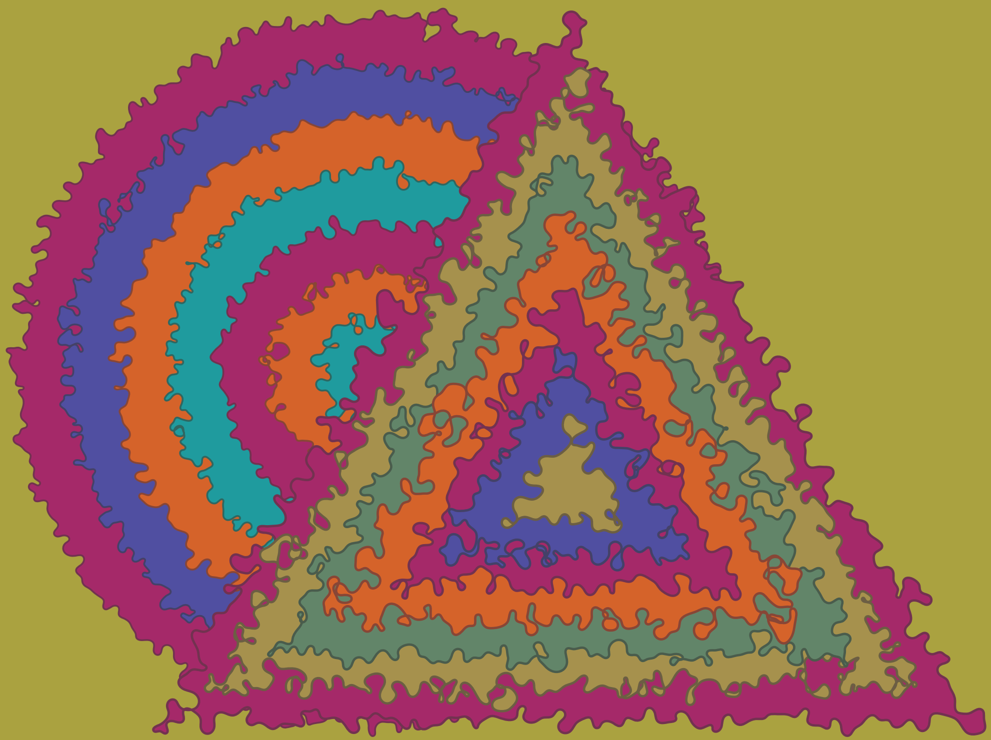
Wiskunde B

5 HAVO

Katern 1

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Afgeleide functies

1.1 Het begrip afgeleide

Inleiding

In de zeventiende eeuw vond Stevin de zeilwagen uit. Je kunt er snelheidsveranderingen mee bestuderen. Bij **Veranderingen** heb je leren werken met differentiequotiënten en differentiaalquotiënten. Daarmee geef je de veranderingssnelheid van de functiewaarden, de helling van een grafiek, weer.
Je maakt nu kennis met de 'afgeleide functie' van een functie f, het differentiaalquotiënt voor willekeurige x. Die afgeleide heeft als grafiek de hellingsgrafiek van de functie, waaruit je eigenschappen van f kunt afleiden.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip 'afgeleide functie';
- uit de afgeleide functie hellingwaarden van een grafiek afleiden;
- uit de afgeleide het verloop (stijgen, dalen) van de grafiek afleiden en extremen bepalen.

Voorkennis

- werken met differentiequotiënten van een functie op een interval;
- werken met differentiaalquotiënten van een functie bij een bepaalde invoerwaarde.

Verkennen

Opgave V1

Met een zeilwagen die Stevin in de zeventiende eeuw uitvond kun je veranderingen van de snelheid bestuderen.

In deze opgave wordt zo'n zeilwagen klaargemaakt, de zeilen worden gehesen. De zeilwagen gaat steeds sneller, er staat een flinke wind. Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s in meter de formule $s = 1{,}2t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden.

Figuur 1.2

a Hoeveel m heeft de zeilwagen na 5 s afgelegd en hoe snel rijdt hij dan?

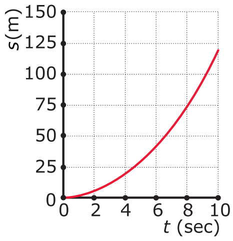
b Kun je een formule opstellen voor de snelheid v in m/s van de zeilwagen als functie van t?

Uitleg

Bekijk de grafiek van de afstand die een zeilwagen heeft afgelegd. Er geldt $s(t) = 1{,}2t^2$.
Daarbij is s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconden. De wagen gaat steeds sneller rijden.
De gemiddelde snelheid over de eerste vier seconden bereken je met het differentiequotiënt:

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot 4^2 - 1{,}2 \cdot 0^2}{4-0} = \frac{19{,}2}{4} = 4{,}8$ m/s

Omdat de wagen steeds sneller gaat, zal de snelheid op $t = 4$ hoger zijn dan de gemiddelde snelheid over de eerste vier seconden. Benader de snelheid op $t = 4$. Gebruik hierbij het differentiequotiënt.

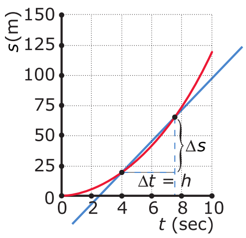


Figuur 1.3

Bekijk de applet.

Neem het interval $[4, 4+h]$.
Het differentiequotiënt op dat interval is (mits $h \neq 0$):

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot (4+h)^2 - 1{,}2 \cdot 4^2}{4+h-4}$$
$$= \frac{9{,}6h + 1{,}2h^2}{h} = 9{,}6 + 1{,}2h$$



Figuur 1.4

Als h de waarde 0 nadert, dan nadert $9{,}6 + 1{,}2h$ de grenswaarde $9{,}6$ m/s.
Deze grenswaarde is de snelheid op $t = 4$.

Je noteert deze grenswaarde als $s'(4)$ of als $\left[\frac{\text{d}s}{\text{d}t}\right]_{t=4}$

Dit is:

- het differentiaalquotiënt voor $t = 4$
- het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek voor $t = 4$
- de verandering van de afstand per tijdseenheid in meter per seconde op $t = 4$
- de afgeleide waarde op $t = 4$

Door de dy/dx-functie van de grafische rekenmachine te gebruiken kun je de helling ook bepalen.
Hoe dit moet, zie je in het **Practicum**.

Opgave 1

Voor een versnellende zeilwagen geldt $s(t) = 1{,}2t^2$.
Hierin is t de tijd in seconden en s de afgelegde afstand in meter.

a Bereken de gemiddelde snelheid over de eerste vijf seconden.

b Bereken het differentiequotiënt op het interval $[5, 5+h]$ en vereenvoudig de gevonden uitdrukking voor $h \neq 0$.

c Hoe groot is het differentiaalquotiënt en dus de snelheid op $t = 5$?

Opgave 2

Voor de afgelegde afstand s van een versnellende zeilwagen in meter geldt: $s = 1{,}2t^2$ waarin t de tijd in seconden is.

a Je kunt zelf een formule afleiden voor de snelheid als functie van t. Stel eerst het differentiequotiënt op het interval $[t, t+h]$ op.

b Als h de waarde 0 nadert, krijg je de snelheid voor een willekeurige waarde van t. Geef een formule voor de snelheid als functie van t.

c De functie $v(t)$ is de afgeleide van $s(t)$.
Welke betekenis heeft $s'(5)$ in dit verband?

A. $s'(5)$ is de gemiddelde snelheid in de eerste vijf seconden.
B. $s'(5)$ is de afgelegde weg in de eerste vijf seconden.
C. $s'(5)$ is de snelheid op tijdstip $t = 5$.

d Hoe groot is $s'(5)$?

e Op welk tijdstip rijdt de zeilwagen 50 km/h?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

De gemiddelde verandering of het differentiequotiënt zegt iets over de helling van een grafiek.

Het differentiequotiënt is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

De hellingswaarde of **afgeleide waarde** van een grafiek in een punt benader je door het differentiequotiënt over een steeds kleiner interval uit te rekenen. Deze waarde wordt ook wel **differentiaalquotiënt** genoemd.

De afgeleide waarde van $f(x)$ voor $x = a$ schrijf je als: $f'(a)$. (Spreek uit als: “f accent a”.)

Dit kun je ook schrijven als: $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$.

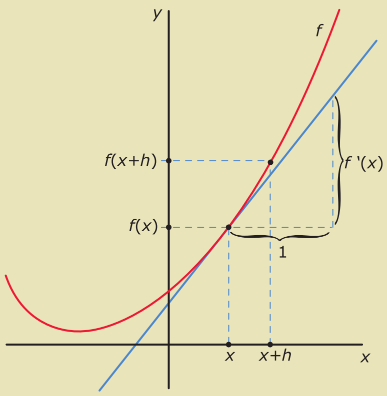
(Spreek uit als: “dy dx als x is a”.)

Als je een formule opstelt voor de hellingswaarden voor alle mogelijke waarden van x, dan spreek je van de **afgeleide (functie)**.

Die afgeleide functie geeft bij elke waarde van x (uit het domein) de helling van de functie voor die waarde van x. Dit getal is ook het hellingsgetal van de raaklijn in het punt met die waarde van x.

Je schrijft die afgeleide als $f'(x)$ of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ of $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$.

De grafiek van $f'(x)$ is de **hellingsgrafiek** van f.

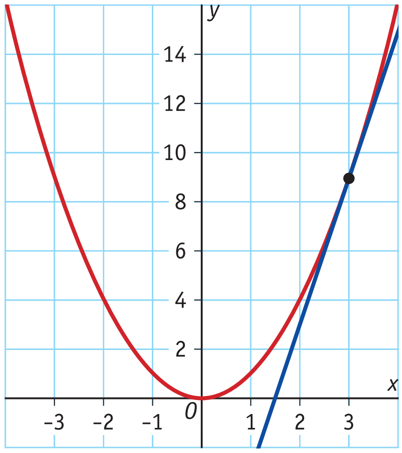


Figuur 1.5

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Bereken zonder de grafische rekenmachine het differentiaalquotiënt van deze functie voor $x = 3$. Stel met behulp daarvan een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.



Figuur 1.6

Antwoord

Berekening van het differentiaalquotiënt.
Het differentiequotiënt van f op het interval $[3; 3+h]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6 + h$ (mits $h \neq 0$)

Als h naar 0 gaat, dan gaat $6 + h$ naar 6.
Het differentiaalquotiënt van f voor $x = 3$ is dus 6.

Het getal 6 is het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$. Deze raaklijn is een rechte lijn en heeft daarom een vergelijking van de vorm: $y = 6x + b$.
b bepaal je door de coördinaten van een punt van de raaklijn in de vergelijking in te vullen: het raakpunt.
Omdat $f(3) = 3^2 = 9$, gaat deze raaklijn door $(3,9)$.

Vul dit in de vergelijking in: $9 = 6 \cdot 3 + b$ geeft $b = -9$.

De vergelijking van de raaklijn is $y = 6x - 9$.

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** de functie $f(x) = x^2$.
Stel zonder hulp van de grafische rekenmachine de formule op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = -2$.

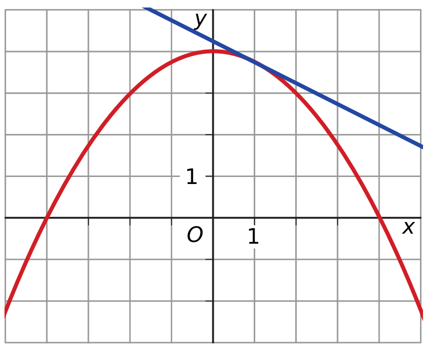
Opgave 4

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$ met domein $[-5,5]$.

a Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[1,1+h]$.

b Welke hellingswaarde heeft de grafiek voor $x = 1$?

c Deze hellingswaarde is tevens de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 1$. Stel een vergelijking van die raaklijn op.



Figuur 1.7

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Stel een voorschrift op voor de afgeleide van deze functie.
Bereken met behulp daarvan het differentiequotiënt van f voor $x = 3$.

Antwoord

Het differentiequotiënt voor willekeurige x is gelijk aan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{(x+h) - x} = \frac{(x^2+h^2+2xh) - x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h$$

Als h naar 0 nadert, krijg je de afgeleide: $f'(x) = 2x$.

De gevonden afgeleide functie is het hellingsgetal van de grafiek van f voor willekeurige x, dus ook voor $x = 3$: $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$.

a Met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[x, x+h]$ bepaal je de afgeleide van de functie $f(x)$. Stel de formule van de afgeleide functie op. Laat duidelijk zien hoe je eraan komt.

b De lijn met vergelijking $y = -2x + 8$ raakt de grafiek bij $x = 4$.
Laat zien dat de helling van de grafiek bij $x = 4$ gelijk is aan de helling van de raaklijn.

Voorbeeld 3

De opbrengst R bij de verkoop van een product hangt af van het aantal producten q dat er verkocht wordt. Niet altijd neemt de opbrengst toe als je meer verkoopt, want soms moet je om meer te kunnen verkopen de prijs per stuk laten zakken.

Voor dit product kan de opbrengst onder bepaalde economische omstandigheden worden gegeven door: $R = -q^2 + 24q$, waarin R in honderden euro en q in duizenden eenheden.

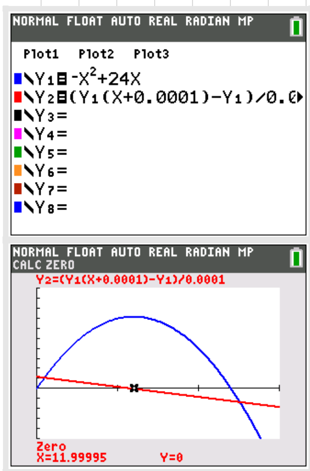
Plot de grafiek van R en de hellingsgrafiek van R. Geef aan bij welk aantal verkochte producten de opbrengst maximaal is.

Antwoord

Voer bij Y1 eerst de opbrengstfunctie in en dan bij Y2 de hellingsfunctie die verwijst naar de functie onder Y1.

Het hellingsgetal van de raaklijn in een top is 0. Dit zie je ook terug in de plot; je ziet namelijk dat waar de hellingsgrafiek de horizontale as snijdt, de grafiek van R een maximum heeft. In het voorbeeld is dit voor $q = 12$ het geval.

Conclusie: bij een verkoop van 12000 eenheden is de opbrengst maximaal.



Figuur 1.8

Opgave 6

Een bedrijf maakt gebruik van een opbrengstformule $R = -2q^2 + 49q$, waarbij R de opbrengst in honderden euro is en q het aantal gefabriceerde producten in honderdtallen.

a Plot op de grafische rekenmachine de hellingsgrafiek van R.

b Bereken met behulp van de hellingsgrafiek bij welke productie er een maximale opbrengst wordt behaald.

Opgave 7

De kosten $K(q)$ (euro) voor de productie van q liter van een bepaalde chemische stof bedragen $K(q) = 0{,}1q^2 + 0{,}7q + 12$.

a Plot de hellingsgrafiek van K.

b Hoe kun je aan de hellingsgrafiek zien dat de kosten blijven stijgen bij toenemende q?

Verwerken

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 4x$.

a Bereken het hellingsgetal van de grafiek van f voor $x = 1$ met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[1,1+h]$. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

b Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van f.

c Bereken met behulp van $f'(x)$ nogmaals de hellingswaarde voor $x = 1$.
Ga na dat je dezelfde uitkomst krijgt als bij a.

d Voor welke waarde van x heeft de grafiek van f' een nulpunt?
Welke betekenis heeft dit punt voor de grafiek van f?

e Welke nulpunten heeft f?
Bereken de helling van de grafiek van f in haar nulpunten.

f De grafiek van f heeft precies één punt waarin de helling 2 is. Bereken de coördinaten van dit punt.

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x$.

a Bereken het hellingsgetal van de grafiek van f voor $x = 1$ met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[1,1+h]$. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

b Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van f.

c Bereken met behulp van $f'(x)$ nogmaals de hellingswaarde voor $x = 1$.
Ga na dat je dezelfde uitkomst krijgt als bij a.

d Voor welke waarde van x heeft de grafiek van f' een nulpunt?
Welke betekenis heeft dit punt voor de grafiek van f?

e Welke nulpunten heeft f?
Bereken de helling van de grafiek van f in deze nulpunten.

f De grafiek van f heeft precies één punt waarin de helling 2 is. Bereken de coördinaten van dit punt.

Opgave 10

Een constante functie heeft als voorschrift $f(x) = c$.

Toon aan dat de afgeleide van een constante functie altijd de waarde 0 heeft.

Opgave 11

De winst van een bedrijf is te beschrijven met een winstformule: $W(q) = -3q^2 + 200q - 300$, waarbij q de geplande productieomvang in honderdtallen per jaar voorstelt en W de winst in honderden euro.

a Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van deze winstfunctie.

b Welke betekenis heeft $W'(50)$ voor de opbrengstfunctie?

c De fabrikant wil onderzoeken hoe groot zijn productieomvang moet zijn om een maximale winst te bereiken. Bereken deze productieomvang en de maximale winst met behulp van de afgeleide. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}1x^2 + 6x$ op het interval $[0{,}80]$.

a Stel een formule op voor de afgeleide f'.

b Stel een formule op voor de raaklijn aan de grafiek van f in het rechter nulpunt.

Toepassen

Opgave 13: Vrije val

Voor een lichaam in vrije val (bijvoorbeeld een parachutespringer voordat hij zijn valscherm opent) geldt bij benadering $s(t) = 4{,}9t^2$, waarin s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconden is.

a Bereken de gemiddelde snelheid gedurende de eerste tien seconden vrije val.

b De snelheid na tien seconden vrije val is groter dan de gemiddelde snelheid over de eerste tien seconden. Laat dit door middel van een berekening zien.

c Stel een formule op voor de snelheid v als functie van t door het interval $[t, t+h]$ te gebruiken.

d Na hoeveel seconden vrije val beweegt het lichaam met een snelheid van 120 km/h?

Opgave 14: Afbraak van giftige stof in water

De hoeveelheid van een bepaalde giftige stof in het water van een meertje wordt minder: de stof breekt op natuurlijke wijze af. Voor die hoeveelheid geldt $H(t) = 20 \cdot 0{,}8^t$ waarin H de hoeveelheid in milligram per liter is en t de tijd in dagen, die is verstreken sinds de stof in het water terechtkwam.

a Hoeveel gram per liter is er gemiddeld in de eerste vier dagen verdwenen?

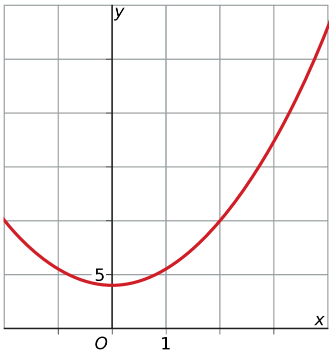
b De afbreeksnelheid van deze giftige stof is op $t = 0$ hoger dan op $t = 4$. Bepaal beide afbreeksnelheden met de grafische rekenmachine en leg uit waarom ze verschillen.

c Je zou de afbreeksnelheid ook moeten kunnen berekenen met behulp van een differentiaalquotiënt.
Daarbij doet zich echter een probleem voor. Welk probleem?

