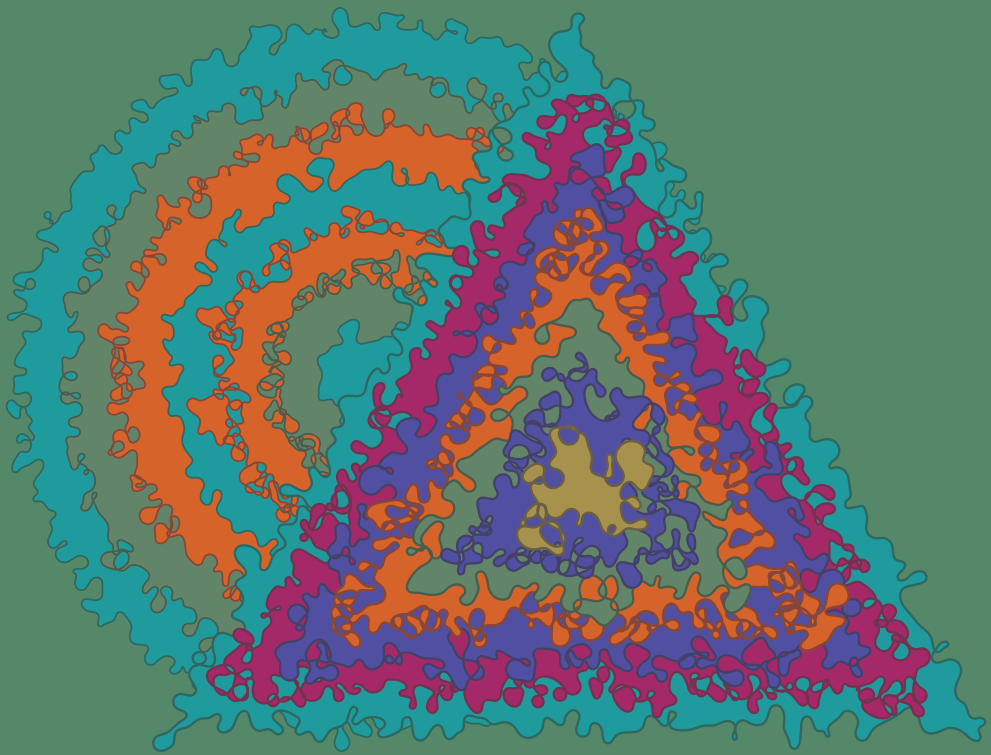
Wiskunde D

5 HAVO

Katern 1

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Continue kansmodellen

1.1 Normaalkromme

Inleiding

Een bedrijf is geïnteresseerd in de tijd die nodig is om een klant te helpen, de transactietijd. Je kunt die tijd in klassen indelen (bijvoorbeeld van hele minuten) en zo bijhouden hoeveel minuten een transactie duurt. Je maakt dan een relatieve frequentieverdeling voor de variabele transactietijd. Maar de transactietijd kan in feite elke (positieve) reële waarde aannemen. Door steeds kleinere tijdsintervallen te nemen kun je een kansverdeling voor deze continue kansvariabele opstellen, benaderen.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip continue stochast;
- het begrip normaalkromme en enkele eigenschappen van de normaalkromme.

Voorkennis

- werken met discrete stochasten.

Verkennen

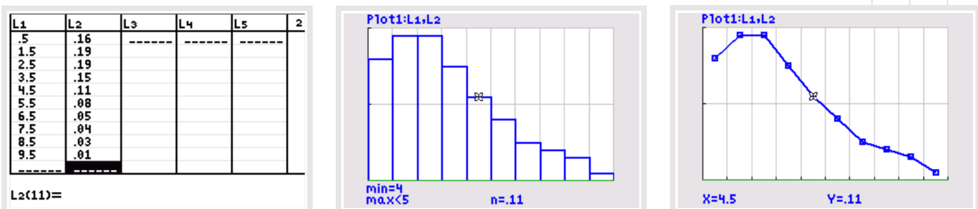
Opgave V1

Een bedrijf heeft door tellingen een frequentieverdeling opgesteld voor de tijd die nodig is om een klant te helpen. Een transactietijd van 1 minuut betekent dat de klant binnen een minuut is geholpen. Voor deze transactietijd (in minuten) geldt:

t (min.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(T = t)$	0,16	0,19	0,19	0,15	0,11	0,08	0,05	0,04	0,03	0,01

Tabel 1.1

Je kunt dit opvatten als een kansverdeling voor een discrete stochast T. Maar T kan in feite elke (positieve) reële waarde aannemen. Door steeds kleinere tijdsintervallen te nemen kun je een kansverdeling voor deze continue stochast opstellen, benaderen. Het lijndiagram laat dit al een beetje zien. (Merk op dat voor de juiste figuren de klassenmiddens van elke minuut moeten worden ingevoerd in de grafische rekenmachine.)



Figuur 1.2

a Hoe groot is de kans dat een klant minder dan 4 minuten transactietijd kost?

b Hoe geef je die kans in het staafdiagram weer? En in het lijndiagram?

c Hoe bepaal je de kans dat een klant minder dan $4{,}75$ minuten transactietijd kost?

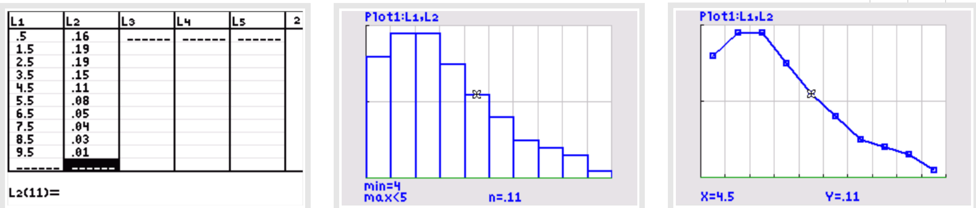
Uitleg 1

Een bedrijf noemt de tijd die nodig is om een klant te helpen de transactietijd. Een transactietijd van 1 minuut betekent dat de klant binnen een minuut is geholpen. Het bedrijf heeft door tellen de relatieve frequenties van die transactietijd vastgesteld.

t (min.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(T = t)$	0,16	0,19	0,19	0,15	0,11	0,08	0,05	0,04	0,03	0,01

Tabel 1.2

Vat dit op als een kansverdeling voor de statistische variabele T. De kansverdeling kun je invoeren op de grafische rekenmachine om er vervolgens een histogram of een lijndiagram bij te maken. Hoe dit gaat, vind je in het **Practicum**.



Figuur 1.3

- De kans dat een klant hoogstens vier minuten transactietijd kost, is dan:
  $\text{P}(T \leq 4) = 0{,}16 + 0{,}19 + 0{,}19 + 0{,}15 = 0{,}69$
  Dit is de oppervlakte van de eerste vier staafjes van het histogram.
  Het is ook de oppervlakte onder het lijndiagram vanaf $t = 0$ tot $t = 4$.
- De kans dat een klant hoogstens $4{,}75$ minuten transactietijd kost, kun je benaderen door de oppervlakte te schatten onder het lijndiagram die de middens van de bovenkanten van de staafjes verbindt vanaf $t = 0$ tot $t = 4{,}75$.

T kan in werkelijkheid elke positieve waarde aannemen. Door meer metingen te doen, kun je een kansverdeling voor deze variabele opstellen met heel veel staafjes, zelfs zo veel staafjes dat de middens van hun bovenkanten een vloeiende kromme vormen.

Opgave 1

Bekijk de relatieve frequentieverdeling van de transactietijd T in **Uitleg 1**.

a Waarom is T hier een discrete stochast?

b Hoe groot is de kans op een transactietijd van twee minuten?

c Hoe groot is de kans op een transactietijd van meer dan acht minuten?

d Bepaal met behulp van het kanshistogram de kans dat een klant hoogstens 6 minuten moet wachten.

e Hoe groot is de oppervlakte van alle staafjes samen?

Opgave 2

Bekijk nogmaals de relatieve frequentieverdeling van de transactietijd T.

a Leg uit, dat de eerste klasse bestaat uit alle tijden van 0 tot 1 minuut.

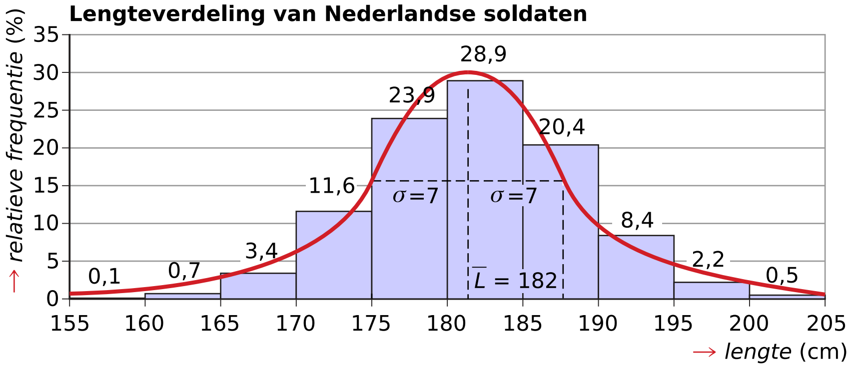
b Welk klassenmidden heeft de eerste klasse?

c Geef van elke klasse het klassenmidden.

d Bereken de kans $\text{P}(3 \leq T \leq 6)$.

Uitleg 2

Bekijk het histogram van de verdeling van de lichaamslengte van een groep soldaten.



Figuur 1.4

De lichaamslengte L lijkt discreet door de indeling in klassen.
In werkelijkheid is de lichaamslengte een continue toevalsvariabele. In de figuur is een passende kromme getekend die de continue verdeling van de lichaamslengte L benadert. De benadering wordt beter als je meer klassen maakt.

De grafiek heeft een klokvormige frequentieverdeling die wordt bepaald door gemiddelde (μ) van L en standaardafwijking (ook wel standaarddeviatie genoemd) σ, waar je al enkele uitspraken over weet. Je zegt ook wel dat L normaal verdeeld is. De grafiek wordt ook wel de normaalkromme genoemd. Het gemiddelde van een normale verdeling wordt μ genoemd. Er geldt:

- het hoogste punt van de normale verdeling zit bij μ.
- een maat voor de spreiding is de standaardafwijking σ.
- de normale verdeling is symmetrisch ten opzichte van μ in het midden.
- hoe verder je bij μ vandaan gaat (naar links of naar rechts), hoe dichter de hoogte van de normale verdeling bij 0 komt.

Kansen bepaal je door de bijpassende oppervlakte onder de grafiek te schatten. De totale oppervlakte onder deze kromme is altijd 1 of 100%.

Soms kun je ook de vuistregels voor klokvormige frequentieverdelingen gebruiken om kansen te benaderen. Van de oppervlakte onder de normaalkromme ligt:

- ongeveer 68% tussen $X = \mu - \sigma$ en $X = \mu + \sigma$.
- ongeveer 95% tussen $X = \mu - 2\sigma$ en $X = \mu + 2\sigma$.
- ongeveer 100% tussen $X = \mu - 3\sigma$ en $X = \mu + 3\sigma$.

Opgave 3

Bekijk de verdeling van de lichaamslengte L in **Uitleg 2**.

Waarom is L een continue stochast?

Opgave 4

Bekijk nogmaals het histogram van de lengtes van een groep soldaten.

a Waarom ligt een symmetrische verdeling van de frequenties van de lengtes hier wel voor de hand?

b Waarom volgt uit die symmetrie dat $\text{P}(L \leq 182) = 0{,}5$?

c Maak met behulp van het histogram een schatting van $\text{P}(L \leq 174)$.

d Welk percentage hoort bij het hele gebied onder de normaalkromme?

Opgave 5

X is een normaal verdeelde variabele met $\mu(X) = 100$ en $\sigma(X) = 2{,}5$. Welke beweringen zijn waar?

A. De normaalkromme van X is symmetrisch.
B. $\text{P}(X > 102) = \text{P}(X < 102)$
C. 68% van de oppervlakte onder de normaalkromme ligt tussen $X = 97{,}5$ en $X = 102{,}5$.
D. Het hoogste punt van de normaalkromme van X ligt bij $X = 105$.

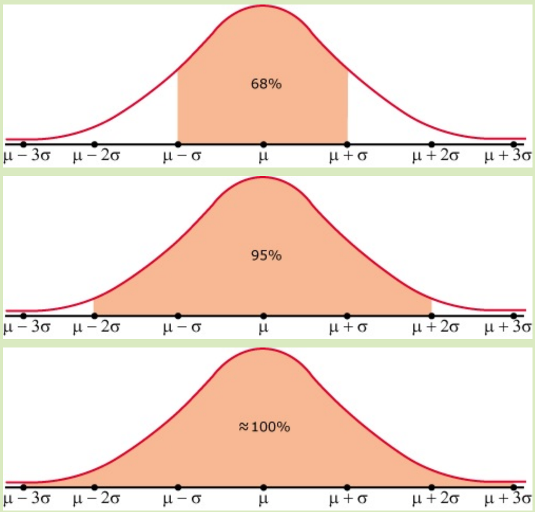
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Een stochast X die alle reële waarden (uit een bepaald interval) kan aannemen noem je een **continue stochast**. Hierbij kun je een frequentiepolygoon tekenen; deze zal er steeds meer gaan uitzien als een vloeiende kromme naarmate je de klassenbreedte kleiner kiest.
Bij veel continue stochasten zoals lengte, gewicht, inhoud, enzovoort, hebben de relatieve frequentiehistogrammen vaak de kenmerkende klokvorm. Deze wordt gekarakteriseerd door het gemiddelde μ en de standaardafwijking (standaarddeviatie) σ van de frequentieverdeling. De grafiek daarvan is een perfecte klokvorm, de **normaalkromme** met als belangrijkste eigenschappen:

- de totale oppervlakte onder de normaalkromme is 100% (ofwel kans 1);
- het hoogste punt van de normaalkromme bevindt zich bij het gemiddelde $x = \mu$;
- de spreiding van de normaalkromme is de standaardafwijking σ;
- de normaalkromme is symmetrisch t.o.v. de lijn $x = \mu$ en nadert de x-as als x ver van μ af ligt;
- **vuistregels voor de oppervlakte onder de normaalkromme**:
  - ongeveer 86% ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$;
  - ongeveer 95% ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$;
  - ongeveer 100% ligt tussen $X = \mu - 3\sigma$ en $X = \mu + 3\sigma$.



Figuur 1.5

Als de normaalkromme van stochast X aan bovenstaande eigenschappen voldoet, dan heet X een normaal verdeelde stochast. Bijbehorende kansen kun je dan berekenen met behulp van bovenstaande vuistregels of de grafische rekenmachine.

Voorbeeld 1

In een callcenter is de transactietijd T de tijd die nodig is om een klant te woord te staan. T is een continue kansvariabele.
Waarom zal T niet normaal verdeeld zijn?
Hoe zou je $\text{P}(T \leq 4{,}5)$ kunnen bepalen?

Antwoord

De bijbehorende kansverdeling zal niet symmetrisch zijn: de kans op een kleine transactietijd is veel groter dan die op een grote.

Schat de oppervlakte onder de kromme om $\text{P}(T \leq 4{,}5)$ te bepalen, bijvoorbeeld door er staafjes in te tekenen met een klassenbreedte van $0{,}5$.
Dan vind je $\text{P}(T \leq 4{,}5) \approx 0{,}66$.

Figuur 1.6

Opgave 6

Bekijk het kanshistogram met de frequentiepolygoon uit **Voorbeeld 1**.

a Waarom zal de transactietijd in het algemeen niet normaal verdeeld zijn?

b Bepaal met behulp van het kanshistogram $P(3 \leq T \leq 7)$.

c Hoe groot is de kans op meer dan 10 minuten transactietijd?

Opgave 7

In de tabel staan de gewichten van 154 peren die gedurende een week uit een perenboom zijn gevallen. Het gewicht G van deze peren is een continue stochast.

a Teken bij deze gegevens een histogram en een frequentiepolygoon. Vind je dat er hier sprake is van een normale verdeling?

b Reken met behulp van de klassenmiddens na, dat het gemiddelde gewicht van deze peren ongeveer $174{,}9$ gram is.

c Leg zelf in duidelijke bewoordingen uit dat de oppervlakte van de staafjes ongeveer net zo groot is als de oppervlakte onder de frequentiepolygoon.

d Bereken de kans dat een volgende peer die uit de boom valt een gewicht heeft van meer dan 180 gram. Rond af op twee decimalen.

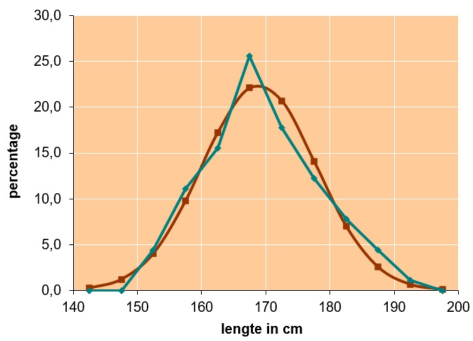
gewicht	*aantal*
$155- < 160$	6
$160- < 165$	14
$165- < 170$	37
$170- < 175$	26
$175- < 180$	24
$180- < 185$	23
$185- < 190$	12
$190- < 195$	9
$195- < 200$	2
$200- < 205$	1

Tabel 1.3

Voorbeeld 2

Je ziet hier dat deze **lengteverdeling van negentig meisjes van zeventien jaar** bij benadering klokvormig is. Bekijk de frequentietabel met klassen vanaf $1{,}40- < 1{,}45$ tot $1{,}95- < 2{,}00$.

lengteklasse	klassenmidden	abs.freq	rel.freq	norm.vd.
1,40-<1,45	142,5	0	0	0,3
1,45-<1,50	147,5	0	0,0	1,2
1,50-<1,55	152,5	4	4,4	4,1
1,55-<1,60	157,5	10	11,1	9,8
1,60-<1,65	162,5	14	15,6	17,2
1,65-<1,70	167,5	23	25,6	22,1
1,70-<1,75	172,5	16	17,8	20,7
1,75-<1,80	177,5	11	12,2	14,1
1,80-<1,85	182,5	7	7,8	7,0
1,85-<1,90	187,5	4	4,4	2,6
1,90-<1,95	192,5	1	1,1	0,7
1,95-<2,00	197,5	0	0,0	0,1
		90	100,0	98,3



Figuur 1.7

Welk percentage van deze meisjes heeft een lengte van $1{,}60$ tot $1{,}78$ meter? Schat percentage ook met behulp van de normaalkromme. Ga na dat dit percentage ongeveer met de eerste vuistregel overeenkomt.

Antwoord

Bekijk de frequentietabel en de frequentiepolygoon met de normaalkromme met gemiddelde $\mu = 169$ en standaardafwijking $\sigma = 9$ in de figuur.

Het percentage meisjes met een lengte van $1{,}60- < 1{,}78$ is:

- door de frequentietabel te gebruiken ongeveer:

  $15{,}6 + 25{,}6 + 17{,}8 + \frac{3}{5} \cdot 12{,}2 = 66{,}32\%$

- door schatten met de normaalkromme:

  $17 + 22 + 21 + \frac{3}{5} \cdot 14 = 68{,}4\%$

De eerste vuistregel zegt dat ongeveer 68% van de lengtes in moet liggen tussen $\mu - \sigma = 169 - 9 = 160$ en $\mu + \sigma = 169 + 9 = 178$ cm. Dat lijkt ongeveer te kloppen.

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2** het bestand met de lengteverdeling van de 90 meisjes.

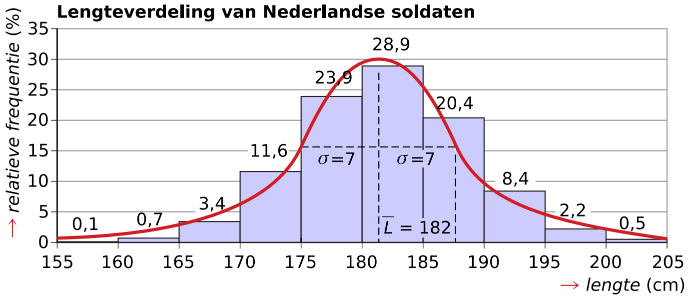
a Reken na dat het gemiddelde ongeveer 169 cm is en de standaard-afwijking ongeveer 9 cm.

b Waarom is er $\frac{3}{5}$- deel van 12,2 genomen?

c Bekijk de lengtes van de 90 meisjes uit het voorbeeld.
Controleer of er ook aan de tweede vuistregel is voldaan. Doe dit ook op twee manieren, als in het voorbeeld.

Opgave 9

Bekijk het histogram van de lengteverdeling van de soldaten in **Uitleg 2**.



Figuur 1.8

a Controleer of er aan vuistregel 1 is voldaan.

b Controleer of er aan vuistregel 2 is voldaan.

Voorbeeld 3

Het gewicht G van appels is normaal verdeeld met een gemiddelde van 150 gram en een standaardafwijking van 17 gram. Er zijn zes gewichtsklassen:

- klasse 1: appels lichter dan 116 gram
- klasse 2: appels vanaf 116 tot 133 gram
- klasse 3: appels vanaf 133 tot 150 gram
- klasse 4: appels vanaf 150 tot 167 gram

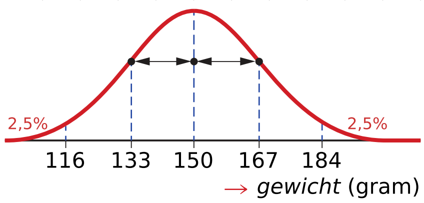
- klasse 5: appels vanaf 167 tot 184 gram
- klasse 6: appels vanaf 184 gram

Hoeveel procent van deze appels zit in klasse 1 en hoeveel procent in klasse 6?

Antwoord

Maak gebruik van de vuistregels voor de normale verdeling. Gebruik de beide vuistregels, het feit dat de kromme symmetrisch is en dat de totale oppervlakte eronder 100% is.

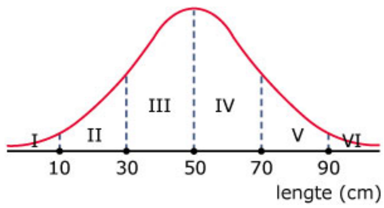
Ongeveer 95% van de appels zit tussen 116 en 184 gram, dus 5% zit daarbuiten. Daarom weegt 2,5% minder dan 116 gram: klasse 1 bevat 2,5% van de appels. Tegelijk weegt 2,5% meer dan 184 gram: klasse 6 bevat 2,5% van de appels.



Figuur 1.9

Opgave 10

De lengte van de buxusplanten bij een plantenkweker is normaal verdeeld met een gemiddelde van 50 cm en een standaardafwijking van 20 cm. De normaalkromme geeft de lengteverdeling weer. De buxusteler verdeelt de planten in zes categorieën van 20 cm. Eén daarvan is de categorie $50- < 70$.



Figuur 1.10

a Bepaal hoeveel procent van de planten tot elke categorie behoren. Bekijk eventueel **Voorbeeld 3**.

b Hoeveel procent van de planten is groter dan 70 cm?

c Hoeveel procent van de planten heeft een lengte tussen 30 en 90 cm?

d Hoeveel procent van de planten is minstens 30 cm lang?

Opgave 11

Uit onderzoek is gebleken dat de levensduur van ouderwetse gloeilampen normaal verdeeld is. Een bepaald type lamp heeft een levensduur van 500 uur, met een standaardafwijking van 100 uur. Een grootwinkelbedrijf koopt 50000 lampen van dit type in.

a Maak een schets van de normaalkromme en geef daarin het gemiddelde en de standaardafwijking aan.

b Hoeveel van deze lampen branden langer dan 400 uur?

c Hoeveel van deze lampen hebben een levensduur die ligt tussen 400 en 700 uur?

d Hoeveel van deze lampen hebben een levensduur die onder de 600 uur ligt?

Opgave 12

Misschien denk je nu dat in de praktijk bij alle statistische variabelen een normale verdeling past. Dat is echter niet bepaald het geval: in veel situaties is een verdeling niet symmetrisch. In welke van de volgende gevallen is de verdeling waarschijnlijk niet symmetrisch (en dus niet normaal verdeeld)?

a Het vulgewicht van machinaal gevulde pakken suiker.

b De armlengte van volwassen mannen.

c Het gewicht van volwassen mannen.

d De reactietijd van een mens bij een onverwachte gebeurtenis.

e Het inkomen van alle Nederlanders.

f De wachttijd bij een helpdesk.

Verwerken

Opgave 13

Van twee soorten lampen is de levensduur van 500 exemplaren gemeten. Het aantal branduren blijkt vrijwel normaal verdeeld te zijn. Hier zie je de bijpassende normaalkrommen. Enkele percentages zijn gegeven.

Van soort A is het gemiddelde $\mu_A = 600$ branduren en de standaardafwijking $\sigma_A = 20$ uur.

a Hoeveel procent van de lampen van soort *A* brandt minder dan 600 uur?

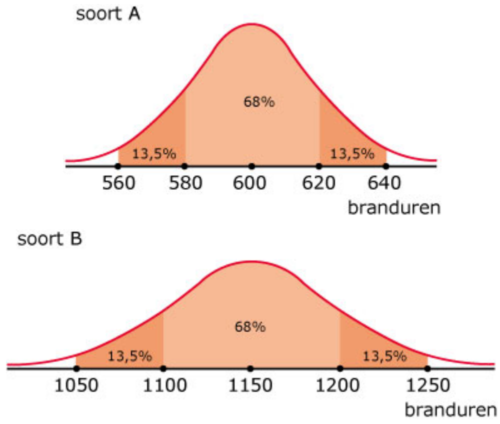
b Hoeveel procent van de lampen van soort *A* brandt minder dan 620 uur?

Je ziet bij soort A dat 68% van alle branduren tussen $\mu_A - \sigma_A$ en $\mu_A + \sigma_A$ ligt. Dat percentage is voor alle normale verdelingen hetzelfde omdat de normaalkromme alleen bepaald wordt door het gemiddelde en de standaardafwijking.

c Hoeveel is dus de standaardafwijking van de lampen van soort B? En hoeveel is het gemiddelde aantal branduren van de lampen van soort B?

d Waarom heeft de normale verdeling bij soort B een top die minder hoog is dan die van de normale verdeling van soort A?

e Hoeveel procent van de lampen van soort B brandt langer dan 1250 uur?



Figuur 1.11

Opgave 14

De gemiddelde lengte van vrouwen is bij benadering normaal verdeeld. Van een zekere populatie vrouwen in Nederland was de gemiddelde lengte 170 cm met een standaardafwijking van 6,5 cm.

a Teken hierbij zelf een normaalkromme met het gemiddelde en de standaardafwijking erin aangegeven. Geef ook de bijbehorende percentages.

b Hoeveel procent van deze vrouwen had toen een lengte tussen 163,5 en 176,5 cm?

c Hoeveel procent van deze vrouwen was waarschijnlijk kleiner dan 157 cm?

d Hoeveel procent van deze vrouwen was waarschijnlijk kleiner dan 183 cm?

Opgave 15

In een fabriek worden kilopakken suiker machinaal gevuld. Volgens de Europese norm mag niet meer dan $2{,}5\%$ van de pakken suiker minder dan 1000 gram bevatten (deze norm zie je vaak terug op de verpakking door een ℮ achter de inhoud). Er wordt een steekproef genomen van 100 pakken suiker. In de tabel staan de op hele grammen afgeronde vulgewichten van deze 100 pakken suiker.

onder	midden	boven	freq	c.r.f.
996,0	996,5	997,0	1	1
997,0	997,5	998,0	4	5
998,0	998,5	999,0	5	10
999,0	999,5	1000,0	4	14
1000,0	1000,5	1001,0	13	27
1001,0	1001,5	1002,0	13	40
1002,0	1002,5	1003,0	10	50
1003,0	1003,5	1004,0	13	63
1004,0	1004,5	1005,0	8	71
1005,0	1005,5	1006,0	12	83
1006,0	1006,5	1007,0	6	89
1007,0	1007,5	1008,0	8	97
1008,0	1008,5	1009,0	2	99
1009,0	1009,5	1010,0	0	99
1010,0	1010,5	1011,0	0	99
1011,0	1011,5	1012,0	1	100

Figuur 1.12

a Teken een relatief frequentiehistogram van deze vulgewichten. Teken hierin ook de frequentiepolygoon. Laat zien dat de vulgewichten van deze machine bij benadering een symmetrische klokvormige verdeling hebben.

b Hoeveel procent van de pakken suiker heeft een afgerond gewicht van 999 gram tot 1002 gram volgens dit histogram (of tabel)?

c Als je dit percentage met behulp van de frequentiepolygoon zou willen berekenen, welke grenzen moet je dan nemen?

