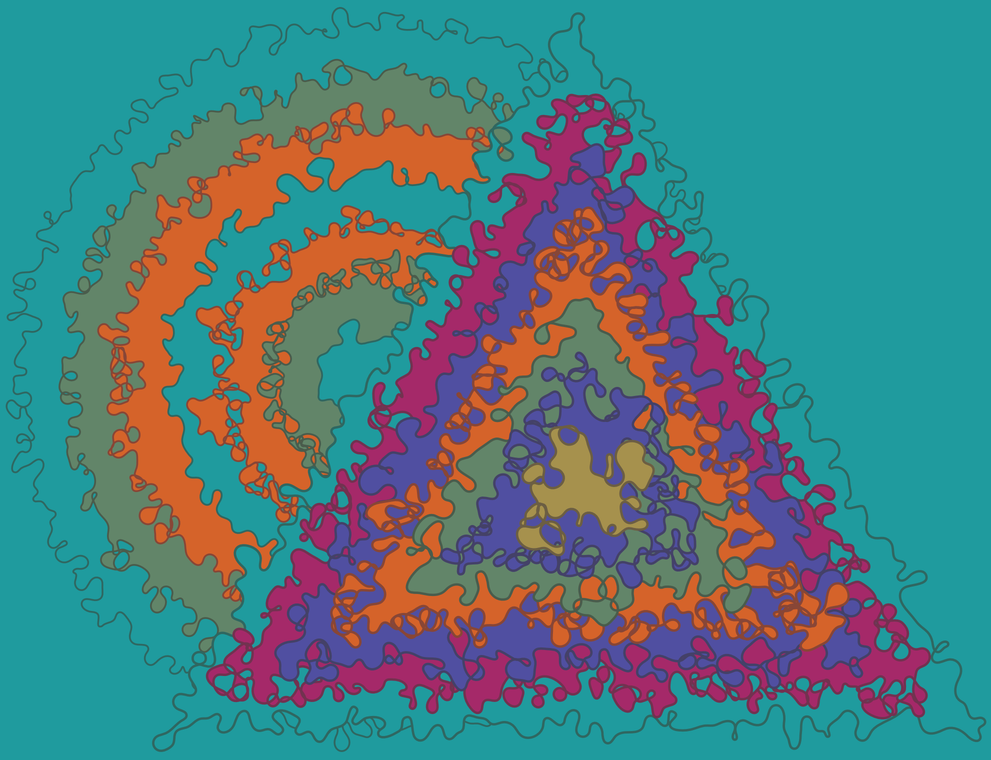
Wiskunde A

5 HAVO

Katern 1

ConTeXt College



Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

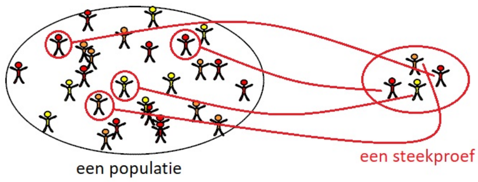
1

Statistisch onderzoek

1.1 Steekproeven

Inleiding

In het hoofdstuk ‘Data verwerken’ heb je geleerd hoe je gegeven data(sets) kunt presenteren, kunt samenvatten en kunt typeren. Het verwerken van data is een belangrijk onderdeel van statistisch onderzoek. Maar er gaat iets aan vooraf. Het statistisch onderzoek moet wel een goede opzet hebben want anders zijn je antwoorden, je conclusies, niets waard. In dit onderdeel ga je vooral bekijken hoe je een goede steekproef moet opzetten.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- wat een aselect genomen en representatieve steekproef is;
- geschikte enquêtevragen opstellen.

Voorkennis

- soorten statistische variabelen herkennen;
- werken met de normale verdeling.

Verkennen

Opgave V1

In uitspraken in kranten, boeken en op internet kom je vaak resultaten van statistisch onderzoek tegen. Hier zie je daar een voorbeeld van.