Testen

Opgave 15

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 1{,}5x^2 + 4$ op het interval $[-2{,}4]$.



Figuur 1.9

a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op dit interval.

b Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide $f'(x)$.

c Bereken: $\left[\frac{\text{d}\,y}{\text{d}\,x}\right]_{x=2}$

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Opgave 16

Voor een bepaalde autofabrikant geldt voor de totale opbrengst TO van de verkoop: $TO = 900q - 60q^2$ waarin TO wordt uitgedrukt in duizenden euro's en q de geplande productieomvang in honderdtallen per jaar voorstelt. Er wordt van uit gegaan dat alle geproduceerde auto’s ook worden verkocht.

a Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van deze opbrengstfunctie.

b Welke betekenis heeft $TO'(5)$ voor de opbrengstfunctie?

c De autofabrikant wil onderzoeken hoe groot zijn productieomvang moet zijn om een maximale opbrengst te krijgen. Bereken deze productieomvang met behulp van de afgeleide functie die je in de GR invoert. Wat betekent dit voor de afgeleide functie die je bij a heb gevonden?

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het bepalen van een differentiaalquotiënt en het maken van een hellingsgrafiek.

- **Veranderingen, differentiëren en de TI84**
- **Veranderingen, differentiëren en de TInspire**
- **Veranderingen, differentiëren en de Casio**
- **Veranderingen, differentiëren en de HPprime**
- **Veranderingen, differentiëren en de NumWorks**

1.2 Differentiëren

Inleiding

Je hebt gezien dat bij een functie vaak een afgeleide (functie) is op te stellen. Die afgeleide zegt iets over de veranderingen van de grafiek van de functie. En dus over de helling van die functie.
Het differentiëren is een handige techniek om afgeleiden te vinden.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- bij bepaalde soorten functies de afgeleide snel te vinden;
- het begrip differentiëren;
- afgeleiden gebruiken bij het berekenen van hellingswaarden en bij gegeven hellingswaarden de bijpassende x-waarden berekenen.

Voorkennis

- met behulp van een differentiequotiënt de afgeleide (of hellingsfunctie) van een functie bepalen;
- een hellingsfunctie gebruiken om de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek op te stellen.

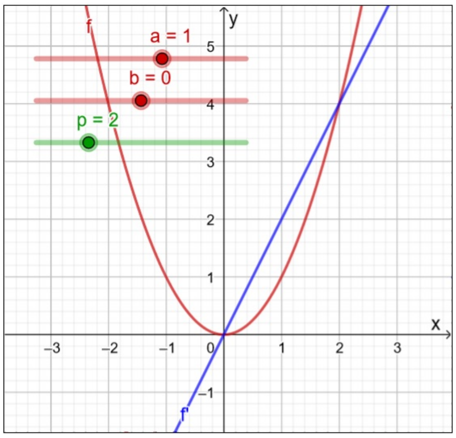
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

In de applet zie je (rood) de grafiek van functies f van de vorm $f(x) = a \cdot x^p + b$.
In blauw zie je de grafiek van de bijbehorende hellingsfunctie, de afgeleide.

Stel je in $a = 1$, $b = 0$ en $p = 2$ dan heb je de grafiek van $f(x) = x^2$.



Figuur 2.2

a Ga na, dat dan de gevonden hellingsgrafiek overeen komt met de grafiek van $y = 2x$.
Controleer dat je deze afgeleide ook krijgt door het differentiaalquotiënt op $[x, x+h]$ te berekenen.

b Bekijk ook andere kwadratische functies van de vorm $f(x) = ax^2 + b$. Probeer vooraf te bedenken welk voorschrift bij de hellingsfunctie zou moeten passen. En controleer dan of je gelijk hebt.
Doe hetzelfde voor derdegraadsfuncties van de vorm $f(x) = ax^3 + b$.
En voor functies van de vorm $f(x) = ax^4 + b$ en $f(x) = ax^5 + b$.
Werk bijvoorbeeld in tweetallen en bedenk een manier om de afgeleide te vinden zonder met differentiequotiënten te werken.

Uitleg

Gegeven is de functie $f(x) = a \cdot x^2$. Op het interval $[x, x+h]$ kan het differentiequotiënt bepaald worden.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \frac{2axh + ah^2}{h} = 2ax + ah$$

Als h naar 0 nadert, blijft er alleen $2ax$ over. Dit is de afgeleide van f, dus $f'(x) = 2ax$.

De afgeleide van $f(x) = ax^2$ is $f'(x) = 2ax$.
Net zo: de afgeleide van $g(x) = ax^3$ is $g'(x) = 3ax^2$.

In het algemeen is van $f(x) = ax^n$ de afgeleide $f'(x) = nax^{n-1}$ voor elke waarde van a.
Deze regel kun je gebruiken om een afgeleide te bepalen, dat heet differentiëren. Deze specifieke regel heet de machtsregel.

Als je functies bij elkaar optelt, bepaal je de afgeleide door de afgeleiden apart te bepalen en ze dan weer bij elkaar op te tellen. Dit heet de somregel.
Gegeven is bijvoorbeeld de functie: $f(x) = x^3 + 5x^2 - 25x + 10$.
Deze functie kun je (in gedachten) opdelen in vier opgetelde functies:
$f_1(x) = 1x^3$, $f_2(x) = 5x^2$, $f_3(x) = -25x^1$ en $f_4(x) = 10x^0$.
Bepaal de afgeleide van deze afzonderlijke functies en tel ze bij elkaar op:
$f'(x) = 3 \cdot 1x^{3-1} + 2 \cdot 5x^{2-1} + 1 \cdot -25x^{1-1} + 0 \cdot 10^{0-1} = 3x^2 + 10x - 25$

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met behulp van differentiëren de afgeleide van een functie kunt bepalen. Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

a $f(x) = 12x^5$

b $g(x) = 12x^5 + 20$

c $h(x) = 12x^5 + 20x^3 + 17$

d $k(x) = 12x^5 + 20x^3 + 5x^2 - 10x + 15$

Opgave 2

Een lineaire functie heeft de vorm $f(x) = ax + b$.

a Laat met behulp van een differentiequotiënt zien dat dan $f'(x) = a$.

b Laat zien, dat dit ook uit de machtsregel voor differentiëren volgt.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De afgeleide van een functie $y = f(x)$ kun je bepalen door h naar 0 te laten naderen in het differentiequotiënt:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Voor veel soorten functies zijn hieruit algemene regels af te leiden waarmee je de afgeleide op een eenvoudiger manier kunt vinden. Dergelijke regels heten **differentieerregels** en het toepassen ervan noem je **differentiëren**.

- **Machtsregel**
  De afgeleide van de machtsfunctie $f(x) = cx^n$ is $f'(x) = ncx^{n-1}$ voor elke waarde van c en voor gehele positieve waarden van n.
- **Constanteregel**
  De afgeleide van een constante (functie) is 0: als $f(x) = c$, dan is $f'(x) = 0$.
- **Somregel**
  De afgeleide van de som van twee functies is de som van de afgeleiden van die functies: als $f(x) = u(x) + v(x)$ dan is $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. Deze regel geldt ook bij een verschil van twee functies.

Voorbeeld 1

Bepaal de afgeleide van de functie $f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x - 100$.

Antwoord

Schrijf eerst de functie als een som (verschil) van machtsfuncties en constante functies:

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x^1 - 100$

Pas nu de differentieerregels toe. De afgeleide is dan:

$f'(x) = 3x^{3-1} + 4 \cdot 2x^{2-1} - 12 \cdot 1x^{1-1} - 0 = 3x^2 + 8x - 12$

Opgave 3

Bepaal de afgeleide van de volgende functies door te differentiëren met behulp van de differentieerregels.

a $f(x) = 8x^3 - 50x + 70$

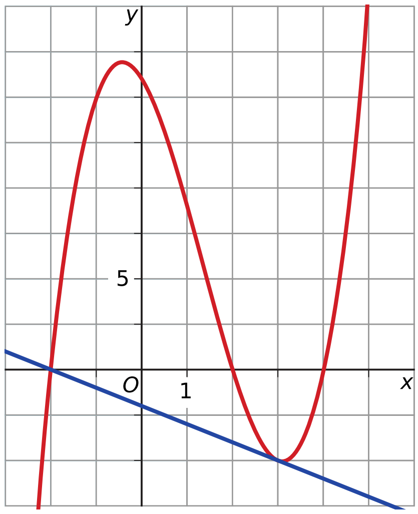
b $f(x) = 10 + 3x - 9x^2 - 12x^4$

c $f(x) = \frac{1}{3}x^6 - 5x^2$

d $f(x) = 100 - 25x - x^4$

Voorbeeld 2

Stel door middel van differentiëren de vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van de functie $g(x) = (x^2 - 4)(x - 4)$ voor $x = 3$.



Figuur 2.3

Antwoord

Voor de vergelijking van de raaklijn heb je het hellingsgetal $g'(3)$ nodig.
Deze functie is geschreven als het product van twee functies en niet als som. Schrijf het functievoorschrift eerst als een som (verschil) van machtsfuncties en constante functies. Haakjes wegwerken geeft:
$g(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

De afgeleide is:
$g'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 4x^1 - 1 \cdot 4x^0 + 0 = 3x^2 - 8x - 4$

De vergelijking van de raaklijn heeft de vorm $y = ax + b$.

$g'(3) = -1$, dus de vergelijking is $y = -x + b$.

Omdat $g(3) = -5$ gaat de raaklijn door het punt $(3, -5)$.
Dat vul je in de vergelijking in: $-5 = -3 + b$ geeft $b = -2$.

De vergelijking van de raaklijn is: $y = -x - 2$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $y = (x^2 - 4)(x - 6)$.

a Een functievoorschrift in deze vorm is handig als je de nulpunten van de functie wilt bepalen. Bereken die nulpunten.

b Als je met hellingsgetallen van deze functie wilt werken moet je eerst de haakjes wegwerken. Bepaal de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ van deze functie.

Met behulp van deze afgeleide kun je de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek opstellen. In het voorbeeld kun je nog eens zien hoe dat gaat.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van deze functie voor $x = 2$. Plot beide vervolgens ter controle op de grafische rekenmachine.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 50x + 60$. Er zijn twee waarden van x waarvoor de helling van de raaklijn aan de grafiek van f gelijk is aan 50. Welke twee waarden van x zijn dat?

Antwoord

Differentieer eerst de functie: $f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 50$. Als de helling van de raaklijn 50 is, moet gelden dat $f'(x) = 50$. Dus je moet de vergelijking $1{,}5x^2 - 6x + 50 = 50$ oplossen.

De oplossingen van deze vergelijking zijn $x = 0$ en $x = 4$. Voor deze waarden van x is de helling van de raaklijn aan de grafiek van f gelijk aan 50.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 10x - 35$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Bereken het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

c Er zijn punten op de grafiek van f waarin de helling de waarde 10 heeft. Bereken de coördinaten van die punten.

Verwerken

Opgave 6

Bepaal telkens de afgeleide van de gegeven functie. Bepaal ook het hellingsgetal van de grafiek voor $x = 1$ en controleer zo mogelijk je antwoord op de grafische rekenmachine.

a $f(x) = x^3 - 4x$

b $g(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 12x - 35$

c $s(t) = 60t - 4{,}9t^2$

d $H(t) = 2\left(t^2 - 4\right)$

e $V(x) = 5 - (x - 3)^2$

f $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

g $TW(q) = 0{,}5q^3 - 6q^2 - 25q + 112$

h $K(x) = \left(3x^2 - 2a\right)(ax - 1)$

Opgave 7

Bepaal van elk van de volgende functies de afgeleide. Bereken vervolgens de punten van de grafiek waar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn de waarde 0 heeft. Rond je antwoord indien nodig af op één decimaal. Controleer je antwoorden op de grafische rekenmachine.

a $f(x) = x^4 - 8x^2$

b $TW(q) = -q^3 + 3q^2 + 3q + 6$

c $v(t) = t(t - 1)^2$

d $TW(p) = 40p - 0{,}02p^2$

Opgave 8

y is een functie van x waarvoor geldt: $y = x^3 - 25{,}5x^2 + 180x + 120$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

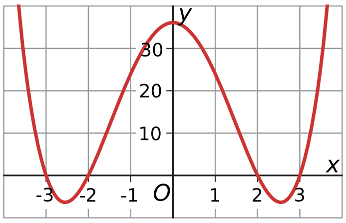
b Deze afgeleide heeft twee nulwaarden. Welke betekenis hebben die nulwaarden voor de functie?

c Bereken de nulwaarden van de afgeleide y'.

d Voor welke waarden van x is de functie dalend?
Wat betekent dit voor $y'(x)$?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.



Figuur 2.4

a Laat zien hoe je uit het functievoorschrift de nulpunten van de grafiek van f kunt afleiden.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken het snijpunt van de raaklijnen aan de grafiek van f voor $x = -2$ en voor $x = 2$.

d Los op: $f'(x) = 0$.

e Wat betekent het antwoord van d voor de grafiek van f?

Opgave 10

Ook in de economie kun je differentiëren gebruiken.
Neem bijvoorbeeld de kostenfunctie $K(q) = 0{,}1q^3 - q^2 + 4q$ met K in euro en q het aantal eenheden product.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Bereken de snelheid waarmee de kosten stijgen voor $q = 0$.

c Voor welke waarde van q stijgen de kosten met een snelheid van € 4,00 per eenheid?

Toepassen

Opgave 11: De baan van een kogel

Een voorwerp wordt afgeschoten met een bepaalde beginsnelheid en onder een bepaalde hoek. Wanneer je de luchtweerstand verwaarloost, is zijn kogelbaan parabolisch. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de grafiek van de functie $h(x) = 1{,}5 - 0{,}01(x - 10)^2$. Hierin is h de hoogte in meter van het afgeschoten voorwerp boven de grond en x de afstand in meter over de grond tot recht onder het afgeschoten voorwerp.

a Op welke hoogte werd het voorwerp afgeschoten?

b Bereken $h'(0)$.

c Wat betekent dit getal voor de kogelbaan?

d Bereken het punt van de kogelbaan waarin $h'(x) = 0$. Welke betekenis heeft dit punt?

e In het hoogste punt van de kogelbaan is de afgeleide nul. Toch beweegt de kogel daar met een zekere snelheid. Kun je dit verklaren?

Opgave 12: Gemiddelde totale kosten

Voor de productiekosten van een bepaald artikel geldt: $TK = 1200 + 0{,}2q^2$. Hierin is q het aantal geproduceerde eenheden van dat artikel en stelt TK de totale kosten in euro voor. De productiekosten per eenheid worden gegeven door $GTK = \frac{TK}{q}$. Je noemt dit wel de gemiddelde totale kosten.

a Druk de gemiddelde totale kosten uit in q.

b Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van GTK bekijken. Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van GTK? Welke economische betekenis heeft deze asymptoot?

c Je kunt bij deze functie (nog) geen afgeleide bepalen. Maar je kunt er wel een (benadering van de) hellingsgrafiek bij tekenen met de grafische rekenmachine. Teken die hellingsgrafiek en bepaal met behulp daarvan bij welke productie de gemiddelde totale kosten zo laag mogelijk zijn.

d Welke waarde benadert de helling van de grafiek van GTK als de productie heel erg groot is? En welke betekenis heeft dat voor de productiekosten per eenheid?

Testen

Opgave 13

Bepaal bij elk van deze functies de afgeleide. Soms moet je eerst het functievoorschrift nog bewerken.

a $f(x) = x^6 + 8x - 12$

b $f(x) = -1{,}5x^3 + 4x$

c $f(x) = x\left(x^2 - 2x\right)$

d $f(x) = (2x + 1)^2$

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$.

a Bereken het hellingsgetal van deze functie in het punt $(0,0)$ met behulp van de afgeleide.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(0,0)$.

c Er zijn twee punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0. Welke twee punten zijn dat?

d De grafiek van f heeft in een bepaald punt een grootste hellingsgetal. In welk punt is dat?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren van veeltermfuncties**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.3 Extremen berekenen

Inleiding

Als je een functievoorschrift hebt dan kun je de grafische rekenmachine een bijpassende grafiek laten tekenen. Je kunt dan de extreme waarden door de machine laten berekenen. Nadeel daarvan is dat je vaak niet zeker weet of je alle extremen in beeld hebt. Ook geeft de rekenmachine alleen maar een benadering.

Met behulp van de afgeleide van de functie kun je extremen echt berekenen: het zijn de punten van de grafiek waarin de afgeleide overgaat van positief in negatief of omgekeerd.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- extremen berekenen met behulp van de afgeleide van een functie;
- het berekenen van extremen toepassen in praktijksituaties;
- extremen berekenen bij families van functies.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van de GR en met behulp van hellingsgrafieken.

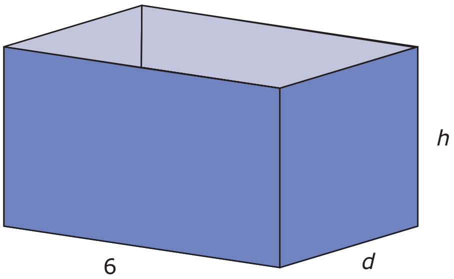
Verkennen

Opgave V1

Iemand bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte en de hoogte van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.)

Probeer dit probleem zelf op te lossen. Denk bijvoorbeeld aan het kiezen van geschikte variabelen.



Figuur 3.2

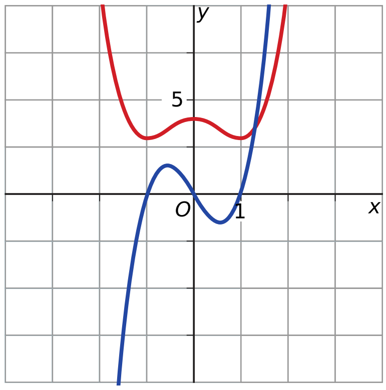
Uitleg

Bekijk de applet.

In een maximum van een grafiek gaat de grafiek over van stijgen naar dalen. De helling gaat op dat punt over van positief naar negatief. De grafiek van de afgeleide is de hellingsgrafiek en gaat op hetzelfde punt over van positief naar negatief.

Bekijk de grafiek (rood) van de functie $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$. De andere grafiek (blauw) is de grafiek van de afgeleide f', de hellingsgrafiek. Je ziet dat:

- de grafiek van f een minimum heeft als de afgeleide overgaat van negatief naar positief (voor $x = -1$ en voor $x = 1$);
- de grafiek van f een maximum heeft als de afgeleide overgaat van positief naar negatief (voor $x = 0$).

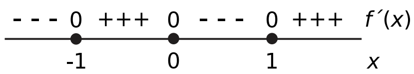


Figuur 3.3

Voor het bepalen van extremen gebruik je de waarden van x waar de afgeleide overgaat van positief in negatief of andersom. Dit is bij een nulpunt van de afgeleide.
Als de afgeleide 0 is, heeft de grafiek van de functie een horizontale raaklijn.