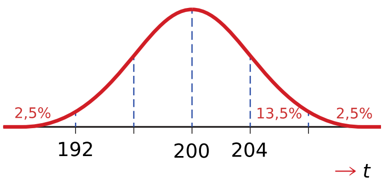
d Reken met behulp van je grafische rekenmachine na dat het gemiddelde gewicht van deze vulgewichten ongeveer $1002{,}4$ gram is en de standaardafwijking ongeveer $2{,}4$ gram.

e Bij het histogram past bij benadering een normale verdeling met het zojuist berekende gemiddelde en de bijbehorende standaardafwijking. Controleer of er aan de eerste vuistregel is voldaan.

f Voldoen de pakken suiker uit de steekproef aan de Europese norm volgens deze normale verdeling?

Opgave 16

Geef bij deze normaalkromme de waarden van μ en σ.



Figuur 1.13

Opgave 17

Een supermarkt verkoopt spliterwten in pakken van 500 gram. Veel klanten vermoeden dat in minstens een derde van de pakken te weinig spliterwten zitten. Zij dienen een klacht in bij de directie. Een consumentenorganisatie wordt gevraagd dit te onderzoeken. Zij nemen een steekproef van 100 pakken. Het gemiddelde gewicht van de pakken blijkt 502 gram met een standaardafwijking van 8 gram te zijn. Verder blijken de gewichten van pakken spliterwten normaal verdeeld te zijn.

a Hoeveel pakken uit de steekproef weken meer dan één keer de standaardafwijking af van het gemiddelde?

b Hoeveel pakken uit de steekproef hebben een gewicht van minder dan 510 gram?

c Kun je precies bepalen hoeveel procent van de pakken meer weegt dan 511 gram?

d Maak een schatting van het percentage van de pakken dat minder weegt dan 500 gram. Zullen de klagers in het gelijk gesteld worden?

Opgave 18

Een maat voor iemands intelligentie is het IQ (intelligentiequotiënt). Dat is de score op een intelligentietest vergeleken met die van leeftijdsgenoten. Het IQ is een continue stochast die normaal verdeeld is met een gemiddelde van 100 en een standaardafwijking van 15.

a Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ tussen 85 en 115?

b Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van meer dan 130?

c Hoe groot is de kans dat het IQ van een willekeurige voorbijganger minder is dan 130?

d Met welk IQ behoor je tot de mensen die de 16% laagste scores hebben?

Toepassen

Opgave 19: Lichaamslengtes van 5001 vrouwen

Open het bestand **Enkele lichaamsafmetingen van 5001 vrouwen uit 1947**. Hierin zie je een tabel met lichaamslengtes in cm van de 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

a Bereken met de computer de gemiddelde lichaamslengte en de standaarddeviatie.

b Teken een histogram en benader dit met een normaalkromme waarin je beide waarden aangeeft.

Neem nu verder aan dat de lichaamslengte L van vrouwen normaal is verdeeld met de eerder berekende waarden voor het gemiddelde μ en de standaarddeviatie σ.

c 95% van de lichaamslengtes zit tussen $\mu – a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a?

d Welke minimale lengte hebben de 16% grootste lichaamslengtes?

Opgave 20: Aspergekweker

Een kweker van asperges (soort AA) wil weten wat de gemiddelde lengte is van zijn asperges. Hij meet daarvoor de lengte van een flink aantal asperges. Hij zet deze lengten in een tabel en het valt hem op dat de lengte ongeveer normaal verdeeld is met een gemiddelde van 211 mm en een standaardafwijking van 12 mm.
Asperges met een lengte kleiner dan 195 mm noemt de boer ‘kort’ (deze worden wat goedkoper verkocht). Asperges met een lengte tussen 211 mm en 227 mm noemt hij 'perfect'.
De boer ziet dat 9% van zijn asperges ‘kort’ zijn.

Bereken hoeveel procent van zijn asperges ‘perfect’ is.

Testen

Opgave 21

Bij een groep van 1000 mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

a Maak een normaalkromme bij de bloeddrukverdeling van deze groep mannen.

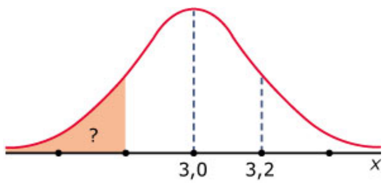
b Hoeveel van de mannen hebben een bloeddruk van minder dan 141?

c Hoeveel mannen hebben een bloeddruk die meer dan twee keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?

d Kun je precies bepalen hoeveel procent van de mannen een bloeddruk heeft van meer dan 150?

Opgave 22

In de figuur zie je een normale verdeling met gegeven gemiddelde μ_X en gegeven $\mu_X + \sigma_X$. Bereken het door een vraagteken aangegeven percentage onder de normaalkromme.



Figuur 1.14

Practicum

In de volgende practica zie je hoe je **kansverdelingen in de grafische rekenmachine invoert** en zo histogrammen kunt maken en gemiddelde en standaardafwijking bepalen.

- **Statistiek en de TI-84**
- **Statistiek en de TInspire**
- **Statistiek en de Casio**
- **Statistiek en de HPprime**
- **Statistiek en de NumWorks**

Je kunt ook **werken met de normale verdeling in Excel**.
Zie het practicum:

- **Statistiek: de normale verdeling**

1.2 Normale kansen

Inleiding

Bij heel veel continue toevalsvariabelen blijkt een mooie symmetrische klokvormige kansdichtheidsfunctie te horen. Dat geldt voor het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, e.d.
De beroemde wiskundige Gauss (1777—1855) vond er een formule voor. Sinds die tijd spreek je van een ‘Gausskromme’ of ook wel ‘normaalkromme’. Je zegt bijvoorbeeld dat het vulgewicht van pakken suiker normaal verdeeld is.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- kansen berekenen bij een gegeven grenswaarde van een normaal verdeelde stochast;
- bij een gegeven kans de grenswaarden berekenen van een normale verdeelde stochast.

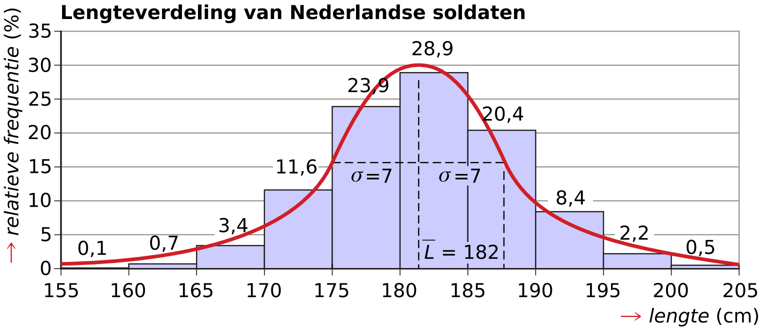
Voorkennis

- werken met continue stochasten;
- de normaalkromme te hanteren;
- de vuistregels voor de normaalkromme gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de lengteverdeling van een groep soldaten op een bepaalde kazerne.



Figuur 2.2

De lengte L is een continue stochast waarbij een verdeling hoort waarvan de grafiek een mooie klokvorm heeft die wordt bepaald door het gemiddelde $\mu(L) = 182$ en de standaardafwijking $\sigma(L) = 7$ cm.

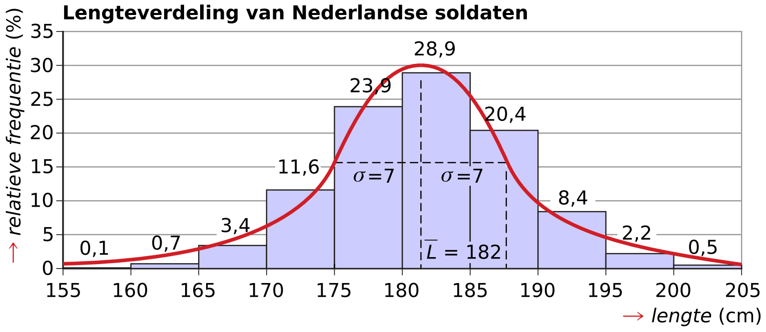
a Wat stelt nu $P(L < 175)$ voor?

b Waarom kun je deze kans uit de figuur gemakkelijk berekenen en $P(L < 171)$ niet zo eenvoudig?

c Wat kun je zeggen van $P(L = 175)$?

Uitleg

Bekijk de figuur met de lengteverdeling van een groep soldaten op een kazerne. Bij de lengte L (cm) hoort een normaalkromme met een gemiddelde van 182 centimeter en een standaardafwijking van 7 centimeter. Anders gezegd: L is een normaal verdeelde kansvariabele.



Figuur 2.3

Bedenk wel dat de gegevens van de soldaten op hele lengtes zijn afgerond. Als je vraagt naar het percentage soldaten met een lengte van 180 centimeter, dan moet je goed afspreken wat je bedoelt: precies 180 centimeter, of afgerond 180 centimeter.

Vanaf nu hanteer je de afspraak dat je bij normale verdelingen geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk is dat dit moet. Dit betekent dat: $\text{P}(162 < L < 178) = \text{P}(162 \leq L < 178) = \text{P}(162 < L \leq 178) = \text{P}(162 \leq L \leq 178)$ als L normaal verdeeld is.

De 'normale kans' dat een soldaat van deze kazerne tussen de grenswaarden 165 en 180 centimeter lang is, gegeven dat $\mu(L) = 182$ en $\sigma(L) = 7$, noteer je als:
$\text{P}(165 \leq L < 180) \mid \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7$

| betekent: 'gegeven dat'.

In de figuur is dit het gebied onder de normaalkromme tussen de linkergrenswaarde $L = 165$ en de rechtergrenswaarde $L = 180$. Je hebt de grafische rekenmachine of Excel nodig om dergelijke kansen te kunnen berekenen: de vuistregels zijn te beperkt.
Bekijk het **Practicum**.

Opgave 1

Bekijk het histogram van de lengteverdeling van de soldaten in de **Uitleg**.

a Hoeveel is $\text{P}(165 \leq L < 180)$ volgens het histogram? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.

b Werk nu het **Practicum** door om te zien hoe je deze kans met de grafische rekenmachine bepaalt.

c Bepaal $\text{P}(165 \leq L < 180 \mid \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$ met de grafische rekenmachine.

Opgave 2

Gebruik de lengteverdeling van de soldaten in de **Uitleg**.

a Bereken de kans dat een soldaat tussen 166 en 177 centimeter lang is.

b Bereken hoeveel procent van de soldaten kleiner dan 166 centimeter is.

c Bereken hoeveel procent van de soldaten langer dan 192 centimeter is.

Opgave 3

Bekijk de lengteverdeling van de soldaten in de **Uitleg**.

a Controleer de vuistregels met behulp van de grafische rekenmachine.

b Hoeveel procent van de soldaten heeft volgens de normaalkromme een lengte die minder dan drie standaardafwijkingen van het gemiddelde afwijkt?
Noteer je antwoord met één decimaal.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Continue kansvariabelen zoals het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, en dergelijke zijn vaak **normaal verdeeld**. Je spreekt dan van een **normale kansvariabele** of **normale statistische variabele**.

De wiskundige Gauss (1777—1855) vond een formule voor de grafiek van de bijpassende normaalkromme of gausskromme. Deze 'Gausskromme' of 'normaalkromme' wordt bepaald door het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ van de verdeling. In de grafische rekenmachine is de formule voor die normaalkromme geprogrammeerd. Daarmee kun je de normaalkromme schetsen en de bijbehorende kansen berekenen, ook als die niet met de vuistregels zijn te bepalen.

De kans die wordt weergegeven door de gekleurde oppervlakte noteer je als:
$\text{P}(165 \leq L < 180 \mid \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$

Hierin betekent het verticale streepje: 'gegeven dat'.

Omdat $\text{P}(L = 165) = 0$ is die kans hetzelfde als $\text{P}(165 < L < 180)$.

Als je wilt berekenen wat de kans is dat iemand afgerond een lengte heeft van 165 centimeter, dan moet je $\text{P}(164{,}5 < X < 165{,}5)$ berekenen.

Hanteer de afspraak dat je bij een normale verdeling geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk in de vraagstelling naar voren komt dat dit moet.

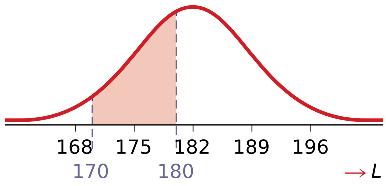
Hoe je dit op de grafische rekenmachine invoert, zie je in het **Practicum**.
Hoe je dit met Excel doet, zie je ook in het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

De lengte L van een groep soldaten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 182$ centimeter en een standaardafwijking van $\sigma = 7$ centimeter.

Bereken $\text{P}(170 < L < 180)$, $\text{P}(L < 180)$, $\text{P}(L = 180)$ en bereken het percentage soldaten dat langer is dan $1{,}75$ meter.

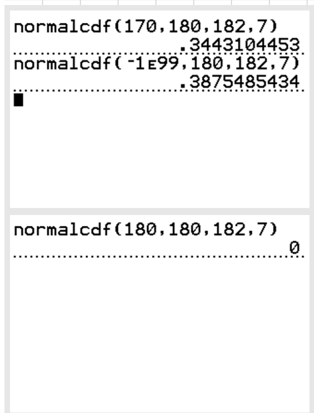


Figuur 2.4

Antwoord

Al deze kansen zijn met de grafische rekenmachine te vinden. Bekijk het **Practicum**.

- $\text{P}(170 < L < 180) \approx 0{,}3443$
- $\text{P}(L < 180) \approx 0{,}3875$
- $\text{P}(L = 180) = 0$
- 'Bereken het percentage soldaten dat langer is dan $1{,}75$ meter' kun je vertalen naar:
  $\text{P}(L > 175 \mid \mu = 182 \text{ en } \sigma = 7) \approx 0{,}8413$. Dat is gelijk aan ongeveer $84{,}13\%$.



Figuur 2.5

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Wat betekent $\text{P}(162 < L < 178)$ in dit verband?

b Hoeveel procent van de soldaten heeft een lengte tussen 171 en 178 centimeter?

c Hoeveel procent van de soldaten heeft een lengte van precies 171 centimeter?

d Hoeveel procent van de soldaten van deze kazerne heeft een lengte vanaf $\mu - 1{,}5 \cdot \sigma$ tot $\mu + 1{,}5 \cdot \sigma$?

Opgave 5

Het gewicht G van een bepaalde appelsoort is normaal verdeeld met een gemiddelde van 150 gram en een standaardafwijking van 17 gram.

a Hoe groot is de kans dat een appel van deze soort minder dan 140 gram weegt?

b Hoeveel procent van deze appels heeft een gewicht dat minder dan 10 gram afwijkt van het gemiddelde?

Een groenteboer heeft nog 340 van deze appels.

c Hoeveel daarvan zijn lichter dan 120 gram?

Een klant koopt een zak met vijf appels van de groenteboer.

d Hoe groot is de kans dat minstens vier appels lichter zijn dan 120 gram?

Opgave 6

Bioloog Peter Adriaanse heeft van 1000 koolwitjes de spanwijdte van de vleugels gemeten. Hij vond dat deze spanwijdte ongeveer normaal is verdeeld met een gemiddelde van 5,2 centimeter en een standaardafwijking van 0,8 centimeter.

a Hoeveel procent van de gemeten koolwitjes had een spanwijdte van meer dan 6 centimeter?

b Hoeveel van de gemeten koolwitjes hadden een spanwijdte tussen de 5 en de 6 centimeter?

c Hoe groot is de kans op een koolwitje met een spanwijdte van minstens 6,5 centimeter?

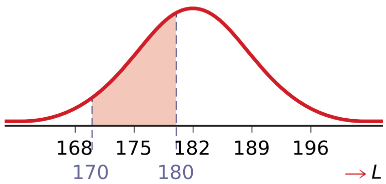
Figuur 2.6

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Normale verdeling

De lengte L van een groep soldaten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu(L) = 182$ cm en een standaardafwijking van $\sigma(L) = 7$ cm.

Welke lengtes hebben de 20% langste soldaten in deze groep?



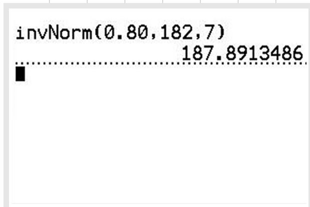
Figuur 2.7

Antwoord

Vertaal deze vraag in: bereken grenswaarde g als $\text{P}(L > g) = 0{,}20$.

De grafische rekenmachine heeft hiervoor een speciale functie. Die stelt je in staat om vanuit een gegeven kans de grenswaarde terug te vinden. Alleen is die functie ingesteld op ‘kleiner-of-gelijk’-kansen.

Omdat $\text{P}(L > g) = 0{,}20$ betekent dat $\text{P}(L < g) = 1 - \text{P}(L > g) = 0{,}80$ kun je die functie hier toch gebruiken.
De uitkomst is: $g = 187{,}9$.
De 20% langste soldaten zijn 187,9 cm of langer.



Figuur 2.8

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Welke lengtes hebben de 20% kleinste soldaten in deze groep?

b 10% van de soldaten zit boven het gemiddelde, maar is toch niet langer dan a centimeter. Bereken a.

Opgave 8

Ga uit van de normaal verdeelde lengtes van de soldaten. De gemiddelde lengte is 182 centimeter en de standaardafwijking is 7. Men besluit voor deze 1200 soldaten T-shirts aan te schaffen in drie maten: S (small), M (medium) en L (large). Deze maten worden zo gemaakt dat elke maat precies voor $\frac{1}{3}$ deel van de soldaten geschikt is.

a Voor welke lengtes is maat S geschikt?

b Voor welke lengtes is maat M geschikt?

Opgave 9

Het aantal branduren U van een bepaald soort lamp is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 950$ uur en een standaardafwijking van $\sigma = 120$ uur.

a Bereken hoeveel uur de 10% langst brandende lampen minimaal branden.

b Bereken hoeveel uur de 25% kortst brandende lampen branden.

Opgave 10

De vulgewichten G van kilopakken meel zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 1004$ gram en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram.

a Hoeveel procent van de pakken is te licht (minder dan 1000 gram)? Rond af op één decimaal.

b Omdat de fabrikant uit kostenoverweging ook niet teveel meel in de pakken wil doen, eist hij dat hoogstens 1% van de pakken een gewicht heeft van meer dan 1011 gram mag hebben.
Is er voldaan aan de eis van de fabrikant?

c Hoeveel wegen de 5% lichtste pakken suiker hoogstens? Rond af op gehele grammen.

Verwerken

Opgave 11

Bereken de volgende kansen. Rond af op vier decimalen.

a $\text{P}(L < 174 \mid \mu(L) = 178 \text{ en } \sigma(L) = 5)$

b $\text{P}(3 < X < 5 \mid \mu(X) = 4{,}3 \text{ en } \sigma(X) = 1{,}2)$

c $\text{P}(Y > 1200 \mid \mu(Y) = 1180 \text{ en } \sigma(Y) = 113)$

Opgave 12

Een vulmachine vult kilopakken rijst. Het ingestelde vulgewicht van de machine komt overeen met het gemiddelde gewicht van de pakken rijst. De gewichten zijn normaal verdeeld. Het gemiddelde gewicht van een pak rijst is 1010 gram en de standaardafwijking is 9 gram.

a Hoeveel procent van de pakken weegt minder dan 1000 gram?

b Hoeveel procent van de pakken weegt meer dan 1000 gram?

c Bereken in vier decimalen de kans dat een pak meer dan 5 gram zwaarder is dan het gemiddelde.

d Hoeveel procent van de pakken is meer dan 20 gram te zwaar?

Opgave 13

De gemiddelde hoeveelheid neerslag per jaar in een tropisch regenwoud is normaal verdeeld met een gemiddelde van 3350 mm en een standaardafwijking van 400 mm.

a Hoeveel keer per eeuw zal er naar verwachting meer regen vallen dan 3600 mm per jaar?

b Men noemt een jaar in het tropisch regenwoud extreem nat als er gemiddeld meer dan 4000 mm regen valt.
Bereken in vier decimalen de kans op zo'n extreem nat jaar.

c Wat kun je zeggen over de gemiddelde hoeveelheid regen van de vier meest natte jaren van de afgelopen 50 jaar?

Opgave 14

Jan van Heteren heeft de beschikking over twee auto's.
Het aantal kilometers dat Jan kan rijden is bij beide auto's normaal verdeeld.
Met auto A kan Jan, met een volle tank, gemiddeld 512 km rijden met een standaardafwijking van 24 km.
Met auto B is dat gemiddeld 506 km met een standaardafwijking van 33 km.
Jan moet voor een reis 540 km rijden. Hij wil maar één keer tanken.
Met welke auto kan Jan het beste gaan?

Opgave 15

Het vulvolume V van een pak melk is normaal verdeeld met een gemiddelde van $1{,}02$ liter en een standaardafwijking van $0{,}015$ liter. De consument verwacht 1 liter melk te kopen.

a Hoeveel procent van de melkpakken bevat minder dan 1 liter melk?

b Hoeveel procent van de melkpakken bevat meer dan $1{,}03$ liter melk?

c Je koopt zo’n melkpak. Bereken in vier decimalen de kans dat er minstens 2 centiliter te weinig melk in je pak zit?

d Hoeveel procent van de melkpakken bevat afgerond op twee decimalen 1 liter?

e 5% van de melkpakken heeft een vulvolume van minder dan g liter.
Bereken g op drie decimalen nauwkeurig.

f Hoeveel liter melk bevat een melkpak dat hoort bij de volste 10% melkpakken minstens? Rond af op twee decimalen.

Opgave 16

Net als bij veel bedrijven in Nederland blijft het salaris van vrouwen ook bij bedrijf ‘Comdie’ achter bij dat van de mannen (met dezelfde functie).
Het salaris van zowel de vrouwelijke als de mannelijke werknemers is normaal verdeeld.
Het gemiddelde salaris van de vrouwen is € 3350,00 met een standaardafwijking van € 450,00.
Dat van de mannen is gemiddeld € 3700,00 met een standaardafwijking van € 400,00.

Bereken hoeveel procent van de vrouwelijke werknemers bij ‘Comdie’ minder verdient dan de 20% minst verdienende mannelijke werknemers.

Toepassen

Opgave 17: Nationale wiskundewedstrijd

Een nationale wiskundewedstrijd wordt voor de derde keer georganiseerd. Het maximaal aantal punten dat je bij deze wedstrijd kunt halen is 36.
Je mag ervan uitgaan dat de scores van de deelnemers bij de eerste twee edities normaal verdeeld waren.
Het eerste jaar was het gemiddelde $21{,}9$ punten met een standaardafwijking van $5{,}4$ punten.
Het tweede jaar was het gemiddelde $19{,}2$ punten en de standaardafwijking $5{,}9$ punten.

a Hoeveel procent van de deelnemers had het eerste jaar meer dan 20 punten?

b Jasmijn is erg goed in wiskunde. Beide jaren heeft ze met de wedstrijd meegedaan. Ze had het eerste jaar 29 punten en het tweede jaar 28. Alhoewel haar tweede score iets lager is dan de eerste vindt zij toch dat ze de wedstrijd het tweede jaar beter heeft gedaan. Ben je het met haar eens?

c Er wordt nu alleen gekeken naar de groep deelnemers die beide jaren van de partij waren.
Bereken in drie decimalen de kans dat een willekeurige deelnemer uit deze groep in beide jaren een score had van minstens 22 punten.

Opgave 18: Kasteeltuin

Een tuinarchitect plant in het voorjaar 500 nieuwe plantjes in een kasteeltuin.
Hij weet dat de levensduur van deze plantjes normaal verdeeld is met een gemiddelde van 85 dagen en een standaardafwijking van 22 dagen.
Na 55 dagen gaat hij alle planten controleren en vervangt degenen die dood zijn gegaan door nieuwe plantjes van dezelfde soort.
Na 120 dagen (vanaf het begin gerekend) doet hij dat weer.
Hoeveel planten zal hij naar verwachting de tweede keer moeten vervangen?

Testen

Opgave 19

Een zakje Cup-a-Soup moet 17 g bevatten. Het gewicht van zakjes is normaal verdeeld. De vulmachine is zo ingesteld dat het vulgewicht 19 g bedraagt met een standaardafwijking van $1{,}5$ g. Het vulgewicht komt overeen met het gemiddelde gewicht.

a Hoe groot is de kans dat een zakje minder dan 17 g weegt?

b Hoe groot is de kans dat een zakje Cup-a-Soup meer dan 17 g weegt?

c Hoeveel weegt 90% van deze zakjes op zijn hoogst?

d Hoeveel weegt 90% van deze zakjes op zijn minst?

Figuur 2.9

Opgave 20

Bij een groep van 1000 mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van $128{,}5$ mm Hg met een standaardafwijking van $12{,}5$ mm Hg.

a Hoeveel mannen hebben een bloeddruk die meer dan drie keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?

b Hoeveel procent van de mannen heeft een bloeddruk van meer dan 150?

c Hoeveel bedraagt de bloeddruk van de 10% mannen met de hoogste bloeddruk?

Practicum

Met de volgende practica kun je zien hoe je normale kansen berekent met de **grafische rekenmachine**. Doe alleen de onderdelen die betrekking hebben op de normale verdeling.

- **Kansverdelingen met de TI84**
- **Kansverdelingen met de TInspire**
- **Kansverdelingen met de Casio**
- **Kansverdelingen met de HP-prime**
- **Kansverdelingen met de NumWorks**

Maar je kunt ook heel goed normale kansen berekenen met behulp van **Excel**. Bekijk daartoe het practicum:

- **Normale verdeling**

1.3 Standaardiseren

Inleiding

In het voorgaande heb je met de normaalkromme en normale stochasten leren werken. Een normale kansverdeling wordt gekarakteriseerd door gemiddelde μ en standaardafwijking σ. Maar er zijn situaties denkbaar waarin je één van beide niet weet. Bijvoorbeeld als je bij het vullen van bijvoorbeeld een pak suiker het vulgewicht nauwkeuriger wilt afstellen.
En soms wil je twee normale verdelingen met verschillende waarden voor μ en/of σ vergelijken.
In deze gevallen ga je standaardiseren...

Je leert in dit onderwerp

- standaard normale verdeling (standaard klokvorm) en standaardiseren;
- verwachtingswaarde of standaarddeviatie berekenen bij een normale stochast;
- toepassen van de wortel-n-wet bij een steekproef uit een normale verdeling.

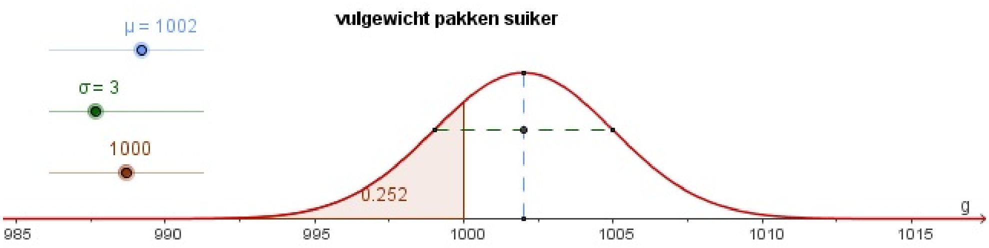
Voorkennis

- werken met normale stochasten;
- kansen berekenen bij normale stochasten;
- grenswaarden terugzoeken bij normale kansen;
- de wortel-n-wet gebruiken bij het berekenen van verwachtingswaarde of standaarddeviatie.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet



Figuur 3.1

Je ziet hier hoe het vulgewicht van kilopakken suiker is ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Maar nu bevat ongeveer 25% van de pakken minder dan 1000 gram.

a Je wilt dat niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat. Hoe doe je dat?