Uit onderzoek van het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) blijkt dat bijna de helft van de jongeren tussen de 15 en 25 jaar gebruik maakt van internet op de telefoon. Dat is veel meer dan vorig jaar, toen nog maar 20 procent van de jongeren internetten op hun mobiel.

(Bron: jongeren.blog.nl maart 2010)

Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) heeft zich kennelijk afgevraagd hoe het zit met het internetgebruik onder jongeren. Met zo’n probleemstelling begint statistisch onderzoek. De probleemstelling wordt vertaald in een aantal **onderzoeksvragen**. Die vragen worden zo geformuleerd dat de antwoorden data opleveren die statistisch verwerkt kunnen worden om antwoord te geven op het gestelde probleem.

Bekijk de uitspraak hierboven van maart 2010.

a Welke onderzoeksvraag heeft het CBS zich gesteld?

b Kun je bedenken hoe het CBS dit heeft aangepakt?

c Hoe zou je zelf zo’n onderzoeksvraag aanpakken?

Opgave V2

Je wilt door middel van een enquête een beeld krijgen van de bestedingen van jongeren van 16–18 jaar. Formuleer minstens vijf vragen die geschikt zijn voor de enquête. Wissel jouw vragen uit met een klasgenoot en probeer elkaars vragen te verbeteren.

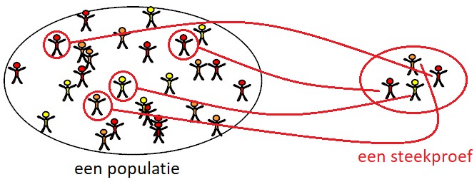
Uitleg

Statistisch onderzoek wordt ingezet om informatie te krijgen over kenmerken van grote groepen. Op basis daarvan worden vaak beslissingen genomen. In Nederland doet onder andere het **Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS)** veel statistisch onderzoek.

Een mogelijke onderzoeksvraag is:
“Hoeveel jongeren van 15 tot 25 jaar bestellen toegangskaartjes via internet?”
Aan een aantal jongeren van 15 tot 25 jaar wordt de vraag gesteld:
“Heb je de afgelopen 12 maanden via internet een kaartje voor een evenement besteld?”
In 2005 antwoordde 19% van de ondervraagden ‘ja’.
In 2013 antwoordde 51% van de ondervraagden ‘ja’.

(Bron: statline.cbs.nl, 2016)

Een onderzoeksbureau wil over een bepaalde groep informatie verzamelen. Die groep heet de populatie. Het bureau stelt een onderzoeksvraag op. Uit de populatie trekt het bureau een steekproef. Dit is het deel van de populatie aan wie de onderzoeksvraag wordt gesteld.



Figuur 1.2

Alleen de informatie van de mensen uit de steekproef wordt gebruikt. Maar daarna wordt bijvoorbeeld in een interview gezegd: “51% van de Nederlandse jongeren koopt via internet kaartjes voor evenementen”.
Er wordt dus een uitspraak gedaan over de populatie, terwijl lang niet iedereen daarvan is ondervraagd.

De steekproef moet daarom goed lijken op de populatie. Alle verschillende kenmerken van de mensen in de steekproef en de populatie (zoals leeftijd, geslacht, woonplaats) moeten naar verhouding evenveel voorkomen. Dit heet een representatieve steekproef. Belangrijk is:

- Elk persoon uit de populatie moet een even grote kans hebben om in de steekproef terecht te komen; de steekproef is dan aselect.
- De steekproef moet uit voldoende personen bestaan. Hoe groter de steekproef, hoe nauwkeuriger de uitspraken die je over de populatie kunt doen.

Bij statistisch onderzoek worden fouten gemaakt. Dat komt doordat de steekproef niet helemaal gelijk is aan de populatie. Deze fouten heten toevalsfouten.
Andere fouten ontstaan door bijvoorbeeld het stellen van verkeerde enquêtevragen. Deze fouten heten systematische fouten.

Voor tips bij het opstellen van enquêtevragen, zie het **Practicum**.

