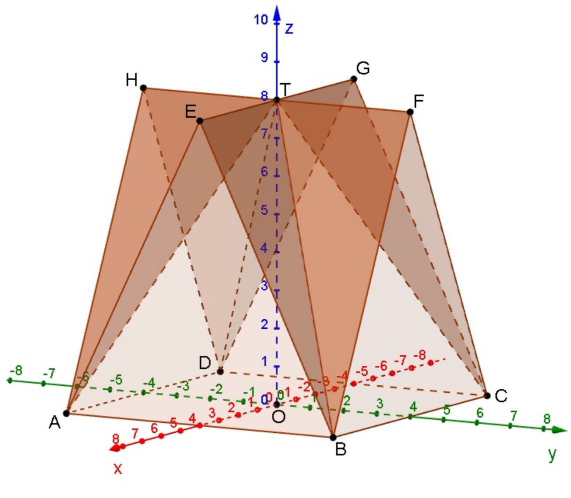
Je ziet hier een schematische tekening van het vakantiehuisje 'Heideheuvel'. Alle zijvlakken (opstaande muren) zijn gelijkbenige driehoeken met een hoogte van 8 m en staan loodrecht op het vierkante grondvlak $ABCD$ van 8 bij 8 m. Voor het gemak hebben de hoekpunten letters gekregen, zie figuur. Punt T ligt op de z-as en punt O is het snijpunt van AC en BD. De x-as gaat door O en het midden van AB, de y-as door O en het midden van BC.

a Bereken de totale dakoppervlakte van deze vakantiewoning.

b Bereken de totale inhoud van deze vakantiewoning.

c Bereken de hoek die lijn BT met het grondvlak maakt.

d Bereken de hoek die de twee aangrenzende vlakdelen BTE en BFT met elkaar maken.



Figuur 6.3 **Figuurapplet**

Opgave 9

Van piramide $O.ABCD$ is het grondvlak een vierkant met $A(12,0,0)$ en $C(0,12,0)$. P is het punt $(3,0,0)$.

a Bereken de grootte van $\angle DPB$ in graden nauwkeurig.

b Bereken de afstand van P tot lijn BC in twee decimalen nauwkeurig.

c Het vlak V met alle punten waarvoor geldt $x = 3$ gaat door punt P. Dit vlak snijdt de piramide volgens vijfhoek $PQRST$. Teken deze vijfhoek in de piramide en bereken de oppervlakte ervan.

Toepassen

Opgave 10: De vijf regelmatige lichamen

Al in de Oudheid was bekend dat er precies vijf **regelmatige lichamen** zijn. Dat zijn lichamen waarvan alle ribben en alle vlakken en alle hoeken gelijk zijn. Hier zie je er fraaie animaties van, die zijn gemaakt door **Rüdiger Appel**. Bekijk zijn website maar eens, je vind er deze figuren onder de naam 'Platonic Solids' (dat is Engels voor 'Platonische lichamen').
Je ziet in de applet (van links naar rechts) het tetraëder (regelmatig viervlak), de kubus (hexaëder, of regelmatig zesvlak), het octaëder (regelmatig achtvlak), het dodecaëder (regelmatig twaalfvlak) en het icosaëder (regelmatig twintigvlak).

Bekijk de applet.

Als je hun hoekpunten, hun ribben en hun grensvlakken telt, kom je tot:

aantal grensvlakken + aantal hoekpunten = aantal ribben + 2

Is dat toeval? Of kun je het verklaren?
En waarom zijn er niet meer dan vijf?

a Neem $r = 4$ en teken van het regelmatig viervlak, de kubus en het regelmatig achtvlak een dwarsdoorsnede waar minstens één ribbe een zijde van is en die door de draaias van de figuur gaat. Als je er zin in hebt moet je vooral ook proberen om dit in het regelmatig twaalfvlak en het regelmatig twintigvlak te doen!

b Druk bij het regelmatig viervlak, de kubus en het regelmatig achtvlak de hoogte uit in r.
De andere twee zijn erg moeilijk, een echte uitdaging!

c Kun je verklaren waarom er niet meer dan vijf regelmatige lichamen zijn? (Tip: Denk aan de hoeken die in een hoekpunt bij elkaar komen.)

