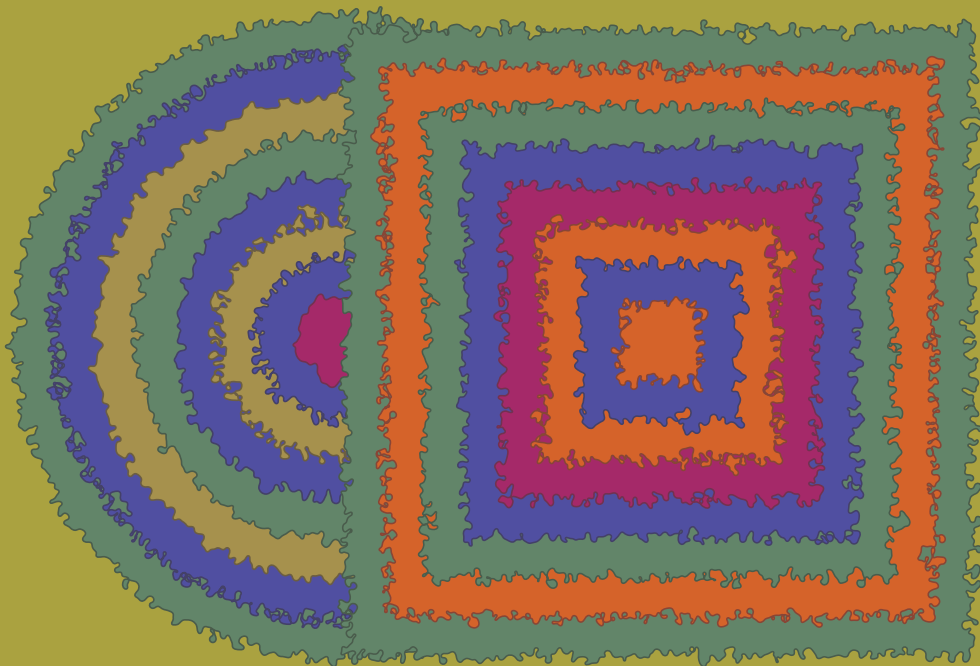


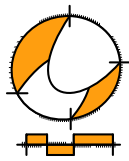
Wiskunde B

5 HAVO

Katern 2

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Hoeken en afstanden 5

- 1.1 Middelpunten 6
- 1.2 Snijden en raken 13
- 1.3 Raaklijnen 19
- 1.4 Afstanden berekenen 26
- 1.5 Van 3D naar 2D 31
- 1.6 Totaalbeeld 43

2 Machtsfuncties 49

- 2.1 Machten 50
- 2.2 Machtsfuncties 61
- 2.3 Afgeleiden 71
- 2.4 Wortelfuncties 79
- 2.5 Gebroken functies 86
- 2.6 Toepassingen 94
- 2.7 Totaalbeeld 101

3 Periodieke functies 107

- 3.1 Periodiciteit 108
- 3.2 Radialen 117
- 3.3 Sinus- en cosinusfuncties 125
- 3.4 Vergelijkingen met sinus en cosinus 133
- 3.5 Sinusoiden 142
- 3.6 Periodieke modellen 152
- 3.7 Totaalbeeld 160

Register 169

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.



Hoeken en afstanden

1.1	Middelpunten	6
1.2	Snijden en raken	13
1.3	Raaklijnen	19
1.4	Afstanden berekenen	26
1.5	Van 3D naar 2D	31
1.6	Totaalbeeld	43

1.1 Middelpunten

Inleiding

Van dit bord van Delft's Blauw zijn vier scherven overgebleven. Je kunt zien dat het een rond bord was. Maar hoe reconstrueer je nu het ronde bord? In dit onderwerp zul je zien hoe je een cirkel kunt maken vanuit drie gegeven punten.

Je leert in dit onderwerp

- door kwadraat afsplitsen de vergelijking van een cirkel zo schrijven dat middelpunt en straal eruit zijn af te lezen;
- het middelpunt van een cirkel construeren als er drie punten van zijn gegeven;
- een vergelijking opstellen van een cirkel door drie gegeven punten.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen van lijnen en cirkels in een recht-hoekig assenstelsel;
- snijpunten van lijnen en cirkels berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk het bord in de [Inleiding](#).

Van dit bord van Delft's Blauw zijn vier scherven overgebleven. Je kunt zien dat het een rond bord was.

Formuleer een manier om de cirkel die het bord beschreef te reconstrueren.

Uitleg 1

Bekijk de applet

Wil je een cirkel tekenen met je passer, dan moet je weten welk punt het middelpunt is en hoe groot de straal is. Hoe vind je die als je alleen een paar punten A , B , C hebt die op de cirkel liggen?

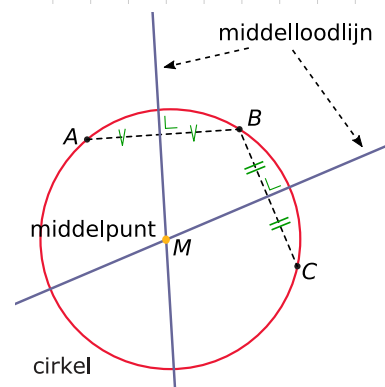
Noem het middelpunt van de cirkel die je wilt tekenen even M . Bedenk dan dat M even ver van alle punten op de cirkelboog ligt. Noem nu twee punten A en B die op de cirkelboog liggen, dan ligt M ergens op de middelloodlijn van AB . Want alle punten op deze middelloodlijn liggen even ver van A als van B .

Ga na, dat dit ook opgaat als je A en B verplaatst. Gebruik hiervoor de applet.

Met drie punten A , B , C zijn er drie middelloodlijnen te maken die allemaal door het middelpunt van de cirkel gaan. Het middelpunt van de cirkel is dus het snijpunt van twee middelloodlijnen.



Figuur 1.1



Figuur 1.2

In de figuur zie je de middelloodlijn van AB en die van BC getekend. M is het snijpunt van beide middelloodlijnen. M ligt ook op de middelloodlijn van AC .

In GeoGebra kun je dit gemakkelijk zelf construeren. Het programma geeft dan de vergelijking van de bijbehorende cirkel. Maar soms heeft die een vorm als $x^2 + y^2 + 6x = 0$. Hoe weet je dan het middelpunt van de cirkel? GeoGebra kan dit snel omzetten, maar hoe doe je dit handmatig?

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je een cirkel construeert door drie gegeven punten.

- Teken drie punten A , B , en C (niet op één lijn). Op welke lijnen ligt het middelpunt van de cirkel door die drie punten?
- Construeer nu een cirkel door deze drie punten.
- Verklaar waarom de drie middelloodlijnen door één punt, M gaan en dat dit punt tevens het middelpunt van de cirkel is.

Opgave 2

Hier zie je een driehoekig grasveld. In tijden van droogte sproei je water over het gras. Je hebt een vaste sproeier die een cirkelvormig gebied kan besproeien. Waar plaats je de sproeier en hoe groot moet de straal van het gebied dat hij kan bestrijken minstens zijn?

Opgave 3

Er zijn computerprogramma's die bij (een deel) van een geconstrueerde kromme lijn een vergelijking kunnen geven. Stel je vindt $x^2 + y^2 + 6x = 0$. Is dit dan een vergelijking van een cirkel? Licht je antwoord toe.

Uitleg 2

Als je een vergelijking zoals $x^2 + y^2 + 6x = 0$ bij een kromme lijn ziet staan, hoe weet je dan zeker of de kromme een cirkel is? De grafiek mag dan wel op een cirkel lijken, maar is dat ook echt zo?

Vergelijkingen van cirkels hebben altijd de vorm

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ waarin het middelpunt $M(a, b)$ en de straal r is. Om uit te zoeken of $x^2 + y^2 + 6x = 0$ een cirkel voorstelt moet je deze vergelijking in de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ kunnen schrijven.

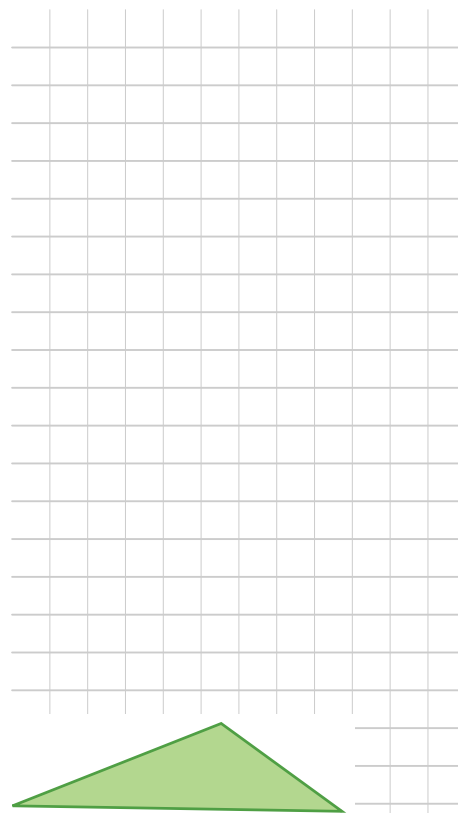
De term y^2 is gemakkelijk om te schrijven: $(y - 0)^2$. Dus $b = 0$.

Maar het omschrijven van $x^2 + 6x$ gaat met kwadraat afsplitsen. Je ziet nog eens in de figuur dat $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$. Merk op dat je de term $6x$ moet lezen als $2 \cdot 3x$.

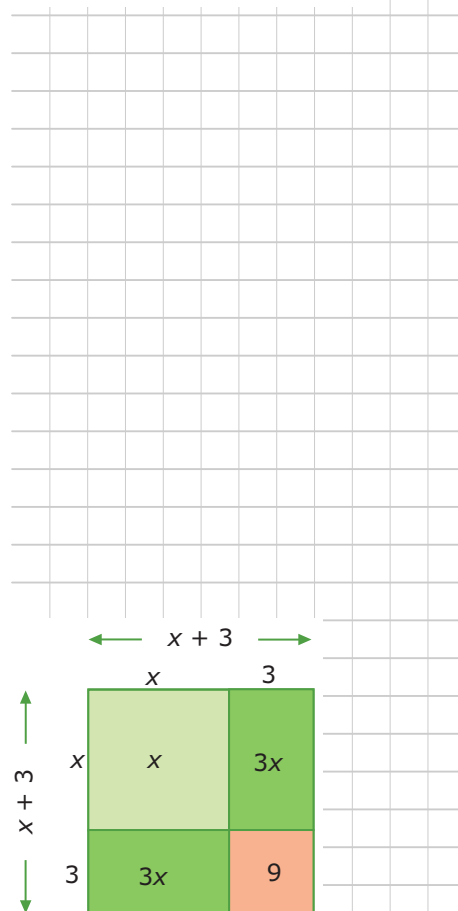
Dus: $x^2 + y^2 + 6x = 0$ kun je nu als volgt herleiden:

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 0)^2 = 0 \text{ en dit wordt}$$

$$(x + 3)^2 + (y - 0)^2 = 9.$$



Figuur 1.3



Figuur 1.4

Vergelijk dit met de algemene vorm van een cirkel namelijk $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Dan zie je dat geldt $a = -3$ en $b = 0$ en dat $r^2 = 9$ dus $r = 3$.

De gegeven vergelijking is dus van een cirkel met middelpunt $M(-3,0)$ en straal 3.

De vergelijking van de cirkel is $(x + 3)^2 + y^2 = 9$.

Opgave 4

Bekijk in **Uitleg 2** hoe kwadraat afsplitsen gaat.

Splitst een kwadraat af van de volgende uitdrukkingen:

- a $x^2 + 8x$
- b $x^2 + 12x$
- c $x^2 + 5x$
- d $x^2 - 6x$
- e $x^2 - 8x$
- f $x^2 - x$

Opgave 5

Ga na of de volgende vergelijkingen bij cirkels horen.

Bepaal, als het cirkels zijn, het middelpunt en de straal van die cirkel.

- a $x^2 + y^2 + 8x + 4y = 0$
- b $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 25$
- c $2x^2 + y^2 + 8x = x^2 + 4y$

Opgave 6

Niet elke vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ is de vergelijking van een cirkel. Neem bijvoorbeeld $x^2 + y^2 - 8x + 4y = -25$. Laat met behulp van kwadraat afsplitsen zien, dat hier van een cirkel geen sprake is.

Theorie en voorbeelden

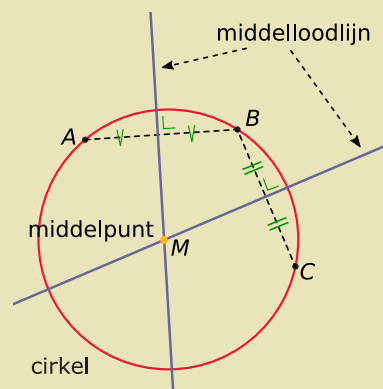
Om te onthouden

Bekijk de applet: cirkel door drie punten

Heb je drie punten A , B en C die niet op één lijn liggen, dan kun je daar altijd een cirkel door tekenen. Door twee van de drie bijbehorende **middelloodlijnen** met elkaar te snijden bepaal je het middelpunt M van die cirkel. De afstanden $|MA| = |MB| = |MC|$ zijn stralen van de cirkel.

Bij een gegeven kwadratische vergelijking kun je niet altijd onmiddellijk zien of het een cirkel betreft of niet.

Elke cirkelvergelijking kan altijd in de vorm $(x - a)^2 + (y - c)^2 = r^2$ worden gezet, waarin het middelpunt $M(a,b)$ en de straal r is.



Figuur 1.5

Heb je een vergelijking waarin naast $x^2 + y^2$ ook nog termen van de vorm $2ax$ en $2by$ voorkomen, dan gebruik je het **kwadraat afsplitsen** om de vergelijking in de voorgaande vorm te brengen.

Je gebruikt daarbij $x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$ en $y^2 + 2by = (y + b)^2 - b^2$.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Gegeven zijn de punten $A(0,3)$, $B(2,6)$ en $C(5,4)$. Stel een vergelijking op van de cirkel c door deze drie punten.

(Door de punten te verplaatsen kun je meer situaties oefenen.)

Antwoord

Stel eerst vergelijkingen op van de middelloodlijnen van (bijvoorbeeld) AB en BC .

- De middelloodlijn van AB heeft een richtingscoëfficiënt van $-\frac{2}{3}$ en gaat door $(1; 4,5)$. De vergelijking ervan is $y = -\frac{2}{3}x + 5\frac{1}{6}$.
- De middelloodlijn van BC heeft een richtingscoëfficiënt van $1,5$ en gaat door $(3,5; 5)$. De vergelijking ervan is $y = 1,5x - 0,25$.

Het snijpunt van beide middelloodlijnen is $M(2,5; 3,5)$ en dit is het middelpunt van de bedoelde cirkel. Deze heeft daarom als vergelijking $(x - 2,5)^2 + (y - 3,5)^2 = r^2$. De juiste waarde van r^2 vind je door een punt van de cirkel (bijvoorbeeld $A(0,3)$) in te vullen voor x en y .

Je vindt dan: $r^2 = (0 - 2,5)^2 + (3 - 3,5)^2 = 6,5$. De straal van de cirkel is dan $\sqrt{6,5} \approx 2,55$. De uiteindelijke vergelijking van de cirkel wordt dan $(x - 2,5)^2 + (y - 3,5)^2 = 6,5$.

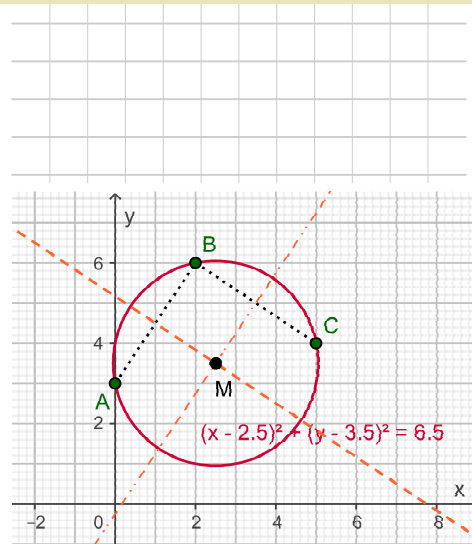
Opgave 7

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de vergelijking opstelt van de cirkel door de punten $A(0,3)$, $B(2,6)$ en $C(5,4)$. Voer de berekeningen in dit voorbeeld zelf uit. In de applet kun je de punten A , B en C verplaatsen en zo in nieuwe situaties het opstellen van de vergelijking van de cirkel oefenen. Doe dit zo vaak als nodig. Het uiteindelijke antwoord vind je in de applet.

Opgave 8

Neem in een cartesisch assenstelsel de punten $O(0,0)$, $A(4,0)$ en $B(3,5)$.

- Stel vergelijkingen op van de middelloodlijnen van OA , AB en OB .
- Laat met berekeningen zien dat die middelloodlijnen door één punt gaan.



Figuur 1.6

- c Teken een cirkel door die drie punten en stel er een vergelijking van op.
- d Laat met berekeningen zien dat zowel O als A en B ook echt op de cirkel liggen.

Voorbeeld 2

Bij een kromme k_1 staat de vergelijking $y^2 = 5x - x^2 + 8y$.

Bij een kromme k_2 staat de vergelijking $x^2 + y^2 + 6y + 13 = 0$.

Zijn beide krommen cirkels?

Antwoord

Door herleiden en kwadraat afsplitsen vind je:

- $k_1 : (x - 2,5)^2 + (y - 4)^2 = 22,25$
- $k_2 : (x - 0)^2 + (y + 3)^2 = -4$

Je ziet dat k_1 een cirkel is met middelpunt $(2,5; 4)$ en straal $\sqrt{22,25}$.

Maar k_2 is geen cirkel, want als de straal r is moet $r^2 = -4$ en dat kan niet.

Opgave 9

Bereken (indien mogelijk) de straal en de coördinaten van het middelpunt van deze cirkels.

- a $x^2 + y^2 = 6x - 4y - 5$
- b $x^2 + y^2 = 6x - 4y - 50$
- c $x(x + 4) = 3 - y(y + 2)$
- d $2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y = 0$
- e $5 - x^2 - y^2 = 4x + 2y$
- f $x^2 + y^2 = 4x + 2y - 5$

Opgave 10

Stel een vergelijking op van de cirkel die door de volgende punten gaat:

- a $A(-2,3)$, $B(4,3)$ en $C(2,4)$.
- b $A(-4,6)$, $B(8,6)$ en $C(4,8)$

Verwerken

Opgave 11

Stel bij de volgende gegevens de vergelijking(en) van de cirkel(s) op.

- a c gaat door de punten $P(20,5)$, $Q(28,9)$ en $R(25,15)$.
- b c heeft middelpunt $(-5,10)$ en gaat door $O(0,0)$.

Opgave 12

Je ziet hier allerlei kwadratische vergelijkingen. Een kwadratische vergelijking stelt vaak een kromme lijn in het platte vlak voor. Onderzoek in welke gevallen het om een cirkel gaat en bereken dan het middelpunt en de straal. Bereken in alle gevallen de snijpunten met de x -as.

- a $x^2 + y^2 = 3x$
- b $x^2 - y^2 = 3x$
- c $x^2 - y = 3x$
- d $x^2 + y^2 + 2xy = 16$
- e $x(x - 4) = y(6 - y)$
- f $(x - y)^2 = 2x(6 - y)$

Opgave 13

Bereken de straal van de cirkel die door de hoekpunten van een gelijkbenige driehoek met zijden van 12, 10 en 10 cm gaat.

Opgave 14

Onderzoek of de volgende vier punten op een cirkel liggen: $A(0,0)$, $B(9,12)$, $C(25,0)$ en $D(12,-13)$.

Opgave 15

Gegeven zijn de vergelijkingen $c_1 : x^2 + y^2 - 4y = 0$ en $c_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$.

Probeer je van c_1 en c_2 de snijpunten uit te rekenen, dan merk je dat ze geen gemeenschappelijke punten hebben. Welke van beide cirkels ligt geheel binnen de andere?

Opgave 16

Een cirkel c gaat door de punten $A(2,5;5)$ en $B(5,5;1)$ en heeft $r = 5$ als straal.

Stel op algebraïsche wijze de vergelijking op van cirkel c .

Opgave 17

Gegeven is de cirkel $c : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$.

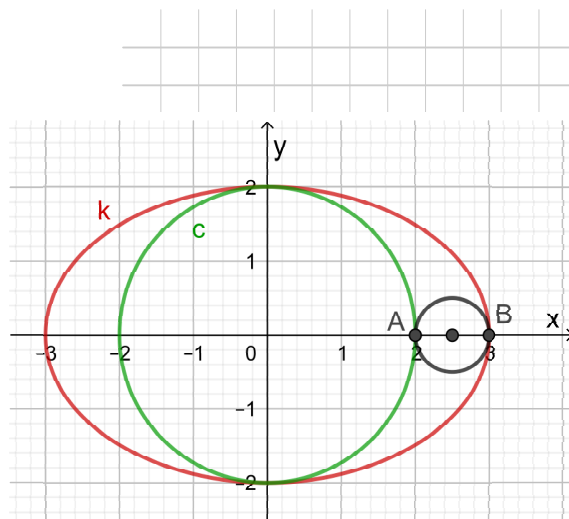
- a Stel een vergelijking op van de middelloodlijn m van lijnstuk OM waarin M het middelpunt van c is.
- b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de lengte van het lijnstuk PQ als P en Q de snijpunten van m met cirkel c zijn.
- c Toon aan dat vierhoek $MQOP$ (of $MPOQ$, afhankelijk van wat je P en wat je Q hebt genoemd) een ruit is.

Toepassen

Opgave 18: Ellips

De kromme k met vergelijking $4x^2 + 9y^2 = 36$ is geen cirkel, maar een ellips (een 'afgeplatte' cirkel). Cirkel c is de grootste cirkel die nog precies in de ellips past. B is het snijpunt van k met de x -as dat een positieve x -coördinaat heeft. A is het snijpunt van c met de x -as dat een positieve x -coördinaat heeft. Door A en B gaat een cirkel c_2 met middelpunt op de x -as. Iemand beweert dat deze cirkel geheel binnen de ellips k ligt. Of dit waar is mag je niet zomaar uit de figuur (gemaakt met GeoGebra) afleiden.

- Bereken van deze ellips de snijpunten met de assen.
- Stel een vergelijking op van de cirkel c_2 .
- Onderzoek door berekening of c_2 binnen k ligt.



Figuur 1.7

Testen

Opgave 19

Stel bij de volgende gegevens de vergelijking van de cirkel c op.

- c gaat door de punten $P(0,4)$, $Q(8,0)$ en $R(5,9)$.
- Het middelpunt van c ligt op de x -as en c snijdt de lijn l in de punten $A(6,6)$ en $B(10,-2)$.

Opgave 20

Gegeven is de cirkel $c : x^2 + 4x = 5y - y^2$.

Laat zien dat het middelpunt van cirkel c ligt op de lijn $l : 2x + 2y = 1$.

Practicum

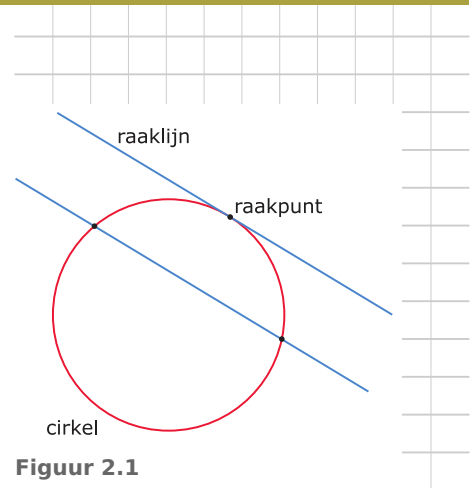
Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het berekenen van het middelpunt en de straal van een gegeven cirkel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier. Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord. Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.2 Snijden en raken

Inleiding

Een cirkel en een lijn kunnen gemeenschappelijke punten hebben. Dergelijke snijpunten heb je leren uitrekenen. Als cirkel en lijn precies één gemeenschappelijk punt hebben, dan spreek je van 'raken': de lijn en de cirkel raken elkaar. Je noemt zo'n lijn een raaklijn aan de cirkel en het gemeenschappelijke punt heet het raakpunt.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- nagaan of een lijn een cirkel snijdt, mist of raakt;
- hoe je de vergelijking kunt opstellen van een lijn die een cirkel raakt;
- de coördinaten van het raakpunt van een lijn en een cirkel berekenen;
- de vergelijking van een cirkel opstellen die aan een gegeven lijn raakt.

Voorkennis

- snijpunten van lijnen en cirkels berekenen;
- de abc -formule gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met de discriminant bij een kwadratische vergelijking.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

Teken een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 5. Gegeven is verder de lijn $l: y = -0,75x + b$. De waarde van b kan variëren. A en B zijn de snijpunten van deze lijn met de cirkel.

- Neem $b = 0$ en bereken de coördinaten van A en B .
- Voor welke waarden van b vallen dan A en B samen? (Gebruik je figuur.)

Uitleg

Bekijk de applet

Als er een cirkel c met straal 5 en middelpunt O en de lijn $l : y = -0,75x + 2$ gegeven zijn, dan bereken je hun snijpunten door in $x^2 + y^2 = 25$ voor y de uitdrukking $-0,75x + 2$ in te vullen (te substitueren).

Je vindt dan : $x^2 + (-0,75x + 2)^2 = 25$.

Deze vergelijking schrijf je als $1\frac{9}{16}x^2 - 3x - 21 = 0$.

Zo'n vergelijking los je op met de abc-formule. Je vindt twee oplossingen voor x omdat de discriminant positief is. Je vindt dan $x = -2,83$ en $x = 4,75$. En de snijpunten die je zoekt worden dan $(-2,83; 4,12)$ en $(4,75; -1,56)$.

Wil je de snijpunten van $m: y = -0,75x + 6,25$ en cirkel c berekenen, dan gebeurt er iets bijzonders. Na invullen vind je $x^2 + (-0,75x + 6,25)^2 = 25$.

Dit kun je herleiden tot $1\frac{9}{16}x^2 - 9\frac{3}{8}x + 14\frac{1}{16} = 0$.

Als je dit op dezelfde manier gaat oplossen dan zijn er geen twee x -waarden, maar slechts één. Dat komt omdat hier de discriminant 0 is. Er is blijkbaar maar één oplossing en de twee snijpunten vallen dan als het ware samen, de lijn m en de cirkel c raken elkaar. Lijn m heet een raaklijn aan cirkel c . Er is één raakpunt.

Wanneer de discriminant kleiner dan 0 is bestaan er geen reële oplossingen: dat betekent dat de lijn en de cirkel elkaar missen.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de cirkel c en de lijn $l : y = -0,75x + 2$.

- Bereken zelf de snijpunten van l en c in twee decimalen nauwkeurig.
- Toon aan dat $m : y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$ raakt aan de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$.
- Bereken het raakpunt.
- Er is nog een lijn met dezelfde richtingscoëfficiënt die aan cirkel c raakt. Welke vergelijking heeft die lijn?

Opgave 2

Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 5$. Welke van deze lijnen raakt cirkel c ? Bereken telkens de snijpunten of het raakpunt van lijn en cirkel.

- $y = 2x$
- $y = 2x + 2,5$
- $y = -0,5x + 2,5$
- $y = -0,5x - 2,5$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een lijn en een cirkel hebben geen, één of twee punten gemeenschappelijk. Hebben een lijn en een cirkel twee punten gemeen, dan snijden ze elkaar.

Hebben een lijn en een cirkel maar één punt gemeen (beide snijpunten vallen dan samen), dan zeg je dat ze elkaar **raken**. De lijn is een **raaklijn** aan de cirkel.

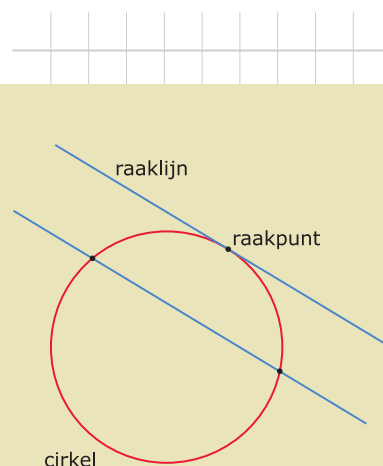
Om snijpunten te berekenen van een lijn en een cirkel gebruik je de vergelijking van de lijn en die van de cirkel: je combineert het bijbehorende stelsel vergelijkingen tot één kwadratische vergelijking met één onbekende.

Je kunt deze kwadratische vergelijking schrijven als $ax^2 + bx + c = 0$.

De oplossingen hiervan bereken je door ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen, of de abc-formule.

Als de lijn en de cirkel elkaar raken dan heeft deze kwadratische vergelijking met één onbekende maar één oplossing.

De **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ van deze vergelijking is dan 0. Daarvan kun je gebruik maken bij het opstellen van vergelijkingen van raaklijnen.



Figuur 2.2

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(2,0)$ en straal $\sqrt{10}$. Van de familie van lijnen $l: y = 3x + b$ raken er twee aan deze cirkel. Welke twee?

Antwoord

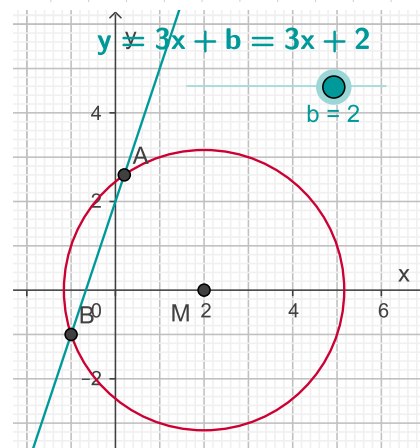
De cirkel c heeft vergelijking: $(x - 2)^2 + y^2 = 10$.

Vul de vergelijking van lijn $l: y = 3x + b$ in de cirkelvergelijking c in, en je vindt: $(x - 2)^2 + (3x + b)^2 = 10$. Haakjes wegwerken levert op: $10x^2 - 4x + 6bx + 4 + b^2 = 10$. En dus: $10x^2 + (6b - 4)x + b^2 - 6 = 0$.

Omdat l en c elkaar raken heeft deze vergelijking precies één oplossing. De discriminant ervan is daarom 0. Dus $b^2 - 4ac = 0$ en vul nu de waarden van a, b en c in: $(6b - 4)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (b^2 - 6) = 0$. Uitwerken geeft: $-4b^2 - 48b + 256 = 0$ en dus $b^2 + 12b - 64 = 0$. Dit levert op: $b = -16 \vee b = 4$. De twee raaklijnen zijn $y = 3x - 16$ en $y = 3x + 4$.

Opgave 3

Er zijn twee lijnen van vorm $m: y = \frac{1}{3}x + b$ die aan cirkel $c: (x - 2)^2 + y^2 = 10$ raken. Stel van deze twee lijnen de vergelijkingen op.



Figuur 2.3

Opgave 4

Stel vergelijkingen op van de raaklijnen met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$ die raken aan de cirkel met vergelijking $x^2 + (y - 3)^2 = 20$.

Opgave 5

Gegeven is de lijn k met vergelijking $x + 2y = 6$. Er is een cirkel met middelpunt O die deze lijn raakt. Stel van deze cirkel een vergelijking op.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Het punt $P(0, -2)$ ligt buiten cirkel $c: (x - 4)^2 + y^2 = 10$.
Er zijn twee lijnen door P te tekenen die de cirkel c raken.
Stel van die twee raaklijnen de vergelijkingen op.

Antwoord

Je stelt eerst de vergelijking op van een lijn met richtingscoëfficiënt a die door het punt P gaat: $y = ax + b$ door $P(0, -2)$ geeft $y = ax - 2$.

De lijn $y = ax - 2$ substitueer je dan weer in de gegeven cirkelvergelijking. Dit geeft:

$$(x - 4)^2 + (ax - 2)^2 = 10.$$

Uitwerken geeft $x^2 - 8x + 16 + a^2x^2 - 4ax + 4 = 10$ en dit werk je uit tot: $(1 + a^2)x^2 + (-4a - 8)x + 10 = 0$.

Bij raken moet voor de discriminant D gelden: $D = 0$.

$$\text{Dus: } (-4a - 8)^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot 10 = 0.$$

$$\text{Hieruit volgt: } a = 3 \vee a = -\frac{1}{3}.$$

De gevraagde vergelijkingen zijn: $y = 3x - 2$ en $y = -\frac{1}{3}x - 2$.

Opgave 6

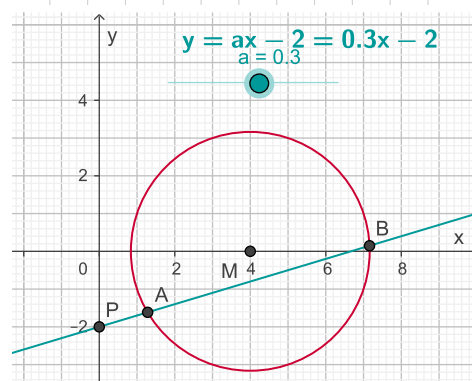
De lijnen die door het punt $P(0,5)$ gaan hebben een vergelijking van de vorm $y = ax + 5$. Twee van die lijnen raken de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 = 10$. Welke twee lijnen zijn dat?

Opgave 7

Het punt $Q(0,2)$ ligt buiten de cirkel $c: (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Stel de vergelijkingen op van de twee raaklijnen aan de cirkel c die door Q gaan.

Opgave 8

Gegeven het punt $R(0,4)$ en de cirkel $c: (x - 3)^2 + y^2 = 25$. Stel de vergelijkingen op van alle lijnen die door R gaan en de cirkel c raken.



Figuur 2.4

Opgave 9

Hoeveel lijnen door $A(0,2)$ raken de cirkel met middelpunt $M(1,2)$ en straal 3?

Verwerken**Opgave 10**

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 = 16$ en de lijn $l: y = x + b$.

- a Neem $b = 1$ en onderzoek of deze lijn de cirkel snijdt, raakt of mist.
- b Voor welke waarde(n) van b raakt l aan c ?
- c Voor welke waarden van b snijdt l de cirkel c ? En voor welke waarden van b mist l de cirkel c ?

Opgave 11

Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 = 25$. Hieronder staan wat omschrijvingen van lijnen l . Stel telkens vergelijkingen op van alle lijnen l die aan deze omschrijving voldoen.

- a l heeft een richtingscoëfficiënt van 1 en raakt cirkel c .
- b l gaat door $P(0,10)$ en raakt c .
- c l gaat door $S(0,-10)$ en raakt c .

Opgave 12

Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(1,2)$ die de lijn l met vergelijking $x - 2y = 6$ raakt.

Opgave 13

Er is een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ die de lijn met vergelijking $l: y = 6 - x$ raakt. Stel van deze cirkel een vergelijking op en bereken de coördinaten van het raakpunt.

Opgave 14

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$. Lijn l staat loodrecht op lijn $m: y = \frac{3}{4}x$ én raakt cirkel c . Stel de vergelijking op van lijn l . Hoeveel mogelijkheden zijn er?

Toepassen**Opgave 15: Afstand tussen twee raakpunten**

Vanuit $O(0,0)$ kun je twee raaklijnen tekenen aan de cirkel c met middelpunt $(25,0)$ en diameter 10. Deze raaklijnen raken de cirkel in de punten A en B . Bereken de lengte van AB door de vergelijkingen van beide raaklijnen op te stellen. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 16: Snijpunt van raaklijnen

De cirkel c heeft middelpunt $O(0,0)$ en straal 1. De verticale lijn $l : x = a$ snijdt deze cirkel als $-1 < a < 1$ in twee punten A en B . De raaklijnen in die twee punten aan de cirkel snijden elkaar in het punt C .

- a Neem $a = \frac{1}{2}$ en toon aan, dat $C = (2,0)$.
- b Toon aan dat voor elke $a \neq 0$ geldt: $C = \left(\frac{1}{a}, 0\right)$.

Testen**Opgave 17**

Gegeven is de cirkel $c : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 17$. Hieronder staan wat omschrijvingen van lijnen l . Stel telkens vergelijkingen op van alle lijnen l die aan deze omschrijving voldoen.

- a l heeft een richtingscoëfficiënt van 4 en raakt cirkel c .
- b l gaat door $P(-1,2)$ en raakt cirkel c .

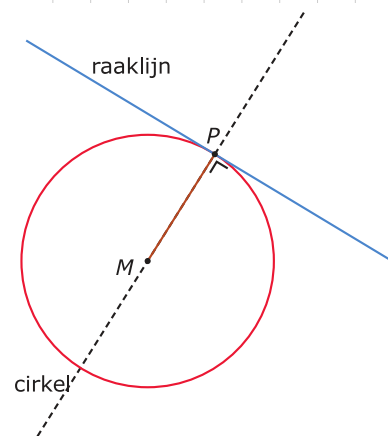
Opgave 18

Stel een vergelijking op van de cirkel met straal 10 en middelpunt op de x -as die de lijn met vergelijking $6x + 4y = 40$ raakt. Rond hierbij af op twee decimalen.

1.3 Raaklijnen

Inleiding

Vergelijkingen opstellen van raaklijnen aan een cirkel kun je al. Maar als je gebruik maakt van de eigenschap die in deze figuur staat uitgebeeld, kun je je daarbij af en toe veel tijd en werk besparen.



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- gebruik maken van de eigenschap dat een raaklijn loodrecht staat op de straal naar het raakpunt;
- hoeken tussen een lijn en een cirkel en tussen twee cirkels berekenen.

Voorkennis

- snijpunten van lijnen en cirkels berekenen;
- vergelijkingen van raaklijnen aan een cirkel opstellen.

Verkennen

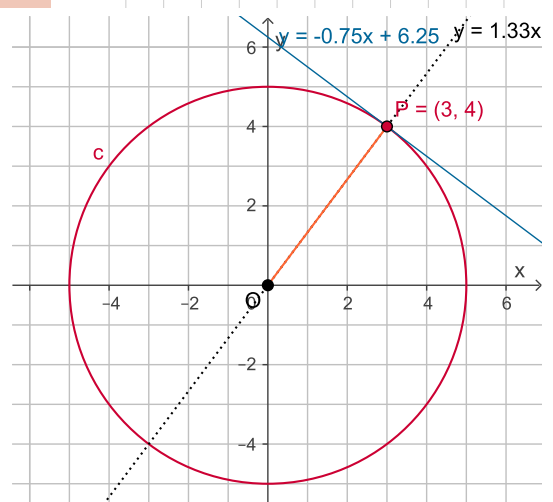
Opgave V1

Bekijk de applet

Hier zie je een cirkel om O met straal 5 en de lijn $l: y = -0,75x + 6,25$.

Lijn l raakt de cirkel in P .

- a** Wat weet je van de hoek tussen lijnstuk OP en lijn l ? Waarom weet je dat zo zeker?
- b** Ga na, dat ook $Q(4,3)$ een punt van de cirkel is. Bepaal de richtingscoëfficiënt van lijn OQ . Kun je hiermee de vergelijking van de raaklijn in Q aan de cirkel opstellen?



Figuur 3.2

Uitleg

Bekijk de applet

In de figuur van **Opgave V1** zie je dat de raaklijn in P aan de cirkel loodrecht staat op de straal OP . Dit is een eigenschap van een raaklijn aan een cirkel.

Met behulp van symmetrie is dat snel duidelijk te maken. De hele figuur van cirkel en raaklijn is namelijk spiegelsymmetrisch t.o.v. de lijn door het middelpunt O van de cirkel en het raakpunt P . Dit betekent dat de twee hoeken bij P waarvan de raaklijn het éne been en de straal OP het andere been is even groot moeten zijn. Maar ze zijn ook samen 180° . Dus zijn ze elk 90° .

Dit kun je gebruiken om een vergelijking op te stellen van een raaklijn als het raakpunt bekend is. De richtingscoëfficiënt a_{straal} van de straal naar het raakpunt kun je immers berekenen vanuit de coördinaten van middelpunt en raakpunt. Dus a_{straal} volgt uit de gegevens.

Omdat raaklijn en straal loodrecht op elkaar staan geldt: $a_{\text{straal}} \cdot a_{\text{raaklijn}} = -1$.

Hiermee bepaal je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, a_{raaklijn} . Omdat de coördinaten van het raakpunt P gegeven zijn kun je nu een vergelijking van de raaklijn opstellen.

Opgave 1

Gegeven is een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en het punt $P(3,4)$. Zie ook de figuur in de **Uitleg**.

- Welke vergelijking heeft cirkel c ?
- Welke richtingscoëfficiënt heeft straal OP ?
- Welke richtingscoëfficiënt heeft de raaklijn in P aan cirkel c ?
- Welke vergelijking heeft die raaklijn?
- Welke vergelijking heeft de raaklijn in $P(5,0)$ aan de cirkel?

Opgave 2

Op de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 = 10$ ligt het punt $P(3,1)$. Stel een vergelijking op van de raaklijn door P aan cirkel c .

Opgave 3

De lijn $l : x + y = 7$ snijdt de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$ in twee punten P en Q .

- Bereken deze punten en stel in beide punten de vergelijking op van de raaklijn aan de cirkel door dat punt.
- Bereken de hoek tussen de twee raaklijnen in gehele graden nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de lijn door het middelpunt van die cirkel en het raakpunt. Daarvan kun je goed gebruik maken bij het opstellen van de vergelijking van een raaklijn aan een cirkel in een punt P op cirkel:

- Eerst bepaal je de richtingscoëfficiënt a_{straal} van lijn MP .
- Omdat straal en raaklijn loodrecht op elkaar staan is $a_{\text{straal}} \cdot a_{\text{raaklijn}} = -1$.

$$\text{Dus: } a_{\text{raaklijn}} = -\frac{1}{a_{\text{straal}}}.$$

- Je weet nu de richtingscoëfficiënt van de raaklijn en een punt waar hij doorheen gaat (het raakpunt P).
Daarmee stel je de vergelijking van de raaklijn op.

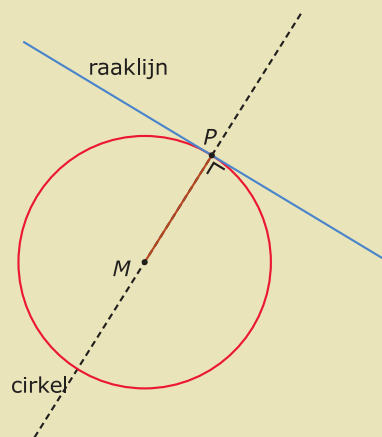
Om snijpunten te berekenen van een lijn en een cirkel gebruik je de vergelijking van de lijn en die van de cirkel: je combineert het bijbehorende stelsel vergelijkingen tot één kwadratische vergelijking met één onbekende.

Je kunt deze kwadratische vergelijking schrijven als $ax^2 + bx + c = 0$.

De oplossingen vind je met kwadraat afsplitsen, ontbinden, of de abc-formule.

Als een lijn een cirkel snijdt, kun je je afvragen welke hoek ze in een snijpunt met elkaar maken. Onder de **hoek tussen een rechte lijn en een cirkel** versta je de scherpe hoek die de lijn maakt met de raaklijn aan de cirkel in één van beide snijpunten.

Als twee cirkels elkaar snijden, kun je je afvragen welke hoek ze in een snijpunt met elkaar maken. Onder de **hoek tussen twee cirkels** versta je de scherpe hoek die de raaklijnen aan de cirkels in één van beide snijpunten met elkaar maken.



Figuur 3.3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

De lijn $l : y = 3$ snijdt de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$. Bereken de hoek die l en c met elkaar maken.

Antwoord

Eerst bereken je beide snijpunten: Substitueer hiertoe $y = 3$ in de cirkelvergelijking $x^2 + y^2 = 25$. Dan vind je $x^2 + 3^2 = 25$. Uitwerken geeft $x = \pm 4$ en dus zijn de snijpunten $A(-4,3)$ en $B(4,3)$. De cirkel heeft middelpunt $O(0,0)$.

Nu ga je de vergelijking van de raaklijn opstellen in (bijvoorbeeld) B .

Omdat OB een richtingscoëfficiënt van $\frac{3}{4}$ heeft, is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $-\frac{4}{3}$.

Deze raaklijn maakt dus een richtingshoek α met de x -as met $\tan(\alpha) = \frac{4}{3}$.

De richtingshoek is $\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53,13^\circ$.

De lijn $y = 0$ heeft een richtingscoëfficiënt van 0 en een richtingshoek van 0° . De hoek tussen beide lijnen is $53,13^\circ$. Dit is tevens de hoek tussen de lijn en de cirkel.

Opgave 4

Gegeven is de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$, de lijn $l : y = 3$ en de snijpunten $A(-4,3)$ en $B(4,3)$ van l met c . Zie **Voorbeeld 1**.

- Stel een vergelijking op van de raaklijn in punt B aan de cirkel.
- Bereken de hoek tussen de cirkel c lijn l .
- Waarom heb je bij de berekening de vergelijking van de cirkel niet nodig?
- Laat zien dat de hoek tussen l en c in het punt $A(-4,3)$ hetzelfde is.

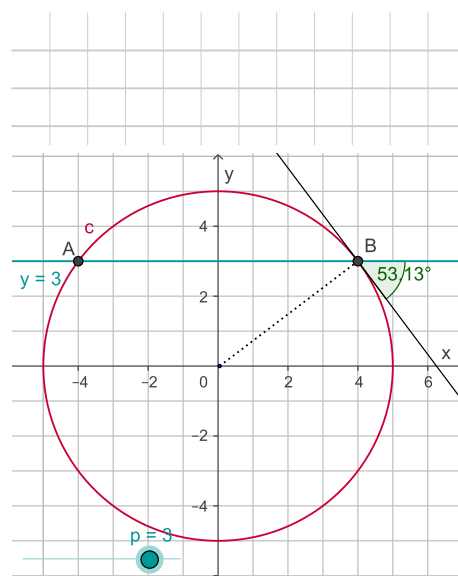
Opgave 5

Gegeven de cirkel $c : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

- Bereken de snijpunten van c met de coördinaatassen.
- Stel de vergelijkingen op van de raaklijnen aan de cirkel c in de snijpunten met de assen.
- Bereken de hoek waaronder c de x -as snijdt in graden nauwkeurig.
- Bereken de hoek waaronder c de y -as snijdt in graden nauwkeurig.

Opgave 6

De lijn l met vergelijking $y = x$ en de cirkel c middelpunt $M(3,0)$ en door het punt $P(4,2)$ snijden elkaar in A en B . Bereken de hoek waaronder l en c elkaar snijden in graden nauwkeurig. Rond af op één decimaal achter de komma.



Figuur 3.4

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

De twee cirkels $c_1: x^2 + y^2 = 5$ en $c_2: x^2 + y^2 = 6x - 1$ snijden elkaar in de punten A en B . Bereken de hoek waaronder ze elkaar snijden.

Antwoord

Eerst bereken je de snijpunten $A(1,2)$ en $B(1,-2)$.