Opgave 1

Bekijk het CBS-onderzoek in de **Uitleg**.

a Hoe luidt de onderzoeksvraag?

b Hoe luidt de enquêtevraag?

c Een percentage personen bestelt dus kaartjes via internet. Waarom zal dit percentage in de populatie anders (kunnen) zijn dan in de steekproef?

Opgave 2

Leg uit of er in de omschreven situaties sprake is van een representatieve steekproef.

a Om een onderzoek te doen naar het discotheekbezoek onder 14 tot 18-jarigen kies je de leerlingen uit je klas.

b Om uit te zoeken op welke politieke partij Nederlanders stemmen bij de Tweede Kamerverkiezingen, worden uit het bevolkingsregister van Nederland willekeurig 7500 inwoners gekozen.

Opgave 3

Leg uit of de gekozen steekproef groot genoeg is.

a In het buitenland komt een ziekte bij $0,01\%$ van de mensen voor. De overheid wil weten of de ziekte ook in ons land voorkomt en onderzoekt daarom 5000 Nederlanders.

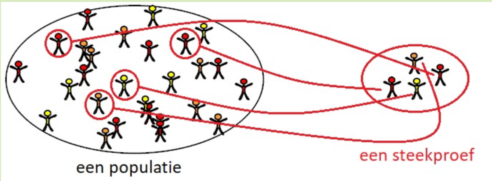
b De manager van een ijsbaan wil weten of er op woensdag meer meisjes dan jongens komen schaatsen. Hij neemt een steekproef van dertig bezoekers en telt of het meisjes of jongens zijn.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Statistisch onderzoek is onderzoek om uitspraken te doen over een bepaalde groep mensen of voorwerpen. De groep waarnaar onderzoek wordt gedaan heet **populatie**.

Een populatie is vaak heel erg groot, dus het kost te veel tijd en/of geld om iedereen of alles te onderzoeken. Er wordt dan een deel van de populatie, een **steekproef** genomen.



Figuur 1.3

Met de informatie uit de steekproef worden uitspraken gedaan over de hele populatie.

Het resultaat van statistisch onderzoek moet goed zijn. Daarom moet de steekproef goed lijken op de populatie. Dat is zo als

- het aantal mensen of voorwerpen in de steekproef, de **steekproefomvang** groot genoeg is: hoe groter de steekproef, hoe nauwkeuriger de resultaten zijn;
- de steekproef **aselect** is, dus elk element van de populatie een even grote kans heeft om in de steekproef te komen;
- de steekproef **representatief** is, dus alle kenmerken waar onderzoek naar wordt gedaan in de steekproef en de populatie naar verhouding even vaak voorkomen.

Bij statistisch onderzoek worden altijd **toevalsfouten** gemaakt. Dat komt doordat er een steekproef wordt genomen. Soms worden er ook andere fouten gemaakt. Dat zijn **systematische fouten**, bijvoorbeeld het stellen van verkeerde vragen of het nemen van een niet representatieve steekproef.

Voorbeeld 1

Hoe groter de steekproef, hoe nauwkeuriger de resultaten zijn.
Een steekproef aselect nemen betekent: elk element uit de populatie moet een even grote kans hebben om in de steekproef te komen. Of een steekproef aselect is, hangt dus af van de manier waarop je de steekproef neemt.

Zijn de volgende steekproeven aselect? Leg je antwoord uit.

1. Onderzoek naar de lichamelijke gezondheid van de inwoners van Zoetermeer.
   Steekproef: willekeurig 1000 mensen kiezen uit de lijst van inwoners van Zoetermeer.
2. Onderzoek naar tevredenheid over het reizen met de trein.
   Steekproef: vragen daarover stellen aan 25 willekeurig gekozen passagiers uit 50 willekeurig uit de dienstregeling gekozen treinen.
3. Onderzoek naar tevredenheid onder ouders van middelbare scholieren.
   Steekproef: een willekeurige groep van 100 middelbare scholieren per school een vragenlijst meegeven om in te laten vullen door de ouders.