De extremen van de functie $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ bereken je dus zo:

- Bereken eerst voor welke x-waarden de afgeleide 0 is:
  $f'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 4x = 0$
  Hieruit vind je: $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$
- Maak een tekenschema van f' of bekijk de grafiek van f. Controleer of de afgeleide van teken wisselt.
- Bereken de extremen:
  minimum $f(-1) = 3$, maximum $f(0) = 4$ en minimum $f(1) = 3$.



Figuur 3.4

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je bij een functie de extreme waarden berekent.

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Bereken de nulpunten van de afgeleide.

c Maak een tekenschema van f' of bekijk de grafiek van f en bepaal de extremen van f.

Opgave 2

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3$.

a Bereken de waarden van x waarvoor $f'(x) = 0$.

b Deze functie heeft voor $x = 0$ een horizontale raaklijn. Heeft de functie ook een extreme waarde voor $x = 0$?

c Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{x}$. Wat is er aan de hand in $x = 0$?

A. De functie en de afgeleide hebben er beide de waarde 0, maar er is geen extreme waarde.
B. De functie en de afgeleide hebben er beide de waarde 0 en er is een minimum van $f(0) = 0$.
C. Alleen de functie heeft er de waarde 0 en $f'(0)$ is onbekend. Er is geen extreme waarde.
D. Alleen de functie heeft er de waarde 0 en $f'(0)$ is onbekend. Er is een minimum van $f(0) = 0$.

Theorie en voorbeelden

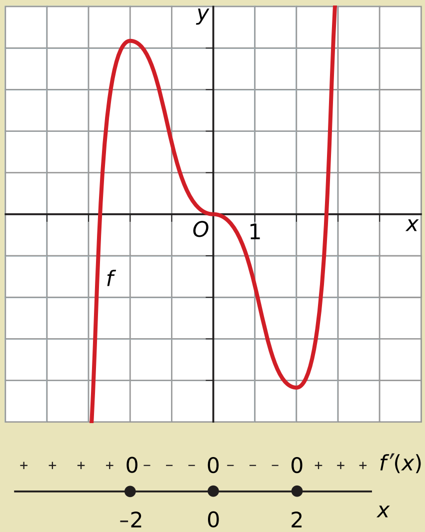
Om te onthouden

Bekijk de applet.

Extreme waarden berekenen gaat bij een functie, waarvan $f(x)$ het functievoorschrift is, als volgt:

- Bepaal met behulp van differentiëren de afgeleide en los $f'(x) = 0$ op. Houd rekening met het domein van de functie.
- Bekijk de grafiek van de afgeleide of maak een **tekenschema** van de afgeleide.
- Gaat $f'(x)$ voor $x = a$ over van negatief in positief (en hoort a tot het domein van de functie), dan heeft f een minimum van $f(a)$.
- Gaat $f'(x)$ voor $x = b$ over van positief in negatief (en hoort b tot het domein van de functie), dan heeft f een maximum van $f(b)$.

Als de afgeleide niet van teken wisselt, dan is er geen sprake van een extreme waarde.



Figuur 3.5

Voorbeeld 1

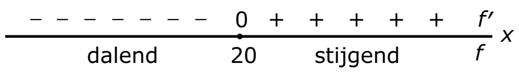
Bereken de extremen van de functie: $f(x) = 25x^4 - 800000x - 12345$

Antwoord

Dit is een functie die je niet zo makkelijk in beeld krijgt. Je werkt daarom met een tekenschema.
$f'(x) = 100x^3 - 800000$
$f'(x) = 100x^3 - 800000 = 0$ oplossen geeft: $x = \sqrt[3]{8000} = 20$.

Maak een tekenschema van de afgeleide. Door zowel links als rechts van $x = 20$ een getal te kiezen en dit in de afgeleide in te vullen zie je of de afgeleide daar positief of negatief is.
Kies bijvoorbeeld $x = 0$ en $x = 25$.

$f'(0) = -800000$ en negatief en $f'(25) = 762500$ en positief.



Figuur 3.6

Aan het tekenschema is te zien dat er inderdaad een extreme waarde is voor $x = 20$.
In dit geval is het een minimum: $f(20) = -12012345$.

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}1x^3 - 120x$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Bereken de nulpunten van de afgeleide.

c Bereken de extremen van f.

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100x^2$ en $g(x) = x^2 \cdot (x-10)^2$.

a Bereken algebraïsch de snijpunten van beide grafieken.

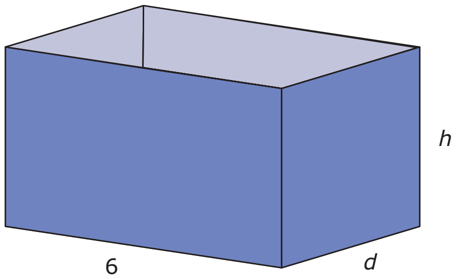
b Bereken met behulp van differentiëren de extremen van g.

c Door welk getal moet je het getal 100 in het functievoorschrift van f vervangen, zodat de grafiek door het punt gaat waarin g een maximum heeft?

Voorbeeld 2

Alex bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte d en de hoogte h van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.)



Figuur 3.7

Antwoord

Noem de diepte d en de hoogte h, beide in dm.
Vanwege de inhoud van 1 m^3 = 1000 dm^3, geldt: $1000 = 6 \cdot d \cdot h$ en hieruit volgt $h = \frac{1000}{6d}$.

Voor de totale oppervlakte A in m^2 geldt: $A = 6d + 12h + 2dh$.
Als je nu de eerder gevonden uitdrukking invult in de oppervlakteformule, vind je

$$A = 6d + 12 \cdot \left(\frac{1000}{6d}\right) + 2d \cdot \left(\frac{1000}{6d}\right) = 6d + \frac{12000}{6d} + \frac{2000d}{6d} = 6d + \frac{2000}{d} + \frac{1000}{3}$$

Van deze functie van d moet je het minimum bepalen. Omdat je een functie van deze vorm nog niet kunt differentiëren, doe je dat met behulp van de grafische rekenmachine. Ga na dat je vindt: $d \approx 18{,}26$. De bijbehorende waarde voor de hoogte kun je dan ook berekenen.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Licht toe dat de formule voor de oppervlakte van de opbergbak juist is.

b Controleer met de grafische rekenmachine dat de minimale oppervlakte inderdaad bij $d \approx 18{,}26$ ligt.

Voorbeeld 3

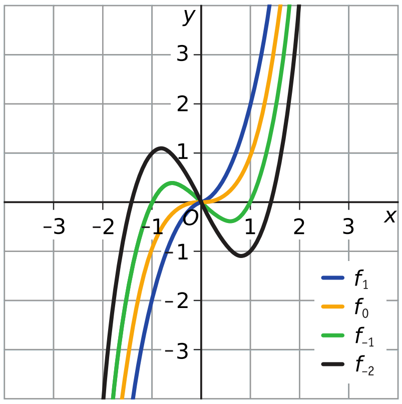
Bekijk de applet.

Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = x^3 + ax$.

Voor elke waarde van a heb je hier met een andere functie te maken.

Je ziet een paar grafieken van deze familie van functies met verschillende waarden van a.
Onderzoek dit bij de functies $f_5(x) = x^3 + 5x$ en $f_{-5}(x) = x^3 - 5x$.
Sommige functies f_a hebben extremen, andere niet.

Hoe hangt de x-coördinaat van de extremen van f_a af van de waarde van a?



Figuur 3.8

Antwoord

Je moet dus de x-waarden van de extremen berekenen op de bekende manier en daarna bekijken wat er gebeurt als a verandert:

$f'_a(x) = 3x^2 + a$

$f'(x) = 0$ geeft $x = \sqrt{-\frac{a}{3}}$ en $x = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$

Bekijk alle waarden van a.

- Als $a > 0$, zijn er geen nulpunten van de afgeleide, omdat de wortels geen reële waarden opleveren. $f_a(x)$ heeft dan geen extremen.
- Als $a = 0$, is de afgeleide $f'_0(x) = 3x^2$ en dus voor elke waarde van x positief of 0. $f_a(x)$ heeft dan geen extremen.
  Opmerking: de grafiek van $f_a(x)$ heeft nu in het punt $(0,0)$ een horizontale raaklijn.
- Als $a < 0$, is de grafiek van de afgeleide een dalparabool met twee nulpunten. $f_a(x)$ heeft dan een maximum voor $x = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$ en een minimum voor $x = \sqrt{-\frac{a}{3}}$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 3**. Gegeven is nu de functie $f_a(x) = x^3 - 2ax$.

a Neem $a = 1$ en bereken de x-coördinaten van de extremen.

b Bepaal de afgeleide van f_a.

c Voor welke waarden van a heeft f_a extremen?

Opgave 7

Gegeven is de functie $f_a(x) = ax^3 - x$, met $a > 0$.

a Differentieer f_a.

b Druk de waarde(n) van x waarvoor de raaklijn aan de grafiek van f_a horizontaal is uit in a.

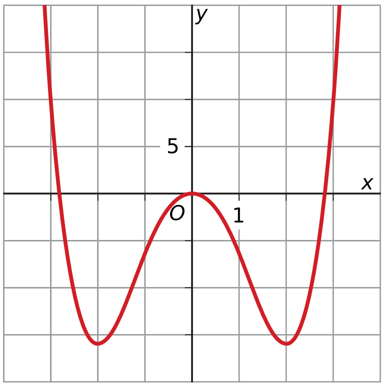
c Druk de extremen van f_a uit in a.

d Voor welke waarde van a is de maximale waarde van f_a gelijk aan 1?

Verwerken

Opgave 8

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 8x^2$.



Figuur 3.9

Bereken met behulp van differentiëren alle extremen van deze functie.

Opgave 9

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4000 - 10x^2$ en $g(x) = (x - 10)\left(x^2 - 400\right)$.

a Om de grafieken van beide functies op de grafische rekenmachine in beeld te krijgen moet je de instellingen aanpassen. Bereken algebraïsch eerst de nulpunten van beide functies.

b Nu weet je welke waarden voor x je het beste kunt instellen. Bereken de extremen van beide functies. Geef je antwoorden zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

c Je kunt nu de grafieken mooi in beeld krijgen. Los op: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 10

De winst W van een bedrijf wordt gegeven door de formule: $W = -0{,}25q^3 + 9q^2 - 33q - 50$.
Hierbij is q de productie in duizenden en W de winst in honderden euro.

Bepaal met behulp van differentiëren bij welke productie de winst maximaal is.
Geef ook de maximale winst.

Opgave 11

Gegeven is voor elke waarde van a de functie $f(x) = x^4 - ax^2$.

a Voor welke waarden van a is het minimum van deze functie gelijk aan -1?

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$ gaat door het punt $(0{,}4)$. Voor welke waarde van a is dit het geval?

Opgave 12

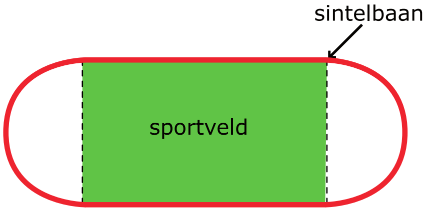
Voor elke positieve waarde van p bestaat er een functie van de vorm $f(x) = x^3 - 6px^2 - 16$.

a Hoeveel extreme waarden hebben deze functies? Licht je antwoord toe.

b Voor welke waarde van p heeft de gegeven functie een extreme waarde van $-16{,}5$? Is het dan een minimum of een maximum?

Toepassen

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. Het sportveld is net zo lang als de rechte stukken. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.



Figuur 3.10

Je kunt een formule opstellen voor de oppervlakte van dit sportveld als functie van de lengte of de breedte ervan of als functie van de straal van de cirkel. Als je dat doet kun je **differentiëren toepassen om extremen te bepalen**.

Opgave 13

Bekijk het probleem van de afmetingen bepalen van het zo groot mogelijke rechthoekige sportveld binnen een atletiekbaan.

a Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.

Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.

b Noem de oppervlakte van het sportveld A, de lengte ervan l en de straal van de cirkel r. Welke formules kun je nu opstellen?

c Stel een formule op voor $A(r)$.

d Voor welke waarde van r is $A(r)$ maximaal? Maak gebruik van differentiëren.
Geef ook de afmetingen van het sportveld. Rond je antwoorden af op één decimaal.

Opgave 14

Een fabrikant verpakt zijn hagelslag al jaren in doosjes met een vierkante bodem van 8 bij 8 cm. Ze hebben de vorm van een balk met een hoogte van 21 cm.
De fabrikant vraag zich af of hij de inhoud van het doosje kan vergroten door de afmetingen anders te kiezen, zonder meer karton te gebruiken. Het gaat erom de inhoud zo groot mogelijk te maken bij een gelijkblijvende oppervlakte. Het grondvlak blijft vierkant. Welke afmetingen moet de fabrikant kiezen?

a Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.

Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.

b Noem de zijde (in cm) van het grondvlak x en de hoogte h.

Welke twee formules kun je opstellen?

c Hoeveel karton heeft de fabrikant nodig voor zijn huidige doosjes?

Verwerk het antwoord in de oppervlakteformule en isoleer h uit de verkregen vergelijking.

d Stel een formule op voor de inhoud van de doosjes als functie van de zijde x.

e Voor welke waarde van x is de inhoud maximaal? Maak gebruik van differentiëren.
Rond je antwoord op drie decimalen.

f Bepaal de afmetingen van de doosjes met een maximale inhoud in millimeter nauwkeurig.

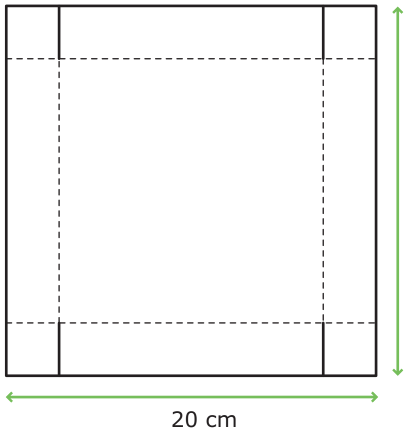
Opgave 15

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

a Stel dat je de zijde van het ingeknipte vierkantje x noemt. Welke functie $I(x)$ kun je dan opstellen voor de inhoud van dit bakje?

b Welke waarden kan x allemaal aannemen?

c Bereken de maximale inhoud van het bakje.



Figuur 3.11

Testen

Opgave 16

Bereken bij deze functies de extremen met behulp van een tekenschema van de afgeleide.

a $f(x) = -x^4 + 2x^3$

b $y = x^2(x - 6)$

Opgave 17

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^5 - 80000x^2 + 2557$.

a Bepaal de extreme waarden van deze functie met behulp van de grafische rekenmachine.

b Bereken de extremen met behulp van differentiëren.

c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = 0$?

Opgave 18

Gegeven de functie $f_a(x) = x^4 - 4ax$.
Deze functies hebben allemaal een minimum.

a Druk de bijbehorende waarde van x uit in a.

b Voor welke waarden van a heeft f_a een minimum van -3?

1.4 Transformaties en afgeleiden

Inleiding

Je hebt gezien, hoe handig differentiëren is bij het berekenen van hellingsgetallen. Alleen kun je dit nog maar op een beperkt aantal functies toepassen. Eigenlijk alleen op functies die bestaan uit machtsfuncties die je bij elkaar optelt (of van elkaar aftrekt).

Je gaat de techniek van het differentiëren uitbreiden naar transformaties van functies.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- het differentiëren van functies van de vorm $f(x)+c$, $f(x+c)$, $c \cdot f(x)$ en $f(cx)$.

Voorkennis

- op een gegeven functie de vier basistransformaties toepassen, het bijpassende functievoorschrift opschrijven en de bijpassende grafiek tekenen;
- aan een gegeven functie herkennen uit welke functie hij door transformatie kan ontstaan en welke transformaties dit dan zijn;
- functies differentiëren met de machtsregel, de constanteregel en de somregel.

Verkennen

Opgave V1

De functies g en zijn afgeleide g' zijn transformaties van de standaardfunctie $f(x) = x^2$ en zijn afgeleide $f'(x) = 2x$.

Bekijk de applet

Maak met de applet of op je grafische rekenmachine de grafieken van de functies g en g' en vergelijk die met de grafiek van $f(x) = x^2$ en zijn hellingsgrafiek $f'(x)$.

- $g_1(x) = (x-4)^2$
- $g_2(x) = x^2 - 3$
- $g_3(x) = 1{,}5 \cdot x^2$
- $g_4(x) = (0{,}5x)^2$
- $g_5(x) = 1{,}5(x-4)^2 - 3$

Leg uit hoe steeds de afgeleide van g ontstaat uit die van f.

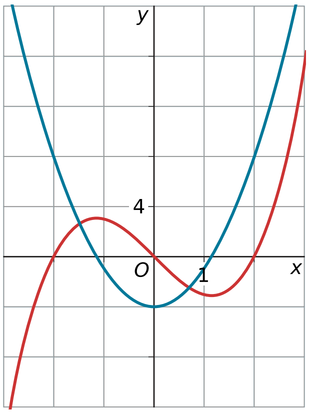
Uitleg

Bekijk de applet.

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 4x$ (rood) samen met de afgeleide $f'(x) = 3x^2 - 4$ (blauw).

Onderzoek wat er met de afgeleide gebeurt als je op de gegeven functie een verschuiving of een vermenigvuldiging toepast. Ga met de grafische rekenmachine de volgende stappen na.

- Als je de grafiek van f met 2 ten opzichte van de x-as transleert, ontstaat de grafiek van $f_1(x) = f(x) + 2$. Omdat de grafiek omhoogschuift, veranderen de x-waarden van de punten niet en de hellingen ook niet. De afgeleide van $f(x) + 2$ is dus dezelfde als die van f.
  Kortweg: als $f_1(x) = f(x) + 2$ dan is $f'_1(x) = f'(x)$.
- Als je de grafiek van f met 2 vermenigvuldigt ten opzichte van de x-as, worden alle functiewaarden 2 keer zo groot en krijg je $f_2(x) = 2 \cdot f(x)$. Alle hellingsgetallen worden ook 2 keer zo groot.
  Kortweg: als $f_2(x) = 2 \cdot f(x)$ dan is $f'_2(x) = 2 \cdot f'(x)$.
- Als je de grafiek van f met -2 ten opzichte van de y-as transleert, ontstaat de grafiek van $f_3(x) = f(x + 2)$. Omdat de grafiek naar links verschuift, veranderen de hellingen niet, maar de punten worden wel 2 naar links geschoven. De afgeleide wordt dus $f'(x + 2)$.
  Kortweg: als $f_3(x) = f(x + 2)$ dan is $f'_3(x) = f'(x + 2)$.
- Als je de grafiek van f met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigt ten opzichte van de y-as, krijg je de grafiek van $f_4(x) = f(2x)$. De hellingswaarden worden niet alleen 2 keer zo groot, maar ze horen bij x-waarden die de helft kleiner zijn.
  Kortweg: als $f_4(x) = f(2x)$ dan is $f'_4(x) = 2 \cdot f'(2x)$.