Dan stel je de raaklijn aan c_1 en die aan c_2 op in één van die punten, zeg A .

- Het middelpunt van c_1 is $O(0,0)$ en OA heeft als richtingscoëfficiënt 2. Dus $a_s = 2$. De raaklijn aan c_1 in A heeft als richtingscoëfficiënt $-0,5$.

Deze raaklijn maakt een hoek van $\arctan(-0,5) \approx -26,6^\circ$ met de x -as.

- Herleid c_2 naar $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ met behulp van kwadraat-afsplitsen. Het middelpunt van c_2 is $M(3,0)$ en MA heeft als richtingscoëfficiënt -1 . De raaklijn aan c_2 in A heeft als richtingscoëfficiënt 1.

Deze raaklijn maakt een hoek van $\arctan(1) = 45^\circ$ met de x -as.

De hoek tussen deze raaklijnen is $45^\circ - -26,6^\circ \approx 72^\circ$.

De hoek tussen de raaklijnen is hetzelfde als de hoek tussen beide stralen naar het raakpunt. De berekening had daarom wel korter gekund.

Opgave 7

De twee cirkels $c_1: x^2 + y^2 = 10$ en $c_2: x^2 + y^2 = 8y - 14$ snijden elkaar in de punten A en B . Bereken de hoek waaronder ze elkaar snijden.

Opgave 8

De cirkel c_1 met middelpunt $M_1(1,2)$ en straal $\sqrt{5}$ en de cirkel c_2 met middelpunt $M_2(0,2)$ en straal $\sqrt{2}$ snijden elkaar in de punten P en Q . Bereken de hoek waaronder ze elkaar snijden.

Verwerken

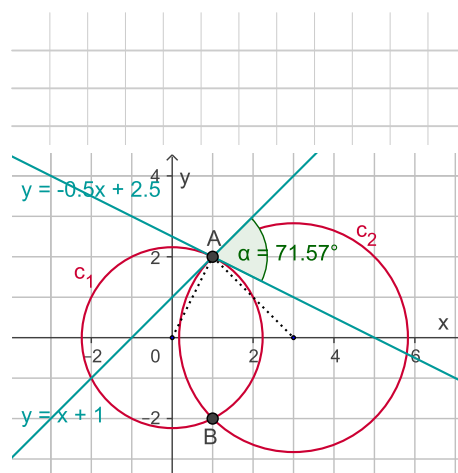
Opgave 9

De lijn $l: y = 2$ snijdt de cirkel $c: x^2 + y^2 = 16$. Bereken de hoek die l en c met elkaar maken.

Opgave 10

Gegeven de cirkel $c: (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 10$.

- Bereken de hoek waaronder c de y -as snijdt in graden nauwkeurig.
- Bereken de hoek waaronder c de lijn $y = x$ snijdt in graden op één decimaal nauwkeurig.



Figuur 3.5

Opgave 11

Bereken de hoek waaronder een cirkel met straal $\sqrt{13}$ en middelpunt $(2,4)$ een andere cirkel met middelpunt $(-2,0)$ en straal $\sqrt{5}$ snijdt, in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 12

Lijn m raakt de cirkel $c : x^2 + y^2 = 6,25$ in het punt $A(-2; 1,5)$. De punten $B(2,5; 0)$ en $C(1,5; -2)$ liggen op cirkel c . Toon aan dat de hoek tussen m en lijn AB even groot is als $\angle C$ van $\triangle ABC$.

Opgave 13

Het punt $Q(1,4)$ ligt buiten de cirkel $c : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$. Er zijn twee raaklijnen te tekenen vanuit Q aan cirkel c . De bijbehorende raakpunten zijn A en B .

- M is het middelpunt van c . Bereken $|QM|$.
- De lengtes van de stralen MA en MB zijn bekend. Bereken $|QA|$ en $|QB|$.
- De punten A en B liggen op een cirkel met middelpunt Q en straal $|QA|$. Stel een vergelijking van die cirkel c_2 op.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten A en B van c en c_2 .
- Stel de vergelijkingen op van de twee raaklijnen aan c die door Q gaan.

Opgave 14

Een cirkel snijdt de x -as onder een hoek van 45° in de punten $(1,0)$ en $(5,0)$.

Bereken het middelpunt en de straal van deze cirkel als het middelpunt boven de x -as ligt.

Toepassen**Opgave 15: Ingeschreven cirkel (1)**

De driehoek ABC heeft hoekpunten $A(-2,0)$, $B(2,0)$ en $C(0,2\sqrt{3})$.

- Toon aan dat driehoek ABC gelijkzijdig is.
- De ingeschreven cirkel van deze driehoek is de cirkel die alle drie de zijden raakt. Stel een vergelijking van deze cirkel op.

Opgave 16: Ingeschreven cirkel (2)

De punten $A(-2,0)$, $B(0, -4)$, $C(2,0)$ en $D(0,4)$ zijn hoekpunten van een ruit $ABCD$. De ingeschreven cirkel van deze ruit is de cirkel die alle vier de zijden raakt. Stel een vergelijking van deze cirkel op.

Testen

Opgave 17

Gegeven is de cirkel $c : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$.

- a Toon aan dat deze cirkel door $O(0,0)$ gaat en stel een vergelijking op van de raaklijn aan c in dit punt.
- b Bereken de hoek waaronder c de x -as snijdt. Rond af op één decimaal.
- c Er zijn twee lijnen met richtingscoëfficiënt 1,5 die deze cirkel raken. Welke twee lijnen zijn dat?

Opgave 18

Een cirkel raakt de lijn $l : y = 0,5x$ in het punt $P(4,2)$. Het middelpunt van deze cirkel ligt op de lijn $m : y = 2x + 2$. Onder welke hoek snijdt deze cirkel de y -as? Rond af op één decimaal.

1.4 Afstanden berekenen

Inleiding

Onder de afstand tussen twee objecten versta je altijd de kortste afstand. Maar wat is de kortste afstand van een punt tot een lijn? Of tussen twee lijnen, of een lijn en een cirkel, of tussen twee cirkels? Door je telkens de meetkundige situatie voor te stellen kun je deze vragen beantwoorden.

Je leert in dit onderwerp

- de afstand van een punt tot een lijn berekenen en dit toepassen.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen van (rechte en kromme) lijnen in het platte vlak;
- de vergelijking van een lijn loodrecht op een andere gegeven lijn opstellen.

Verkennen

Opgave V1

Teken lijn $l: 2x + 4y = 16$ en punt $A(3,5)$.

Hoe groot is de afstand van punt A tot lijn l ? En hoe bereken je die?

Uitleg

Bekijk de applet

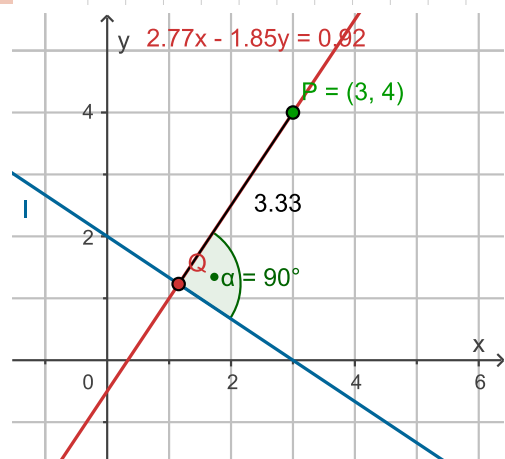
Hier zie je de lijn $l: 2x + 3y = 6$ en punt $P(3,4)$. De afstand van punt P tot lijn l geef je aan met $d(P,l)$ (de 'd' komt van 'distance', Engels voor 'afstand'). Het is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van punt P en lijn l . Je ziet dat dit loodrecht op de lijn staat. Dat is ook logisch, want de stelling van Pythagoras zegt dat elk ander verbindingslijnstuk langer is.

Het berekenen van die afstand kun je dus zo doen:

- Stel de vergelijking op van de lijn m door P en loodrecht op l .
- Bereken de coördinaten van punt Q , het snijpunt van m en l .
- Bereken de afstand tussen de punten P en Q .

Je ziet in de figuur hoe groot die kortste afstand is als je punt Q over lijn l beweegt.

Controleer of je met een berekening op hetzelfde getal uitkomt.



Figuur 4.1

Opgave 1

Gegeven is de lijn $l: 2x + 3y = 6$ en punt $P(3,4)$. Bereken de afstand tussen l en P . Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Bereken de afstand van $P(0,5)$ tot lijn $m: y = -0,5x + 10$ exact.

Theorie en voorbeelden**Om te onthouden****Bekijk de applet**

Onder de **afstand** tussen twee objecten wordt altijd de lengte van hun kortste verbindingslijnstuk verstaan. De afstand tussen twee objecten V_1 en V_2 noteer je als $d(V_1, V_2)$.

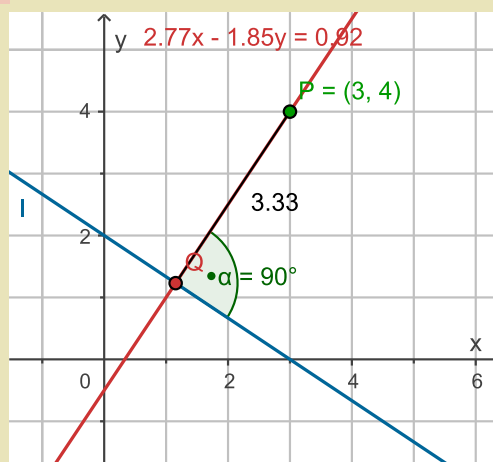
De afstand tussen twee punten $P(p_1, p_2)$ en $Q(q_1, q_2)$ is:

$$d(P, Q) = |PQ| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}.$$

De **afstand van een punt tot een lijn** is de lengte van het lijnstuk vanuit het punt en loodrecht op de lijn. De afstand van P tot l is $d(P, l)$ en kun je dus berekenen door:

- de vergelijking op te stellen van de lijn m door P en loodrecht l ;
- de coördinaten van punt Q , het snijpunt van m en l , te berekenen;
- de afstand tussen de punten P en Q te berekenen.

Je kunt met behulp van vergelijkbare methoden de afstand tussen twee lijnen, de afstand van een punt tot een cirkel of een lijn tot een cirkel, e.d., berekenen. Het is soms handig om te gebruiken dat de lijn $m: bx - ay = d$ loodrecht op $l: ax + by = c$ staat, waarin d afhangt van het punt waar m doorheen moet gaan. Met behulp van richtingscoëfficiënten kun je dat zelf aantonen.



Figuur 4.2

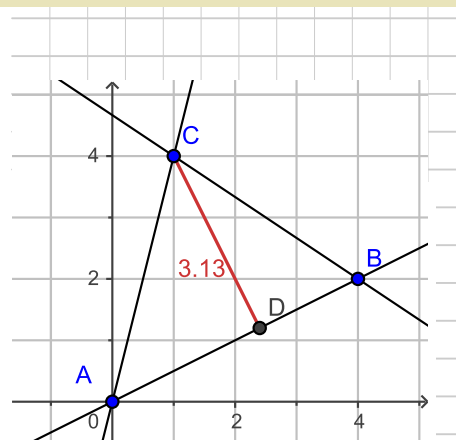
Voorbeeld 1**Bekijk de applet**

Je ziet hier $\triangle ABC$ met daarin de hoogtelijn CD getekend. Met 'hoogtelijn' wordt meestal het lijnstuk CD bedoeld, dus een hoogtelijn heeft een bepaalde lengte. Ga door berekening na of de lengte in de figuur klopt.

Antwoord

De lengte van hoogtelijn CD is gelijk aan de afstand van C tot lijn AB . De afstand van C tot lijn AB kun je zo berekenen:

- de vergelijking van AB is: $y = \frac{1}{2}x$;
- de vergelijking van de lijn m door C en loodrecht AB is: $y = -2x + 6$;



Figuur 4.3

- de coördinaten van het snijpunt van m en AB zijn: $D\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$;
- de afstand tussen de punten C en D is:

$$|CD| = \sqrt{\left(\frac{12}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{6}{5} - 4\right)^2} \approx 3,13.$$

Opgave 3

Gegeven is driehoek ABC met $A(0,0)$, $B(4,2)$ en $C(1,4)$. Bereken de lengte van de hoogtelijnen uit A en uit B . Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

Oefen met de applet in **Voorbeeld 1** het berekenen van lengtes van hoogtelijnen.

Opgave 5

Bereken de afstand van $P(25, -13)$ tot de lijn $l : 5x - 3y = 30$. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Bekijk in de applet wat je bedoelt met de afstand van een lijn $l : 2x + 3y = 6$ tot een cirkel met middelpunt $M(3,4)$ en straal 2. (Beweeg punt Q over de lijn.) Bereken de afstand van lijn l tot cirkel c .

Antwoord

Het gaat om de kortste lengte van lijnstuk QS . Dat bereik je als lijn MQ loodrecht op l staat.

De vergelijking van die lijn MQ is: $3x - 2y = 1$.

(Ga dat na!)

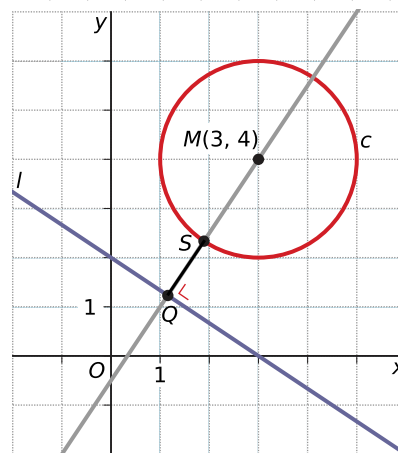
Het punt Q dat bij de kortste afstand $|QS|$ hoort is $\left(\frac{33}{26}, \frac{15}{13}\right)$.

Hiermee bereken je de lengte van MQ en dan vind je de kortste lengte van SQ door de straal van de cirkel daarvan af te trekken. Ga na, dat je het juiste antwoord vindt.

Opgave 6

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 10$ en de lijn $l : x + y = 2$.

- Wat versta je onder de afstand van O tot cirkel c ? Bereken deze afstand in twee decimalen nauwkeurig.
- Wat versta je onder de afstand van lijn l tot cirkel c ? Bereken deze afstand in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken ook de afstand tussen cirkel c en de cirkel k om O en door $(1,1)$ in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 4.4

Opgave 7

Bereken de afstand tussen de twee lijnen $l : 2x + 4y = 7$ en $m : y = 6 - \frac{1}{2}x$. Rond af op twee decimalen nauwkeurig. Hint: maak een lijn door O en loodrecht op de gegeven lijnen.

Opgave 8

Wanneer heeft het zin om te vragen naar de afstand tussen twee rechte lijnen? Hoeveel bedraagt die afstand in alle andere gevallen?

Verwerken**Opgave 9**

Bereken de gegeven afstanden. Rond telkens af op twee decimalen nauwkeurig.

- a Punt $P(2,3)$ tot lijn $l : 4x - 5y = 40$.
- b Punt $P(2,3)$ tot cirkel $c : (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$.
- c Lijn $l : 4x - 5y = 40$ tot cirkel $c : (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$.

Opgave 10

Toon aan dat de lijnen $m : y = 4x - 12$ en $n : y = 4x + 22$ dezelfde afstand hebben tot de lijn $l : y = 4x + 5$.

Opgave 11

Bereken in de volgende gevallen de afstand van cirkel c_1 tot cirkel c_2 . Rond telkens af op twee decimalen nauwkeurig.

- a $c_1 : (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$ en c_2 heeft middelpunt $M_2(2,1)$ en straal 1.
- b $c_1 : (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$ en c_2 heeft middelpunt $M_2(2,3)$ en straal 1.
- c $c_1 : (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$ en c_2 heeft middelpunt $M_2(2,1)$ en straal 4.

Opgave 12

Een driehoek ABC is gegeven door $A(1,0)$, $B(4,8)$ en $C(12,2)$. Geef de vergelijkingen van de hoogtelijnen.

Opgave 13

Een driehoek PQR is gegeven door $P(12,5)$, $Q(35,7)$ en $R(40,12)$.

- a Bereken de lengte van de hoogtelijn uit P . Rond af op twee decimalen.
- b Bereken de oppervlakte van $\triangle PQR$.

Toepassen

Opgave 14: Hoogte berekenen vanuit oppervlakte

Soms kun je de lengte van een hoogtelijn in een driehoek snel vinden vanuit de oppervlakte. Neem $\triangle ABC$ met $A(1,0)$, $B(5,2)$ en $C(2,6)$. De afstand van punt C tot lijn AB is de lengte van de hoogtelijn CD in deze driehoek.

- a Bepaal de oppervlakte van $\triangle ABC$ met behulp van het rooster.
- b Bereken nu de lengte van basis AB exact.
- c Bereken $|CD|$ exact, vanuit de formule voor de oppervlakte van een driehoek.

Pas deze techniek toe om de afstand van een punt P tot een lijn l te berekenen. Bepaal eerst twee (willekeurige) punten A en B op l . Bereken vervolgens de lengte van de hoogtelijn PS in $\triangle PAB$ vanuit de oppervlakte van die driehoek.

- d Bereken op deze manier exact de afstand van $P(2,10)$ tot de lijn $l: y = 2x$.

Testen

Opgave 15

Bereken de afstand van $A(0,12)$ tot de lijn $l: y = 4x + 5$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 16

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $O(0,0)$ en straal 7. Bereken de afstand van lijn $l: -3x + 5y = 68$ tot deze cirkel. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

1.5 Van 3D naar 2D

Inleiding

Onze wereld is driedimensionaal: 3D. Maar daarin is het vaak nogal lastig om bepaalde afmetingen te berekenen. Berekeningen doe je het liefst in driehoeken, want dan kun je allerlei bekende rekenmethodes gebruiken. Je maakt dus van een 3D probleem meestal een 2D probleem.

Je leert in dit onderwerp

- problemen in ruimtelijke figuren vertalen naar berekeningen in platte vlakken;
- (analytische) meetkunde toepassen in 3D.

Voorkennis

- werken met lijnen en cirkels in het platte vlak;
- werken met goniometrie, de sinusregel en de cosinusregel.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 20 cm lang zijn. De vraag is hoe groot de grootste bol is die nog juist binnen de piramide past. In het vooraanzicht zie je beter hoe die bol er uit ziet. Om aan te geven dat A en D recht achter elkaar liggen staat links onder bij de figuur A, D .

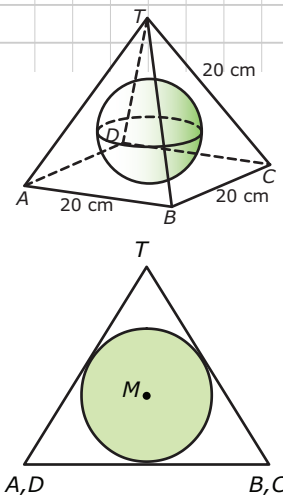
- In welke richting bekijk je de figuur als je dit vooraanzicht ziet?
- Je wilt de straal van de bol berekenen. Kun je die op (een) geschikte plek(ken) in de figuur aangeven?
- Kun je driehoeken bedenken waarin je die straal zou kunnen uitrekenen?

Uitleg

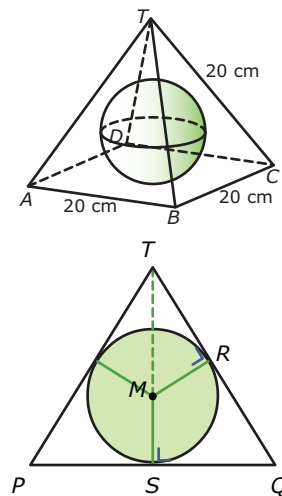
Om de straal te berekenen van de grootste bol die nog in deze piramide past, moet je bedenken dat deze bol precies tegen de zijvlakken van de piramide aan gaat komen. Om dat goed te kunnen zien kun je het beste even de aanzichten van piramide met bol bekijken.

Het vooraanzicht dat hier is getekend, is hetzelfde als $\triangle PQT$ als P het midden van AD en Q het midden van BC is. Dit noem je een doorsnede van de piramide met bol en het vlak door T , P en Q . Hierin is de bol een cirkel die raakt aan PQ , PT en QT . Er zijn dus stralen vanuit het middelpunt M te tekenen die loodrecht op deze zijden staan. Van $\triangle PQT$ weet je alle zijden: $PQ = 20$ en $PT = QT = \sqrt{300}$.

Neem je r voor de straal van de bol, dan kun je de gelijkvormigheid van de driehoeken QST en MRT gebruiken om r uit te rekenen.



Figuur 5.1



Figuur 5.2

Opgave 1

Bekijk het probleem in de [Uitleg](#).

- Waarom is het handig om een geschikte doorsnede te tekenen?
- Laat met een berekening zien, dat $PT = QT = \sqrt{300}$.
- Je weet dat $|MS| = r$. Laat zien dat $|TM| = \sqrt{200} - r$.
- Waarom zijn de driehoeken QST en MRT gelijkvormig?
- Bereken nu r in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Bij de vorige opgave is het werken met gelijkvormigheid niet echt noodzakelijk. Je kunt ook werken met goniometrie en bijvoorbeeld $\angle Q$ uitrekenen. Laat zien, hoe je zo r berekent op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Een ander probleem is: "Hoeveel bedraagt de afstand van deze bol tot de ribben van de piramide?"

- Nu is $\triangle ACT$ een geschikte doorsnede om de gevraagde afstand uit te rekenen. Waarom?
- Teken zelf die driehoek op schaal en teken de cirkel die de bol voorstelt er in. (De straal heb je in de voorgaande opgaven uitgerekend.)
- Geef in je figuur de gevraagde afstand aan.
- Bereken de gevraagde afstand. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden**Om te onthouden**

Onze wereld is driedimensionaal. Maar daarin is het vaak nogal lastig om bepaalde afmetingen te berekenen. Berekeningen doe je het liefst in driehoeken, want dan kun je allerlei bekende rekenmethodes zoals goniometrie, de stelling van Pythagoras, werken met gelijkvormigheid, de sinusregel en/of de cosinusregel gebruiken. Je maakt dus van een 3D probleem meestal een 2D probleem. Dit doe je door:

- een geschikte doorsnede uit de figuur te halen en die op schaal (of ware grootte) te tekenen of er een schets van te maken;
- een aanzicht te tekenen;
- een uitslag te maken;
- eventueel een geschikt assenstelsel in te voeren en analytische meetkunde toe te passen.

Bekijk de voorbeelden om te zien hoe dit in zijn werk kan gaan.

Voorbeeld 1

Hier zie je de zolder van een twee-onder-één-kap woning. De zoldervloer $ABCD$ is een rechthoek van 10 m bij 7,2 m. De zijmuur ABT is een gelijkbenige driehoek die loodrecht op de zoldervloer staat. De vlakken BCT , ADT en DCT zijn de dakstukken. Iemand wil binnen deze zolder een zuiver rechthoekige kamer maken met een hoogte van 2,5 m. Bereken de afmetingen van die kamer.

Antwoord

Om rechte hoeken ook inderdaad recht te zien kun je in dit geval goed met aanzichten werken. Vooral een vooraanzicht en een zijaanzicht zijn handig omdat daarin zowel de rechte hoeken als de schuine vlakken zichtbaar zijn. Aan deze twee aanzichten zie je, dat er het beste kan worden gerekend in $\triangle ABT$ (want die is gelijk aan het vooraanzicht) en in $\triangle SRT$ als S het midden van AB en R dat van CD is (deze driehoek is een doorsnede die gelijk is aan het zijaanzicht). Met gelijkvormigheid of goniometrie bereken je nu de afmetingen van de kamer.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je de zolder van een twee-onder-één-kap woning. De zoldervloer $ABCD$ is een rechthoek van 10 m bij 7,2 m. De zijmuur ABT is een gelijkbenige driehoek die loodrecht op de zoldervloer staat. De vlakken BCT , ADT en DCT zijn de dakstukken. Iemand wil binnen deze zolder een zuiver rechthoekige kamer maken met een hoogte van 2,5 m. Je gaat de afmetingen van die kamer berekenen.

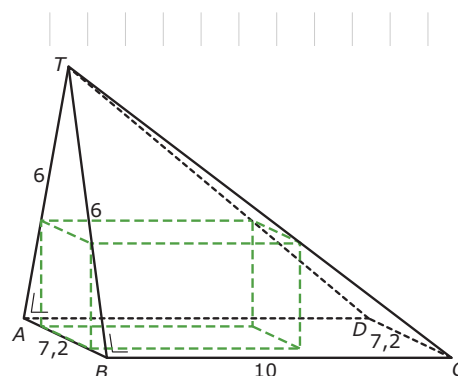
- Teken de twee driehoeken waarin je gaat rekenen. Bereken eerst $|TS|$ om goede figuren op schaal te kunnen tekenen.
- Zet alle bekende afmetingen in je figuren.
- Gebruik $\triangle SBT$ om de breedte van de kamer te berekenen.
- Gebruik $\triangle SRT$ om de lengte van de kamer te berekenen.

Opgave 5

Bekijk de zolderverdieping van de twee-onder-één-kap woning in de figuur in **Voorbeeld 1**.

Wil je de dakoppervlakte berekenen (bijvoorbeeld omdat er een nieuwe dakbedekking nodig is), dan gebruik je een uitslag van de figuur.

- Teken de uitslag op schaal 1 : 200.
- Bereken de oppervlakte van het dak van deze zolderverdieping. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 5.3

Voorbeeld 2

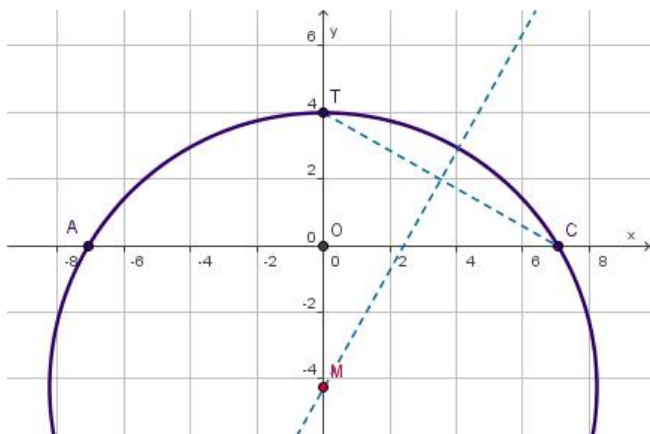
Een bedrijf slaat zijn afval op in een grote vierkante verdiepte betonnen bak. Om stankoverlast tegen te gaan wordt deze bak overdekt met een groot stevig tentdoek dat wordt opgespannen over twee bogen. In de figuur stelt $ABCD$ de bovenrand van de ingegraven bak voor, een vierkant van 10 m bij 10 m. De bogen ATC en BTD zijn identieke delen van een cirkel. Punt T ligt 4 m boven vlak $ABCD$. Bereken de straal van de cirkel waar zo'n boog een deel van is en bereken hoe ver het middelpunt van die cirkel onder vlak $ABCD$ ligt.

Antwoord

Bekijk cirkelboog ATC . Neem aan dat het snijpunt van AC en BD de oorsprong is van een assenstelsel Oxy waarbij punt T op de y -as ligt en de punten A en C op de x -as liggen. Je kunt dan de cirkel door A , C en T construeren met GeoGebra. Je bepaalt dan eerst de coördinaten van deze punten en construeert dan het middelpunt van de bedoelde cirkel met behulp van één of twee middelloodlijnen. (Je hebt aan één middelloodlijn genoeg omdat je weet dat het middelpunt op de y -as ligt.)

Opgave 6

Bekijk het probleem in [Voorbeeld 2](#).



Figuur 5.5

In de grafiek zie je cirkelboog ATC in een assenstelsel.

- Laat zien dat $A(-5\sqrt{2}, 0)$ en $C(5\sqrt{2}, 0)$ is.
- Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van CT .
- Bereken de coördinaten van punt M door deze middelloodlijn de snijden met de y -as.
- Bereken nu de straal van de cirkel.

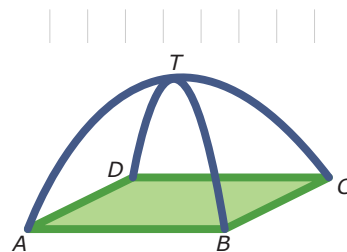
Opgave 7

Zie nogmaals cirkelboog ATC in [Opgave 6](#).

Hierbij is $A(-5\sqrt{2}, 0)$, $C(5\sqrt{2}, 0)$ en $M(0; -4,25)$.

De hoek die boog ATC met het vlak $ABCD$ maakt, is de hoek tussen deze cirkelboog en de x -as.

Bereken deze hoek in graden nauwkeurig.



Figuur 5.4

Opgave 8

Zie nogmaals cirkelboog ATC in [Opgave 6](#).

Hierbij is $A(-5\sqrt{2}, 0)$ en $C(5\sqrt{2}, 0)$.

Je zou de coördinaten van M en de straal van de cirkel ook kunnen vinden aan de hand van gelijkvormige driehoeken. Noem het midden van CT bijvoorbeeld S . MS is de middelloodlijn van CT .

- Leg uit waarom de driehoeken OCT en SMT gelijkvormig zijn.
- Laat zien hoe je op die manier TM berekent.

Voorbeeld 3

In de figuur zie je een betonnen zuil die wordt gebruikt in een viaduct als ondersteuning van het bovenliggende wegdek. Zowel het ondervlak $ABCD$ als het bovenzvlak $EFGH$ zijn rechthoeken van 1 m bij 4 m. Alle opstaande zijvlakken zijn gelijke symmetrische trapezia. Je wilt de afstand tussen ondervlak $ABCD$ en bovenzvlak $EFGH$ berekenen.

Antwoord

Die afstand kun je het beste zien in een vooraanzicht. Zo'n vooraanzicht heeft dezelfde vorm als een verticale dwarsdoorsnede $ABPQ$ van de figuur. De gevraagde afstand QS zie je in de figuur aangegeven.

Je wilt nu rekenen in de doorsnede $ABPQ$, maar dan moet je wel eerst de lengtes van AQ en BP weten. En daarvoor bekijk je één van de zijvlakken, bijvoorbeeld $BCGF$ waarin je de lengte van BP kunt berekenen.

Opgave 9

Bekijk het probleem in [Voorbeeld 3](#).

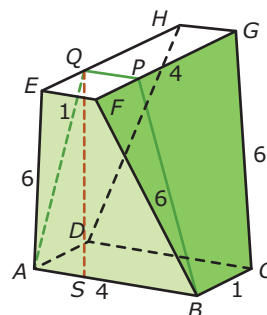
Soms is het handig om in dit soort situaties goniometrie, of zelfs de sinusregel of de cosinusregel te gebruiken.

- Bereken de afstand tussen de punten B en G exact.
- Bereken de afstand tussen de punten A en G exact.
Er zitten ook allerlei hoeken in. Nu is het gebruik van goniometrie onvermijdelijk.
- Bereken $\angle BAE$ in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken $\angle AGC$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

De betonnen zuil in [Voorbeeld 3](#) heeft een bijzondere eigenschap. Als je op hoogte x boven het grondvlak een horizontale doorsnede maakt, dan heeft zo'n doorsnede altijd dezelfde omtrek.

Toon dit aan.



Figuur 5.6

Voorbeeld 4

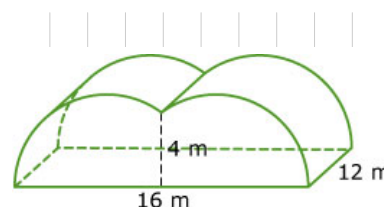
Je ziet hier een opslagruimte die bestaat uit twee in elkaar gescho-
ven gelijke halve cilinders waarvan de middelpunten op de x -as
liggen. De gegeven afmetingen staan in de figuur. Hoe hoog is de-
ze opslagruimte?

Antwoord

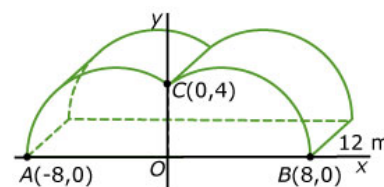
Maak een cartesisch Oxy -assenstelsel met als oorsprong het punt
recht onder het snijpunt van beide cirkels. De punten $A(-8,0)$,
 $B(8,0)$ en $C(0,4)$ ontstaan dan vanzelf.

Je kunt daarmee middelpunt van beide cirkels berekenen. Dit is het
snijpunt van de middelloodlijn van AC (dan wel BC) met de x -as.

De middelloodlijn van AC heeft vergelijking $y = -2x - 6$. De x -as
is $y = 0$. Dus hun snijpunt is $(-3,0)$. De straal van beide cirkels is
daarom 5. De opslagruimte is 5 m hoog.



Figuur 5.7



Figuur 5.8

Opgave 11

Bekijk **Voorbeeld 4**. Je wil de hoogte van de opslagruimte bereke-
nen.

- Bepaal de vergelijking van de middelloodlijn van BC .
- Laat met behulp van het antwoord bij a zien, dat de opslagruimte
5 m hoog is.

Opgave 12

In het Oxy -stelsel in **Voorbeeld 4** liggen de middelpunten van de
cirkels op $M_1(-3,0)$ en $M_2(3,0)$.

- Bij het grootste deel van de vloeroppervlakte hoort een hoogte van
4 meter of meer. Hoe groot is die vloeroppervlakte?
- In punt C komen twee cirkels bij elkaar. Welke hoek maken die
cirkels in C met elkaar? Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

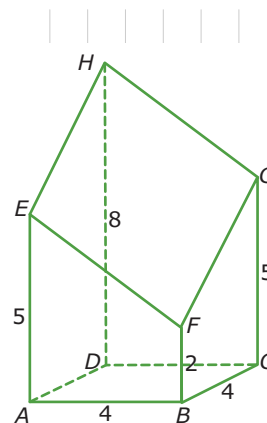
Opgave 13

Een bestelbus levert schilderijen. De opslagbak achterin heeft een
lengte van 2 m, breedte 1,6 m en hoogte 1,3 m. Bereken de op-
pervlakte van het grootst mogelijke schilderij dat erin past, in m^2
in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 14

Dit is een afgeknotte balk $ABCD.EFGH$. De afmetingen vind je in de figuur.

- Bereken de hoek tussen de lijnstukken EH en HG . Rond af op twee decimalen.
- Bereken de afstand van punt G tot de lijn EH . Rond af op twee decimalen.

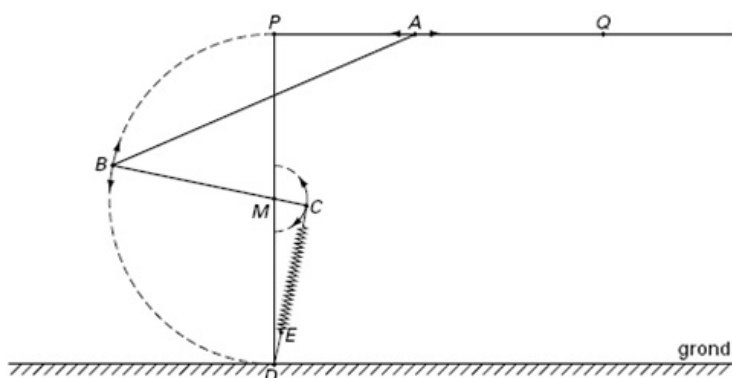


Figuur 5.9

Opgave 15

In de figuur hiernaast is een deel te zien van een kanteldeur van een garagebox. In figuur hieronder is een schematische tekening gemaakt van het zijaanzicht van deze deur. De kanteldeur is door middel van een metalen frame aan de muur bevestigd. PD en PQ zijn twee onderdelen van dat frame. Bij het sluiten en openen van de kanteldeur glijdt het hoekpunt A van deze deur langs de horizontale rail PQ . Het hoekpunt B van de deur is via een metalen arm BC verbonden met het midden M van PD . Bij het sluiten en openen doorloopt B een halve cirkel, evenals punt C . Dit punt C is door middel van een veer CE verbonden met punt D op de grond. Deze veer zorgt voor tegenwicht zodat de deur bij sluiten en openen hanteerbaar blijft. Enige gegevens:

- $AB = PQ = PD = 18$ dm.
- Het draaipunt M is het midden van PD .
- $MC = 3$ dm.



Figuur 5.11

Breng een rechthoekig Oxy -assenstelsel aan, zodat dat de oorsprong punt D is, de x -as over de grond loopt evenwijdig met PQ en PD op de y -as ligt. De eenheid op beide assen is 1 dm.

- Stel een vergelijking op van de cirkel die punt C voor de helft doorloopt.
- Een aanhangwagentje, geparkeerd in de garage, is 8 dm hoog. Bereken de afstand van punt B tot lijnstuk PD als de kanteldeur AB in de stand staat waarbij het wagentje er nog net onderdoor kan rijden. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.



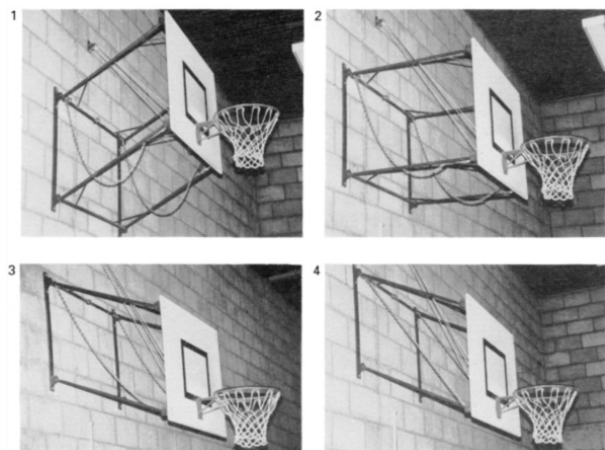
Figuur 5.10

- c Bereken de lengte van PA als de afstand van punt B tot lijnstuk PD zo groot mogelijk is. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde B1,2 in 1999, tweede tijdvak)

Opgave 16

Hier zie je vier momentopnamen van het neerlaten van een basketbalbord.

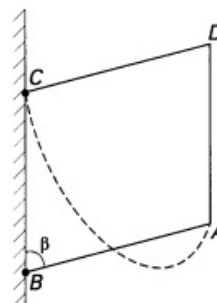


Figuur 5.13

De stellage bestaat uit een frame met een rechthoekig bord waaraan de basket bevestigd is. Twee even lange kettingen dienen als beveiliging tegen vallen of te ver zakken van het geheel. Het zijaanzicht van het frame is een parallellogram $ABCD$. Hierin is $BC = 90$ cm en $AB = 100$ cm. In de gymzaal waarin de foto's zijn genomen zit bevestigingspunt B op een hoogte van 280 cm van de grond. Eén van de kettingen is bevestigd in A en C . De ketting is zo lang dat bij het neerlaten van de stellage punt A niet lager kan komen dan 250 cm boven de begane grond.

- Bereken de lengte van de ketting AC in twee decimalen nauwkeurig.
- Het frame wordt helemaal vanaf de laagste stand omhoog getrokken tot aan de muur. Tijdens deze beweging beschrijft punt A een cirkelboog. Bereken de lengte van de baan die punt A aflegt. Rond af op twee decimalen.
- Bereken de afstand van punt A tot de muur op het moment dat A op 300 cm boven de begane grond zit in twee decimalen nauwkeurig.
- De afstand a tussen de stangen AB en CD is de lengte van het kortste lijnstuk tussen beide. Deze lengte hangt af van de grootte van hoek β . Druk die afstand a uit in β .
- Bereken de afstand van punt A tot de muur op het moment dat afstand a precies 45 cm is.

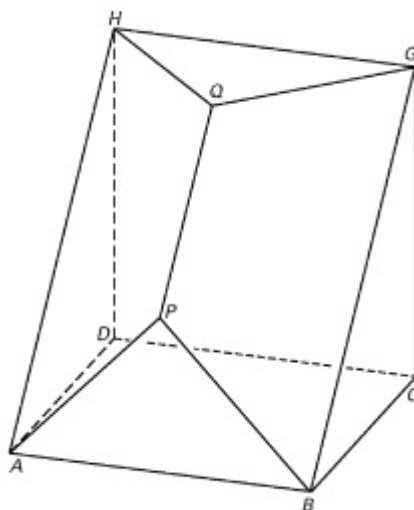
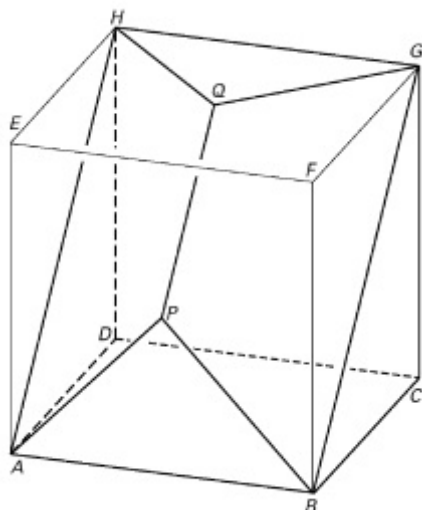
(bron: examen havo wiskunde B1,2 in 1994, tweede tijdvak)



Figuur 5.12

Opgave 17

In de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 6 cm past een lichaam L met hoekpunten A, B, C, D, P, Q, G en H . P is het snijpunt van AF en BE , Q is het snijpunt van EG en FH . In de rechter figuur is L apart getekend.

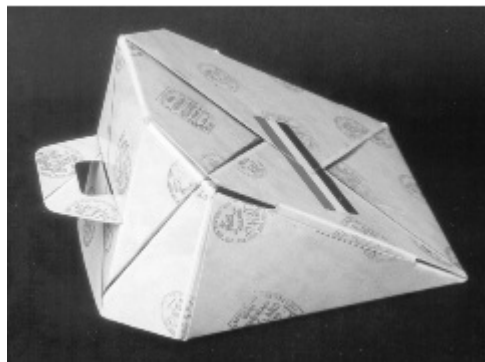
**Figuur 5.14**

- a** Bereken de afstand van punt P tot punt G in één decimaal nauwkeurig.
- b** Bereken de grootte van $\angle BPQ$ in graden nauwkeurig.
Punt R is het midden van GH . In het vlak door de punten P, Q en R wordt een Oxy -assenstelsel aangebracht zo, dat de oorsprong O het midden is van AB , de x -as evenwijdig is met BC en de y -as door de punten O en P gaat.
- c** De afstand tussen de lijnen PQ en CD is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen beide. Teken dit lijnstuk in het beschreven assenstelsel.
- d** Bereken de lengte van het in c bedoelde lijnstuk in één decimaal nauwkeurig.
- e** Door P, Q en R gaat een cirkel c . Stel van deze cirkel een vergelijking op.
- f** Bereken de lengte van het deel van de cirkel tussen de punten P en Q in twee decimalen nauwkeurig.

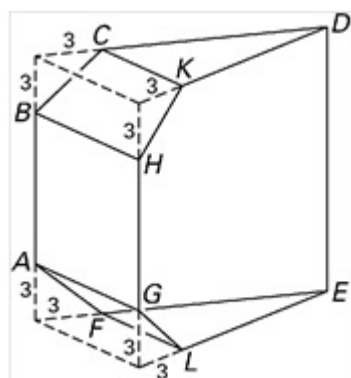
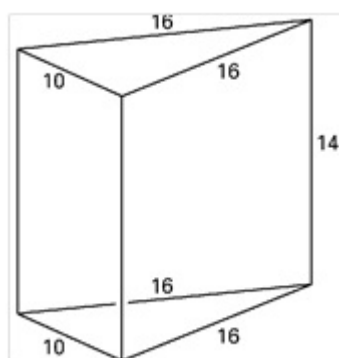
(naar: examen havo wiskunde B1,2 in 2000)

Opgave 18

In een kaaswinkel is het mogelijk om Leerdammer kaas te laten verpakken in een cadeauverpakking van karton. Zie de foto hier-naast. Bij de volgende vragen gaan we steeds uit van een model van deze kaasdoos. Dit model is ontstaan uit een recht driezijdig prisma door daaruit twee gelijke stukken weg te halen. Zie de figuren hieronder. De lijnen CK , BH , AG en FL zijn evenwijdig. De afmetingen in de figuren zijn gegeven in cm.

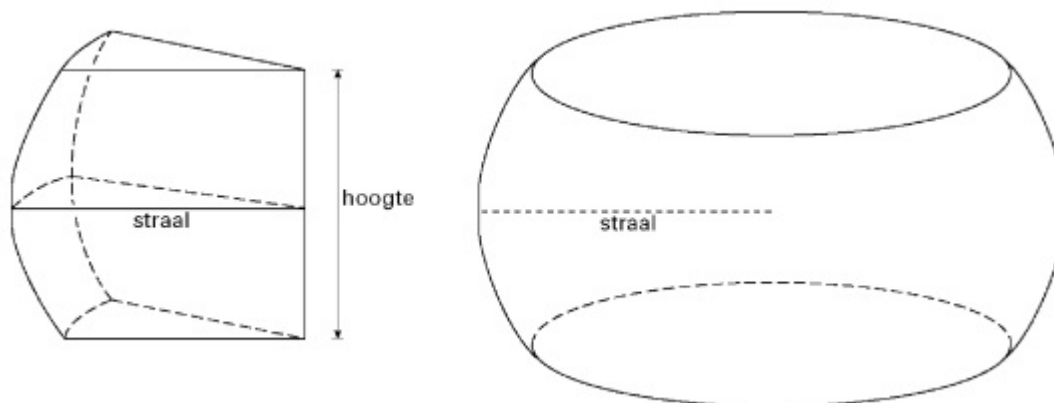


Figuur 5.15



Figuur 5.16

Hieronder is een punt van een Leerdammer kaas getekend, met daarnaast de gehele kaas. De kaas is een bolsegment, met een hoogte gelijk aan DE uit de figuur hierboven en de straal is gelijk aan de afstand van DE tot het vlak $BHGA$.



Figuur 5.17

- a** Bereken de straal van de Leerdammer kaas in één decimaal nauwkeurig.

De Leerdammer kaas wordt in een aantal gelijke punten gesneden, zoals in de figuur hierboven. Elke punt wordt verpakt in een kaasdoos. Hoe kleiner de punten, hoe meer kaasdozen er nodig zijn.

- b** Bereken het minimale aantal kaasdozen dat nodig is om al deze punten te verpakken.