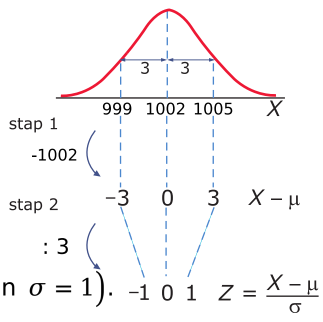
b Stel dat je drie kilopakken suiker koopt. Hoe groot is de kans dat je bij de gegeven instelling minder dan 3000 gram suiker hebt?

Uitleg

Bekijk de applet

Het vulgewicht X van een kilopak suiker is normaal verdeeld. De fabrikant heeft het gewicht van zijn vulmachine ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Het blijkt dat ongeveer 25% van de pakken minder dan 1000 gram suiker bevat. De fabrikant vindt dat teveel.
Het is de bedoeling dat hoogstens 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat.
In de applet krijg je dit voor elkaar door bijvoorbeeld het gemiddelde vulgewicht μ te verhogen. Om μ te kunnen berekenen, ga je standaardiseren.

De standaard normaalkromme heeft gemiddelde $\mu = 0$ en standaardafwijking $\sigma = 1$, de bijbehorende stochast is Z. De normaalkromme bij stochast X kan hieruit ontstaan door alle waarden van Z met σ te vermenigvuldigen en er μ bij op te tellen: $X = \sigma \cdot Z + \mu$.
Omgekeerd kun je elke normaal verdeelde stochast X omrekenen naar de standaardnormale stochast: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.



Figuur 3.2

De kans P $(X < x|\mu = m \text{ en } \sigma = s)$ is hetzelfde als P $\left(Z < \frac{x-m}{s}|\mu = 0 \text{ en } \sigma = 1\right)$.

De fabrikant wil μ zo aanpassen, dat de kans op een pak suiker dat minder dan 1000 gram weegt hoogstens 0,05 is. Dus:

P $(X < 1000|\mu = m \text{ en } \sigma = 3) =$

P $\left(Z < \frac{1000-m}{3}|\mu = 0 \text{ en } \sigma = 1\right) \leq 0{,}05$

Bij een kans van 0,05 vind je een z-waarde: $z = \frac{1000-m}{3} = -1{,}645$.

En dan krijg je $m \approx 1004{,}9$.

Als het gemiddelde gewicht 1005 gram is, dan heeft hoogstens 5% van de pakken een gewicht minder van 1000 gram. Hoe groter het gemiddelde wordt, hoe kleiner dit percentage wordt.

Bij vraagstukken waar je in het geval van een normale verdeling het gemiddelde of de standaardafwijking moet berekenen, zul je deze eerst om moeten schrijven naar de standaard normale verdeling door te standaardiseren.

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg**. Werk met de daarin genoemde applet om de volgende vragen te beantwoorden.

a Pas eerst alleen het gemiddelde aan. Bij welk gemiddelde is niet meer dan 5% van de pakken lichter dan 1000 gram?

b Waarom is dit voor de fabrikant een dure oplossing?

c Laat nu het gemiddelde staan op $\mu = 1002$ gram en pas de standaardafwijking aan. Bij welke standaardafwijking is niet meer dan 5% van de pakken te licht?

d Welke mogelijke voor- en nadelen heeft deze oplossing voor de fabrikant?

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg**.

a Reken na dat inderdaad ongeveer 25% van de pakken minder weegt dan 1000 gram.

b Laat zien dat het antwoord bij a ook kan worden gevonden met de standaardnormale stochast Z.

Er mogen maar maximaal 5% van de pakken suiker een gewicht hebben van minder dan 1000 gram.

c Laat zien dat dit het geval is bij een gemiddeld gewicht groter dan $1004{,}93$.

De fabrikant wil het gemiddeld gewicht van 1002 gram behouden, maar de standaardafwijking aanpassen.

d Reken na dat dan $\sigma < 1{,}216$.

Opgave 3

Van een bepaald type batterij is de levensduur normaal verdeeld met een gemiddelde van 80 uur en een standaardafwijking van 255 minuten.

a De fabrikant vermeldt op de verpakking dat deze batterijen 75 uur mee gaan. Hoeveel procent van de batterijen haalt deze levensduur niet?

b Door het verbeteren van het fabricageproces gaan de batterijen gemiddeld langer mee. De standaardafwijking van de levensduur blijft hetzelfde. De fabrikant garandeert nu dat slechts 1% van de batterijen minder dan 90 uur mee gaat. Hoeveel bedraagt nu de gemiddelde levensduur van dit soort batterijen? Rond af op hele uren.

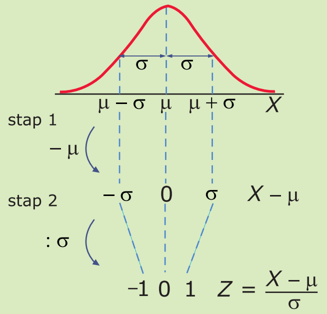
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De vorm van de normaalkromme X hangt af van het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ. Neem je nu $\mu = 0$ en $\sigma = 1$, dan krijg je de **standaard normaalkromme** of **standaard klokvorm**. Dit is een speciale normaalkromme, die hoort bij de standaard normaal verdeelde stochast Z.
Van elke normaal verdeelde stochast X kun je zo'n standaard normaal verdeelde stochast Z maken door van de x-waarden die de stochast X kan aannemen eerst het gemiddelde μ af te trekken en daarna te delen door de standaardafwijking σ.

Je krijgt dan de z-waarden: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Je noemt dit het **standaardiseren** van de normaal verdeelde stochast X. Kansen als $P(X \leq x)$ met een bepaald gemiddelde μ en



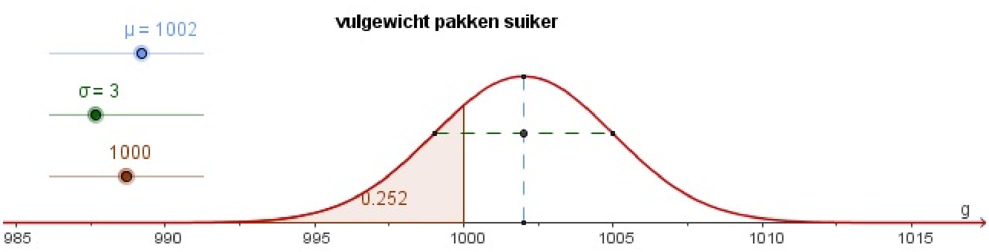
Figuur 3.3

standaardafwijking σ worden dan herschreven tot P$\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ met het nieuwe gemiddelde $\mu = 0$ en standaardafwijking $\sigma = 1$.
De hoofdletter Z wordt altijd gebruikt voor de standaard normaal verdeelde stochast.

Het standaardiseren wordt vooral gebruikt in situaties waarbij je het gemiddelde of de standaardafwijking van een normaal verdeelde stochast moet berekenen (bij gegeven kans en grenswaarde). Maar je kunt het ook gebruiken om normale verdelingen te vergelijken.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet



Figuur 3.4

Het vulgewicht G van kilopakken suiker is ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Dan bevat ongeveer 25% van de pakken minder dan 1000 gram. Je wilt dat niet meer dan 10% van de pakken minder dan 1000 gram bevat. Hoe moet je daartoe de standaardafwijking σ aanpassen?

Antwoord

Je moet oplossen: P$(X < 1000 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = s) < 0{,}1$.

Standaardiseren: P$\left(Z < \frac{1000-1002}{s} | \mu = 0 \text{ en } \sigma = 1\right) < 0{,}1$.

Dit geeft $\frac{1000-1002}{s} \approx -1{,}2816$.
Hieruit volgt dat de standaardafwijking $s = \sigma \approx 1{,}56$ gram moet worden.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de standaardnormale verdeling toepast bij het berekenen van een standaardafwijking.

a Reken zelf de berekening van de nieuwe standaardafwijking na.

b Stel je voor dat de eisen worden aangescherpt: niet meer dat $2{,}5\%$ van de pakken suiker mag minder dan 1000 gram wegen. Welke standaardafwijking moet je dan hanteren?

Opgave 5

Aan een examen nemen 3000 kandidaten deel. De resultaten zijn normaal verdeeld. Het gemiddelde cijfer is $5{,}0$. Slechts 10% van de kandidaten haalde een $7{,}0$ of hoger.
Welke standaardafwijking heeft de verdeling van deze cijfers? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

In een fabriek worden schroeven gemaakt met verschillende afmetingen. Voor een klant moet er een partij schroeven gemaakt worden waarvan de kop een diameter heeft tussen de $9{,}98$ mm en $10{,}03$ mm. Schroeven met een te dikke of te dunne kop worden afgekeurd. De diameter D van de schroeven is normaal verdeeld met een gemiddelde van $9{,}99$ mm. De standaardafwijking van de machine bedraagt $0{,}02$ mm.

a Hoeveel procent van de schroeven zal goedgekeurd worden?

b Hoeveel procent van de schroeven zal worden goedgekeurd als de fabrikant er in slaagt de standaardafwijking van de machine terug te brengen naar $0{,}01$ mm?

De fabrikant wil dat minstens 99% van de schroeven goedgekeurd wordt. Hij denkt dat te kunnen bereiken door een andere instelwaarde van de machine te kiezen. Ook kan de machine fijner worden afgesteld, waardoor de standaardafwijking verandert.

c Op welke waarden moet hij de machine laten instellen?

Voorbeeld 2

Het vulgewicht X van kilopakken suiker is ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Je koopt 5 van die kilopakken suiker.
Bereken in vier decimalen de kans dat het totale gewicht minder dan 5000 gram is.
Bereken ook in vier decimalen de kans dat het gemiddelde gewicht van de 5 pakken suiker meer dan 1003 gram is.

Antwoord

Je voert nu 5 keer hetzelfde kansexperiment uit, namelijk het kiezen van een pak suiker uit een heel groot aantal van die pakken. Hier geldt dus de $\sqrt{n}$-wet.

Het totale gewicht T is daarom ook normaal verdeeld met $\mu(T) = 5 \cdot \mu(X) = 5010$ en $\sigma(T) = \sqrt{5} \cdot \sigma(X) = 3 \cdot \sqrt{5}$ gram.

De gevraagde kans is:

$\text{P}\left(T < 5000 | \mu = 5010 \text{ en } \sigma = 3 \cdot \sqrt{5}\right) \approx 0{,}0678$.

Het gemiddelde gewicht G is ook normaal verdeeld met $\mu(G) = \mu(X) = 1002$ en $\sigma(G) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$ gram.

De gevraagde kans is: $\text{P}\left(G > 1003 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \approx 0{,}2280$.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Reken zelf de twee kansen, die genoemd worden, na.

b Bereken in vier decimalen de kans dat het totale gewicht van tien pakken suiker meer is dan 10010 gram maar minder dan 10020 gram.

c Bereken de kans dat het gemiddelde gewicht van zeven pakken suiker minder is dan 1 kg.

Opgave 8

De lengte L van pvc-buizen is normaal verdeeld met een gemiddelde lengte van 3 meter en een standaardafwijking van 5 cm.

a Bereken in vier decimalen de kans dat een pvc-buis langer is dan $3{,}08$ meter.

b Elektricien Wim moet een afstand van precies $30{,}2$ meter overbruggen met pvc-buizen. Bereken in vier decimalen de kans dat hij aan 10 pvc-buizen genoeg heeft.

Voorbeeld 3

Bekijk de lengte in een groep zeventienjarige jongens en in een groep zeventienjarige meisjes. Bij de jongens is de gemiddelde lengte 180 centimeter en de standaardafwijking 7 centimeter. Bij de meisjes is de gemiddelde lengte 170 centimeter en de standaardafwijking 6 centimeter.
Een jongen en een meisje uit deze groepen krijgen verkering. Ze zijn beiden erg lang: de jongen 197 centimeter en het meisje 187 centimeter.
Wie is de grootste uitschieter in zijn of haar groep?

Antwoord

De jongen heeft een z-waarde van $\frac{197-180}{7} \approx 2{,}43$.

Het meisje heeft een z-waarde van $\frac{187-170}{6} \approx 2{,}83$.

Het meisje is de grootste uitschieter in haar groep: ze wijkt bijna drie standaardafwijkingen af van de gemiddelde meisjeslengte.

Opgave 9

Aan een examen hebben 200 kandidaten meegedaan. Het examen bestaat uit twee gedeelten: een schoolexamen (SE) en een centraal examen (CE). Uit onderzoek is gebleken dat de examencijfers normaal verdeeld zijn. Het gemiddelde cijfer voor het schoolexamen was een $6{,}5$ en de standaardafwijking was $1{,}0$. Het gemiddelde cijfer voor het centraal examen was een $5{,}5$ en de standaardafwijking was $2{,}0$. Een leerling heeft een $7{,}0$ gehaald voor het schoolexamen en een $6{,}0$ voor het centraal examen.

a Noem het cijfer voor het schoolexamen S en dat voor het centraal examen C. Schets de normaalkrommen van de verdeling van zowel S als C. Geef de cijfers van de leerling in die figuren aan.

b Kun je de prestaties van de leerling voor het SE en het CE nu goed met elkaar vergelijken? Licht je antwoord toe.

Om te beoordelen of deze leerling naar verhouding op het SE beter of minder heeft gepresteerd dan op de CE moet je beide verdelingen standaardiseren.

c Bereken zowel voor het resultaat op het SE als dat op het CE de bijbehorende z-waarde. Welk resultaat was naar verhouding beter?

Opgave 10

In IQ-testen en bij examens worden vaak z-waarden gebruikt. Uit een onderzoek blijkt dat de score van leerlingen bij het centraal schriftelijk eindexamen wiskunde A1 vwo in 2000 bij benadering normaal verdeeld was. Het gemiddelde was 62 punten en 28% van de leerlingen had een onvoldoende (54 punten of minder).

a Welke z-waarde hoort bij 28%?

b Bereken de standaardafwijking.

c Welke z-waarden hebben de 20% beste leerlingen?

d In 2001 was de z-waarde die hoort bij het percentage onvoldoendes op het centraal schriftelijk eindexamen wiskunde A1 vwo gelijk aan $-0{,}601$.

Welke uitspraak kun je doen over het verschil tussen beide centraal schriftelijke eindexamens wat betreft de scores voor wiskunde A1 vwo?

Verwerken

Opgave 11

Op het doosje met Tea-for-one-builtjes staat dat er 3 gram thee in zo'n builtje zit. Het gewicht T van deze theebuiltjes blijkt normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde gewicht van $3{,}3$ gram en een standaardafwijking van $0{,}24$ gram. In een voordeelverpakking zitten 50 builtjes.

a Hoeveel van de builtjes in de voordeelverpakking zullen naar verwachting te weinig thee bevatten?

b De fabrikant vindt dat maar hoogstens twee builtjes een te laag gewicht mogen hebben. Op welk gemiddelde gewicht moet hij de vulmachine dan afstellen (bij gelijkblijvende standaardafwijking)? Geef je antwoord in grammen op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Het gewicht S van kilopakken suiker is normaal verdeeld.
De fabrikant wil dat hoogstens 5% van al zijn kilopakken suiker te weinig suiker bevat.

a Welk gemiddelde vulgewicht moet hij nu instellen bij een gegeven standaardafwijking van 4 gram (de nauwkeurigheid van de vulmachine)?

b De Europese Unie stelt een scherpere eis: slechts 2% van de pakken mag te licht zijn. Welk gemiddelde vulgewicht moet de fabrikant nu instellen bij een standaardafwijking van 4 gram?

De fabrikant wordt niet blij van het verhogen van het gemiddelde vulgewicht, want dat kost hem nogal wat extra geld. Hij moet dan immers gemiddeld meer suiker in een pak stoppen. Daarom besluit hij om niet het gemiddelde vulgewicht aan te passen, maar de vulmachine nauwkeuriger af te stellen. Het gemiddelde vulgewicht is 1003 gram en hij gaat uit van de eis van de EU dat hoogstens 2% van de pakken te licht mag zijn.

c Op welke standaardafwijking moet zijn vulmachine worden afgesteld?

Opgave 13

Bij de serieproductie van een bepaald type auto wordt het plaatsen van het stuur door mensen gedaan. Deze handeling kost gemiddeld 55 seconden. De handelingstijd T blijkt ongeveer normaal te zijn verdeeld met een standaardafwijking van 4 seconden.

a Er worden in een bepaalde maand 1200 van deze auto's geproduceerd. Schat het aantal auto's waarbij het langer dan 60 seconden geduurd heeft om het stuur te plaatsen.

b Wat is de langzaamste tijd van de 5% snelste handelingstijden?

c De fabrikant van deze auto's onderzoekt of een machine de mens kan vervangen. De gemiddelde afhandelingstijd is ook dan 55 seconden, maar de standaardafwijking wordt veel kleiner. Nu duurt maar 1% van alle afhandelingstijden meer dan 60 seconden.
Welke standaardafwijking geldt voor deze machine?

Opgave 14

In een château in de wijnstreek Bordeaux worden veel wijnflessen van 75 cl gevuld. Dit gebeurt natuurlijk machinaal. De inhoud I van een wijnfles is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van ongeveer 79 cl en een standaardafwijking van 3 cl.

a Wijnliefhebber Eric koopt twaalf flessen wijn van dit château. Hoeveel flessen zullen naar verwachting een inhoud hebben van meer dan 75 cl, maar minder dan 80 cl?

b Bereken in vier decimalen de kans dat de gemiddelde inhoud van de twaalf flessen die Eric gekocht heeft, minder is dan 78 cl.

c De eigenaar van het château vindt dat er te veel flessen zijn die te weinig wijn bevatten (minder dan 75 cl). Hij wil dat hoogstens 4% van alle flessen te weinig wijn bevat. Daartoe past hij de standaardafwijking (de nauwkeurigheid van de machine) aan. Wat wordt de nieuwe standaardafwijking? Geef je antwoord in cl op twee decimalen.

Opgave 15

Een bakker bakt kerststollen. Het gewicht K van deze kerststollen is bij benadering normaal verdeeld.

a Stel het gemiddelde van een kerststol is 1000 gram. Bereken de standaardafwijking als 5% van de stollen minder weegt dan 900 gram.

b Stel het gemiddelde van een kerststol is nog steeds 1000 gram. Hoeveel procent van de stollen weegt dan minder dan 900 gram als de standaardafwijking 60 gram is?

c Bereken het gemiddelde gewicht van de stollen als 5% van de stollen minder weegt dan 900 gram bij een standaardafwijking van 65 gram.

Je koopt bij deze bakker drie kerststollen. Ga er van uit dat het gemiddelde gewicht 1000 gram is met een standaardafwijking van 50 gram.

d Bereken in vier decimalen de kans dat deze drie kerststollen samen minder dan 2950 gram wegen.

e Bereken in vier decimalen de kans dat het gemiddelde gewicht van deze drie kerststollen kleiner is dan 950 gram.

Opgave 16

Limburgse kaas wordt verkocht in pakjes van 200 gram. De snijmachine van de kaasboer is zo afgesteld dat het gewicht K van de pakjes kaas normaal verdeeld is met een gemiddelde van $202{,}5$ gram en een standaardafwijking van 4 gram.

a Bereken in vier decimalen de kans dat een pakje kaas minder dan 200 gram weegt.

b In een doos gaan 50 pakjes kaas. Bereken de kans dat een doos minder dan 10 kg kaas bevat. Rond af op acht decimalen.

c Een winkelier bestelt bij de kaasboer een groot aantal pakjes kaas. Hij wil dat de kans dat het gemiddelde gewicht van deze pakjes kaas minder is dan 202 gram, hoogstens 10% is.
Hoeveel pakjes kaas moet de winkelier minimaal bestellen?

Toepassen

Opgave 17: Veredeling van zaden

Bij een veredelingsbedrijf van zaden wordt de lengte van een bepaalde plant gemeten. Men vindt dat de lengtes L van deze planten normaal verdeeld zijn. $12{,}5\%$ van de planten heeft een lengte van meer dan 60 cm en 39% van de planten is niet groter dan 30 cm.

a Bereken de gemiddelde lengte en de standaardafwijking in mm nauwkeurig van deze plantensoort.

Te kleine planten zijn niet geschikt voor de zaadontwikkeling. Deze planten worden vernietigd. Het blijkt dat 30% van de planten vernietigd moet worden. Ga uit van een gemiddelde van 36 cm en een standaardafwijking van 22 cm.

b Tot welke lengte worden de planten vernietigd? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Testen

Opgave 18

Van een partij suiker, verpakt in pakken van 1000 g, blijkt 15% minder te wegen dan 1000 g. Het vulgewicht is gelijk aan het gemiddeld gewicht. Als de standaardafwijking van de machine 7 g bedraagt, waar staat het vulgewicht dan op ingesteld?

Opgave 19

Een machine die flessen vult, is ingesteld op een gemiddeld vulgewicht van 1015 g. De standaardafwijking is onbekend. Uit onderzoek is gebleken dat $1{,}5$% van de flessen een gewicht heeft dat kleiner is dan 1000 g. Bepaal de standaardafwijking.

Opgave 20

Bloemzaadjes worden verkocht in zakjes van 30 g. Het gewicht van een zakje uit een grote partij is normaal verdeeld met een gemiddelde van 31 g en een standaardafwijking van $0{,}6$ g. Uit de partij wordt willekeurig een zakje genomen.

a Hoe groot is de kans dat het zakje meer dan 32 g weegt?

b Hoe groot is de kans dat het gewicht van het zakje meer dan 4% afwijkt van het gemiddelde?

c Hoeveel procent van de zakjes weegt te weinig?

d De fabrikant vindt het percentage bij c te groot en besluit het gemiddelde vulgewicht wat te verhogen tot maar 1% van de zakjes te licht is. Welk vulgewicht moet hij dan instellen?

Uit de oorspronkelijke partij wordt een steekproef van 25 zakjes getrokken.

e Hoe groot is de kans dat de totale hoeveelheid bloemzaadjes meer dan 780 g weegt?

f Hoe groot is de kans dat het gemiddelde gewicht van een zakje uit de steekproef meer dan 4% afwijkt van het populatiegemiddelde?

1.4 Normaal of niet

Inleiding

Als je de gewichten van zo'n 1000 aselect gekozen vrouwen uit de leeftijdsgroep van $20- < 30$ jaar meet, krijg je ongeveer een klokvormige frequentieverdeling. Maar mag je nu zeggen dat er sprake is van een normale verdeling?
Er bestaat normaal waarschijnlijkheidspapier. Op dat papier wordt een cumulatief relatief frequentiepolygoon een rechte lijn als er van een normale verdeling sprake is. Met behulp van de vuistregels kun je vanaf dat papier dan het gemiddelde en de standaardafwijking aflezen.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- een cumulatief relatief frequentiepolygoon tekenen op normaal waarschijnlijkheidspapier;
- verwachtingswaarde of standaarddeviatie van een normale stochast aflezen;
- gemiddelde en standaardafwijking van som/verschil van normaal verdeelde stochasten bepalen.

Voorkennis

- werken met normale stochasten en kansen berekenen bij normale stochasten;
- grenswaarden terugzoeken bij normale kansen;
- verwachtingswaarde en standaarddeviatie berekenen van de som van onafhankelijke stochasten.

Verkennen

Opgave V1

Bij een landelijk onderzoek zijn de gewichten bepaald van 1000 aselect gekozen volwassen vrouwen van $20- < 30$ jaar, zie tabel. De frequentieverdeling lijkt op die van een normale verdeling. Kun je nu zonder meer een normale verdeling als rekenmodel gebruiken voor deze groep vrouwen?

a Ga na of deze frequentieverdeling voldoet aan de vuistregels voor een normale verdeling.

b Is het voldoen aan de vuistregels voldoende reden om te concluderen dat een normale verdeling een bruikbaar rekenmodel is?

gewicht	frequentie
35-<40	10
40-<45	15
45-<50	25
50-<55	75
55-<60	75
60-<65	125
65-<70	150
70-<75	175
75-<80	150
80-<85	100
85-<90	50
90-<95	25
95-<100	15
100-<105	10

Figuur 4.2

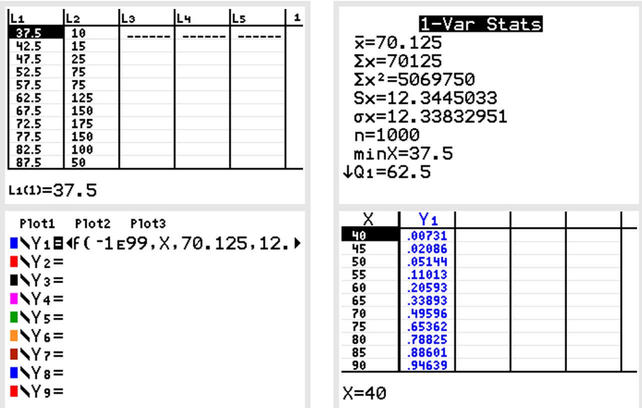
Uitleg 1

Bij een landelijk onderzoek zijn de gewichten bepaald van duizend aselect gekozen volwassen vrouwen van twintig tot dertig jaar. De gegevens zijn weergegeven in de tabel.

gewicht	frequentie
35-<40	10
40-<45	15
45-<50	25
50-<55	75
55-<60	75
60-<65	125
65-<70	150
70-<75	175
75-<80	150
80-<85	100
85-<90	50
90-<95	25
95-<100	15
100-<105	10

Figuur 4.3

Zijn de gewichten van de groep vrouwen normaal verdeeld?
Als je van de gegeven frequentieverdeling een cumulatieve relatieve frequentieverdeling maakt en je vergelijkt die met de normale verdeling, dan zou je ongeveer hetzelfde moeten krijgen.

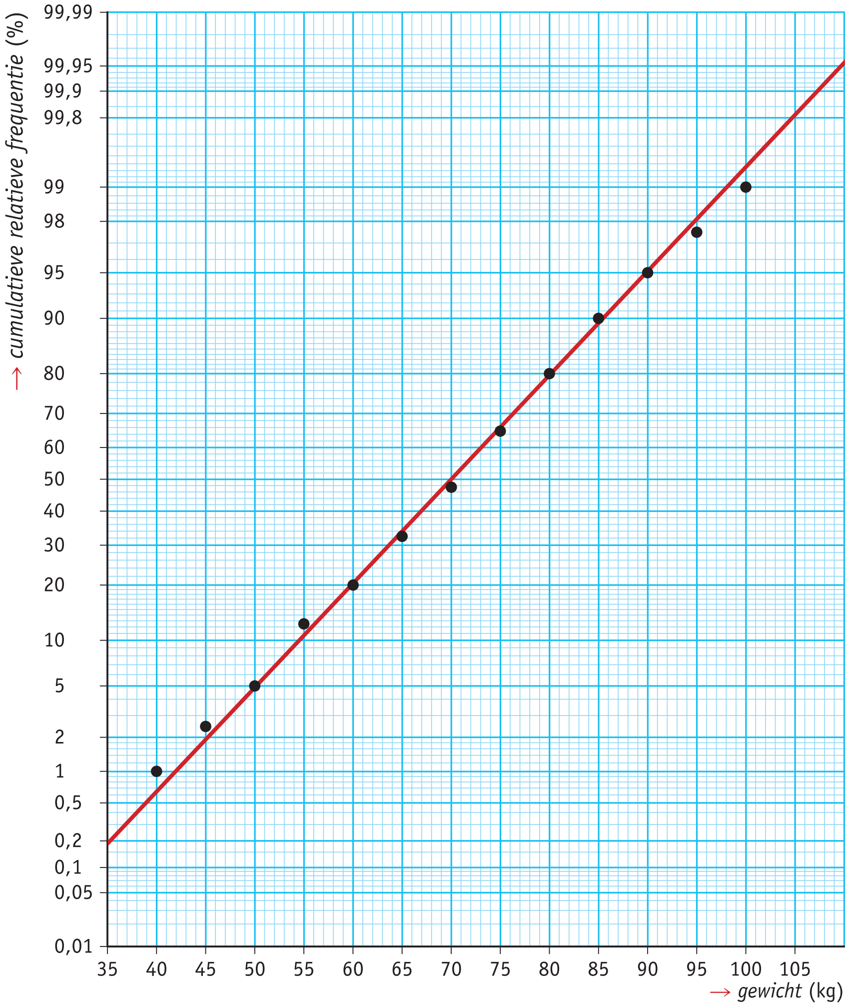


Figuur 4.4

Maar er bestaat speciaal normaal-waarschijnlijkheidspapier. Daarop worden alle cumulatieve normale verdelingen rechte lijnen. Zet daarom op het normaal-waarschijnlijkheidspapier de cumulatieve relatieve frequenties van de gewichten uit tegen de bovengrenzen (rechterklassengrenzen). Het laatste punt $(105,100)$ kan niet getekend worden omdat 100% niet op het papier staat.