Figuur 4.2

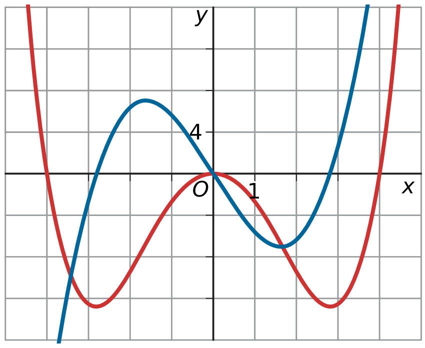
Opgave 1

Voer de transformaties die in de **Uitleg** staan beschreven uit op de grafiek van $f(x) = x^3 - 4x$ en haar afgeleide. Ga na dat je de resultaten vindt die daar zijn aangegeven.

Toon aan dat je op dezelfde resultaten komt wanneer je de functies van f_1, f_2, f_3 en f_4 uitschrijft en vervolgens differentieert.

Opgave 2

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}25x^4 - 4x^2$ samen met de grafiek van de afgeleide.



Figuur 4.3

a Maak de grafieken van f en $g_1(x) = f(x) + 3$ met de grafische rekenmachine.
Welke afgeleide heeft g_1?

A. $g_1'(x) = f'(x)$
B. $g_1'(x) = f'(x) + 3$

b Maak de grafieken van f en $g_2(x) = 3 \cdot f(x)$ met de grafische rekenmachine.
Welke afgeleide heeft g_2?

A. $g_2'(x) = f'(x)$
B. $g_2'(x) = 3 \cdot (f'(x))$

c Maak de grafieken van f en $g_3(x) = f(x+3)$ met de grafische rekenmachine.
Welke afgeleide heeft g_3?

A. $g_3'(x) = f'(x)$
B. $g_3'(x) = f'(x+3)$

d Maak de grafieken van f en $g_4(x) = f(3 \cdot x)$ met de grafische rekenmachine.
Welke afgeleide heeft g_4?

A. $g_4'(x) = f'(3 \cdot x)$
B. $g_4'(x) = 3 \cdot (f'(3 \cdot x))$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Gegeven is de grafiek van een functie f met haar afgeleide f'.

- Pas je op de grafiek een translatie van c eenheden ten opzichte van de x-as toe, dan krijg je de grafiek van $f(x) + c$ met als afgeleide $f'(x)$.
  De afgeleide van $f(x) + c$ is $f'(x)$.
- Pas je op de grafiek een translatie van - c eenheden ten opzichte van de y-as toe, dan krijg je de grafiek van $f(x+c)$ met als afgeleide $f'(x+c)$.
  De afgeleide van $f(x+c)$ is $f'(x+c)$.
- Pas je op de grafiek een vermenigvuldiging met c ten opzichte van de x-as toe, dan krijg je de grafiek van $c \cdot f(x)$ met als afgeleide $c \cdot f'(x)$.
  Dus de afgeleide van $c \cdot f(x)$ is $c \cdot f'(x)$.
- Pas je op de grafiek een vermenigvuldiging met $\frac{1}{c}$ ten opzichte van de y-as toe, dan krijg je de grafiek van $f(c \cdot x)$ met als afgeleide $c \cdot f'(c \cdot x)$.
  De afgeleide van $f(c \cdot x)$ is $c \cdot f'(c \cdot x)$.

Bij het berekenen van hellingswaarden of differentiëren van ingewikkelde functies kunnen deze transformatieregels van pas komen.

Voorbeeld 1

De afgeleide van $f(x) = x^4$ is $f'(x) = 4x^3$.
De afgeleiden van functies die door transformatie uit f ontstaan zijn te herleiden uit de afgeleide van f. Doe dit voor de volgende functies:

- $f_1(x) = x^4 + 2$
- $f_2(x) = 2x^4$
- $f_3(x) = (x+2)^4$
- $f_4(x) = (2x)^4$

Antwoord

- Als $f_1(x) = x^4 + 2$ dan is $f'_1(x) = 4x^3$.
- Als $f_2(x) = 2x^4$ dan is $f'_2(x) = 2 \cdot 4x^3 = 8x^3$.
- Als $f_3(x) = (x+2)^4$ dan is $f'_3(x) = 4(x+2)^3$.
- Als $f_4(x) = (2x)^4$ dan is $f'_4(x) = 2 \cdot 4(2x)^3 = 8 \cdot (2x)^3 = 64x^3$.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.
Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

a $g(x) = (x-7)^4$

b $h(x) = (3x)^4$

c $j(x) = 3(2x)^4 + 1$

d $k(x) = 5 + 2(6-2x)^4$

Voorbeeld 2

De functie $H(t) = 2^t$ heeft voor $t = 1$ een hellingswaarde van $H'(1) \approx 1{,}386$.
Welke hellingswaarde heeft de functie $K(t) = -3 \cdot 2^{0{,}5t} + 10$ voor $t = 2$?

Antwoord

Merk eerst op dat $K(t) = -3 \cdot H(0{,}5t) + 10$. Voor de afgeleide geldt daarom: $K'(t) = 0{,}5 \cdot -3 \cdot H'(0{,}5t)$

Dit geeft: $K'(2) = 0{,}5 \cdot -3 \cdot H'(1) \approx 0{,}5 \cdot -3 \cdot 1{,}386 = -2{,}079$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = 5(x-1)^3 + 4$.

a De grafiek van f is door transformatie te herleiden uit die van $g(x) = x^3$. Welke transformaties moet je dan toepassen?

b Ga na dat $g'(1) = 3$. Bereken met behulp hiervan $f'(2)$.

Opgave 5

De grafiek van de functie $f(x) = 8^x$ maak je door de grafiek van $g(x) = 2^x$ te vermenigvuldigen in de x-richting.

a Laat zien dat $f(x) = g(3x)$.

b De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 0$ is bij benadering $y = 0{,}69x + 1$. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Verwerken

Opgave 6

De volgende functies kunnen ontstaan door transformatie van een bijpassende basisfunctie. Bedenk telkens welke basisfunctie dat is en bepaal de afgeleide.

a $f(x) = 6(2x+3)^4$

b $g(x) = (x+2)^5 - 100$

c $s(t) = (2t+4)^3$

d $h(t) = 1 - 2(6-3t)^4$

Opgave 7

De afgeleide van $f(x) = 2^x$ is $f'(x) \approx 0{,}69 \cdot 2^x$. Van alle functies die kunnen ontstaan door transformatie uit f kun je hiermee de afgeleide bepalen.
Bepaal de afgeleide.

a $g(x) = 2^x - 5$

b $h(x) = 3 \cdot 2^x$

c $j(x) = 2^{x+4}$

d $k(x) = 2^{-3x}$

Opgave 8

Breng de grafiek van de functie $f(x) = 0{,}5(x-2)^3 + 4$ met je grafische rekenmachine in beeld met de standaardinstellingen van het venster.

a De grafiek heeft een symmetriepunt. Welk punt is dat?

b Laat met behulp van de afgeleide zien waarom dit een symmetriepunt is.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn in het nulpunt van de grafiek van f.

Opgave 9

Plot de grafiek van de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$ en de grafiek van de standaardfunctie $g(x) = 2^x$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit die van g?

b De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 1$ is ongeveer $y = 1{,}38x + 0{,}62$. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = -1$.

c Waarom kun je $f'(1)$ niet vinden met behulp van $g'(1)$?

Opgave 10

Gegeven is een functie $f(x)$ met $f'(1) = 2{,}75$.
Bereken $g'(1)$ als $g(x) = f(3x-2)$.

Toepassen

'In de buurt' van een bekend punt met een bekende helling van een grafiek kun je andere **functiewaarden benaderen**. Je gebruikt daarbij de raaklijn aan de grafiek.

Gebruik de definitie van de afgeleide om $f(x+h)$ (de waarde van de functie in de buurt van x) vrij te maken.

Uit $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ volgt $h \cdot f'(x) \approx f(x+h) - f(x)$ en dus

$f(x+h) \approx f(x) + h \cdot f'(x)$.

Dit betekent dat $f(x+h)$ kan worden benaderd vanuit $f(x)$ met behulp van $f'(x)$. Daarvoor zijn alleen een vermenigvuldiging en een optelling nodig. Natuurlijk werkt het alleen voor waarden van h die 'heel dicht' bij 0 liggen.

Neem bijvoorbeeld bij $f(x) = \text{-}x^3 + 4x$.
Nu kun je $f(1{,}001)$ benaderen vanuit $f(1) = 3$ met behulp van $f'(1) = 1$.

Je vindt: $f(1{,}001) \approx f(1) + 0{,}001 \cdot f'(1) = 3 + 0{,}001 \cdot 1 = 3{,}001$.

Vergelijk dit maar eens met de werkelijke functiewaarde $f(1{,}001) \approx 3{,}000996999$.

Opgave 11

Gegeven is de functie in **Toepassen**.

a Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

b Met behulp van dit hellingsgetal kun je de functiewaarden in de buurt van $x = 1$ schatten. Ze zijn ongeveer gelijk aan de y-waarden van de raaklijn aan de grafiek. Benader $f(1{,}003)$.

c Benader op dezelfde wijze $f(0{,}98)$.

Opgave 12

Als in een punt van de grafiek van f geldt $f(2) = 0$ en $f'(2) = \text{-}8$, dan kun je de functiewaarden bij x-waarden die niet veel van 2 verschillen goed benaderen.

a Schat de functiewaarde bij $x = 2{,}003$.

b Waarom heeft het geen zin om op dezelfde manier als bij a de waarde van $f(2{,}5)$ te schatten?

Testen

Opgave 13

Differentieer de volgende functies

a $f(x) = (3x+6)^5 - 20$

b $g(x) = 16 - 2(x-1)^4$

c $K(q) = 200 + (60 + 3q)^3$

Opgave 14

De grafiek van de functie $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 5$ kan door transformatie ontstaan uit die van $f(x) = 3^x$.

a Welke transformaties moet je dan toepassen?

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ heeft de vergelijking $y = 1{,}1x + 1$. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g voor dezelfde waarde van x.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren van getransformeerde functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
LET OP: de uitwerkingen zijn hier nogal omslachtig omdat de ‘kettingregel’ wordt gebruikt, terwijl je in dit onderdeel hebt leren werken met transformaties. Kijk daarom vooral of het eindantwoord overeen komt met jouw oplossing. Als dit niet zo is, ga dan terug naar Voorbeeld 1.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Afgeleide functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- definitie afgeleide — vergelijking raaklijn
- differentieerregels — machtsregel voor gehele positieve n — somregel — constante-regel
- extremen — tekenschema afgeleide
- kettingregel

Activiteitenlijst

- afgeleiden bepalen — vergelijking van een raaklijn opstellen
- afgeleiden bepalen m.b.v. differentieerregels
- extremen berekenen m.b.v. de afgeleide
- afgeleiden berekenen uit transformaties, met name die van $f(ax+b)$ uit die van f

Achtergronden

De differentiaalrekening is min of meer tegelijkertijd en zonder dat ze het van elkaar wisten door twee van de allergrootste geleerden van hun tijd uitgevonden:

- In Engeland bedacht **sir Isaac Newton (1642—1727)** zo rond 1665 zijn ‘fluxierekening’ toen hij zich in die periode bezig hield met beweging, snelheid en versnelling. Hij publiceerde zijn resultaten echter niet.
- In Duitsland schreef **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716)** in 1675 het manuscript waarin hij zijn theorie rond het berekenen van hellingen en van oppervlaktes onder krommen uiteen zette.

Lees ook op deze site: **Grafieken en verandering, differentiaalrekening**.

Testen

Opgave 1

Differentieer de functies.

a $f(x) = 4x^5 - 12x^2 + 60x + 100$

b $E(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}$

c $g(x) = ax^3 + 4x - 3$

d $h(x) = (2x+5)^{10}$

e $f(x) = -2(3{,}5x - 6)^5$

f $P(x) = 12x^2 - (0{,}25x - 4)^3$

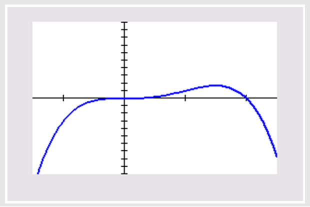
Opgave 2

Bekijk de grafiek van $f(x) = 2x^3 - x^4$ op het interval $[-1,5; 2,5]$.

a De grafiek heeft twee punten waarin de raaklijn horizontaal loopt. Bereken met behulp van differentiëren de x-coördinaten van die twee punten en geef aan of je met een maximum, een minimum of een buigpunt te maken hebt.

b De grafiek van f heeft voor $x = 1$ een raaklijn die de x-as snijdt in punt A. Bereken met behulp van differentiëren de coördinaten van A.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek die loodrecht staat op de raaklijn voor $x = 1$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 5.1

Opgave 3

Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoersmiddel in grotere bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt hun afzet q, in duizendtallen, uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0,1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1,5q^3 - 22,5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

a Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?

b Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q.

c Stel een formule op voor de winst $W = TO - TK$ als functie van de afzet q.

d Bepaal met behulp van differentiëren de prijs van één autoped bij maximale winst.

e Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q.

Bepaal met behulp van differentiëren bij welke afzet GTK minimaal is.

Opgave 4

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \left(x^2 - 4\right)(2x + 1)$ en $g(x) = x^2 - 4$.

a Bepaal algebraïsch de nulpunten en de toppen van de grafiek van f.

b Los op: $f(x) > g(x)$.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = (2x - 1)^3 - 4(2x - 1)$. De grafiek van deze functie kan ontstaan uit die van $g(x) = x^3 - 4x$ door twee transformaties toe te passen.

a Welke twee transformaties zijn dat en in welke volgorde moet je ze toepassen?

b Laat zien hoe je de afgeleide van f kunt herleiden uit die van g.

c Bereken met behulp van de afgeleide de extremen van f in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Gegeven is voor elke reële waarde van p de functie
$f(x) = x^4 - 2px^2$.

Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f twee extremen met een waarde van -4?

Opgave 7

Gegeven is de functie f door $f(x) = x(6 + x)(10 - x)$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten en de toppen van de grafiek van f.

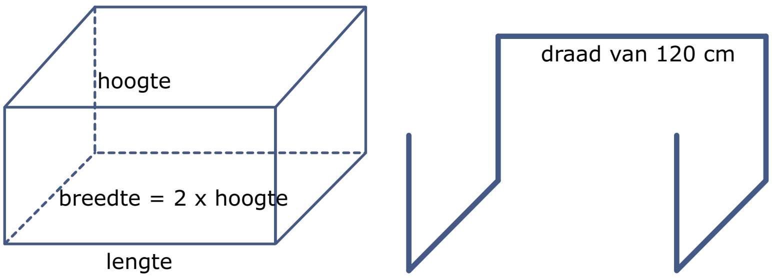
b Voor welke waarden van p heeft de lijn $y = p$ precies drie punten met de grafiek van f gemeen?

c De raaklijn aan de grafiek van f in de oorsprong van het assenstelsel snijdt de grafiek in nog een ander punt. Bereken algebraïsch de coördinaten van dat punt.

Toepassen

Opgave 8: Plastic bakjes

Een bedrijf maakt plastic bakjes: bodem en zijvlakken van deze bakjes zijn rechthoeken; de breedte van de bakjes is tweemaal zo groot als de hoogte. Om de bakjes te verstevigen wordt een gebogen metaaldraad met een lengte van 120 cm aangebracht zoals in de tekeningen is aangegeven.



Figuur 5.2

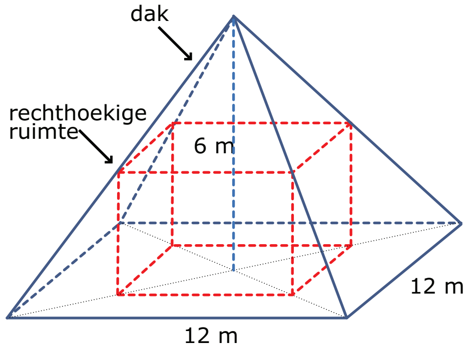
a Bereken de maximale inhoud die deze bakjes kunnen krijgen.

b Als het goed is blijkt bij a dat de lengte van het bakje viermaal zo groot is als de hoogte. Toon aan dat bij elke draadlengte een maximale inhoud ontstaat als de breedte tweemaal de hoogte en de lengte viermaal de hoogte is.

Opgave 9: Piramidedak

Onder een piramidevormig dak wil je een rechthoekige ruimte bouwen met een zo groot mogelijke inhoud. In de figuur zie je hoe dit er uit komt te zien. Het grondvlak van de ruimte is een vierkant.

Welke afmetingen krijgt deze ruimte?

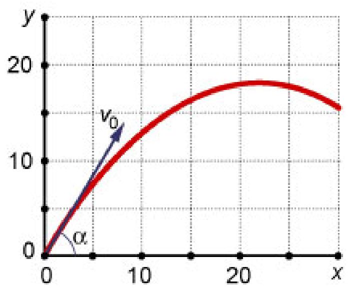


Figuur 5.3

Opgave 10: Kogelbaan

De **kogelbaan** is een model voor de baan die een in vacuüm (om luchtweerstand te kunnen verwaarlozen) onder een bepaalde hoek en met een bepaalde snelheid afgeschoten massapunt aflegt. Noem de beginsnelheid v_0 en de hoek waaronder het massapunt wordt afgeschoten α.

De snelheid in de x-richting is $v_0 \cdot \cos(\alpha)$. De snelheid in de y-richting is $v_0 \cdot \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee. Dus is: $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$. Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9{,}81$ m/s^2. Hiermee maak je een model in Excel: **Model kogelbaan**. Laat zien dat bij de baan de formule $y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x - \frac{g}{2v_0(\cos)^2\alpha} \cdot x^2$ hoort. Kun je de gunstigste afschiethoek α bepalen als je de kogel zo ver mogelijk van het afschietpunt weer op de grond wilt laten komen?



Figuur 5.4

Zie ook deze **simulatie van de kogelbaan**.

a Leid zelf de vergelijking van de baan van deze parabool af.

b Druk het punt waar de kogel weer op de grond komt uit in v_0, α en g.

c Bij welke waarde voor α komt de kogel zo ver mogelijk? Druk de hoogte die de kogel dan haalt uit in v_0 en g.

Examen

Opgave 11: Gespiegelde afgeleide

In deze opgave onderzoeken we een functie f, waarvan de afgeleide functie bestaat voor iedere waarde van x. De functie f wordt door twee verschillende formules bepaald: een formule voor $x \leq 3$ en een formule voor $x \geq 3$. Voor $x = 3$ leveren beide formules dezelfde functiewaarde. De formule voor $x \leq 3$ is gegeven. De formule voor $x \leq 3$ luidt: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$. De formule voor $x \geq 3$ kun je bepalen als je gebruik maakt van het volgende extra gegeven: De grafiek van de afgeleide functie f' is symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn $x = 3$.

a Teken de grafiek van de afgeleide functie f en stel een formule op voor de afgeleide f' voor $x \geq 3$.

b Een formule voor de functie f voor $x \geq 3$ is van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. Bereken a, b en c.

c Bereken de extreme waarden van f.