- c Teken op schaal 1 : 2 een dwarsdoorsnede van de kaasdoos door de punten D en E en het midden van AG . Teken daarin ook de dwarsdoorsnede van de kaaspunt en onderzoek of die kaaspunt ook echt in de kaasdoos past.
- d Eén van de zijvlakken van de kaasdoos is vlak $BHKC$. Teken dit vlak op ware grootte en bereken de grootte van de hoeken van dit vlak in graden nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde B1,2 in 2001, tweede tijdvak)

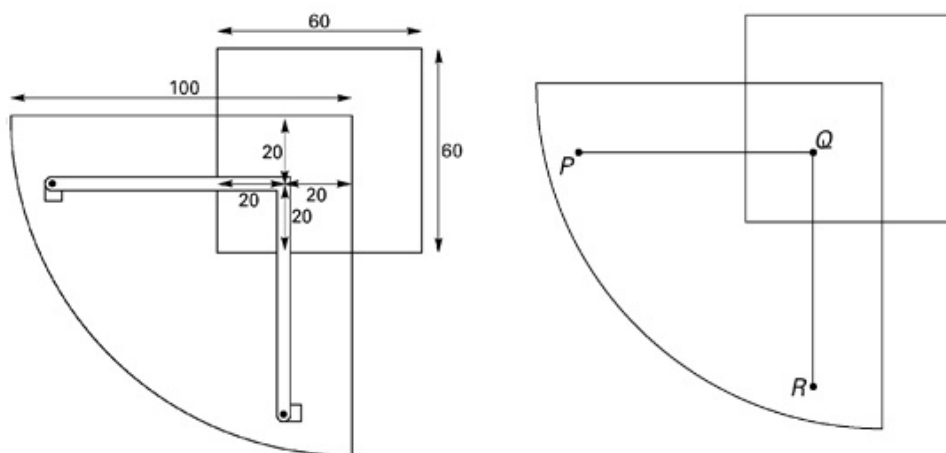
Testen

Opgave 19

De tafel op deze foto bestaat uit een rechthoekig blok en een glazen plaat in de vorm van een kwart cirkel. De glazen plaat is gemonteerd op een metalen buizenconstructie met drie poten. Eén van de poten is bevestigd in het blok. De afstand van deze poot tot de twee dichtstbijzijnde ribben van het blok is 20 cm; de afstand tot de rechte zijden van de glasplaat is ook 20 cm. Enkele maten van blok en glasplaat zijn aangegeven in het bovenaanzicht in de linker figuur hieronder. In deze opgave wordt de dikte van de poten verwaarloosd. In de rechter figuur is dit schematisch aangegeven. P , Q en R zijn de punten op de glasplaat recht boven de poten. De glasplaat kan draaien om de poot in het blok (onder het punt Q).



Figuur 5.18



Figuur 5.19

- a Bereken hoe lang PQ en RQ in minimaal moeten zijn om draaien van de glasplaat over 360° mogelijk te maken. Rond je antwoord naar boven af op een geheel aantal centimeters.

Als de glasplaat gaat draaien om punt Q dan beschrijven de twee punten op de glasplaat die het verst van Q af liggen dezelfde cirkel c met middelpunt Q . Breng een assenstelsel aan met als oorsprong punt Q en de assen evenwijdig aan de zijden van het bovenvlak van het rechthoekige blok waar de tafel op gemonteerd is.

- b Stel een vergelijking op van cirkel c .

In een kamer wordt de tafel met een zijvlak van het blok tegen een muur gezet zo, dat punt Q dan 40 cm van de muur aflight. Er zijn twee punten A en B waar de glasplaat tegen de muur kan komen.

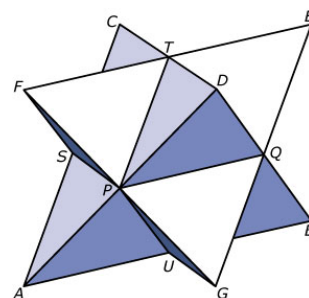
- c Bereken de afstand tussen de twee punten A en B waar de glasplaat tegen de muur kan komen. Geef je antwoord in gehele centimeters nauwkeurig.
- d Als de glasplaat tegen de muur rust, dan maakt de cirkelvormige rand van de glasplaat een bepaalde hoek met de muur. Bereken de grootte van die hoek in graden nauwkeurig.

(naar: examen wiskunde B1,2 in 2000)

Opgave 20

De figuur die je hiernaast ziet heet een Keplerster, genoemd naar de astronoom **Johannes Kepler (1571–1630)**. Je kunt de figuur opvatten als twee regelmatige viervlakken door elkaar, namelijk de viervlakken $ABCD$ en $EFGH$. Van die viervlakken zijn alle ribben 8 cm. Viervlak $ABCD$ en viervlak $EFGH$ doordringen elkaar zo, dat de ribben middendoor gedeeld worden. P, Q, R, S, T en U zijn de middens van de ribben van de twee viervlakken.

- a Bereken de afstand tussen de punten T en U exact.
- b Punt M is het midden van PS . Bereken de grootte van $\angle AMF$. Rond af op één decimaal.
- c De kleinste bol waar de Keplerster nog precies in past gaat door de punten A, B, E en F . De doorsnede van vlak $ABEF$ en die bol is een cirkel c . Bereken de straal van c exact.
- d Bereken ook de lengte van de cirkelboog tussen de punten E en F . Rond af op één decimaal.



Figuur 5.20

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Hoeken en afstanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- een kwadraat afsplitsen
- raaklijn aan een cirkel, raakpunt
- de hoek tussen een lijn en een cirkel, tussen twee cirkels
- de afstand van een punt tot een lijn, van een punt tot een cirkel, tussen twee evenwijdige lijnen en van een lijn tot een cirkel
- analytische meetkunde en goniometrie, de sinus- en cosinusregel

Activiteitenlijst

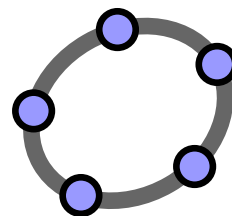
- door kwadraat afsplitsen middelpunt en straal van een cirkel bepalen
- nagaan of een lijn een cirkel snijdt, raakt of mijdt — met behulp van de discriminantmethode een vergelijking opstellen van een lijn die een cirkel raakt of een cirkel die een lijn raakt
- met behulp van de loodrechte stand van raaklijn en straal naar raakpunt de vergelijking van een raaklijn aan een cirkel opstellen — de hoek tussen een lijn en een cirkel en tussen twee cirkels berekenen
- de afstand berekenen tussen twee punten, van een punt tot een lijn of een cirkel en van een lijn tot een evenwijdige lijn of een cirkel
- meetkundige problemen in drie dimensies vertalen naar berekeningen in twee dimensies — analytische meetkunde en goniometrie, de sinusregel en de cosinusregel toepassen

Achtergronden

Bij het werken aan wiskunde wordt veel gebruik gemaakt van **Geogebra**.

Geogebra is een interactief computerprogramma bedoeld voor (analytische) meetkunde, ruimtemeetkunde, statistiek en werken met functies. Het is bedoeld voor het leren van wiskunde, zoals je hebt gemerkt. Je kunt het jezelf gemakkelijk aanleren en het is gratis toegankelijk via www.geogebra.org.

Als het goed is heb je er ook al ruimschoots mee gewerkt, zie [de Geogebra-practica](#).



Figuur 6.1

Geogebra is in 2001 ontwikkeld door Markus Hohenwarter aan de universiteit van Salzburg (als onderdeel van zijn afstudeerscriptie). Hij heeft dit doorontwikkeld met vrijwillige software ontwikkelaars over de hele wereld. Het wordt tegenwoordig beheerd vanuit de universiteit van Linz in Oostenrijk en kent een grote internationale community.

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 12x - 10$ en c_2 met middelpunt $M_2(4,2)$ en straal $\sqrt{10}$.

- Bereken het middelpunt M_1 en de straal r_1 van c_1 exact.
- Bereken de snijpunten van c_1 en c_2 .
- Bereken de afstand van M_2 tot cirkel c_1 exact.
- Bereken de hoek waaronder beide cirkels elkaar snijden in één decimaal.
- De raaklijn aan c_1 in het punt $P(7,5)$ snijdt de x -as in Q . Bereken de coördinaten van Q .
- Bereken de afstand van de raaklijn door P tot punt M_2 in twee decimalen.

Opgave 2

Stel een vergelijking op van cirkel c .

- Cirkel c snijdt van de lijn $y = 4$ een lijnstuk met lengte 4 af, gaat door $P(-5,2)$ en heeft een middelpunt M op de x -as.
- Cirkel c gaat door de punten $A(0,2)$, $B(4,0)$ en $C(6,14)$.

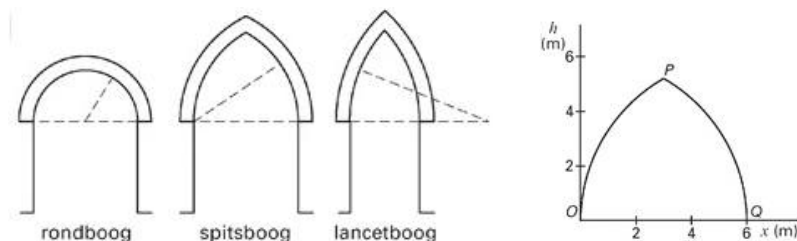
Opgave 3

Een bol met straal 12 cm ligt in een vaas waarvan de open binnenkant een zuivere kegelvorm van hoogte 30 cm en diameter 30 cm heeft. De vraag is: Steekt de bol boven de bovenrand van de vaas uit? En zo ja hoeveel? Je lost dit probleem op door gebruik te maken van analytische meetkunde.

- Teken een dwarsdoorsnede van kegel en bol in een cartesisch assenstelsel. Neem voor de top van de kegel $O(0,0)$ en laat de hoogte van de kegel samenvallen met de y -as.
- Kies voor het middelpunt van de bol $M(0,m)$ en stel een bijpassende vergelijking voor de bol op.
- Welke twee raaklijnen aan de bol kun je nu gebruiken om het probleem op te lossen?
- Bepaal door berekening m en bereken hoever de bol boven de kegel uit steekt of hoeveel de rand van de kegel boven de bol zit.
- Hoe had je dit probleem zonder analytische meetkunde kunnen oplossen?

Opgave 4

Al heel lang worden in bouwwerken boogconstructies gebruikt om grote ruimten te overspannen. Hier zie je enkele soorten bogen, waaronder de spitsboog. Een spitsboog is opgebouwd uit twee cirkelbogen. Hierbij ligt het middelpunt van de ene cirkelboog op een uiteinde van de andere cirkelboog.

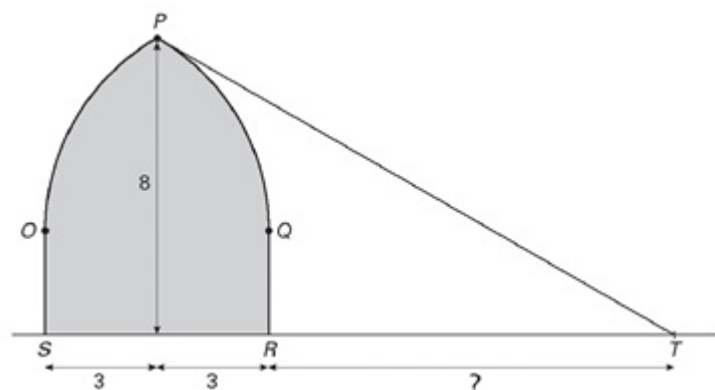


Figuur 6.2

Hier is de vorm van een spitsboog OPQ in een cartesisch assenstelsel getekend. O is het middelpunt van cirkelboog PQ en Q is het middelpunt van cirkelboog OP .

- Stel vergelijkingen op van de cirkels waarvan OP en PQ bogen zijn.
- Bereken de hoogte van punt P . Geef je antwoord in centimeters nauwkeurig.

Een toegangspoort tot een kasteel heeft aan de bovenkant de vorm van een spitsboog en heeft in een vooraanzicht de vorm die je hieronder ziet afgebeeld. Hetzelfde cartesische assenstelsel geldt ook voor deze figuur. De top P van de spitsboog bevindt zich 8 meter boven de grond. In dit punt P zitten twee bewakingscamera's, eentje om het gebied links van de poort in de gaten te houden en eentje om het gebied rechts van de poort in de gaten te houden. Deze laatste camera neemt niets waar van het gebied onder de raaklijn PT .



Figuur 6.3

- Stel een vergelijking op van lijn PT .
- Ook de andere camera neemt niets waar onder de raaklijn in P aan cirkelboog OP . Deze raaklijn snijdt het verlengde van TS in punt U . Bereken de lengte van het lijnstuk UT . Geef je antwoord in meters op één decimaal nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 5: Omgeschreven cirkel

De straal van de omgeschreven cirkel van een gelijkzijdige driehoek met zijden van a cm kun je in a uitdrukken. Laat zie hoe je dit kunt doen door een geschikt assenstelsel te kiezen.

Opgave 6: Bissectrice

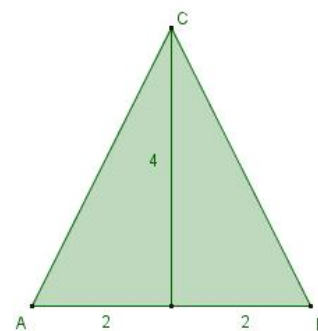
De deellijn (of bissectrice) van een hoek is de lijn die de hoek in twee gelijke delen verdeelt. De lijnen $l : y = 0$ en $m : y = 2x$ maken een scherpe hoek met elkaar. Punt $P(x,y)$ is een punt van de deellijn van deze hoek.

- Stel een vergelijking op van deze deellijn (benaderingen in drie decimalen nauwkeurig).
- Toon aan dat elk punt van deze deellijn dezelfde afstand heeft tot lijn l als tot lijn m .

Opgave 7: Een cirkel uit een driehoek

Je ziet hier een gelijkbenige driehoekige lap stof. Je wilt er een zo groot mogelijke cirkelvormige lap stof uit snijden. Hoe groot wordt de straal?

- Maak een assenstelsel zo, dat $A = (-2,0)$, $B = (2,0)$ en $C = (0,4)$.
- Het middelpunt van de gevraagde cirkel is $M(0,p)$. M moet even ver van de lijnen AB , BC en AC liggen. Druk $d(M,AB)$ en $d(M,BC)$ beide uit in p .
- Bereken p en beantwoord de vraag.



Figuur 6.4

Examen

Opgave 8: Werkplaats met gebogen dak

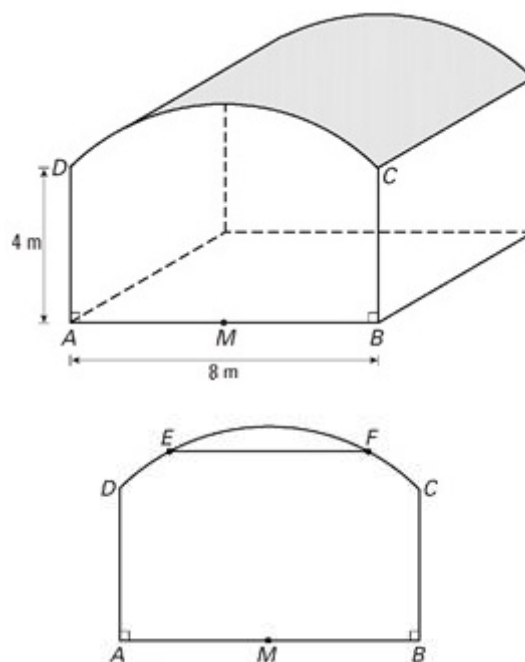
In Nederland zie je op bedrijventerreinen vrij grote overeenkomsten in de dakvormen van fabriekshallen, opslagloodsen en werkplaatsen. Een werkplaats met een veel voorkomende dakvorm is te zien in de bovenste figuur.

De vloer van deze werkplaats heeft de vorm van een rechthoek.

Het dak heeft een gebogen vorm: in het vooraanzicht is boog CD een kwart deel van de cirkel waarvan het middelpunt M het midden van AB is. De breedte AB is 8 meter. De hoogte $AD = BC$ is 4 meter.

- Breng in het voorvlak van de werkplaats een cartesisch assenstelsel aan waarvan de oorsprong met punt M en de x -as met lijn AB samen valt. Stel nu een vergelijking op van de cirkel waar boog CD een deel van is.
- Bereken de lengte van boog CD in gehele centimeters nauwkeurig.

Ter versteviging van de dakconstructie is op een aantal plaatsen op 5 meter hoogte een stalen dwarsbalk aangebracht. In de onderste figuur zie je een vooraanzicht van de werkplaats met daarin zo'n dwarsbalk EF .



Figuur 6.5

- c Bereken de lengte van EF in gehele centimeters nauwkeurig.
- d Bereken de hoek die EF met de cirkelboog maakt in de punten E en F .

(naar: herexamen wiskunde B1,2 in 2000)

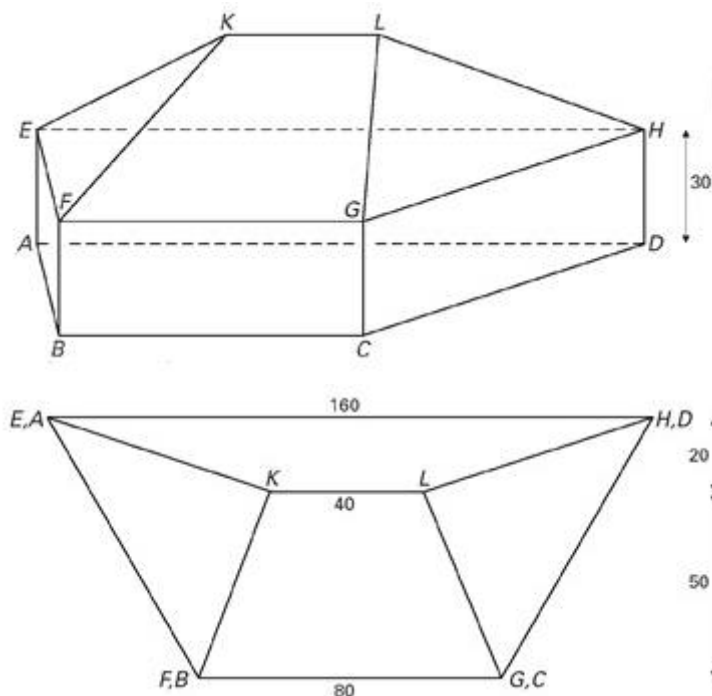
Opgave 9: Broeibak

In een folder van een tuincentrum staat de hiernaast afgebeelde foto van een broeibak. De broeibak heeft een glazen deksel in de vorm van een gelijkbenig trapezium. Op de foto is te zien dat de deksel open staat. Hieronder is een model van deze broeibak getekend. De glazen deksel $FGLK$ is hierbij gesloten.

Vlak $EFGH$ is evenwijdig aan het grondvlak $ABCD$. KL ligt 30 cm boven $EFGH$. Je ziet ook het bovenaanzicht van de gesloten broeibak. AD is evenwijdig aan BC . AB is even lang als DC . Alle afmetingen zijn gegeven in cm. De dikte van het hout en van het glas worden verwaarloosd.



Figuur 6.6



Figuur 6.7

- a Teken een dwarsdoorsnede van de broeibak op schaal 1 : 10 die loodrecht op het vlak $BCGF$ staat en door het midden M van BC gaat.
- Als de deksel van deze broeibak wordt geopend of gesloten beschrijft het midden P van FG een deel van een cirkel.
- b Teken deze baan van punt P in je dwarsdoorsnede.
 - c Breng in deze dwarsdoorsnede een cartesisch assenstelsel aan waarvan M de oorsprong is en de x -as in vlak $ABCD$ ligt. Stel ten opzichte van dit assenstelsel een vergelijking op van de cirkel waarvan de boog die de baan van P beschrijft een deel is.
 - d Hoe ver steekt het punt P aan de voorkant uit als het zich op 80 cm boven het grondvlak $ABCD$ van de broeibak bevindt?

(naar: herexamen wiskunde B1,2 in 2002)

2

Machtsfuncties

2.1	Machten	50
2.2	Machtsfuncties	61
2.3	Afgeleiden	71
2.4	Wortelfuncties	79
2.5	Gebroken functies	86
2.6	Toepassingen	94
2.7	Totaalbeeld	101

2.1 Machten

Inleiding

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$. Dit is een voorbeeld van een zogenaamd machtsverband, want de variabele h moet tot de macht 0,5 worden verheven. Je kunt ook zeggen dat h een machtsfunctie is van a . Je maakt in dit onderdeel met machtsfuncties kennis.

Je leert in dit onderwerp

- wat een machtsverband en een machtsfunctie is;
- bij een machtsverband heen en terug te rekenen en de rekenregels voor machten gebruiken;
- het begrip recht evenredig met een macht.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen en ongelijkheden oplossen;
- de rekenregels voor machten en exponenten.

Verkennen

Opgave V1

Welke van de volgende beweringen is waar?

- Als je op een toren van 100 m hoog staat kun je meer dan 30 km ver kijken.
- Op een hoogte van 100 m kun je twee keer zo ver kijken als op een hoogte van 50 m.
- Als je op een toren van 50 m hoog staat kun je (afgerond) 25 km ver kijken.

Uitleg

De inhoud I van een kubus met ribben van lengte r is: $I = r \cdot r \cdot r = r^3$. Dit is een typisch voorbeeld van een machtsfunctie: de variabele r moet tot de derde macht worden verheven om een functiewaarde te vinden.

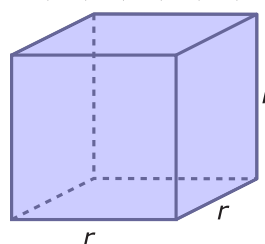
Als $r = 5$, dan is $I = 5^3 = 125$.

Al in de Oudheid vroegen de Grieken zich af hoe groot de ribbe is van een kubus die een inhoud heeft die precies het dubbele is van de gegeven inhoud. In ons geval: "Hoe groot is de ribbe van een kubus met een inhoud van 250?"

De oplossing van deze vraag is zowel eenvoudig als heel erg moeilijk.



Figuur 1.1



Figuur 1.2

Je weet dat $(r^3)^{\frac{1}{3}} = r^{3 \cdot \frac{1}{3}} = r^1 = r$.

Je kunt daarom van r^3 terugrekenen naar r door de omgekeerde macht te gebruiken: Als $r^3 = 250$ dan is $r = 250^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{250} \approx 6,30$.

De benadering van 6,30 kun je gemakkelijk met de rekenmachine krijgen, iets wat vroeger natuurlijk niet kon. Maar de rekenmachine zal altijd een benadering geven, want $\sqrt[3]{250}$ kun je niet als breuk schrijven.

Kijk je naar de massa van de kubus, dan moet je rekening houden met de soortelijke massa. Dat is de massa in kilogram van 1 dm^3 . De soortelijke massa van bijvoorbeeld een massief ijzeren kubus is 7,87 kg. De massa m is dan recht evenredig met de inhoud I : $m = 7,87 \cdot I$. Voor de massa van deze kubus geldt daarom: $m = 7,87 \cdot r^3$, waarin r is uitgedrukt in dm.

Dit is opnieuw een voorbeeld van een machtsfunctie: m is recht evenredig met een macht van r .

Opgave 1

De formule voor de inhoud I van een kubus is $I = r^3$, waarbij r de lengte van een ribbe is.

- Bereken de inhoud van een kubus waarvan de ribbe 4 cm is.
- Maak de ribbe twee keer zo groot. Wat gebeurt er met de inhoud?
- Bereken hoe groot je de ribbe moet nemen om een kubus te krijgen met een inhoud van 500 cm^3 . Rond af op één decimaal.
De soortelijke massa van marmer is $2,7 \text{ g/cm}^3$.
- Licht toe dat de massa m van een kubus van marmer recht evenredig is met een macht van de ribbe r . Geef de bijbehorende formule.

Opgave 2

Ook het verband tussen de ribbe r en de oppervlakte A van een kubus is een machtsverband. De bijbehorende formule is: $A = 6r^2$.

- Is de oppervlakte recht evenredig met de tweede macht van de ribbe, of is de ribbe recht evenredig met de tweede macht van de oppervlakte?
- Bereken de oppervlakte van een kubus met een ribbe van 4 cm.
- Hoeveel keer zo groot moet de ribbe worden om een kubus te krijgen met een 4 maal zo grote oppervlakte?
- Leid de formule af die de straal uitdrukt in de oppervlakte.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

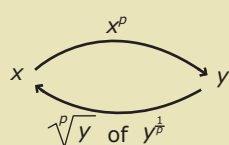
Bekijk de applet: machtsfuncties

Als y **recht evenredig met een macht** van x is, dus $y = c \cdot x^p$, dan spreek je van een **machtsfunctie**. De constante c is de **evenredigheidsconstante**.

Bekijk de voorbeelden van grafieken van machtsfuncties. Daarbij is p steeds een positief getal of 0 en $c = 1$.

Vanuit de machtsfunctie $y = x^p$ (dus als $c = 1$) kun je op twee manieren terugrekenen:

- $x = \sqrt[p]{y}$
- $x = y^{\frac{1}{p}}$



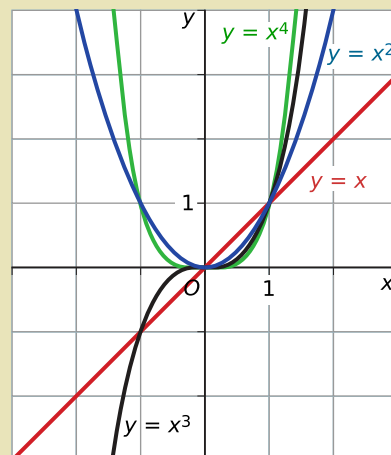
Figuur 1.4

Als de evenredigheidsconstante niet de waarde 1 heeft, begin je met door c te delen. Daarna pas je of de p -demachtswortel toe, of je werkt met de omgekeerde macht. Afhankelijk van de waarde van p zijn er één of twee mogelijke uitkomsten.

Voor elke x en voor willekeurige reële getallen a en b gelden de volgende

eigenschappen van machten en exponenten

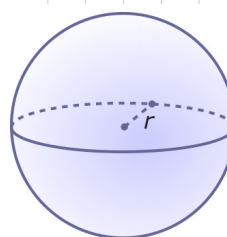
$$\begin{aligned}
 x^0 &= 1 & x^{-a} &= \frac{1}{x^a} \text{ mits } x \neq 0 & x^{\frac{1}{a}} &= \sqrt[a]{x} \text{ mits } x \geq 0 \text{ en } a > 0 \\
 x^{a+b} &= x^a \cdot x^b & x^{a-b} &= \frac{x^a}{x^b} \text{ mits } x \neq 0 & (x^a)^b &= x^{a \cdot b}
 \end{aligned}$$



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

De inhoud van een bol is recht evenredig met de derde macht van de straal: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. Je wilt de straal berekenen van een bol met een inhoud van $I = 1000 \text{ cm}^3$.



Figuur 1.5

Antwoord

Daarvoor moet je oplossen: $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 1000$. En dus: $r^3 = 238,73\dots$

Je vindt: $r = \sqrt[3]{238,73\dots} \approx 6,2$ cm.

Het is ook mogelijk eerst de formule voor de inhoud van een bol zo om te rekenen, dat de straal wordt uitgedrukt in de inhoud. Dat gaat zo:

$$\frac{4\pi}{3} \cdot r^3 = I$$

$$r^3 = \frac{3}{4\pi} \cdot I$$

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot I\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$r \approx 0,62 \cdot I^{\frac{1}{3}}$$

Je vindt: $r \approx 0,62 \cdot I^{\frac{1}{3}}$, dus r is recht evenredig met $I^{\frac{1}{3}}$. De evenredigheidsconstante is (ongeveer) 0,62.

Opgave 3

De formule voor de inhoud van een bol is: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

- a I is recht evenredig met r^3 . Wat is de evenredigheidsconstante?
- b r is recht evenredig met $I^{\frac{1}{3}}$. Wat is dan de evenredigheidsconstante?

Opgave 4

Bij welke van de volgende formules is y recht evenredig met een macht van x ? Geef in dat geval de evenredigheidsconstante.

- a $y = 2x$
- b $y = 2x^4 + 5$
- c $y = 5x^4$
- d $x = 5y^4$

Voorbeeld 2

In een vlak landschap is er een verband tussen hoe ver je kunt kijken en hoe hoog je ogen zich boven het landschap bevinden. Voor de kijkaafstand a (in meter) als functie van de hoogte h (in meter) geldt: $a = 3572 \cdot \sqrt{h}$.

Laat zien, dat a recht evenredig is met een macht van h .

Bereken de hoogte waarbij een kijkaafstand van 20 hoort.

Antwoord

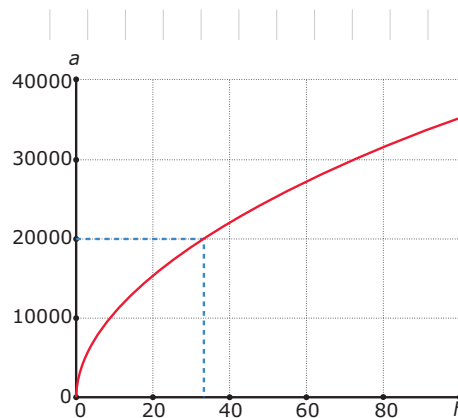
Deze functie kun je schrijven als $a = 3572 \cdot h^{\frac{1}{2}}$ m.

Dus is a recht evenredig met $h^{\frac{1}{2}}$ met een evenredigheidsconstante van 3572.

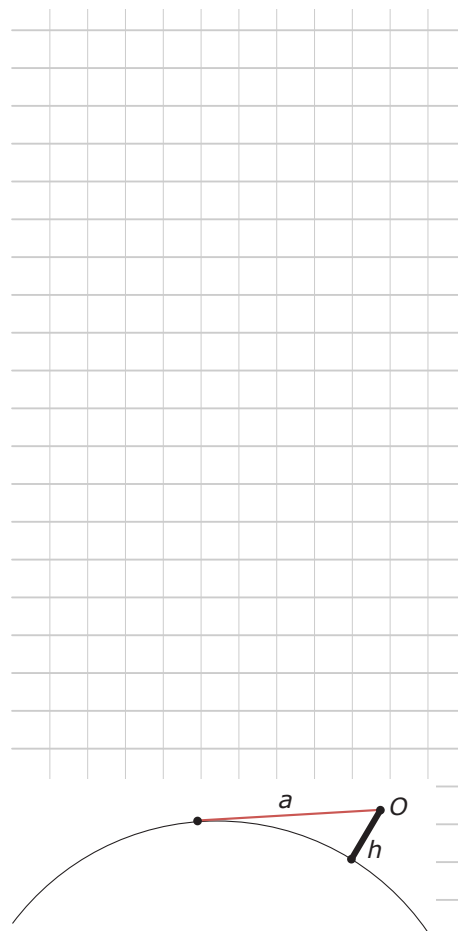
Bij een kijkaafstand van 20 km hoort $a = 20000$ m.

Dan geldt: $3572 \cdot h^{\frac{1}{2}} = 20000$.

Deze vergelijking kun je oplossen door delen door 3572 en vervolgens kwadrateren: $h = \left(\frac{20000}{3572}\right)^2 \approx 35,4$ m.



Figuur 1.6



Figuur 1.7

Opgave 5

Voor de kijkafstand a (in meter) als functie van de hoogte h (in meter) geldt: $a = 3572 \cdot h^{\frac{1}{2}}$.

- a** Bereken hoe ver je kunt kijken vanaf een toren van 50 m hoog.

Op een eiland wordt een vuurtoren gebouwd. De toren wordt zo hoog gemaakt dat je bij helder weer 25 km ver kunt kijken.

- b** Bepaal de hoogte van de toren op de volgende manieren:

- aflezen uit de grafiek van $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$;
- in de formule $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$ de variabele a vervangen door 25000; de vergelijking die je dan krijgt oplossen door hem stapsgewijs te vereenvoudigen;
- berekenen met de formule $h = \left(\frac{a}{3572}\right)^2$.

Voorbeeld 3

Met behulp van de rekenregels voor machten kun je functies met wortels en breuken herleiden tot machtsfuncties van de vorm $y = a \cdot x^b$. Doe dit met de functies:

- $y = 2x\sqrt{x}$
- $y = \frac{4}{x^3}$
- $y = \frac{2x}{\sqrt{x}}$

Omgekeerd kun je machtsfuncties met gebroken en/of negatieve exponenten herleiden tot functies zonder gebroken en/of negatieve exponenten. Je krijgt dan wortels en/of breuken. Doe dit met de functies:

- $y = 4x^{-2}$
- $y = 2x^{\frac{1}{3}}$
- $y = 3x^{-1\frac{1}{2}}$

Antwoord

Je vindt:

- $y = 2x\sqrt{x} = 2x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2x^{1\frac{1}{2}}$
- $y = \frac{4}{x^3} = 4 \cdot \frac{1}{x^3} = 4x^{-3}$
- $y = \frac{2x}{\sqrt{x}} = \frac{2x^1}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x^{\frac{1}{2}}$

En omgekeerd:

- $y = 4x^{-2} = 4 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x^2}$
- $y = 2x^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{x}$
- $y = 3x^{-1\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{3}{x\sqrt{x}}$

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** zie je hoe functies met wortelvormen en/of gebroken vormen kunnen worden geschreven als machtsfuncties. Schrijf de volgende functies in de vorm $f(x) = ax^b$.

a $f(x) = 3x^2\sqrt{x}$

b $f(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

c $f(x) = \frac{4}{5x^3}$

d $f(x) = \frac{3\sqrt{x}}{x^3}$

e $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je ook hoe je machtsfuncties kunt schrijven zonder gebroken en/of negatieve exponenten. Doe dit bij de volgende functies.

a $f(x) = 4x^{2\frac{1}{2}}$

b $f(x) = 3x^{-1}$

c $f(x) = \frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}$

d $f(x) = 2,5x^{1\frac{1}{3}}$

e $f(x) = 2,5x^{-\frac{3}{4}}$

Voorbeeld 4

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij het warmteverlies van het dier. Diersoorten met een relatief grote huidoppervlakte in verhouding tot hun inhoud, zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten.

Meeh vond de formule: $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$

Hierin is H de huidoppervlakte (dm^2) en G het gewicht (kg) van het dier.

Je ziet dat de huidoppervlakte recht evenredig is met de $\frac{2}{3}$ -de macht van het lichaamsgewicht. De factor c is de evenredigheidsconstante en verschilt per diersoort. In de biologie wordt deze evenredigheidsconstante de Meeh-coëfficiënt genoemd.

In de tabel zie je een vijftal waarden van G en H van Schotse hooglanders, een soort koeien. Bepaal de Meeh-coëfficiënt van de Schotse hooglander.

G	430	450	490	500	420
H	507	523	553	560	500

Tabel 1.1

Antwoord

Breid de tabel uit met een rij voor $G^{\frac{2}{3}}$ en een rij voor $\frac{H}{G^{\frac{2}{3}}}$.

Als het goed is, vind je in de laatste rij steeds (ongeveer) hetzelfde getal, namelijk 8,9. Dit is de gevraagde Meeh-coëfficiënt. Voor de Schotse hooglander geldt $H = 8,9 \cdot G^{\frac{2}{3}}$.

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 4** het verband tussen huidoppervlakte (dm^2) en lichaamsgewicht (kg) van dieren.

- De tabel geeft het verband weer tussen het lichaamsgewicht en huidoppervlakte van Schotse Hooglanders. Laat door berekening zien dat hiervoor de constante c geldt: $c \approx 8,9$.
- De huid van een bepaalde Schotse Hooglander heeft een oppervlakte van ongeveer 510 dm^2 . Hoe zwaar is dit dier?
- Als je de formule $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$ omrekent zodat het lichaamsgewicht uitgedrukt wordt in de huidoppervlakte, wat wordt dan de evenredigheidsconstante?
- Als het lichaamsgewicht twee keer zo groot wordt, wordt de huidoppervlakte dan meer of minder dan twee keer zo groot?

Opgave 9

Ook voor een massieve bol beschrijft de formule van Meeh het verband tussen de oppervlakte A en het gewicht G . Ga uit van een massieve ijzeren bol, de soortelijke massa van ijzer is $7,9 \text{ g/cm}^3$.

- Zoek de formules voor de inhoud van een bol met straal r en de oppervlakte van zo'n bol op.
- Welke formule geldt voor het gewicht G als functie van de straal r van de bol? Neem r in cm en G in gram.
- Door de formules voor het gewicht en de oppervlakte van een bol met straal r te combineren vind je $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de waarde van c .

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de machtsfunctie $f(x) = 120x^5$.

- Bereken $f(4)$.
- Los algebraïsch op: $f(x) = 20000$. Rond je antwoord af op twee decimalen.
- Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende functiewaarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 11

Er is een verband tussen de snelheid s van een auto en de bijbehorende remweg r . De remweg is de afstand die de auto nog aflegt als je zo hard mogelijk remt. Een vuistregel voor dit verband is:

$$r = \frac{s^2}{100}.$$

- r is recht evenredig met een macht van s . Wat is de evenredigheidsconstante?
- In een weg zit een scherpe bocht waarin je maar 10 meter vooruit kunt kijken. Een eis voor veilig rijden is dat je moet kunnen stoppen binnen de afstand die je kunt overzien. Wat is volgens deze vuistregel de maximumsnelheid in deze bocht?
- Geef de formule waarmee de snelheid wordt uitgedrukt in de remweg. Beschrijf in woorden wat voor verband dit is.
- Geef commentaar op de volgende uitspraak: "Bij een zicht van 100 meter kun je twee maal zo hard rijden als bij een zicht van 50 meter."

Opgave 12

I is de inhoud (het volume) van een kubus met ribben r in centimeter.

- Bereken de inhoud van een kubus met $r = 2$. En ook van een kubus met $r = 6$.
- De ribbe van de tweede kubus uit a is drie keer zo groot als de ribbe van de eerste. Wat betekent dit voor de inhoud van de kubus?
- Een kubus heeft een inhoud van 50 cm. Bereken r .
- Geef de formule waarmee je de inhoud I uitdrukt in r .
- Geef de formule waarmee je de lengte r van de ribbe uitdrukt in inhoud I .

Opgave 13

Een formule voor de totale oppervlakte A van een kubus met ribbe r is: $A = 6r^2$.

- Licht toe hoe je deze formule kunt afleiden.
- Bereken de totale oppervlakte van een kubus met ribben van 3 cm en van een kubus met ribben van 6 cm.
- Wat gebeurt er met de totale oppervlakte als je de ribben twee keer zo groot maakt?
- Van een kubus is de totale oppervlakte 500 cm^2 . Bereken de lengte van de ribben.
- Geef een formule waarmee je de ribbe r uitdrukt in de totale oppervlakte A .

Opgave 14

Ga uit van een massieve ijzeren kubus met ribbe r in cm. De soortelijke massa van ijzer is $7,9 \text{ g/cm}^3$.

- Stel een formule op voor het gewicht G van de kubus als functie van r .

- b** Stel een formule op voor de oppervlakte A van de kubus als functie van r .
- c** Leid een formule af van de vorm $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de evenredigheidsconstante c .
- d** Bereken het gewicht van zo'n kubus als de totale buitenoppervlakte 150 cm^2 is.

Opgave 15

Schrijf de volgende functies in de vorm $f(x) = ax^b$.

- a** $f(x) = -4\sqrt{x^3}$
- b** $f(x) = \frac{1}{4x^3}$
- c** $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$
- d** $f(x) = \frac{3\sqrt[4]{x^3}}{5x^2}$

Opgave 16

Schrijf de volgende functies zonder gebroken en/of negatieve exponenten.

- a** $f(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
- b** $f(x) = -x^{\frac{3}{5}}$
- c** $f(x) = 4x^{-5}$
- d** $f(x) = 1\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{3}}$

Toepassen

Als je een gewichtje laat slingeren aan een koord met een verwaarloosbare massa, ontstaat er een zuivere slingerbeweging. De slingertijd (of periode) is de tijd waarin de slinger een complete slingerbeweging uitvoert. Daarin beweegt het gewichtje bijvoorbeeld van links naar rechts en weer terug. Als de uitwijking van de slingerbeweging niet te groot is, dan geldt voor de **slingertijd** bij benadering de formule:

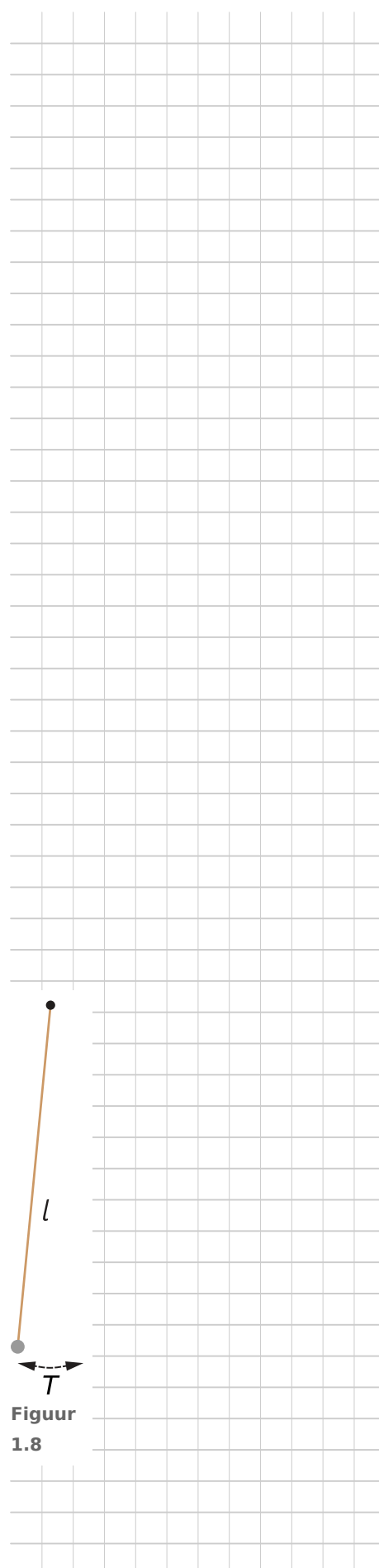
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Hierin is T de slingertijd in seconden, l de lengte van het koord in meters en g de valversnelling in m/s^2 . Op aarde is de valversnelling gemiddeld ongeveer $9,81 \text{ m/s}^2$.

Omdat $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ kun je de formule ook schrijven als

$$T = 2\pi\left(\frac{l}{9,81}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Je kunt bij deze machtsfunctie bij een gegeven waarde van l de bijbehorende waarde van T berekenen en omgekeerd.



Figuur 1.8

Opgave 17

Bekijk de formule van de slingertijd van een zuivere slingerbeweging.

- Bereken de slingertijd bij een koordlengte van 70 cm. Rond af op één decimaal.
- Als je een zwaarder gewichtje aan het koord hangt terwijl de lengte van het koord hetzelfde blijft, zal de slingertijd niet veranderen. Leg uit hoe je dit aan de formule kunt zien.

De slingertijd van een gewicht aan een koord is 1,9 seconde.

- Bepaal de lengte van het koord op de volgende manieren:
 - Met behulp van de grafische rekenmachine en de grafiek van $T = 2\pi \left(\frac{l}{9,81} \right)^{\frac{1}{2}}$.
 - In de formule $T = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$ de variabele T vervangen door 1,9 en de vergelijking die je dan krijgt oplossen door hem stapsgewijs te vereenvoudigen.

Opgave 18

Bekijk nogmaals de formule van de slingertijd van een zuivere slingerbeweging.

Je kunt de gegeven formule herleiden tot een vorm waarin l is uitgedrukt in T .

- Laat dat zien en bereken met behulp van deze formule de lengte van een slinger met een slingertijd van 2,5 seconden. Rond af op twee decimalen.
- Geef de formule waarmee je T^2 uitdrukt in l .
Is T^2 recht evenredig met l ? Zo ja, hoe groot is dan de evenredigheidsconstante?

Testen

Opgave 19

Gegeven is de machtsfunctie f met formule $y = 5 \cdot (3x)^4$.

- y is recht evenredig met een macht van x . Wat is de evenredigheidsconstante?
- Voor welke waarden van x is $f(x) = 120000$?
- Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende functiewaarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 20

Het volume van een cilinder kun je berekenen met de formule $V = \pi r^2 h$. Hierin is r de straal van het grondvlak en h de hoogte van de cilinder, beide in cm. Je wilt blikken maken die even hoog als breed zijn, dus waarvan $h = 2r$.

- Welke formule geldt bij deze blikken voor V als functie van r ?
- Herschrijf deze formule tot een formule waarin r recht evenredig is met een macht van V . Bepaal de evenredigheidsconstante.

- c** De oppervlakte van zo'n blik bestaat uit een rechthoek en twee cirkels. Leid een formule af voor de oppervlakte A als functie van r .
- d** Laat zien dat tussen A en V een machtsverband bestaat van de vorm $A = c \cdot V^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de waarde van c .

Opgave 21

Schrijf deze functies als machtsfuncties, dus in de vorm $f(x) = ax^b$.

a $f(x) = \frac{3}{7x^2}$

b $f(x) = -\frac{2}{x^3\sqrt{x}}$

Herleid deze functies tot een vorm zonder gebroken en/of negatieve exponenten.

c $f(x) = \frac{2}{3}x^{-5}$

d $f(x) = 4x^{-2\frac{1}{2}}$

2.2 Machtsfuncties

Inleiding

Bij functies van de vorm $f(x) = x^p$ hangt het verloop van de functie af van de waarde van p . Voor bijvoorbeeld $p = 2$ krijg je een kwadratische functie met als grafiek een parabool. Deze functie is dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$. Voor $p = 1$ krijg je een lineaire functie, die stijgend is voor elke waarde van x . In dit onderdeel zul je zien dat voor negatieve en gebroken waarden van p je machtsfuncties krijgt met weer een ander karakter.

Je leert in dit onderwerp

- het verband tussen de waarde van p en het verloop van de grafiek van $f(x) = x^p$ kennen;
- werken met functies die door transformaties van $f(x) = x^p$ ontstaan.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen met machten oplossen;
- werken met de rekenregels voor machten en exponenten.

Verkennen

Opgave V1

Machtsfuncties hebben de vorm $f(x) = c \cdot x^p$. Je kunt de bijbehorende grafieken bekijken met de grafische rekenmachine. Je kiest dan voor c en voor p getallen. Neem voor het gemak steeds $c = 1$ en neem voor p een geheel getal.

- Welke van deze machtsfuncties hebben een minimum? Welke coördinaten horen er bij het punt waar het minimum zit?
- Zijn er machtsfuncties die overal op hun domein stijgend zijn? Zo ja, geef dan een paar voorbeelden.
- Hoe kun je er voor zorgen dat de machtsfunctie $f(x) = x^p$ dalend is voor positieve waarden van x ?
Neem nu ook gebroken getallen voor p .
- Welke verschillen zijn er tussen de grafiek bij $p = \frac{1}{2}$ en die bij $p = \frac{1}{3}$?
- Bekijk de grafiek bij $p = \frac{2}{3}$. Wat is er bij $x = 0$ aan de hand?
- Als p een niet geheel decimaal getal is, mag je alleen positieve waarden voor x toelaten. Waarom zou dat zijn?