Gebruik hiervoor het bestand met **normaal-waarschijnlijkheidspapier**.

Bekijk het resultaat.



Figuur 4.5

Je zult zien dat de punten ongeveer op een rechte lijn liggen.

Opgave 1

Bestudeer **Uitleg 1**. Neem (of print) een aantal bladen normaal waarschijnlijkheidspapier.
Ga uit van een normale verdeling met $\mu = 70{,}13$ en $\sigma = 12{,}34$.

a Bereken voor $g = 40, 45, 50, \dots, 105$ de kans
P $(G \leq g | \mu = 70{,}13 \text{ en } \sigma = 12{,}34)$.
Schrijf de kansen in procenten.

b Zet op normaal waarschijnlijkheidspapier de kansen uit a uit tegen g.

c Liggen de punten die je bij het vorige onderdeel hebt gevonden op een rechte lijn?
Zo ja, teken deze lijn.

d Waar in je figuur vind je μ terug? Kun je ook σ terugvinden?

Opgave 2

Neem nu de tabel met de werkelijke gewichten van de 1000 vrouwen.

a Maak hierbij een tabel met cumulatieve relatieve frequenties.

b Schrijf bij de horizontale as op het normaal waarschijnlijkheidspapier de klassengrenzen $35{,}40{,}45{,}...{,}105$.
Zet vervolgens van elke klasse de cumulatieve relatieve frequentie uit tegen de rechter klassengrens van die klasse.
Waarom moet je de rechter klassengrenzen van de klassen gebruiken?

c Teken nu een rechte lijn door de punten.
Verschilt je grafiek veel van de grafiek van de normale verdeling (uit vorige opgave)?

d Kun je nu concluderen dat de gewichten van deze 1000 vrouwen normaal zijn verdeeld?

Uitleg 2

Een fles olijfolie zit verpakt in een geschenkdoosje. Het gewicht D van het doosje is normaal verdeeld met een gemiddelde van 120 gram en een standaardafwijking van 5 gram. Het gewicht F van de fles olijfolie is ook normaal verdeeld met een gemiddelde van 850 gram en een standaardafwijking van 25 gram.
De kans dat het doosje met een fles olijfolie erin meer weegt dan 1000 gram, kun je berekenen door een nieuwe stochast te maken: $T = D + F$.

Deze stochast T is ook weer normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu(T) = \mu(D)+\mu(F) = 120+850 = 970$ gram en een standaardafwijking van

$\sigma(T) = \sqrt{(\sigma(D))^2 + (\sigma(F))^2} = \sqrt{5^2 + 25^2} = \sqrt{650} \approx 25{,}5$ gram.

De gevraagde kans is: $\text{P}\left(T > 1000 | \mu = 970 \text{ en } \sigma = \sqrt{650}\right) \approx 0{,}1197$.

Je kunt ook de kans berekenen dat het verschil in gewicht van twee flessen olijfolie (F_1 en F_2) meer is dan 30 gram. Ook hiervoor maak je een nieuwe stochast: $V = F_1 - F_2$.

Deze stochast V is ook weer normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu(V) = \mu(F_1) - \mu(F_2) = 850 - 850 = 0$ gram en een standaardafwijking van

$\sigma(V) = \sqrt{(\sigma(F_1))^2 + (\sigma(F_2))^2} = \sqrt{25^2 + 25^2} = \sqrt{1250} \approx 35{,}4$ gram.

De gevraagde kans is: $\text{P}\left(V > 30 | \mu = 0 \text{ en } \sigma = \sqrt{1250}\right) \approx 0{,}1981$.

Opgave 3

Bestudeer **Uitleg 2**.

a Reken zelf de volgende twee kansen nog eens na:

$\text{P}\left(T > 1000 | \mu = 970 \text{ en } \sigma = \sqrt{650}\right)$ en

$\text{P}\left(V > 30 | \mu = 0 \text{ en } \sigma = \sqrt{1250}\right)$.

b Bereken in vier decimalen de kans dat een doosje met een fles olijfolie erin, minder weegt dan 950 gram.

Opgave 4

Bekijk nogmaals de doosjes met olijfolie in **Uitleg 2**.

a Bereken het gewicht in grammen van de 10% zwaarste doosjes met een fles olijfolie erin.

b Hoe groot zal het gemiddelde gewicht en de standaardafwijking van twee flessen olijfolie samen zijn (zonder doosje)?

c Bereken in vier decimalen de kans dat twee flessen olijfolie (zonder doosje) samen minder dan 1650 gram wegen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Zet je bij een normaal verdeelde stochast X met gemiddelde $\mu(X)$ en standaardafwijking $\sigma(X)$ op **normaal-waarschijnlijkheidspapier** kansen van de vorm $P(X \leq g)$ uit tegen de bovengrens g, dan krijg je een rechte lijn. Elke zuivere normale verdeling wordt, getekend op normaal-waarschijnlijkheidspapier, een rechte lijn.

Maak je van een gegeven frequentieverdeling een cumulatieve relatieve frequentieverdeling en zet je die uit op normaal-waarschijnlijkheidspapier, dan zou je een rechte lijn moeten krijgen als de frequenties normaal zijn verdeeld. De cumulatieve relatieve frequenties moeten daarbij tegen de **bovengrenzen** van de klassen worden uitgezet. Hier vind je een blad **normaal-waarschijnlijkheidspapier**.

Vaak liggen op het normaal-waarschijnlijkheidspapier de punten van de cumulatieve relatieve frequentieverdeling niet precies op een rechte lijn. Trek dan een rechte lijn die zo goed mogelijk bij de getekende punten past. Je benadert op die manier de frequentieverdeling door de normale kansverdeling die bij die lijn hoort.

Schat de verwachtingswaarde door af te lezen welk getal er bij 50% hoort.
Omdat één van de twee vuistregels zegt dat bij een normale verdeling 68% in het interval $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ligt, is bij 84% de waarde van $\mu + \sigma$ af te lezen. Bepaal zo σ.

Als X en Y twee onafhankelijke normaal verdeelde stochasten zijn, dan is de stochast $X + Y$ ook normaal verdeeld en

$\mu(X+Y) = \mu(X) + \mu(Y)$ en $\sigma(X+Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$.

Ook de stochast $X - Y$ is dan normaal verdeeld en

$\mu(X-Y) = \mu(X) - \mu(Y)$ en $\sigma(X-Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$.

Deze regels gelden ook als je met meer dan twee onafhankelijke normaal verdeelde stochasten te maken hebt.

Voorbeeld 1

De tabel geeft de diameters (in mm) van machinaal geproduceerde moeren.

Ga met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier na, dat deze diameters normaal zijn verdeeld en lees het gemiddelde en de standaardafwijking af uit de grafiek.
Vergelijk deze met het echte gemiddelde en de standaardafwijking.

diameter	percentage
12,8-<12,9	0,1
12,9-<13,0	2,1
13,0-<13,1	13,6
13,1-<13,2	34,1
13,2-<13,3	34,0
13,3-<13,4	13,6
13,4-<13,5	2,0
13,5-<13,6	0,1

Figuur 4.6

Antwoord

Met de grafische rekenmachine vind je $\mu(M) \approx 13{,}20$ en $\sigma(M) \approx 0{,}10$ waarin M de diameter van een moer voorstelt.

Op normaal-waarschijnlijkheidspapier verschillen de cumulatieve relatieve frequentieverdeling vanuit de tabel en die gemaakt vanuit een normale verdeling met $\mu = 13{,}20$ en $\sigma = 0{,}10$ vrijwel niet van elkaar.

Conclusie: M is normaal verdeeld met $\mu(M) \approx 13{,}20$ en $\sigma(M) \approx 0{,}10$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je een tabel met diameters van machinaal geproduceerde moeren.

a Reken zelf het gemiddelde en de standaardafwijking na.

b Bereken voor $g = 12{,}9;\ 13{,}0;\ 13{,}1; \dots ;\ 13{,}6$ de kans $\text{P}(M \leq g | \mu = 13{,}20 \text{ en } \sigma = 0{,}10)$.
Schrijf de kansen in procenten.

c Zet op normaal waarschijnlijkheidspapier de kansen uit onderdeel b uit tegen g.
Trek vervolgens een rechte lijn door deze punten.

d Zet op hetzelfde papier de cumulatieve relatieve frequenties van de moeren (uit de tabel) uit tegen de rechter klassengrenzen. Trek vervolgens zo goed mogelijk een rechte lijn door deze punten.

e Ga na dat de lijnen ongeveer samenvallen. Wat betekent dat?

Opgave 6

In de tabel hiernaast zie je de lengtes van slagtanden van mannelijke olifanten in een safaripark ergens in Afrika.

lengte (cm)	percentage
$190- < 195$	0,3
$195- < 200$	1,1
$200- < 205$	1,6
$205- < 210$	6,8
$210- < 215$	5,1
$215- < 220$	21,1
$220- < 225$	13,5
$225- < 230$	16,5
$230- < 235$	19,5
$235- < 240$	4,0
$240- < 245$	7,3
$245- < 250$	2,5
$250- < 255$	0,7

Tabel 4.1

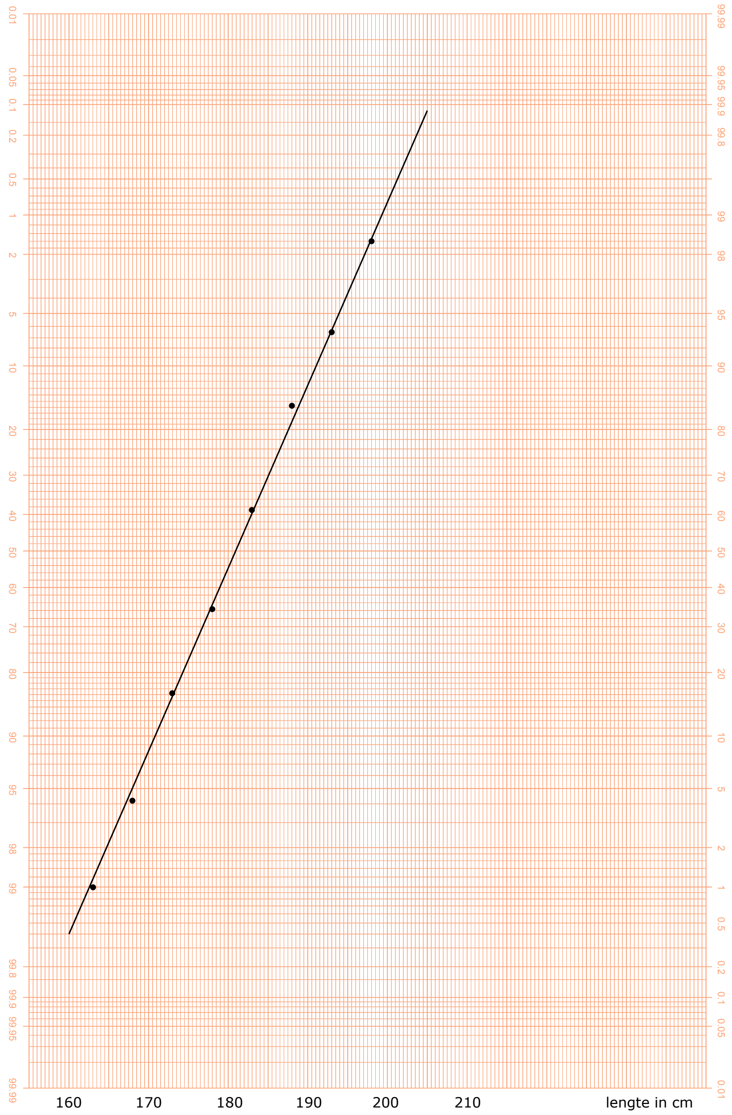
a Bereken op je grafische rekenmachine met behulp van de klassenmiddens het gemiddelde en de standaardafwijking. Rond af op één decimaal.

b Breid de tabel uit met de cumulatieve percentages.

c Zet op normaal waarschijnlijkheidspapier de cumulatieve percentages uit tegen de rechterklassengrenzen en ga zo na of er van een normale verdeling van de lengtes van de slagtanden sprake is.

Voorbeeld 2

De lengteverdeling van Nederlandse mannen boven 20 jaar is bij benadering klokvormig. Hier zie je op normaal waarschijnlijkheidspapier hoe deze verdeling wordt benaderd door een rechte lijn.



Figuur 4.7

Bepaal vanuit deze figuur de gemiddelde lengte en de standaardafwijking.

Antwoord

Op deze lengteverdeling van Nederlandse mannen boven 20 jaar kun je aflezen:

- bij 50% zit de gemiddelde lengte van $\mu \approx 181$ cm;
- bij 84% zit volgens de vuistregels $\mu + \sigma \approx 189$ cm.

Je vindt een gemiddelde van ongeveer $\mu = 181$ cm met een standaardafwijking van ongeveer $\sigma = 189 - 181 = 8$ cm.

Opgave 7

Wanneer een cumulatieve relatieve frequentiepolygoon, op normaal-waarschijnlijkheidspapier getekend, vrijwel een rechte lijn oplevert is er sprake van een normale verdeling. In het voorbeeld kun je zien hoe je dan het gemiddelde en de standaardafwijking van de verdeling kunt aflezen uit de figuur.
Ga zelf na dat de in het voorbeeld vermelde waarden inderdaad correct zijn.

Opgave 8

In een fabriek worden kilopakken suiker machinaal gevuld. Volgens de Europese norm mag niet meer dan 2,5% van de pakken suiker minder dan 1000 gram bevatten. Gebruik het bestand **De vulgewichten van honderd pakken suiker**.

a Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van deze vulgewichten in één decimaal.

b Maak een tabel met cumulatieve relatieve frequenties van deze vulgewichten. Gebruik klassen met een klassenbreedte van 1 gram. Begin met de klasse $996- < 997$.

c Teken op normaal-waarschijnlijkheidspapier de cumulatieve relatieve frequentieverdeling.

d Zijn de vulgewichten (bij goede benadering) normaal verdeeld? Zo ja, trek dan de rechte lijn die hoort bij deze normale verdeling.

e Laat zien dat het gemiddelde vulgewicht en de bijbehorende standaardafwijking die je uit de figuur afleest, overeenkomen met de berekende waarden.

f Welke vulgewichten hebben de 10% zwaarste pakken suiker? Lees je antwoord uit de figuur af.

Voorbeeld 3

De diameters M van een bepaalde soort moeren zijn normaal verdeeld met
$\mu(M) \approx 13{,}20$ en $\sigma(M) \approx 0{,}10$ mm.
Bij deze moeren horen bouten waarvan de diameters B ook normaal zijn verdeeld: $\mu(B) \approx 13{,}05$ en $\sigma(B) \approx 0{,}10$ mm.
Deze bouten passen nog in de moeren als hun diameters maximaal 0,25 mm kleiner zijn dan die van de moeren.
Hoeveel procent van de bouten past niet?

Antwoord

Kijk naar het verschil $V = M - B$ van de diameters van een bout en een moer. Dit verschil is ook normaal verdeeld met

- $\mu(V) = \mu(M - B) = \mu(M + \text{-}B) = \mu(M) + \mu(\text{-}B) = \mu(M) - \mu(B) = 13{,}20 - 13{,}05 = 0{,}15$ mm;
- $\sigma(V) = \sigma(M - B) = \sigma(M + \text{-}B) = \sqrt{(\sigma(M))^2 + (\sigma(\text{-}B))^2} = \sqrt{(\sigma(M))^2 + (\sigma(B))^2} = \sqrt{0{,}10^2 + 0{,}10^2} = \sqrt{0{,}02} \approx 0{,}14$ mm.

De bouten passen als $0 \leq V \leq 0{,}25$.

De kans hierop is $\text{P}\left(0 \leq V \leq 0{,}25 | \mu = 0{,}15 \text{ en } \sigma = \sqrt{0{,}02}\right) \approx 0{,}616$.

Conclusie: 38% van de bouten past niet in de moeren.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** vind je de gegevens van machinaal geproduceerde moeren en bijbehorende bouten.

a Reken zelf het percentage bouten na dat niet in de moeren past.

Het bedrijf dat deze bevestigingsmiddelen maakt, produceert nog veel meer bouten en moeren in diverse afmetingen. Voor een ander type bout met bijpassende moer geldt: de diameter van de moer is normaal verdeeld met een gemiddelde van $8{,}10$ mm en een standaardafwijking van $0{,}05$ mm en de diameter van de bout is normaal verdeeld met een gemiddelde van $8{,}05$ mm en een standaardafwijking van $0{,}03$ mm. De bouten passen in de moeren als de diameter van de moer minstens $0{,}02$ mm groter is dan de diameter van de bout.

b Hoeveel procent van deze bouten is te dik voor de moeren?

Ook de gewichten van de bouten en moeren van nog een andere soort zijn normaal verdeeld: het gemiddelde gewicht van de moer is $5{,}0$ gram met een standaardafwijking van $0{,}2$ gram en het gemiddelde gewicht van de bout is $7{,}3$ gram met een standaardafwijking van $0{,}3$ gram. Ze worden verpakt in dozen. In elke doos zitten 100 bouten en moeren.

c Hoe zwaar zijn de bouten en moeren in zo'n doos gemiddeld? En welke standaardafwijking hoort daar bij?

d Hoeveel procent van deze dozen heeft een totale inhoud van meer dan 1235 gram?

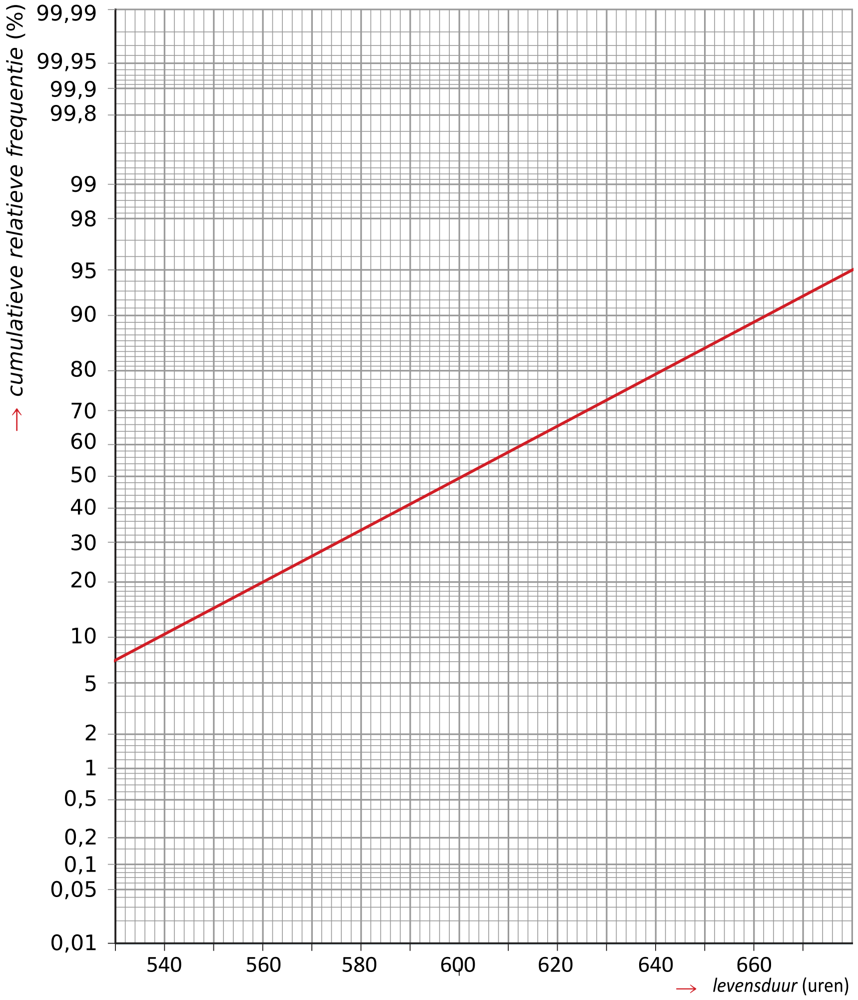
Opgave 10

Voor een verhuizing wil iemand stapels boeken in afsluitbare dozen vervoeren. De dikte B van de boeken is normaal verdeeld met een gemiddelde van $7{,}0$ cm en een standaardafwijking van $1{,}3$ cm. De binnenhoogte D van de dozen is ook normaal verdeeld met een gemiddelde van $83{,}0$ cm en een standaardafwijking van $0{,}9$ cm.
Bereken de kans dat een stapel van 15 willekeurig gekozen boeken op elkaar gestapeld in een willekeurige doos past.

Verwerken

Opgave 11

In de grafiek zie je de levensduur van 250 batterijen bij aanhoudende belasting. Het aantal ‘lege’ batterijen is geregistreerd na perioden van steeds 30 uren. De levensduur van de batterijen is vrijwel normaal verdeeld. Je ziet de resultaten van de duurproef op normaal waarschijnlijkheidspapier weergegeven.



Figuur 4.8

a Geef met behulp van deze figuur een schatting van het percentage batterijen dat langer meegaat dan 660 uren.

b Geef met behulp van deze figuur zowel een schatting van de gemiddelde levensduur als van de standaardafwijking van de levensduur van deze batterijen.

c Geef met behulp van deze figuur een schatting van de levensduur van de 2,5% ‘volste’ batterijen.

Opgave 12

Mark koopt een groot en een klein pak suiker. De gewichten van de grote en de kleine pakken suiker zijn normaal verdeeld. In het grote pak zit gemiddeld 1002 gram suiker met een standaardafwijking van 6,3 gram. Het gemiddeld gewicht van het kleine pak is 503 gram met een standaardafwijking van 3,9 gram.

Bereken in vier decimalen de kans dat het totale gewicht van het kleine en grote pak suiker meer is dan 1500 gram.

Opgave 13

Deze tabel geeft de bloeddruk in mmHg (millimeter kwikdruk) van een groep mannen en een groep vrouwen. We gaan ervan uit dat de bloeddruk een continue variabele is.

a Bereken van beide groepen de gemiddelde bloeddruk en de standaardafwijking van de bloeddruk.

b Welke klassenindeling is hier gehanteerd?

c Laat met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier zien dat de bloeddruk van de mannen niet normaal verdeeld is.

d Je kunt wel een rechte lijn trekken die de verdeling zo goed mogelijk benaderd. Doe dat en lees het gemiddelde en de standaardafwijking af die bij die lijn passen. Wijken de waarden veel af van de berekende waarden?

e Is de bloeddruk van de vrouwen wel normaal verdeeld?

Bloeddruk 150 personen in mm Hg		
	mannen	vrouwen
bloeddruk	frequentie	frequentie
105	2	1
110	4	3
115	6	5
120	16	15
125	15	12
130	6	6
135	7	7
140	7	7
145	7	8
150	2	5
155	1	3
160	1	2
165	1	1
	75	75

Figuur 4.9

Opgave 14

Merel heeft met haar vriendin Eefje afgesproken om te gaan shoppen in Arnhem. Merel reist met de bus van Nijmegen naar Arnhem. De aankomsttijd M van Merel is normaal verdeeld met een verwachte aankomsttijd van 11:18 u en een standaardafwijking van 5 minuten. Eefje neemt de bus vanuit Apeldoorn. Ook de aankomsttijd E van Eefje is normaal verdeeld met een verwachte aankomsttijd van 11:16 u en een standaardafwijking van 7 minuten.

Bereken in vier decimalen de kans dat Merel eerder aankomt dan Eefje.

Opgave 15

Op een bepaalde dag werd, tussen 6:00 u en 10:00 u 's morgens, de snelheid van auto's op een snelweg (waar de maximum snelheid 120 km/u is) gemeten. Het blijkt dat deze snelheid normaal verdeeld is. 12% van de auto's reed niet harder dan 105 km/u en 26% reed harder dan 126 km/u.
Bepaal met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier het gemiddelde en de standaardafwijking van de snelheid van deze auto's.

Opgave 16

Twee verspringers houden een wedstrijd tegen elkaar. Ze springen elk twee keer.

Springer A springt op dit moment gemiddeld $8{,}60$ meter met een standaardafwijking van 10 cm.
Springer B springt op dit moment gemiddeld $8{,}50$ meter met een standaardafwijking van 20 cm.

Bereken in drie decimalen de kans dat verspringer A beide keren verder springt dan verspringer B.

Opgave 17

De vleugelspanwijdte van een volwassen albatros is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 17 cm.
12% van de vogels blijkt een spanwijdte van meer dan 280 cm te hebben.
Hoeveel procent zal dan een spanwijdte van minder dan 240 cm hebben?
Onderzoek dat met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier.

Toepassen

Opgave 18: Lichaamslengtes van 5001 vrouwen

Open het bestand **Enkele lichaamsafmetingen van 5001 vrouwen uit 1947**. Hierin zie je een tabel met lichaamslengtes in cm van de 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

a Bereken de gemiddelde lichaamslengte en de standaardafwijking.

b Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de bijbehorende cumulatieve relatieve frequentieverdeling.

Zijn de lichaamslengtes bij benadering normaal verdeeld?

c 95% van de lichaamslengtes zit tussen $\mu – a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a? Lees je antwoord uit de figuur af.

d Welke minimale lengte hebben de 16% grootste lichaamslengtes? Lees je antwoord uit de figuur af.

Opgave 19: Kniehoogtes van 5001 vrouwen

Open het bestand **Enkele lichaamsafmetingen van 5001 vrouwen uit 1947**. Hierin zie je een tabel met kniehoogtes in cm van de 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

a Bereken de gemiddelde kniehoogte en de standaarddeviatie.

b Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de bijbehorende cumulatieve relatieve frequentieverdeling.

Zijn de kniehoogtes bij benadering normaal verdeeld?

c Ga na, dat de gemiddelde kniehoogte en de standaardafwijking die je uit de figuur kunt aflezen overeenkomen met de berekende waarden.

d 60% van de kniehoogtes zit tussen $\mu – a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a? Lees je antwoord uit de figuur af.

e Welke minimale lengte hebben de 15% grootste kniehoogtes? Lees je antwoord uit de figuur af.

Opgave 20: Stalen buizen

In een staalfabriek worden twee soorten buizen (A en B) geproduceerd. Deze worden vervolgens in allerlei combinaties aan elkaar gelast. De lengte van de buizen van soort A is normaal verdeeld met een gemiddelde van 80 cm en een standaardafwijking van 4 cm. Ook de lengte van de buizen van soort B is normaal verdeeld met een gemiddelde van 55 cm en een standaardafwijking van 3 cm.

a Een buis van soort A wordt gelast aan een buis van soort B. Bereken in vier decimalen de kans dat de totale lengte meer dan 140 cm is.

b Bereken in vier decimalen de kans dat een buis van soort A minder dan 30 cm langer is dan een buis van soort B.

c Nu worden er twee buizen van soort B gelast aan een buis van soort A. Bereken in vier decimalen de kans dat de totale lengte minder dan 185 cm is.