Antwoord

1. Ja. Populatie en steekproef gaan over hetzelfde en de steekproef is aselect en redelijk groot.
2. Nee. De kans dat een reiziger die tijdens de spits reist in de steekproef komt, is kleiner dan de kans dat een reiziger die buiten de spits reist in de steekproef komt.
3. Nee. De kans dat een ouder met veel kinderen op school in de steekproef komt, is groter dan de kans dat een ouder met één kind op school in de steekproef komt.

Opgave 4

Zijn de volgende steekproeven aselect? Leg je antwoord uit.

a Een onderzoek over de dienstverlening van de NS onder treinreizigers, waarbij de vragenlijsten willekeurig worden verstuurd naar bezitters van een OV-chipkaart. Ga ervan uit dat iedere reiziger maar één OV-chipkaart bezit.

b Een onderzoek over pestgedrag onder basisschoolleerlingen door van 200 willekeurig gekozen basisscholen telkens 10% van de willekeurig gekozen leerlingen te bevragen.

c Een onderzoek dat gebruik maakt van vragenlijsten die zijn ingevuld door willekeurig gekozen mensen van 65 jaar en ouder.

d Een onderzoek naar de tevredenheid van abonnees van een telefoonbedrijf, door willekeurig gekozen klanten die de helpdesk bellen te ondervragen.

Voorbeeld 2

De kenmerken van de populatie moeten in verhouding net zo vaak voorkomen in de steekproef. Dit heet een representatieve steekproef.

Zijn de volgende steekproeven representatief? Geef ook aan of de steekproef aselect is. Een toevallige fout hoef je niet te noemen.

1. Er wordt onderzoek gedaan naar het stemgedrag voor politieke partijen van Nederlanders. Daarvoor worden aselect 8000 Nederlanders gekozen uit het bevolkingsregister.
2. Er wordt onderzoek gedaan naar de hoeveelheid verf in blikken. Van alle geproduceerde blikken wordt steeds het tiende blik gewogen.
3. Er wordt onderzoek gedaan naar het aantal uren dat ouders van de kinderen van een school van huis zijn. De ouders die op een ouderavond komen worden ondervraagd.

Antwoord

1. De steekproef is waarschijnlijk representatief. Want de steekproef is aselect en is zo groot dat alle politieke meningen in Nederland er wel zo'n beetje in voor zullen komen.
2. De steekproef is waarschijnlijk wel representatief. Want de steekproef is uit de hele populatie, de steekproefomvang is goed en meestal maakt het niet van welke blikken je de hoeveelheid meet. (Het zou natuurlijk kunnen dat elk tiende blik door één bepaalde vulkraan wordt gevuld en de rest door andere...). De steekproef is niet aselect.
3. De steekproef is niet representatief. Want waarschijnlijk komen er naar verhouding minder ouders die veel van huis zijn naar de ouderavond. De steekproef is ook niet aselect.

Opgave 5

Geef van de volgende steekproeven aan of ze representatief en/of aselect zijn. Leg je antwoord uit.

a Een leverancier van koffie doet onderzoek naar de tevredenheid van zijn klanten over de koffie. Hij ondervraagt alle klanten die in zijn winkel komen.

b De RDW is de organisatie die beslist welke voertuigen in Nederland worden toegelaten op de wegen. De RDW doet onderzoek naar voertuigen. De RDW neemt daarom willekeurig een grote steekproef uit de lijst van alle kentekens van voertuigen en stuurt de eigenaars van de voertuigen een vragenlijst over winterbanden.

c Een onderzoeksbureau doet onderzoek naar gebruik van sociale media onder jongeren. Het bedrijf verspreidt een enquête via sociale media.

Verwerken

Opgave 6

Geef van de volgende steekproeven aan of ze aselect en/of representatief zijn. Licht je antwoord toe.