Uitleg 1

Bekijk de applet

Bij functies van de vorm $f(x) = x^p$ hangt het verloop van de functie af van de waarde van p . Voor bijvoorbeeld $p = 2$ krijg je een kwadratische functie met als grafiek een parabool. Deze functie is dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$. Voor $p = 1$ krijg je een lineaire functie, die stijgend is voor elke waarde van x . In dit onderdeel zul je zien dat voor negatieve en gebroken waarden van p je machtsfuncties krijgt met weer een ander karakter.

Je ziet hiernaast de grafieken van $f(x) = x^p$ voor enkele *positieve* gehele waarden van p . Merk op:

- Als p een positief *even* getal is, geldt dat:
 - $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [0, \rightarrow)$;
 - de grafiek dalend is als $x < 0$ en stijgend als $x > 0$;
 - de vergelijking $x^p = a$ twee oplossingen heeft als $a > 0$, één oplossing heeft als $a = 0$ en geen oplossingen heeft als $a < 0$.
- Als p een positief *oneven* getal is, geldt dat:
 - $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \mathbb{R}$;
 - de grafiek stijgend is voor elke waarde van x (behalve 0);
 - de vergelijking $x^p = a$ één oplossing heeft voor elke waarde van a .

Opgave 1

Plot de grafieken van de functies $f(x) = x^4$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2$ en $j(x) = x$.

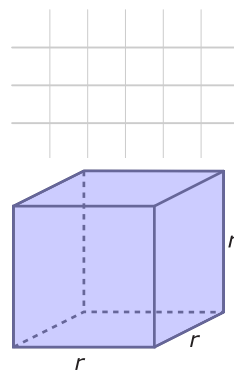
- Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = g(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt: $f(x) > g(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = h(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt: $f(x) > h(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = j(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt: $f(x) > j(x)$?

Om de voorgaande vragen in het algemeen te kunnen beantwoorden, kijk je naar twee functies: $f(x) = x^p$ en $g(x) = x^q$, waarbij p een even positief getal is en q een oneven positief getal.

- Neem de tabel over en vul hem in. Gebruik de grafische rekenmachine.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$p < q$				
$p > q$			$f(x) < g(x)$	

Tabel 2.1



Figuur 2.1

Opgave 2

Bekijk de functies $k(x) = x^5$ en $l(x) = x^6$.

- Maak een schets van de grafieken van $k(x)$ en $l(x)$. Geef ook punt $(1,1)$ aan. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.
- Voor welke waarden van x geldt $x^6 = 10$? Los op: $x^6 < 10$. Rond af op twee decimalen.
- Voor welke waarde van x geldt $x^5 = 10$? Los op: $x^5 > 10$. Rond af op twee decimalen.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Kijk goed naar de grafieken van $f(x) = x^p$ voor enkele *negatieve* gehele waarden van p . Als p een negatief getal is heb je te maken met een gebroken functie.

- Als p een negatief *even* getal is, geldt dat:
 - $D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$;
 - de grafiek stijgend is als $x < 0$ en dalend als $x > 0$;
 - de vergelijking $x^p = a$ twee oplossingen heeft als $a > 0$ en geen oplossingen heeft als $a \leq 0$.
- Als p een negatief *oneven* getal is, geldt dat:
 - $D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$;
 - de grafiek dalend is voor elke waarde van x (behalve 0);
 - de vergelijking $x^p = a$ één oplossing heeft voor elke waarde van a behalve $a = 0$.

Bij een gebroken functie heb je te maken met asymptoten. Een asymptoot is een lijn waar de grafiek steeds meer toe nadert, maar waarmee hij nooit samenvalt.

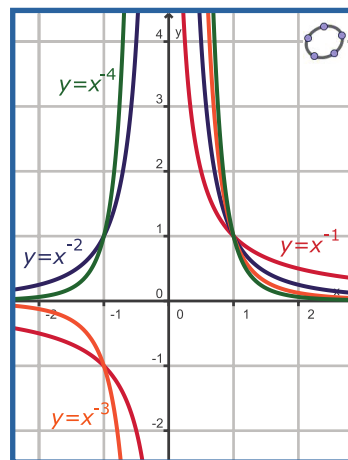
Om bij een gebroken functie de verticale asymptoot te vinden bekijk je wat de variabele in de noemer niet kan zijn. In het geval van $y = \frac{1}{x}$ mag x geen 0 zijn. De verticale asymptoot is: $x = 0$.

Om bij een gebroken functie de horizontale asymptoot te vinden kijk je wat er gebeurt met y als x heel groot positief of negatief wordt. In het geval van $y = \frac{1}{x}$ wordt y dan heel klein, bijna 0. De horizontale asymptoot is $y = 0$.

Opgave 3

Maak met je grafische rekenmachine grafieken van de functies: $k(x) = x^{-1}$ en $l(x) = x^{-2}$.

- Welke asymptoten hebben deze functies?
- Voor welke waarden van x geldt $k(x) = l(x)$?
- Los op: $k(x) < l(x)$.



Figuur 2.2

- d** Los de volgende vergelijkingen op:
- $x^{-1} = 0,005$ en $x^{-2} = 0,005$
 - $x^{-1} = 5000$ en $x^{-2} = 5000$
- e** Voor welke waarden van x geldt $x^{-1} < 0,005$?
- f** Voor welke waarden van x geldt $x^{-1} > 5000$?
- g** Voor welke waarden van x geldt $x^{-2} < 0,005$?
- h** Voor welke waarden van x geldt $x^{-2} > 5000$?

Uitleg 3

Bekijk de applet

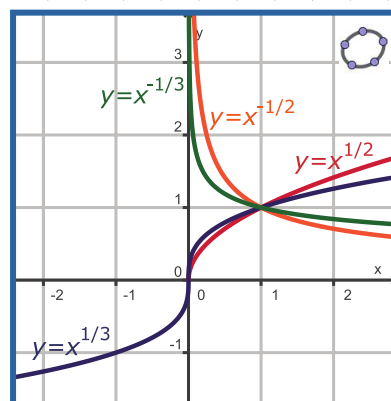
Je ziet hiernaast grafieken van $f(x) = x^{\frac{1}{p}}$ voor enkele gehele waarden van p . Merk op:

- Als $p > 1$ en p even geldt dat:
 - $D_f = [0, \rightarrow)$ en $B_f = [0, \rightarrow)$;
 - de grafiek stijgend is voor alle x uit het domein;
 - de grafiek gaat door $(0,0)$ en $(1,1)$;
 - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft als $a \geq 0$.
- Als $p > 1$ en p oneven geldt dat:
 - $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \mathbb{R}$;
 - de grafiek stijgend is voor alle x uit het domein;
 - de grafiek gaat door $(0,0)$, $(1,1)$ en $(-1,-1)$;
 - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft voor alle waarden van a .

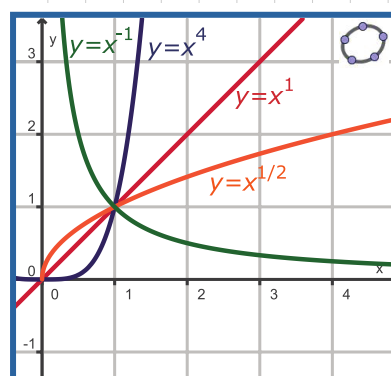
Bekijk de applet

- Als $p < -1$ en p even geldt dat:
 - $D_f = (0, \rightarrow)$ en $B_f = (0, \rightarrow)$;
 - de grafiek dalend is voor elke x uit het domein;
 - de grafiek horizontale asymptoot $y = 0$ en verticale asymptoot $x = 0$ heeft;
 - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft als $a > 0$.
- Als $p < -1$ en p oneven geldt dat:
 - $D_f = (\leftarrow, 0) \cup (0, \rightarrow)$ en $B_f = (\leftarrow, 0) \cup (0, \rightarrow)$;
 - de grafiek dalend is voor elke x uit het domein;
 - de grafiek horizontale asymptoot $y = 0$ en verticale asymptoot $x = 0$ heeft;
 - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft als $a \neq 0$.

Kijk nog eens goed of je grafische rekenmachine dezelfde grafieken geeft. Er kunnen verschillen zijn. Merk ook op dat de grafiek in de buurt van $x = 0$ niet altijd helemaal netjes wordt gemaakt.



Figuur 2.3



Figuur 2.4

Opgave 4

Maak met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies

$$a(x) = x^{-\frac{1}{2}}, b(x) = x^{\frac{1}{2}}, c(x) = x^{-\frac{1}{3}} \text{ en } d(x) = x^{\frac{1}{3}}.$$

- Voor welke waarden van x geldt $a(x) < b(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt $d(x) < b(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt $d(x) < c(x)$?
- Maak de grafiek van $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$.
Controleer je schets met de applet of de grafische rekenmachine.
- Voor welke waarden van x geldt $x^{\frac{1}{4}} > 4$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Je ziet hier enkele grafieken van de **machtsfunctie** $f(x) = x^p$ voor verschillende waarden van p .

Eigenschappen voor $x > 0$ zijn:

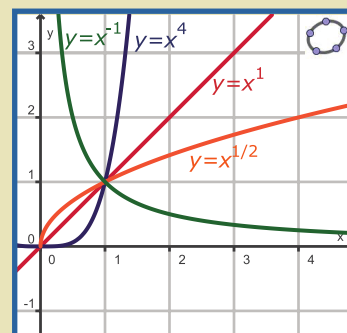
- $p > 1$: de grafiek gaat door $(0,0)$ en $(1,1)$ en stijgt steeds sneller.
- $p = 1$: f is een lineaire functie door $(0,0)$ en $(1,1)$.
- $0 < p < 1$: de grafiek gaat door $(0,0)$ en $(1,1)$ en stijgt steeds langzamer.
- $p < 0$: de functie is niet gedefinieerd voor $x = 0$, de grafiek gaat door $(1,1)$ en daalt steeds langzamer, de x -as en de y -as zijn asymptoten van de grafiek.

Voor $x < 0$ bestaat de functie alleen als p een geheel getal is (of als p een breuk is met een oneven noemer, zoals $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, etc). Afhankelijk van het even of oneven zijn van p is de grafiek daar dalend of stijgend.

De vergelijking $x^p = a$ heeft één oplossing als $a > 0$ en p geen even geheel getal (ongelijk 0) is.

Als $a > 0$ en p een even geheel getal (ongelijk 0) is, zijn er twee oplossingen.

De vergelijking $x^p = a$ heeft één oplossing als $a < 0$ en p een oneven geheel getal (ongelijk 0) is.



Figuur 2.5

Voorbeeld 1

Los op: $3x^{\frac{3}{2}} < 12$.

Antwoord

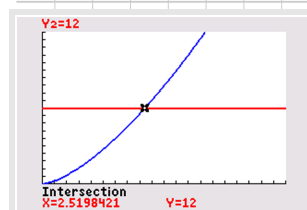
Beide kanten delen door 3 geeft: $x^{\frac{3}{2}} < 4$.

Los eerst op $x^{\frac{3}{2}} = 4$.

Oplossing: $x = 4^{\frac{2}{3}} \approx 2,52$.

Maak de grafiek van $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ op de grafische rekenmachine. Merk op dat $D_f = [0, \rightarrow)$. De vergelijking heeft inderdaad maar één oplossing.

Nu lees je de (benaderde) oplossing van de ongelijkheid uit de grafiek af: $0 \leq x < 2,52$.



Figuur 2.6

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** de ongelijkheid $3x^{\frac{3}{2}} < 12$.

- Los zelf eerst de vergelijking $3x^{\frac{3}{2}} = 12$ algebraïsch op.
- In het voorbeeld wordt daarbij een macht met exponent $\frac{2}{3}$ gebruikt. Licht die stap toe. Heb je dat zelf ook gedaan?
- Los op dezelfde manier algebraïsch op: $15x^{\frac{3}{5}} < 180$. Geef je eindantwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x - 4)^3 - 10$.

Los algebraïsch op: $f(x) = 20$.

Beschrijf welke transformaties er nodig zijn om vanuit $y = x^3$ tot de functie $f(x)$ te komen.

Antwoord

Functie f kan door transformatie ontstaan uit de machtsfunctie $y = x^3$. Eerst 4 verschuiven in de positieve x -richting (dus t.o.v. de y -as), dan vermenigvuldigen met 2 in de y -richting en tenslotte 10 verschuiven in de negatieve y -richting.

Om $f(x) = 20$ op te lossen, moet je stap voor stap terugrekenen:

$$2(x - 4)^3 - 10 = 20$$

$$2(x - 4)^3 = 30$$

$$(x - 4)^3 = 15$$

$$x - 4 = 15^{\frac{1}{3}}$$

$$x = 15^{\frac{1}{3}} + 4$$

Je vindt dus $x = 15^{\frac{1}{3}} + 4 \approx 6,47$.

Opgave 6

Bekijk de functie $f(x) = 3(x + 1)^3 - 5$.

- Beschrijf in de juiste volgorde welke transformaties er nodig zijn vanuit $y = x^3$ om tot de functie $f(x)$ te komen. Geef elke keer aan wat er met de grafiek gebeurt als je deze transformatie toepast.
- Los exact op: $f(x) < 10$.

Voorbeeld 3

Los exact op: $\frac{1}{x^4} > 4$.

Antwoord

Omdat $f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$ is ook hier sprake van een machtsfunctie. Maak eerst de grafiek van f en de lijn $y_2 = 4$ op je grafische rekenmachine.

Los nu op: $x^{-4} = 4$.

Oplossing: $x = 4^{-\frac{1}{4}} \vee x = -4^{-\frac{1}{4}}$.

In de grafiek is de oplossing van de ongelijkheid af te lezen:

$$-4^{-\frac{1}{4}} < x < 0 \vee 0 < x < 4^{-\frac{1}{4}}.$$

Merk op dat je $x = 0$ uitzondert omdat voor deze waarde de functie f niet gedefinieerd is.

Opgave 7

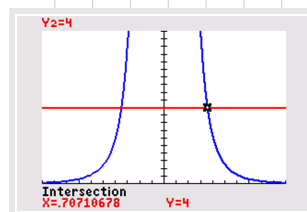
Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine. Houd ook rekening met het domein van de verschillende functies.

- $x^2 < \sqrt{x}$
- $\frac{1}{x^4} = 81$
- $\frac{1}{x^3} < 27$
- $\frac{1}{x^3} < 30$
- $x^5 < x^4$
- $x^6 < x^4$

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x + 1)^{-2} - 4$.

- Welke asymptoten heeft de grafiek van $y = x^{-2}$?
- Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren op de grafiek van $y = x^{-2}$ om die van f te krijgen.
- Welke asymptoten heeft de grafiek van f ?
- Schrijf domein en bereik van f op.
- Los op: $f(x) < 10$.



Figuur 2.7

Verwerken

Opgave 9

In een grootwinkelbedrijf onderzoekt de marktetingafdeling hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat dan de volgende formule geldt: $a = \frac{500}{p}$. Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro. De verkoop per dag varieert van 100 tot 1000 kg.

- Schrijf de formule zo, dat blijkt dat de afzet recht evenredig is met de macht van de prijs.
- Teken de grafiek met de grafische rekenmachine voor de prijs tussen € 1,00 en € 5,00 per kg. Als de prijs verdubbeld wordt, wordt de afzet dan meer of minder dan de helft? Hoe kun je dat aan de grafiek direct zien?
- Het bedrijf heeft een voorraad van 300 kg tomaten. Bereken de prijs waarbij de voorraad binnen een dag is verkocht. Geef ook de formule waarmee je dit direct kunt berekenen.
- Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij € 100,00? Geef zelf aan wat dit betekent voor de bruikbaarheid van deze formule.

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1}} + 5$.

- Leg uit dat de grafiek van deze functie kan ontstaan door transformatie van de grafiek $y = x^{-\frac{1}{2}}$.
- Welke transformaties moet je toepassen om de grafiek van f te krijgen?
- Schrijf domein en bereik van f op.
- Los op: $f(x) \leq 10$.

Opgave 11

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = -5 + 2\sqrt{x-3}$ en $g(x) = \sqrt{x}$.

- Schrijf f en g als machtsfunctie en beschrijf hoe de grafiek van $f(x)$ vanuit die van $g(x)$ kan ontstaan.
- Geef het domein en bereik van zowel f als g .
- Los op: $f(x) \geq 100$.

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{100}{(x-10)^2} + 25$.

- Laat zien, dat de grafiek van deze functie kan ontstaan uit een machtsfunctie. Schrijf bijbehorende transformaties op.
- Welke asymptoten heeft de grafiek van f ?
- Schrijf domein en bereik van f op.
- Los op: $f(x) \leq 50$.

Opgave 13

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

- a $3(x + 2)^6 - 30 = 300$
- b $8 - 4\sqrt{x - 3} > 4$
- c $\sqrt[6]{x} < 9$
- d $5(x + 7)^3 > 45$
- e $2 + 9\sqrt{x - 5} < 20$

Opgave 14

Een functie die door transformatie uit een machtsfunctie ontstaat is: $h(x) = a(x - b)^c + d$.

- a Voor welke waarden van c heeft de functie een maximum of minimum?
- b Waar hangt het van af of het een maximum of minimum is?
- c Hoe kun je uit deze formule aflezen waar de top zich bevindt? Geef de coördinaten van deze top.

Toepassen

Opgave 15: De formule van Kleiber

De Amerikaanse veearts en onderzoeker Max Kleiber ontdekte in 1932 dat het zuurstofverbruik Z (in L) van verschillende soorten zoogdieren recht evenredig is met een macht van de massa m (in kg), dus $Z = c \cdot m^P$. In de tabel vind je enkele bijpassende gegevens. Bij het opstellen van een formule voor Z afhankelijk van m wordt gebruik gemaakt van de gegevens van de muis en het paard. Hierbij wordt het verband $Z = 0,66m^{0,76}$ gevonden.

- a Laat zien hoe je deze formule kunt vinden.
- b Stel de formule op uitgaande van de gegevens van de rat en de mens. Vind je dezelfde formule?
- c Bereken met de formule van Kleiber het zuurstofverbruik van een koe van 1000 kg.

soort	$m(\text{kg})$	$Z(\text{L})$
muis	0,20	0,19
rat	1,10	0,75
kat	5,80	2,62
hond	11,5	4,38
mens	76,1	18,0
paard	605,0	85,4

Tabel 2.2

Opgave 16: Energieverbruik van zoogdieren

Zoogdieren hebben allemaal ongeveer dezelfde lichaamstemperatuur. Hoe zwaarder een zoogdier is, hoe meer energie het kost om de lichaamstemperatuur constant te houden. Het gewicht G (gram) is recht evenredig met een macht van de energie P (joule) die per minuut nodig is om de lichaamstemperatuur constant te houden. Je ziet een tabel met een aantal waarden voor G en P .

G	1000	2000	5000	15000
P	3,02	5,08	10,11	23,04

Tabel 2.3

- a Stel een formule op waarin je P uitdrukt in G .
- b Hoeveel energie P per minuut heeft een mens van 70 kg nodig? Rond af op twee decimalen.
- c Wat gebeurt er met P als G twee keer zo groot wordt?

Testen

Opgave 17

Geef van de volgende machtsfuncties

- het domein en het bereik;
- de intervallen waarop de grafiek dalend dan wel stijgend is;
- het maximum of minimum (voor zover van toepassing);
- de asymptoten (voor zover van toepassing).

a $a(x) = x^5$ en $b(x) = x^6$

b $c(x) = x^{-3}$ en $d(x) = x^{-4}$

c $e(x) = x^{\frac{1}{4}}$ en $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $2(x + 3)^4 - 10 = 500$

b $10 - 2\sqrt{x - 4} > 6$

c $\sqrt[4]{x} < 20$

d $2(x + 1)^3 > 20$

Practicum: Machtsfuncties

Met deze applet maak je machtsfuncties. Verzin zo'n functie, bedenken eerst hoe hij kan ontstaan uit $y = x^p$ en wat de karakteristieken zijn. Controleer dan je antwoord met de applet.

[Bekijk de applet: Machtsfuncties](#)

2.3 Afgeleiden

Inleiding

De afgeleide van een functie geeft de helling van de grafiek in een punt weer. Het is ook een maat voor de veranderingssnelheid van de functiewaarde voor een bepaalde waarde van x . Je bepaalt een afgeleide door te differentiëren. Dat lijkt tot nu toe misschien een eenvoudige klus. Maar wanneer de functies ingewikkelder worden moet je er speciale **differentieerregels** voor toepassen. Je herhaalt eerst nog even de al bekende technieken. Die worden nu uitgebreid met de machtsfuncties, ook verschoven machtsfuncties.



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- regels toepassen bij het differentiëren;
- de machtsregel toepassen op alle machtsfuncties;
- de kettingregel toepassen op functies die ontstaan door transformatie van een machtsfunctie.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel en de somregel;
- werken met de afgeleide, onder andere voor het berekenen van hellingswaarden en extremen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie f door $f(x) = (3x + 1)^2$.

- Bepaal de afgeleide van f .
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.
- Bereken met behulp van de afgeleide het minimum van functie f .
- Waarom kun je bij deze functie het minimum wel zonder afgeleide bepalen?

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ is $f'(0)$.

- Laat zien hoe je deze richtingscoëfficiënt kunt afleiden uit de richtingscoëfficiënt van de grafiek van $y = x^2$ voor $x = 1$.

Opgave V2

Bij het lozen van olie op zee ontstaat een zich cirkelvormig uitbreiende olievlek. De straal R (in meter) van die olievlek hangt af van de tijd t (in uren). Bijvoorbeeld kan gelden: $R = \sqrt{7t}$.

- Waarom is R een samengestelde functie?
- Hoe snel verandert de straal van de olievlek na 3 uur?
- Kun je het antwoord op de vorige vraag met behulp van differentiëren vinden? En hoe dan?

Uitleg 1

Bekijk de applet

De afgeleide van een functie geeft de helling van de grafiek in een punt weer. Het is ook een maat voor de veranderingssnelheid van de functiewaarde voor een bepaalde waarde van x . Je bepaalt een afgeleide door te differentiëren.

Je hebt al een paar differentieerregels geleerd. Je weet dus dat de afgeleide van $f(a \cdot x + b)$ is $a \cdot f'(a \cdot x + b)$.

De functie f met functievoorschrift $f(x) = (3x + 1)^2$ heeft dus als afgeleide:

$$f'(x) = 3 \cdot 2(3x + 1)^1 = 18x + 6.$$

Ga dit na met behulp van de applet.

Bij deze functie kun je de afgeleide ook bepalen door eerst de haakjes weg te werken en daarna pas te differentiëren. Maar dat gaat alleen omdat de exponent niet erg groot is en bovendien een geheel getal is. En inmiddels weet je dat er ook gebroken en negatieve exponenten bestaan.

Opgave 1

Bekijk [Uitleg 1](#).

- Licht met behulp van transformaties toe waarom de afgeleide van $f(x) = (3x + 1)^2$ gelijk is aan $f'(x) = 2(3x + 1)^1 \cdot 3$.
- Laat zien dat je door eerst haakjes weg te werken dezelfde afgeleide krijgt.
- Voer het functievoorschrift van f in je grafische rekenmachine in en bepaal met behulp daarvan de hellingwaarde voor $x = 0$. Ga na dat deze waarde overeen komt met $f'(0)$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 2(4x - 2)^5 - 1$.

- Welke transformaties moet je toepassen op de grafiek van $g(x) = x^5$ om die van f te krijgen?
- Bepaal de afgeleide van f .
- Bereken met behulp van die afgeleide de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$. Controleer je antwoord met behulp van de grafische rekenmachine.

Uitleg 2

Functies zoals $f(x) = \sqrt{x}$ zijn in feite machtsfuncties, want:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Je kunt ze daarom differentiëren met behulp van de machtsregel:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Zo'n afgeleide herleid je dan weer tot een vorm zonder gebroken en/of negatieve exponenten:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Op deze manier kun je ook van wortelfuncties en gebroken functies de afgeleide bepalen: je schrijft ze eerst als machtsfunctie. Daarop pas je dan de machtsregel voor differentiëren toe. Je ziet nu ook waarom het belangrijk is wortels en breuken tot machten (en omgekeerd) te kunnen herleiden.

Opgave 3

Je hebt in **Uitleg 2** gezien hoe je een wortelfunctie kunt differentiëren met behulp van de machtsregel. Neem nu de functie

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

- Schrijf deze functie als machtsfunctie.
- Bepaal de afgeleide van deze functie met behulp van de machtsregel en herleid de afgeleide tot een vorm zonder negatieve exponent.
- Differentieer $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$.
- Differentieer $f(x) = \frac{3}{4x^5}$.
- Differentieer $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$.
- Differentieer $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2}$.

Opgave 4

Bekijk de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = \sqrt{3x - 6}$.

- Door welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $g(x) = \sqrt{x}$?
- De afgeleide van g kun je bepalen met behulp van de machtsregel. De afgeleide van f kan hieruit worden afgeleid. Laat dit zien.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De afgeleide van een functie $y = f(x)$ bepaal je door te differentiëren. Je kent al een aantal differentieerregels:

Machtsregel:

Als $f(x) = cx^r$ dan is $f'(x) = rcx^{r-1}$ voor elke c en voor elke reële waarde van r .

Constanteregel:

Als $f(x) = c$ dan is $f'(x) = 0$.

Somregel:

Als $f(x) = u(x) \pm v(x)$ dan is $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

Kettingregel voor eenvoudige samengestelde functies:

Als $f(x) = a \cdot (bx + c)^r + d$ dan is $f'(x) = a \cdot r(bx + c)^{r-1} \cdot b$ voor elke reële waarde van a , b , c , d en van r .

Met deze regels kun je ook wortelfuncties en gebroken functies differentiëren. Er blijven echter nog functies waarvan je de afgeleide met deze regels niet kunt bepalen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = (2x - 6)^4 - 5$.

Toon aan dat deze functie een minimum heeft en bereken dat minimum. Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Antwoord

Het aantonen dat f een minimum heeft kan met behulp van de afgeleide. Je kunt ook bekijken hoe de grafiek van f kan ontstaan door transformatie van die van $g(x) = x^4$, een functie met een minimum van 0 voor $x = 0$.

De drie transformaties zijn:

- translatie van 6 t.o.v. de y -as,
- vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ t.o.v. de y -as,
- translatie van -5 t.o.v. de x -as.

Hiermee vind je het minimum van f , namelijk $\min f(3) = -5$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn kun je natuurlijk met je rekenmachine bepalen.

Maar nu moet je de afgeleide gebruiken:

$$f'(x) = 4(2x - 6)^3 \cdot 2 = 8(2x - 6)^3.$$

Je krijgt dus een richtingscoëfficiënt van $f'(0) = 8 \cdot (-6)^3 = -1728$. De raaklijn heeft daarom een vergelijking van de vorm $y = -1728x + b$. Omdat $f(0) = 6^4 - 5 = 1291$ krijg je als vergelijking $y = -1728x + 1291$.

Opgave 5

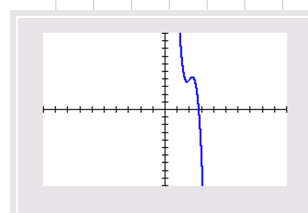
Gegeven is de functie: $f(x) = (2x + 8)^4 - 6$.

- Welke transformaties zijn nodig om de grafiek van f te verkrijgen uit: $g(x) = x^4$?
- Bereken hoe groot het minimum van f is met behulp van de afgeleide.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = -2$.
- In welk punt van de grafiek van f is de raaklijn evenwijdig met de lijn $y = 8x$?

Opgave 6

Hier zie je de grafiek van de functie f gegeven door $f(x) = 2x - 0,5(3x - 6)^3$ zoals een grafische rekenmachine die maakt met de standaardinstellingen van het venster. Er lijken twee extremen te zijn.

- Ga met behulp van de afgeleide van f na, dat er inderdaad twee extremen zijn en bereken de exacte waarden van die extremen.
- De afgeleide f' heeft zelf een maximum voor $x = 2$. Toon dit aan.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.



Figuur 3.2

Voorbeeld 2

Differentieer de functies:

- $f(x) = x^2 - 4x\sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{2x-1}{x}$
- $f(x) = \sqrt{4x+1}$
- $f(x) = \frac{x^2+2\sqrt{x}}{3x}$

Antwoord

Bekijk nog even de differentieerregels in de theorie. Denk ook om het weer herleiden van de afgeleide tot een vorm zonder gebroken en/of negatieve exponenten.

- $f(x) = x^2 - 4x\sqrt{x} = x^2 - 4x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 2x - 6x^{\frac{1}{2}} = 2x - 6\sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{2x-1}{x} = 2 - x^{-1}$ geeft $f'(x) = 0 + 1x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
- $f(x) = \sqrt{4x+1} = (4x+1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$
- $f(x) = \frac{x^2+2\sqrt{x}}{3x} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3x\sqrt{x}}$

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2** zonder naar het antwoord te kijken.

- Bepaal eerst zelf deze vier afgeleiden.
- Oefen jezelf met behulp van het **Practicum**.

Opgave 8

Differentieer de volgende functies:

- a $f(x) = 3\sqrt{2x-6}$
- b $f(x) = 6x^2\sqrt{x} - 4\sqrt{5-x}$
- c $f(x) = \frac{x^3-2\sqrt{x}}{4x}$
- d $f(x) = \frac{15}{5-3x}$

Voorbeeld 3

Bij het lozen van olie in stilstaand water ontstaat een zich cirkelvormig uitbreidende olievlek. De straal R (in meter) van die olievlek hangt af van de tijd t (in uren). Bijvoorbeeld kan gelden: $R = \sqrt{7t}$. Hoe snel verandert de straal van de olievlek na 5 uur? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De snelheid waarmee de straal van de cirkel verandert op $t = 5$ is $R'(5)$.

Nu is $R(t) = (7t)^{\frac{1}{2}}$ en dus $R'(t) = \frac{1}{2}(7t)^{-\frac{1}{2}} \cdot 7 = \frac{7}{2\sqrt{7t}}$.

Dus is $R'(5) = \frac{7}{2\sqrt{35}} \approx 1,18$ m/uur.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** zie je een toepassing van een wortelfunctie.

- a Bepaal zelf - zonder eerst naar het antwoord te kijken - de afgeleide van $R(t)$. Vergelijk je antwoord met de afgeleide in het voorbeeld.
- b Je kunt deze afgeleide ook bepalen door de functie te schrijven als $R(t) = \sqrt{7} \cdot \sqrt{t}$. Laat zien hoe je in dat geval de afgeleide vindt.
- c Laat ook zien dat je met de afgeleide bij b dezelfde uitkomst vindt voor $R'(3)$.

Verwerken

Opgave 10

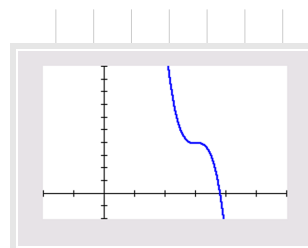
Differentieer de volgende functies.

- a $f(x) = (x^2 - 100)^2$
- b $g(x) = -5 + (1-x)^3$
- c $H(t) = 25(2-4t)^3$
- d $y(x) = 2p^2x - (px+3)^4$

Opgave 11

Hier zie je de grafiek van de functie $f(x) = -(2x - 6)^3 + 4$.

- De grafiek lijkt dalend voor elke waarde van x behalve $x = 3$. Toon aan dat dit inderdaad het geval is.
- De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ snijdt de x -as in punt P . Bereken de coördinaten van P .



Figuur 3.3

Opgave 12

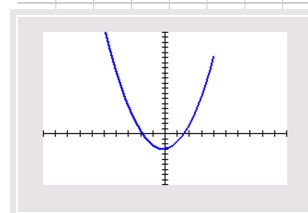
Bepaal van de volgende functies de afgeleide:

- $y = \sqrt[3]{x^7}$
- $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 1$
- $H(p) = \frac{1}{\sqrt{1-3p}}$
- $g(x) = 2x - \frac{5}{1-x}$

Opgave 13

Hier zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - \sqrt{8 - 2x}$.

- Bepaal het domein van f .
- Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f . Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- A is het beginpunt van de grafiek van f . Wat is er voor bijzonder aan de hand met de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A aan de grafiek? Welke vergelijking heeft die raaklijn?



Figuur 3.4

Opgave 14

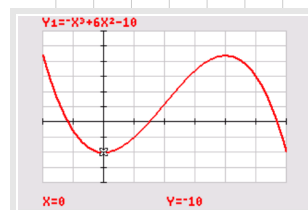
Een gelijkstroomcircuit bestaat uit een 12 volts batterij met een inwendige weerstand van 12 ohm en een variabele weerstand van R (ohm). Het vermogen P (in watt) dat door dit circuit wordt opgewekt, wordt gegeven door $P = RI^2$. De stroomsterkte I (ampère) wordt daarin gegeven door $I = \frac{12}{R+12}$.

- Druk het ontwikkelde vermogen uit in I , de stroomsterkte.
- Bereken het maximaal ontwikkelde vermogen met behulp van differentiëren.

Opgave 15

Je ziet hier een deel van de grafiek van de functie $y = -x^3 + 6x^2 - 10$.

- De grafiek heeft twee (lokale) extremen. Bereken beide extremen.
- Bereken het punt van de grafiek tussen de twee toppen waarin de hellingswaarde het grootst is.



Figuur 3.5

Toepassen

Opgave 16: Functies met een wortel

Gegeven is de functie f_{18} : $f_{18}(x) = x\sqrt{x+18}$.

De grafiek van f_{18} wordt 18 naar rechts geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g , met $g(x) = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x}$.

- Toon op algebraïsche wijze aan dat het gegeven functievoorschrift van g inderdaad bij deze verschuiving hoort.
- De functie $g(x) = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x}$ heeft een minimum. Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van x dit minimum wordt aangenomen.

(naar: examen havo wiskunde B in 2011, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 17

Differentieer de volgende functies.

- $f(x) = 6(1 + 2x)^3$
- $y(x) = (1 - 4x)^4 + 5$
- $R(t) = \sqrt{\frac{15}{t}}t$
- $f(x) = \sqrt{10 + 8x}$
- $K(p) = \frac{2}{p\sqrt{p}}$
- $f(x) = x^3 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \sqrt{x+2}$.

- Als je de grafiek van deze functie op je grafische rekenmachine bekijkt met de standaardinstellingen van het venster, lijkt het wel een rechte lijn te zijn. Wat is het domein van f ?
- Bepaal de afgeleide van f .
- Bereken met behulp deze afgeleide het minimum van f .
- Wat is het bereik van deze functie f ?
- Bereken exact de hellingwaarde van de grafiek van f in het punt waar deze grafiek de y -as snijdt.

Practicum: Machtsfuncties

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het differentiëren van machtsfuncties, waaronder gebroken functies en wortelfuncties**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

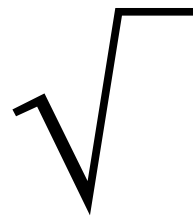
Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.4 Wortelfuncties

Inleiding

Alle functies die door transformatie kunnen ontstaan uit $y = x^p$ (waarin p elk willekeurig reëel getal kan zijn) zijn machtsfuncties. Dat geldt ook voor een wortelfunctie g met bijvoorbeeld als functievoorschrift $g(x) = 2\sqrt{x+4} + 5$, want dit kun je schrijven als $g(x) = 2(x+4)^{0,5} + 5$. Over dergelijke functies gaat het hier...



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met wortelfuncties als machtsfuncties met een gebroken exponent;
- wortelfuncties differentiëren en daarmee extremen berekenen en vergelijkingen van raaklijnen opstellen.

Voorkennis

- werken met machtsfuncties in het algemeen;
- transformaties toepassen op functies;
- machtsfuncties differentiëren;
- vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de grafiek van de wortelfunctie f met functievoorschrift $f(x) = 2\sqrt{x+4} + 5$.

- Welke karakteristieken heeft de grafiek van f ?
- Schrijf domein en bereik van f op.
- Waarom is f een machtsfunctie?
- Laat zien, hoe je de afgeleide van f bepaalt.

Uitleg

Alle functies van de vorm $f(x) = x^p$ met p een willekeurig reëel getal en alle functies die daaruit door transformatie kunnen ontstaan heten machtsfuncties.

Dat geldt voor alle lineaire en kwadratische functies, maar ook voor veel wortelfuncties:

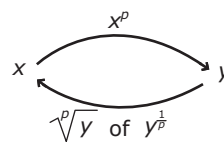
- $f(x) = 200\sqrt{x+30} - 100$ is te schrijven als machtsfunctie $f(x) = 200(x+30)^{\frac{1}{2}} - 100$.
- $g(x) = 40 - \sqrt[3]{x}$ is te schrijven als machtsfunctie $k(x) = -x^{\frac{1}{3}} + 40$.

Al deze functies kun je door transformatie afleiden uit de bijbehorende machtsfunctie. Ze hebben daarom dezelfde eigenschappen.

Je kunt vergelijkingen oplossen door de omgekeerde macht te gebruiken, want $(x^p)^{\frac{1}{p}} = x$ als x positief is. Je moet er dan wel eerst voor zorgen dat je de vergelijking zo schrijft dat de macht (of de wortelvorm) geïsoleerd aan één kant van het isgelijktteken en de rest aan de andere kant van het isgelijktteken staat.

Als je de wortelfunctie schrijft in de vorm van een machtsfuncties kun je hem differentiëren om bijvoorbeeld hellingswaarden te berekenen.

Er bestaan ook functies waar wel wortelvormen in voorkomen, maar daarnaast ook andere uitdrukkingen. Een voorbeeld is de functie $h(x) = x^2 - 3x\sqrt{x}$. Dit is geen wortelfunctie, maar je kunt het functievoorschrift herleiden tot een verschil van twee machtsfuncties. Zo kun je er toch goed aan rekenen...



Figuur 4.2

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je dat wortelfuncties als machtsfunctie kunnen worden geschreven. Schrijf de volgende functies als machtsfunctie als dat kan.

- a $f(x) = 4\sqrt{x} + 3$
- b $g(x) = \sqrt{4 + x^2}$
- c $h(x) = -3\sqrt{2x - 8} + 6$
- d $k(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 3$

Opgave 2

De functie h met $h(x) = -3\sqrt{2x - 8} + 6$ is een wortelfunctie.

- a Maak de grafiek van deze functie op je grafische rekenmachine en beschrijf met welke transformaties die grafiek kan worden verkregen uit de grafiek van $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.
- b Bereken algebraïsch het nulpunt van h . Let er op dat je eerst de wortel isoleert.
- c Los exact op: $h(x) \geq x$.
- d Bepaal de afgeleide van functie h en stel met behulp hiervan een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van h voor $x = 6$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **machtsfunctie** is een functie van de vorm

$f(x) = a(b(x + c))^p + d$, waarin p elke reële waarde kan aannemen. Zo'n functie ontstaat door transformatie van $y = x^p$.

Als de macht gebroken is heb je te maken met **wortelfuncties** zoals:

- $f(x) = 1,5\sqrt{2x+6} - 1$, want dit kun je schrijven als $f(x) = 1,5 \cdot (2(x+3))^{\frac{1}{2}} - 1$.
- $f(x) = 1,5\sqrt[3]{2x+6} - 1$, want dit kun je schrijven als $f(x) = 1,5 \cdot (2(x+3))^{\frac{1}{3}} - 1$.
- $f(x) = 8 - 3 \cdot \sqrt{x+7}$, want dit kun je schrijven als $f(x) = 8 - 3 \cdot (x+7)^{\frac{1}{2}}$.

Al deze functies zijn af te leiden van een basisfunctie door de transformaties te bepalen. Bij de laatste functie is de basisfunctie $y = x^{\frac{1}{2}}$ eerst 7 naar links geschoven, daarna met -3 vermenigvuldigd t.o.v. de y-as en daarna 8 omhoog geschoven.

Van een wortelfunctie kun je de afgeleide bepalen door de functie eerst als een machtsfunctie te schrijven. Met die afgeleide kun je dan weer allerlei berekeningen doen zoals het bepalen van extremen het opstellen van vergelijkingen van raaklijnen.

Je moet ook exact of algebraïsch vergelijkingen en ongelijkheden met wortelfuncties kunnen oplossen. Het is bij vergelijkingen met wortels noodzakelijk om achteraf even te controleren of de gevonden waarden voor x wel voldoen. (Door het kwadrateren willen er wel eens oplossingen ontstaan die niet aan de gegeven vergelijking voldoen!).

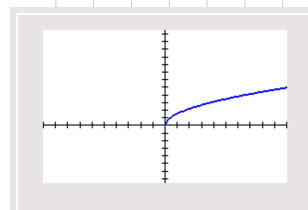
Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met $f(x) = 200\sqrt{x+30} - 100$. Leg uit hoe de grafiek van h kan ontstaan uit die van $y = x^{\frac{1}{2}}$ en bereken de snijpunten met de assen.

Antwoord

$f(x) = 200\sqrt{x+30} - 100$ is te schrijven als machtsfunctie $f(x) = 200(x+30)^{\frac{1}{2}} - 100$. Dit is een machtsfunctie die ontstaat door transformatie van $y = x^{\frac{1}{2}}$:

- eerst translatie -30 ten opzichte van de y-as;
- vervolgens vermenigvuldigen met 200 ten opzichte van de x-as;
- tenslotte translatie -100 ten opzichte van de x-as.



Figuur 4.3

Deze transformaties kun je ook toepassen op de instellingen van het venster van je rekenmachine. Je ziet de grafiek van $y = x^{\frac{1}{2}}$ goed in beeld als het venster is ingesteld op $[-4,4] \times [-3,5]$.

Dit wordt na transformatie $[-34, -26] \times [-700, 900]$. Ga na, dat je dan de grafiek van f goed in beeld hebt. Je vindt verder:

- Het snijpunt met de y -as uit $f(0) = 200\sqrt{0+30} - 100 \approx 995,45$. Dit wordt $(0; 995,45)$.
- Het snijpunt met de x -as door $f(x) = 0$ ofwel $200\sqrt{x+30} - 100 = 0$ op te lossen. Eerst schrijf je dit als $\sqrt{x+30} = 0,5$ en dan ga je kwadrateren. Dit geeft $x+30 = 0,5^2 = 0,25$ en dus $x = -29,75$ en dus als nulpunt $(-29,75; 0)$;

Opgave 3

Bestudeer **Voorbeeld 1**. Bekijk zelf de functie $g(x) = 200 - 50\sqrt{x+4}$.

- Schrijf het functievoorschrift als machtsfunctie.
- Uit welke machtsfunctie van de vorm $y = x^p$ kan de grafiek van g door transformatie ontstaan? Welke transformaties moet je achtereenvolgens toepassen?
- Bepaal domein en bereik van g .
- Bereken de snijpunten van de grafiek van g met de beide coördinaatassen.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 3\sqrt{6-2x}$.

- Bepaal domein en bereik van f .
- Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Voorbeeld 2

Los op: $\sqrt{x+5} + 1 \geq x$.

Antwoord

Eerst los je op: $\sqrt{x+5} + 1 = x$.

Dit schrijf je als $\sqrt{x+5} = x - 1$ (wortel isoleren).

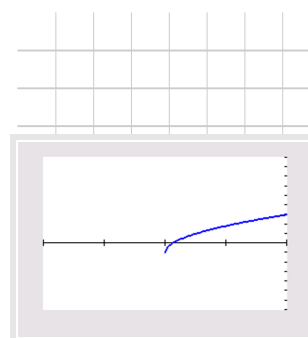
Vervolgens ga je kwadrateren: $x+5 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

Dus: $x^2 - 3x - 4 = 0$ ofwel $x = -1 \vee x = 4$.

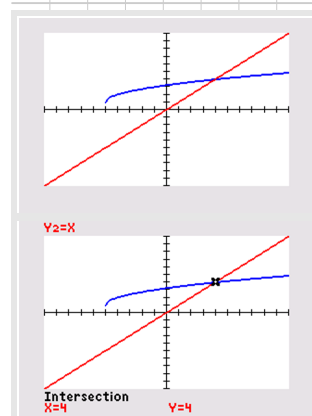
Bekijk je echter de grafieken van $y_1 = \sqrt{x+5} + 1$ en $y_2 = x$ dan zie je maar één snijpunt. Dat klopt ook wel: $x = -1$ voldoet niet aan de vergelijking. Er is alleen een snijpunt voor $x = 4$.

Verder moet je rekening houden met het domein van de wortelfunctie $D_{y_1} = [-5, \rightarrow)$.

De oplossing van de ongelijkheid (zie grafiek) is $-5 \leq x \leq 4$.



Figuur 4.4



Figuur 4.5

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je een ongelijkheid kunt oplossen waarin wortelfuncties voorkomen die je kunt schrijven als een machtsfunctie. Los de volgende algebraïsch ongelijkheden op:

- a $200\sqrt{x-40} \geq 50$
- b $100 - 25\sqrt{2x+6} < 20$
- c $\sqrt{2x+6} - 1 \geq x$
- d $40 - \sqrt[3]{x} < 24$

Opgave 6

Gegeven zijn de functies f met $f(x) = 2x\sqrt{x} + 4$ en g met $g(x) = 2x\sqrt{x+4}$.

- a Waarom is f wel een machtsfunctie en g niet?
- b Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) \geq g(x)$.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie h met $h(x) = x^2 - 3x\sqrt{x}$. Bereken exact het minimum van deze functie.

Antwoord

Schrijf $h(x) = x^2 - 3x^{\frac{1}{2}}$. Dan is $h'(x) = 2x - 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 2x - 4\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Vervolgens los je op: $h'(x) = 0$.

Dit geeft $2x - 4\frac{1}{2}\sqrt{x} = 0$ en dus $\sqrt{x} = \frac{4}{9}x$.

Kwadrateren geeft $x = \frac{16}{81}x^2$. Herleiden op 0 geeft $\frac{16}{81}x^2 - x = 0$ en

$x(\frac{16}{81}x - 1) = 0$. Dit geeft $x = 0 \vee x = \frac{81}{16}$.

In de grafiek zie je dat het minimum zit bij $x = \frac{81}{16}$ en dat

$h(\frac{81}{16}) = -\frac{2187}{256}$.

Opgave 7

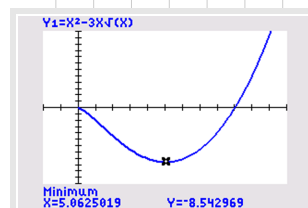
Bekijk de functie $h(x) = x^2 - 3x\sqrt{x}$.

- a Waarom is hier geen sprake van een machtsfunctie?
- b Welk domein heeft h ? Bereken exact de nulpunten van h .
- c Voer zelf de berekening van het minimum van f uit. Werk met de exacte waarden!
- d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van h in het rechter snijpunt met de x -as.

Opgave 8

Gegeven is de functie f met $f(x) = x - \sqrt{8-x}$.

- a Laat zien, dat $f'(x) = 0$ geen oplossingen heeft.
- b Bepaal domein en bereik van f .



Figuur 4.6

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = 40 - 10\sqrt{12 - 2x}$.

- Laat zien dat f een machtsfunctie is.
- Bepaal exact de snijpunten van de grafiek van f met de beide assen.
- Schrijf domein en bereik van f op.
- Los algebraïsch op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) \geq 10x$.
- Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f die evenwijdig loopt met de lijn $y = 10x$.