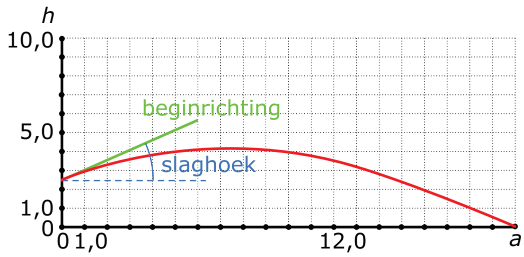
d Teken de grafiek van f voor $-1 \leq x \leq 7$.

(bron: voorbeeldexamen wiskunde B1 havo 2000)

Opgave 12: Tennis

Bij sporten als volleybal en tennis is de service erg belangrijk, dat wil zeggen de manier waarop de bal in het spel gebracht wordt. We bekijken hier de service bij tennis. De speler staat bij het serveren 12 meter van het net. Het net is 1 meter hoog. We nemen aan dat de speler de bal raakt op een hoogte van 2,5 meter boven de grond en ter vereenvoudiging gaan we er van uit dat de speler de bal precies in de lengterichting van het veld slaat. In de eerste figuur zie je een mogelijke baan van de bal.

De hoogte van de onderkant van de bal in meter ten opzichte van de grond noemen we h. De horizontale afstand in meter noemen we a. Het verband tussen h en a hangt af van de snelheid waarmee de bal geslagen wordt en van de beginrichting. Deze beginrichting wordt bepaald door de slaghoek. Dit is de hoek waaronder de bal geslagen wordt. Zie eerste figuur.



Figuur 5.5

a Neem aan dat de bal onder een hoek van 15° geslagen wordt met een snelheid van v m/s. Bij deze hoek geldt bij benadering het volgende verband tussen a en h:

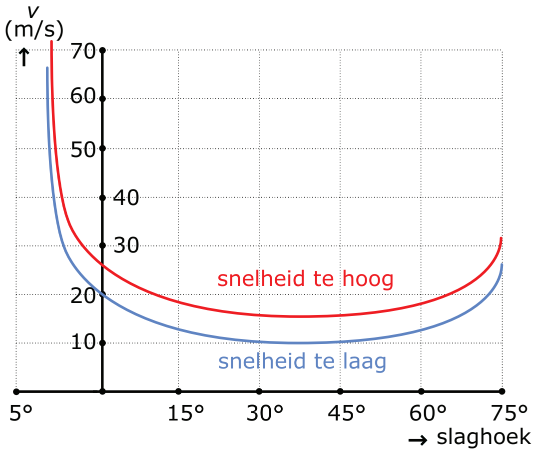
$$5{,}36h = \frac{-5{,}36}{v^2}a^2 + 0{,}27a + 2{,}50$$

Een speler slaat de bal met een snelheid van 17 m/s. Bereken met behulp van differentiëren de grootste hoogte boven de grond die deze bal bereikt.

In deze vereenvoudigde situatie spreken we van een geldige service als:

- de speler die serveert 12 meter van het net staat;
- de bal precies in de lengterichting van het veld geslagen wordt;
- de bal over het net gaat zonder dit te raken;
- de bal neerkomt op een afstand van ten hoogste 7 meter voorbij het net.

In een artikel over dit onderwerp stond deze grafiek. Daarin is weergegeven bij welke combinaties van slaghoek en snelheid een geldige service verkregen wordt. Een speler die de bal slaat onder een hoek van 30° moet volgens deze grafiek de bal slaan met een snelheid van ongeveer 11 tot 13 m/s. Slaat hij te zacht dan komt de bal niet over het net. Slaat hij te hard dan komt de bal te ver voorbij het net op de grond. Een profspeler slaat bij een geldige service de bal met een snelheid van 150 km/h.



Figuur 5.6

b Bepaal met behulp van de grafiek de beginrichting van een mogelijke baan van deze bal.

Neem nu aan dat de bal onder een hoek van 10° geslagen wordt. Bij deze hoek geldt bij benadering de volgende formule voor het verband tussen a en h:

$$5{,}16h = -\frac{5{,}36}{v^2}a^2 + 0{,}18a + 2{,}50$$

Voor een geldige service moet de bal over het net gaan zonder dit te raken. De snelheid is te laag als in bovenstaande formule bij afstand $a = 12$ de hoogte $h \leq 1$ is. Volgens de grafiek is een snelheid van 16 m/s of minder te laag voor een geldige service. Echter, met behulp van een berekening is na te gaan dat de figuur hier erg onnauwkeurig is getekend.

c Welke snelheden (in m/s) zijn volgens de formule te laag voor een geldige service? Geef je antwoord in ten minste één decimaal nauwkeurig.

Voor een geldige service moet de bal bovendien ten hoogste 7 meter voorbij het net de grond raken. Uit deze eis volgt ook een voorwaarde voor v.

d Welke getallen moet je in de bovenstaande formule invullen om deze voorwaarde te krijgen? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A vwo 2000, eerste tijdvak)

Opgave 13: Derdegraads functie

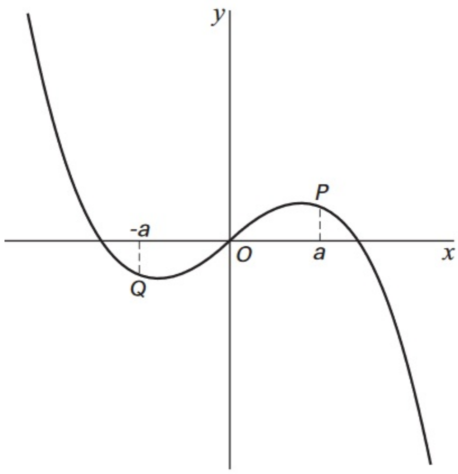
In de figuur is de grafiek getekend van de functie $f(x) = 300x - x^3$. De grafiek van f heeft twee toppen.

a Stel een functievoorschrift van f' op en bereken daarmee de coördinaten van beide toppen.

Op de grafiek van f ligt punt P met x-coördinaat a. Hierbij is a een willekeurig positief getal.
Q is het punt op de grafiek van f met x-coördinaat $-a$.

b Onderzoek met behulp van de afgeleide f' of de raaklijnen aan de grafiek van f in de punten P en Q evenwijdig zijn.

(bron: examen havo wiskunde B in 2003, eerste tijdvak)



Figuur 5.7

2

Logaritmische functies

2.1 Logaritmen

Inleiding

Bij exponentiële verbanden zoals die bij bijvoorbeeld bacteriegroei optreden moet je soms vragen beantwoorden als: “Op welk tijdstip heb je 1000 bacteriën?” Daarbij ontstaan vergelijkingen waarin exponentiële functies voorkomen. Die kun je nog niet algebraïsch oplossen, maar alleen oplossingen zoeken (vaak benaderen) met de grafische rekenmachine. In dit onderwerp leer je hoe je logaritmen kunt gebruiken om dergelijke vergelijkingen wel algebraïsch op te lossen.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip logaritme kennen;
- logaritmen uit het hoofd berekenen waar dat kan;
- logaritmen schatten (ook met de grafische rekenmachine);
- oplossingen van exponentiële vergelijkingen schrijven als logaritmen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, ook met de grafische rekenmachine;
- werken met de begrippen macht, grondtal en exponent.

Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van de hoeveelheid bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren.

Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 1000 bacteriën?

Figuur 1.2

Uitleg

De hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel. Voor een hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje geldt $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uur. Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 120 bacteriën?

Nu moet $6 \cdot 2^t = 120$.
Dit geeft: $2^t = 20$.
Gebruik de grafische rekenmachine. De oplossing is $t \approx 4{,}322$.
Dit antwoord is afgerond.
De exacte oplossing schrijf je als: $t = {}^2\log(20)$.
Dit noem je de 2-logaritme van 20. Let goed op wanneer je logaritmen gebruikt:

De exacte oplossing van de vergelijking $x^2 = 7$ is: $x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$.

De exacte oplossing van de vergelijking $2^x = 7$ is: $x = {}^2\log(7)$.

Een vergelijking van de vorm $g^x = a$ heeft één oplossing: $x = {}^g\log(a)$ waarin a positief is.

Opgave 1

Los op: $2^t = 30$.

a Bepaal de oplossing van deze vergelijking. Rond af op vier decimalen.

b Schrijf de oplossing als logaritme.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

De exacte oplossing voor x van de exponentiële vergelijking $y = g^x$ heet **logaritme**.

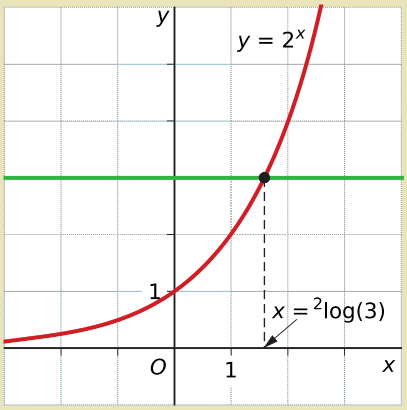
Notatie: $x = {}^g\log(y)$

Uitspraak: de logaritme van y voor grondtal g of korter: de g log van y.

$g^x = y$ betekent $x = {}^g\log(y)$ en omgekeerd.

Exponent en logaritme zijn elkaars omgekeerde of **inverse bewerking**.

Als $y > 0$, heeft de vergelijking één oplossing, omdat exponentiële functies altijd stijgend (grondtal groter dan 1) of altijd dalend zijn (grondtal tussen 0 en 1). Als $y \leq 0$, dan zijn er geen oplossingen voor de vergelijking $x = {}^g\log(y)$.



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

Luchtschepen zijn gevuld met gas met een lage soortelijke massa. Dat gas staat onder druk en er lekt een klein deel van weg.
Een luchtschip met een inhoud van 3000 m^3 verliest elke tien dagen ongeveer 2% van het gas. Als er minder dan 2400 m^3 over is, kan het luchtschip niet meer vliegen. Hoeveel dagen kan het luchtschip vliegen als het geheel is gevuld met gas? Geef je antwoord exact met een logaritme, en als een benadering afgerond op twee decimalen.

Figuur 1.4

Antwoord

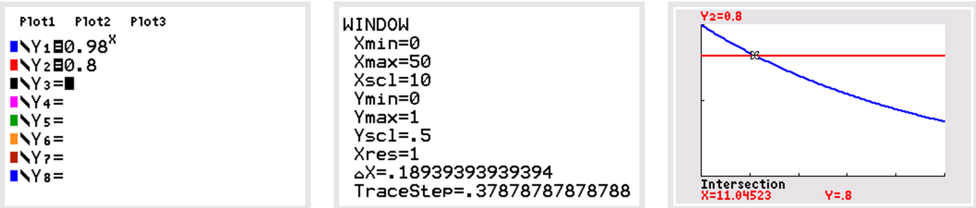
De hoeveelheid gas in het luchtschip is $G(t) = 3000 \cdot 0{,}98^t$ met G in m^3 en t in eenheden van tien dagen.

Los op: $3000 \cdot 0{,}98^t < 2400$

Stappenplan voor het oplossen van $3000 \cdot 0{,}98^t = 2400$:

$$\begin{aligned} 3000 \cdot 0{,}98^t &= 2400 \\ 0{,}98^t &= 0{,}8 \\ t &= {}^{0{,}98}\log(0{,}8) \approx 11{,}05 \end{aligned}$$

Gebruik hierbij de optie intersect van de grafische rekenmachine.



Figuur 1.5

Het luchtschip kan 110 dagen vliegen zonder bijvullen. Op dag 111 kan het luchtschip niet meer vliegen.

Opgave 2

Uit een luchtschip met een inhoud van 3000 m^3 vervliegt per tien dagen 4% van het gas.
Na hoeveel dagen is de inhoud van het luchtschip verminderd tot 2800 m^3.

a Stel de vergelijking voor dit probleem op en vereenvoudig deze zo ver mogelijk.

b Geef de oplossing van de vergelijking als logaritme. Geef ook een benadering afgerond op twee decimalen.

Voorbeeld 2

Soms kun je zonder rekenmachine de waarde van een logaritme bepalen:

- ${}^{2}\log(16) = 4$ want $2^4 = 16$
- ${}^{3}\log\left(\frac{1}{9}\right) = -2$ want $3^{-2} = \frac{1}{9}$
- ${}^{10}\log(10000) = 4$ want $10^4 = 10000$
- ${}^{10}\log(0{,}001) = -3$ want $10^{-3} = 0{,}001$
- ${}^{\frac{1}{2}}\log(8) = -3$ want $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
- ${}^{3}\log\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right) = {}^{3}\log\left(3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = {}^{3}\log\left(3^{-1\frac{1}{2}}\right) = -1\frac{1}{2}$

Opgave 3

Bereken de logaritmen zonder grafische rekenmachine.

a ${}^{5}\log(125)$

b ${}^{5}\log\left(\frac{1}{25}\right)$

c ${}^{4}\log(64)$

d ${}^{\frac{1}{4}}\log(64)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right)$

f ${}^{2}\log\left(\sqrt{2}\right)$

Opgave 4

Geef de oplossingen van de vergelijkingen als logaritme. Bereken de waarde van de logaritmen. Rond indien nodig af op drie decimalen.

a $3^x = 7$

b $3^x = 27$

c $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 16$

d $\left(\frac{1}{11}\right)^x = 0{,}03$

Voorbeeld 3

Schat de grootte van een logaritme met behulp van machten van het grondtal:

- ${}^{2}\log(40)$ is een getal tussen 5 en 6, want $2^5 = 32$ en $2^6 = 64$.
- ${}^{10}\log(400)$ is een getal tussen 2 en 3, want $10^2 = 100$ en $10^3 = 1000$.
- ${}^{10}\log(0{,}05)$ is een getal tussen -2 en -1, want $10^{-2} = 0{,}01$ en $10^{-1} = 0{,}1$.
- ${}^{0{,}5}\log(20)$ is een getal tussen -5 en -4, want $0{,}5^{-5} = 32$ en $0{,}5^{-4} = 16$.

Opgave 5

Geef zonder rekenmachine te gebruiken van de logaritmen aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen ze liggen.

a ${}^{2}\log(9)$

b ${}^{3}\log(20)$

c ${}^{5}\log(150)$

d ${}^{10}\log(758)$

e ${}^{0{,}5}\log(60)$

f ${}^{2}\log\left(\frac{1}{7}\right)$

Opgave 6

Bereken de logaritmen tot op één decimaal nauwkeurig.

a ${}^{2}\log(9)$

b ${}^{3}\log(20)$

c ${}^{5}\log(150)$

d ${}^{10}\log(758)$

e ${}^{0{,}5}\log(60)$

f ${}^{2}\log\left(\frac{1}{7}\right)$

Opgave 7

Geef de oplossingen van de vergelijkingen als logaritme. Bereken ook de waarde van de logaritmen. Rond indien nodig af op één decimaal.

a $5 \cdot 3^x = 3000$

b $572 \cdot 0{,}6^t = 30$

Verwerken

Opgave 8

Een aantal van deze logaritmen zijn zonder rekenmachine te berekenen, omdat er gehele getallen uit komen. Bereken deze logaritmen. Benader de overige logaritmen met de rekenmachine tot op één decimaal.

a ${}^{4}\log(64)$

b ${}^{4}\log(400)$

c ${}^{\frac{1}{3}}\log(60)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(81)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right)$

f ${}^{0{,}1}\log(1000000)$

Opgave 9

Geef een benadering van de logaritmen in drie decimalen.

a ${}^{2{,}5}\log(100)$

b ${}^{0{,}7}\log(20)$

c ${}^{2{,}3}\log(0{,}05)$

d ${}^{15{,}2}\log(2{,}3)$

Opgave 10

Geef zonder een rekenmachine te gebruiken van de logaritmen aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen de waarde ligt.

a ${}^{6}\log(30)$

b ${}^{3}\log(70)$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(10)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(0{,}01)$

Opgave 11

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme. Geef daarna indien nodig een benadering in één decimaal.

a $10 \cdot 10^x = 0{,}1$

b $0{,}5 \cdot 2^x = 30$

c $54 \cdot 0{,}8^t = 27$

Opgave 12

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Bereken in minuten nauwkeurig hoelang het duurt voordat de kolonie zich heeft verdrievoudigd. Maak bij de berekening gebruik van een logaritme.

Opgave 13

Een kolonie bacteriën neemt per dag met 20% toe.

a Bepaal de groeifactor.

b Een bioloog wil weten na hoeveel dagen het aantal bacteriën is verdubbeld. Stel de vergelijking voor dit probleem op en vereenvoudig deze vergelijking zo ver mogelijk.

c Schrijf de oplossing van de vergelijking als een logaritme.

d Het antwoord bij c is de exacte notatie van de oplossing. Bereken met behulp van de grafische rekenmachine na hoeveel dagen dit ongeveer is.

Toepassen

Opgave 14: De waarde van een auto

De waarde van een auto neemt exponentieel af. Bij een bepaald merk auto was de afname in de eerste twee jaar € 4750,00. Bij aanschaf kostte de auto € 30000,00.

a Hoeveel is de groeifactor per jaar? Rond af op drie decimalen.

b Het verband tussen de waarde W in euro en het aantal jaren j na aanschaf heeft de vorm $W = a \cdot g^j$. Van welke variabelen in deze formule ken je de waarde?

c Hoeveel is de auto vijf jaar na de aanschaf nog waard?

d Bereken hoeveel jaar na de aanschaf de auto voor het eerst minder dan € 10000,00 waard is. Schrijf je antwoord als een logaritme en rond daarna af op gehele jaren.

Opgave 15: Geld op de bank

Iemand zet op 1 januari 2014 een kapitaal van € 10000,00 op de bank tegen een vaste rente van 3% per jaar. In welke maand van welk jaar is dit kapitaal uitgegroeid tot € 15000,00 als hij er niets afhaalt of bijstort?

a Welke formule kun je opstellen om het kapitaal te berekenen bij het aantal jaren nadat die persoon het geld op de bank heeft gezet?

b Welke vergelijking moet je oplossen om antwoord op de vraag te kunnen geven?

c Bereken het antwoord door gebruik te maken van een logaritme. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Testen

Opgave 16

Bereken de volgende logaritmen exact zonder je rekenmachine te gebruiken.

a ${}^{2}\log\left(\sqrt{32}\right)$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(27)$

Opgave 17

Geef bij de volgende logaritmen eerst aan tussen welke opeenvolgende gehele getallen ze liggen. Geef daarna een benadering in drie decimalen.

a ${}^{2}\log(513)$

b ${}^{0,4}\log(25)$

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing als logaritme en geef daarna een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $6 \cdot 4^{x} = 35$

b $1050 \cdot 1{,}08^{t} = 1800$

Opgave 19

In een tank zit 150 liter verontreinigde vloeistof. Deze vloeistof wordt verwijderd door spoelen met water. Hierdoor verdwijnt elke minuut 15% van de vloeistof. Men wil stoppen met spoelen als er minder dan 10 liter verontreinigde vloeistof over is.

Bereken hoe lang men moet spoelen. Schrijf het antwoord als logaritme en geef een benadering van deze logaritme.

2.2 Eigenschappen

Inleiding

Je hebt nu wel het begrip logaritme leren kennen als oplossing van een exponentiële vergelijking, maar nog geen methode gezien om willekeurige logaritmen rechtstreeks te bepalen (benaderen) met de rekenmachine. Er zit wel een functie [LOG] op, maar daarmee kun je nog niet op alle rekenmachines voor elk willekeurig grondtal de logaritme van een getal vinden. Je hebt de eigenschappen van logaritmen nodig. Die ga je nu nader bekijken.