- Om een onderzoek te doen naar het theaterbezoek onder 14 tot 18-jarigen kies je de leerlingen van jouw eigen klas.
- Om de gemiddelde onderhoudskosten van een bepaald type auto te bepalen worden autobezitters via het tijdschrift ‘Autokampioen’ gevraagd de onderhoudskosten door te geven.

Opgave 7

Bij het doen van metingen voor een onderzoek ontstaan soms fouten.

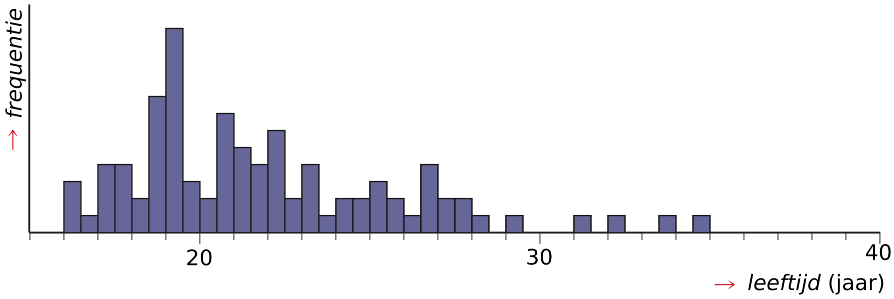
a Geef een voorbeeld van een systematische fout bij het meten van de temperatuur.

b Geef een voorbeeld van een toevalsfout bij het meten van de temperatuur.

c Geef twee voorbeelden van een systematische fout bij het meten van iemands gewicht in kilo's. Geef ook een voorbeeld van een toevalsfout.

Opgave 8

Er wordt een concert gegeven met meer dan tienduizend bezoekers. Gegeven is het histogram van de frequenties van de leeftijden van de bezoekers binnen de steekproef. De steekproefomvang is 50. De steekproef is aselect genomen.



Figuur 1.4

a Is de steekproef representatief? Licht je antwoord toe met twee argumenten.

b Hoe kan de steekproef wel representatief worden gemaakt?

Opgave 9

Er wordt onderzoek gedaan naar het aantal Nederlanders dat Fries spreekt. Er wordt een steekproef genomen van 1200 deelnemers: uit elke provincie aselect 100 inwoners.

a Lever commentaar op deze steekproefsamenstelling.

b Hoe kan het beter?

Opgave 10

In een buurt staan rijtjeshuizen in blokken van vijf. De huizen hebben even nummers en zijn genummerd van 2-100.
De gemeente wil inzicht krijgen in het energieverbruik. Ze ondervragen daarvoor de bewoners van vijf huishoudens met de nummers 12, 20, 42, 60 en 82. Is deze steekproef representatief?

Opgave 11

In een onderzoek naar het voedingspatroon van de Nederlandse jeugd van 16 – 22 jaar wordt een aselecte steekproef van 10000 jongeren uit die leeftijdscategorie getrokken. Al deze jongeren krijgen een schriftelijke enquête naar hun huisadres gestuurd.

a Is de steekproef representatief?

b Het percentage enquêtes dat ingevuld terug komt, heet respons. Het onderzoeksbureau krijgt 4831 enquêtes ingevuld terug. Hoe groot is de respons?

c Geef minstens twee redenen waarom er enquêtes niet zijn ingevuld (non-respons).

d Op een bepaalde vraag wordt op 94% van de ingevulde enquêtes met ‘ja’ geantwoord. Mag er nu worden geconcludeerd dat 94% van de jongeren van 16 – 22 jaar het daarmee eens is?

e Een van de conclusies van het onderzoek is: de Nederlandse jeugd drinkt de eerste keer wodka op een gemiddelde leeftijd van 19,3 jaar. Lever commentaar.

Toepassen

Opgave 12: Risico op hartinfarct

In een onderzoek wordt de volgende conclusie getrokken:

“Het risico op een hartinfarct van de gemiddelde Amerikaanse man wordt met ongeveer 45% verlaagd door het slikken van aspirine.”