Opgave 10

De functie f met $f(x) = x - \sqrt{5x}$ heeft een minimum.

- Bereken met behulp van differentiëren de exacte waarde van dit minimum.
- De raaklijn aan de grafiek van f in zijn snijpunt met de x -as snijdt de y -as in punt P . Bereken de coördinaten van P .

Opgave 11

Gegeven de functie g met $g(x) = 20x^2\sqrt{x} - 100$.

- Laat zien dat g een machtsfunctie is.
- Schrijf domein en bereik van g op.
- Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van g .
- Los op in twee decimalen nauwkeurig: $g(x) \geq x$.

Opgave 12

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op.

- $16\sqrt[4]{x} \geq \frac{1}{2}x$
- $2\sqrt{2x - 40} + 20 < 100$

Opgave 13

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = \frac{10}{x\sqrt{x}} + 100$ en $g(x) = \frac{10x}{\sqrt{x}}$.

- Beide functies zijn machtsfuncties. Verklaar op grond van de exponent van deze machtsfunctie waarom de grafiek van f altijd dalend en die van g stijgend is.
- Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) \geq g(x)$.

Toepassen

Opgave 14: Wortel en parabool

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \sqrt{8x-4}$ en $g(x) = x^2 + 1$.

De grafieken van f en g hebben het punt $(1,2)$ gemeenschappelijk.

- Plot de grafieken. Neem als venster $[-3,3] \times [0,6]$.
Toon op algebraïsche wijze aan dat in dit punt de hellingen van de grafieken f en g gelijk zijn.
- De horizontale lijn met vergelijking $y = 3$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in de punten B en C .
Bereken exact de lengte van lijnstuk AC .

(naar: pilotexamen havo wiskunde B in 2013, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 15

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

- $\sqrt[3]{2x-10} - 5 = 0$
- $2\sqrt{3x} + 12 > 2x$
- $2x\sqrt{x} \geq 0,016$

Opgave 16

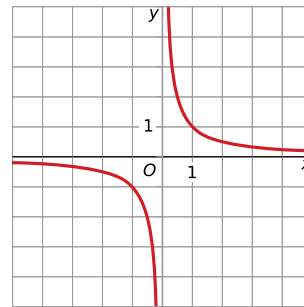
Gegeven zijn de functies $f(x) = 4\sqrt{10-x}$ en $g(x) = 10-x$.

- Geef domein en bereik van f .
- Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken van f en g .
- Los op: $f(x) > g(x)$.
- Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 6$.

2.5 Gebroken functies

Inleiding

Alle functies die door transformatie kunnen ontstaan uit $y = x^p$ (waarin p elk willekeurig reëel getal kan zijn) zijn machtsfuncties. Dat geldt ook voor een gebroken functie f met bijvoorbeeld als functievoorschrift $f(x) = \frac{2}{x+4} + 5$, want dit is te schrijven als $f(x) = 2(x+4)^{-1} + 5$. Over dergelijke functies gaat het hier...



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken functies die als machtsfuncties met negatieve exponent zijn te schrijven;
- werken met de afgeleide van dergelijke functies om extremen te berekenen en vergelijkingen van raaklijnen op te stellen.

Voorkennis

- werken met machtsfuncties in het algemeen;
- transformaties toepassen op functies;
- machtsfuncties differentiëren;
- vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de grafiek van de gebroken functie f met functievoorschrift $f(x) = \frac{2}{x+4} + 5$.

- Welke karakteristieken heeft de grafiek van f ?
- Schrijf domein en bereik van f op.
- Waarom is f een machtsfunctie?
- Bepaal de afgeleide van f .
- Hoe zie je aan de afgeleide dat deze functie altijd dalend is behalve voor $x = -4$?

Uitleg

Alle functies van de vorm $f(x) = x^p$ met p een willekeurig reëel getal en alle functies die daaruit door transformatie kunnen ontstaan heten machtsfuncties.

Dat geldt ook voor veel gebroken functies zoals:

- $f(x) = \frac{200}{x+30} - 100$ is te schrijven als machtsfunctie $f(x) = 200(x+30)^{-1} - 100$.
- $g(x) = 40 - \frac{1}{x^2}$ is te schrijven als machtsfunctie $g(x) = -x^{-2} + 40$.

Al deze functies kun je door transformatie afleiden uit de bijbehorende machtsfunctie. Ze hebben daarom dezelfde eigenschappen. Het herleiden van een gebroken functie tot machtsfunctie heb je nodig voor het differentiëren ervan. Gebroken functies die je niet tot machtsfunctie kunt herleiden, kun je niet differentiëren met regels die je tot nu toe daarvoor hebt geleerd.

Hier zie je een lineair gebroken functie h met $h(x) = \frac{4x-10}{2x-3}$ ingevoerd in de grafische rekenmachine met de standaardinstellingen van het venster.

Het nulpunt van de functie kun je berekenen door $h(x) = 0$ op te lossen. Je vindt $(2,5; 0)$.

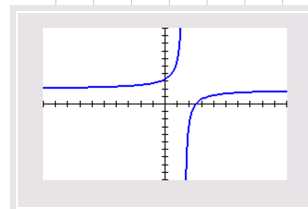
De verticale asymptoot vind je door te kijken wat x niet mag zijn: $4x - 10 = 0$ kan niet, dus de verticale asymptoot is $x = 2\frac{1}{2}$.

De horizontale asymptoot vind je door x heel groot positief of negatief te nemen: in dat geval nadert de y -waarde naar 2. De horizontale asymptoot is $y = 2$.

Iets lastiger is het om in te zien dat je deze functie kunt schrijven als

$$h(x) = \frac{4x-6-4}{2x-3} = \frac{4x-6}{2x-3} - \frac{4}{2x-3} = 2 - \frac{4}{2x-3} = 2 - 4(2x-3)^{-1}.$$

In deze vorm kun je zien dat ook dit een machtsfunctie is, de translaties vanuit $y = \frac{1}{x}$ herkennen en de functie differentiëren. De grafiek van zo'n functie heet hyperbool.



Figuur 5.2

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je dat sommige gebroken functies als machtsfunctie kunnen worden geschreven. Schrijf de volgende gebroken functies als machtsfunctie als dat kan.

- a $f(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$
- b $g(x) = \frac{1}{4+x^2}$
- c $h(x) = \frac{2}{(x-3)^4} + 10$
- d $k(x) = \frac{4-x}{x}$

Opgave 2

Gegeven is de gebroken functie f met $f(x) = \frac{3}{(2x-4)^2} + 1$.

- a Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformatie ontstaan? En welke transformaties moet je dan achtereenvolgens toepassen?
- b Welke twee asymptoten heeft de grafiek van f ?
- c Schrijf domein en bereik van f op.
- d Los exact op: $f(x) \geq 4$.
- e Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **machtsfunctie** is een functie van de vorm $f(x) = a(x + b)^p + c$, waarin ook p elke reële waarde kan aannemen. Zo'n functie ontstaat door transformatie van $y = x^p$. Voorbeelden van machtsfuncties zijn **gebroken functies** zoals

- $f(x) = \frac{1,5}{2x+6} - 1$, want dit kun je schrijven als $f(x) = 1,5 \cdot (2(x + 3))^{-1} - 1$.
- $f(x) = \frac{1,5}{(2x+6)^2} - 1$, want dit kun je schrijven als $f(x) = 1,5 \cdot (2(x + 3))^{-2} - 1$.

Van gebroken functies kun je de afgeleide bepalen door ze eerst in de machtsvorm te schrijven en dan te differentiëren. Daarmee kun je bijvoorbeeld vergelijkingen van raaklijnen aan die functies opstellen.

Een bijzonder geval is de **lineair gebroken functie** f met functievoorschrift met

$$h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

In dit geval kun je het functievoorschrift altijd herleiden tot dat van een machtsfunctie met exponent -1 . De grafiek van zo'n functie heet **hyperbool**.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{200}{x+30} - 100$. Leg uit hoe de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^{-1}$. Bepaal de asymptoten en het domein en bereik van de functie. Bereken de snijpunten met de assen. Voor welke x is $f(x) > 0$?

Antwoord

$f(x) = \frac{200}{x+30} - 100 = 200(x + 30)^{-1} - 100$. Dit is een machtsfunctie die ontstaat door transformatie van $y = x^{-1}$:

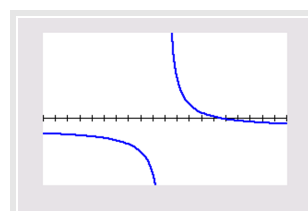
- eerst een translatie van -30 t.o.v. de y -as;
- vervolgens vermenigvuldigen met 200 ten opzichte van de x -as;
- tenslotte -100 verschuiven t.o.v. de x -as.

Deze transformaties kun je ook toepassen op de instellingen van het venster van je rekenmachine. Je ziet de grafiek van $y = x^{-1}$ goed in beeld als het venster is ingesteld op $[-4,4] \times [-3,5]$.

Dit wordt na transformatie $[-34, -26] \times [-700, 900]$. Ga na, dat je dan de grafiek van f goed in beeld hebt.

Je vindt verder:

- verticale asymptoot: delen door 0 geeft geen reëel getal, dus $x + 30 \neq 0$; als $x = -30$ heeft de grafiek een verticale asymptoot;
- horizontale asymptoot: als x een heel groot (negatief) getal is, dan is $\frac{200}{x+30} \approx 0$ en dus wordt dan $f(x) \approx -100$; de horizontale asymptoot is $y = -100$;
- domein $\langle -, -30 \rangle \cup \langle -30, \rightarrow \rangle$ en bereik $\langle -, -100 \rangle \cup \langle -100, \rightarrow \rangle$;
- snijpunt met de y -as: $f(0) = \frac{200}{30} - 100 = -93\frac{1}{3}$ dus dit wordt $(0, -93\frac{1}{3})$;
- snijpunt met de x -as: $f(x) = 0$ als $\frac{200}{x+30} = 100$ en $x + 30 = 2$ dus $x = -28$, zodat dit $(-28, 0)$ wordt;
- $f(x) > 0$ voor $-30 < x < -28$.



Figuur 5.3

Opgave 3

Bestudeer **Voorbeeld 1**. Bekijk de functie $g(x) = 200 - \frac{50}{(x-4)^2}$.

- Schrijf het functievoorschrift als machtsfunctie.
- Uit welke machtsfunctie van de vorm $y = x^p$ kan de grafiek van g door transformatie ontstaan? Welke transformaties moet je achtereenvolgens toepassen?
- Bepaal de twee asymptoten van de grafiek van g .
- Bepaal domein en bereik van g .
- Bereken de snijpunten van de grafiek van g met de beide coördinaatassen.

Opgave 4

Gegeven is de gebroken functie f met voorschrift $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$.

- Laat zien dat $f(x) = 1 - \frac{2}{x+4}$.
- Laat zien dat f een machtsfunctie is.
- Welke asymptoten heeft de grafiek van f ?
- Bepaal domein en bereik van f .

Voorbeeld 2

Los op: $40 - \frac{1}{x^2} < 24$.

Antwoord

Voor het oplossen van een ongelijkheid is een grafiek handig. De functie $y_1 = 40 - \frac{1}{x^2}$ is een machtsfunctie want te schrijven als $y_1 = -1x^{-2} + 40$. De functie ontstaat door transformatie van $y = x^{-2}$:

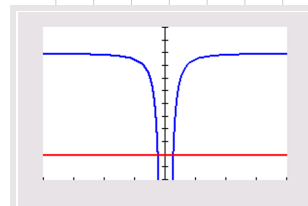
- vermenigvuldiging met -1 t.o.v. de x -as;
- 40 verschuiven t.o.v. de x -as.

De grafiek van $y = x^{-2}$ komt goed in beeld met venster $[-4,4] \times [-4,4]$. De grafiek van y_1 komt goed in beeld met venster $[-4,4] \times [36,44]$. Omdat je $y_2 = 24$ ook in beeld wilt hebben, kies je $[-4,4] \times [20,44]$.

Bij $x = 0$ zit een verticale asymptoot!

Dan los je op: $40 - \frac{1}{x^2} = 24$. Je vindt: $x = 0,25 \vee x = -0,25$.

De oplossing van de ongelijkheid is $-0,25 < x < 0 \vee 0 < x < 0,25$.



Figuur 5.4

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je een ongelijkheid kunt oplossen waarin gebroken functies voorkomen die je kunt schrijven als een machtsfunctie. Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a $\frac{200}{x-40} \geq 50$
- b $\frac{25}{(2x+6)^2} - 100 < 200$

Opgave 6

De functie $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ kun je niet als machtsfunctie schrijven. Toch kun je wel ongelijkheden oplossen waarin die functie voorkomt.

- a Los op: $f(x) \leq -0,5$.
- b Los op: $f(x) > \frac{1}{x}$.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie h met $h(x) = \frac{x^2+2}{2x}$.

Bereken met behulp van differentiëren de extremen van h .

Antwoord

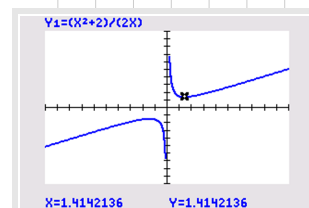
$$h(x) = \frac{x^2+2}{2x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{2}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x + x^{-1}.$$

$$\text{De afgeleide wordt } h'(x) = \frac{1}{2} - 1x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}.$$

Voor de extremen los je op $h'(x) = 0$.

Dit geeft $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$ en dus $x^2 = 2$ zodat $x = \pm\sqrt{2}$.

Aan de grafiek op je grafische rekenmachine zie je dat er twee extremen zijn: $\max. f(\sqrt{2}) = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ en $\min. f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.



Figuur 5.5

Opgave 7

Bestudeer **Voorbeeld 3**. Bekijk de functie $g(x) = \frac{2x^2+1}{x}$.

- Bereken exact de extremen van g .
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 1$.
- Bepaal domein en bereik van g .

Opgave 8

Gegeven zijn de functies f met $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ en g met $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-2x}}$.

- Waarom zijn beide functies machtsfuncties?
- Los exact op: $f(x) \geq g(x)$.
- Bepaal met behulp van differentiëren de hellingwaarden van zowel f als g in het snijpunt van hun grafieken.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven de functie f met $f(x) = 40 - \frac{100}{(x+10)^3}$.

- Laat zien dat f een machtsfunctie is.
- Bepaal de asymptoten van de grafiek van f .
- Schrijf domein en bereik van f op.
- Bereken exact het nulpunt van de grafiek van f .
- Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) \geq x$.

Opgave 10

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op.

- $\frac{16}{x^4} \geq \frac{1}{2}x$
- $\frac{2x}{x-10} + 20 < 100$

Opgave 11

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = \frac{10}{x\sqrt{x}} + 100$ en

$$g(x) = \frac{10x}{\sqrt{x}}.$$

- Beide functies zijn machtsfuncties. Verklaar op grond van de exponent van deze machtsfunctie waarom de grafiek van f altijd dalend en die van g stijgend is.
- Welke asymptoten hebben deze functies?
- Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 12

Een lineair gebroken functie f is gegeven door $f(x) = \frac{2x-10}{x-10}$.

- Bereken de asymptoten van de grafiek van f en schrijf domein en bereik van deze functie op.
- Laat zien, dat het functievoorschrift ook is te schrijven als $f(x) = 2 + \frac{10}{x-10}$.
- Welke transformaties moet je op de hyperbool $y = \frac{1}{x}$ toepassen om die van f te krijgen?
- Los exact op: $f(x) \leq \frac{1}{x}$.

Opgave 13

Gegeven de functie f met $f(x) = \frac{10}{2x-5} + 2$.

- Laat zien dat f een machtsfunctie is.
- Schrijf domein en bereik van f op.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt van deze grafiek met de x -as.
- Er is nog een ander punt op de grafiek van f waarin de raaklijn evenwijdig is aan die bij c. Bereken de exacte coördinaten van dit punt.

Opgave 14

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ en de lijn l heeft vergelijking $3x - 16y = 0$.

- Bereken algebraïsch het minimum van functie f en schets de grafiek.
- Laat zien dat de grafiek van f een raaklijn heeft die evenwijdig is met lijn l .

Toepassen

Opgave 15: Gebroken functie

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$.

De horizontale lijn met vergelijking $y = \frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in twee punten.

- Bereken exact de coördinaten van de twee snijpunten.

Voor de afgeleide van f geldt $f'(x) = -\frac{8}{(4x+3)^2}$.

- Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Punt $A(1, \frac{1}{49})$ ligt op de grafiek van f . De lijn $y = ax + b$ is de raaklijn aan de grafiek van f in A .

- Bereken exact de waarden van a en b .

(naar: pilotexamen havo wiskunde B in 2014, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 16

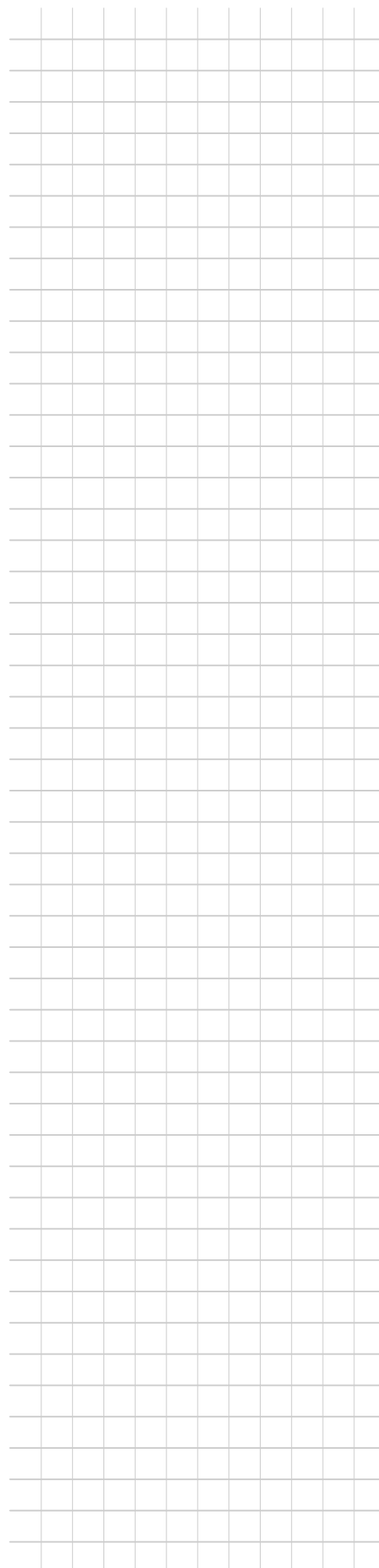
Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

- a $40 - \frac{5}{x^4} = 0$
- b $\frac{2\sqrt{x}+100}{\sqrt{x}} > 12$
- c $\frac{10}{(5-x)^4} \geq 0,016$

Opgave 17

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{-4}{(10-2x)^2} + 1$.

- a Geef domein en bereik van f .
- b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van f met de x -as.
- c Stel met behulp van differentiëren vergelijkingen op van de raaklijnen aan de grafiek van f in beide snijpunten met de x -as en bereken het snijpunt van die twee raaklijnen.



2.6 Toepassingen

Inleiding

Een 'model' is een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid. In de wetenschap wordt veel met modellen gewerkt omdat de werkelijkheid te complex is om zonder meer te beschrijven. Door niet belangrijke details weg te laten (verstandige aannames te doen) kan een model worden opgesteld dat met wiskundige middelen is te beschrijven en door te rekenen. Uit het doorrekenen van het model worden conclusies getrokken die dan weer kunnen worden vergeleken met de realiteit. Bij het werken met modellen gaat het vaak om het berekenen van extremen, om 'optimaliseringsproblemen'. Daarbij wordt het differentiëren toegepast. En er zijn nog andere toepassingen van differentiëren...

Je leert in dit onderwerp

- werken met rekenmodellen waarin het differentiëren kan worden toegepast;
- optimaliseringsproblemen aanpakken.

Voorkennis

- differentiëren met alle differentieerregels;
- werken met de afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen.

Verkennen

Opgave V1

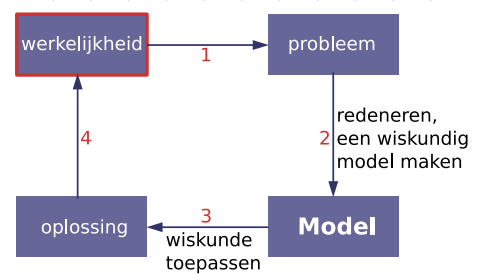
Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.

Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

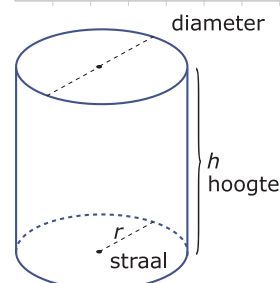
Uitleg

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag. Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Eerst een rekenmodel opstellen: Neem aan dat elk blik zuiver cilindrisch is en dat de benodigde hoeveelheid blik gelijk is aan de totale oppervlakte van het blik. De twee bepalende variabelen zijn dan de straal van (het grondvlak van) het blik r en de hoogte h , neem beide in cm. Het gegeven betreft de inhoud van een blik ($1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$), de eis betreft de oppervlakte die minimaal moet zijn. Voor de inhoud van een cilinder geldt: $I = \pi r^2 h$. Voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$. Ga dat na.



Figuur 6.1



Figuur 6.2

Met $I = 1000$ vind je $\pi r^2 h = 1000$ en dus: $h = \frac{1000}{\pi r^2}$. Als je nu in de formule voor A deze uitdrukking invult voor h , dan vind je: $A(r) = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2$.

Met behulp van differentiëren of de grafische rekenmachine vind je, dat voor $r \approx 5,4$ cm en $h \approx 10,8$ cm de totale oppervlakte minimaal is.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je een globale uitwerking van het probleem van het cilindervormige literblik met een zo klein mogelijke oppervlakte.

- Welke aannames worden er gedaan?
- Hoe kom je aan de formule voor de oppervlakte van het blik?
- Laat zien hoe je de formule voor $A(r)$ kunt afleiden.
- Bepaal nu de afgeleide van $A(r)$ en bereken met behulp daarvan de waarde van r waarvoor $A(r)$ minimaal is.

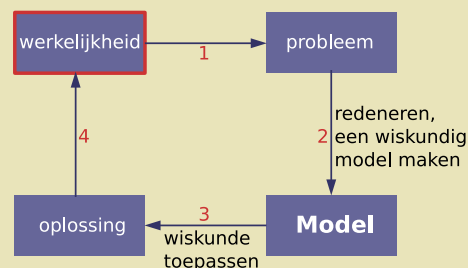
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Wiskunde wordt veel toegepast in wetenschap en handel en industrie om problemen op te lossen. Daarmee wordt bedoeld dat bij een wetenschappelijk onderzoek, een nieuw te ontwikkelen technologie, een productieproces, en dergelijke vanuit de al bestaande praktijk een vraagstuk naar voren komt waar een antwoord op moet worden gevonden. Vaak heeft dat antwoord de vorm van een **wiskundig model**. Een wiskundig model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid op grond van verstandige aannames. In een goed model zijn alle belangrijke factoren nog aanwezig, alleen de onbelangrijke blijven buiten beschouwing. Meestal heeft het model de vorm van één of meer formules die beschrijven hoe de belangrijke variabelen zich gedragen. Op die formules wordt dan de geschikte wiskundige theorie losgelaten...

Meer hierover vind je bij de rubriek **Probleemaanpak** op de Math4allsite.

Bij **optimaliseren** gaat het om wiskundige modellen waarbij wordt gezocht naar een maximale of een minimale waarde. Vaak is dat het maximum of minimum van een functie. Je kunt dat vinden met behulp van differentiëren of met je grafische rekenmachine.



Figuur 6.3

Voorbeeld 1

Uit een stuk karton van 20 bij 60 centimeter wordt een bakje gevouwen. Neem voor de hoogte van dit bakje x cm.

De inhoud I van dit bakje hangt alleen af van x (als er verder niets boven het open bovenzvlak mag uitsteken). Bereken algebraïsch bij welke waarde van x de inhoud van het bakje maximaal is.

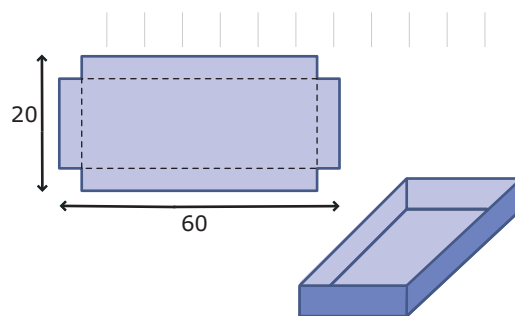
Antwoord

$$I(x) = x(20 - 2x)(60 - 2x) = 1200x - 160x^2 + 4x^3$$

$$I'(x) = 12x^2 - 320x + 1200 = 0 \text{ geeft } x = \frac{80 \pm \sqrt{2800}}{6}.$$

Aan de grafiek van I zie je dat de inhoud maximaal is als

$$x = \frac{80 - \sqrt{2800}}{6} \approx 4,5 \text{ cm.}$$



Figuur 6.4

Opgave 2

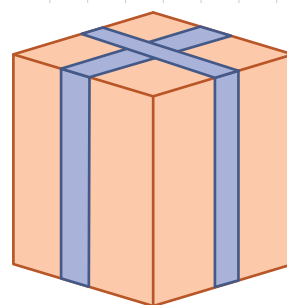
Bekijk het probleem in **Voorbeeld 1**.

- Probeer eerst om (zonder naar het antwoord te kijken) zelf een oplossing te vinden.
- Bekijk nu de oplossing die wordt gegeven. Als je een andere of geen oplossing hebt gevonden, probeer dan zelf de formule voor $I(x)$ af te leiden.
- Bereken met behulp van differentiëren voor welke x de waarde van I maximaal is.

Opgave 3

De afdeling Verpakking van een bedrijf heeft de opdracht gekregen balkvormige doosjes te maken waarvan de lengte even groot is als de breedte. Om elke doos worden twee zijden sierlinten aangebracht zoals je in de tekening ziet. De inhoud van de doosjes moet 1 liter zijn. Het bedrijf wil het verbruik van het sierlint zo klein mogelijk houden.

- Stel een formule op voor de lengte L van het benodigde sierlint als functie van de breedte x van de doos.
- Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het doosje de lengte van het sierlint zo klein mogelijk is. Geef je antwoord in millimeter nauwkeurig.



Figuur 6.5

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: garagedeur

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een garage met een garagedeur. Bij het openen van de deur gaat de onderkant recht omhoog, terwijl de bovenkant langs het plafond horizontaal naar binnen gaat. Binnen in de garage moet dus voldoende ruimte zijn om te zorgen dat een auto niet beschadigd raakt door de naar binnen komende deur. De garagedeur is 2,50 m hoog en je auto is 1,50 m hoog. Hoe ver komt de deur op die hoogte van 1,50 m maximaal naar binnen?

Antwoord

Noem de afstand van P tot het plafond x en de afstand die de deur op een hoogte van 1,50 m naar binnen komt A , beide in m. Je kunt dan met behulp van gelijkvormige rechthoekige driehoeken afleiden: $A(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\sqrt{2,5^2 - x^2}$.

Met behulp van je grafische rekenmachine vind je dat $A(x)$ maximaal is als $x \approx 1,84$ m. En omdat $A(1,84) \approx 0,77$ m, komt de garagedeur op een hoogte van 1,50 m zo'n 77 cm naar binnen.

Opgave 4

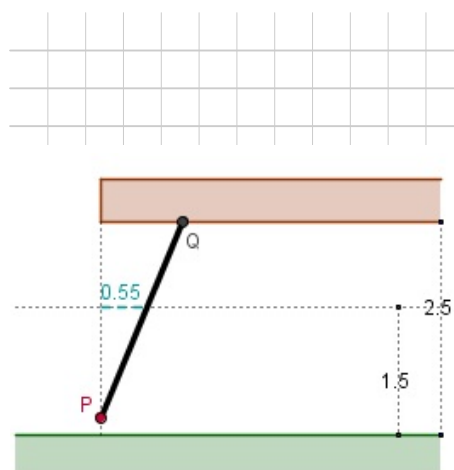
Bekijk het probleem in [Voorbeeld 2](#).

- Probeer eerst om (zonder naar het antwoord te kijken) zelf een oplossing te vinden.
- Bekijk nu de oplossing die wordt gegeven. Als je zelf een andere of geen oplossing hebt gevonden, probeer dan nu de formule voor $A(x)$ af te leiden.
- Bereken met behulp van je grafische rekenmachine voor welke x de waarde van A maximaal is.

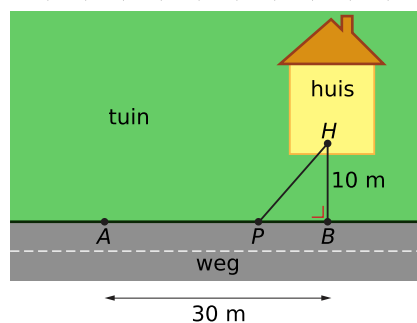
Opgave 5

Naar punt H van een woonhuis moet een nieuwe leiding worden gegraven vanuit het aansluitingspunt A . Nu kost het graven en weer netjes dichtmaken van een sleuf in de tuin 1,5 keer zoveel tijd als datzelfde werk langs de weggkant AB . Hoe moet er worden gegraven om alles in zo kort mogelijke tijd te doen?

- Probeer eerst zelf een oplossing te vinden.
- Neem x m voor de lengte van BP . Stel een formule op voor de totaal tijd $T(x)$ als je aanneemt dat t de benodigde tijd per m langs de weg is.
- Bereken met behulp van je grafische rekenmachine voor welke x de waarde van T minimaal is.



Figuur 6.6



Figuur 6.7

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Je ziet hier de grafiek van de functie f met $f(x) = 4 - x^2$. Het punt A heeft een x -coördinaat p met $0 < p < 2$. De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in B en punt C heeft dezelfde y -coördinaat als punt B . Zo ontstaat een rechthoek $ABCD$, zie figuur.

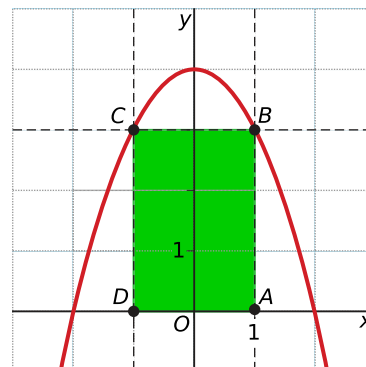
Voor welke waarde van p is de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ zo groot mogelijk?

Antwoord

Punt A heeft de coördinaten $(p, 0)$ en punt B heeft de coördinaten $(p, 4 - p^2)$. Uit de symmetrie van de figuur volgt nu dat de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ gelijk is aan $2p \cdot (4 - p^2)$.

Je wilt dus het maximum berekenen van de functie $g(p) = 2p(4 - p^2)$.

Dat kan met behulp van je grafische rekenmachine, maar ook met behulp van differentiëren.



Figuur 6.8

Opgave 6

Bekijk het maximaliseringsprobleem in [Voorbeeld 3](#).

- Licht toe waarom voor de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ geldt $g(p) = 2p(4 - p^2)$.
- Bereken het maximum van $g(p) = 2p(4 - p^2)$ met behulp van differentiëren.

Opgave 7

Gegeven zijn de functies f en g door $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$. De lijn $x = p$ met $0 < p < 1$ snijdt beide grafieken in de punten A en B .

Voor welke waarde van p is de lengte van lijnstuk AB maximaal?

Verwerken

Opgave 8

Op rechthoekige vellen papier van 1 m^2 worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte. Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

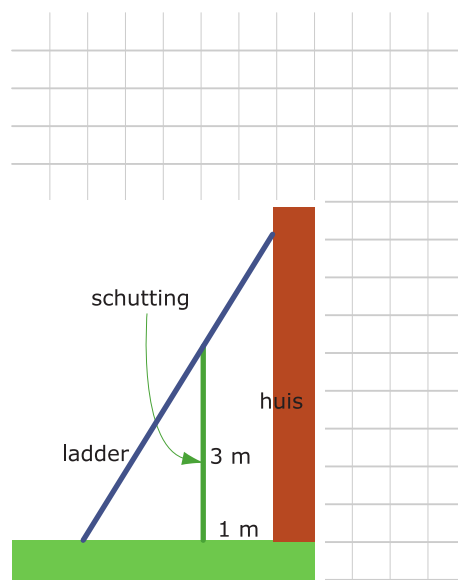
- Maak zelf een schets van de situatie met de gegevens er in.
- Probeer eerst zelf het probleem op te lossen. Kijk pas als dat niet lukt naar c en d.
- Neem aan dat de breedte van zo'n poster wordt voorgesteld door x dm. Leid een formule af voor de oppervlakte A van het bedrukte deel als functie van x .

- d Bereken met behulp van differentiëren de waarde van x waarvoor $A(x)$ maximaal is.
- e Beantwoord tenslotte de aan het begin gestelde vraag.

Opgave 9

Iemand wil een ladder kopen om zijn dakgoten schoon te maken. Vlak naast zijn huis op 1 m van de muur staat echter een schutting van 3 m hoog.

Hoe lang moet een ladder minstens zijn om over de schutting tegen de muur van het huis te komen? (Ga er van uit dat zowel de muur van het huis als de schutting loodrecht op de vlakke grond staan.)



Figuur 6.9

Opgave 10

Hoe lang zijn de zijden van de gelijkbenige driehoek met de grootste oppervlakte die een omtrek heeft van 20 cm? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 11

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = \sqrt{10 - 2x}$ op het domein $[0, 5]$. De lijn $x = k$ (met $0 < k < 5$) snijdt de x -as in punt A en de grafiek van f in punt B .

- a Toon aan dat de oppervlakte A van rechthoek $OABC$ gelijk is aan: $A(k) = k\sqrt{10 - 2k}$.
- b Bepaal voor welke k de oppervlakte van rechthoek $OABC$ zo groot mogelijk is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Gegeven is de familie van functies f_p door $f_p(x) = \frac{x^2 + p}{x}$.

- a Bereken algebraïsch de extremen van f_p als $p = 1$.
- b Voor welke waarden van p heeft f_p geen extremen?
- c Voor welke waarden van p heeft de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ een richtingscoëfficiënt van -1 ?

Opgave 13

In een rechthoekig Oxy -assenstelsel snijdt lijn $x = p$ met $p > 0$ de grafiek van $f(x) = 4 - x^2$ in punt P .

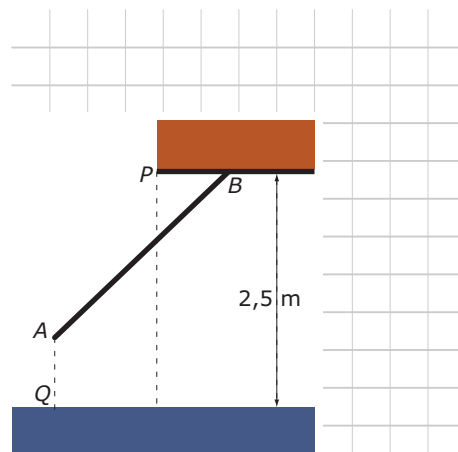
Bereken de minimale waarde die lijnstuk OP kan aannemen.

Testen

Opgave 14

Hier zie je een bewegende garagedeur. De hoogte van punt A (de onderkant van de deur) boven de grond is in elke stand even groot als de lengte van PB .

Bereken hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 6.10

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $f(x) = x^2 - (2x - 4)^3$.

- a Bepaal algebraïsch de extremen van f in twee decimalen nauwkeurig.
- b De lijn met vergelijking $x = k$ met $0 < k < 2$ snijdt de x -as in A en de grafiek van f in B . Voor welke waarde van k is de oppervlakte van $\triangle OAB$ maximaal?

2.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Machtsfuncties**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- recht evenredig met een macht — machtsverbanden;
- machtsfuncties, eigenschappen afhankelijk van exponent — machtsvergelijking;
- afgeleide van machtsfuncties ook met gebroken en/of negatieve exponent — differentieerregels;
- wortelfunctie;
- gebroken functie.

Activiteitenlijst

- machtsverbanden herkennen — heen- en terugrekenen bij machtsverbanden;
- de eigenschappen van machtsfuncties vinden — werken met transformaties van machtsfuncties;
- differentiëren van machtsfuncties ook met gebroken en/of negatieve exponent;
- karakteristieken van wortelfuncties berekenen — werken met de afgeleide van wortelfuncties;
- karakteristieken van gebroken functies berekenen — werken met de afgeleide van gebroken functies.

Achtergronden

De grootste wiskundige prestatie van de achttiende eeuw was de ontwikkeling van de 'calculus', van de 'analyse'. Daarbij gaat het om differentiaal- en integraalrekening, de functietheorie en alles wat daaruit voortvloeide. De belangrijkste rol daarin werd vervuld door **Leonhard Euler (1707–1783)**. Euler leerde de wiskunde in Basel van **Johann Bernoulli (1667–1748)** en werd in 1773 opvolger van **Daniël Bernoulli (1700–1782, zoon van Johann Bernoulli)** als hoogleraar in St. Petersburg.

Vooral dankzij een fenomenaal geheugen (hij kende bijvoorbeeld de eerste zes machten van de eerste 100 priemgetallen uit zijn hoofd evenals alle formules uit de trigonometrie en de analyse en een grote hoeveelheid gedichten) kon hij zelfs toen hij volslagen blind was zijn onvoorstelbare productiviteit op het gebied van de wiskunde en de mathematische fysica handhaven. Met 'Introductio in Analysin Infinitorum' schreef hij in 1748 het eerste samenhangende werk over analyse. Toch was Euler bepaald geen monomane excentrieke wiskundige, maar vooral een gezinsmens (hij had 13 kinderen waarvoor hij allerlei spelletjes ontwierp).

Lees ook op deze site over **Grafieken en verandering, differentiaalrekening**.



Figuur 7.1 Leonhard Euler

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 10 - 2(x - 1)^5$.

- Laat zien door welke transformaties de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^5$.
- Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de beide coördinaatassen.
- Los algebraïsch op: $f(x) = 496$.
- Los algebraïsch op: $f(x) > 8$.

Opgave 2

De functies f en g zijn machtsfuncties: $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ en $g(x) = \sqrt{8}(6 - x)^{-\frac{1}{2}}$.

- Welk domein en welk bereik heeft functie f ?
- Welk domein en welk bereik heeft functie g ?
- Los exact op $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 3

Een kalkoen braden is lastig, omdat het enige tijd duurt voordat ook het binnenste van de kalkoen op temperatuur komt. Hoe lang dat duurt hangt af van het gewicht. Het is de kunst om de kalkoen zo lang te braden dat het binnenste net gaar is. Je kunt dat niet controleren zonder de kalkoen aan te snijden. De optimale braadtijd is daarom moeilijk vast te stellen. Gelukkig geven kookboeken vaak aanwijzingen voor de braadtijd, die afhankelijk is van het gewicht van de kalkoen. Onderzoekers hebben vastgesteld dat met de volgende formule het beste resultaat wordt verkregen: $t = 11g^{\frac{2}{3}}$. Hierin is g het gewicht van de kalkoen in kilogram en t de tijd in minuten die nodig is om het binnenste van de kalkoen op een temperatuur van 85 °C te brengen.

- Bereken hoe lang het bij een kalkoen van 3 kg duurt voor het binnenste op een temperatuur van 85 °C is. Verwacht je dat een kalkoen van 6 kg daarvoor twee keer zoveel tijd nodig heeft?

Als het binnenste van de kalkoen een temperatuur heeft van 85 °C duurt het nog een tijd voordat de kalkoen gaar is. Ga ervan uit dat die tijd 80 minuten is en dat die tijd niet afhangt van het gewicht van de kalkoen.

- Geef de formule voor de totale braadtijd T van een kalkoen afhankelijk van het gewicht. Is de totale braadtijd recht evenredig met een macht van het gewicht?
- Verklaar waarom het minder moeilijk is om kooktijden vast te stellen dan braadtijden. Is de kooktijd van bijvoorbeeld aardappels ook afhankelijk van het gewicht? En de totale tijd dat aardappels op het fornuis moeten staan?

Opgave 4

Bepaal de afgeleide van de volgende functies en herleid die afgeleide tot een vorm zonder gebroken en/of negatieve exponenten. Stel daarna een raaklijn aan de grafiek op voor $x = 1$.

a $f(x) = -(4x - 3)^5 + 6$

b $f(x) = \frac{x^3 - 1}{2x}$

c $f(x) = 6 - \sqrt{7 - 3x}$

d $f(x) = \frac{5}{(2x-1)^3} + 4$

e $f(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{5 - x}$

f $f(x) = \frac{x^3 - 3x\sqrt{x}}{4x^2}$

Opgave 5

Gegeven is de functie f door $f(x) = x^2 - 4x\sqrt{x} + 4x$.

- a Bereken exact de nulpunten van f .
- b Bereken exact de extremen van f .
- c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.
- d In welk ander punt op de grafiek van f is de raaklijn evenwijdig met die voor $x = 0$?

Opgave 6

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1,5x^2 - 0,25x^3$.

De lijn met vergelijking $x = p$ met $0 < p < 6$ snijdt de x -as in A en de grafiek van f in B .

- a Bereken algebraïsch de maximale lengte die lijnstuk AB kan aannemen.
- b Bereken algebraïsch de grootste oppervlakte die driehoek OAB kan aannemen.

Opgave 7

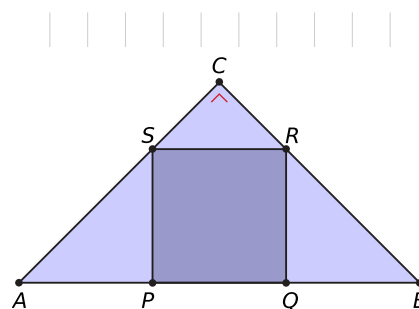
De functie f is gegeven door $f(x) = 2x - 1 + \frac{4}{2x-1}$.

- a Bereken de snijpunten van de grafiek van f met de beide assen en geef het domein van f .
- b Bereken exact de extremen van f en geef het bereik van f .
- c Bereken algebraïsch de twee punten op de grafiek van f waarin de raaklijn evenwijdig is met de lijn $y = 1,5x$.
- d In welke punten van de grafiek van f gaat de raaklijn door de oorsprong van het assenstelsel? (Geef benaderingen in één decimaal nauwkeurig.)

Opgave 8

In een gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC is AB de basis; $AB = 16$ cm. In deze driehoek wordt rechthoek $PQRS$ beschreven, zie figuur.

Bereken de maximale oppervlakte die deze rechthoek kan hebben.



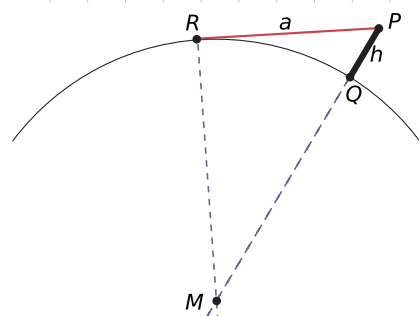
Figuur 7.2

Toepassen

Opgave 9: Kijkafstand

De formule voor de kijkafstand uit het begin van het onderwerp 'Machtsfuncties' kun je heel goed zelf afleiden.

Neem eens aan dat de aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km. De hoogte h (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand a (in m) is dan de lengte van PR (eigenlijk van de boog QR maar dat verschilt niet veel van elkaar).



Figuur 7.3

- a Hoe kun je nu a berekenen? Maak zo een formule voor a afhankelijk van h .

Omdat h^2 heel veel kleiner is dan $12732400h$ kun je h^2 verwaarlozen. Je vindt dan $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

De kijkafstand a is dus bij benadering een machtsfunctie van de hoogte h die je ogen boven het aardoppervlak zitten.

- b Laat zien dat ongeveer geldt $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.
- c De gevonden formule is iets anders dan die aan het begin van het onderwerp 'Machtsfuncties'. Hoe zou dat kunnen komen?
- d Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.
- e Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op Aarde?

Opgave 10: Opslagruimte

Een fabrikant heeft opslagruimte nodig. Het meest praktisch voor zijn producten is een rechthoekige loods met een vloeroppervlakte van $0,5 \text{ hm}^2$. Hij vraagt bij de gemeente de aankoop van een rechthoekig stuk grond op het industrieterrein aan om die loods op te kunnen bouwen. De gemeente antwoordt dat hem alleen een bouwvergunning kan worden verstrekt als hij een groenvoorziening om zijn loods aanbrengt.

De voorschriften zijn: groenstroken aan de zijkanten en de achterkant van de loods van 5 m breed en een groenstrook aan de voorkant van 8 m breed. De fabrikant slaat nu aan het rekenen. Hij wil dit probleem oplossen: 'Hoe kan ik een zo klein mogelijk rechthoekig stuk grond kopen waar een loods van $0,5 \text{ hm}^2$ op past en dat voldoet aan de voorschriften van de gemeente?'

Los het probleem van de fabrikant op met behulp van differentiëren.

Examen

Opgave 11: Koelwater

Via een rechthoekige goot loost een fabriek koelwater op een rivier. De hoeveelheid koelwater die per seconde een dwarsdoorsnede van een goot passeert, wordt het debiet van de goot genoemd. In figuur 1 is dit uitgebeeld.

Het debiet van de goot van de fabriek is te berekenen met de formule:

$$Q = 0,73 \cdot \frac{A^{\frac{5}{3}}}{P^{\frac{2}{3}}}$$

Hierbij geldt:

Q is het debiet in m^3 per seconde;

A is de oppervlakte van de rechthoekige dwarsdoorsnede van het water in m^2 .

P is de totale lengte van de randen van de dwarsdoorsnede die onder water liggen in m. In figuur 1 zijn deze randen dikgedrukt aangegeven.

De rechthoekige goot waarmee de fabriek het koelwater loost, is 3,0 meter breed en 1,0 meter hoog. In figuur 2 is de dwarsdoorsnede van deze goot getekend bij een maximaal debiet.

De fabriek loost 5000 m^3 koelwater per uur.

- a** Bereken het maximale debiet en leid daaruit af of de goot tijdens deze lozing zal overstromen.

De waterhoogte in de goot noemen we h , met h in m. Zie figuur 3.

Bij normale lozing stroomt er continu $1,0 \text{ m}^3$ koelwater per seconde door de goot.

- b** Bereken in dit geval de waterhoogte in de goot. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde B in 2013, tweede tijdvak)

Opgave 12: Gebroken functies

De functie f is gegeven door $f(x) = -\frac{6}{2x-3} + 2$. De grafiek van f snijdt de y -as in punt A en de x -as in punt B . Punt S is het snijpunt van de asymptoten van de grafiek van f .

- a** Schets de grafiek en stippel de asymptoten. Het snijpunt van de asymptoten is S . A is het snijpunt van de grafiek met de y -as en B is het snijpunt van de grafiek met de x -as.