Je leert in dit onderwerp

- eigenschappen van logaritmen gebruiken;
- logaritmen benaderen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- werken met het begrip logaritme;
- logaritmen bepalen vanuit exponentiële vergelijkingen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet dat $g^x = y$ gelijkwaardig is met $x = {}^g\log(y)$. Dat levert alvast twee eigenschappen van logaritmen op.

a Hoe volgt hier uit dat ${}^g\log(g^x) = x$?

b Welke andere eigenschap volgt hier rechtstreeks uit?

c Klopt de bewering ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a + b)$?

Uitleg 1

Voor het saldo S op een spaarrekening t jaar na een eenmalige storting van € 4000,00 en een jaarlijkse rente van 2% geldt: $S(t) = 4000 \cdot 1{,}02^t$.
Hieruit volgt dat de tijd die nodig is om het saldo te laten verdubbelen wordt gegeven door: $1{,}02^t = 2$.

De verdubbelingstijd is ${}^{1{,}02}\log(2) \approx 35{,}0$ jaar.
De verdrievoudigingstijd is ${}^{1{,}02}\log(3) \approx 55{,}5$ jaar.
De verzesvoudigingstijd is ${}^{1{,}02}\log(6) \approx 90{,}5$ jaar.
De verzesvoudigingstijd vind je ook door de verdubbelingstijd en de verdrievoudigingstijd op te tellen. Er geldt: ${}^{1{,}02}\log(2) + {}^{1{,}02}\log(3) = {}^{1{,}02}\log(6)$.
Ofwel: ${}^{1{,}02}\log(2) + {}^{1{,}02}\log(3) = {}^{1{,}02}\log(2 \cdot 3)$.
Als je twee logaritmen optelt, moet je de getallen waarop ze werken vermenigvuldigen.

De verachtvoudigingstijd van het saldo is ${}^{1,02}\log(8)$. Die verachtvoudigingstijd vind je ook door drie keer de verdubbelingstijd te nemen.
$3 \cdot {}^{1,02}\log(2) \approx 105{,}0$
${}^{1,02}\log(8) \approx 105{,}0$
Er geldt: $3 \cdot {}^{1,02}\log(2) = {}^{1,02}\log\left(2^3\right)$.
Als je een logaritme met een getal vermenigvuldigt, wordt dit getal de exponent van het getal waarop de logaritme werkt.

Opgave 1

Piet heeft een geldbedrag van € 4000,00 op de bank. De rente is 1% per jaar.

a Hoelang duurt het voor het saldo twee keer zo groot is? Geef het antwoord als logaritme. Bereken deze logaritme in één decimaal.

b Hoelang duurt het voor het saldo drie keer zo groot is? Geef het antwoord als logaritme. Bereken deze logaritme in één decimaal.

c Hoelang duurt het voor het saldo zes keer zo groot is? Geef het antwoord als logaritme. Bereken deze logaritme in één decimaal.

d Trek het antwoord op b af van het antwoord op c, dan volgt het antwoord op a. Controleer dit en geef een verklaring.

e Schrijf de eigenschap van logaritmen op die volgt uit het antwoord bij d.

Opgave 2

Bij exponentiële afname komt het begrip halveringstijd voor.

a Geef een omschrijving van het begrip halveringstijd. Gebruik een logaritme.

b In een bepaalde situatie neemt de hoeveelheid jaarlijks met 7% af. Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.

c De radioactieve stof strontium heeft een halveringstijd van 28 jaar. Bereken in drie decimalen de groeifactor per jaar.

Uitleg 2

Het kost veel tijd om ${}^{2}\log(100)$ te berekenen door $2^x = 100$ op te lossen met de grafische rekenmachine. Het kan ook anders. De rekenmachine kent een knop logaritme, die werkt met grondtal 10.

$x = {}^{2}\log(100)$ is de oplossing van de vergelijking $2^x = 100$.
Neem aan beide zijden van de vergelijking de ${}^{10}\log$:

$$\begin{aligned} {}^{10}\log(2^x) &= {}^{10}\log(100) \\ x \cdot {}^{10}\log(2) &= {}^{10}\log(100) \\ x &= \frac{{}^{10}\log(100)}{{}^{10}\log(2)} \end{aligned}$$

Dit werkt ook voor andere grondtallen dan 2 en 10.
Bereken met de grafische rekenmachine ${}^{2}\log(100)$ met de knop logaritme. Deze knop werkt automatisch met grondtal 10:

${}^{2}\log(100) = \frac{\log(100)}{\log(2)} \approx 6{,}64$

De meeste grafische rekenmachines hebben ook de mogelijkheid om het grondtal van de logaritme direct in te voeren. Vaak wordt dan wel de Amerikaanse notatie $\log_g(x)$ gebruikt. Daarin krijgt het grondtal een andere plaats.

Opgave 3

a In **Uitleg 2** zie je dat ${}^{10}\log(2^x) = {}^{10}\log(100)$ volgt: $x = \frac{{}^{10}\log(100)}{{}^{10}\log(2)}$

Bereken op dezelfde manier ${}^{3}\log(300)$.

b Bereken $\log(100)$ op de grafische rekenmachine.
Wat is het grondtal van de knop logaritme?

Opgave 4

Bereken. Rond je antwoord af op twee decimalen.

a ${}^{4}\log(15)$

b ${}^{15}\log(4)$

c ${}^{3}\log(-9)$

d ${}^{0,2}\log(5)$

e ${}^{0,2}\log(0,1)$

f ${}^{6}\log(1)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een definitie van **logaritme** is:

$x = {}^{g}\log(y)$ is de oplossing van $g^x = y$.

Uit de definitie van logaritme volgt dat g^x en ${}^{g}\log(x)$ elkaars terugrekenfunctie zijn. Er geldt dan ook:

${}^{g}\log(g^x) = x$ en $g^{{}^{g}\log(y)} = y$

Logaritmen hebben **eigenschappen** of **rekenregels**.

- ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$
- ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$
- ${}^{g}\log(a) = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$

${}^{g}\log(a)$ kan berekend worden met de rekenmachine. Soms wordt er op de rekenmachine een andere notatie gehanteerd, waarbij het grondtal rechts onder de log staat: $\log_g(a)$.

Het grondtal 10 laat je vaak weg: ${}^{10}\log(a) = \log(a)$.

Let op! Controleer of, en zorg dat bij gebruik van de logaritme ${}^{g}\log(y)$ geldt:

$0 < g < 1$ of $g > 1$ en $y > 0$.

Voorbeeld 1

Door de eigenschappen van logaritmen kun je ermee rekenen en uitdrukkingen herleiden. Bijvoorbeeld:

- ${}^{6}\log(24) + 2 \cdot {}^{6}\log(3) = {}^{6}\log(24) + {}^{6}\log\left(3^{2}\right) =$
  ${}^{6}\log(24 \cdot 9) = {}^{6}\log(216) = 3$
- ${}^{2}\log(12) + {}^{0,5}\log(12) = {}^{2}\log(12) + \frac{{}^{2}\log(12)}{{}^{2}\log(0,5)} =$
  ${}^{2}\log(12) - {}^{2}\log(12) = 0$
  want ${}^{2}\log(0,5) = {}^{2}\log\left(2^{-1}\right) = -1$
- ${}^{2}\log(7) \cdot {}^{7}\log(8) = \frac{\log(7)}{\log(2)} \cdot \frac{\log(8)}{\log(7)} = \frac{\log(8)}{\log(2)} = {}^{2}\log(8) = 3$
- $2^{{}^{2}\log(7)} = 7$
- ${}^{5}\log(7) + {}^{3}\log(9) = {}^{5}\log(7) + 2 = {}^{5}\log(7) + {}^{5}\log(25) = {}^{5}\log(175)$

Opgave 5

Bereken de logaritmen en controleer of de uitdrukkingen waar zijn.

a ${}^{2}\log(16) + {}^{2}\log(8) = {}^{2}\log(128)$

b ${}^{2}\log(16) - 3 \cdot {}^{2}\log(2) = {}^{2}\log(2)$

c ${}^{3}\log(3) + {}^{3}\log(9) = {}^{3}\log(81)$

Opgave 6

Bereken met behulp van de eigenschappen van logaritmen.

a ${}^{2}\log(72) - 2 \cdot {}^{2}\log(3)$

b ${}^{2}\log(80) + {}^{0,5}\log(5)$

Schrijf als één logaritme.

c ${}^{2}\log(7) + {}^{3}\log(81)$

d $0,5 \cdot {}^{2}\log(36) - 1$

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $2^{t} = 20000$ op met behulp van de knop logaritme van de grafische rekenmachine. Rond af op één decimaal.

Antwoord

$2^{t} = 20000$ heeft als oplossing $t = {}^{2}\log(20000)$.

Met de grafische rekenmachine kun je op twee manieren het antwoord bepalen:

- $t = \frac{\log(20000)}{\log(2)} \approx 14,3$
- $t = {}^{2}\log(20000) \approx 14,3$
  (Als de rekenmachine beschikt over een optie waarin je ook het grondtal van de logaritme kunt invoeren.)

Opgave 7

Los de vergelijkingen op de volgende manieren op:

1. Benader x door het in te voeren op de grafische rekenmachine en de grafieken af te lezen.
2. Geef x exact met een logaritme, en geef aan hoe je dit logaritme in zou voeren op de grafische rekenmachine.

a $3^x = 8100$

b $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 0{,}002$

Voorbeeld 3

Los de vergelijking ${}^{2}\log(x) = 3$ algebraïsch op.

Antwoord

Gebruik de regel dat de logaritme de inverse bewerking is van een exponentiële functie met hetzelfde grondtal. Neem aan beide zijden de exponentiële functie met grondtal 2. Dit geeft:

$2^{{}^{2}\log(x)} = 2^3$

En omdat $2^{{}^{2}\log(x)} = x$ volgt: $x = 2^3 = 8$.

Opgave 8

Los algebraïsch op.

a ${}^{5}\log(x) = 2$

b ${}^{4}\log(2x) = 0$

c ${}^{\frac{1}{4}}\log\left(x^2\right) = -4$

d ${}^{2}\log(\sqrt{x}) = 5$

Voorbeeld 4

Los de vergelijking $\log(x) + \log(2x) = 3$ algebraïsch op.

Antwoord

$$\begin{aligned}
\log(x) + \log(2x) &= 3 \\
\log\left(2x^2\right) &= 3 \cdot \log(10) \\
\log\left(2x^2\right) &= \log(1000) \\
2x^2 &= 1000 \\
x &= -\sqrt{500} \vee x = \sqrt{500}
\end{aligned}$$

Omdat je geen logaritme uit een negatief getal kunt trekken, is er maar één oplossing mogelijk: $x = \sqrt{500}$.

Opgave 9

Los algebraïsch op.

a $\log(5x) + \log(x) = 1$

b $2 \cdot \log(x) - \log(2x) = 2$

Verwerken

Opgave 10

Bereken.

a ${}^{10}\log(5) + {}^{10}\log(20)$

b ${}^{5}\log(100) - {}^{5}\log(4)$

c $2 \cdot {}^{6}\log(3) + {}^{6}\log(4)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(45) - {}^{\frac{1}{3}}\log(5)$

Opgave 11

Ga na welke logaritmen eenvoudig zonder grafische rekenmachine te berekenen zijn. Geef van die opgaven het exacte antwoord. Bereken van de overige opgaven het antwoord tot op drie decimalen.

a ${}^{5}\log(625)$

b ${}^{2}\log(100)$

c ${}^{7}\log\left(\sqrt{7}\right)$

d $\log(40) + \log(25)$

e $\log(40) - \log(12)$

f ${}^{\frac{1}{3}}\log(0{,}0003)$

Opgave 12

Een radioactieve stof vervalt volgens deze formule:
$N(t) = N(0) \cdot 0{,}93^t$
N is de hoeveelheid in milligram en t de tijd in jaar.

a Bereken de halveringstijd. Rond af op twee decimalen.

b Een laboratorium heeft 400 gram van deze stof. Bereken met behulp van de halveringstijd hoelang het duurt voordat deze hoeveelheid minder is geworden dan 50 gram. Rond af op één decimaal.

c Bereken tot op een maand nauwkeurig hoelang het duurt voordat 50 gram van deze stof minder is geworden dan 10 gram.

Opgave 13

Het radioactieve calcium-45 heeft een halveringstijd van 165 dagen.

a Na hoeveel tijd is er van een willekeurige beginhoeveelheid calcium-45 nog $\frac{1}{4}$ deel over?

b Na hoeveel tijd is er van een willekeurige beginhoeveelheid calcium-45 nog $\frac{1}{8}$ deel over?

c In een laboratorium is 100 gram calcium-45 aanwezig. Schat met behulp van de antwoorden bij a en b hoelang het duurt tot deze hoeveelheid minder is geworden dan 15 gram.

d Bereken tot op een dag nauwkeurig hoelang het duurt voordat de beginhoeveelheid van 100 gram is afgenomen tot 15 gram.

Opgave 14

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op één decimaal.

a $10 \cdot 5^x = 0{,}16$

b $8 \cdot 3^x = 0{,}056$

c ${}^{3}\log\left(x^2\right) = 3$

d ${}^{4}\log(x+1) = 3$

Opgave 15

Een hoeveelheid groeit exponentieel met groeipercentage p procent.

Toon aan dat de verdubbelingstijd T wordt gegeven door:

$T = \frac{\log(2)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$.

Toepassen

Opgave 16: Logaritmentabel

Wanneer de uitkomst van een logaritme geen geheel getal is, wordt de waarde vaak berekend met behulp van de grafische rekenmachine. Vijftig jaar geleden waren er nauwelijks grafische rekenmachines. In die tijd gebruikten scholieren op de middelbare scholen tabellenboekjes om de waarde van een logaritme te bepalen.

In de tabel staat een stukje uit zo'n tabellenboekje met (afgeronde) waarden van logaritmen.

Met behulp van de tabel en de rekenregels voor logaritmen is het mogelijk om logaritmische of exponentiële vergelijkingen op te lossen. Hierbij kun je een benadering van het antwoord vinden, zonder de knop logaritme van de grafische rekenmachine te gebruiken.

n	$\log(n)$
1	0
2	0,3010
3	0,4771
4	0,6021
5	0,6990
6	0,7782
7	0,8451
8	0,9031
9	0,9542
10	1
100	2
1000	3

Tabel 2.1

a Bereken $\log(24)$ op algebraïsche wijze met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de knop logaritme op de grafische rekenmachine. Rond af op drie decimalen.

b Gegeven is de vergelijking $7^x = 2$. Los deze vergelijking op algebraïsche wijze op met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de knop logaritme op de grafische rekenmachine. Rond af op drie decimalen.

c Gegeven is de vergelijking $7^x = 25$. Los deze vergelijking op algebraïsche wijze op met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de knop logaritme op de grafische rekenmachine. Rond af op drie decimalen.

(bron: examen havo wiskunde B in 2011, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 17

Iemand koopt een huis voor € 200000 en verwacht dat de waarde van het huis per jaar 10% zal stijgen.

a Hoe lang duurt het voordat het huis € 300000 waard is? Schrijf het antwoord als logaritme en bereken die logaritme tot op de maand nauwkeurig.

b Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis twee keer zo groot is geworden?

c Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis drie keer zo groot is geworden?

d Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis zes keer zo groot is geworden? Laat zien hoe je dit kunt berekenen met behulp van de antwoorden bij b en c.

e Hoe kun je het antwoord van vraag d in één keer berekenen?

Opgave 18

Bij radioactieve stoffen wordt in plaats van het woord halveringstijd vaak het woord halfwaardetijd gebruikt. In een laboratorium bevindt zich 800 g van het radioactieve natrium-24. Deze stof heeft een halfwaardetijd van 15 uur.

a Laat zien hoe lang het duurt tot er nog maar 100 g van het natrium-24 over is.

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

c Bereken tot op een kwartier nauwkeurig hoe lang het duurt tot er van de 800 g natrium-24 nog maar 160 g over is.

Opgave 19

Een suikerpatiënt moet zich een injectie met insuline toedienen op het moment dat er nog maar een derde deel van de vorige injectie insuline in zijn bloed zit. De hoeveelheid insuline in het bloed neemt per uur met 8% af.

Hoeveel tijd zit er tussen twee opeenvolgende injecties? Schrijf de oplossing als logaritme en geef een benadering in uren nauwkeurig.

Opgave 20

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op drie decimalen.

a $600 \cdot 0{,}5^t = 20$

b ${}^5\log(1-x) = 2$

c ${}^2\log\left(4x^2\right) = 5$

Inleiding

Logaritmen ontstaan als inverse bewerking van exponentiële functies. Ook met logaritmen kun je functievoorschriften maken. Het prototype is de functie $f(x) = {}^{g}\log(x)$. Alle functies die hieruit door de bekende transformaties kunnen ontstaan noem je logaritmische functies. En die ga je nu bekijken...

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische functies te werken;
- de karakteristieken van logaritmische functies te bepalen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies;
- transformaties van functies toepassen;
- werken met logaritmen.

Verkennen

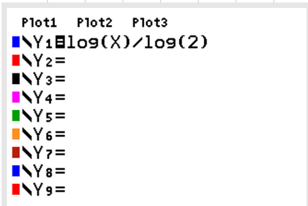
Opgave V1

Op je grafische rekenmachine kun je de grafiek van $f(x) = {}^{2}\log(x)$ in beeld brengen. Je voert dan in: $y_1 = \frac{\log(x)}{\log(2)}$ of $y_1 = \log_2(x)$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van f?

b Breng de grafiek in beeld. Welk domein en welk bereik heeft de functie?

c Bekijk de tabel. Bij welke waarden van x krijg je gehele functiewaarden?



Figuur 3.1

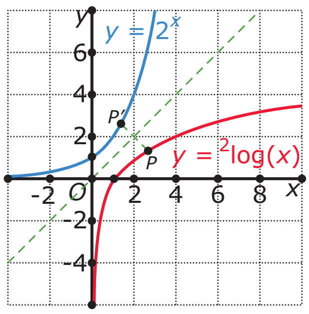
Uitleg

Bekijk de applet: logaritmische functies

Bekijk hoe de grafiek van de functie $y_1 = 2^x$ samenhangt met die van $y_2 = {}^{2}\log(x)$.

Er geldt: als je y_1 weet, kun je x berekenen.
Invullen van bijvoorbeeld $y_1 = 8$ geeft: $8 = 2^x$.
De oplossing daarvan is: $x = {}^{2}\log(8) = 3$.
Hieruit volgt dat je x kunt berekenen uit y_1 met: $x = {}^{2}\log(y_1)$.

Vergelijk dit met $y_2 = {}^{2}\log(x)$: het enige verschil is dat y en x zijn verwisseld. De grafiek van $y_2 = {}^{2}\log(x)$ is de grafiek van $y_1 = 2^x$, maar dan gespiegeld in de lijn $y = x$.