Van het onderzoek is het volgende bekend.

In de jaren 1982 – 1988 werd onder 22000 mannelijke Amerikaanse artsen onderzoek gedaan naar de invloed van aspirine op hart- en vaatziekten. De helft van de mannen gebruikte om de dag 300 mg aspirine, wat ongeveer gelijk staat aan een ‘gewoon’ aspirientje. De andere helft slikte een placebo (‘fopmiddel’).

Van de aspirineslikkers kregen 104 personen een hartinfarct, van de placeboslikkers waren dat er 189.
Dat dit grote verschil aan toevalsfouten was te wijten vond men uitgesloten vanwege het grote aantal mensen dat aan de studie meewerkte.

a Waarom mag de conclusie niet worden getrokken uit het onderzoek?

b Waarom wordt er van placebo’s gebruik gemaakt?

c Hoeveel procent van de 11000 aspirineslikkers heeft waarschijnlijk baat gehad bij het slikken van aspirine?

d Volgens de tekst hierboven wordt de kans op een hartinfarct met 45% verlaagd. Klopt dat?

e Waarom zal de conclusie niet direct zijn: ‘Adviseer de populatie aspirine te gaan slikken?’

Testen

Opgave 13

Bij het houden van een enquête wordt een steekproef uit een bepaalde populatie getrokken. Elke manier waarop je dit doet heeft zijn voor en tegen, vaak afhankelijk van de populatie.

a Een onderzoeksbureau onderzoekt of mensen op een krant zijn geabonneerd door een telefonische enquête waarbij de nummers aselect uit een telefoonboek worden getrokken. Zal de uitslag van deze enquête een goed beeld geven of vindt er vertekening plaats? Motiveer je antwoord.

b Je houdt een telefonische enquête onder alleen mobiele nummers met ‘random digit dialling’. Is dit voor elke populatie geschikt?

c Je houdt een enquête via een jongerenwebsite als het gaat om het uitgavenpatroon van jongeren. Goede aanpak?

d Je houdt een enquête via de ANWB-website als het gaat om ‘rekening rijden’. Goede aanpak?

e Je houdt een enquête via e-mail onder de leden van een bepaalde club over contributieverhoging. Goede aanpak?

f Je houdt een schriftelijke enquête onder 5000 aselect gekozen adressen. Welk nadeel heeft deze aanpak?

Practicum

Hoe je te werk kunt gaan bij **het verzamelen van data middels een enquête** in Google Drive zie je in het practicum:

- **Data verzamelen met een enquête**

Het **trekken van een aselecte steekproef** kun je simuleren met deze VUstat-app. Daarin kun je zien welk percentage een aselecte steekproef van bijvoorbeeld 200 (in te stellen bij ‘omvang’) uit een populatie van 5000 oplevert als je het percentage in de steekproef weet (instellen bij "percentage Groen"). Je kunt ook heel veel van die steekproeven laten doen en zien hoezeer de percentages gespreid liggen. Ga naar de app:

- **Steekproeven uit ja/nee populatie**

Figuur 1.5

1.2 Vuistregels

Inleiding

Je hebt al gezien dat in de statistiek de normale verdeling een belangrijke rol speelt. Onder andere bij het bepalen van betrouwbaarheidsintervallen en foutenmarges bij het schatten van populatieproporties en populatiegemiddelden. Daarbij maak je gebruik van een aantal vuistregels die voor elke normale verdeling gelden.

Je leert in dit onderwerp

- werken met drie vuistregels voor de normale verdeling.
- dat een steekproevenverdeling bij benadering een normale verdeling is.