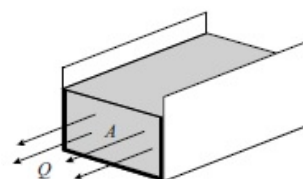
Onderzoek met of de punten A, S en B op een rechte lijn liggen.

De functie g is gegeven door $g(x) = \frac{1}{x}$. De grafiek van de functie h ontstaat uit de grafiek van g door de volgende twee transformaties: eerst de vermenigvuldiging met 6 ten opzichte van de x -as, gevolgd door de translatie $(-2, -3)$. (Dit betekent een translatie van -2 t.o.v. de y -as gevolgd door een translatie van -3 t.o.v. de x -as.)

- b** Toon op algebraïsche wijze aan dat de grafiek van h door de oorsprong gaat.

(naar: pilotexamen havo wiskunde B in 2014, tweede tijdvak)

figuur 1



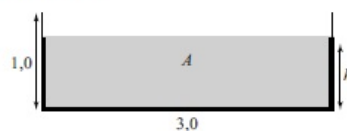
Figuur 7.4

figuur 2



Figuur 7.5

figuur 3



Figuur 7.6

3

Periodieke functies

- 3.1 Periodiciteit 108
- 3.2 Radialen 117
- 3.3 Sinus- en cosinusfuncties 125
- 3.4 Vergelijkingen met sinus en cosinus 133
- 3.5 Sinusoïden 142
- 3.6 Periodieke modellen 152
- 3.7 Totaalbeeld 160

3.1 Periodiciteit

Inleiding

Er zijn veel verschijnselen die zich herhalen in tijd of ruimte. Bijvoorbeeld een muzieknummer dat je afspeelt met herhaling, een voetbalfragment dat telkens wordt herhaald, zomer en winter, de dagen van de week, rondjes in een reuzenrad. Je noemt dat: periodieke verschijnselen. Als het verschijnsel ook nog met een functie te beschrijven is, spreek je van een periodieke functie. Als je één geschikt stukje kent (de periode) kun je het vervolg helemaal voorstellen. In dit onderdeel zul je dat voor verschillende soorten van periodieke functies doen.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de periode vaststellen van een periodiek verschijnsel;
- berekeningen maken bij periodieke verschijnselen.

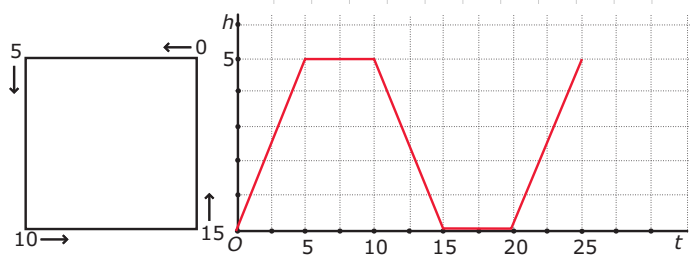
Voorkennis

- grafieken tekenen met grote getallen op de assen;
- lineaire vergelijkingen oplossen;
- vergelijkingen oplossen met twee of meer oplossingen.

Verkennen

Opgave V1

Een mier loopt op een verticaal vlak vierkantjes: 5 cm omhoog, 5 cm horizontaal, 5 cm recht naar beneden, 5 cm horizontaal, enz. De snelheid is constant 1 cm/s. Hier zie je de grafiek van de hoogte h boven de horizontale as afhankelijk van de tijd t .



Figuur 1.2

- Leg uit waarom de grafiek er zo uit ziet.
- Welke periode heeft de grafiek?
- Hoe hoog zit de mier na 614 seconden?

Uitleg 1

Stel het is vandaag maandag. Hoe bepaal je welke dag het over 100 dagen is?

Bij de dagen van de week is er sprake van een herhaling per 7 dagen. Als er zo'n herhaling optreedt, noem je dit een periodiek verschijnsel: na een bepaalde periode begin je als het ware weer van voor af aan. In dit geval heeft het periodiek verschijnsel een periode van 7 dagen.

Geef de eerste maandag dagnummer 0. Het is opnieuw maandag op dagnummer 7 en 14 en op elk veelvoud van 7. Omdat je weet dat het over 98 (14×7) dagen ook maandag is, weet je dat het over 99 dagen dinsdag is en over 100 dagen woensdag.

Kies in dit soort situaties een basispatroon dat zich telkens herhaalt. Dat kan zijn maandag tot en met zondag (7 dagen), maar ook zondag tot en met zaterdag (ook 7 dagen) of donderdag tot en met woensdag.

Opgave 1

Bekijk [Uitleg 1](#).

- Waarom is het 1071 dagen na een maandag weer een maandag?
- Stel dat het vandaag donderdag is. Wat voor dag is het 198 dagen later?
- Stel dat het vandaag zaterdag is. Wat voor dag was het 298 dagen geleden?
- Stel dat 12 maart op een maandag valt, op wat voor dag valt dan 2 mei van hetzelfde jaar?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Een wiel draait met steeds dezelfde snelheid rond (dit wordt een eenparige cirkelbeweging genoemd) en maakt één omwenteling in 10 seconden. Op tijdstip $t = 0$ staat punt A precies bovenaan. Het wiel draait linksom. Op welke tijdstippen staat punt A weer bovenaan?

Omdat het wiel in 10 seconden ronddraait, bevindt punt A zich ook bovenaan op $t = 0, 10, 20, \dots$ (elk veelvoud van 10).

Als het wiel al aan het draaien was, bevindt punt A zich ook bovenaan op $t = -10, -20, \dots$

Dit kun je schrijven als: $t = 0 + k \cdot 10$

met k een geheel getal, of korter: $t = k \cdot 10$. k is een soort teller.

Als $k = 1$, dan is $t = 1 \cdot 10 = 10$,

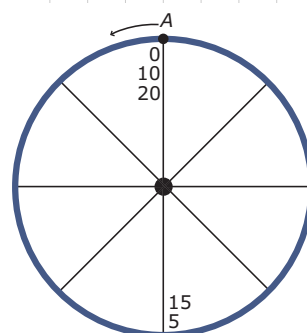
als $k = 2$, dan is $t = 2 \cdot 10 = 20$.

als $k = -2$, dan is $t = -2 \cdot 10 = -20$.

Op welke tijdstippen staat punt A helemaal rechts?



Figuur 1.3



Figuur 1.4

Dit gebeurt op drie vierde van een omwenteling, dus op 7,5 seconden en elke 10 seconden vroeger of later weer:

$$t = \dots; -12,5; -2,5; 7,5; 27,5; \dots$$

Dus op: $t = 7,5 + k \cdot 10$ met k een geheel getal.

Omdat de periode van draaiing 10 seconden is, draait het wiel per seconde $\frac{1}{10}$ deel.

Dit heet de frequentie van de draaiing.

Opgave 2

Bekijk nu in **Uitleg 2** nog eens het verhaal van het ronddraaiende wiel. Ga er van uit dat het punt A in 10 seconden rond draait en op $t = 0$ bovenaan zit.

- Op welke tijdstippen zit punt A helemaal links?
- Beschrijf waar punt A zit op $t = 7 + k \cdot 10$ (teken eventueel zelf zo'n wiel, de grootte is onbelangrijk).
- De frequentie van draaiing is $\frac{1}{10}$ per seconde.
Hoe groot is de frequentie van dit wiel per minuut?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **periode** van een periodiek verband is de lengte van het kortste interval waarin iets zich herhaalt.

In de grafiek is een herhalende golfbeweging zichtbaar. Er zijn verschillende intervallen voor de periode mogelijk:

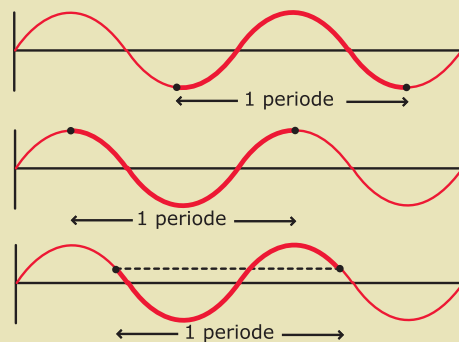
- van een maximum tot het eerstvolgend maximum;
- van een minimum tot het eerstvolgend minimum;
- een willekeurig punt tot het volgende punt waarop de grafiek dezelfde hoogte én dezelfde daling of stijging heeft als in het andere punt.

Voor de lengte van het interval waarop de grafiek zich herhaalt is het niet belangrijk uit welk deel van de grafiek het interval komt. Die lengte is altijd gelijk als de grafiek zuiver periodiek is. Soms wordt de periode ook wel **golflengte** genoemd.

Als op tijdstip t een bepaalde uitkomst voorkomt, komt diezelfde uitkomst ook voor op $t + k \cdot \text{periode}$, waarin k een geheel getal is.

Het aantal periodes per tijdseenheid heet de **frequentie**:

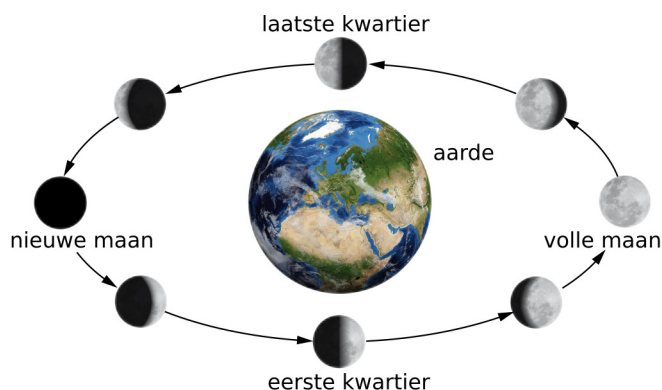
$$\text{frequentie} = \frac{1}{\text{periode}}$$



Figuur 1.5

Voorbeeld 1

De schijngestalten van de maan staan bekend als nieuwe maan, eerste kwartier (halve maan), volle maan en laatste kwartier (weer halve maan). Dit is een periodiek verschijnsel met een periode van gemiddeld ongeveer 30 dagen (in de loop van het jaar wisselt de lengte een beetje).



Figuur 1.6

Op 12 januari 2017 was het volle maan.

- Bereken op welke datum in mei 2017 het ook volle maan is. Ga hierbij uit van een periode van gemiddeld 30 dagen.
- Bereken de jaarlijkse frequentie van nieuwe maan.

Antwoord

Tel 30 dagen op bij 12 januari, dat geeft 11 februari. Dit proces herhalend geeft 13 maart, 12 april en 12 mei. Op 12 mei 2017 was het ook volle maan. De volgende datum is in juni.

De jaarlijkse frequentie van nieuwe maan is $\frac{1}{\frac{30}{365}} = \frac{365}{30} \approx 12,2$ per jaar.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** over de schijngestalten van de maan.

- Hoe groot is de periode van dit verschijnsel?
- Met welke frequentie is het volle maan? Ga hierbij uit van het aantal herhalingen per half jaar.
- Op welke datum is het volle maan in januari 2018, uitgaande van volle maan op 12 mei 2017?

Voorbeeld 2

Een opslagtank bevat 1000 liter brandstof op dag $t = 0$. In 20 dagen neemt die hoeveelheid gelijkmatig af tot 100 liter. Dan wordt de tank in een dag bijgevuld tot 1000 liter, enzovoort.

Hoeveel liter brandstof bevat de tank na 75 dagen?

Antwoord

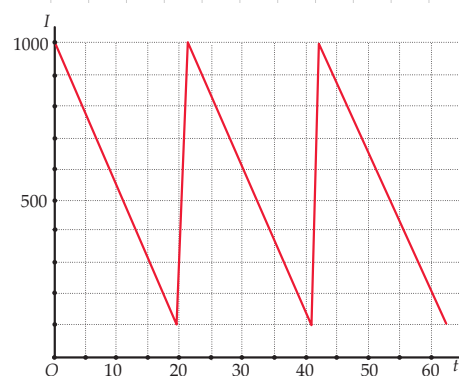
De periode van de inhoud is 21 dagen.

Op de tijdstippen $t = 75 + k \cdot 21$ is er een gelijke inhoud als op dag 75.

Op dag 12 heeft de tank dezelfde inhoud als op dag 75, want hier zitten precies drie periodes tussen ($75 - 3 \cdot 21 = 12$).

In 20 dagen gaat er 900 liter uit de tank, dat is 45 liter per dag. Van $t = 0$ naar $t = 12$ gaat er $45 \cdot 12 = 540$ liter uit.

Er was 1000 liter. Er is $1000 - 540 = 460$ liter over op $t = 12$, en derhalve ook op $t = 75$.



Figuur 1.7

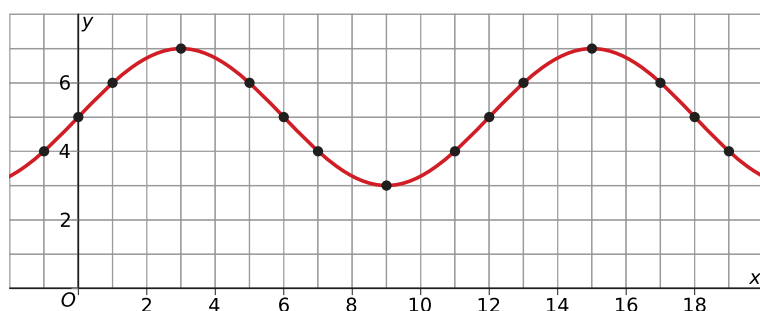
Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 2**. De hoogte van de brandstof in de tank is een periodiek verschijnsel.

- Hoeveel bedraagt de periode?
- Leg uit waarom er 550 liter in de tank zit op: $t = 10 + k \cdot 21$ v $t = 20,5 + k \cdot 21$.
- Voor welke waarden van t zit er 100 liter in de tank?
- Hoeveel zit er in de brandstoftank na 500 dagen?

Opgave 5

Bekijk de grafiek van de periodieke functie f . De grafiek loopt naar beide kanten oneindig ver door.



Figuur 1.8

- Bepaal de periode van deze functie.
- Bepaal $f(81)$ en $f(91)$.
- Los op: $f(x) = 6$ met $75 \leq x \leq 85$.
- Bepaal $f(-5)$.
- Los op: $f(x) = 4$ met $-100 \leq x \leq -90$.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: waterrad

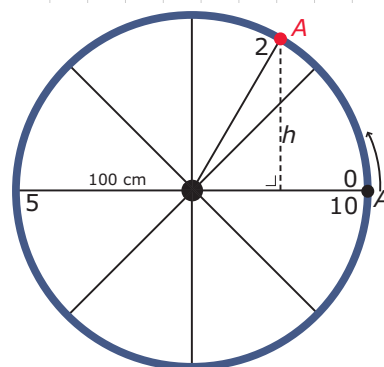
Hier is schematisch een waterrad weergegeven dat in 10 seconden ronddraait.

Punt A bevindt zich helemaal rechts op de cirkel op het tijdstip $t = 0$.

Gegeven is dat de straal MA van het waterrad 100 centimeter is. Het waterrad draait tegen de wijzers van de klok in.

h is de hoogte van punt A ten opzichte van de as van het rad, zodat op tijdstip $t = 0$ de hoogte ook 0 centimeter is.

Hoe hoog is het punt op tijdstip $t = 42$?



Figuur 1.9

Antwoord

De periode van het waterrad is 10 seconden. De hoogte op $t = 42$ is hetzelfde als de hoogte op $t = 2$.

Punt A heeft dan $\frac{2}{10}$ van de cirkel doorlopen en is $\frac{2}{10} \cdot 360^\circ = 72^\circ$ gedraaid.

Voor het berekenen van de hoogte heb je de sinus nodig:

$$\sin(72^\circ) = \frac{h}{100} \text{ en hieruit volgt } h = 100 \cdot \sin(72^\circ) \approx 95,1 \text{ cm.}$$

Op $t = 42$ is de hoogte ongeveer 95 cm.

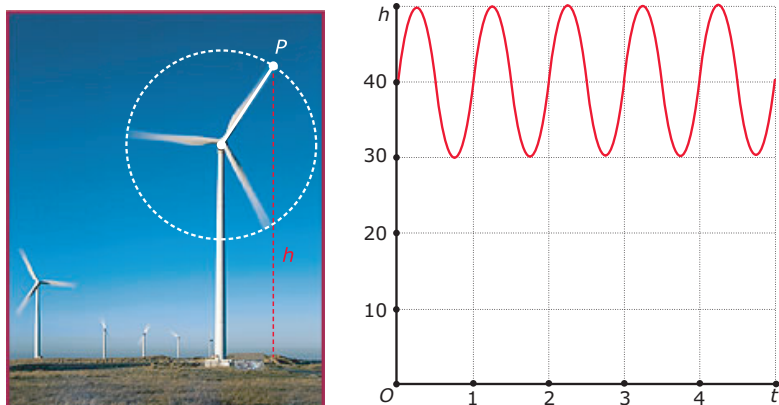
Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 3** over het ronddraaiende punt A .

- Bereken de hoogte h als $t = 1$. Rond af op gehele centimeters.
- Hoe groot is de hoogte h als $t = 31$?
- Bereken de hoogtes voor de gehele waarden van t vanaf 0 tot en met 10.
Rond indien nodig af op gehele centimeters.
- Met welke frequentie draait dit waterrad?
Ga uit van een tijdseenheid van een uur.

Opgave 7

Bekijk het punt P op de tip van een rotorblad van een ronddraaiende windmolen. De grafiek van de functie $h(t)$ is getekend, waarin h de hoogte van punt P boven de grond in meter voorstelt en t de tijd in seconden.



Figuur 1.10

- Met welke periode draait het rotorblad van de windmolen?
Met welke frequentie (omwentelingen per minuut) draait het rotorblad?
- Hoe hoog zit de as van de windmolen boven de grond?
En hoe lang is het rotorblad?
- Teken de grafiek van de hoogte van de tip van één van de twee andere rotorbladen.
- De wind neemt af, de windmolen gaat een half keer zo snel draaien.
Teken de bijbehorende grafiek.

Opgave 8

Een punt P beweegt linksom over een cirkel met straal 1 om de oorsprong O van een Oxy -assenstelsel. De afstand a die het punt heeft afgelegd hangt af van de hoek α waarover OP is gedraaid. Neem aan dat $a = 0$ als $\alpha = 0$.

- Hoeveel is $a(90^\circ)$? En $a(180^\circ)$? (Geef exacte waarden.)
- Leg uit waarom je nu te maken krijgt met hoeken die groter zijn dan 180° . Leg ook uit waarom de draaihoek zelfs groter kan zijn dan 360° .
- Wat zou een draaihoek van -60° betekenen?
- Bepaal nu $a(360^\circ)$, $a(450^\circ)$, $a(60^\circ)$ en $a(-30^\circ)$.
- Hoeveel is $a(1^\circ)$?
- Is $a(\alpha)$ een periodieke functie? Licht je antwoord toe.

Verwerken

Opgave 9

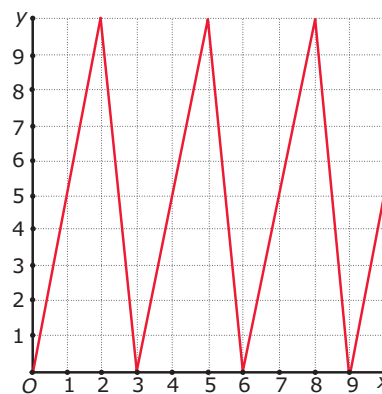
Een draaimolen draait steeds met dezelfde snelheid in 20 seconden rond.

- Hoeveel bedraagt de frequentie van de draaiing per minuut?
- Hoeveel bedraagt de frequentie van de draaiing per uur?
- Hoeveel bedraagt de frequentie van de draaiing per seconde?

Opgave 10

Bekijk de grafiek van de periodieke functie f .

- Hoeveel bedraagt de periode van de grafiek?
- Bereken $f(25)$.
- Voor welke waarden van x is $f(x) = 10$?
- Los op: $f(x) = 5$ met $12 \leq x \leq 15$.

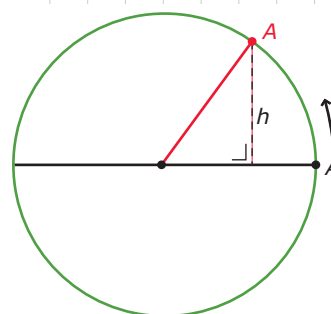


Figuur 1.11

Opgave 11

Bekijk de figuur. Punt A ligt op een wiel op afstand 1 van het middelpunt. Noem de hoogte van punt A ten opzichte van de horizontale as door het middelpunt $h(t)$. Punt A begint rechts, zodat $h(0) = 0$. Het wiel draait in 6 seconden linksom rond.

- Hoeveel bedraagt de frequentie van de draaiing per minuut?
- Bepaal $h(1,5)$.
- Bepaal $h(4,5)$ en $h(10,5)$.
- Bereken $h(0,5)$.
- Geef alle waarden van t die voldoen aan de vergelijking $h(t) = h(0,75)$.



Figuur 1.12

Opgave 12

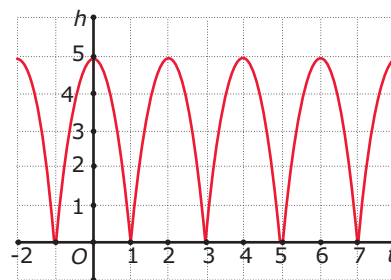
Een torenklok heeft een grote wijzer met een lengte van 1,5 m. De beide wijzers zitten bevestigd op de as van de klok op 45 m boven de grond. Punt T stelt de tip van deze grote wijzer voor. De hoogte h in m van T boven de grond hangt af van de draaihoek α . Neem aan dat $\alpha = 0$ om 12:00 uur.

- Hoe hoog zit T boven de grond op 2:10 uur?
- Schets een grafiek van $h(\alpha)$.

Opgave 13

Bekijk de periodieke grafiek. Voor $-1 \leq x \leq 1$ geldt de formule:
 $h(t) = 5 - 5t^2$

- Bereken $h(0)$ en $h(0,5)$.
- Bepaal de periode van de grafiek.
- Bereken $h(6)$ en $h(6,5)$.
- Bereken $h(15)$ en $h(15,5)$.

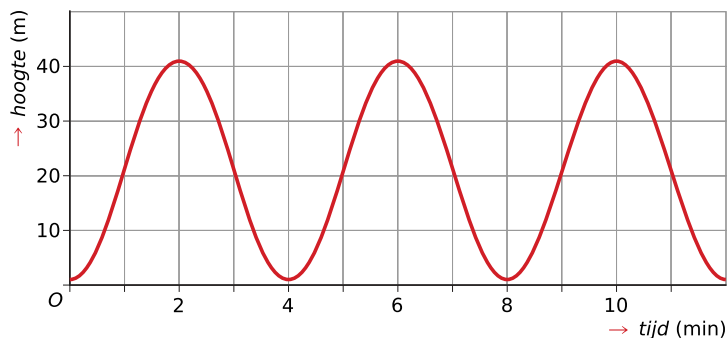


Figuur 1.13

Toepassen

Opgave 14: Reuzenrad

Peter stapt in een reuzenrad. Bekijk de grafiek waarin de hoogte van Peter ten opzichte van de grond is af te lezen na t minuten.



Figuur 1.14

- In hoeveel minuten draait het reuzenrad rond?
- Hoeveel rondjes heeft Peter gemaakt?
- Hoe groot is de straal van het reuzenrad?

Opgave 15: Hartslag

Op de intensive care van een ziekenhuis wordt met hartbewakings-apparatuur de hartfunctie van patiënten bewaakt. Bekijk de grafische weergave van de hartslag van een patiënt. De hartslagfrequentie wordt uitgedrukt in het aantal slagen per minuut.



Figuur 1.15

- Hoe groot is de hartslagfrequentie van deze patiënt?
- Wat gebeurt er met de periode van de grafiek als de hartslagfrequentie omhoog gaat?

Testen

Opgave 16

Een grafiek bestaat in een Oxy -assenstelsel uit rechte lijnstukjes tussen de punten $(100,1000)$, $(110,600)$, $(140,1000)$, $(150,600)$, $(180,1000)$, enz. Het patroon gaat naar links en rechts oneindig ver door.

- Welke periode heeft deze grafiek?
- Bereken de waarde van y bij $x = 250$.
- Teken de grafiek met $0 \leq x \leq 100$.
- Bereken de waarde van y bij $x = -250$.
- Hoeveel getallen x met $0 \leq x \leq 100$ bestaan er bij $y = 900$?

Opgave 17

Een wiel met een straal van 30 cm draait linksom rond met constante snelheid. De omlooptijd is 20 seconden. De hoogte in centimeter van punt A aan de buitenkant van het wiel, gemeten ten opzichte van het middelpunt, noem je $h(t)$ met t in seconden. Het punt A begint bovenaan, dus $h(0) = 30$.

- Met welke frequentie draait punt A ?
- Bereken $h(35)$.
- Bereken $h(18)$ in één decimaal nauwkeurig.
- Bereken $h(76)$ in één decimaal nauwkeurig.
- Geef alle tijdstippen t met $-40 \leq t \leq 40$ waarvoor geldt $h = 0$.

3.2 Radialen

Inleiding

Een punt dat met een vaste snelheid over een cirkel beweegt, volgt een eenparige cirkelbeweging. Dit is een belangrijk periodiek verschijnsel. De hoogte van dit punt boven de horizontale as kun je met behulp van de sinus van de draaihoek berekenen. Heeft de cirkel een straal van 1 dan is die hoogte gelijk aan de sinus van de hoek. Bij de eenparige cirkelbeweging komt vanzelf een nieuwe manier tevoorschijn om de grootte van een hoek aan te geven: in radialen in plaats van in graden.

Je leert in dit onderwerp

- graden omrekenen naar radialen en omgekeerd;
- werken met de exacte waarden van sinus en cosinus ook voor niet-scherpe hoeken.

Voorkennis

- de formule voor de omtrek van een cirkel;
- werken met sinus en cosinus in rechthoekige driehoeken.

Verkennen

Opgave V1

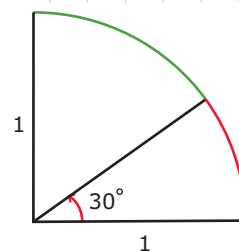
Bekijk de applet

Hoeken druk je al heel lang in graden uit. Toch hoeft dat niet, bekijk deze kwartcirkel maar eens. Hij heeft een straal van 1. Er staat een hoek van 30° in getekend.

- a** Hoe lang is de getekende cirkelboog? Leg uit waarom 30° overeenkomt met een booglengte van $\frac{1}{6}\pi$.

Als je de grootte van een hoek door zijn booglengte in een cirkel met straal 1 beschrijft, krijg je hoeken in 'radialen'. Dus 30° komt overeen met $\frac{1}{6}\pi$ radialen.

- b** Waarom is het van belang dat de cirkel waarin je de booglengte uitrekent een straal van 1 heeft?
- c** Reken maar eens een paar andere hoeken om van graden naar radialen.



Figuur 2.1

Uitleg 1

Bekijk de applet

Bekijk het punt P dat linksom (tegen de klok in) draait over een eenheidscirkel, een cirkel met een straal van 1.

Straal OP maakt een hoek α met de positieve x -as. Er geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{y_P}{1} = y_P$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|OQ|}{|OP|} = \frac{x_P}{1} = x_P$$

De driehoek is alleen te gebruiken als $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Maar het punt draait gewoon door, evenals de hoek. Op deze manier wordt de sinus en cosinus gedefinieerd voor draaihoeken van 90° en groter. Zo is

$\sin(180^\circ) = 0$, $\sin(270^\circ) = -1$ en $\sin(90^\circ + k \cdot 360^\circ) = 1$ met k een geheel getal;

$\cos(180^\circ) = -1$, $\cos(270^\circ) = 0$ en $\cos(k \cdot 360^\circ) = 1$ met k een geheel getal;

Sinus en cosinus kunnen dus ook een negatief getal zijn.

Het punt kan rechtsom (met de klok mee) draaien, je krijgt dan negatieve groottes van hoeken.

De grootte van hoeken kun je weergeven in graden, maar ook als booglengte BQ . De eenheid voor deze hoek heet radiaal, afgekort rad.

De omtrek van een cirkel met straal r is $2 \cdot \pi \cdot r$.

In een eenheidscirkel met $r = 1$ is de omtrek dus gelijk aan 2π .

Bij 360° hoort dus een booglengte van 2π en een hoek van 2π rad.

Bij 180° hoort dus een booglengte van π en een hoek van π rad.

Hoeken worden vanaf nu, tenzij anders vermeld, gegeven in radialen.

Om graden om te rekenen naar radialen gebruik je $180^\circ = \pi$ rad.

Bijvoorbeeld: omdat $1^\circ = \frac{1}{180}\pi$ rad is $40^\circ = \frac{40}{180}\pi$ rad $= \frac{2}{9}\pi$ rad.

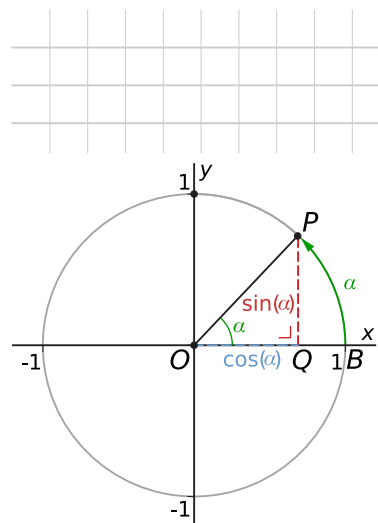
Merk op dat $\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin(\alpha)$ (k geheel), je hebt dan alleen een extra rondje gedraaid. Hetzelfde geldt voor cosinus.

Opgave 1

Teken een eenheidscirkel (een cirkel met een straal van 1 eenheid).

Gebruik je rekenmachine met hoeken in graden.

- Teken P als de draaihoek $\alpha = 30^\circ$.
Hoeveel radialen is α ?
Bereken $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.
- Teken P als de draaihoek $\alpha = 150^\circ$.
Hoeveel radialen is α ?
Bereken $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.
- Teken P als de draaihoek $\alpha = 210^\circ$.
Hoeveel radialen is α ?
Bereken $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.



Figuur 2.2

- d** Teken P als de draaihoek $\alpha = 270^\circ$.
Hoeveel radialen is α ?
Bereken $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.
- e** Hoeveel radialen hoort er bij 360° ? En bij 90° ?
- f** Bij welke draaihoeken is de y -coördinaat 1? Geef je antwoord in graden en in radialen.

Opgave 2

In **Uitleg 1** zie je hoe je kunt omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd.

- a** Hoeveel radialen is 60° ?
- b** Hoeveel graden is $1,5\pi$ rad?
- c** Hoeveel graden is 1 rad?
- d** Hoeveel radialen is 1° ?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je weet al dat bij bepaalde scherpe hoeken exacte waarden horen voor sinus en cosinus.

Je vindt ze in deze tabel, waarbij de hoek in graden en in radialen is gegeven. Leer de tabel uit het hoofd.

hoek in graden	0°	30°	45°	60°	90°
hoek in radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabel 2.1

Met behulp van de symmetrie van de eenheidscirkel kun je ook de exacte waarde van bijvoorbeeld $\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right)$ bepalen.

Je ziet dat: $\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

en dat: $\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Opgave 3

Bepaal met behulp van de symmetrie van de eenheidscirkel de exacte waarden.

- a** $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)$
- b** $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right)$

- c $\cos\left(3\frac{1}{3}\pi\right)$
- d $\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$

Opgave 4

Ook als er van exacte waarden geen sprake is, zijn er meerdere draaihoeken met dezelfde sinus of dezelfde cosinus.

- a Bereken in drie decimalen $\sin(1)$ en $\sin(1 + 2\pi)$. Leg uit waarom beide uitkomsten gelijk zijn.
- b Bereken $\sin(1)$ en $\sin(\pi - 1)$. Leg uit waarom beide uitkomsten gelijk zijn.
- c Welke hoeken hebben dezelfde sinus als $212,5\pi$?
- d Welke hoeken hebben dezelfde sinus als -1500π ?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Bekijk de **eenheidscirkel** (cirkel met straal 1) met het middelpunt in O . Punt P ligt op de eenheidscirkel.

Voor de **draaihoek** van P is de **booglengte** genomen vanaf hier $(1,0)$, tot het draaiende punt P . Bij linksom draaien is deze hoek positief, bij rechtsom draaien negatief.

Er geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{y_P}{1} = y_P$$

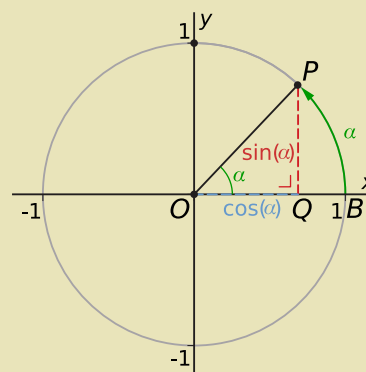
$$\cos(\alpha) = \frac{x_P}{1} = x_P$$

De eenheid voor deze hoek heet **radiaal**, afgekort rad. Op de eenheidscirkel hoort bij een draaihoek van 1 rad een booglengte van 1.

180° komt dan overeen met π rad (de halve omtrek van de eenheidscirkel).

Tenzij anders aangegeven, wordt in het vervolg de hoekeenheid rad gebruikt. Je kunt de grafische rekenmachine instellen op rekenen met radialen.

Merk op dat $\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos(\alpha)$ (k geheel).



Figuur 2.3

Voorbeeld 1

Gebruik bij het omrekenen van graden naar radialen: 360° is gelijk aan 2π radialen.

Hieruit volgt:

- 1° wordt $\frac{2\pi}{360} = \frac{1}{180}\pi$ rad.
- 90° wordt $90 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{1}{2}\pi$ rad.

En omgekeerd:

- 1 rad komt overeen met $\left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ = 57,295\dots^\circ$.
- $\frac{1}{6}\pi$ rad komt overeen met $\left(\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{360}{2\pi}\right)^\circ = 30^\circ$.

Je kunt zo deze handige tabel maken:

graden	360	180	90	45	30	1
radialen	2π	π	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{180}\pi$

Tabel 2.2

Opgave 5

Neem de tabel over en vul hem in.

graden	0	18		220		540
radialen			$\frac{5}{9}\pi$		2π	

Tabel 2.3

Voorbeeld 2

Bepaal met de rekenmachine $\sin(1)$, $\sin(10)$, $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$, $\sin(360)$ en $\sin(10 + 30\pi)$.

Welke waarden zijn hetzelfde?

Antwoord

Reken in radialen, want er zijn geen gradientekens. Laat de rekenmachine dan ook in radialen rekenen.

Ga na dat:

$$\sin(1) \approx 0,841$$

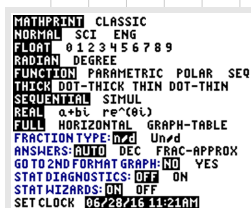
$$\sin(10) \approx -0,544$$

$$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 0,5$$

$$\sin(360) \approx 0,959$$

$$\sin(10 + 30\pi) \approx -0,544$$

De uitkomsten van $\sin(10)$ en $\sin(10 + 30\pi)$ zijn gelijk omdat tussen 10 en $10 + 30\pi$ precies 30π zit. Dat is precies 15 keer één volledige cirkel (lengte 2π).



Figuur 2.4

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Bepaal in drie decimalen nauwkeurig $\sin\left(\frac{1}{55}\pi\right)$.
- Leg uit waarom $\sin\left(40\frac{1}{55}\pi\right)$ dezelfde uitkomst geeft.
- Geef nog twee verschillende waarden voor x waarvoor geldt: $\sin\left(\frac{1}{55}\pi\right) = \sin(x)$.

Opgave 7

De draaihoeken kun je ook gewoon x noemen. Dat is later handig als je grafieken van de sinusfunctie en de cosinusfunctie gaat maken.

- Leg uit waarom $\sin(x) = \sin(x + k \cdot 2\pi)$ en $\cos(x) = \cos(x + k \cdot 2\pi)$, waarbij k een geheel getal is.
- Welke waarden kunnen $\sin(x)$ en $\cos(x)$ aannemen?
- Waarom is $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ exact $\frac{1}{2}$?
- Geef de volgende waarden exact: $\sin\left(5\frac{1}{6}\pi\right)$, $\cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right)$, $\sin\left(2\frac{3}{4}\pi\right)$.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

De grootte van hoek x is in radialen.
Verklaar waarom $\sin(x) = \sin(\pi - x)$.

Antwoord

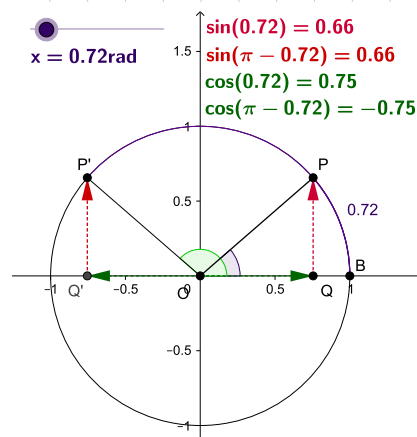
Bekijk de figuur met de punten P en P' op een eenheidscirkel, achtereenvolgens met hoek x en $\pi - x$.

In de eenheidscirkel liggen deze punten bij de hoeken x en $\pi - x$ symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door het middelpunt. Er geldt: $\sin(x) = \sin(\pi - x)$.

Opgave 8

Bekijk de figuur uit **Voorbeeld 3**.

- Bereken de grootte van $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ en $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$. Geef exacte antwoorden.
- Waarom zijn bij a beide antwoorden hetzelfde?
- Voor welke hoek geldt dat de sinus hetzelfde is?
- Voor welke hoeken is $\cos(x) = 0,5$?



Figuur 2.5

Opgave 9

Leg uit waarom:

- a $\sin(-x) = -\sin(x)$
- b $\cos(x) = \cos(-x)$
- c $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

Verwerken

Opgave 10

Deze hoeken zijn gegeven in graden. Bereken de bijbehorende booglengtes in de eenheidscirkel in radialen.

- a $30^\circ, 20^\circ, 10^\circ, 270^\circ, 360^\circ, 455^\circ, 780^\circ$

De booglengtes zijn in de eenheidscirkel gegeven. Bereken de bijbehorende hoeken in graden.

- b $\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{3}\pi; \frac{3}{4}\pi; 1; \pi; 3,1416; 10\pi$

Opgave 11

Gebruik eventueel een eenheidscirkel.

- a Bereken exact $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right), \sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right), \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$.
- b Bereken exact de grootte van $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right), \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right), \sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)$ en $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$.

Opgave 12

Gegeven is $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

- a Geef in een eenheidscirkel alle waarden van x met $0 \leq x < 2\pi$ aan die hieraan voldoen.
- b Noteer alle waarden van x die hieraan voldoen. Geef exacte waarden.

Opgave 13

Je weet, dat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$.

Onderzoek welke waarden van x voldoen aan $\sin(x) = -\frac{1}{2}$.

- a Geef in een eenheidscirkel alle waarden van x op het interval $[0, 2\pi]$ aan die hieraan voldoen.
- b Geef alle waarden van x die hieraan voldoen. Gebruik exacte waarden.

Opgave 14

Leg uit waarom:

- a $\sin(x) = \sin(3\pi - x)$
- b $\cos(x) = \cos(6\pi - x)$
- c $\cos(x) = \sin(x - 21,5\pi)$

Toepassen

In de studie van periodieke verschijnselen wordt het begrip **hoeksnelheid** gebruikt.

De hoeksnelheid ω van een object dat gelijkmatig beweegt over een cirkel, in radialen per tijdseenheid, is gedefinieerd als:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Hierin is T de omwentelingstijd, dat is de tijd die één complete omwenteling duurt.

Een ander begrip is de **raaksnelheid**.

Dit is de afstand die een vast punt dat gelijkmatig beweegt over een cirkel, per tijdseenheid aflegt.

Opgave 15

De omtrek van de aarde (om de evenaar) is ongeveer 40075 km.

- Hoe groot is de hoeksnelheid van de rotatie van de aarde om haar eigen as, in radialen per uur?
- Stel je voor dat je op de evenaar stilstaat. Wat is je raaksnelheid (km/h)? Rond af op één decimaal.
- Gebruik de resultaten uit a en b en onderzoek het verband tussen de hoeksnelheid ω en raaksnelheid v van de aarde. Onderzoek vervolgens het verband tussen hoeksnelheid en raaksnelheid van roterende objecten in het algemeen.

Testen

Opgave 16

Geef de antwoorden exact indien mogelijk, anders in drie decimalen of in graden nauwkeurig.

- Deze hoeken zijn gegeven in graden. Reken om naar radialen, tussen 0 en 2π :
 60° , 45° , 180° , 300° , 330° , 350° , -350° .
- Deze booglengtes van een eenheidscirkel zijn gegeven in radialen. Bereken de bijbehorende hoeken in graden.
 π , $\frac{1}{3}\pi$, $-\frac{1}{4}\pi$, 2π , $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{12}\pi$, 2 , $\frac{5}{3}\pi$.

Opgave 17

Gegeven $\sin(x) = 0,25$.

- Geef in een eenheidscirkel alle waarden van x met $0 \leq x < 2\pi$ aan die hieraan voldoen.
- Schrijf alle waarden van x op die hieraan voldoen. Benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 18

- Bereken $\sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi\right)$ en $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$. Verklaar het verschil.
- Bereken $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)$ en $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$ exact. Verklaar de overeenkomst.
- Laat zien dat $\sin(-x) = \sin(\pi + x)$ met behulp van een eenheidscirkel.

3.3 Sinus- en cosinusfuncties

Inleiding

Nu je weet dat draaihoeken alle waarden (zowel in graden als in radialen) kunnen aannemen en dat daar steeds een waarde voor de sinus en een waarde voor de cosinus van die hoek bij horen, kun je gaan kijken naar de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$. En je zult zien dat daarbij een herhaling optreedt met een vaste periode. Daarover gaat dit onderdeel. Je neemt x altijd in radialen.

Je leert in dit onderwerp

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- werken met eenvoudige transformaties hiervan.

Voorkennis

- werken met sinus en cosinus van hoeken in radialen en met de eenheidscirkel;
- werken met transformaties van grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Maak op je grafische rekenmachine de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ met domein $[-2\pi, 4\pi]$. Neem x in radialen.

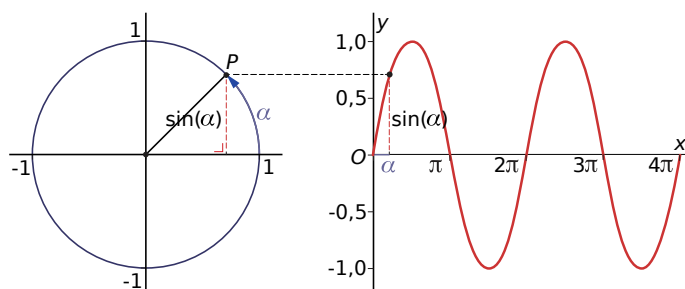
- Leg uit waarom de hoogste waarde die $\sin(x)$ kan aannemen 1 is.
- Voor welke waarden van x is $\sin(x) = -1$?
- De waarden van f herhalen zich steeds. Waarom is dat zo?
- Maak ook de grafieken van $y_2 = 2\sin(x)$, $y_3 = \sin(2x)$, $y_4 = \sin(x) + 2$ en $y_5 = \sin(x + 2)$. Verklaar welke transformaties hier worden toegepast.

Uitleg 1

Bekijk de applet: sinusfunctie

$y = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode 2π . Hierin is $x = \alpha$ radialen en op de y -as komt de waarde van $\sin(x)$. De grafiek loopt links en rechts van de y -as oneindig door als je α niet beperkt vanaf 0 tot 2π rad.

Bekijk de figuur, waar twee periodes van de grafiek van $y = \sin(x)$ zijn getekend.



Figuur 3.1

Op de horizontale as is de eenheid π , zodat exact de snijpunten met de x -as en de toppen zijn af te lezen.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + 2k \cdot \pi$.
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + 2k \cdot \pi$.
- De grafiek snijdt de x -as bij $x = k \cdot \pi$.

Wil je alle waarden weten waarvoor bijvoorbeeld $h = y = 0,5$ dan los je de vergelijking $\sin(x) = 0,5$ op met je rekenmachine.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ in [Uitleg 1](#).

- Geef de coördinaten van de toppen op het domein $[-2\pi, 2\pi]$.
- Welke nulpunten heeft f op het domein $[-2\pi, 4\pi]$?

Opgave 2

Plot de grafiek van $y = \sin(x)$ op het domein $[-10, 10]$. Denk om x in radialen!

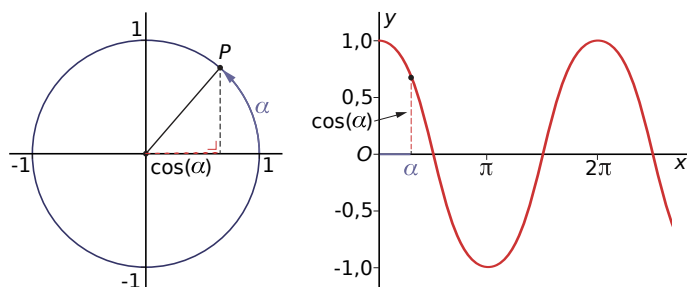
Hoe vaak snijdt de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ de x -as op het domein $[-10, 10]$?

Uitleg 2

Bekijk de applet: cosinusfunctie

$y = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode 2π . Hierin is $x = \alpha$ radialen en op de y -as komt de waarde van $\cos(\alpha)$. De grafiek loopt links en rechts van de y -as oneindig door als je α niet beperkt vanaf 0 tot 2π rad.

Bekijk de figuur met iets meer dan één periode van de grafiek van $y = \cos(x)$.



Figuur 3.2

Op de horizontale as is als eenheid π genomen.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $2k \cdot \pi$.
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $\pi + 2k \cdot \pi$.
- De grafiek snijdt de x -as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De grafiek van $y = \cos(x)$ met x in radialen lijkt op de standaard sinusgrafiek $y = \sin(x)$.

De grafiek is alleen met $-\frac{1}{2}\pi$ verschoven in de x -richting.

Dit betekent $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je door transformatie uit die van $y = \sin(x)$ laten ontstaan.

Opgave 3

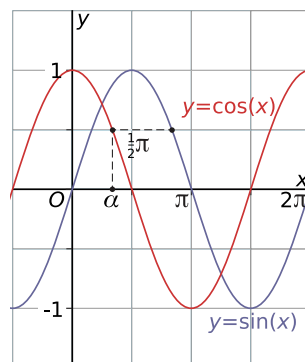
Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ in [Uitleg 2](#).

- Geef de coördinaten van de toppen op het domein $[-2\pi, 2\pi]$.
- Welke nulpunten heeft f op het domein $[-2\pi, 4\pi]$?