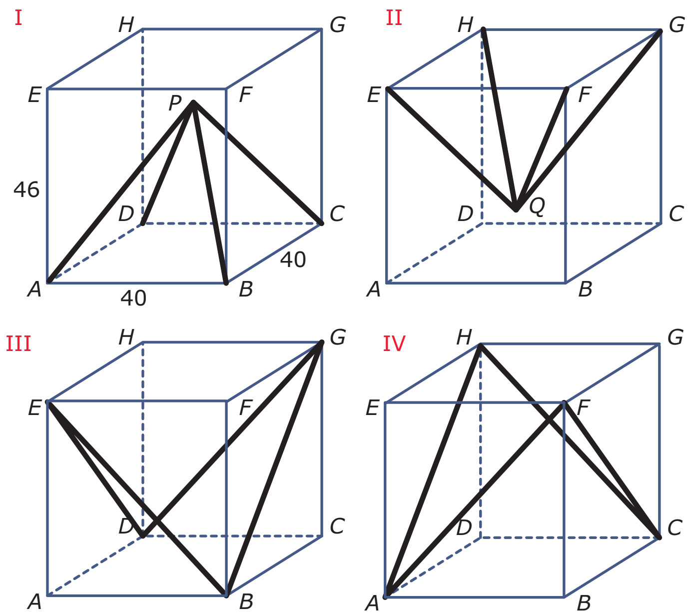
d Probeer een verklaring te vinden voor de formule van Euler:
aantal grensvlakken + aantal hoekpunten = aantal ribben + 2

Examen

Opgave 11: Tafeltje

Op de foto hiernaast staat de afbeelding van een tafeltje. Het tafeltje bestaat uit een aluminium onderstel met daarop een glazen plaat. De vragen gaan over het onderstel. Dit bestaat uit een aantal staven. Uit de foto is moeilijk op te maken hoe het onderstel precies in elkaar zit. De figuur hieronder geeft hierover meer duidelijkheid door het verdelen van de staven over de figuren I, II, III en IV.

Figuur 6.4



Figuur 6.5

Het onderstel past in zijn geheel precies in een denkbeeldige balk $ABCD.EFGH$. Als de vier figuren in elkaar worden geschoven, ontstaat een tekening van het volledige onderstel. Bij de punten E, F, G en H van het onderstel kan de glazen plaat worden vastgemaakt.

In de volgende vragen wordt de dikte van de staven verwaarloosd.

De afmetingen van de balk $ABCD.EFGH$ zijn $40 \cdot 40 \cdot 46$ cm. Zie de figuren I en II.

Punt P ligt 13 cm onder het midden van het bovenvlak van de balk; punt Q ligt 13 cm boven het midden van het grondvlak.

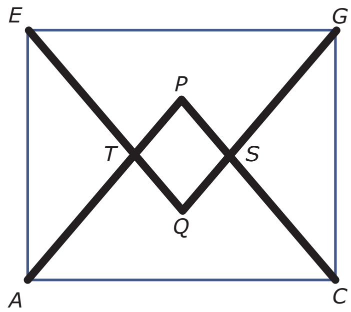
a Teken het bovenaanzicht van het volledige onderstel op schaal $1 : 10$. Zet alle letters erbij.

b Bereken de totale lengte aluminium staaf die in het onderstel verwerkt is. Geef je antwoord in gehele centimeters nauwkeurig.

Hiernaast is het diagonaalvlak $ACGE$ getekend met de vier staven die in dit vlak liggen. In het snijpunt S van de lijnen PC en QG zijn in werkelijkheid de twee staven door middel van een pennetje met elkaar verbonden. Om dit mogelijk te maken moest er in iedere staaf een gaatje geboord worden op een bepaalde afstand van de eindpunten.

c Bereken de afstand QS. Geef je antwoord in gehele millimeters nauwkeurig.

(bron: herexamen wiskunde B1,2 havo 2000, opgave 5)



Figuur 6.6

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

Math4all
www.math4all.nl