Testen

Opgave 21

Deze tabel is afkomstig uit het Statistisch Zakboek 1983 van het Centraal Bureau voor de Statistiek.

Dienstplichtigen naar lichaamslengte (17,5 jarigen, 1982)	
lengte in cm	**percentage dienstplichtigen**
<160	0,2
160 - 164	0,9
165 - 169	4,1
170 - 174	12,9
175 - 179	25,1
180 - 184	28,5
185 - 189	18,7
190 - 194	7,4
195 - 199	1,8
200 en meer	0,4
aantal dienstplichtigen (abs.): 105.897 gemiddelde lengte (cm): 180,7	
Bron: Inspectie Geneeskundige Dienst Koninklijke Landmacht	

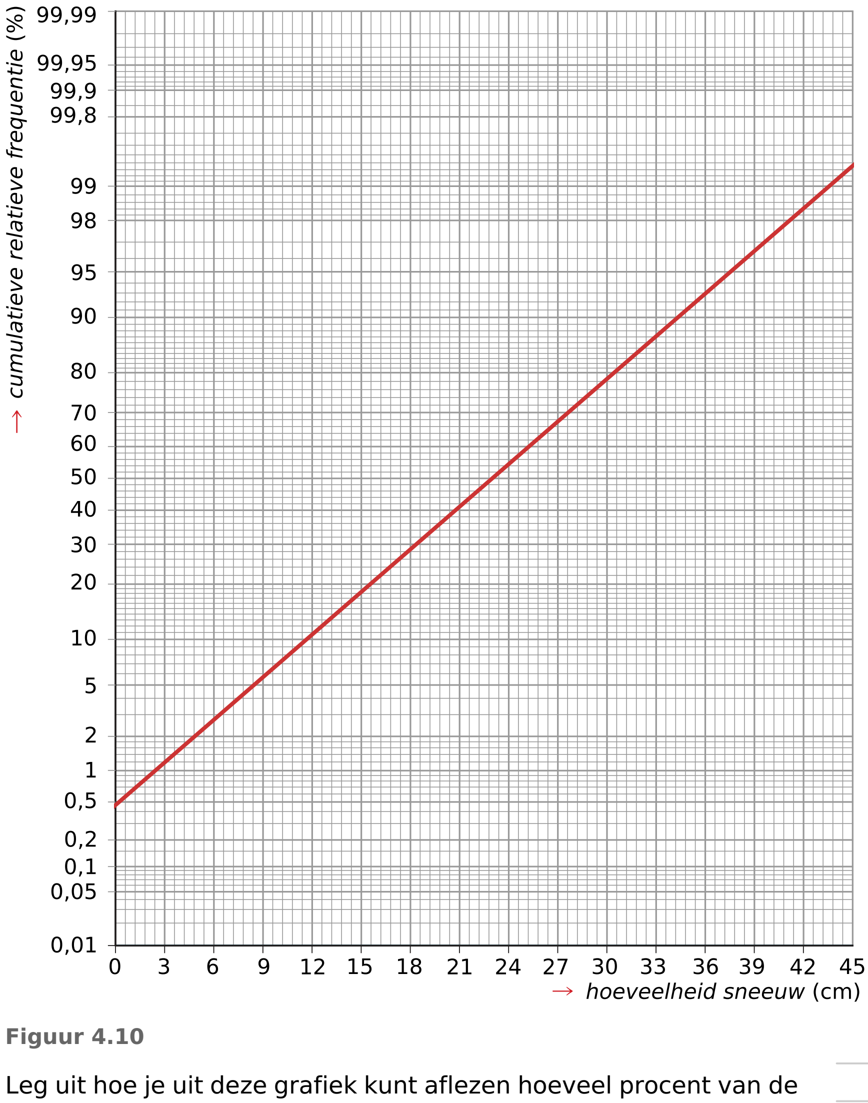
Tabel 4.2

a Toon met normaal waarschijnlijkheidspapier aan dat de lichaamslengten vrijwel normaal verdeeld zijn; controleer of het vermelde gemiddelde juist is en bepaal de standaardafwijking.

b Voor de marechaussee geldt een minimumlengte van 170 cm en voor de luchtmacht een maximumlengte van 193 cm.
Bereken met behulp van de normale verdeling (gebruik het gemiddelde en de standaardafwijking die je bij onderdeel a hebt gevonden) het percentage van de dienstplichtigen van wie de lengte zowel geen belemmering is voor dienst bij de marechaussee als bij de luchtmacht (in gehele procenten nauwkeurig).

Opgave 22

In een noordelijk gelegen stad sneeuwt het in het winterseizoen regelmatig.
Van de hoeveelheid sneeuw die afgelopen winter per dag dat het sneeuwde viel, is een grafiek op normaal-waarschijnlijkheidspapier gemaakt.



Figuur 4.10

a Leg uit hoe je uit deze grafiek kunt aflezen hoeveel procent van de dagen dat het sneeuwde er meer dan 18 centimeter sneeuw per dag viel.

b Leg uit waarom de hoeveelheid sneeuw die per sneeuwdag viel normaal verdeeld is en bepaal de gemiddelde hoeveelheid sneeuw die per sneeuwdag viel. Bepaal ook de bijbehorende standaardafwijking.

Opgave 23

Literpakken melk worden machinaal gevuld. Zo'n pak heeft een inhoud die normaal is verdeeld met een gemiddelde van $1{,}010$ liter en een standaardafwijking van $0{,}006$ liter. De vulmachine staat ingesteld op het gieten van gemiddeld $1{,}005$ liter melk in zo'n pak met een standaardafwijking van $0{,}004$ liter. Ook dit vulvolume is normaal verdeeld.

a In hoeveel procent van gevallen gaat bij het vullen melk verloren?

b Het gemiddelde vulvolume kan worden ingesteld. Hoeveel moet dit bedragen opdat in niet meer dan 1% van de gevallen melk verloren gaat bij het vullen van een pak?

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Continue kansmodellen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- continue stochast — kansdichtheidsfunctie — normaalkromme
- normale stochast — μ en σ bij een normale stochast — normale kansen
- de standaardnormale stochast — standaardiseren — de wortel-n-wet voor een steekproef uit een normale verdeling
- normaal waarschijnlijkheidspapier

Activiteitenlijst

- bij een continue stochast kansen bepalen — eigenschappen van de normaalkromme
- kansen berekenen bij een normale stochast — grenswaarden berekenen bij gegeven normale kansen
- standaardiseren — μ of σ berekenen bij een normale verdeling
- met normaal waarschijnlijkheidspapier onderzoeken of er van een normale verdeling sprake is

Achtergronden

In 1718 publiceerde **Abraham de Moivre (1667—1754)** 'The Doctrine of Chance', een boek over kansrekening waarin de eerste definitie van statistische onafhankelijkheid verscheen, naast de aanpak van allerlei problemen op het gebied van dobbelen en andere kansspelen.

Bij de bestudering van herhaalde trekkingen (met teruglegging) van een schijf uit een vaas met alleen zwarte en witte schijven waarbij de kans op een zwarte en een witte schijf even groot is, ontdekte De Moivre dat een bijpassende kansverdeling een histogram heeft dat netjes klokvormig is. Later werd dit probleem gesimuleerd met het **bord van Galton** waarin balletjes naar beneden vallen op een aantal rijen met pinnen.

Testen

Opgave 1

Gegeven is deze frequentietabel die gaat over de lengte (in cm) van een groep jongens en meisjes.

a Bereken de gemiddelde lichaamslengte en de standaardafwijking voor zowel de jongens als voor de meisjes.

b Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de bijbehorende cumulatieve relatieve frequentieverdelingen.

c Zijn de lichaamslengtes van beide groepen bij benadering normaal verdeeld? Lees de gemiddeldes en de standaardafwijkingen uit je figuur af en vergelijk ze met de berekende waarden.

lengte	meisjes	jongens
$155- < 160$	6	0
$160- < 165$	12	2
$165- < 170$	34	3
$170- < 175$	16	10
$175- < 180$	10	14
$180- < 185$	5	18
$185- < 190$	1	11
$190- < 195$	0	9
$195- < 200$	1	1
$200- < 205$	0	1
Totaal	85	69

Tabel 5.1

Opgave 2

In een fabriek worden sokken machinaal vervaardigd. De gemiddelde lengte van een sok blijkt 47 cm te zijn. De lengte L van de sokken is normaal verdeeld met een standaardafwijking van $0{,}2$ cm. De sokken worden in paren verkocht. In de fabriek worden paren gevormd door willekeurig twee sokken bij elkaar te stoppen.

a Als één sok een lengte heeft van $46{,}5$ cm, hoe groot is dan de kans dat het lengteverschil met de andere sok van het paar meer dan $0{,}7$ cm bedraagt? Rond af op vier decimalen.

b Als de eerste sok een lengte heeft van $49{,}5$ cm, is dan de kans dat het lengteverschil met de andere sok van het paar meer dan $0{,}7$ cm even groot? Licht je antwoord toe.

c Bepaal de kans bedoeld bij b.

Opgave 3

De zwangerschapsduur D bij mensen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 266 dagen en een standaardafwijking van 16 dagen.

a Bij een premature geboorte wordt het kind minstens drie weken voor het gemiddelde geboren. Bereken de kans daar op. Rond af op vier decimalen.

b In 7% van de gevallen duurt een zwangerschap zo lang dat de geboorte moet worden ingeleid. Vanaf welke zwangerschapsduur gebeurt dit dus?

c In 1973 beweerde een vrouw dat ze 310 dagen zwanger was geweest omdat op de dag van de bevalling haar man al 310 dagen als marinier van huis was. Bereken in vier decimalen de kans op een zwangerschap van minstens 310 dagen.

Opgave 4

In een fabriek vult een machine kleine zakjes poedermelk voor in de koffie. Elk van die zakjes hoort 3 gram melkpoeder te bevatten. De fabrikant heeft zijn machine zo afgesteld dat het vulgewicht V van deze zakjes normaal is verdeeld met een gemiddelde van $3{,}1$ gram en een standaardafwijking van $0{,}06$ gram.

a Hoeveel procent van de zakjes melkpoeder die deze machine produceert is te licht?

b De fabrikant voldoet hiermee niet aan de richtlijnen van de Europese Unie op dit gebied. Die schrijven voor dat niet meer dan 1% van de zakjes poedermelk minder dan 3 gram mag bevatten. De fabrikant besluit om iets meer melkpoeder in de zakjes te doen. Op welk gemiddelde vulgewicht moet hij de machine instellen om aan de richtlijn van de EU te voldoen? Ga er van uit dat de standaardafwijking van de verdeling van de vulgewichten hetzelfde blijft. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

c Achteraf bezien vindt de fabrikant de oplossing die hij heeft gekozen bij b toch te duur. Hij laat de machine nauwkeuriger afstellen en houdt het gemiddelde vulgewicht op $3{,}1$ gram. Welke standaardafwijking moet de verdeling van de vulgewichten nu krijgen om aan de richtlijn van de EU te voldoen? Rond af op twee decimalen.

d Je koopt een doosje met daarin 20 zakjes van dat melkpoeder. Bereken de kans dat je in totaal minder dan 60 gram melkpoeder hebt gekocht.

e Hoeveel gram melkpoeder verwacht je gemiddeld per zakje in het doosje met 20 zakjes? En welke standaardafwijking hoort daar bij?

Opgave 5

Een atleet heeft zich gespecialiseerd in het verspringen. Zijn sprongen S blijken normaal te zijn verdeeld met een gemiddelde van $8{,}60$ m en een standaardafwijking van 10 cm. Om in aanmerking te komen voor afvaardiging naar de Olympische Spelen, moet hij in zijn eigen land drie keer voldoen aan de zogenaamde Olympische limiet. Dat betekent, dat hij drie keer verder moet springen dan een door het landelijk Olympisch comité vastgestelde afstand. In dit geval bedraagt die afstand $8{,}70$ m.

a Bepaal de kans dat de atleet bij één sprong de limiet haalt.

b Hoe groot is de kans dat hij bij drie achtereenvolgende sprongen drie keer de limiet overschrijdt?

Binnen vier maanden moet deze atleet drie keer de gestelde limiet halen. In deze vier maanden zijn er twee door het landelijk Olympisch comité erkende wedstrijden met elk drie sprongen.

c Bereken de kans dat de atleet precies drie keer de limiet haalt.

Het Olympisch record bedraagt $8{,}80$ m. Op de Olympische Spelen heeft de atleet drie sprongen om zijn kansen te verdedigen.

d Hoe groot is de kans dat het hem lukt op de Olympische Spelen één keer dit record te verbeteren?

De voorwaarde waaraan voldaan moet worden om naar de Olympische Spelen te worden uitgezonden bestaat uit vier elementen:

- de gestelde limiet moet worden gehaald;
- dat moet drie keer gebeuren;
- het moet in een bepaald aantal sprongen gerealiseerd worden;
- het moet binnen een bepaalde tijdsspanne worden verricht.

e Welke van deze vier elementen heeft de grootste invloed op het al of niet uitzenden naar de Olympische Spelen? Motiveer je antwoord.

Opgave 6

In een bedrijf wordt onder andere margarine geproduceerd. Het eindproduct wordt via een vulmachine in kuipjes gegoten, die volgens het opschrift een inhoud hebben van 500 g. De gewichten K van de gevulde kuipjes blijken normaal verdeeld te zijn. De standaardafwijking is ongeacht het vulgewicht waarop de vulmachine ingesteld staat steeds 4 g. Het gemiddelde gewicht van zo'n kuipje is gelijk aan het vulgewicht waarop de machine is ingesteld.

a Bereken in vier decimalen de kans dat het gewicht van een vol kuipje ligt tussen 496 en 502 g.

De kuipjes worden verpakt in kartonnen dozen waarvan het gewicht D normaal verdeeld is. Het gemiddelde gewicht is 400 g met een standaardafwijking van 15 g. In één doos gaan 20 kuipjes.

b Het gewicht van de volle dozen is ook weer normaal verdeeld. Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het gewicht van deze dozen.

De Keuringsdienst van waren gaat regelmatig na of de fabriek wel voldoende margarine in de kuipjes doet. Daartoe nemen ze één volgepakte doos uit de dagproductie en wegen die. Als het totale gewicht meer dan 50 g naar beneden afwijkt van het gemiddelde, krijgt de fabrikant een boete.

c Bereken in vier decimalen de kans op een boete, als de fabrikant het vulgewicht van 500 g aanhoudt.

Natuurlijk zou de Keuringsdienst van waren ook de 20 kuipjes zonder de bijbehorende doos kunnen wegen. Ook nu wordt een boete gegeven als 50 g minder dan het gemiddelde gemeten zou worden.

d Waarom is deze controle eerlijker dan de eerste?

Opgave 7

Een schroefas van een schip verbindt de motor met de schroef. Deze as wordt op een of meer plaatsen ondersteund door een lager. Dit lager is een bronzen bus waarvan de binnendiameter zo goed mogelijk passend wordt gemaakt om de diameter van de as en waarin zich goed geoliede kogels bevinden die het draaien van de as mogelijk maken.
Er wordt gestreefd naar een binnendiameter van $15{,}0$ mm van de bussen (en dus de lagers) en naar een diameter van $14{,}9$ mm voor de assen.

Figuur 5.1

Na fabricage zijn zowel de binnendiameter L van de lagers als de diameters A van de assen normaal verdeeld:

- voor de assen geldt: $\mu = 14{,}9$ mm en $\sigma = 0{,}1$ mm;
- voor de lagers geldt: $\mu = 15{,}0$ mm en $\sigma = 0{,}1$ mm.

Assen met een diameter groter dan $15{,}1$ mm en lagers met een binnendiameter kleiner dan $14{,}8$ mm worden na een test afgekeurd.

a Hoeveel procent van de assen heeft een diameter groter dan $15{,}15$ mm?

b Hoeveel procent van de lagers heeft een binnendiameter kleiner dan $14{,}85$ mm?

Uit een grote hoeveelheid, die evenveel assen als lagers bevat, neem je willekeurig een as en een lager. Het verschil van de binnendiameter van het lager en de diameter van de as is een normaal verdeelde toevalsvariabele V. Als de lager niet om de as past is $V < 0$.

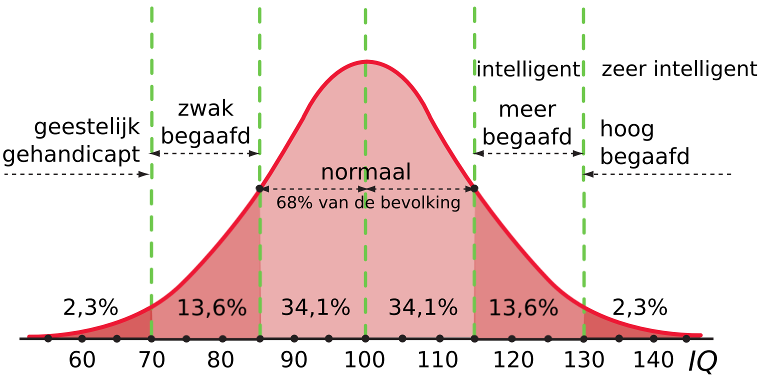
c Welke waarden hebben het gemiddelde en de standaardafwijking van V?

d Bereken in vier decimalen de kans dat het lager niet om de as past.

Toepassen

Opgave 8: Intelligentiequotiënt

In het begin van de vorige eeuw werd er veel waarde gehecht aan het zogenaamde 'intelligentiequotiënt' IQ van met name kinderen. In 1904 werd de psycholoog **Alfred Binet (1857—1911)** door de Franse overheid gevraagd een test te ontwerpen om 'slimme' van 'domme' kinderen te onderscheiden.



Figuur 5.2

Binet ontwierp een intelligentietest waarmee hij de intelligentieleeftijd van een kind vaststelde. Wanneer de intelligentieleeftijd wordt gedeeld door de werkelijke leeftijd (en met 100 vermenigvuldigd) dan krijg je het IQ. Dit IQ is normaal verdeeld met een gemiddelde dat op 100 is gesteld. Zo is de Stanford-Binet intelligentieschaal ontwikkeld.
Bekijk de normale verdeling die Binet maakte.

a Welk gemiddelde en welke standaardafwijking heeft het IQ volgens de Stanford-Binet-schaal?

b Is het IQ afhankelijk van je leeftijd?

c Hoeveel procent van de mensen heeft een minder dan normale intelligentie?

d Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van boven de 140?

e Welk IQ heeft de meest intelligente 10% van de bevolking?

Examen

Opgave 9: Cakemeel

In een fabriek worden pakken met cakemeel gevuld. Op zo'n pak wordt vermeld: 'Inhoud 500 gram'. Veronderstel dat de inhoud per pak normaal verdeeld is met een gemiddelde van 500 g en met een standaarddeviatie van 4 g.

a Bereken in één decimaal nauwkeurig het percentage pakken dat minder dan 495 g cakemeel bevat.

Volgens de fabrikant betekent de vermelding 'Inhoud 500 gram' dat slechts 25% van de pakken minder dan 500 g inhoud heeft. Als een pak een inhoud van minder dan 500 g heeft, spreekt hij van ondergewicht. Veronderstel bij de volgende drie vragen dat de fabrikant gelijk heeft en dat de standaarddeviatie van de normaal verdeelde inhoud 4 g bedraagt.

b Bereken in één decimaal nauwkeurig de gemiddelde inhoud per pak.

In een rek van een kruidenierswinkel staan 20 pakken cakemeel afkomstig van bovengenoemde fabriek. Daarvan hebben er 5 een ondergewicht. Een klant neemt aselect 3 pakken uit het rek.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat geen van deze 3 pakken een ondergewicht heeft.

d Een banketbakker koopt 16 pakken rechtstreeks van de fabriek. Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat hij minder dan 8000 g cakemeel heeft gekocht.

(bron: vwo examen wiskunde A in 1986, eerste tijdvak)

Opgave 10: Zeeppoeder

Een grootwinkelbedrijf heeft in zijn assortiment een eigen merk zeeppoeder. Het bedrijf beschikt over een vulmachine met een vulcapaciteit van 7536 kg per dag. Van de door de machine gevulde pakken is het gewicht normaal verdeeld, met een standaardafwijking van 40 g ongeacht de inhoud. De keuringsdienst van waren eist dat, op één decimaal nauwkeurig, slechts $4{,}0\%$ van de in de handel gebrachte pakken minder mag bevatten dan op de pakken vermeld staat. Het bedrijf brengt zeeppoeder op de markt in kleine pakken, waarop vermeld staat dat zij 1 kg zeeppoeder bevatten.
De vulmachine is ingesteld op 1070 g per pak.

a Onderzoek of aan de eis van de keuringsdienst van waren wordt voldaan.

De bedrijfsleiding overweegt om naast de kleine pakken met opschrift 1 kg ook gezinspakken met opschrift $2{,}5$ kg op de markt te brengen.

b Op hoeveel gram per pak moet de vulmachine ingesteld worden voor de gezinspakken om aan de eis van de keuringsdienst van waren te voldoen?

c Neem aan dat het aantal geproduceerde kleine pakken twee maal zo groot is als het aantal gezinspakken. Hoeveel gezinspakken kunnen er dan maximaal per dag worden geproduceerd?

(bron: vwo examen wiskunde A in 1984, eerste tijdvak)

Opgave 11: Bewaking

Een zekere bank wordt 's nachts intensief bewaakt. Meerdere malen per nacht doet één van de bewakers een ronde door het gebouw. Op zo'n ronde moet hij zich op vijftien plaatsen melden door een speciale code in te toetsen in een meldkastje. De computer in de controlekamer registreert de tijdstippen waarop dit gebeurt. Ook schrijft de procedure voor dat de tijdstippen van vertrek en terugkomst worden geregistreerd. De kastjes zijn zodanig op de route geplaatst dat de zestien loopafstanden vrijwel even lang zijn. Uit overzichten over langere tijd blijkt dat, in het geval dat er niets bijzonders valt op te merken, de lengte van de tijdsintervallen tussen twee opeenvolgende meldingen van de bewaker vrijwel normaal verdeeld is met een gemiddelde van $3{,}6$ minuten en een standaarddeviatie van $0{,}7$ minuten. In het geval dat een melding langer dan vijf minuten uitblijft, wordt een bewaker in de controlekamer automatisch gewaarschuwd dat er mogelijk iets aan de hand is.
De bewaker heeft zich zojuist gemeld bij het vijfde kastje.

a Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de volgende melding langer dan $5{,}0$ minuten uitblijft.

Veronderstel dat de lengtes van de 16 tijdsintervallen bij een ronde door het gebouw onder normale omstandigheden onafhankelijk van elkaar zijn.

b Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de totale tijd van een ronde door het gebouw langer is dan $60{,}0$ minuten.

Tijdens zo'n ronde kijkt de bewaker wel enige keren in de gang naar de kluis, maar hij gaat er niet in. In de gang naar de kluis is namelijk een alarminstallatie aangebracht die in directe verbinding staat met de meldkamer op het hoofdbureau van de politie. In het plafond zijn (onzichtbaar) vijf roterende sensoren aangebracht. 's Nachts gaat het alarm automatisch af zodra minstens één van deze sensoren geactiveerd wordt. De sensoren werken geheel onafhankelijk van elkaar. Voor elke sensor afzonderlijk geldt dat de kans op alarm (de detectiekans) in het geval dat iemand 's nachts de sensor passeert, gelijk is aan $0{,}45$.

c Toon met een berekening aan dat de kans dat het alarm bij de politie afgaat als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, ongeveer gelijk is aan 95%.

De directie vindt deze kans te klein. Zij wil de sensorinstallatie zo laten verbeteren dat de kans op alarm als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, groter is dan $99,5\%$. Volgens de chef van de beveiliging kan dit op twee manieren bereikt worden:

- Het aantal sensoren met een detectiekans van $0,45$ wordt uitgebreid; per bij te plaatsen sensor kost dit € 8000,00.
- Een aantal van de aanwezige sensoren wordt omgeruild tegen een nieuw type met een detectiekans van $0,80$; per in te ruilen sensor kost dit € 9000,00.

d Bereken hoeveel men minimaal moet uitgeven om de sensorinstallatie zodanig te verbeteren dat aan de wens van de directie wordt voldaan.

(bron: vwo examen wiskunde A in 1991, tweede tijdvak)

Opgave 12: Lengte van vrouwen

In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceert. Deze fabriek nam alleen personeelsleden in dienst die langer waren dan $170,0$ cm. De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen omdat ze niet aan deze eis voldeden. De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van deze aanstellingsvoorwaarde door te stellen dat $91,0\%$ van alle Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van volksgezondheid. Neem aan dat de lengte van de Amerikaanse vrouwen in de betreffende leeftijdsgroep normaal verdeeld is met een gemiddelde μ en standaarddeviatie σ.

a Stel, uitgaande van het genoemde percentage, een verband op tussen μ en σ.

Neem aan dat $\mu = 160,4$ cm.

b Toon aan dat $\sigma \approx 7,2$ cm.

Stel je voor dat de groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan $170,0$ cm V wordt genoemd. Voor de mediaan (m) van de lengte van de vrouwen van V geldt dat 50% van de vrouwen uit $V \geq m$.

c Toon aan dat $m \approx 172,6$, uitgaande van $\mu = 160,4$ cm en $\sigma = 7,2$ cm.

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91% sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte van volwassenen was volgens hem in de periode 1948—1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselect gekozen groep van 10000 vrouwen in de leeftijd 18 tot 65 jaar werden 1243 vrouwen aangetroffen met een lengte van meer dan $172,6$ cm.

d Als je aanneemt dat de standaardafwijking niet is veranderd, wat is dan de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens dit recente onderzoek?

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk wel was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen. Stel dat voor 1972 gold: $\mu = 164{,}0$ cm en $\sigma = 7{,}2$ cm.

e Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.

(bron: vwo examen wiskunde A in 1990 , eerste tijdvak)

2

Optimaliseren

2.1 Differentieerregels

Inleiding

De afgeleide van een functie geeft de helling van de grafiek in een punt weer. Het is ook een maat voor de veranderingssnelheid van de functiewaarde voor een bepaalde waarde van x. Je bepaalt een afgeleide door te differentiëren. Dat lijkt tot nu toe misschien een eenvoudige klus. Maar wanneer de functies ingewikkelder worden moet je er speciale **differentieerregels** voor toepassen. Je herhaalt eerst nog even de al bekende technieken.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- opnieuw regels toepassen bij het differentiëren;
- het belang van uitbreiding van die differentieerregels ontdekken.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel en de somregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al differentiëren.
Neem nu de functies f en g met $f(x) = 6x^5$ en $g(x) = 2x^3$.

Bepaal de afgeleide van:

a $f_1(x) = f(x) + g(x)$

b $f_2(x) = f(x) - g(x)$

c $f_3(x) = f(x) \cdot g(x)$

d $f_4(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Voor functie f_1 (de som van f en g) geldt dat de afgeleide gelijk is aan de som van de afgeleiden van f en g.

e Kun je voor f_2, f_3 en f_4 iets vergelijkbaars opschrijven?

Uitleg

Met differentiëren bepaal je de afgeleide functie.

De afgeleide van een functie $y = f(x)$ is te bepalen door h naar 0 te laten naderen in het differentiequotiënt:
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Met behulp van een afgeleide functie kun je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt aan de grafiek van de functie bepalen.

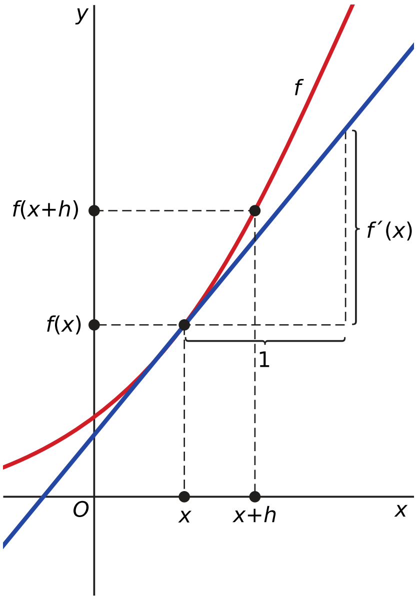
Je kunt de afgeleide van machtsfuncties bepalen met de machtsregel.