Opgave 4

In [Uitleg 2](#) zie je de functie $y = \cos(x)$.

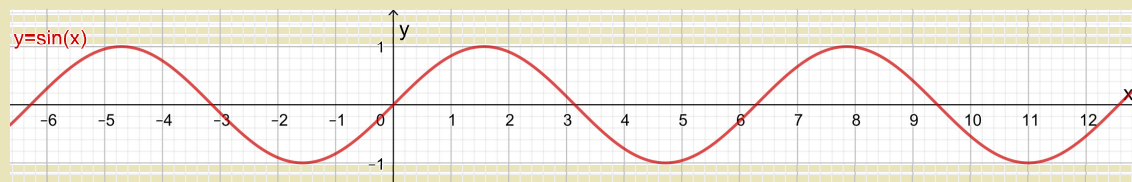
- Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $f_1(x) = 5 \cdot \cos(x)$ uit die van $y = \cos(x)$?
- Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $f_2(x) = \cos(x + \pi)$ uit die van $y = \cos(x)$?
- Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $f_3(x) = 5 \cdot \cos(x + \pi) + 2$ uit die van $y = \cos(x)$?
- Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ uit die van $y = \cos(x)$?



Figuur 3.3

Theorie en voorbeelden

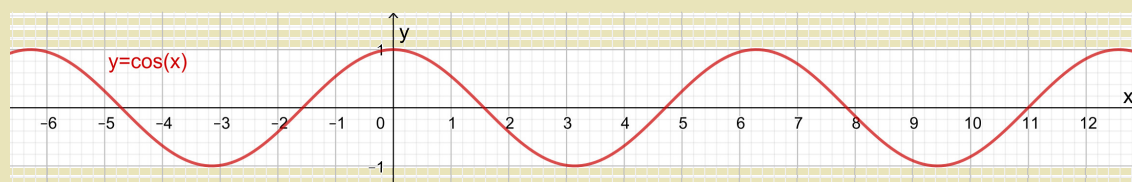
Om te onthouden



Figuur 3.4

De **standaard sinusfunctie** $y = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6,28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$



Figuur 3.5

De **standaard cosinusfunctie** $y = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6,28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je laten ontstaan door de grafiek van $y = \sin(x)$ te verschuiven met $-\frac{1}{2}\pi$ in de x-richting:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right).$$

Exacte waarden		
hoek	sin	cos
0	0	1
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	0

Tabel 3.1

Voorbeeld 1

Maak op de grafische rekenmachine de grafiek van $y = \sin(x)$ op het domein $[-2\pi, 4\pi]$.

$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, voor welke andere waarden op het gegeven domein is de sinus even groot?

Antwoord

Gebruik de symmetrie van de grafiek.

$$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

De periode van $y = \sin(x)$ is 2π .

Daarom geldt dat $\sin(x) = \frac{1}{2}$ als $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Voor de volgende waarden binnen het gegeven domein is $\sin(x) = \frac{1}{2}$:

$$x = -1\frac{5}{6}\pi, x = -1\frac{1}{6}\pi, x = \frac{1}{6}\pi, x = \frac{5}{6}\pi, x = 2\frac{1}{6}\pi \text{ en } x = 2\frac{5}{6}\pi.$$

Opgave 5

- Plot de grafiek van $y = \sin(x)$ op het domein $[-3\pi, 5\pi]$.
- Je weet $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Voor welke waarden op het gegeven domein is de sinus even groot?

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0; 6,5\pi]$.

- Plot de grafiek van f . Hoeveel periodes zijn zichtbaar?
- Voor welke waarden van x in het gegeven domein, geldt $f(x) = \sin(-0,1)$? Rond af op drie decimalen.

Voorbeeld 2

Maak op de grafische rekenmachine de grafiek van $y = \cos(x)$ op het domein $[-\pi, 5\pi]$.

$\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, voor welke andere waarden op het domein is de cosinus even groot?

Antwoord

Gebruik de symmetrie van de grafiek.

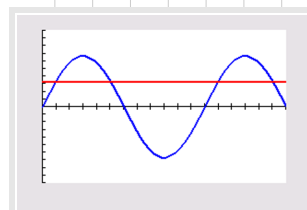
$$\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

De periode van $y = \cos(x)$ is 2π .

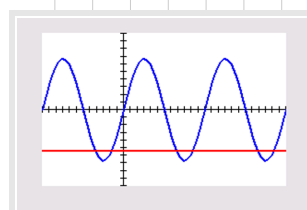
Daarom geldt dat $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als: $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

Voor de volgende waarden binnen het gegeven domein is $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$:

$$x = -\frac{1}{4}\pi, x = \frac{1}{4}\pi, x = 1\frac{3}{4}\pi, x = 2\frac{1}{4}\pi, x = 3\frac{3}{4}\pi, x = 4\frac{1}{4}\pi \text{ en } x = 4\frac{3}{4}\pi.$$



Figuur 3.6



Figuur 3.7

Opgave 7

- Plot de grafiek van $y = \cos(x)$ op het domein $[-3\pi, \pi]$.
- $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$ voor welke waarden op het gegeven domein is de cosinus even groot?

Opgave 8

Gegeven is $y = \cos(x)$.

- Welk domein moet je nemen, zodat de grafiek bij punt $(0, 1)$ begint en er precies drie periodes zichtbaar zijn?
- Welk domein moet je nemen, zodat de grafiek bij punt $(-\pi, -1)$ begint en er precies vijf periodes zichtbaar zijn?
- Welk domein moet je nemen, zodat de grafiek bij $(3, 5\pi; 0)$ eindigt en er precies 6,5 periodes zichtbaar zijn?

Voorbeeld 3

Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van $f(x) = 2 \cos(x - \pi) + 1$ uit de standaardgrafiek van $y = \cos(x)$?

Antwoord

De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \cos(x)$ door achtereenvolgens:

- Translatie ten opzichte van de y -as met π .
- Vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 2.
- Translatie ten opzichte van de x -as met 1.

Opgave 9

Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van $f(x) = 0,5 \cos(x + 0,25\pi) - 3$ uit de grafiek van $y = \cos(x)$?

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = -2 \sin(x - 1) + 4$.

- Door welke transformaties kan de grafiek van f uit die van $y = \sin(x)$ ontstaan?
- Hoe groot is het maximum van f ?
- Hoe groot is het minimum van f ?

Verwerken

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0, 4\pi]$.

- Plot de grafiek van f op het gegeven domein. Hoeveel periodes zijn zichtbaar?
- Je weet $\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Voor welke andere waarden op het domein is de sinus even groot?

Opgave 12

Voor welke exacte waarden voor x in het domein $[-4\pi, 4\pi]$ heeft $\cos(x)$ eenzelfde waarde als $\cos(0,8)$?

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = -\sin(x - 3) + 2$ met domein $[0, 4\pi]$.

- Plot de grafiek van f .
- Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \sin(x)$?
- Geef de coördinaten van de toppen.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = 0,5 \cos(x + \pi) + 4$ met domein $[-2\pi, 4\pi]$.

- Plot de grafiek van f .
- Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \cos(x)$?
- Geef de coördinaten van de toppen.

Opgave 15

Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van $f(x) = 2 \cos(x - \pi) - 6$ uit de grafiek van $y = \sin(x)$?

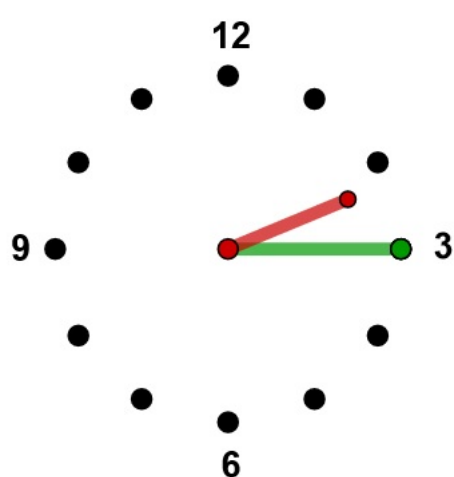
Toepassen

Bekijk de applet: analoge klok

Je ziet hier een **analoge klok**. De lengte van de grote wijzer is 1 dm, die van de kleine wijzer 7,5 cm. Je kunt in de applet zelf de gewenste tijd instellen.

Trek (in gedachten) een horizontale lijn door de punten die horen bij 9 en bij 3. Je kunt dan de hoogte van het eindpunt van elk van de wijzers boven die lijn berekenen. Ligt zo'n eindpunt op of boven die lijn, is de hoogte positief of 0, anders negatief. Noem die hoogte h .

Trek (in gedachten) een verticale lijn door de punten die horen bij 6 en bij 12. Je kunt dan de horizontale afwijking van het eindpunt van elk van de wijzers tot die lijn berekenen. Ligt zo'n eindpunt rechts of op die lijn, is de afwijking positief of 0, anders negatief. Noem die horizontale afwijking b .



Figuur 3.8

Opgave 16

De wijzers van de klok staan ingesteld op kwart over twee.

- Bereken h en b van de minutenwijzer. Rond af op twee decimalen.
 - Bereken h en b van de urenwijzer. Rond af op twee decimalen.
- Werk met een medeleerling samen. Stel een andere tijd in.

- c Bereken h en b van de minutenwijzer en de urenwijzer. Rond af op twee decimalen.

Opgave 17

De wijzers van de klok draaien eigenlijk vanuit de verticale stand, dan is de draaihoek $x = 0$ rad. Bovendien bewegen de wijzers rechtsom in plaats van linksom zoals in een assenstelsel gebruikelijk is.

- a Leg uit waarom voor de minutenwijzer dan geldt $h = \cos(x)$ en $b = \sin(x)$.
- b Welke formules gelden voor h en b van de urenwijzer?
Bij een bepaald tijdstip hoort meestal een andere waarde voor x bij de minutenwijzer dan bij de urenwijzer.
- c Zijn er tijdstippen waarop bij beide wijzers dezelfde draaihoek x hoort?

Testen

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 4 \sin(x) + 1$ op $[-2\pi, 4\pi]$.

- a Door welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = \sin(x)$?
- b Plot de grafiek van f . Hoeveel periodes krijg je in beeld?
- c Bepaal alle toppen van de grafiek van f .

Opgave 19

Je weet dat $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 0,5$. Welke waarden van x geldt ook dat $\cos(x) = 0,5$ als x in het domein $[5\pi, 8\pi]$ zit?

3.4 Vergelijkingen met sinus en cosinus

Inleiding

Je hebt de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ gemaakt. Ook heb je er transformaties op toegepast. Nu ga je vergelijkingen met sinus of cosinus oplossen. Daarbij moet je goed rekening houden met de periodiciteit van deze grafieken.

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking die is te herleiden tot $\sin(x) = c$ oplossen als c een constante is;
- een vergelijking die is te herleiden tot $\cos(x) = c$ oplossen als c een constante is.

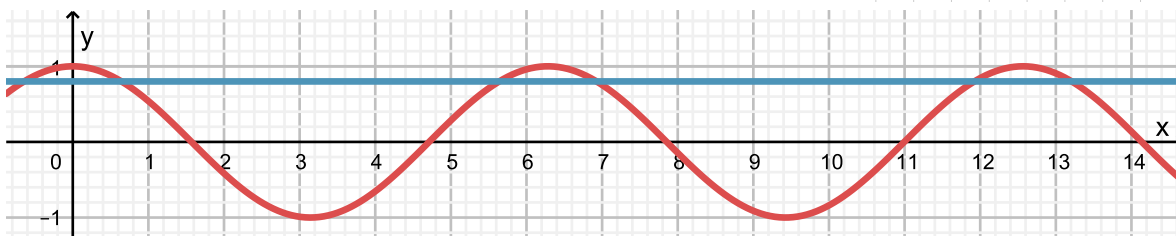
Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- werken met transformaties van deze functies.

Verkennen

Opgave V1

Gebruik deze grafiek van $f(x) = \cos(x)$ en de symmetrie ervan. Hij is gemaakt in GeoGebra.

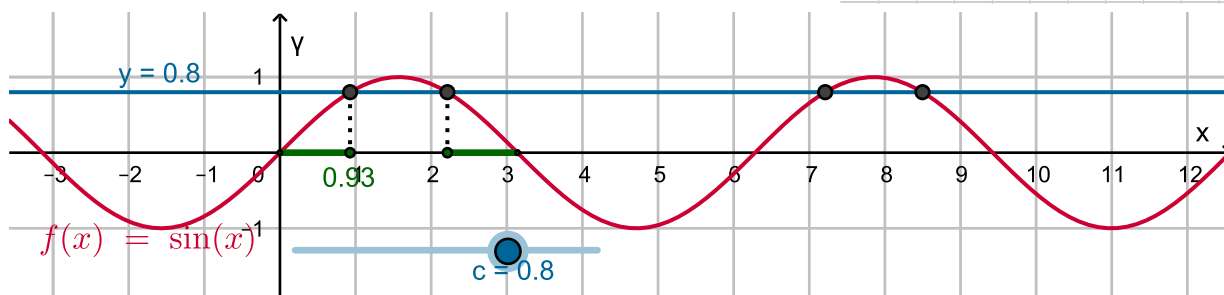


Figuur 4.1

- Los op: $\cos(x) = 0,8$ met x in $[0, 4\pi]$. Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.
- Los op: $\cos(x) = 0,8$ voor elke mogelijke waarde van x . Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.
- Los op: $\cos(x) = 0,5$ met x in $[0, 4\pi]$. Geef je antwoord exact.
- Los op: $\cos(x) = 0,5$ voor elke mogelijke waarde van x . Geef je antwoord exact.

Uitleg 1

Bekijk de applet



Figuur 4.2

Bekijk de grafiek van $y = \sin(x)$ en de lijn $y = 0,8$.

Je wilt de vergelijking $\sin(x) = 0,8$ oplossen:

- Zoek de oplossing die zo dicht mogelijk bij de y-as ligt. Deze oplossing heet arcsinus van 0,8. Dit getal vind je met de grafische rekenmachine.

De oplossing is $x = \arcsin(0,8) \approx 0,927$.

Op de rekenmachine vind je arcsin meestal als $\sin^{-1}$.

- Zoek de andere oplossing in dezelfde periode door symmetrie te gebruiken.

Die oplossing is: $x = \pi - \arcsin(0,8)$.

- Omdat de periode 2π is, zijn de oplossingen:

$x = \arcsin(0,8) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(0,8) + k \cdot 2\pi$ met k een geheel getal.

Bekijk de oplossingen van de vergelijkingen:

$\sin(x) = 1$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

$\sin(x) = -1$ geeft $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

$\sin(x) = 0$ geeft $x = 0 + k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi$.

Voeg dit samen tot $x = k \cdot \pi$.

Als in $\sin(x) = c$, de c groter is dan 1 of kleiner is dan -1 zijn er geen oplossingen.

Als $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $c = \pm 1$ kun je exacte oplossingen geven.

Opgave 1

Bekijk [Uitleg 1](#).

Los op. Rond af op drie decimalen.

- $\sin(x) = 0,2$
- $\sin(x) = -0,2$

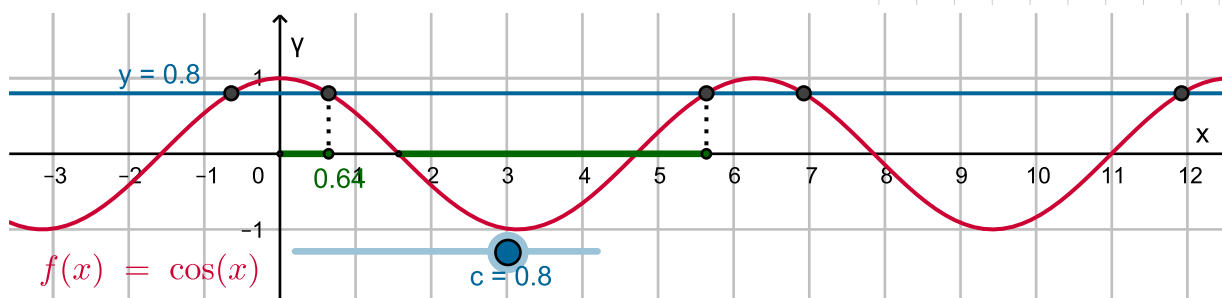
Opgave 2

Los exact op.

- a $\sin(x) = \frac{1}{2}$
- b $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Uitleg 2

Bekijk de applet



Figuur 4.3

Bekijk de grafiek van $y = \cos(x)$ en de lijn $y = 0,8$.

Je wilt de vergelijking $\cos(x) = 0,8$ oplossen:

- Zoek de eerste oplossing die zo dicht mogelijk bij de verticale as ligt.
Deze oplossing heet arccosinus van 0,8. De oplossing is:
 $x = \arccos(0,8) \approx 0,644$.
- Zoek een andere oplossing binnen één periode door symmetrie te gebruiken.
Die oplossing is: $x \approx -0,644$ of $x \approx 2\pi - 0,644$ (kies één van beide).
- Omdat de periode 2π is, zijn alle oplossingen:
 $x \approx 0,644 + k \cdot 2\pi \vee x \approx -0,644 + k \cdot 2\pi$

Bekijk de oplossingen van de vergelijkingen:

$$\cos(x) = 1 \text{ geeft } x = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi$$

$$\cos(x) = -1 \text{ geeft } x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\cos(x) = 0 \text{ geeft } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

Als in $\cos(x) = c$, de c groter dan 1 of kleiner dan -1 is, zijn er geen oplossingen.

Bij $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $c = \pm 1$ kun je exacte oplossingen geven.

Opgave 3

Bekijk [Uitleg 2](#).

Los op. Rond af op drie decimalen.

- a $\cos(x) = 0,2$
- b $\cos(x) = -0,2$

Opgave 4

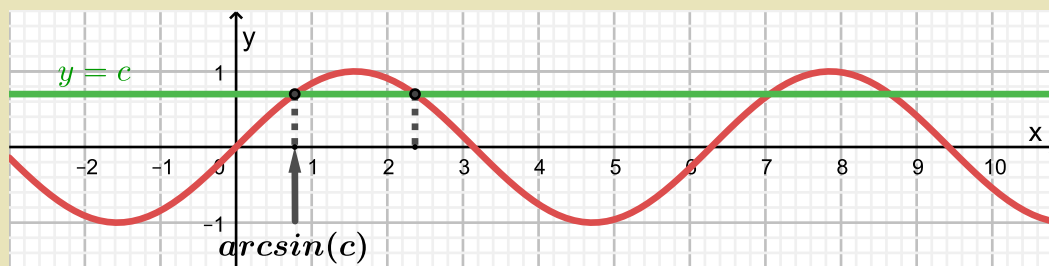
Los exact op.

- a $\cos(x) = -1$
b $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ met x in radialen en de lijn $y = c$.



Figuur 4.4

De oplossing van $\sin(x) = c$ die binnen $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ ligt, heet de **arcsinus** van c : $x = \arcsin(c)$.

Binnen één periode is (vaak) nog een oplossing.

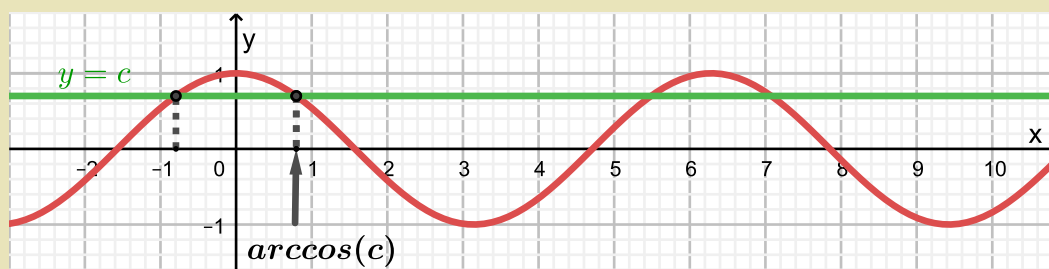
Vanwege de symmetrie van de grafiek is die tweede oplossing $x = \pi - \arcsin(c)$.

Vanwege de periode van 2π zijn alle oplossingen van $\sin(x) = c$ daarom:

$$x = \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi$$

De vergelijking $\sin(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Bekijk de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen en de lijn $y = c$.



Figuur 4.5

De oplossing van $\cos(x) = c$ binnen $[0, \pi]$ heet **arccosinus** van c : $x = \arccos(c)$.

Binnen één periode is er vaak nog een oplossing.

Vanwege de symmetrie van de grafiek is de tweede oplossing:

$$x = -\arccos(c).$$

Vanwege de periode van 2π zijn alle oplossingen van $\cos(x) = c$ daarom:

$$x = \arccos(x) + k \cdot 2\pi \vee x = -\arccos(x) + k \cdot 2\pi$$

De vergelijking $\cos(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Voorbeeld 1

Los op: $\sin(x) = \frac{1}{2}$ met x in $[0, 3\pi]$.

Gebruik twee manieren: met de grafische rekenmachine en exact.

Maak gebruik van symmetrie.

Antwoord

Plot de grafieken van $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = 0,5$ op het gegeven interval met venster $[0, 3\pi] \times [-1, 1]$. Dit geeft vier oplossingen.

De eerste oplossing is: $x = \arcsin(0,5) \approx 0,524$.

De andere oplossingen zijn:

$$x \approx 0,524 \vee x \approx \pi - 0,524 \vee x \approx 0,524 + 2\pi \vee x \approx \pi - 0,524 + 2\pi$$

$$x \approx 0,524 \vee x \approx 2,618 \vee x \approx 6,807 \vee x \approx 8,901$$

De eerste oplossing is exact: $x = \frac{1}{6}\pi$.

Op het gegeven interval zijn de vier oplossingen:

$$x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \pi - \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + 2\pi \vee x = \pi - \frac{1}{6}\pi + 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 2\frac{1}{6}\pi \vee x = 2\frac{5}{6}\pi$$

Opgave 5

Los op $\sin(x) = -0,5$.

- Geef alle oplossingen, afgerond op drie decimalen.
- Geef alle exacte oplossingen.
- Geef alle exacte oplossingen op het interval $[0, 4\pi]$.

Opgave 6

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$. Zorg dat je in ieder geval één complete periode in beeld hebt.

- Los exact op: $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- Geef alle exacte oplossingen op het interval $[-2\pi, 4\pi]$.
- Geef de oplossingen op het interval $[-2\pi, 4\pi]$. Rond af op drie decimalen.

Voorbeeld 2

Los exact op: $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Antwoord

Je weet: $\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Vanwege de symmetrie van de grafiek geldt dat

$$\cos\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Een exacte oplossing is: $x = \frac{3}{4}\pi$.

Een tweede oplossing is: $x = -\frac{3}{4}\pi$.

Alle verdere oplossingen zijn te vinden door bij deze twee oplossingen een veelvoud van de periode op te tellen:

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi.$$

Opgave 7

Los op: $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ op $[0, 2\pi]$.

- Geef alle oplossingen. Rond af op drie decimalen.
- Geef alle exacte oplossingen.
- Geef alle exacte oplossingen op het interval $[0, 4\pi]$.

Opgave 8

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ op $[0, 2\pi]$.

- Los exact op: $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- Geef alle exacte oplossingen op het interval $[-2\pi, 4\pi]$.
- Geef de oplossingen op het interval $[-2\pi, 4\pi]$ in drie decimalen.

Voorbeeld 3

Los exact op: $\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Antwoord

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

Let op dat je ook $k \cdot 2\pi$ deelt door 2.

Opgave 9

Los exact op.

- $\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\sin(2x) = \sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)$
- $\cos(2x) = \cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)$

Voorbeeld 4

Los op: $3 \cdot \sin(x) + 1 < 0$.

Antwoord

Plot $y = 3 \sin(x) + 1$.

Herleid $3 \cdot \sin(x) + 1 = 0$ tot $\sin(x) = -\frac{1}{3}$.

De oplossingen binnen één periode zijn (zie de grafiek):

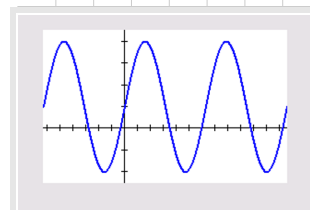
$$x = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) \vee x = -\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right).$$

$$x \approx -0,340 \vee x \approx -2,802$$

De ongelijkheid klopt binnen deze periode voor $-2,802 < x < -0,340$.

Dit herhaalt zich elke periode, dus de volledige oplossing is:

$$-2,802 + k \cdot 2\pi < x < -0,340 + k \cdot 2\pi.$$



Figuur 4.6

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \sin(x) + 1$.

- Plot deze grafiek op $[-2\pi, 4\pi]$.
- Los $f(x) < 2$. Rond af op twee decimalen.
- Los $f(x) = 2,5$ exact op.
- Los $f(x) = 4$ exact op.
- Waarom kun je $f(x) = 5$ niet oplossen?

Verwerken

Opgave 11

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.

Los op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen. Rond anders af op drie decimalen.

- $\sin(x) = 0,35$
- $\sin(x) = -0,35$
- $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 12

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$.

Los de vergelijkingen op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen.

- $\cos(x) = 0,35$
- $\cos(x) = -0,35$
- $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 13

Geef alle oplossingen.

- a $\sin(x) = 1$
- b $\sin(x) = \sin(1)$
- c $\sin(1) = x$
- d $\sin(x) = \cos(1)$

Opgave 14

Gegeven is de functie f met $f(x) = 2 \sin(x) - 1$ op $[0, 4\pi]$.

- a Bereken alle nulpunten van de grafiek van deze functie.
- b Los op: $f(x) \geq 0$

Opgave 15

Gegeven is de functie g met $g(x) = \cos(2x + 1)$ op $[0, 4\pi]$.

- a Los op: $g(x) = 0,5$.
- b Los op: $g(x) \geq 0,5$

Opgave 16

Los exact op.

- a $3 \cos(x) + 1 = -0,5$
- b $\sin(-\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- c $-8 \cos(0,25x) = -4\sqrt{2}$
- d $\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Toepassen

Bekijk de applet: krukstang.

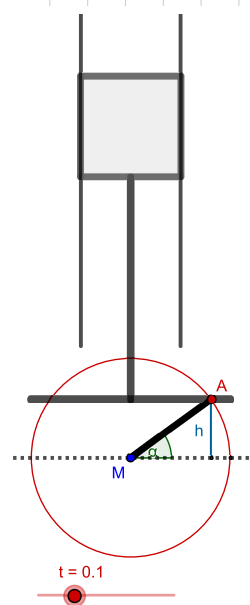
In de figuur zie je een schematische weergave van een **krukstang** MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.

Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.

Gegeven is $MA = 1$ decimeter.

De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek.

De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.



Figuur 4.7

Opgave 17

Bekijk de formule voor de hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn.

- a In welke eenheid is h uitgedrukt?
- b Welke periode heeft h als x in graden wordt uitgedrukt?
En als x in radialen wordt uitgedrukt?
- c Kun je een voordeel noemen van het werken met radialen ten opzichte van het werken met graden?
Het werken met decimeters als eenheid is niet gebruikelijk, liever werk je met meter, centimeter, millimeter.
- d Hoe wordt het functievoorschrift voor de hoogte als je in mm werkt?
En wat verandert er dan aan de grafiek van $h(x) = \sin(x)$?

Opgave 18

De formule voor h in cm als functie van x in radialen is $h = 10 \cdot \sin(x)$.

- a Maak de grafiek van h .
- b Bij welke waarden voor x is $h(x) = 5$ cm?
- c Bij welke waarden voor x is $h(x) = -5$ cm?

Testen

Opgave 19

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$.

Los de volgende vergelijkingen op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

- a $\cos(x) = 0,95$
- b $\cos(x) = -0,95$
- c $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Opgave 20

Gegeven is de functie $f(x) = 4 \cos(x) + 1$ op $[-2\pi, 2\pi]$.

- a Bereken alle nulpunten van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.
- b Los op $f(x) < 0$.

Opgave 21

Los exact op: $\sin(3x) = 0,5$.

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met sinus en cosinus**. Je ziet hier alleen vergelijkingen met sinus, het gaat soms om exacte waarden. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier. Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord. Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

3.5 Sinusoïden

Inleiding

Je hebt leren werken met de functies $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ (met x in radialen). Als je op deze functies transformaties toepast, krijg je andere periodes en kunnen de grafieken om een andere lijn dan de x -as gaan slingeren met een andere uitwijking. Dat is belangrijk omdat de sinusfunctie en de cosinusfunctie dan kunnen worden gebruikt om periodieke verschijnselen meer in het algemeen te beschrijven. Functies die door transformatie ontstaan uit $y = \sin(x)$ noem je sinusoïden.

Je leert in dit onderwerp

- de grafieken van de sinusoïden $y = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ en $y = a \cdot \cos(b(x - c)) + d$ tekenen;
- de vergelijkingen $a \cdot \sin(b(x - c)) + d = p$ en $a \cdot \cos(b(x - c)) + d = q$ oplossen.

Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- de vergelijkingen $\sin(x) = c$ en $\cos(x) = c$ oplossen als c een constante is.
- transformaties op functies toepassen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot \sin(4x) + 3$.

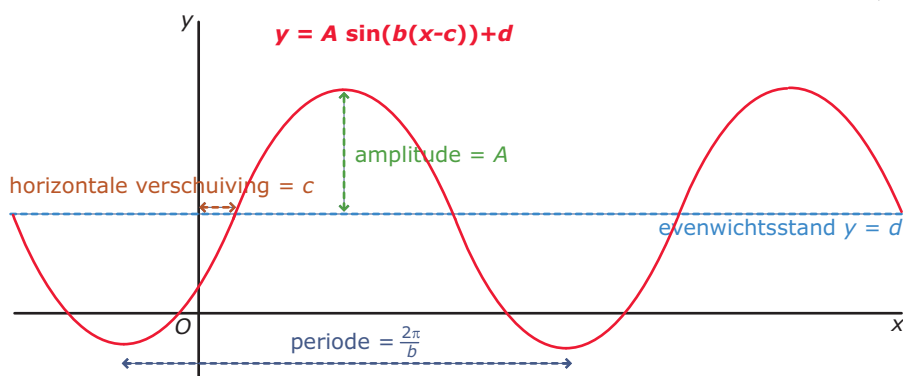
- Maak met de grafische rekenmachine de grafiek van f op $[0, 2\pi]$.
- Bepaal de periode van deze periodieke functie.
- Bereken alle toppen van de grafiek op $[0, 2\pi]$.

Gegeven is de functie $g(x) = 4 \cdot \sin(0,5(x - \pi)) - 1$.

- Maak met de grafische rekenmachine de grafiek van g op $[0, 4\pi]$.
- Bepaal de periode van deze periodieke functie.
- Bereken alle toppen van de grafiek op $[0, 4\pi]$.

Uitleg

Bekijk de applet: [sinusoïde](#)



Figuur 5.1

Door transformaties van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ maken. Zulke grafieken heten sinusoiden.

Door transformaties van de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ maken. Zulke grafieken heten ook sinusoiden.

Bekijk met de grafische rekenmachine wat er gebeurt als je a , b , c en/of d verandert.

- a verandert de maximale uitwijking, de amplitude is a .
- b verandert de periode, de periode is $\frac{2\pi}{b}$.
- c zorgt voor een horizontale verschuiving over $-c$, een translatie ten opzichte van de y -as.
Bij een sinusfunctie is c de x -coördinaat van een punt waar de grafiek door de evenwichtsstand omhoog gaat.
Bij een cosinusfunctie is c de x -coördinaat van een punt waar de grafiek een maximum heeft.
- d verandert de evenwichtsstand, die is $y = d$.

Wil je de grafiek van de sinusoid $g(x) = 1,5 \cdot \sin(2(x - 1)) + 0,5$ maken, dan gebruik je:

- de amplitude is 1,5
- de evenwichtslijn is $y = 0,5$
- de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- de horizontale translatie is 1

Het bereik van de functie is $B_g = [0,5 - 1,5; 0,5 + 1,5] = [-1, 2]$.

De toppen van g vind je door de transformaties toe te passen op de toppen van f .

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $g(x) = 1,5 \sin(2(x - 1)) + 0,5$ op $[0, 2\pi]$ in de [Uitleg](#).

- a** Welke transformaties moet je achtereenvolgens op de grafiek van $y = \sin(x)$ toepassen om die van g te krijgen? Licht je antwoord toe.

- b Het punt $(0,0)$ ligt op de grafiek van $y = \sin(x)$. Welk punt op de grafiek van g ontstaat door deze transformaties uit $(0,0)$?
- c Welke toppen heeft de grafiek van g ?

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 - 2 \sin(3(x + 2))$.

- a Lees uit het functievoorschrift de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving af. Schets de grafiek.
- b Plot de grafiek van f en controleer je antwoord met de applet.
- c Oefen dit een aantal keer met zelf bedachte sinusoiden.

Theorie en voorbeelden

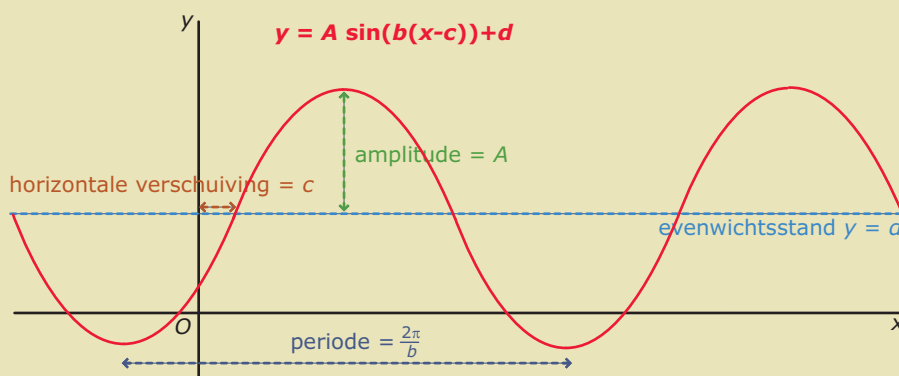
Om te onthouden

Bekijk de applet: sinusoiden

Door transformaties van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ maken.

De grafieken van de op deze manier getransformeerde functies heten **sinusoiden**.

De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ is ook een sinusoiden, want $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ is een verschoven sinusgrafiek.



Figuur 5.2

Voor elke sinusoiden geldt:

- de **amplitude** (maximale uitwijking van de evenwichtslijn) is a
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$, dit betekent: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- de **horizontale verschuiving** is $-c$, dit is een translatie ten opzichte van de y -as
- de **evenwichtsstand** is de lijn $y = d$

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie: $f(x) = 10 \sin(3(x - \pi)) + 5$.

Bereken de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en leg uit hoe je de grafiek goed op je grafische rekenmachine in beeld krijgt. Bereken alle toppen van deze sinusoïde.

Antwoord

De periode is $p = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$, de amplitude is $A = 10$ en de evenwichtsstand is $y = 5$.

Hieruit volgt dat het maximum 15 en het minimum -5 is.

Verder wil je minstens één complete periode in beeld hebben en het liefst ook beide coördinaatassen. Er begint een periode bij $(\pi, 5)$ en dus ook bij $(\frac{1}{3}\pi, 5)$.

Een geschikte vensterinstelling is $[0, \pi] \times [-5, 15]$.

Voor de maxima geldt $\sin(3(x - \pi)) = 1$ en dus:

$$3(x - \pi) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Voor de minima geldt $\sin(3(x - \pi)) = -1$ en dus:

$$3(x - \pi) = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1,5\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

De toppen zijn $(\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi, 15)$ (maxima) en $(1\frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi, -5)$ (minima).

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a Leg uit waarom het maximum 15 en het minimum -5 moet zijn.
- b Waarom 'begint' er een periode bij $(\pi, 5)$ en dus ook bij $(\frac{1}{3}\pi, 5)$?
- c Leg uit, hoe je aan de x-waarden van de extremen komt.
Gegeven is $y = 12 \sin(2x) - 6$.
- d Bereken de periode en alle toppen van de grafiek van deze sinus-oïde en plot de grafiek op het domein $[-2\pi, 2\pi]$.

Voorbeeld 2

De functie f met $f(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1$ is gedefinieerd op $\mathbb{R}$.

Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving om de grafiek goed in beeld te krijgen.

Los op: $f(x) \geq 1\frac{1}{2}$ in drie decimalen nauwkeurig.

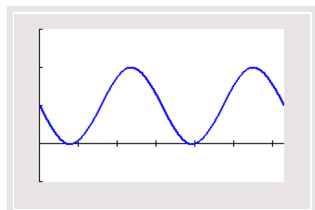
Antwoord

De periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

De amplitude is 1 en de evenwichtsstand is $y = 1$, dus het maximum is $1 + 1 = 2$ en het minimum is $1 - 1 = 0$.

De horizontale verschuiving is $\frac{1}{2}\pi$. Kies venster bijvoorbeeld $[0, 2\pi] \times [-1, 3]$.