Figuur 3.2

De karakteristieken van een logaritmische functie zijn daarom af te leiden uit die van een exponentiële functie (met hetzelfde grondtal) door x en y te verwisselen. Beide functies $y = g^x$ en $y = {}^{g}\log(x)$ zijn elkaars inverse functie.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** het verband tussen de grafieken van $y_1 = 2^x$ en $y_2 = {}^2\log(x)$.

a Plot beide grafieken.

b Het punt $(4,2)$ ligt op de grafiek van y_2. Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

c Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en geef voor beide punten het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1.

d Welke verband bestaat er tussen het bereik van y_1 en het domein van y_2?

`

Opgave 2

Plot de grafieken van $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

De eigenschappen van y_2 kun je afleiden uit die van y_1.

a Geef het domein, het bereik en de asymptoot van de functie y_2.

b Voor welke waarde van x is $y_2 = 2$?

c Voor welke waarden van x geldt $y_2 > 2$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: logaritmische functies

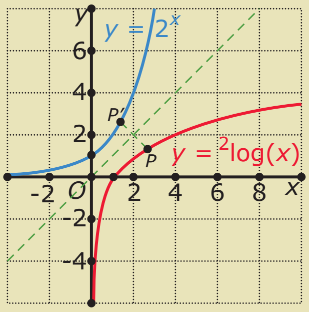
Een functie van de vorm $f(x) = {}^g\log(x)$ heet een **logaritmische functie**.

g is het grondtal. Er moet gelden: $g > 0$ en $g \neq 1$

De grafieken van de functies $y = g^x$ en $y = {}^g\log(x)$ zijn elkaars **inverse functie** en dus elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
De karakteristieken van $y = {}^g\log(x)$ zijn af te leiden uit die van $y = g^x$:

- het domein is $\langle 0, \rightarrow\rangle$;
- het bereik is $\mathbb{R}$;
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend;
- de y-as is de verticale asymptoot van de grafiek.

Alle functies die door transformatie uit $y = {}^g\log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.



Figuur 3.3

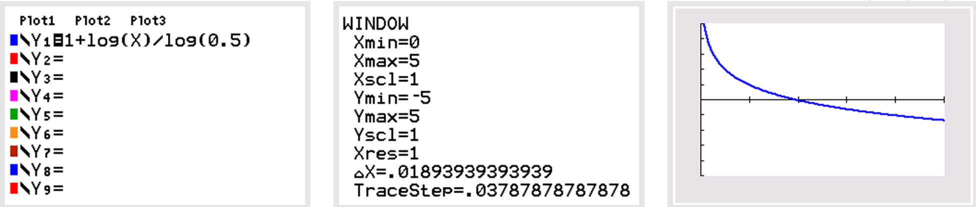
Voorbeeld 1

Bepaal de karakteristieken van de logaritmische functie $f(x) = 1 + {}^{0,5}\log(x)$ en bereken het nulpunt van f. Leg uit waarom deze functie dezelfde grafiek heeft als $g(x) = 1 - {}^{2}\log(x)$.

Antwoord

De grafiek van f kan uit de grafiek van $y = {}^{0,5}\log(x)$ ontstaan door deze 1 eenheid ten opzichte van de x-as te verschuiven.
Omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt, is de grafiek dalend.

- $x > 0$ en hieruit volgt $\text{D}_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $\text{B}_f = \mathbb{R}$.
- De verticale asymptoot is $x = 0$, de grens van het domein.



Figuur 3.4

Bereken het nulpunt.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ {}^{0,5}\log(x) &= -1 \\ x &= (0,5)^{-1} = 2 \end{aligned}$$

Deze functie f is dezelfde als functie g omdat:

$${}^{0,5}\log(x) = \frac{{}^{2}\log(x)}{{}^{2}\log(0,5)} = \frac{{}^{2}\log(x)}{-1} = -{}^{2}\log(x)$$

Opgave 3

Plot de grafiek van functie $f(x) = {}^{3}\log(x)$ op de grafische rekenmachine.

a Geef het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f.

b Voor welke waarde van x is $f(x) = 2$?

c Voor welke waarden van x geldt $f(x) > 2$?

d Voor welke waarden van x geldt $f(x) < 2$?

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 2 \cdot {}^{0,3}\log(x - 1)$.

a Geef de vergelijking van de verticale asymptoot.

b Bepaal het domein en bereik van f.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{0,3}\log(x)$?

d Bereken algebraïsch het nulpunt van f. Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

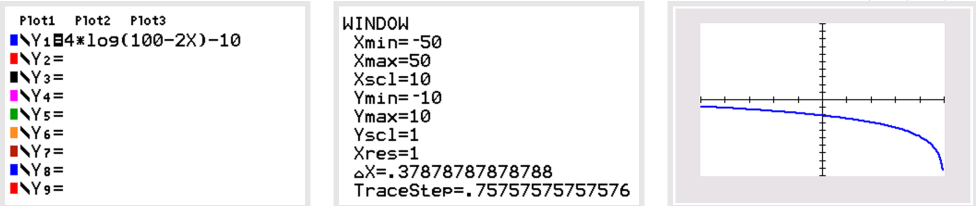
Bepaal de karakteristieken van de logaritmische functie $f(x) = 4 \cdot \log(100 - 2x) - 10$ en bereken het nulpunt van f.

Antwoord

Door de grote getallen is het verstandig om systematisch de karakteristieken te zoeken.

- $100 - 2x > 0$ geeft: $\text{D}_f = \langle \leftarrow, 50 \rangle$. Bepaal hiermee de vensterinstellingen van de grafische rekenmachine voor de x-as.
- De verticale asymptoot is $x = 50$, de grens van het domein.
- Het bereik is $\text{B}_f = \mathbb{R}$, want deze functie kan ontstaan uit $y = \log(x)$, de standaard 10-logaritme.

Plot de grafiek.



Figuur 3.5

Bereken het nulpunt.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \cdot \log(100 - 2x) - 10 = 0 \\ \log(100 - 2x) &= 2{,}5 \\ (100 - 2x) &= 10^{2{,}5} \end{aligned}$$

Daaruit volgt: $x \approx -108{,}11$.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = 2 + 3 \cdot {}^2\log(3x + 4)$.

a Geef de vergelijking van de verticale asymptoot.

b Bepaal het domein en bereik van f.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^2\log(x)$?

d Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van f. Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 3

De effectieve geluidsdruk p (in pascal, 1 Pa = 1 Nm^{-2} dus 1 newton per m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies. De waarden van p variëren echter nogal: de gehoordrempel ligt bij ongeveer 0,00002 Pa, de pijngrens bij 200 Pa. Daarom voerde **Alexander Graham Bell** een praktischer grootheid in, het geluidsdrukniveau L uitgedrukt in decibel, dB. Het verband tussen L en p wordt gegeven door $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$. Hierin is $p_0 = 0{,}00002$ Pa, de gehoorgrens. Hoe groot is de effectieve geluidsdruk van een rijdende bromfiets (75 dB)? Hoeveel dB bedraagt het geluidsdrukniveau van twee van die brommers?

Antwoord

Voor de rijdende bromfiets geldt: $L = 75$ en dus

$75 = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$. Hieruit volgt:

$p = 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{75}{20}} \approx 0{,}1125$ Pa.

Heb je twee van die rijdende brommers, dan is hun totale effectieve geluidsdruk ongeveer $2 \cdot 0{,}1125 = 0{,}2250$ Pa. Daarbij hoort een geluidsdrukniveau van ongeveer

$L = 20 \cdot \log\left(\frac{0{,}2250}{0{,}00002}\right) \approx 81$ dB.

Opgave 6

Gegeven is de formule $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$. De effectieve geluidsdruk p (in pascal, 1 Pa = 1 Nm^{-2} dus 1 newton per m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies; $p_0 = 0{,}00002$ Pa; de gehoorgrens; L is het geluidsdrukniveau uitgedrukt in decibel, dB.

a In een bibliotheek is het erg rustig met een geluidsdrukniveau van ongeveer 35 dB. Hoeveel bedraagt daar de effectieve geluidsdruk?

b Je loopt op de stoep, het autoverkeer levert een geluidsdrukniveau van ongeveer 55 dB. Iemand zet opeens een elektrische drilboor aan van 95 dB. Hoeveel bedraagt het totale geluidsdrukniveau op dat moment?

c Als het geluidsdrukniveau tijdens een concert toeneemt van 110 naar 130 dB, hoeveel keer zo groot wordt dan de effectieve geluidsdruk?

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = {}^{5}\log(2x+5) - 1$.

a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van f.

b Bereken het nulpunt van f.

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x+4)$.

a Geef de vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f.

b Geef het domein en bereik van f.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = \log(x)$?

d Bereken algebraïsch het nulpunt van f. Rond af op één decimaal.

Opgave 9

De grafieken van de functies $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $g(x) = 2^x$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de y-as. De grafieken van de functies $h(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ en $k(x) = {}^{2}\log(x)$ moeten dan elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de x-as. Dat wil zeggen dat $h(x) = -k(x)$.

a Voor welke waarde van x is $h(x) = 3$?

b Voor welke waarde van x is $k(x) = -3$?

c Het punt $\left(\frac{1}{8}; 3\right)$ op de grafiek van h heeft een spiegelbeeld op de grafiek van k. Wat zijn de coördinaten van dit spiegelbeeld?

d Geef nog een punt op de grafiek van h en het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van k.

e Plot de grafieken van h en k in één figuur en los op: $h(x) = k(x)$.

f Toon nu aan dat $h(x) = -k(x)$ voor willekeurige $x > 0$.

Opgave 10

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(2 - x)$.

a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van de functies f en g.

b De grafiek van de functie g ontstaat door transformatie uit die van f. Beschrijf de transformaties in de juiste volgorde.

c Plot de grafieken van de functies f en g en los op: $f(x) = g(x)$.

d In welke lijn zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld?

Opgave 11

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(2x)$ en $g(x) = {}^{3}\log(3x + 9) - 1$.

a Hoe kan de grafiek van g door transformaties uit de grafiek van f ontstaan?

b De grafiek van f snijdt de x-as in punt P en de grafiek van g snijdt de y-as in punt Q. Bereken exact de lengte van PQ.

Toepassen

Opgave 12: Lichtgevoeligheid

Lichtgevoeligheid van fotografisch opnamemateriaal wordt uitgedrukt in een gevoeligheidsgetal. Het meest gebruikte systeem hiervoor is het ASA-systeem (American Standards Association). Op filmrolletjes staat meestal ook een ander gevoeligheidsgetal vermeld, de DIN-waarde. Het verband tussen ASA en DIN wordt gegeven door de formule

$y = 1 + a \cdot \log(x)$

Hierin geeft x de lichtgevoeligheid in ASA aan en y de lichtgevoeligheid in DIN. Een film van 100 ASA heeft een DIN-waarde 21.

Figuur 3.6

a Bereken a.

b Maak de grafiek. De meeste films hebben een ASA-waarde tussen 50 en 1000.

c Hoeveel ASA heeft een film met een gevoeligheid van 31 DIN?

d Je kunt de gegeven formule ook herleiden naar de vorm $x = b \cdot 10^{ky}$.
Bereken b en k.

Opgave 13: Schaal van Richter

Een bekende maat voor de sterkte van een aardbeving is de magnitude op de schaal van Richter.
Daarvoor geldt bij benadering:

$m = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{2}\right) - 3$

Hierin is:

- m de magnitude op de schaal van Richter
- E de energie in Joule

a Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $E = a \cdot 10^{k \cdot m}$.

b Op 23 augustus 2018 werd Bali getroffen door een aardbeving met een magnitude van $5{,}2$ op de schaal van Richter.
Hoe groot bedroeg de hoeveelheid vrijgekomen energie?

Testen

Opgave 14

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$L = k \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$

De constanten G_0 en k hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

Mark (8 jaar) en Helen (10 jaar) wonen in Nederland en zijn wat lengte en gewicht betreft gemiddelde Nederlandse kinderen.

a Mark heeft een lengte van $1{,}30$ m en weegt $26{,}3$ kg. Bereken k in gehelen nauwkeurig.

b Helen is $1{,}40$ m lang. Schat haar gewicht in kg.

Opgave 15

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(2x)$ en $g(x) = {}^{3}\log(3x - 6)$.

a Bepaal het domein, bereik en asymptoot van f en plot de grafiek van f.

b Door middel van welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$?

c Bepaal het domein, bereik en asymptoot van g en plot de grafiek van g.

d Door middel van welke transformaties kan de grafiek van g ontstaan uit die van $y = {}^{3}\log(x)$?

e Los op in drie decimalen nauwkeurig: $f(x) = g(x)$.

f De grafiek van f snijdt de x-as in punt A en de grafiek van g snijdt de x-as in punt B. Bereken de lengte van lijnstuk AB.

Practicum: Logaritmische functies

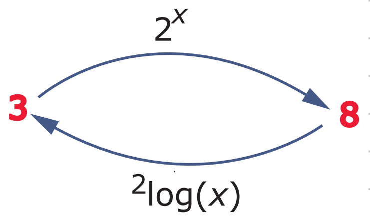
Met deze applet maak je logaritmische functies. Verzin zo'n functie, bedenk eerst hoe hij kan ontstaan uit $y = {}^{g}\log(x)$ en wat de karakteristieken zijn. Controleer dan je antwoord met de applet.

Werk met de applet logaritmische functies

2.4 Logaritmische vergelijkingen

Inleiding

Onder andere bij het berekenen van nulpunten van functies ben je al vergelijkingen tegengekomen waarin logaritmen voorkomen. Uit de definitie volgt dat je vanuit een logaritme kunt terugrekenen door een exponentiële functie met hetzelfde grondtal te gebruiken. Hiermee kun je vergelijkingen met logaritmen oplossen. Soms gebruik je er ook de eigenschappen van logaritmen bij. Bij ongelijkheden moet je ook nog rekening houden met het domein van de logaritme!



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- systematisch vergelijkingen en ongelijkheden met logaritmische functies oplossen;
- herleiden van een logaritmische functie naar een exponentiële functie.

Voorkennis

- werken met logaritmische functies;
- de eigenschappen van logaritmen gebruiken.

Verkennen

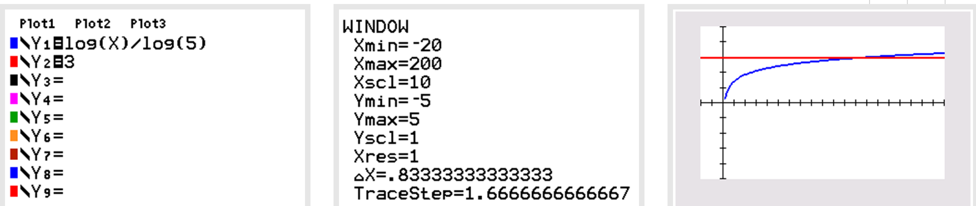
Opgave V1

Los op: ${}^{5}\log(x) < 3$.

Uitleg

Los op: ${}^{5}\log(x) < 3$.

- Los de bijbehorende vergelijking op:
  ${}^{5}\log(x) = 3$ geeft $x = 5^3 = 125$.
- Plot de grafieken op de grafische rekenmachine:
  Voer in: $y_1 = {}^{5}\log(x)$ en $y_2 = 3$.
  Dit geeft: $x < 125$.
- Controleer het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme en geef de oplossing. De oplossing is $0 < x < 125$.



Figuur 4.2

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot {}^{2}\log(x) + 16$.

a Plot de grafiek van f.

b Bepaal met de grafische rekenmachine voor welke waarde van x geldt: $f(x) = 38$. Rond af op twee decimalen.

c Bepaal algebraïsch voor welke waarde van x geldt: $f(x) = 38$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot {}^{2}\log(x) + 16$.

a Bepaal de asymptoot, het domein en het bereik van f.

b Los de ongelijkheid $3 \cdot {}^{2}\log(x) + 16 \leq 38$ op.
Lees de oplossing van de ongelijkheid af uit de grafiek van f.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **logaritmische vergelijking** ${}^{g}\log(x) = a$ moet gelden:
$g > 0$ en $g \neq 1$ en $a > 0$.

De oplossing vind je door aan beide zijden de inverse bewerking van de logaritme toe te passen:
${}^{g}\log(x) = a$ geeft $g^{{}^{g}\log(x)} = g^{a}$ en hieruit volgt $x = g^{a}$.

Een **logaritmische ongelijkheid** van de vorm ${}^{g}\log(x) < a$ kun je zo oplossen:

- Los de bijbehorende vergelijking ${}^{g}\log(x) = a$ op.
- Plot de grafieken op de grafische rekenmachine van $y_1 = {}^{g}\log(x)$ en $y_2 = a$.
- Lees de oplossing uit de grafiek af. Let op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.

Bij ingewikkelde vergelijkingen waarin meerdere logaritmen voorkomen, heb je vaak ook nog de eigenschappen van het optellen of aftrekken van logaritmen nodig. Soms moet je van grondtal wisselen.

Voorbeeld 1

Los op: $10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1) \leq 45$.

Antwoord

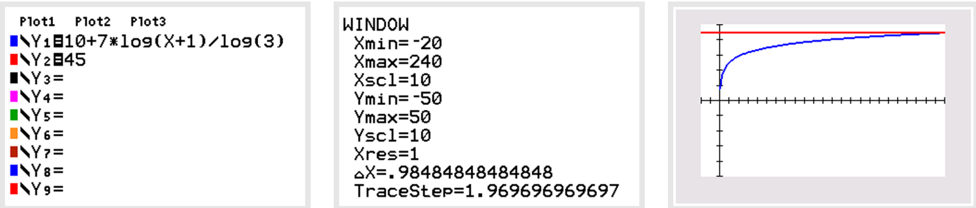
Los bijbehorende vergelijking op: $10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1) = 45$.

$$\begin{aligned} {}^{3}\log(x+1) &= 5 \\ x+1 &= 3^{5} \\ x &= 242 \end{aligned}$$

Plot de grafieken op de grafische rekenmachine:
Voer in: $y_1 = 10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1)$ en $y_2 = 45$.

Gebruik het domein $\langle -1, \rightarrow\rangle$, de asymptoot $x = -1$ en $y_2 = 45$ om de vensterinstellingen te bepalen.

Lees af: $-1 < x \leq 242$.



Figuur 4.3

Opgave 3

Los op: $2 + 3 \cdot {}^{2}\log(x-4) \leq 11$.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^{0,5}\log(x+5)$.

a Los algebraïsch op: $f(x) = -3$

b Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f en bepaal het domein en bereik van f.

c Los op: $f(x) \geq -3$.

Opgave 5

Plot de grafieken van de functies $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(2-x)$.

a Bepaal van beide functies de vergelijking van de asymptoot.

b Bepaal van beide functies het domein.

c Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$

d Los op: $f(x) > g(x)$.

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: ${}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x+2) = 3$.

Antwoord

$$\begin{aligned} {}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x+2) &= 3 \\ {}^{2}\log(x(x+2)) &= 3 \\ {}^{2}\log\left(x^2+2x\right) &= 3 \\ x^2+2x &= 2^3 \\ x^2+2x-8 &= 0 \\ x &= -4 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Vanwege het domein van de eerste logaritme geldt $x > 0$. Alleen de oplossing $x = 2$ voldoet hieraan en dit is de enige oplossing.