- Als $f(x) = x^3$ dan is $f'(x) = 3x^2$.
- Als $g(x) = 3x^2$ dan is $g'(x) = 6x$.

Bij de somfunctie $f(x)+g(x)$ gebruik je de somregel en de machtsregel.

De afgeleide van $f(x)+g(x) = x^3+3x^2$ is $f'(x)+g'(x) = 3x^2+6x$

Als $k(x) = 4x^3 - 5x + 6$ dan volgt uit de somregel, de machtsregel en de constanteregel dat: $k'(x) = 12x^2 - 5$.



Figuur 1.2

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg**.

a Omschrijf wat differentiëren precies is.

b Hoe kom je aan de regels voor het differentiëren?

c Welke differentieerregels pas je toe bij het bepalen van de afgeleide van $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 12$?

d Kun je met behulp van differentieerregels de afgeleide bepalen van $f(x) = (2x)^3$? Zo ja, hoe?

e Waarom kun je met de differentieerregels die je op dit moment kent moeilijk de afgeleide bepalen van $f(x) = \left(2x^2+3\right)^{12}$?

f Waarom kun je met de differentieerregels die je op dit moment kent wel de afgeleide bepalen van $f(x) = \frac{2x+3x^2}{x}$ maar niet de afgeleide van $g(x) = \frac{2x+3x^2}{x+1}$?

Opgave 2

Differentieer de functies.

a $f(x) = 2x^3 + 4x - 5$

b $g(x) = -x^4 - 3x^2 + 10x$

c $h(x) = 85$

d $j(x) = (x+4)(2x-2)$

Opgave 3

Gegeven is functie: $f(x) = x^3 - 4x + 2$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Stel de formule op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **afgeleide** van een functie $y = f(x)$ is te bepalen door h naar 0 te laten naderen in het differentiequotiënt:

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Met behulp van een afgeleide functie kun je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt aan de grafiek van de functie bepalen.

Meestal bepaal je de afgeleide niet op deze manier, maar door te differentiëren. Je kent al een aantal differentieerregels:

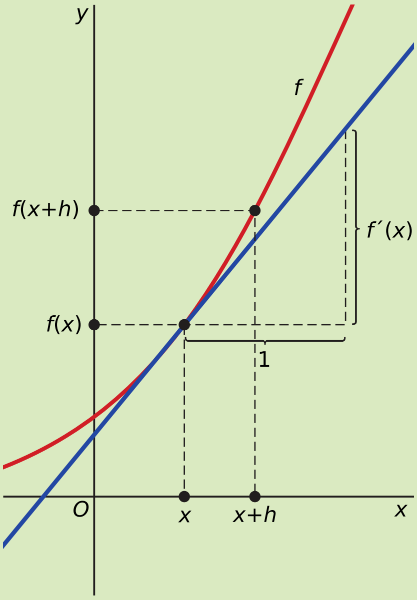
Machtsregel:
Als $f(x) = cx^n$ dan is $f'(x) = ncx^{n-1}$ voor elke c en voor gehele positieve n.

Constante regel:
Als $f(x) = c$ dan is $f'(x) = 0$.

Somregel:
Als $f(x) = u(x) \pm v(x)$ dan is $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

Deze differentieerregels gebruik je bij het berekenen van hellingswaarden van functies die bestaan uit een som (verschil) van machtsfuncties met positieve gehele exponenten. Heb je daarentegen met andere functies te maken, dan zijn ook andere differentieerregels nodig.

Een hellingswaarde in een punt (x, y) van een functie f bepaal je door de x-waarde in de afgeleide functie f' in te vullen.
Voor **extreme waarden** van een functie is de hellingswaarde 0.
In een cartesisch assenstelsel geldt voor de hoek α van de raaklijn met de x-as, dat $\tan(\alpha)$ is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn en dus aan de hellingswaarde.



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

Het differentiëren van functies die bestaan uit een som (of verschil) van machtsfuncties met positieve gehele exponenten gaat als volgt:

- $f(x) = 31{,}7$ geeft: $f'(x) = 0$.
- $g(x) = 7x^4$ geeft: $g'(x) = 28x^3$.
- $h(x) = x^5-3x^4+10x^3-2x+100$ geeft: $h'(x) = 5x^4-12x^3+30x^2-2$.
- $s(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$ geeft: $s'(t) = v_0 + at$.
- $A(r) = 20\pi r + 2\pi r^2$ geeft: $A'(r) = 20\pi + 4\pi r$.
- $j(x) = a^2x^4 - 2bx^2 + c^3$ geeft: $j'(x) = 4a^2x^3 - 4bx$.

Opgave 4

Differentieer de functies.

a $f(x) = 6 - \frac{1}{2}x^3$

b $K(q) = 2q^3 + 60q^2 - 100q + 50$

c $I(d) = \frac{1}{6}\pi d^3 + a^2$

d $g(x) = x(x-20)$

e $h(x) = x^4 + 6x + 12$

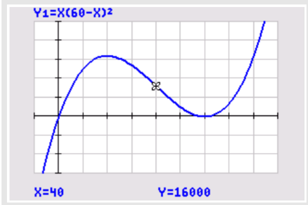
f $H(t) = 25t - 5t^2$

g $T(p) = a^2p^3 - ap + a^4$

h $j(x) = x(x+4)^2$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = x(60-x)^2$.
Om de grafiek van f goed in beeld te krijgen kun jer beter eerst de extremen berekenen. Bereken algebraïsch de extremen van f.



Figuur 1.4

Antwoord

Bekijk de grafiek van f. Er lijken twee extremen te zijn. Zeker weet je dat pas na differentiëren.
Om de afgeleide te kunnen bepalen moeten eerst de haakjes worden weggewerkt:
$f(x) = x(60-x)^2 = 3600x - 120x^2 + x^3$

De afgeleide is: $f'(x) = 3600 - 240x + 3x^2$.

Bij de extremen is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn 0, dus voor het bepalen van de extremen stel je de afgeleide gelijk aan 0:

$f'(x) = 3600 - 240x + 3x^2 = 0$ geeft:

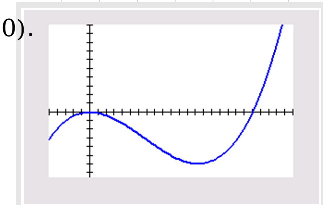
$$\begin{aligned} 3x^2 - 240x + 3600 &= 0 \\ x^2 - 80x + 1200 &= 0 \\ (x-20)(x-60) &= 0 \\ x = 20 \vee x &= 60 \end{aligned}$$

Er zijn dus twee extremen.

De extremen zijn: max. $f(20) = 32000$ en min. $f(60) = 0$.

Opgave 5

Bekijk de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = 0{,}5x^2(x-20)$.


Figuur 1.5

a Om zelf de grafiek zo in beeld te krijgen, bereken je eerst algebraïsch de nulpunten van de functie. Kijk vervolgens naar de tabel en stel het venster van de grafische rekenmachine in. Welke instellingen geven (ongeveer) hetzelfde deel van de grafiek te zien?

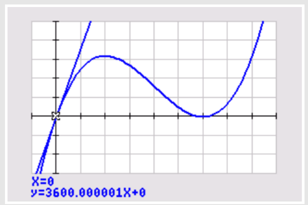
b Wil je de extremen van f algebraïsch berekenen, dan moet je eerst de functie differentiëren. Werk eerst de haakjes weg en bepaal vervolgens de afgeleide.

c Bereken de extremen van f in gehelen.

d Hoe groot is de hellingswaarde van de grafiek van f voor $x = 10$?

Voorbeeld 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = x(60 - x)^2$.
De raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(0,0)$ is getekend.
Welke richtingscoëfficiënt heeft deze raaklijn?
Zijn er andere punten op de grafiek van f waarin de raaklijn dezelfde hoek met de x-as maakt?



Figuur 1.6

Antwoord

Na haakjes wegwerken vind je voor de afgeleide van f:
$f'(x) = 3600 - 240x + 3x^2$
Dus $f'(0) = 3600$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(0,0)$ is daarom 3600.

Voor de hellingshoek α geldt $\tan(\alpha) = \frac{3600}{1} = 3600$. Alleen in een cartesisch assenstelsel heeft het berekenen van die hoek zin.

Voor andere punten van de grafiek waarin de raaklijn dezelfde hoek met de x-as maakt, geldt dat de afgeleide gelijk aan 3600 of -3600.
Los op: $f'(x) = 3600 \vee f'(x) = -3600$.
Ga na dat dit oplevert: $x = 0 \vee x = 80$, want de vergelijking $f'(x) = -3600$ heeft geen oplossingen.
Het enige andere punt waarin de raaklijn dezelfde hoek met de x-as maakt, is $(80,24000)$.

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**. Ga uit van de grafiek in een cartesisch assenstelsel.

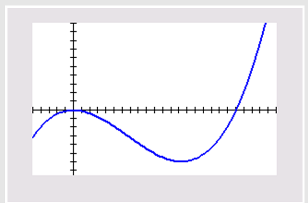
a Laat zien, dat de afgeleide in het voorbeeld correct is.

b Welke hoek maakt de raaklijn aan de grafiek van f met de x-as bij $x = 10$? Rond af op twee decimalen.

c Geef de coördinaten van het andere punt waarin de raaklijn dezelfde hoek met de x-as maakt.

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie f met voorschrift
$f(x) = 0{,}5x^2(x - 20)$.


Figuur 1.7

a Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van het punt op de grafiek van f waarin de raaklijn evenwijdig loopt met die uit a. Rond af op twee decimalen.

Voorbeeld 4

Welke van de volgende functies kun je herschrijven, zodat je met behulp van de al bekende differentieerregels de afgeleide kunt bepalen? Bereken ook van alle functies de afgeleide voor $x = 1$.

- $f(x) = (x - 3)(2x + 4)$
- $g(x) = 3 \cdot \sqrt{10 - x^3}$
- $h(x) = \frac{8x - 4x^2}{x - 2}$
- $j(x) = \left(2x^2 - 4\right)^{10}$

Antwoord

- $f(x) = (x - 3)(2x + 4) = 2x^2 - 2x - 12$, dus $f'(x) = 4x - 2$ en $f'(1) = 2$.
- Bij functie g kun je niet de al bekende differentieerregels gebruiken om de afgeleide te bepalen. $g'(1)$ bepaal je (nu nog) met de grafische rekenmachine: $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = \text{-}1{,}5$
- Functie h kun je vereenvoudigen:

  $h(x) = \frac{8x - 4x^2}{x - 2} = \frac{\text{-}4x(x-2)}{x-2} = \text{-}4x$ voor $x \neq 2$, dus $h'(x) = \text{-}4$ voor $x \neq 2$ en $h'(1) = \text{-}4$.
- Bij functie j kun je weliswaar in principe de haakjes wegwerken en vervolgens de bekende differentieerregels gebruiken, maar dit is tijdrovend. $g'(1)$ bepaal je (nu nog) met de grafische rekenmachine:

  $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = \text{-}20480$

Opgave 8

Bereken van de volgende functies de afgeleide voor $x = 2$. Doe dit indien mogelijk met behulp van differentiëren. Rond indien nodig af op één decimaal.

a $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x}$

b $g(x) = 2x - 3 \cdot \sqrt[3]{12 - x^2}$

c $h(x) = x(2x - 3)^2$

d $j(x) = 2 \cdot 5^x$

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x - 5}{x + 8}$.

Stel de formule op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Verwerken

Opgave 10

Differentieer de functies.

a $f(x) = 5x^6 - 13x^5 + 10x - 25$

b $g(x) = ax^2 + bx + c$

c $y(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$

d $h(x) = -8x^8 - 88$

e $j(x) = 2ax^3 - 3a^2x + a^3$

f $A(r) = \pi r^2 + l \cdot 2r$

Opgave 11

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{4}{5}x^3 - 3x^2$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b Bereken de hellingswaarde van de grafiek van f voor $x = 5$.

c Welke hoek maakt de raaklijn aan de grafiek van f met de x-as voor $x = 5$ in een cartesisch assenstelsel? Rond af op twee decimalen.

Opgave 12

Bereken van de volgende functies de richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $x = 1$. Doe dit indien mogelijk met behulp van differentiëren.

a $f(x) = x(2x - 3)^2$

b $g(x) = 5(x^2 - 2)^{14}$

c $h(x) = 5 - \sqrt[4]{8(x + 1)}$

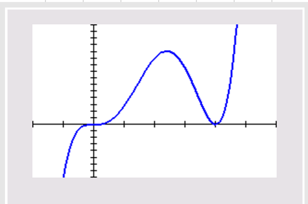
d $j(x) = \frac{2x^2 - 12x + 18}{x - 3}$

Opgave 13

Bekijk de grafiek van $f(x) = x^3(x - 20)^2$.

a In het deel van de grafiek dat in beeld is, bevinden zich drie punten waarin de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is aan de x-as. Bereken de x-coördinaten van die drie punten algebraïsch.

b Waarom heeft de functie f toch maar twee (lokale) extremen?



Figuur 1.8

Opgave 14

Gegeven is functie $f(x) = 6 \cdot 2^{x-1}$. Bereken in één decimaal nauwkeurig de x-coördinaat van het snijpunt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ met de x-as .

Opgave 15

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 13x - 2$.

De lijn $x = -1$ snijdt de grafiek van f in punt A.

a Stel met behulp van differentiëren de formule l op van de raaklijn aan de grafiek van f in A.

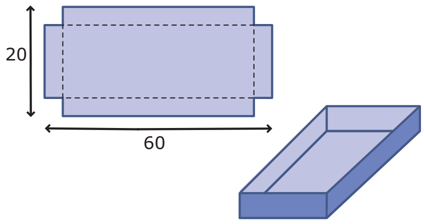
b In hoeveel andere punten van de grafiek heeft de raaklijn aan de grafiek van f dezelfde richtingscoëfficiënt als l?

c In welke punten snijdt in een cartesisch assenstelsel de raaklijn aan de grafiek van f de x-as in een hoek van $45°$?

Toepassen

Opgave 16: Kartonnen bakje

Uit een stuk karton van 20 bij 60 centimeter wordt een bakje gevouwen. Neem voor de hoogte van dit bakje x cm.



Figuur 1.9

a De inhoud I van dit bakje hangt alleen af van x (als er verder niets boven het open bovenvlak mag uitsteken). Stel een bijpassend functievoorschrift $I(x)$ op.

b Bereken algebraïsch in mm nauwkeurig bij welke waarde van x de inhoud van het bakje maximaal is.

Testen

Opgave 17

Differentieer de volgende functies:

a $f(x) = -0{,}5x^4 + 3x$

b $f(x) = 10 - 6x^2 - x^4$

c $f(x) = (x-1)\left(x^2-1\right)$

d $f(x) = ax\left(1-x^2\right)$

e $H(t) = 3p^2 + 4pt^3$

f $y(t) = 20t^2(10-t)(15+t)$

Opgave 18

Het punt (2,7) ligt op de grafiek van $f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

a Controleer deze bewering met een berekening.

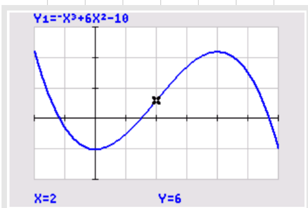
b Bereken algebraïsch de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (2,7).

Opgave 19

Je ziet hier een deel van de grafiek van de functie $y = -x^3 + 6x^2 - 10$.

a De grafiek heeft twee (lokale) extremen. Bereken beide extremen algebraïsch.

b Bereken het punt van de grafiek tussen de twee toppen waarin de hellingswaarde het grootst is.



Figuur 1.10

Practicum

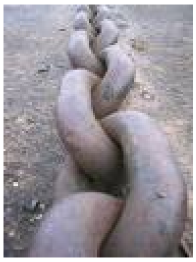
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met behulp van de machtsregel en de somregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.2 De kettingregel

Inleiding

In veel functievoorschriften komen haakjes voor.
Vaak kun je die eenvoudig uitwerken, maar niet altijd.
Met name bij samengestelde functies, zeg maar functies die als een ketting aan elkaar zijn geschakeld, is het uitwerken van haakjes vaak helemaal niet eenvoudig, of zelfs gewoon onmogelijk. Het differentiëren van dergelijke functies vereist een speciale differentieerregel.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de kettingregel voor het differentiëren van samengestelde functies;
- de algemene machtsregel gebruiken bij het differentiëren.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel en de somregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Bij het lozen van olie op zee ontstaat een zich cirkelvormig uitbreidende olievlek.
De straal R (in meter) van die olievlek hangt af van de tijd t (in uren).
Bijvoorbeeld kan gelden: $R = \sqrt{7t}$.

a Waarom is R een samengestelde functie?

b Hoe snel verandert de straal van de olievlek na 3 uur?

c Kun je het antwoord op de vorige vraag met behulp van differentiëren vinden? En hoe dan?

Uitleg 1

Soms bestaat een functievoorschrift uit een serie geschakelde functies.
Bijvoorbeeld: $S(x) = (3x + 1)^2$.
Een functiewaarde $S(x)$ bereken je in twee stappen met functies g en f:

- $g(x) = 3x + 1$
- $f(g(x)) = (g(x))^2$

De functie $S(x) = (3x+1)^2 = (g(x))^2 = f(g(x))$ heet een samengestelde functie of kettingfunctie.

$$x \xrightarrow{g(x)} 3x+1 \xrightarrow{f(g(x))} (3x+1)^2$$

Figuur 2.2

Deze kettingfunctie kun je niet zo maar differentiëren met de machtsregel:
$S'(x) \neq 2(3x+1)^1 = 6x+2$

Dat zie je door bij de functie S eerst de haakjes weg te werken en dan pas te differentiëren.
$S(x) = 9x^2 + 6x + 1$ en $S'(x) = 18x + 6$.

Er is ook een andere manier.

Schrijf $g(x) = 3x + 1 = u$ en $f(u) = u^2$. Dan is $S(x) = f(g(x))$.

Het differentiëren van S gaat als volgt:

- Bepaal de afgeleide van $g(x)$: $g'(x) = 3$
- Bepaal de afgeleide van $f(u)$: $f'(u) = 2u$
- De afgeleide van S is het product van bovenstaande twee afgeleides:
  $S'(x) = g'(x) \cdot f'(u) = 3 \cdot 2u = 6 \cdot (3x+1) = 18x + 6$

In het algemeen geldt dat als $S(x) = f(g(x))$ dan is $S'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Dit is de kettingregel.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Gegeven is de functie: $S(x) = \left(2x^2 + 1\right)^2$.

a Waarom is S een samengestelde functie? Waaraan herken je dat?

b De functie $S(x)$ kan geschreven worden als $S(x) = f(g(x))$. Geef $g(x) = u$ en $f(u)$.

c Bepaal $g'(x)$ en $f'(u)$.

d Bepaal de afgeleide van $S(x)$ met de kettingregel.

Opgave 2

Gegeven is de samengestelde functie $f(x) = 3(x-2)^2 - 2$.

a Ontleed $f(x)$ in afzonderlijke schakels.

b Welke invoerwaarden passen bij de functiewaarde 25?

c Deze functie kun je differentiëren zonder eerst de haakjes uit te werken. Laat zien hoe.

Opgave 3

Gegeven is functie: $g(x) = \left(3x^2 + 2\right)^4$.

a Deze functie kun je zien als een samenstelling van twee functies. Welke twee functies?

b Bepaal met behulp van de kettingregel de afgeleide van g.

Opgave 4

Schrijf de volgende functievoorschriften als een ketting van afzonderlijke functies.

a $y = \sqrt{x^2 - 1}$

b $y = 3x^3 + 1$

c $y = (3x^2 + 2)^4$

Uitleg 2

Door de functie $f(x) = \sqrt{x}$ om te schrijven naar $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ kun je met behulp van de algemene machtsregel deze functie differentiëren:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Het domein van functie f is $[0, \rightarrow\rangle$. Maar bij de afgeleide is $x = 0$ geen toegelaten waarde. De grafiek heeft voor $x = 0$ een verticale raaklijn. Zo'n raaklijn heeft geen richtingscoëfficiënt.

De functie $S(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ kun je omschrijven naar $S(x) = (2x^2 + 1)^{0{,}5}$.
Je kunt hier geen haakjes wegwerken. Ook kun je geen gebruik maken van transformaties. Wel kun je de functie als kettingfunctie beschouwen en met de kettingregel differentiëren.

Schrijf $g(x) = 2x^2 + 1 = u$ en $f(u) = \sqrt{u}$, dan $S(x) = f(g(x))$.

- $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$
- $g'(x) = 4x$

Dus $S'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 4x = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

Opgave 5

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $S(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$.

a Schrijf functie f als een machtsfunctie en differentieer de functie.

b Functie S is een kettingfunctie. Differentieer de functie.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = x^2 + 2$ met $x \geq 0$.

a Schrijf het functievoorschrift op van $h(x) = f(g(x))$.

b Differentieer h.

c Schrijf het functievoorschrift van $k(x) = g(f(x))$ zo eenvoudig mogelijk en differentieer k.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **samengestelde functie** is een functie die uit twee of meer in serie geschakelde functies bestaat.

$$x \xrightarrow{g(x)} u \xrightarrow{f(u)} f(g(x))$$

Figuur 2.3

Voor de afgeleide van een samengestelde functie geldt de **kettingregel**:
Als $S(x) = f(g(x))$ dan is $S'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Ook geldt de **algemene machtsregel**:

Als $f(x) = x^r$ dan is $f'(x) = rx^{r-1}$ voor elke reële waarde van r.

Deze differentieerregel pas je vooral toe bij gebroken functies en wortelfuncties.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $S(x) = \left(x^2 + 2x\right)^4$.

Antwoord

Dit is een samengestelde functie $S(x) = f(g(x))$.

Schrijf $g(x) = x^2 + 2x = u$ en $f(u) = u^4$.

- $f'(u) = 4u^3$
- $g'(x) = 2x + 2$

$$S'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = 4u^3 \cdot (2x + 2) = 4\left(x^2 + 2x\right)^3 \cdot (2x + 2)$$

$$S'(x) = \left(x^2 + 2x\right)^3 \cdot (8x + 8)$$

Opgave 7

Gegeven is de functie: $h(x) = \left(2x^2 + 1\right)^8$.

a Deze functie heeft de vorm $h(x) = f(g(x))$. Schrijf de voorschriften van f en g op.

b Laat zien dat $h'(x) = 32x\left(2x^2 + 1\right)^7$.

Opgave 8

Gegeven zijn de functies: $f(x) = x^4$ en $g(x) = 2x^3 + 4x$.

a Schrijf het functievoorschrift op van $h(x) = f(g(x))$.

b Bepaal de afgeleide van h.

c Schrijf het voorschrift op van de functie $k(x) = g(f(x))$.

d Bepaal de afgeleide van k.

Voorbeeld 2

Differentieer de functies:

- $g(x) = 2x \cdot \sqrt[3]{x}$
- $h(x) = \frac{1}{x}$

Antwoord

- Schrijf g als machtsfunctie:

  $g(x) = 2x \cdot \sqrt[3]{x} = 2x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 2x^{1\frac{1}{3}}$

  Pas de machtsregel toe:

  $g'(x) = 2 \cdot 1\frac{1}{3}x^{1\frac{1}{3}-1} = 2\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} = 2\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

- Schrijf h als machtsfunctie:

  $h(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

  Pas de machtsregel toe:

  $h'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Opgave 9

Differentieer de functies. Schrijf de afgeleiden zonder gebroken en/of negatieve exponenten.

a $f(x) = 2\sqrt{x}$

b $f(x) = x\sqrt{x}$

c $f(x) = 5 \cdot \sqrt[3]{x}$

d $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.
Bereken met behulp van differentiëren de richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) van de raaklijn aan de grafiek van deze functie voor $x = 1$.

Antwoord

Schrijf de wortelvorm als een macht:

$f(x) = \sqrt{9 - x^2} = \left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = (g(x))^{\frac{1}{2}}$

Differentieer f met de kettingregel:

$f'(x) = \frac{1}{2}(g(x))^{\frac{1}{2}-1} \cdot g'(x) = \frac{1}{2}\left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) =$

$-x \cdot \left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$

De gevraagde richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) is:

$f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$

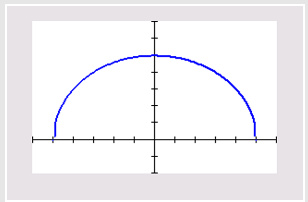
Opgave 10

Gegeven is de functie: $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Bereken met behulp van differentiëren het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van deze functie voor $x = 1$. Geef een exact antwoord.

Opgave 11

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.



Figuur 2.4

- **a** Schrijf het domein en het bereik van f op.
- **b** Bepaal de afgeleide van f.
- **c** Bereken met behulp van de afgeleide het maximum van f.
- **d** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Verwerken

Opgave 12

Differentieer de functies.

- **a** $f(x) = \left(x^2 - 100\right)^4$
- **b** $g(x) = -5 + (1 - x)^3$
- **c** $h(x) = 25(2 - 4x)^3$
- **d** $j(x) = 2p^2x - (px + 3)^4$

Opgave 13

Gegeven is $f(x) = 3 \cdot \sqrt[4]{x}$. Bereken algebraïsch het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 14

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $g(x) = x^2 - x$.

- **a** Schrijf het functievoorschrift op van $h(x) = f(g(x))$.
- **b** Bepaal de afgeleide van h.
- **c** Schrijf het functievoorschrift op van $k(x) = g(f(x))$.
- **d** Bepaal de afgeleide van k.

Opgave 15

Bepaal de afgeleide.

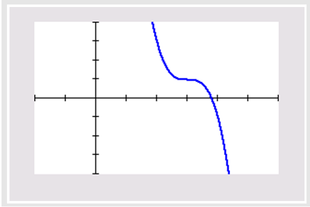
- **a** $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$
- **b** $g(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 1$
- **c** $h(x) = (1 - \sqrt{x})^3$
- **d** $j(x) = 2x - \frac{5}{1-x}$

Opgave 16

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = -(2x - 6)^3 + 4$.

a De grafiek lijkt dalend voor elke waarde van x behalve voor $x = 3$. Toon aan dat dit zo is.

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ snijdt de y-as in punt P. Bereken de coördinaten van P.



Figuur 2.5

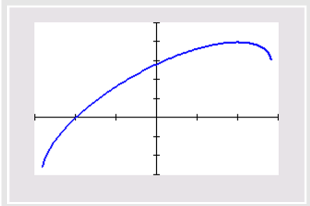
Opgave 17

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x + \sqrt{8 - x^2}$.

a Bepaal exact het domein van f.

b Bereken exact het bereik van f.

c Noem de randpunten van de grafiek van f respectievelijk A en B. Voor welke waarde van x is het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f gelijk aan dat van lijn AB?



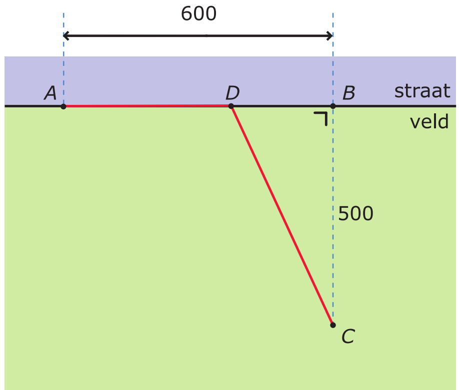
Figuur 2.6

Toepassen

Opgave 18: Waterleiding aanleggen

Vanuit punt A moet een waterleiding gelegd worden naar punt B. Langs de straat bedragen de kosten € 30,00 per meter en door het veld € 70,00 per meter. De lengte van AB is 600 meter en de lengte van BC is 500 meter. Er zijn verschillende mogelijkheden om de waterleiding aan te leggen:

- langs de straat tot aan punt B en vervolgens door het aangrenzende terrein naar punt C;
- direct vanuit A door het veld, in een rechte lijn naar C;
- of een van de vele tussenmogelijkheden: de leiding wordt dan voor een gedeelte langs de straat aangelegd, tot aan punt D, en vervolgens vanaf de straat naar punt C.