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=6.283185307
Xscl=1
Ymin=-1
Ymax=3
Yscl=1
Xres=1
ΔX=.02379994434469
TraceStep=.04759988868939
```



Figuur 5.3

Los op:

$$\sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1 = 1\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) = \frac{1}{2}$$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + k \cdot 2\pi \vee 2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + k \cdot 2\pi$$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \approx 1,833 + k \cdot \pi \vee x \approx 2,880 + k \cdot \pi$$

De benaderde oplossing vind je ook met de rekenmachine.

Uit de grafiek lees je de oplossing van de ongelijkheid af:
 $1,833 < x < 2,880 + k \cdot \pi$.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 3 \sin(\pi(x - 1)) + 10$.

- Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving om de vensterinstellingen te bepalen waarmee je de grafiek goed in beeld krijgt.
- Bereken de coördinaten van alle toppen.
- Los op: $f(x) = 11,5$.

Voorbeeld 3

Plot de grafiek van functie $f(x) = 300 \cos\left(\frac{\pi}{7}(x + 2)\right) - 200$.

Neem x vanaf 0 tot 28.

Bereken de periode, rond af op een geheel getal. Bereken het bereik van f .

Los algebraïsch op: $f(x) = 0$. Rond af op twee decimalen.

Antwoord

De x wordt vermenigvuldigd met $\frac{1}{7}\pi$.

De periode is daarom $\frac{2\pi}{\frac{1}{7}\pi} = 14$.

De hoogste waarde van f is $300 - 200 = 100$.

De laagste waarde van f is $-300 - 200 = -500$.

$B_f = [-500, 100]$.

Los de vergelijking op.

$$300 \cos\left(\frac{\pi}{7}(x+2)\right) - 200 = 0$$

$$300 \cos\left(\frac{\pi}{7}(x+2)\right) = 200$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}(x+2)\right) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\pi}{7}(x+2) = \pm \arccos\left(\frac{2}{3}\right) + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{7}(x+2) = \pm 0,841 + k \cdot 2\pi$$

$$x+2 = \pm 1,874 + k \cdot 14$$

$$x = -0,126 + k \cdot 14 \vee x = -3,874 + k \cdot 14$$

Omdat x loopt vanaf 0 tot 28, krijg je vier oplossingen:

$$x \approx 10,13 \vee x \approx 13,87 \vee x \approx 24,13 \vee x \approx 27,87$$

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 4 \cos\left(\frac{1}{2}(x+2)\right) + 8$.

- Bepaal de periode en de coördinaten van alle toppen.
- Welke transformaties moet je achtereenvolgens op de grafiek van $y = \cos(x)$ toepassen om die van f te krijgen?
- Los op (benaderingen in drie decimalen nauwkeurig): $f(x) \geq 11$.

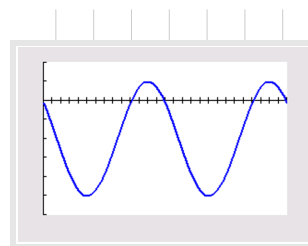
Opgave 6

Voor de hoogte van de tip van het rotorblad van een draaiende windmolen geldt de formule:

$$h(t) = 40 + 10 \cdot \cos\left(\frac{4}{3}\pi \cdot t\right)$$

Hierin is t de tijd in seconden en h de hoogte in meter.

- Bepaal de waarden voor de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving. Bij welke vensterinstellingen krijg je vanaf $t = 0$ precies twee periodes in beeld?
- Bereken de tijdstippen waarop de tip precies 45 meter boven de grond zit.



Figuur 5.4

Verwerken

Opgave 7

De grafieken van de functies zijn sinusoiden. Geef van iedere sinusoid de periode en de amplitude. Plot de grafiek zodat je twee periodes ziet.

- a $y = 12 \cdot \sin(x)$
- b $h(t) = 50 \sin(2\pi t) + 10$
- c $y = 120 \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)$
- d $P(x) = -20 \sin(2x)$

Opgave 8

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op drie decimalen.

- a $5 \cos\left(\frac{1}{2}x + 4\right) = 1$
- b $10 \sin\left(\frac{\pi}{5}(x - 2)\right) = 5$
- c $50 \cos(4x) = 25\sqrt{3}$
- d $50 - 30 \sin\left(\frac{2\pi}{15}x\right) = 45$

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = 20 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 10$ op $[0, 16]$.

- a Bepaal het bereik van f .
- b Bereken alle nulpunten van de grafiek van deze functie.
- c Los op: $f(x) \leq 0$.

Opgave 10

Gegeven is $f(x) = 2 + 3 \sin(\pi x + \pi)$. De volgende functies hebben voor de juiste keuze van de parameter dezelfde grafiek als functie f . Bepaal telkens die parameter.

- a $g(x) = 2 + 3 \cos(\pi x + a)$
- b $h(x) = 2 - 3 \sin(\pi x + b)$
- c $k(x) = 2 - 3 \cos(\pi x + c)$

Opgave 11

De hoogte boven de grond van iemand die zich in een reuzenrad bevindt, kun je beschrijven door:

$$h(t) = 11 + 10 \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$$

Hierin is $h(t)$ uitgedrukt in meter en t in seconden.

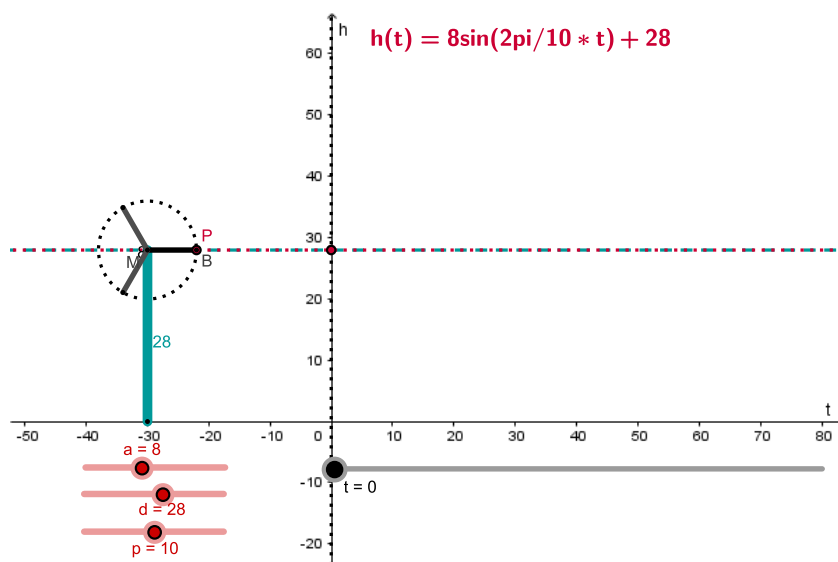
- a Plot $h(t)$.
- b De getallen 11 en 10 uit de formule hebben een betekenis voor het reuzenrad. Welke?
- c Na één periode is het reuzenrad precies één keer rondgedraaid. Bepaal de periode in seconden.
- d Bereken hoe lang het bakje van een reuzenrad hoger dan 18 meter boven de grond zit.

Toepassen

Hier zie je een schematische weergave van een **windmolen** waarvan je de lengte van de wieken a (in m), de hoogte van het draaipunt d (in m) en de omwentelingstijd, de periode p (in s) kunt aanpassen.

De grafiek gaat over de hoogte van de uiterste punt P van de wiek, afhankelijk van de tijd t in seconden.

Bekijk de applet.



Figuur 5.5

Opgave 12

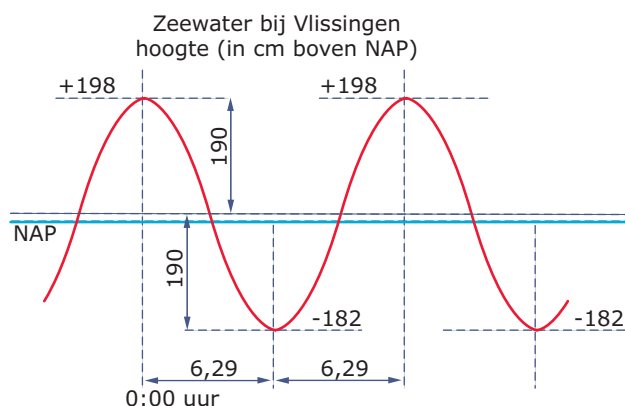
Bekijk de windmolen in [Toepassen](#).

Van een zekere windmolen is de hoogte van het draaipunt 30 m, de lengte van de wieken 15 m en de omwentelingstijd (bij een zekere windsnelheid) 5 s.

- Stel een bijpassende formule op voordat je deze instellingen in de applet doet.
Controleer je antwoord met de applet.
Deze windmolen staat achter een boerderij die een hoogte heeft van 20 m.
- Hoe lang is elke omwenteling de hoogte van de top van de wiek groter dan de hoogte van de boerderij?
- Je kunt de opdrachten bij a en b variëren door andere getallen te kiezen. Oefen met een medeleerling.

Opgave 13: Getijden

De grafiek in de volgende figuur geeft globaal de getijdenbeweging van het zeewater voor de haven van Vlissingen weer. Er wordt geen rekening gehouden met de invloed van de wind, met springtij, en dergelijke.



Figuur 5.6

- Hoe hoog is de gemiddelde waterstand volgens deze grafiek?
 - Hoe groot is de maximale afwijking van de waterstand ten opzichte van het gemiddelde?
 - Hoe groot is de periode van de getijdenbeweging?
- Een benadering van de getijdenbeweging wordt gegeven door de volgende formule:
- $$y = 8 + 190 \cos\left(\frac{2\pi}{12,25} \cdot t\right)$$
- met t in uren t.o.v. middernacht op 21 juni 2008 en y in cm ten opzichte van het NAP.
- Vergelijk de grafiek van deze functie met de grafiek in de figuur hierboven. Vind je dat de formule een goed beeld geeft van de getijdenbeweging?
 - Hoe groot is volgens de formule de periode en de amplitude?
 - Hoeveel uur per periode is de waterstand hoger dan 180 cm?

Testen

Opgave 14

Bepaal van de volgende functies de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y = \sin(x)$ of $y = \cos(x)$.

- $y = 4 \sin(4\pi x)$
- $y = 6 + 2 \cos(x + 8)$
- $y = 0,5 \sin(0,5\pi x)$

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $f(x) = -\sqrt{800} \sin(2\pi x) - 20$ op $[0,2]$.

- Bepaal het bereik van f .
- Bereken alle nulpunten van f op het gegeven interval.
- Los op: $f(x) \leq 0$.

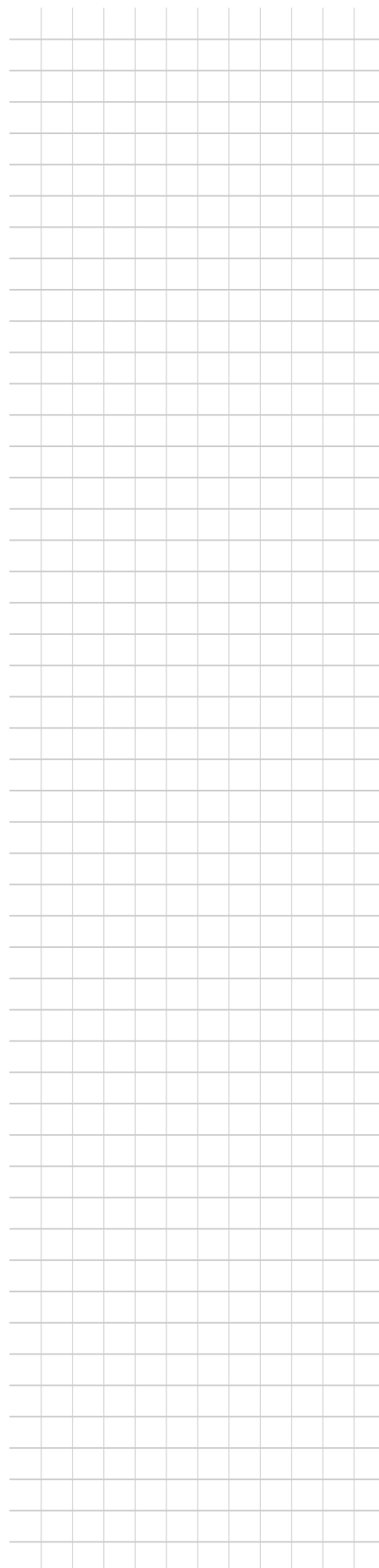
Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **bepalen van de periode, de amplitude en de evenwichtsstand van een sinusoïde**. Je ziet hier alleen vergelijkingen met sinus, het gaat soms om exacte waarden. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



3.6 Periodieke modellen

Inleiding

Je hebt tot nu toe berekeningen gemaakt en grafieken getekend bij gegeven sinusoïden. Het omgekeerde kan ook: bij een gegeven grafiek van een sinusoïde de formule opstellen. Met die formule kun je snel nieuwe punten van de grafiek vinden.

Verder kun je periodieke verschijnselen waarvan de grafiek golfvormig is, vaak goed benaderen met een sinusoïde. Die sinusoïde is dan een model voor het verschijnsel.

Je leert in dit onderwerp

- bij een getekende sinusoïde de formule opstellen;
- sinusoïden gebruiken als model voor een periodiek verschijnsel.

Voorkennis

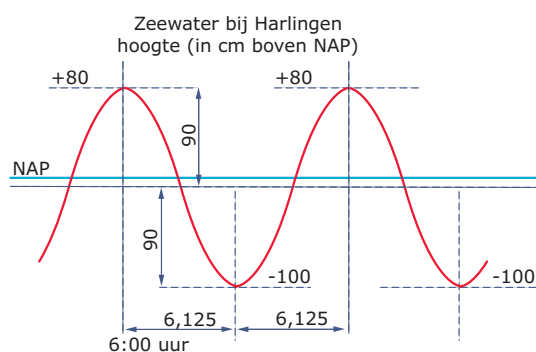
- de grafiek van een sinusoïde (zowel met sin als cos) tekenen;
- de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving van een sinusoïde aflezen uit de formule, dan wel uit de grafiek.

Verkennen

Opgave V1

In de getijdeninformatie van Harlingen kun je aflezen dat bij hoogwater de waterstand h ongeveer 80 cm boven NAP (Normaal Amsterdams Peil) zit en dat bij laagwater de waterstand ongeveer 100 cm onder NAP zit. Verder liggen de opeenvolgende tijdstippen van hoogwater (net als die van laagwater) ongeveer 12 uur en 15 minuten uit elkaar. Dat betekent een periode van 12,25 uur. Op een zekere dag is het hoogwater om 6:00 uur.

De bijbehorende grafiek lijkt op een sinusoïde.



Figuur 6.1

- Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtslijn van die sinusoïde.
- Stel een passende formule op.
- Wat is het nut van zo'n formule?

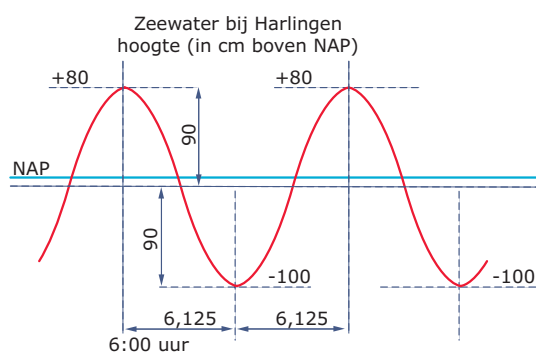
Uitleg

Bekijk de applet: waterstanden Harlingen

Periodieke verschijnselen waarvan de grafiek golfvormig is, kun je vaak goed benaderen met een sinusöide. Die sinusöide is dan een model voor het verschijnsel.

In de getijdeninformatie van Harlingen kun je aflezen dat bij hoogwater de waterstand h ongeveer 80 cm boven NAP (Normaal Amsterdams Peil) zit en dat bij laagwater de waterstand ongeveer 100 cm onder NAP zit. Verder liggen de opeenvolgende tijdstippen van hoogwater (net als die van laagwater) ongeveer 12 uur en 15 minuten uit elkaar. Dat betekent een periode van 12,25 uur. Op een zekere dag is het hoogwater om 6:00 uur.

Bekijk de schets van een grafiek die past bij de getijdeninformatie van Harlingen.



Figuur 6.2

De bijbehorende formule bij de grafiek heeft de vorm:
 $h(t) = a \cdot \sin(b(t + c)) + d$.

In de grafiek kun je de volgende gegevens aflezen.

- De periode is 12,25 uur: $b = \frac{2\pi}{12,25} \approx 0,52$.
- De waterstand ligt tussen 0,8 m en -1,0 m. De amplitude is $a = 0,9$ m.
- De evenwichtsstand ligt 0,9 m onder hoogwater: $d = -0,1$.
- Hoogwater moet bij $t = 6$ zitten. Het direct ervoor liggende punt op de evenwichtsstand zit daar een kwart periode voor. Dit is bij $t = 6 - 3,0625 \approx 2,94$. Dit betekent dat $c \approx -2,94$.

De bijpassende sinusöide wordt: $h(t) \approx 0,9 \sin(0,52(t - 2,94)) - 0,1$.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de waterstand bij Harlingen in de [Uitleg](#).

- Leg uit hoe uit de gegevens de periode, de amplitude en de evenwichtslijn wordt gevonden.
- Stel een bijpassende formule op uitgaande van $y = \cos(x)$.
- Laat zien dat de formule die in de uitleg werd gevonden, $h(t) \approx 0,9 \sin(0,52(t - 2,94)) - 0,1$, dezelfde grafiek oplevert. Controleer de grafieken op je grafische rekenmachine.

Opgave 2

Ga uit van de functie $y = \sin(x)$. Schrijf het voorschrift op van de periodieke functies die ontstaan bij de volgende wijzigingen:

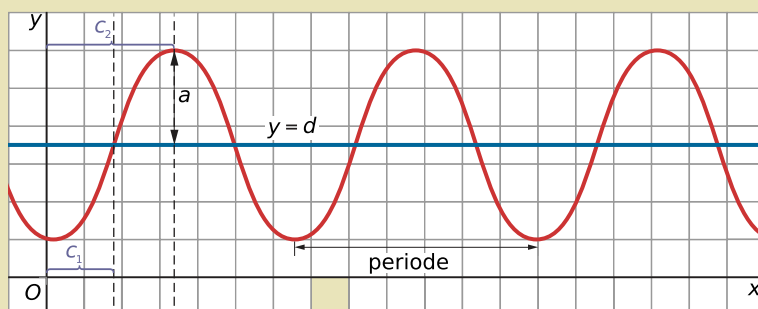
- De amplitude wordt 4.
- De amplitude wordt 10 en de evenwichtsstand wordt 20.
- De periode wordt 4π en de amplitude wordt 4.
- De horizontale verschuiving is 2, de periode wordt 10, de amplitude wordt 5 en de evenwichtsstand wordt 10.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Wanneer je een periodiek verschijnsel kunt beschrijven met een sinusoïde kun je daarbij een passend functievoorschrift maken door:

- de **evenwichtslijn** $y = d$ te bepalen.
- de **amplitude** a (maximale uitwijking van de evenwichtslijn) te bepalen.
- de **periode** p te bepalen.
- de **horizontale verschuiving** (ten opzichte van de standaardgrafiek) c te bepalen.



Figuur 6.3

Er zijn twee functievoorschriften mogelijk:

- $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c_1)) + d$ waarin $b = \frac{2\pi}{p}$
- $f(x) = a \cdot \cos(b(x - c_2)) + d$ waarin $b = \frac{2\pi}{p}$

Let erop dat de waarden voor a , b en d bij beide grafieken hetzelfde zijn, maar de waarden van c niet. De sinus 'begint' altijd op de evenwichtslijn, de cosinus op het hoogste punt. De verschuiving ten opzichte van de standaardsinus is daardoor anders dan ten opzichte van de standaardcosinus.

Voorbeeld 1

Bekijk de sinusoïde.

Welk functievoorschrift kun je bij deze sinusoïde maken uitgaande van de standaardsinus?

En welk functievoorschrift kun je maken uitgaande van de standaardcosinus?

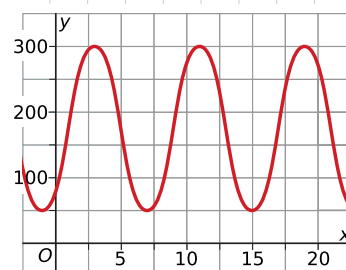
Antwoord

Max.(f) = 300 en min.(f) = 50, dit geeft:

- de amplitude is $a = \frac{300-50}{2} = 125$
- de evenwichtsstand is $y = 300 - 125 = 50 + 125 = 175$

Twee opvolgende maxima zitten bij $x = 3$ en $x = 11$.

De periode is $p = 8$. Ga uit van de standaardsinus, dan is de horizontale verschuiving de x -waarde van een punt op de grafiek op



Figuur 6.4

de evenwichtsstand op het moment dat de grafiek daar stijgt.

Hier is dat $x = 1$.

Het functievoorschrift wordt:

$$f(x) = 125 \sin\left(\frac{2\pi}{8}(x - 1)\right) + 175$$

Ga je uit van de standaardcosinus, dan is de horizontale verschuiving de x -waarde van een punt op de grafiek waar een maximum zit. Hier is dat bijvoorbeeld $x = 3$.

Het functievoorschrift wordt:

$$f(x) = 125 \cos\left(\frac{2\pi}{8}(x - 3)\right) + 175$$

Opgave 3

Je ziet hier een sinusoïde getekend.

Maak er twee functievoorschriften bij, uitgaande van $y = \sin(x)$.

Opgave 4

Maak bij de sinusoïde van de vorige opgave twee functievoorschriften uitgaande van $y = \cos(x)$.

Voorbeeld 2

Een sinusoïde heeft een maximum van 1 en een minimum van -5. Het domein is $\mathbb{R}$.

De evenwichtswaarde -2 wordt onder andere bereikt als $x = \frac{5}{3}\pi$ en

daarna als $x = \frac{11}{3}\pi$.

Tussen deze beide x -waarden ligt de grafiek boven de evenwichtsstand.

Stel een formule op voor de beschreven sinusoïde, met zowel een sinus als een cosinus.

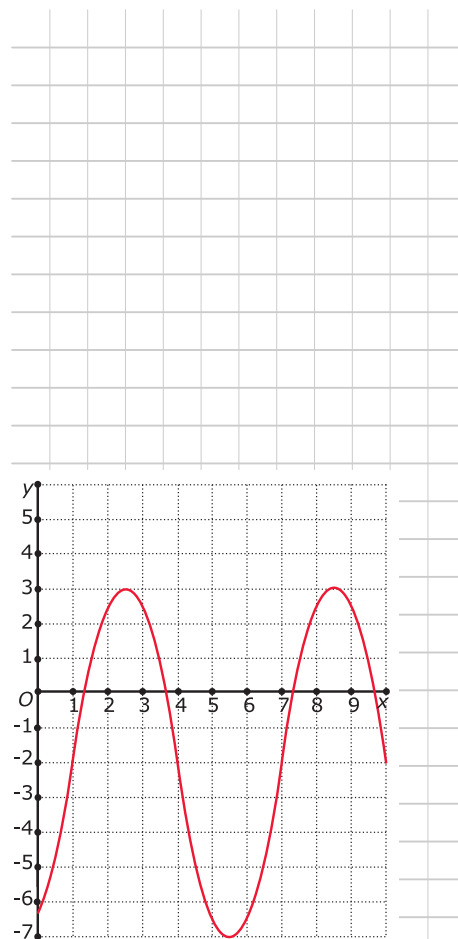
Antwoord

De formule krijgt bijvoorbeeld de vorm $y = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ of de vorm $y = a \cdot \cos(b(x - c)) + d$.

Maak een schets van de situatie.

De twee punten op de evenwichtsstand liggen een halve periode uit elkaar.

- De periode is $2 \cdot \left(\frac{11}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi\right) = 4\pi$, $b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.
- De evenwichtsstand is $y = -2$.
- De amplitude a is $\frac{1 - (-5)}{2} = 3$.



Figuur 6.5

Het is bekend waar de punten op de evenwichtsstand zitten. Het is het makkelijkst om uit te gaan van de standaardsinus. De horizontale verschuiving is $\frac{5}{3}\pi$. Bij die x -waarde hoort een punt op de evenwichtsstand waarin de grafiek omhooggaat.

De gevraagde formule is bijvoorbeeld:

$$y = 3 \sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{3}\pi\right)\right) - 2$$

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt de formule van een sinusöide opgesteld, waarbij uitgegaan wordt van de standaardsinus. Stel een andere formule op voor deze sinusöide waarbij nu uitgegaan wordt van de standaardcosinus.

Opgave 6

De grafiek van een sinusöide f heeft een minimum 10 voor $x = 1$ en een eerstvolgend maximum 26 voor $x = 13$.

- Bereken de periode, de evenwichtslijn en de amplitude.
- Geef twee passende formules, gebruik zowel de sinus als de cosinus.
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig: $f(12)$, $f(12,25)$, $f(12,5)$, $f(12,75)$ en $f(13)$.
- Los op: $f(x) > 22$.

Voorbeeld 3

Als je een cilinder met een diameter van 4 cm over het cirkeloppervlak dwars door het midden snijdt en vervolgens openknijpt en plat neerlegt, krijg je de afgebeelde figuur. De bovenrand is een zuivere sinusöide.

Stel voor deze rand een formule op. Neem aan dat punt P de coördinaten $(0,0)$ heeft.

Antwoord

De assen volgen uit de figuur.

Bepaal vervolgens:

- de evenwichtsstand is $y = 2$
- de amplitude is 2
- de periode is 4π

Het maximum zit halverwege de bovenrand bij $x = 2\pi$.

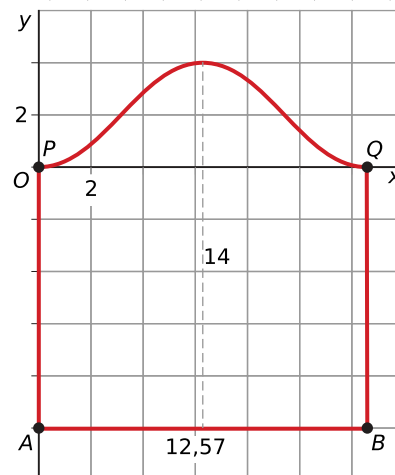
Ten opzichte van de cosinus is de horizontale verschuiving 2π .

De formule wordt: $y = 2 \cos(0,5(x - 2\pi)) + 2$ met domein $[0, 4\pi]$.

Opgave 7

Gebruik de cilinder uit **Voorbeeld 3**.

- Stel voor de bovenrand een formule op uitgaande van $y = \sin(x)$.
- Waarom is de periode 4π ?
- De lijn $y = 3$ snijdt de sinusöide uit het voorbeeld in de punten A en B . Bereken exact de lengte van lijnstuk AB .



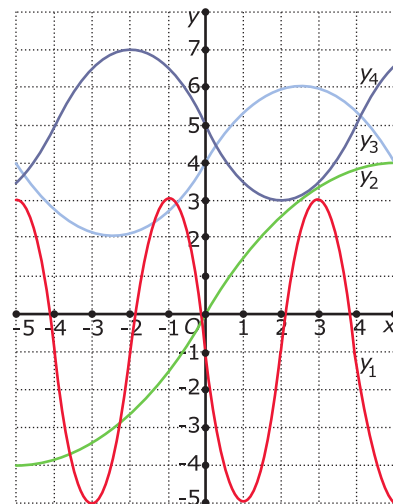
Figuur 6.6

- d Een lijn evenwijdig aan PQ snijdt de bovenrand in A en B . Gegeven is $AB = 4$ cm. Bepaal de coördinaten van A en B .

Verwerken

Opgave 8

Stel bij de vier sinusoiden een passend functievoorschrift op. Gebruik hierbij de sinus.



Figuur 6.7

Opgave 9

Bij de functie $y_1 = -1 + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{4}(x - 2)\right)$ zijn andere functievoorschriften mogelijk die dezelfde grafiek hebben als y_1 .

- Geef er minstens drie.
- Gebruik één van deze functievoorschriften om op te lossen: $y_1 = -2$. Geef benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

De grafiek van f is sinusvormig. De evenwichtslijn is $y = 1$, de amplitude is 2, de periode is π en de grafiek gaat stijgend door het punt $\left(\frac{1}{6}\pi, 1\right)$.

- Stel een formule op voor $f(x)$.
- Bereken met die formule $f(0)$.
- Los op: $f(x) \leq 0$

Opgave 11

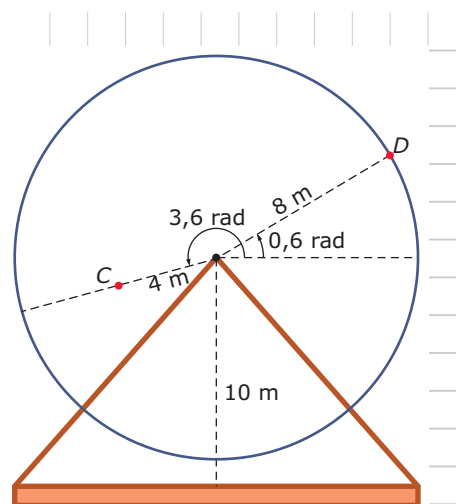
Functie $f(x)$ heeft een sinusvormige grafiek met een minimum in het punt $(15, -22)$ en een eerstvolgend maximum in het punt $(33, 104)$.

- Maak een schets van deze grafiek met x van 0 tot ten minste 50.
- Bereken de periode, de amplitude en de evenwichtslijn en stel een passend functievoorschrift op.
- Bereken $f(42)$, $f(45)$ en $f(48)$ algebraïsch.
- Los op: $f(x) = 72,5$.

Opgave 12

Een reuzenrad bevat de stoeltjes C en D . Stoeltje C draait op een afstand van 4 meter van de as in het rond, stoeltje D op een afstand van 8 meter. De as van het reuzenrad bevindt zich op 10 meter boven de grond. Bekijk de getekende situatie. Het reuzenrad draait in 8 seconden één keer rond. Op $t = 0$ staat stoeltje D zo hoog mogelijk. Het reuzenrad draait tegen de wijzers van de klok in.

- Bereken bij de stand in de figuur de hoogte h in meter van de stoeltjes C en D ten opzichte van de grond.
- Stel een passend functievoorschrift op voor de hoogte van stoeltje D .
- Hoe hoog staat stoeltje C op tijdstip $t = 1413,25$?
- Hoelang zit je in stoeltje C elk rondje hoger dan 12 meter?
- Welke vergelijking moet je oplossen om te weten op welke tijdstippen stoeltje C en D op dezelfde hoogte hangen?
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig hoeveel seconden per periode stoeltje C hoger hangt dan stoeltje D .
- Verklaar waarom het resultaat bij f ook te beredeneren valt.



Figuur 6.8

Toepassen

Bekijk de applet: [analoge klok](#)

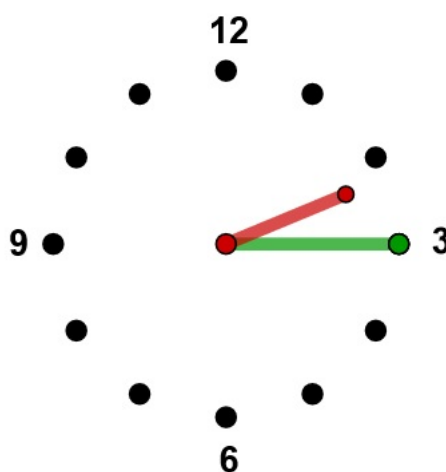
Je ziet hier een **analoge klok**. De lengte van de grote wijzer is 2 dm, die van de kleine wijzer 15 cm. Je kunt in de applet zelf de gewenste tijd instellen.

Bekijk de hoogte h van de uiteindes van de wijzers als functies van t (tijd).

Opgave 13

Het middelpunt van de klok hangt op 2 meter hoogte.

- Stel een passend functievoorschrift op voor de hoogte h van de uiteindes van de wijzers als functies van t (tijd). Kies als eenheden hoogte in centimeter en tijd in uur en neem $t = 0$ op 0:00 uur.
- Geef bij de volgende tijden de hoogtes van de minutenwijzer en de urenwijzer, zo mogelijk exact, en anders in twee decimalen nauwkeurig.
 - twee uur
 - tien voor half vijf
 - vijf voor elf
 - twee voor twaalf



Figuur 6.9

Testen

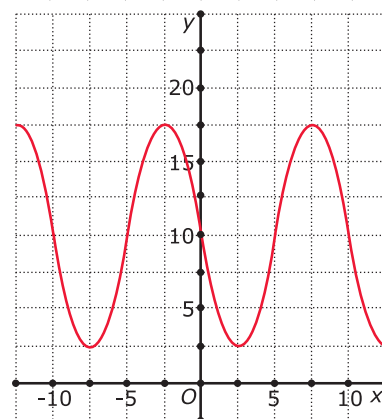
Opgave 14

Functie f met voorschrift $f(x)$ heeft een sinusvormige grafiek met een minimum in het punt $(20, 300)$ en een eerstvolgend maximum in het punt $(32, 400)$.

- Maak een schets van deze grafiek met x van 0 tot ten minste 40.
- Bereken de periode, de amplitude en de evenwichtslijn en stel een passend functievoorschrift op.
- Bereken $f(50)$, $f(51)$ en $f(52)$.
- Los op: $f(x) = 325$.

Opgave 15

Stel bij deze sinusoïde twee passende functievoorschriften op. Gebruik hierbij de sinus.



Figuur 6.10

Opgave 16

Onze ademhaling is bij benadering een periodiek verschijnsel. Een gezonde volwassen man ademt ongeveer 12 keer per minuut in en weer uit. De longinhoud $V(t)$ kan daarbij met zo'n halve liter toe- of afnemen, waarin t de tijd in seconden is. Het longvolume na inademen is 5,2 liter.

- Hoe groot is de ademhalingsfrequentie per minuut?
- Ga ervan uit dat $V(t)$ een sinusoïde is met op $t = 0$ een maximale longinhoud. Teken de grafiek van de longinhoud V uitgezet tegen de tijd t .
- Stel bij deze situatie een formule op voor $V(t)$.

3.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Periodieke functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- periode — golflengte — frequentie;
- eenheidscirkel — draaihoek — radialen;
- standaardsinus — periode — standaardcosinus;
- arcsinus — arccosinus;
- sinusoïde — periode — amplitude — evenwichtsstand — horizontale verschuiving.

Activiteitenlijst

- frequentie berekenen — periode berekenen
- draaihoeken omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd
- de standaard sinusgrafiek tekenen — de standaard cosinusgrafiek tekenen — eenvoudige transformaties hierop toepassen;
- vergelijkingen bij de standaard(co)sinus oplossen, exact (met arcsin/arccos) en met de GR;
- bij een sinusoïde de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving bepalen, zowel vanuit de grafiek als vanuit de formule — toppen en nulpunten van sinusoiden berekenen — vergelijkingen bij sinusoiden oplossen;
- bij een gegeven periodiek verschijnsel een sinusoïde opstellen die dat verschijnsel zo goed mogelijk beschrijft.

Achtergronden

Bekijk de applet: sinus

In de Indische wiskunde heette de helft van de koorde van een cirkelboog de ardhâ-jyâ (ardha = half; jyâ = koorde) van die boog. Dit werd, afgekort tot jyâ of jîv en door de Arabieren als vgîb geschreven. Toen het wetenschappelijk centrum van de wereld verschoof, werden de Arabische werken in de 12e eeuw vertaald naar het Latijn. Bij de vertaling werd vgîb gelezen als het Arabische vgaib wat 'plooi' of 'boezem' betekent. Dit werd door **Gerard van Cremona (1114–1187)** letterlijk vertaald als **sinus**.

Sinus en cosinus werden al in de Griekse Oudheid bestudeerd en later o.a. door de Indische geleerden **Aryabhata (476–550)**, **Brahmagupta (598–670)** en **Bhaskara (1114–1185)** en de Perzische wetenschappers **Mohammad ibn Musa al-Khwarizmi (ongeveer 780–845)**, **Omar Khayyam (1048–1131)**, **Nasir al-Din al-Tusi (13e eeuw)**, **Ghiyath al-Kashi (14e/15e eeuw)**. In

de 12de eeuw werden deze begrippen in West-Europa bekend. In de oorspronkelijke definitie waren sinus en cosinus verhoudingen van bepaalde zijden in een rechthoekige driehoek. De grootte van deze verhouding verandert niet zo lang de hoeken even groot blijven.

Maar deze definitie brengt het probleem met zich mee dat stompe hoeken geen sinus of cosinus hebben (want er bestaan geen rechthoekige driehoeken met een stompe hoek). Om dit probleem op te lossen werden de sinus en cosinus opnieuw gedefinieerd met behulp van de eenheidscirkel. Voordeel van deze definitie is dat de sinus en de cosinus van elke hoek kunnen worden bepaald.

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie f door $f(x) = 200 - 50 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ met $0 \leq x \leq 30$.

- Bepaal het bereik van f en plot de grafiek van f op de grafische rekenmachine.
- Los algebraïsch op: $f(x) = 210$. Rond af op twee decimalen.
- Los exact op: $f(x) \leq 175$.

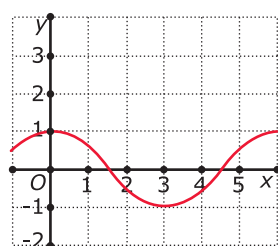
Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

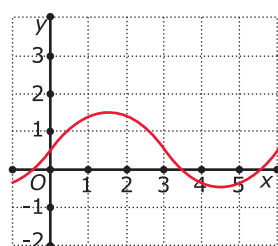
- $1 - 2 \sin(2\pi x) = 0$
- $25 + 10 \cos\left(\frac{\pi}{7}(t - 15)\right) = 17$

Opgave 3

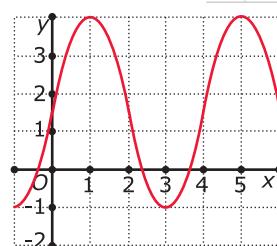
Bekijk de sinusoiden. Geef telkens een bijpassend functievoorschrift.



I



II



III

Figuur 7.1

Opgave 4

Bij het bepalen van de gewenste dijkhoogte langs de Nederlandse kust is het belangrijk dat de dijk hoger is dan de te verwachten maximale waterhoogte bij een stormvloed. De gemiddelde waterhoogte is daarbij niet van belang. Bij normale omstandigheden kan de getijdenbeweging van het zeewater bij de Hondsbosse zeewering te Petten redelijk worden beschreven door de functie:

$$y = 0,4 + 1,5 \sin\left(\frac{2\pi}{12,25} \cdot t\right)$$

Hierin is t in uur ten opzichte van middernacht op 21 juni 1998 en de waterhoogte y in meter ten opzichte van NAP.

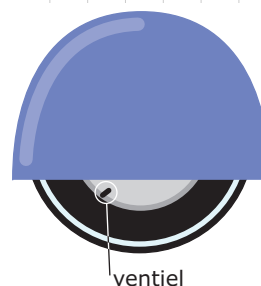
Onder invloed van de stand van de zon en de maan kan de amplitude van de getijdenbeweging variëren van 10% tot 140% van de amplitude van de gegeven functie. Afhankelijk van de windsterkte kan de gemiddelde waterhoogte bij aanlandige wind 1,5 tot 2,5 meter hoger zijn dan normaal.

Hoe hoog moet de zeedijk van Petten volgens jou minimaal zijn? Licht je antwoord toe aan de hand van het gegeven functieverschrijf.

Opgave 5

Van het autowiel in de figuur is slechts het onderste deel zichtbaar. Van de wielhoogte is $\frac{3}{4}$ deel afgeschermd achter het spatbord.

- Hoeveel procent van de tijd is het ventiel zichtbaar als de auto met een constante snelheid rijdt?
'Zichtbaar' kun je aangeven met een 1, 'onzichtbaar' met een 0. Je kunt dan de grafiek van de zichtbaarheid van het ventiel uitzetten tegen de tijd.
- Is dit een periodieke functie? Zo ja, teken een periode op schaal.



Figuur 7.2

Toepassen

Opgave 6: Daglengte

De daglengte varieert door het jaar heen. De daglengte is het verschil in tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang. Dit is een heel mooi periodiek verschijnsel dat behoorlijk nauwkeurig is te beschrijven met behulp van een sinusoid.

Via internet kun je een [tabel voor zonsopkomst en -ondergang in De Bilt](#) vinden.

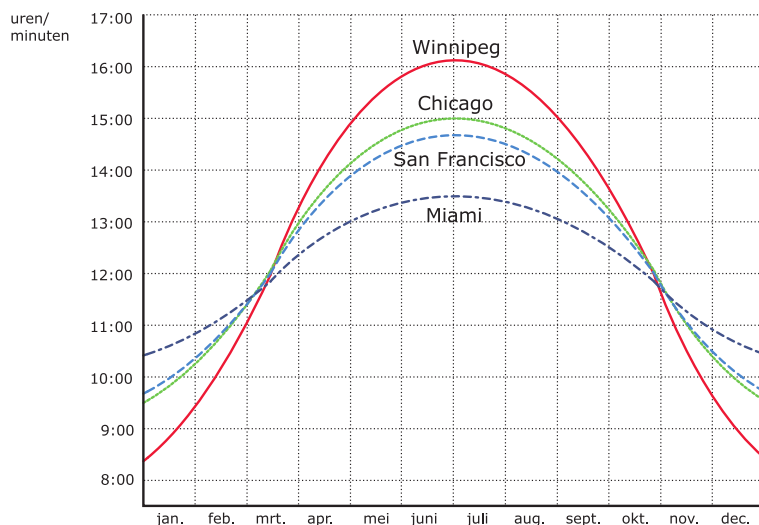
Een dergelijke tabel kun je in een rekenblad invoeren en dan grafieken maken voor de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang. [Hier zie je er een voorbeeld van](#). Het zijn de vereenvoudigde gegevens van een bepaald jaar voor Amsterdam. De daglengte is het verschil van beide en ook daarvan is eenvoudig een grafiek te maken.

Je kunt de grafieken benaderen met sinusoiden en zo nauwkeurig de langste dag en de kortste dag berekenen...



Figuur 7.3

Het variëren van de daglengte hangt nogal af van de breedtegraad op aarde. Dat komt omdat de aardas niet precies loodrecht op de ecliptica (het vlak waarin de aardbaan om de z ligt). Ook leuk om nader te onderzoeken...



Figuur 7.4

- Stel voor de vier steden een voorschrift op voor de daglengte als functie van de tijd t in dagen; $t = 0$ op 1 januari.
- Op welke datum is de langste dag van het jaar? En de kortste?
- Hoeveel dagen per jaar is de daglengte meer dan 14 uur?

Opgave 7: De manen van Jupiter

In 1610 werden de vier helderste **Jupitermanen** ontdekt door Galileï. De manen beschrijven bij benadering cirkelvormige banen om Jupiter, alle vier in dezelfde omlooprichting. Deze banen liggen (vrijwel) in één vlak met Jupiter en de Aarde. Daarom zie je Jupiter en de vier manen in een kijker altijd op één horizontale lijn liggen. De onderlinge posities van de manen in het kijkerbeeld veranderen voortdurend. Voor amateurastronomen worden maandelijks grafieken gepubliceerd waaruit ze op ieder moment de posities van de manen kunnen aflezen. Zie hemel.waarnemen.com: **Galileïsche manen van Jupiter, slingerdiagram september 2008**. Het diagram op de website geeft informatie over de maand september in 2008.

Deze slingerdiagrammen zijn vrijwel zuivere sinusoiden.

Voor Ganymedes bijvoorbeeld wordt deze harmonische beweging goed beschreven door $u(t) = 15 \sin\left(\frac{2\pi}{7,2}(t - 10)\right)$ waarin t de tijd in dagen is met $t = 1$ op 1 september 2008 om 0:00 uur en u de uitwijking t.o.v. Jupiter gemeten in Jupiterstralen.

Zo kun je ook van de beweging van de drie andere Galileïsche manen een formule opstellen.

En verder kun je op elk moment tekenen hoe je deze manen t.o.v. Jupiter vanaf Aarde ziet. Nog een leuke puzzel...

Op 1 september 2008 om 0:00 uur waren dus van links (west) naar rechts (oost) in de kijker te zien: Io (I, voor Jupiter), Europa (II), Ganymedes (III) en Callisto (IV). Hier zie je van de vier manen de



Figuur 7.5

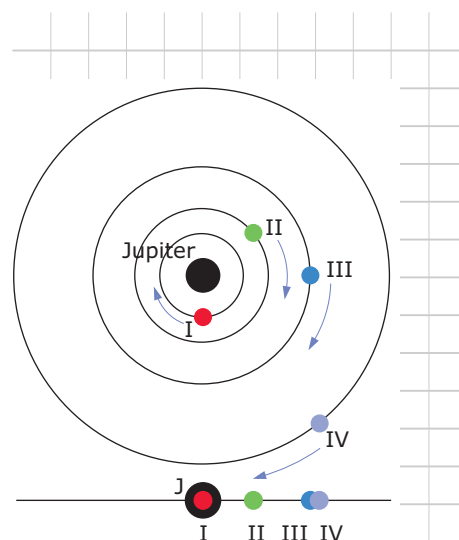
posities op hun cirkelbanen op 1 september 2008 om 0:00 uur getekend.

- a** Teken in zo'n figuur voor deze vier manen het deel van de baan dat ze doorlopen van 1 september 0:00 uur tot 5 september 0:00 uur.

In de kijker zie je de beweging van elk van die manen als een in de tijd veranderende uitwijking $u(t)$ t.o.v. Jupiter op een horizontale as. Die uitwijking kan goed worden beschreven met een sinusoïde. u wordt uitgedrukt in veelvoud van de straal van Jupiter en t is in dagen.

Voor Callisto geldt bij goede benadering $u(t) = 26 \sin(0,365(t - 24))$. (Hierbij is er van uit gegaan dat 'West' een positieve waarde van u betekent en 'Oost' een negatieve.)

- b** Laat zien dat deze formule redelijk overeenkomt met de gegeven grafiek. Bereken met de formule de omlooptijd van Callisto.
- c** Stel zelf zo'n formule op voor Ganymedes.
- De manen zijn in de figuur naar verhouding veel te groot getekend. In werkelijkheid zijn het stipjes. Dus als $-1 \leq u(t) \leq 1$ dan kunnen de manen achter Jupiter zitten.
- d** Bereken met behulp van de formule voor Ganymedes hoe lang deze maan achter Jupiter zit.



Figuur 7.6

Opgave 8: Fietsen

Bij normaal weer, zonder al te veel mee- of tegenwind, legt een fietser gemiddeld 15 kilometer per uur af. Als je bij een constante snelheid de hoogte van de trappers uitzet tegen de tijd, of de hoogte van het ventiel tegen de tijd, krijg je een mooie sinusoiden.

- a** Maak daarvan een overzicht met grafieken en formules. Geef redelijke schattingen van de bijbehorende afmetingen.

De baan die het ventiel aflegt als je fietst is geen sinusoïde.

- b** Waarom is dat zo?
- c** Hoe ziet die baan er dan wel uit? Maak er een zo goed mogelijke tekening van en verwerk die in het overzicht.



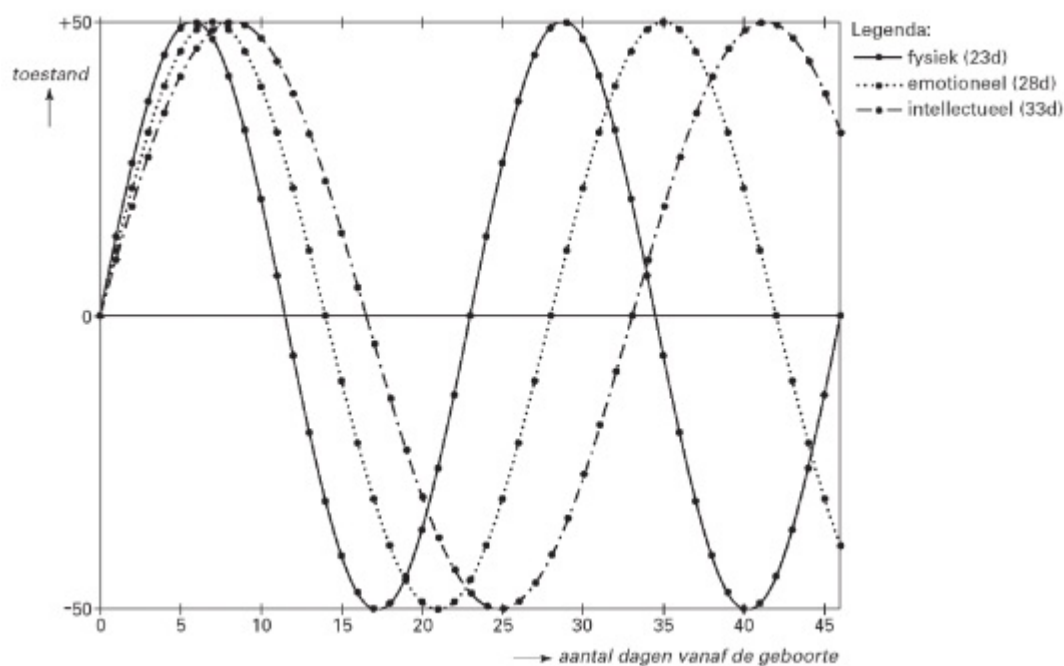
Figuur 7.7

Examen

Opgave 9: Bioritme

Op een pagina op Internet staat te lezen dat ons leven beheerst wordt door een drietal toestanden, namelijk door onze fysieke, onze emotionele en onze intellectuele toestand. Op de ene dag voel je je fysiek (lichamelijk) beter dan op een andere dag. Deze 'fysieke toestand' kunnen we weergeven op een schaal van -50 (fysiek op dieptepunt) tot +50 (fysiek opperbest). Deze fysieke toestand varieert in de tijd volgens een sinusoïde.

Ook de 'emotionele toestand' en de 'intellectuele toestand' variëren op een schaal van -50 tot +50 volgens een sinusoïde. Zie figuur.



Figuur 7.8

Bij de geboorte van een mens zou elke cyclus zich in dezelfde begintoestand bevinden, zoals is weergegeven in de figuur. Tezamen bepalen de drie cycli het zogenaamde bioritme van een mens. Sommigen beweren dat het bioritme volledig vastlegt tot welke prestaties een mens op een bepaald moment in staat is. Zo zou je bijvoorbeeld kunnen uitrekenen op welke dag je het best kunt solliciteren.

Voor de fysieke cyclus is de periode 23 dagen, voor de emotionele cyclus 28 dagen en voor de intellectuele cyclus is de periode 33 dagen.

Het bioritme in de figuur betreft een pasgeboren baby. E is de emotionele toestand van de baby t dagen na de geboorte. Hierbij hoort een formule van de vorm $E = a \sin(bt)$.

- a Geef de waarden van a en b .

Zodra de emotionele toestand beneden -25 komt, zou het moeilijker worden om de emoties onder controle te houden.

- b Hoeveel procent van een periode heeft de emotionele toestand een waarde die kleiner is dan -25 ? Licht je antwoord toe.

- c F is de fysieke toestand van de baby. Onderzoek of F op de eerste verjaardag een dalend of een stijgend verloop heeft.

Annelies is op 1 januari 1983 geboren. Op 1 januari 2001 wordt ze dus 18 jaar. Vanaf die dag mag ze rijexamen doen. Ze wil dat doen op een dag waarop zowel haar fysieke als haar intellectuele toestand positief is. (De jaren 1984, 1988, 1992, 1996 en 2000 hebben een dag extra, dus 366 dagen.)

- d Onderzoek welke de eerste drie dagen van januari 2001 zijn die voor het rijexamen in aanmerking komen.

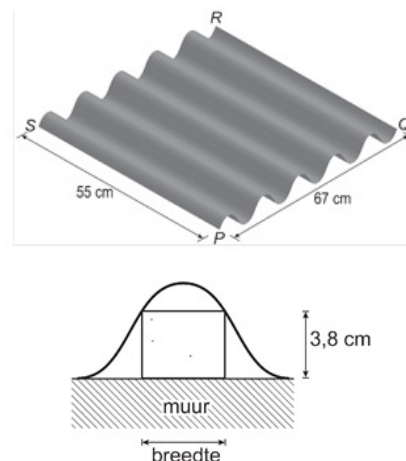
(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2000, eerste tijdvak, opgave 1)

Opgave 10: Golfplaat

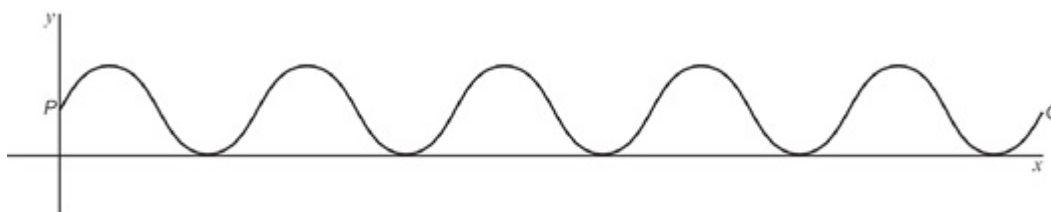
Golfplaat is een bouw materiaal dat gebruikt wordt voor het afdekken van eenvoudige bouwwerken. In de figuur hiernaast is een rechthoekig stuk golfplaat getekend. Hieronder is het vooraanzicht van dit stuk golfplaat in een assenstelsel getekend. Hierbij is de dikte verwaarloosd. In het assenstelsel zijn x en y uitgedrukt in cm. Bij deze grafiek behoort de formule:

$$y = 3 + 3 \sin(0,469x)$$

De golfplaat wordt als afdakje gebruikt. De plaat wordt horizontaal neergelegd en steunt aan de randen PQ en RS op een muur. De ruimtes tussen de bovenrand van de muur en de golfplaat worden afgedicht met houten blokjes. Deze blokjes zijn 3,8 cm hoog en hebben een zo groot mogelijke breedte. In de figuur is dit geschetst.



Figuur 7.9



Figuur 7.10

- a Bereken de breedte van zo'n blokje. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Het bovenaanzicht van het stuk golfplaat in de figuur rechtsboven is een rechthoek $PQRS$. $PQ = 67$ cm en $PS = 55$ cm. Dit stuk golfplaat wordt diagonaal doorgezaagd. In het bovenaanzicht is de zaagsnede een rechte lijn van S naar Q . De werkelijke vorm van de doorsnede is een sinusoïde.

- b Stel een formule op van deze sinusoïde als deze op ware grootte in een assenstelsel zoals in het vooraanzicht wordt weergegeven.

(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2005, tweede tijdvak, opgave 5)

Opgave 11: Cosinus

Gegeven zijn de functies $f_1(x) = 3 \cos(x)$ en $f_2(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

- a** Onderzoek, met behulp van de grafische rekenmachine, voor welke waarden van x tussen 0 en 2π geldt $f_1(x) < f_2(x)$. Rond de getallen in het antwoord af op twee decimalen.

- b** Hieronder zijn enkele transformaties vermeld:

- horizontale verschuiving ... naar links of ... naar rechts
- verticale verschuiving ... omhoog of ... omlaag
- vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met de factor ...
- vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met de factor ...

Welke van deze transformaties kunnen achtereenvolgens worden uitgevoerd om uit de standaardgrafiek van $y = \cos(x)$ de grafiek van f_2 te krijgen? Geef daarbij ook de getallen die op de plaats van de puntjes horen te staan. Er zijn verschillende goede antwoorden mogelijk, geef niet meer dan één antwoord.

- c** Voor de somfunctie s geldt: $s(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

De somfunctie s kan geschreven worden in de vorm $s(x) = a \cos(x + b)$.

Leid, met behulp van de grafische rekenmachine, uit de grafiek van s de waarden van a en b af. Geef je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde B1 in 2001, eerste tijdvak)

a

afstand 27
afstand van een punt tot een
lijn 27
amplitude 144, 154
arccosinus 136
arcsinus 136

b

booglengte 120

c

constanteregeel 74
cos-functie 128

d

discriminant 15
draaihoek 120

e

eenheidscirkel 120
eigenschappen van machten
en exponenten 52
evenredigheidsconstante 52
evenwichtslijn 154
evenwichtslijn, evenwichts-
stand 144

f

frequentie 110

g

gebroken functies 88
golflengte 110

h

hoek tussen een rechte lijn en
een cirkel 21

hoek tussen twee cirkels 21
horizontale verschuiving 144,
154

hyperbool 88

k

kettingregel 74
kwadraat afsplitsen 9

l

lineair gebroken functie 88

m

machtsregel 74
machtsfunctie 52, 65, 81, 88
middelloodlijn 8

o

optimaliseren 95

p

periode 110, 144, 154

r

raaklijn 15
radiaal 120
raken 15
recht evenredig met een
macht 52

s

somregel 74
sinusoïde 144
sin-functie 128

w

wiskundig model 95
wortelfuncties 81

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

- 11. Hoeken en afstanden**
- 12. Machtsfuncties**
- 13. Periodieke functies**



www.math4all.nl