Opgave 6

Los algebraïsch op: ${}^{6}\log(x) + {}^{6}\log(x-1) = 1$.

Opgave 7

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $\log(2x) - \log(x-1) = 2$

b ${}^{3}\log(x-2) = 1 + 5 \cdot {}^{3}\log(2)$

Voorbeeld 3

Het verband tussen het geluidsdrukniveau L en de effectieve geluidsdruk p is

$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$, met $p_0 = 0{,}00002$ Pa, de gehoorgrens.

Laat zien dat p een exponentiële functie van L is.

Antwoord

Vul eerst $p_0 = 0{,}00002$ in. Herleid vervolgens de gegeven formule naar de vorm $p = ...$

$$\begin{aligned} L &= 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right) \\ \frac{L}{20} &= \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right) \\ 10^{\frac{1}{20}L} &= \frac{p}{0{,}00002} \\ p &= 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{1}{20}L} \end{aligned}$$

Omdat $10^{\frac{1}{20}L} \approx 1{,}12^L$ kun je dit schrijven als: $p = 0{,}00002 \cdot 1{,}12^L$.
p is een exponentiële functie van L.

Opgave 8

Herleid de gegeven formule naar de vorm $q = ...$

a $h = 300 \cdot \log\left(\frac{q}{5} + 20\right)$

b $h = 10 - 5 \cdot {}^{2}\log(q - 4)$

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x + 4)$.

a Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f.

b Geef het domein en bereik van f.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 0$

Opgave 10

Gegeven is de functie $g(x) = -10 + 2 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(x - 1)$.

a Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van g.

b Geef D_g en B_g.

c Los algebraïsch op: $g(x) \geq -14$.

Opgave 11

Los algebraïsch op.

a ${}^{3}\log(x) = 2 \cdot {}^{3}\log(5)$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2)$

c $5 - {}^{2}\log(x) = 0$

d ${}^{5}\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^{5}\log(3)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2 - x)$

f ${}^{5}\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^{5}\log(x)$

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = -1 + \log(4 - x)$.

a Bepaal van beide functies het domein, het bereik en de asymptoot.

b Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$

c Los op: $f(x) \leq g(x)$.

d Los op: $f(x) > g(x)$.

Opgave 13

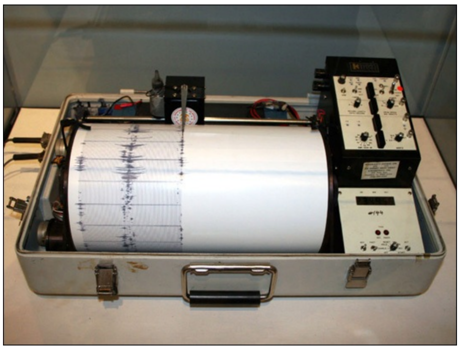
Druk q uit in p.

a $p = 15 - {}^{3}\log(5 - q)$

b $p = 600 + 15 \cdot \log\left(\frac{q}{200}\right)$

Toepassen

Aardbevingen worden geregistreerd met een seismograaf, die aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. Verspreid over de aarde staan veel seismografen opgesteld. De uitwijking van een seismograaf hangt af van de afstand van dit instrument tot de plaats aan de oppervlakte van de aarde waar de beving het eerst optreedt. Deze plaats noemt men het epicentrum van de aardbeving. Om aardbevingen met elkaar te kunnen vergelijken gebruikt men seismogrammen die op een afstand van 100 km van het epicentrum zijn gemaakt (standaard seismogrammen). De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Bij deze schaal wordt de logaritme (met grondtal 10) gebruikt van de grootste uitwijking in micrometer die in het seismogram voorkomt.



Figuur 4.4

Opgave 14

Bekijk het verhaal van de schaal van Richter.

a Leg uit, dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitwijking van de seismograaf 10 keer zo groot wordt.

De aardbeving in Nederland van 13 april 1992 had een kracht van 5,5 op de schaal van Richter. De kracht van de aardbeving op 27 februari 2010 in Chili was 8,8.

b Bereken de verhouding tussen deze twee grootste uitwijkingen.

Opgave 15

Als op een bepaald waarnemingsstation een seismogram gemaakt is en je weet de plaats van het epicentrum, dan kun je met de volgende formule de kracht van de aardbeving berekenen:

$$R = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 1{,}66 \cdot \log(D) + 3{,}30$$

Hierin is:

- R de kracht van de aardbeving uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter
- A de grootste uitwijking in het seismogram in μm (1μm = 0,001 mm)
- T de tijd in seconden van de trilling met de grootste uitwijking
- D de grootte in graden van de hoek tussen de verbindingslijnstukken ME en MW, waarin M het middelpunt van de aarde, E het epicentrum van de aardbeving en W de plaats van het waarnemingsstation is

Uit de formule volgt inderdaad dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitslag van de seismograaf 10 keer zo groot wordt (bij dezelfde T en D).

a Toon dit aan.

Van de Chileense aardbeving van 2010 werd een seismogram opgenomen. De trillingen gaven daar een maximale uitslag van 1500 μm; de trillingstijd T bedroeg 20 s. Na invulling van D werd $R = 8{,}8$ gevonden. Neem aan dat de omtrek van de aarde 40000 km is.

b Bereken de afstand over de aardbol tussen de plaats waar het seismogram werd opgenomen en het epicentrum in Chili in honderden kilometers nauwkeurig.

Ook op diverse andere plaatsen werd in 2010 een seismogram van de Chileense aardbeving opgenomen. Op al die plaatsen berekende men dat de kracht van de aardbeving 8,8 was.

c Toon aan dat hieruit volgt dat tussen A, T en D een verband bestaat van de vorm: $D = p \cdot \left(\frac{T}{A}\right)^q$ en bereken p en q in twee decimalen nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Los algebraïsch op:

a ${}^{7}\log(x-5) = 0$

b $-{}^{0{,}25}\log(x) = {}^{0{,}25}\log(5)$

c ${}^{4}\log(x) = 0{,}5 - {}^{4}\log(3)$

d ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) + {}^{\frac{1}{2}}\log(2x) = 0$

Opgave 17

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = {}^{3}\log(2x)$ en $g(x) = {}^{3}\log(6-x)$.

a Bepaal het domein, bereik en de asymptoot van beide functies.

b Bereken voor welke x geldt $f(x) = -2$.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 9$.

d Bereken voor welke x geldt $g(x) = 0$.

e Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

f Los op: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 18

De formule $k = 4 \cdot \log\left(\frac{D+10}{100}\right) + 5$ is zo te herschrijven dat D een exponentiële functie is van k.

Toon dat aan.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van logaritmische vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Logaritmische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- logaritme — grondtal
- definitieformules — eigenschappen van logaritmen
- logaritmische functie
- logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden

Activiteitenlijst

- logaritmen gebruiken om exponentiële vergelijkingen op te lossen
- definitieformules en eigenschappen van logaritmen gebruiken — vergelijkingen met logaritmen oplossen
- de karakteristieken van een logaritmische functie bepalen
- logaritmische vergelijkingen/ongelijkheden oplossen

Achtergronden

Figuur 5.1

In 1614 verscheen ‘Mirifici logarithmorum canonis descriptio’ van **sir John Napier (1550—1617)**. Hierin staat de eerste beschrijving van logaritmen. In het voorwoord legt Napier uit dat zijn doel was het vinden van een eenvoudige manier om grote getallen te vermenigvuldigen, te delen, te kwadrateren en er wortels uit te trekken. Hij voerde een bepaalde handeling op die grote getallen uit waardoor hij er getallen van maakte waarmee hij door eenvoudig optellen en aftrekken hetzelfde resultaat verkreeg als andere door lastige vermenigvuldigingen en delingen. Die handeling (een functie zou je nu zeggen) noemde hij ‘logaritme nemen’ (‘logos arithmos’ is ‘verhouding van getallen’). Een voorbeeld:

Stel je wilt $a \cdot b = 1296 \cdot 63.508$ berekenen.
Je neemt van beide getallen de logaritme (grondtal 10):
$\log(1296) = 3{,}112605...$ en $\log(63.508) = 4{,}8028284...$
Nu gebruik je de rekenregel: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$.
Dus is $\log(a \cdot b) = 3{,}112605... + 4{,}8028284... = 7{,}915433...$
Nu werk je die logaritme weer weg en je vind het antwoord $82.306.368$.

Je ziet hoe Napier van een vervelende vermenigvuldiging $1296 \cdot 63.508$ een gemakkelijke optelling maakte! In de tijd dat er geen elektronische rekenmachines waren, was dit een enorm belangrijke stap vooruit. Napier's logaritmen hadden trouwens nog niet het grondtal 10 (zoals in het voorbeeld), dat laatste is het werk van Henry Briggs (1561-1630). Hij las in 1615 de Latijnse versie van Napier's geschrift en was er meteen van onder de indruk. Hij suggereerde Napier zijn logaritme zo aan te passen, dat $\log(1) = 0$ en het grondtal 10 is. Ze werden het eens en Briggs maakte een tabel voor logaritmen van getallen gebaseerd op grondtal 10.

Testen

Opgave 1

Een bedrijf verwacht dat de komende jaren zijn aandelen 11% per jaar in waarde gaan stijgen.

a Hoelang duurt het totdat de waarde van de aandelen 1,5 keer zo groot is geworden? Rond af op gehele jaren.

b Iemand koopt voor € 2000,00 aandelen. Ga uit van een jaarlijkse stijging van 11%. Bereken na hoeveel jaar het bedrag is verdubbeld. Bereken ook na hoeveel jaar het bedrag is verdrievoudigd en na hoeveel jaar het is verzesvoudigd. Laat zien hoe je hiermee de eigenschap ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$ kunt toelichten.

Opgave 2

Een doorzichtige kunststof absorbeert per centimeter 27% van het licht dat erdoorheen valt.

Bereken in millimeter nauwkeurig hoe dik de kunststof moet zijn om 50% van het licht te absorberen.

Opgave 3

Los algebraïsch op.

a ${}^{\frac{1}{3}}\log(x+2) = -2$

b ${}^{2}\log(x) = 5 - {}^{2}\log(10)$

c ${}^{5}\log\left(4x^2\right) = 2 + {}^{5}\log(x)$

d $10 + 5 \cdot {}^{2}\log(x-5) \leq 100$

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x+10) + 4$ en $g(x) = \log(-x)$.

a Bepaal van beide functies het domein, bereik en de vergelijking van de asymptoot.

b Bepaal van beide functies algebraïsch het nulpunt.

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq g(x)$

Gegeven is de functie $h(x) = f(x) + g(x)$.

d Toon aan dat $h(x) = \log\left(-100000x - 10000x^2\right)$.

Opgave 5

De luchtdruk p in millibar (mbar) hangt af van de hoogte h (km) boven het zeeniveau. Bij benadering geldt: $h = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$ waarin p_0 de luchtdruk op zeeniveau voorstelt.

a Neem aan dat $p_0 = 1010$ mbar. Plot de grafiek van h als functie van p.

In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 400 mbar gemeten. De luchtdruk op zeeniveau is op dat moment 1010 mbar.

b Hoe hoog vliegt het vliegtuig?

c Laat zien dat p een exponentiële functie is van h.

d Verklaar waarom de grafiek van h met $p_0 = 930$ mbar ontstaat door de grafiek bij a in verticale richting te verschuiven.

De bemanning van een vliegtuig gaat uit van 1000 mbar op zeeniveau en berekent dat het toestel op 3 km hoogte vliegt. De luchtdruk op zeeniveau is echter 1030 mbar.

e Hoe hoog vliegt het toestel in werkelijkheid? Rond af op meter.

Opgave 6

Een mossel bestaat voor een deel uit schelp en voor een deel uit vlees. Er bestaat een verband tussen de schelplengte L (mm) en het gewicht van het vlees W (gram) van mosselen. Elk jaar wordt er onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelplengte en het gewicht van het vlees van de gewone mossel in de Waddenzee. Hiervoor worden van een groot aantal van deze mosselen de schelplengte en het gewicht van het vlees gemeten. In één van de jaren leiden de resultaten tot de volgende formule: $\log(W) = -5{,}5 + 3{,}1 \cdot \log(L)$

Werk deze formule om tot een formule van de vorm $W = a \cdot L^b$.

(naar: examen havo wiskunde B in 2011, tweede tijdvak)

Toepassen

Opgave 7: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip ‘zuurgraad’ gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $[H_3O^+]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $[H_3O^+] = 10^{-7}$ mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van 10^{-7}: pH $= -\log\left(10^{-7}\right) = 7$. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: pH $= -\log[H_3O^+]$.

a Bij geconcentreerd zwavelzuur is $[H_3O^+] = 18$ mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?

b Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van $11{,}5$. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie in mol/L?

c Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie van zure regen?

d Vanaf welke H_3O^+ concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?

e De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijk pH van de huid is ongeveer $5{,}5$. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie dan?

Opgave 8: C-14 methode

In levende organismen komt behalve het radioactieve koolstof C-14 ook het niet-radioactieve C-12 voor. Gelukkig is de verhouding van de hoeveelheid C-14 ten opzichte van C-12 zeer klein. Deze verhouding is constant $1 : 10^{12}$. Wanneer een organisme sterft verandert de verhouding door radioactief verval van C-14. Door de verhouding te meten kan de ouderdom van resten organisch materiaal berekend worden. De halveringstijd van C-14 is 5730 jaar.

a Een archeoloog vindt een bot waarvan de verhouding C-14 : C-12 gelijk is aan $1 : 10^{13}$. Hoeveel jaar is dat bot ongeveer oud?

b Bij een Egyptische mummie blijkt de verhouding van C-14 en C-12 ongeveer $0{,}65$ keer de verhouding van C-14 en C-12 in levende organismen te zijn. Benader de ouderdom van deze mummie.

c In 1947 zijn aan de westzijde van de Dode Zee de Dode-Zeerollen (oudtestamentische handschriften) gevonden. De verhouding van C-14 en C-12 in de perkamenten rollen bleek tussen de 77% en de 81% van die bij levende organismen te zijn. Vanaf hoeveel jaar voor het begin van de jaartelling tot hoeveel jaar erna zijn de Dode-Zeerollen geschreven?

d Een 4500 jaar oude kist werd in een hunebed (grafkelder in de provincie Drenthe) aangetroffen. Hoe groot is de verhouding van de aangetroffen hoeveelheid C-14 en C-12 ongeveer in vergelijking met die van een houten kist uit onze tijd?

Examen

Opgave 9: Windsnelheid en hoogte

Op een bepaalde dag is in Vlaardingen op verschillende hoogtes de windsnelheid gemeten. Uit de meetresultaten blijkt dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de windsnelheid W in m/s en de hoogte h in meter voor hoogten tussen 10 en 80 meter (zie tabel). De formule $W = a \cdot h + b$ geeft dit lineaire verband.

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,9	4,3

Tabel 5.1

a Bereken a en b met behulp van de gegevens in de tabel. Rond a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

Onderzoek door weerkundigen naar windsnelheden op verschillende hoogtes en onder verschillende omstandigheden heeft opgeleverd dat het verband tussen windsnelheid en hoogte in het algemeen niet lineair is. Een betere formule is:

$W = 5{,}76 \cdot m \cdot \log\left(\frac{h}{r}\right)$

Hierin is:

- W de windsnelheid (in m/s);
- h de hoogte in meter waarop de windsnelheid wordt gemeten
- m een constante die afhangt van de wrijving tussen de luchtlagen
- r een constante die afhangt van de ruwheid van het terrein (hoge bomen beïnvloeden de windsnelheid anders dan grasland)

De formule is geldig tot hoogtes van ongeveer 100 meter. In de praktijk wordt de windsnelheid op een hoogte van 10 meter gemeten. De waarde van r op de meetplek is bekend zodat het getal m met behulp van de formule berekend kan worden. Vervolgens kan met de gegeven formule de windsnelheid op andere hoogtes berekend worden.

b Boven open bouwland met $r = 0{,}12$ wordt de windsnelheid gemeten. Op 10 meter hoogte is deze windsnelheid $6{,}0$ m/s. Bereken in deze situatie de windsnelheid op een hoogte van 60 meter.

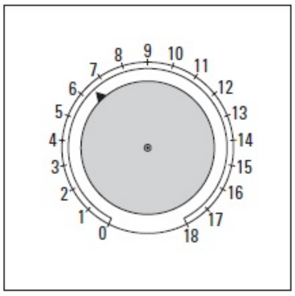
Boven een bepaald terrein en met $m = 0{,}45$ geldt het volgende: de windsnelheid is op 60 meter hoogte $1{,}3$ keer zo groot als op 20 meter hoogte.

c Bereken de waarde van r van dit terrein.

(bron: examen wiskunde B havo 2006, eerste tijdvak)

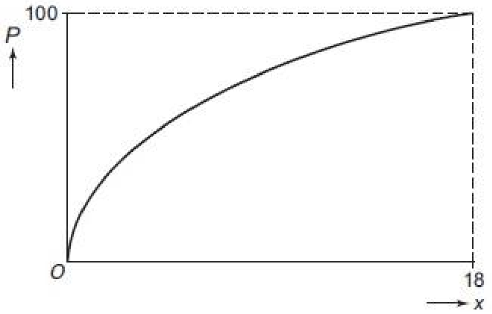
Opgave 10: Volumeknop

Bekijk de figuur waarin je de volumeknop op een versterker kunt draaien vanuit stand 0 naar stand 18. In stand 0 geeft de versterker geen geluid. In stand 18 geeft de versterker het maximale geluidsniveau. De volgende formule geldt: $P = a \cdot \log(x + 1)$
Hierin is x de stand van de volumeknop, P het percentage van het maximale geluidsniveau en a een constante. De grafiek geeft het verband tussen x en P weer. Uit de gegevens is af te leiden dat $a \approx 78$.



Figuur 5.2

Ga in de volgende vragen uit van $a = 78$.

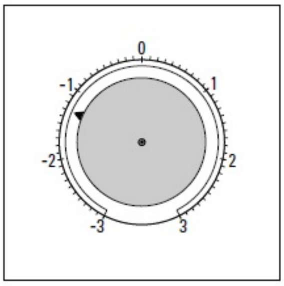


Figuur 5.3

a Bereken a in drie decimalen.

b Bereken bij welke stand van de volumeknop het geluidsniveau gelijk is aan 75% van het maximale geluidsniveau. Geef je antwoord in één decimaal.

Bij deze versterker wordt de wijzerplaat van de volumeknop vervangen door de wijzerplaat van de figuur. In stand -3 geeft de versterker geen geluid. In stand 3 geeft de versterker het maximale geluidsniveau. k is de stand van de volumeknop bij deze wijzerplaat.



Figuur 5.4

c In de figuur is k gelijk aan $-1,3$.

Onderzoek hoe groot de waarde van P is bij deze stand van de volumeknop.

d Voor het verband tussen de stand k van de volumeknop en het percentage P van het maximale geluidsniveau geldt ook bij deze wijzerplaat een formule. Stel deze formule op.

(bron: examen havo wiskunde B in 2005, tweede tijdvak)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

www.math4all.nl