Figuur 2.7

a Hoeveel bedragen de kosten als je voor de eerste mogelijkheid kiest?

b Hoeveel bedragen de kosten als je voor de tweede mogelijkheid kiest?

c Bekijk de derde mogelijkheid. Neem voor de lengte van BD de variabele x. Druk nu de kosten voor de aanleg van deze waterleiding uit in x.

d Hoe moet je de waterleiding aanleggen opdat de kosten minimaal zijn? Bereken de minimale kosten met behulp van de afgeleide.

Testen

Opgave 19

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 6(1 + x^2)^3$

b $y(x) = (1 - 4x)^4 + 5$

c $R(t) = \sqrt{\frac{15}{\pi} t}$

d $f(x) = \sqrt{10 + 4x^2}$

e $K(p) = \frac{2}{p\sqrt{p}}$

f $f(x) = x^3 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

Opgave 20

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \sqrt{x + 2}$.

a Als je de grafiek van deze functie op je grafische rekenmachine bekijkt met de standaardinstellingen van het venster, lijkt het wel een rechte lijn te zijn. Wat is het domein van f?

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp deze afgeleide het minimum van f.

d Wat is het bereik van deze functie f?

e Bereken de hellingwaarde van de grafiek van f in het punt waar deze grafiek de y-as snijdt.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de kettingregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.3 De productregel

Inleiding

Als je twee functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ vermenigvuldigt, krijg je een nieuwe functie die de productfunctie van f en g heet. Vaak kun je die producten uitwerken, maar niet altijd. En soms is dit gewoon te bewerkelijk.
Daarom moet je een differentieerregel hebben voor productfuncties $f(x) \cdot g(x)$.

Je leert in dit onderwerp

- productfuncties differentiëren met de productregel.

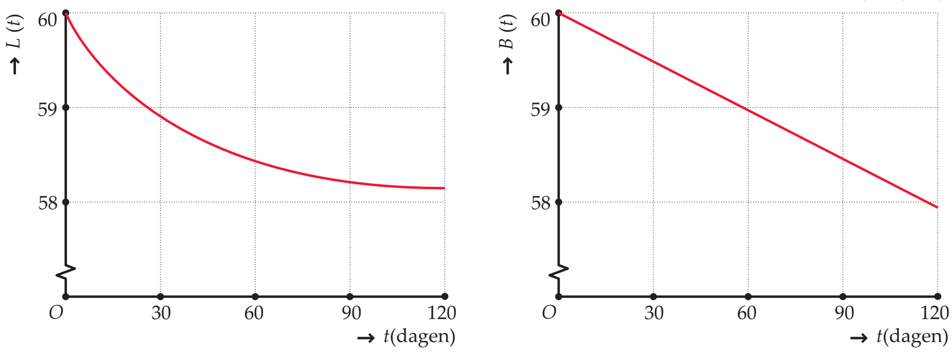
Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel, de somregel en de kettingregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

In deze grafieken zie je hoe de lengte L en de breedte B van een plank van 60 cm bij 60 cm in de loop van de tijd veranderen.



Figuur 3.1

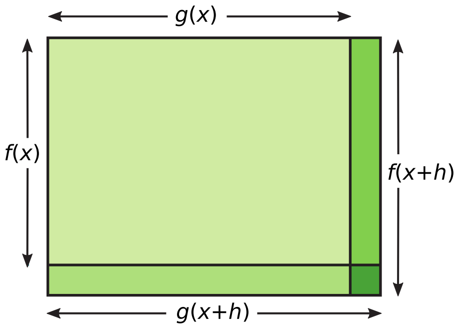
a In welke periode krimpt de plank in de lengte sneller dan in de breedte?

b Op $t = 0$ is de plank vierkant. Tijdens het krimpen verandert de verhouding tussen lengte en breedte. Na hoeveel dagen is de plank opnieuw ongeveer vierkant?

c Op $t = 90$ is de lengte van de plank 58,3 cm en de breedte van de plank 58,5 cm. De plank krimpt dan in de lengte met 0,007 cm per dag en in de breedte met 0,017 cm per dag. Met hoeveel cm per dag verandert de oppervlakte dan?

Uitleg 1

Als de lengte en de breedte van een rechthoek functies van x zijn, dan is de oppervlakte A een productfunctie in x: $A(x) = f(x) \cdot g(x)$
Verander de oppervlakte van deze rechthoek door x te laten toenemen tot $x + h$. De nieuwe oppervlakte is:
$A(x+h) = f(x+h) \cdot g(x+h)$



Figuur 3.2

De toename van $A(x)$ bestaat uit drie rechthoekjes:

- een rechthoekje met een oppervlakte van $f(x) \cdot (g(x+h) - g(x))$
- een rechthoekje met een oppervlakte van $g(x) \cdot (f(x+h) - f(x))$
- een klein vierkantje met oppervlakte $(f(x+h) - f(x)) \cdot (g(x+h) - g(x))$

Deel je die toename door h, dan geldt:

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$
$$\approx f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{(f(x+h)-f(x)) \cdot (g(x+h)-g(x))}{h}$$

Ofwel:

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$
$$\approx f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot h$$

En voor $h \to 0$ is dit:
$A'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$
Dit is de productregel, een differentieerregel om de afgeleide van een productfunctie te bepalen.

Opgave 1

Gegeven is de functie $P(x) = f(x) \cdot g(x)$. Je kunt deze functie opvatten als de oppervlakte van een rechthoek met lengte $f(x)$ en breedte $g(x)$.

a De toename van de oppervlakte op $[x, x+h]$ is

A. $\Delta P = \Delta f(x) \cdot \Delta g(x)$
B. $\Delta P = f(x) \cdot \Delta g(x) + g(x) \cdot \Delta f(x) + \Delta f(x) \cdot \Delta g(x)$
C. $\Delta P = f(x) \cdot \Delta g(x) + g(x) \cdot \Delta f(x)$

Uit de toename van de oppervlakte kun je een regel voor het differentiëren van $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ afleiden.
Stel dat $f(x) = x^2$ en dat $g(x) = x^4$.

b Bepaal met de productregel de afgeleide van de productfunctie.

Uitleg 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$. Met deze twee functies kun je een nieuwe functie maken door het product te nemen van f en g: $P(x) = x^2 \cdot x^3 = x^5$.

De afgeleide van P is $P'(x) = 5x^4$. Dit is niet gelijk aan $f'(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3$.
In het algemeen geldt dat de afgeleide van het product van twee functies niet gelijk is aan het product van de afgeleide van de functies. Door het vereenvoudigen van het product van f en g kun je met behulp van de machtsregel de afgeleide bepalen.

Je kunt ook de productregel gebruiken:
$P'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 5x^4$

Vaak kun je de productregel vermijden door eerst haakjes uit te werken. Helaas kan dit niet altijd.

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^5$.

a Schrijf de productfunctie $P(x)$ van deze twee functies zo kort mogelijk.

b Bepaal $P'(x)$.

c Ga na dat je de afgeleide ook kunt bepalen met de productregel.

Opgave 3

De functie $A(x) = 6x^2\left(x^3 - 5x\right)$ kun je opvatten als een productfunctie van f en g.

a Geef de functievoorschriften van f en g.

b Bepaal de afgeleide van A met behulp van de productregel.

c Differentieer de functie door de haakjes weg te werken.

Opgave 4

Gegeven is de functie: $h(x) = (3x - 2) \cdot \sqrt{x}$

a Je kunt functie h zien als het product van twee functies. Welke twee?

b Bepaal $h'(x)$ met behulp van de productregel.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een product van twee functies geldt de **productregel**:
Als $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ dan is $P'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, vaak kun je haakjes wegwerken.

De productregel gebruik je vaak in combinatie met de voorgaande differentieerregels. Met name in combinatie met de kettingregel.

Voorbeeld 1

Differentieer met de productregel de functie:
$P(x) = \left(x^3 - 6x^2\right)\left(x^4 - 1\right)$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $f(x) = x^3 - 6x^2$ waarvoor geldt: $f'(x) = 3x^2 - 12x$.
- $g(x) = x^4 - 1$ waarvoor geldt: $g'(x) = 4x^3$.

De afgeleide van P vind je door de productregel toe te passen:

$P'(x) = \left(3x^2 - 12x\right)\left(x^4 - 1\right) + \left(x^3 - 6x^2\right)\left(4x^3\right)$

En na haakjes wegwerken: $P'(x) = 7x^6 - 36x^5 - 3x^2 + 12x$.

Je kunt ook direct de haakjes van functie P wegwerken.

Opgave 5

De functie $f(x) = x^2\left(x^3 - 4x\right)$ kun je opvatten als een productfunctie van u en v.

a Schrijf de voorschriften van u en v op.

b Bepaal de afgeleide van f met behulp van de productregel.

c Differentieer de functie door de haakjes weg te werken.

Voorbeeld 2

Differentieer de functie: $h(x) = x(2x+1)^3$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $f(x) = x$ waarvoor geldt: $f'(x) = 1$.
- $g(x) = (2x+1)^3$ waarvoor geldt: $g'(x) = 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 2$
  Gebruik de kettingregel.

De afgeleide van h vind je door de productregel toe te passen:

$h'(x) = 1 \cdot (2x+1)^3 + x \cdot 3 \cdot (2x+1)^2 = (2x+1)^3 + 6x(2x+1)^2$

Je kunt ook eerst de haakjes van functie h wegwerken en zonder productregel differentiëren.

Opgave 6

De functie $f(x) = \left(x^2 + 3x\right)\left(x^2 + 10\right)^3$ kun je opvatten als een productfunctie van u en v.

a Schrijf de voorschriften van u en v op.

b Bepaal de afgeleide van $u(x)$.

c Bepaal de afgeleide van $v(x)$.

d Bepaal met de productregel de afgeleide van f. Je hoeft niet te herleiden.

Opgave 7

Bepaal de afgeleide van $g(x) = (2x + 5) \cdot \sqrt{3x + 4}$.

Opgave 8

Bepaal de afgeleide van $g(x) = \left(3x^2 + 5\right)(7x + 5)^4$.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$.
Stel met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn op aan de grafiek in het punt $(0{,}0)$.

Antwoord

De afgeleide vind je met behulp van de productregel (en de kettingregel):

$f(x) = x \cdot \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 1 \cdot \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

Omdat je hier alleen $x = 0$ moet invullen, is verder herleiden niet nodig: $f'(x) = 1$.

De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in $(0{,}0)$ is: $y = x$.

Opgave 9

Gegeven is functie $f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 4}$. Stel met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(0{,}0)$ op.

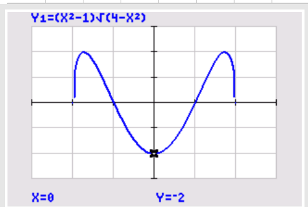
Opgave 10

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \left(x^2 - 1\right) \cdot \sqrt{4 - x^2}$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Bereken met behulp van de afgeleide algebraïsch de extremen van f.

c De grafiek van f gaat door het punt $(1{,}0)$. Stel een exacte vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in dit punt.



Figuur 3.3

Verwerken

Opgave 11

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = \left(x^3 + 6\right)\left(4x^2 - 5x\right)$

b $g(x) = (10 - x) \cdot \sqrt{x}$

c $h(x) = 3x(x + 5)^4$

d $j(x) = x \cdot \sqrt{5 + x^2}$

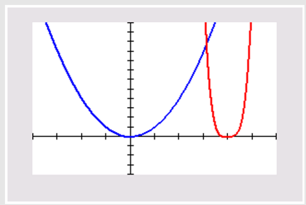
e $k(x) = x - \sqrt{5 + x^2}$

Opgave 12

Stel met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn op aan de grafiek van $f(x) = 2x \cdot (4-3x)^5$ in het punt $(0,0)$.

Opgave 13

Bekijk de grafieken van de functies $y_1(x) = x^2$ en $y_2(x) = (2x-8)^4$. De functie $f(x) = y_1(x) \cdot y_2(x)$ is de productfunctie van beide.



Figuur 3.4

- **a** De nulpunten van f kun je uit de gegeven grafieken afleiden. Welke nulpunten heeft de grafiek van f?
- **b** Toon aan dat $f'(x) = (2x-8)^3(12x^2-16x)$.
- **c** Bepaal met behulp van de afgeleide de extremen van f. Rond indien nodig af op gehelen.
- **d** Voor welke waarden van k heeft de vergelijking $f(x) = k$ precies vier oplossingen? Rond af op gehelen.

Opgave 14

Differentieer.

- **a** $f(x) = ax^2 \cdot \left(a+4x^3\right)^4$
- **b** $V(r) = \left(100 - \frac{5}{r}\right)(20-r)^2$
- **c** $A(z) = 2\pi \cdot z \cdot (1-\sqrt{z})^5$

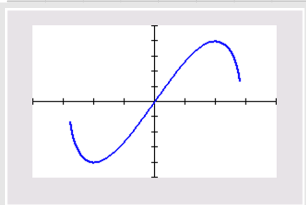
Opgave 15

Gegeven is de functie: $f(x) = 4x\sqrt{x} \cdot (1-x)^3$.

- **a** Toon aan dat $f'(x) = (1-x)^2 \cdot (6\sqrt{x} - 18x\sqrt{x})$.
- **b** Voor welke waarden van x heeft de grafiek van f een raaklijn evenwijdig aan de x-as?
- **c** Deze functie heeft twee extremen. Welke twee? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 16

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x \cdot \sqrt{8-x^2}$.



Figuur 3.5

- **a** Bereken exact de nulpunten van f.
- **b** Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f.
- **c** Stel een exacte vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(0,0)$.

Opgave 17

Gegeven is de functie: $f(x) = 0{,}25x^2 - x\sqrt{x}$.

- **a** Bereken algebraïsch het bereik van f.
- **b** Voor welke p is de lijn met vergelijking $y = 2x + p$ een raaklijn aan de grafiek van f?

Testen

Opgave 18

Bepaal de afgeleide van de volgende functies:

a $f(x) = 6x\left(1 + x^2\right)^3$

b $H(t) = t \cdot \sqrt{1 - t^2}$

c $y(x) = (ax - 4)^2(6 - x)^3$

d $g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

Opgave 19

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x\sqrt{x} + 4x$.

a Bepaal de nulwaarden van f.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

Opgave 20

Gegeven is de functie $f(x) = x\left(x^2 - 10\right)^3$.

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

2.4 De quotiëntregel

Inleiding

Als je twee functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ deelt, krijg je een nieuwe functie die de quotiëntfunctie van f en g heet. Soms kun je die quotiënten uitwerken, maar meestal niet.
Daarom moet je een differentieerregel hebben voor quotiëntfuncties $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Je leert in dit onderwerp

- de regel voor het differentiëren van quotiëntfuncties;
- alle differentieerregels door elkaar gebruiken en toepassen.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel, de somregel, de kettingregel en de productregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Een gebroken functie (quotiëntfunctie) heeft de vorm $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$.

a Laat met een voorbeeld zien dat in het algemeen NIET geldt: $f'(x) = \frac{t'(x)}{n'(x)}$.

b Hoe bepaal je de afgeleide van $f(x) = \frac{1}{x}$?

Je kunt de functie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ schrijven als $f(x) = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$.

c Bepaal nu met behulp van de productregel en de kettingregel de afgeleide van f.

Uitleg

Als een deling niet uitkomt, blijft er een breuk over. Ook bij functies kan dit voorkomen:

- $f(x) = \frac{3x^5}{2x^2}$ is een deling van $t(x) = 3x^5$ en $n(x) = 2x^2$. Deze deling is echter te vereenvoudigen (mits $x \neq 0$) tot $f(x) = 1{,}5x^3$.
- $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$ is een deling van $t(x) = x^2$ en $n(x) = x - 1$ die niet te herleiden is tot een machtsfunctie. Er blijft altijd een vorm met een gebroken functie over.

Een functie die bestaat uit een deling (quotiënt) van twee functies heet een quotiëntfunctie.

Functie f kun je na de vereenvoudiging differentiëren.
Bij functie g ligt dat anders. Je kunt zo de afgeleide bepalen:

- Schrijf de functie als: $g(x) = x^2 \cdot (x-1)^{-1}$.
- Pas de productregel en kettingregel toe:

$$g'(x) = 2x \cdot (x-1)^{-1} + x^2 \cdot -1(x-1)^{-2} = \frac{2x}{x-1} - \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

Je kunt een gebroken functie differentiëren. Je krijgt een vorm met twee breuken. Die kun je gelijknamig maken en optellen:

$$g'(x) = \frac{2x}{x-1} - \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}$$

Het kan sneller met de volgende regel:

Als $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ dan is $f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

Dit is de quotiëntregel. Je kunt die regel zelf vinden door $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$ te schrijven en daarop de productregel toe te passen. Een mooie puzzel...

Opgave 1

Gegeven is: $g(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = \frac{x^2}{x-1}$.

a Bepaal de afgeleide van $t(x)$ en $n(x)$.

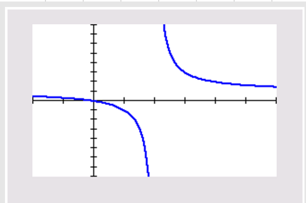
b Bereken de afgeleide met de quotiëntregel en herleid hem zo ver mogelijk.
Krijg je hetzelfde als met de productregel en de kettingregel?

Opgave 2

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Dit is een quotiëntfunctie.

a Wat is de teller en wat de noemer van deze functie?

b Herschrijf de functie en bepaal de afgeleide met de productregel en de kettingregel.



Figuur 4.1

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een quotiënt van twee functies geldt de **quotiëntregel**:

Als $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (met $g(x) \neq 0$) dan is $Q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

De functie f is de teller van de breuk, de functie g is de noemer van de breuk.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, soms kun je een deling vereenvoudigen.
De quotiëntregel komt vaak in combinatie met andere differentieerregels voor. Met name in combinatie met de kettingregel.

Voorbeeld 1

Differentieer $g(x) = \frac{2x^2}{x-4}$ met behulp van de quotiëntregel.

Antwoord

Bekijk eerst de teller en de noemer afzonderlijk:

- $t(x) = 2x^2$ met $t'(x) = 4x$.
- $n(x) = x - 4$ met $n'(x) = 1$.

Dus: $g'(x) = \frac{4x \cdot (x-4) - 2x^2 \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 16x}{(x-4)^2}$.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x}{x-2}$ uit de vorige opgave nog eens. Je hebt de afgeleide bepaald met behulp van de product-regel en de kettingregel. In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de quotiënt-regel voor differentiëren kunt gebruiken om van dergelijke functies de afgeleide te bepalen.

a Bepaal de afgeleide van f met de quotiëntregel.

b De afgeleide bij de vorige opgave en die bij deze opgave zouden natuurlijk hetzelfde moeten zijn. Ga na dat dit inderdaad zo is.

Opgave 4

Gegeven is de functie f door $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

a Bepaal van deze functie de afgeleide met behulp van de quotiënt-regel.

b Bepaal de afgeleide zonder de quotiëntregel toe te passen.

Opgave 5

Differentieer $g(x) = \frac{3x^2}{2x-1}$ met behulp van de quotiëntregel.

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $f(x) = \frac{5x-10}{\sqrt{4+x^2}}$.

Antwoord

Noem de teller $t(x)$ en de noemer $n(x)$ en pas de quotiëntregel toe:

- $t(x) = 5x - 10$ met $t'(x) = 5$.
- $n(x) = \sqrt{4 + x^2} = \left(4 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ met $n'(x) = \frac{1}{2}\left(4 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$.

Dus: $f'(x) = \frac{5 \cdot \sqrt{4+x^2} - (5x-10) \cdot \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2}$.

Vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{4 + x^2}$ om de breuk uit de teller te halen:

$f'(x) = \frac{5 \cdot (4+x^2) - (5x-10) \cdot x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{20+10x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$

Opgave 6

Differentieer de functies. Gebruik de handigste manier om te differentiëren.

a $f(x) = \frac{3x^2-4}{2x+1}$

b $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$

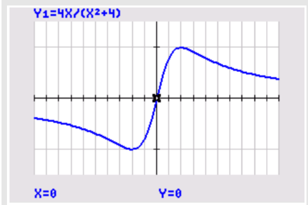
c $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{4+x^2}}$

d $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Voorbeeld 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$.

Er zijn twee extremen. Bereken die met behulp van de afgeleide van f.



Figuur 4.2

Antwoord

De afgeleide is: $f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2+4) - 4x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$.

Los de vergelijking $f'(x) = 0$ op. Een breuk kan alleen op 0 uitkomen als de teller 0 is (en de noemer niet).

Dit betekent dat $-4x^2 + 16 = 0$.
De oplossing van deze vergelijking is: $x = -2 \vee x = 2$ (de noemer wordt bij die waarden niet 0).

De extremen zijn: max. $f(2) = 1$ en min. $f(-2) = -1$.

Opgave 7

Gegeven is de functie $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Bereken de extremen van f met behulp van de afgeleide.

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$.

a Bereken de extremen van f met behulp van differentiëren. Geef benaderingen in twee decimalen.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Verwerken

Opgave 9

Differentieer.

a $f(x) = \frac{x+1}{x^2-16x}$

b $g(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$

c $h(x) = \frac{2x^3-10x^2+60x+120}{x}$

d $j(x) = \frac{2x}{x^2-10}$

e $k(x) = \frac{-4}{1-3x^2}$

f $l(x) = 200x + 400 + \frac{2000}{x}$

Opgave 10

Gegeven is functie: $f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$.

a Bereken exact de extremen van f.

b Stel exact de formule op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 11

Differentieer.

a $H(t) = \frac{\sqrt{2t+6}}{3t}$

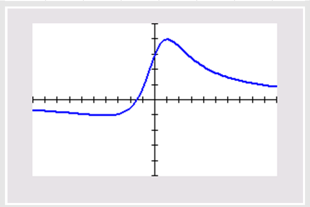
b $I(x) = \frac{2\pi x-5}{\pi^2-3x^2}$

c $A(r) = \frac{2r}{\sqrt{4r+8}}$

d $T(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

Opgave 12

Bekijk de grafiek van functie f. Het functievoorschrift is $f(x) = \frac{8x+12}{x^2+4}$.



Figuur 4.3

a Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.

b Los exact op: $f(x) < \frac{3}{2}$.

c De grafiek van f snijdt de x-as in punt A en de y-as in punt B. Laat zien dat de lijn AB de raaklijn aan de grafiek van f is in punt B.

Opgave 13

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{(x+3)^3}{3x^2}$

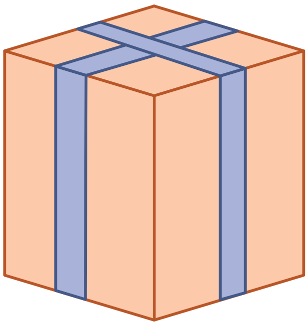
a Toon aan dat $f'(x) = \frac{(x-6)(x+3)^2}{3x^3}$.

b Bereken algebraïsch het (lokale) minimum van f.

Toepassen

Opgave 14: Verpakking

De afdeling Verpakking van een bedrijf heeft de opdracht gekregen balkvormige doosjes te maken waarvan de lengte vier keer zo groot is als de breedte. Om elke doos worden twee zijden sierlinten aangebracht zoals je in de tekening ziet. De inhoud van de doosjes moet 1 liter zijn. Het bedrijf wil het verbruik van het sierlint zo klein mogelijk houden.


Figuur 4.4

a Stel een formule op voor de lengte L van het benodigde sierlint als functie van de breedte x van de doos.

b Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het doosje de lengte van het sierlint zo klein mogelijk is. Geef je antwoord in millimeter nauwkeurig.

Opgave 15: Gelijkstroomcircuit

Een gelijkstroomcircuit bestaat uit een 12 volts batterij met een inwendige weerstand van 12 ohm en een variabele weerstand van R (ohm). Het vermogen P (in watt) dat door dit circuit wordt opgewekt, wordt gegeven door $P = RI^2$. De stroomsterkte I wordt daarin gegeven door $I = \frac{12}{R+12}$.

a Druk het ontwikkelde vermogen uit in R, de variabele weerstand.

b Bereken het maximaal ontwikkelde vermogen met behulp van differentiëren.

Testen

Opgave 16

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = \frac{2x+5}{1-x}$

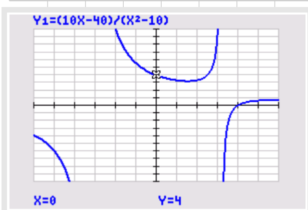
b $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$

c $H(t) = \frac{1}{1+\frac{1}{t}}$

d $y(x) = \frac{x^4+1}{(1+x^2)^4}$

Opgave 17

Je ziet hier een deel van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{10x-40}{x^2-10}$.



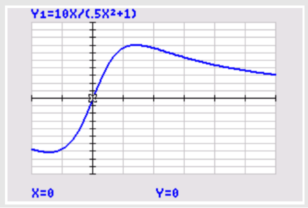
Figuur 4.5

a Bereken met behulp van de afgeleide de extremen van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Het punt (0,4) ligt op de grafiek van f. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in dat punt.

Opgave 18

Dit is een deel van de grafiek van $f(x) = \frac{10x}{0{,}5x^2+1}$.



Figuur 4.6

a Bereken exact de twee extremen van functie f.

b Bepaal de grootste waarde die de richtingscoëfficiënt van een raaklijn in een punt van de grafiek van f kan hebben.

Practicum

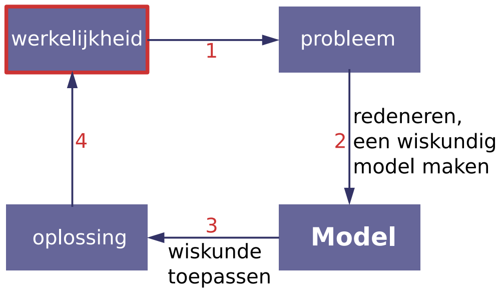
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met alle differentieerregels**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.5 Toepassingen

Inleiding

Een ‘model’ is een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid.
In de wetenschap wordt veel met modellen gewerkt omdat de werkelijkheid te complex is om zonder meer te beschrijven. Door niet belangrijke details weg te laten (verstandige aannames te doen) kan een model worden opgesteld dat met wiskundige middelen is te beschrijven en door te rekenen. Uit het doorrekenen van het model worden conclusies getrokken die dan weer kunnen worden vergeleken met de realiteit.
Bij het werken met modellen gaat het vaak om het berekenen van extremen, om ‘optimaliseringsproblemen’. Daarbij wordt het differentiëren toegepast. En er zijn nog andere toepassingen van differentiëren...



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met rekenmodellen waarin het differentiëren kan worden toegepast om extremen te berekenen;
- rekenregels voor differentiëren gebruiken om die extremen te berekenen.

Voorkennis

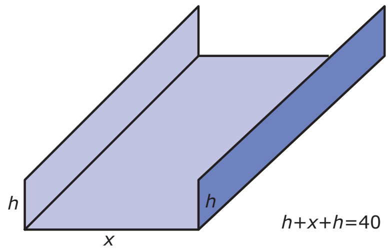
- differentiëren met alle differentieerregels;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Een Nederlands bedrijf maakt goten voor bevloeiing van akkers in een ontwikkelingsland. Die goten worden gemaakt door vlakke platen kunststof te buigen. Die platen zijn 2 meter lang en 40 centimeter breed. Ze worden zo gebogen dat een goot ontstaat van 2 meter lang met als dwarsdoorsnede (in de breedterichting) een rechthoek.

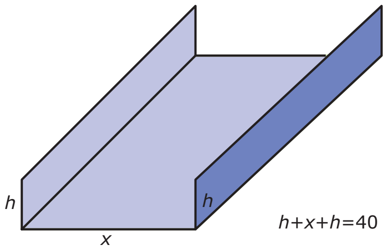
Hoeveel water kan zo'n goot maximaal bevatten?



Figuur 5.2

Uitleg

Een Nederlands bedrijf maakt goten voor bevloeiing van akkers in een ontwikkelingsland. Die goten worden gemaakt door vlakke platen kunststof te buigen. Die platen zijn 2 meter lang en 40 centimeter breed. Ze worden zo gebogen dat een goot ontstaat van 2 meter lang met als dwarsdoorsnede (in de breedterichting) een rechthoek. De vraag is hoe je er voor kunt zorgen dat er zoveel mogelijk water in deze goot kan.



Figuur 5.3

Stel een wiskundig model op:
Neem aan dat elke goot een zuivere balk is en dat de hoeveelheid water die er in past gelijk is aan de inhoud van die balk. De twee bepalende variabelen zijn de breedte x en de hoogte h van de goot. Neem beide in centimeter. De eis is dat de inhoud van de goot maximaal moet zijn.
Voor de inhoud van deze balk geldt: $I = x \cdot 200 \cdot h = 2xh$.
Voor de hoogte van de balk geldt: $h = 20 - 0{,}5x$.
Ga dat na.

Als je in de formule voor I de uitdrukking invult voor h, dan geeft dit: $I(x) = 4000x - 100x^2$.

Met behulp van differentiëren of met de grafische rekenmachine vind je dat voor $x = 20$ cm en $h = 10$ cm de totale inhoud maximaal is.

Dit heet optimaliseren; voor een wiskundig model wordt gezocht naar een extreme (maximale of minimale) waarde.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**.

a Welke aannames worden er gedaan?

b Hoe bepaal je de formule voor de hoogte van de balk?

c Laat zien hoe je de formule voor $I(x)$ kunt afleiden.

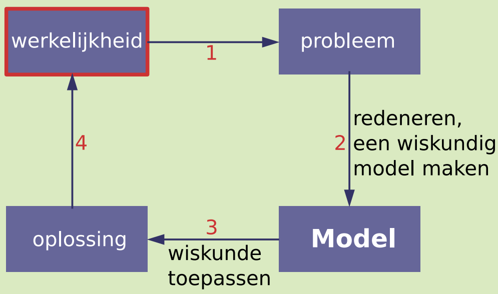
d Bepaal de afgeleide van $I(x)$ en bereken de waarde van x waarvoor $I(x)$ maximaal is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **wiskundig model** is een vereenvoudiging van de werkelijkheid op grond van verstandige aannames.

Optimaliseren is het minimaliseren of maximaliseren van een functie in een wiskundig model. Je bepaalt de maximale of de minimale oplossing. Je doet dit met behulp van differentiëren of met de grafische rekenmachine. Bij differentiëren gebruik je de differentieerregels.



Figuur 5.4

Voorbeeld 1

Een fabriek maakt kartonnen pakken voor vruchtensap in de vorm van een balk met een vierkant grondvlak. Het pak heeft een inhoud van 1,5 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat er zo min mogelijk karton wordt gebruikt, dan blijven de kosten namelijk laag. Wat zijn de optimale afmetingen van het pak?

Antwoord

Stel een wiskundig model op. Neem aan dat elk pak een zuivere balk is met een vierkant grondvlak en dat de benodigde hoeveelheid karton gelijk is aan de totale oppervlakte van het pak. De twee bepalende variabelen zijn de breedte van het grondvlak b en de hoogte h. Neem beide in centimeter.
Gegeven is de inhoud van een pak ($1{,}5$ L $= 1500$ cm^3), de eis is dat de oppervlakte minimaal moet zijn.
Voor de inhoud van de balk geldt: $I = b^2h$.
Voor de oppervlakte van de balk geldt: $A = 2b^2 + 4bh$.

Met $I = 1500$ vind je $b^2h = 1500$ en dus: $h = \frac{1500}{b^2}$.

Vul in de formule voor A deze uitdrukking in voor h. Dit geeft: $A(b) = 2b^2 + \frac{6000}{b}$.

Met behulp van differentiëren of de grafische rekenmachine vind je dat voor $b \approx 11{,}45$ cm en $h \approx 11{,}47$ cm de totale oppervlakte minimaal is.

Opgave 2

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Hoe kom je aan de formule voor de oppervlakte van het pak?

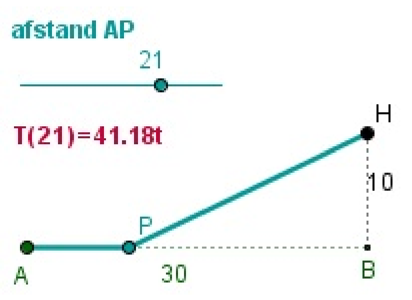
b Laat zien hoe je de formule voor $A(b)$ kunt afleiden.

c Bepaal de afgeleide van $A(b)$ en bereken met behulp daarvan de waarde van b waarvoor $A(b)$ minimaal is.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: leidingaanleg

Bekijk de figuur. Vanuit het aansluitingspunt A moet naar punt H van een woonhuis een nieuwe leiding worden gegraven. Het graven en weer dichtmaken van een sleuf in de tuin kost 1,5 keer zo veel tijd als datzelfde werk langs de wegkant AB. Hoe moet er worden gegraven om alles zo snel mogelijk te doen?



Figuur 5.5

Antwoord

Neem x voor de lengte van BP.

Ga na dat dan $30 - x$ de lengte van AP en $\sqrt{x^2 + 100}$ de lengte van PH is.

Als t de benodigde tijd per meter langs de weg is, is $1{,}5t$ de benodigde tijd per meter door de tuin.

De totale benodigde tijd T is daarom:

$T(x) = t(30 - x) + 1{,}5t\sqrt{x^2 + 100}$.
Bepaal de waarde van x waarvoor T maximaal is door de afgeleide gelijk te stellen aan 0.

$T(x) = t\left(30 - x + 1{,}5\sqrt{x^2 + 100}\right)$ geeft $T'(x) = t\left(-1 + \frac{1{,}5x}{\sqrt{x^2+100}}\right)$.

$$\begin{aligned} T'(x) = t\left(-1 + \frac{1{,}5x}{\sqrt{x^2+100}}\right) &= 0 \\ -1 + \frac{1{,}5x}{\sqrt{x^2+100}} &= 0 \\ \sqrt{x^2+100} &= 1{,}5x \\ 1{,}25x^2 &= 100 \\ x &= \sqrt{80} \approx 8{,}94 \end{aligned}$$

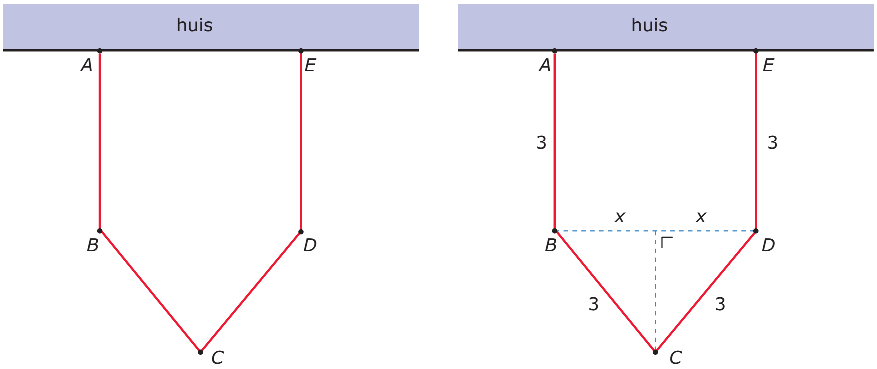
Er moet $21{,}06$ meter langs de wegkant worden gegraven en vandaar rechtstreeks door de tuin naar het woonhuis.

Opgave 3

Bekijk de gegevens uit **Voorbeeld 2**. Ga nu uit van de situatie waarin de benodigde tijd om door de tuin te gaan $2t$ is in plaats van $1{,}5t$. Bepaal hoe de leiding gelegd moet worden, zodat het zo snel mogelijk verloopt.

Opgave 4

Iemand wil een serre aan zijn huis bouwen met vier even grote rechthoekige kozijnen. Elk kozijn is $2{,}5$ meter hoog en 3 meter breed. Hij bestudeert de mogelijke opstellingen waarbij twee kozijnen AB en DE loodrecht op de muur worden bevestigd. De andere twee BC en CD worden zo geplaatst dat de vloeroppervlakte van de serre maximaal wordt.



Figuur 5.6

a Stel een formule op voor de vloeroppervlakte $A(x)$ (m^2) van de serre.

b Bepaal $A'(x)$. Geef aan welke differentieerregels je gebruikt.

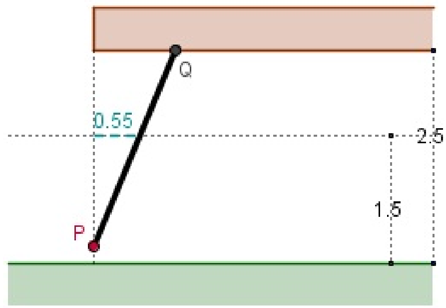
c Voor welke x is de vloeroppervlakte maximaal?

d Hoe groot is de maximale vloeroppervlakte ongeveer?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: garagedeur

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een garage met een garagedeur (in figuur PQ). Bij het openen van de deur gaat de onderkant recht omhoog, terwijl de bovenkant langs het plafond horizontaal naar binnen gaat. Binnen in de garage moet dus voldoende ruimte zijn om te zorgen dat een auto niet beschadigd raakt door de naar binnen komende deur. De garagedeur is $2{,}50$ m hoog en je auto is $1{,}50$ m hoog. Hoe ver komt de deur op die hoogte van $1{,}50$ m maximaal naar binnen?



Figuur 5.7

Antwoord

Noem de afstand van P tot het plafond x en de afstand die de deur op een hoogte van $1{,}50$ m naar binnen komt A, beide in m. Je kunt dan met behulp van gelijkvormige rechthoekige driehoeken afleiden:

$$A(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\sqrt{2{,}5^2 - x^2}$$

Door $A'(x) = 0$ op te lossen vind je: $x \approx 1{,}84$ m.
En omdat $A(1{,}84) \approx 0{,}77$ m, komt de garagedeur op een hoogte van $1{,}50$ m zo'n 77 cm naar binnen.

Opgave 5

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 3**.

a Probeer eerst om (zonder naar het antwoord te kijken) zelf een oplossing te vinden.

b Bekijk nu de oplossing die wordt gegeven. Als je zelf een andere of geen oplossing hebt gevonden, probeer dan zelf de formule voor $A(x)$ af te leiden.

c Bereken met behulp van differentiëren voor welke x de waarde van A maximaal is.

Voorbeeld 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - x$ en $g(x) = \frac{5}{x+2}$.
De lijn $x = p$ met $-1 < p < 3$ snijdt de grafieken van deze functies in de punten A en B.

Voor welke exacte waarde van p is de lengte van lijnstuk AB maximaal?

Antwoord

De lengte van AB is $L(p) = 4 - p - \frac{5}{p+2}$.

$L'(p) = -1 + \frac{5}{(p+1)^2} = 0$ geeft $(p+1)^2 = 5$ en $p = \sqrt{5} - 1 \vee p = -1 - \sqrt{5}$ (vervalt).

Met behulp van de grafiek of een tekenschema zie je dat je te maken hebt met een maximum.

De lengte AB is maximaal als $p = \sqrt{5} - 1$.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies $f(x) = x - 4$ en $g(x) = \frac{1}{8}(0{,}5x - 2)^5$.

De lijn $x = p$ met $4 < p < 8$ snijdt de grafieken van deze functies in de punten C en D.

Voor welke waarde van p is de lengte van lijnstuk CD maximaal? Rond af op twee decimalen.

Opgave 7

Gegeven zijn de functies f en g door $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$.
De lijn $x = p$ met $0 < p < 1$ snijdt de grafieken in de punten A en B.

Voor welke waarde van p is de lengte van lijnstuk AB maximaal?

Opgave 8

Lijn $x = p$ met $0 < p < 2$ snijdt de x-as in punt A en de grafiek van $f(x) = 4 - x^2$ in punt B. Bereken exact wat de grootst mogelijke oppervlakte van rechthoek $ABCD$ is waarbij punt C op de grafiek van f ligt en punt D op de x-as.

Verwerken

Opgave 9

Op rechthoekige vellen papier van 1 m^2 worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte.
Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

a Maak zelf een schets van de situatie met de gegevens er in.

b Probeer eerst zelf het probleem op te lossen. Kijk pas als dat niet lukt naar c en d.

c Neem aan dat de breedte van zo'n poster wordt voorgesteld door x dm. Leid een formule af voor de oppervlakte A van het bedrukte deel als functie van x.

d Bereken met behulp van differentiëren de waarde van x waarvoor $A(x)$ maximaal is.

e Beantwoord tenslotte de aan het begin gestelde vraag.

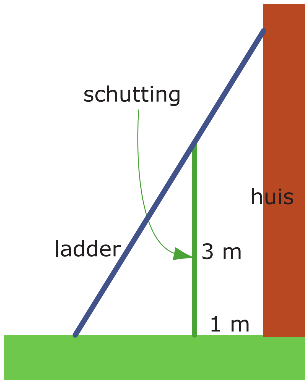
Opgave 10

Hoe lang zijn de zijden van de gelijkbenige driehoek met de grootste oppervlakte die een omtrek heeft van 20 cm?

Opgave 11

Iemand wil een ladder kopen om zijn dakgoten schoon te maken. Vlak naast zijn huis op 1 m van de muur staat echter een schutting van 3 m hoog.

Hoe lang moet een ladder minstens zijn om over de schutting tegen de muur van het huis te komen?
(Ga er van uit dat zowel de muur van het huis als de schutting loodrecht op de vlakke grond staan.)



Figuur 5.8

Opgave 12

In een rechthoekig Oxy-assenstelsel snijdt lijn $x = p$ met $p > 0$ de grafiek van $f(x) = 4 - x^2$ in punt P.

a Bereken de minimale waarde die lijnstuk OP kan aannemen.

Neem nu aan dat $0 < p < 2$. De lijn $x = p$ snijdt de x-as in A en van de rechthoek $APQB$ liggen de punten P en Q op de grafiek van f en ligt punt B ook op de x-as.

b Bereken de maximale waarde die de oppervlakte van rechthoek $APQB$ kan aannemen.

Opgave 13

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = \sqrt{10 - 2x}$ op het domein $[0,5]$. De lijn $x = k$ (met $0 < k < 5$) snijdt de x-as in punt A en de grafiek van f in punt B.

a Toon aan dat de oppervlakte A van rechthoek $OABC$ gelijk is aan: $A(k) = k\sqrt{10 - 2k}$.

b Bepaal met behulp van differentiëren voor welke k de oppervlakte van rechthoek $OABC$ zo groot mogelijk is.

Opgave 14

Gegeven is de familie van functies f_p door $f_p(x) = \frac{x^2+p}{x}$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f_p als $p = 1$.

b Voor welke waarden van p heeft f_p geen extremen?

c Voor welke waarden van p heeft de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ een richtingscoëfficiënt van - 1?

Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $f(x) = \left(x^2 - x\right)^4$.

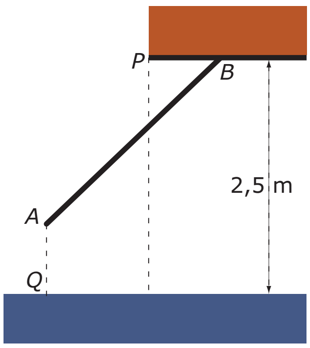
a Bereken exact de extremen van f.

b De lijn met vergelijking $x = k$ met $0 < k < 1$ snijdt de x-as in punt A en de grafiek van f in punt B. Voor welke exacte waarde van k is de oppervlakte van ΔOAB maximaal?

Opgave 16

Bekijk de figuur van een bewegende garagedeur. De hoogte van punt A (de onderkant van de deur) boven de grond is in elke stand even groot als de lengte van PB.

Bereken algebraïsch hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Geef je antwoord in meter. Rond af op twee decimalen.



Figuur 5.9

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Optimaliseren**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- somregel — constante-regel — machtsregel voor gehele positieve n
- samengestelde functie (kettingfunctie) — kettingregel — algemene machtsregel
- productfunctie — productregel
- gebroken functie — quotiëntregel
- modelcyclus — optimaliseren

Activiteitenlijst

- differentiëren met de basisregels
- differentiëren met de kettingregel en de algemene machtsregel
- differentiëren met de productregel
- differentiëren met de quotiëntregel
- toepassingen van differentiaalrekening: optimaliseringsproblemen

Achtergronden

De grootste wiskundige prestatie van de achttiende eeuw was de ontwikkeling van de ‘calculus’, van de ‘analyse’. Daarbij gaat het om differentiaal- en integraalrekening, de functietheorie en alles wat daaruit voortvloeide. De belangrijkste rol daarin werd vervuld door **Leonhard Euler (1707—1783)**. Euler leerde de wiskunde in Basel van **Johann Bernoulli (1667—1748)** en werd in 1773 opvolger van **Daniël Bernoulli (1700—1782, zoon van Johann Bernoulli)** als hoogleraar in St. Petersburg.

Figuur 6.1 Leonhard Euler

Vooral dankzij een fenomenaal geheugen (hij kende bijvoorbeeld de eerste zes machten van de eerste 100 priemgetallen uit zijn hoofd evenals alle formules uit de trigonometrie en de analyse en een grote hoeveelheid gedichten) kon hij zelfs toen hij volslagen blind was zijn onvoorstelbare productiviteit op het gebied van de wiskunde en de mathematische fysica handhaven. Met ‘Introductio in Analysin Infinitorum’ schreef hij in 1748 het eerste samenhangende werk over analyse. Toch was Euler bepaald geen monomane excentrieke wiskundige, maar vooral een gezinsmens (hij had 13 kinderen waarvoor hij allerlei spelletjes ontwierp).

Lees ook op deze site over **Grafieken en verandering, differentiaalrekening**.

Testen

Opgave 1

Differentieer.

a $f(x) = 2\left(3x^2 - 6\right)^8$

b $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c $h(x) = 4x\sqrt{x^2 + 1}$

d $j(x) = \frac{4x}{x^2 - 1}$

e $k(x) = \frac{x^2 + 1}{4x}$

f $l(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Opgave 2

Gegeven is de functie: $f(x) = -x + \sqrt[3]{x}$.

a Bereken met behulp van differentiëren de extremen van f. Rond af op twee decimalen.

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$ snijdt de y-as in punt A. Bereken exact de coördinaten van A.

Opgave 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{15x}{x^2 + 36}$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b In welke punt(en) is de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig met de lijn $y = \frac{5}{24}x - 5$?

c De lijn $x = p$ met $3 < p < 8$ snijdt de grafiek van f in punt A en de lijn $y = 1$ in punt B. Bereken algebraïsch voor welke waarde van p de lengte van lijnstuk AB maximaal is.

Opgave 4

Een boer wil voor zijn kippen een stuk grond met hekken af zetten. Hij heeft drie hekken van elk vijf meter lang. Deze hekken zet hij in de vorm van een trapezium tegen een grote muur.

Bereken algebraïsch wat de grootst mogelijke oppervlakte is die de boer kan afzetten. Geef je antwoord in m^2. Rond af op twee decimalen.

Opgave 5

Gegeven zijn de functies: $f_p(x) = px(6 - 2x)^3$ voor verschillende waarden van p.

a Toon aan dat $f'_p(x) = p(6 - 8x)(6 - 2x)^2$.

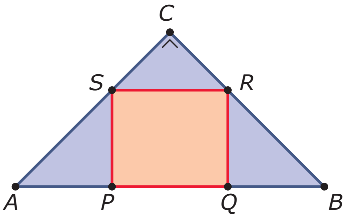
b Voor elke waarde van p met $p \neq 0$ heeft zo'n functie precies één uiterste waarde bij $x = 0{,}75$. Toon dat aan.

c Voor welke p heeft de grafiek van f een extreme waarde van $-273{,}375$?

Opgave 6

In een gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC is AB de basis; $AB = 16$ cm. In deze driehoek wordt rechthoek $PQRS$ beschreven, zie figuur.

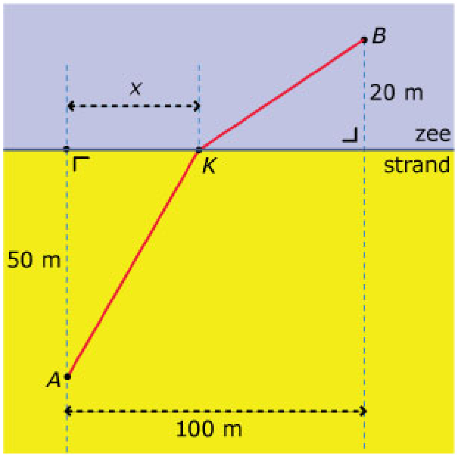
Bereken de maximale oppervlakte die deze rechthoek kan hebben.



Figuur 6.2

Opgave 7

Een zwemmer is in nood voor de kust van Bergen. De tekening geeft een beeld van de situatie. De zwemmer in nood bevindt zich bij punt B in zee. Een lid van de reddingsbrigade ziet de zwemmer in nood en wil in actie komen. Zij bevindt zich in punt A. Ze wil natuurlijk via de snelste weg naar de drenkeling toe. Maar wat is de snelste weg?
Een deel van de weg moet ze rennend afleggen en een deel zwemmend. Ze rent met een gemiddelde snelheid van 6 m/s en ze zwemt met een gemiddelde snelheid van 1,5 m/s. Hoe kan ze het snelst hulp bieden? Noem het punt waar ze in het water stapt K.
Punt K kan overal langs de aangegeven 100 m-lijn liggen. De tijd die ze nodig heeft om in B te komen moet natuurlijk zo klein mogelijk zijn. Noem de totale tijd t, de gemiddelde snelheid over het strand v_s en de gemiddelde snelheid in zee v_z.



Figuur 6.3

a Stel een formule op voor t als functie van x.

b Bepaal met behulp van differentiëren de minimale tijd die ze nodig heeft om de zwemmer te bereiken.

c Bepaal de kortste weg.

Toepassen

Opgave 8: File

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan.

Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren. Neem aan dat alle auto's 4 m lang zijn en hun onderlinge afstand precies de remweg R (in meter) is. Deze remweg hangt af van de snelheid v (in km/h).

Figuur 6.4

Er geldt bij benadering: $R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$.

De verkeersdienst zet een teller halverwege de wegversmalling die meet hoeveel auto's er per minuut passeren. Stel nu een formule op voor het aantal auto's dat per minuut de teller passeert.

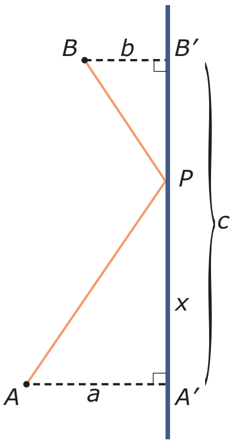
Bereken met behulp van differentiëren bij welke snelheid zoveel mogelijk auto's de teller passeren.

Opgave 9: Spiegel

Dit is een beroemd probleem uit de Griekse Oudheid. Het stamt uit de 'Catoptrica' van Heroon.

"Een lichtstraal loopt van punt naar punt doordat hij van het oppervlak van een vlakke spiegel wordt teruggekaatst. Aangenomen dat het licht altijd de kortste route neemt, waar raakt het dan de spiegel?"

P is het punt waar het licht wordt weerkaatst. De afmetingen zijn verder in de figuur te vinden. De lengte van de lichtstraal (L) is gelijk aan de som van de lengtes van AP en PB. De positie van P is bekend als x is berekend.



Figuur 6.5

a Stel een formule op voor L als functie van x.

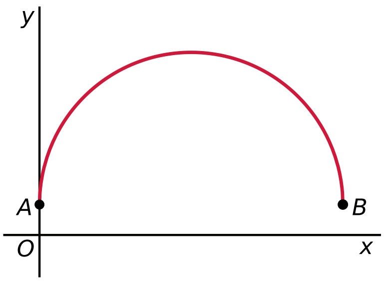
b Neem $a = 2$ dm, $b = 1$ dm en $c = 5$ dm. Bereken met behulp van differentiëren x als L zo klein mogelijk is in twee decimalen nauwkeurig.

c Laat ook zien hoe je dit probleem meetkundig kunt oplossen.

Examen

Opgave 10: Wortelfuncties

Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt{10x - x^2}$.
De grafiek van f heeft de eindpunten A en B. Zie figuur.



Figuur 6.6

a Los op: $f(x) \geq x$. Rond niet-gehele grenswaarden af op één decimaal.

b Bereken met behulp van differentiëren de helling van de grafiek van f in het punt $P(2,5)$.

Voor elke waarde van a, met $a > 0$, is gegeven de functie $h(x) = 1 + \sqrt{ax - x^2}$.
Als $a = 10$ ontstaat de functie f.

c Het domein van h hangt af van a. Onderzoek voor welke waarde van a het domein van h het interval $[0,100]$ is.

Als je voor enkele waarden van a de grafiek van h tekent, blijkt dat de toppen van deze grafieken op een rechte lijn liggen.

d Geef een vergelijking van deze lijn. Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde B havo 2000, eerste tijdvak)

Opgave 11: Warmtebalans

De temperatuur van een gekoeld pakje of blikje frisdrank stijgt op een zonnig strand snel. Dit heeft verschillende oorzaken. We beperken ons in deze opgave tot de oppervlakte en het volume van de verpakking. Als een verpakking bij dezelfde inhoud een grotere oppervlakte heeft, zal de frisdrank erin sneller opwarmen. Hiervoor is de warmte-uitwisselingsfactor F van belang.

Er geldt: $F = \frac{A}{V}$ waarbij A de totale oppervlakte van de verpakking is in cm^2 en V het volume in cm^3.
We bekijken een balkvormige en een cilindervormige verpakking van frisdrank. In de figuur zijn tevens de afmetingen in cm aangegeven.
Voor de oppervlakte A van de cilinder geldt $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, waarbij h de hoogte is en r de straal van het grondvlak.

In beide verpakkingen gaat vrijwel dezelfde hoeveelheid frisdrank. De warmte-uitwisselingsfactor F is verschillend.

a Onderzoek welke verpakking de kleinste F-waarde heeft.

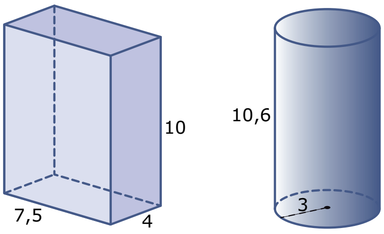
Voor een groot koffiezetapparaat moet een cilindervormige tank worden ontworpen met een inhoud van 8 liter (1 liter = 1000 cm^3).
Noem de straal van het grondvlak van deze tank r en de hoogte van deze tank h (r en h in cm).
De hoogte h van de tank kun je uitdrukken in de straal r. Er geldt $h = \frac{8000}{\pi r^2}$. Een eis die men aan het ontwerp van het koffiezetapparaat stelt, is dat de hoogte h tussen 20 cm en 40 cm ligt.

b Bereken welke waarden voor de straal r dan zijn toegestaan. Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

In plaats van grenzen aan de hoogte te stellen zou men ook de volgende eis kunnen stellen:
‘De afmetingen van de tank moeten zodanig zijn dat de koffie er zo lang mogelijk warm in blijft. Dat wordt bereikt als de warmte-uitwisselingsfactor F van de tank zo klein mogelijk is.’
Voor de warmte-uitwisselingsfactor van een cilindervormige tank met een inhoud van 8 liter heeft men de formule $F = \frac{2}{r} + \frac{\pi r^2}{4000}$ gevonden.

c Bereken met behulp van differentiëren de straal van een tank die aan deze eis voldoet. Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

(bron: examen wiskunde B havo 2006, tweede tijdvak)



Figuur 6.7

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

www.math4all.nl