Voorkennis

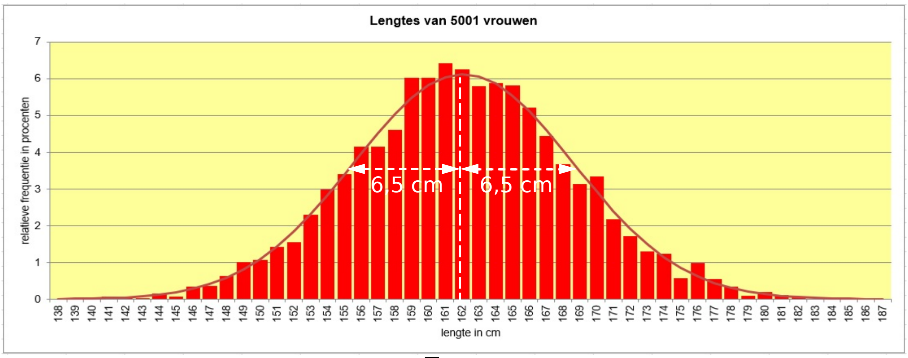
- soorten statistische variabelen herkennen;
- de begrippen onderzoek, steekproef, populatie en representatief, simulatie;
- het begrip normale verdeling met gemiddelde en standaardafwijking.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet een staafdiagram van de lengtes van 5001 vrouwen uit de dataset **Statistiek Bijenkorf 1947**.

Die verdeling heeft een vrijwel zuivere 'klokvorm'. Je noemt dit een normale verdeling, elke normale verdeling heeft zo'n klokvorm. De gemiddelde lengte $\overline{L} \approx 162$ cm en de standaardafwijking $\sigma(L) \approx 6{,}5$ cm zijn in de figuur aangegeven.



$\overline{L} \approx 162$ $\quad s_L \approx 6{,}5$

Figuur 2.1

Beide getallen leggen de normale verdeling volledig vast, ze zijn karakteristiek voor deze normale verdeling. De standaardafwijking geef je aan met een Griekse letter s, de 'sigma' in $\sigma(L)$. Voor het gemiddelde gebruik je ook wel een Griekse letter m, de 'mu' in $\mu(L)$. Op grond van alleen het gemiddelde en de standaardafwijking kan elke normale verdeling worden getekend.

a Welke lengtes horen bij het interval $\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma$?

b Ga na dat bijna 100% van de lengtes van deze vrouwen binnen dat interval vallen.

c Hoeveel procent van de lengtes valt binnen het interval $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$?

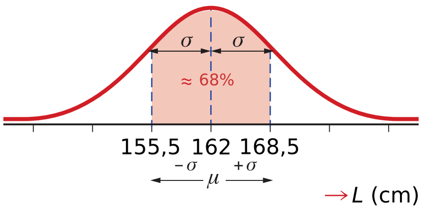
Uitleg 1

Bekijk de applet.

Bij statistisch onderzoek maak je vaak gebruik van de normale verdeling. Een goed voorbeeld komt uit een onderzoek uit 1947 van de Bijenkorf naar de lengtes van Nederlandse vrouwen. Die lengtes waren ongeveer normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu(L) \approx 162$ cm en een standaardafwijking van $\sigma(L) \approx 6{,}5$ cm.

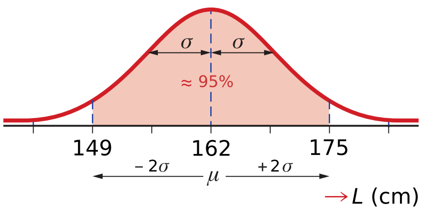
Bekijk de normale verdeling van de lichaamslengtes van de vrouwen.

Bekijk de lichaamslengtes tussen $162 - 6{,}5 = 155{,}5$ cm en $162 + 6{,}5 = 168{,}5$ cm.



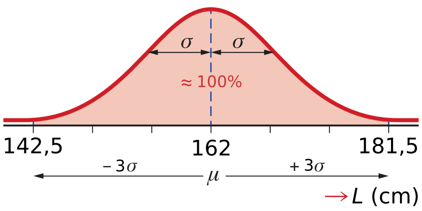
Figuur 2.2

Bekijk de lichaamslengtes tussen $162 - 2 \cdot 6{,}5 = 149$ cm en $162 + 2 \cdot 6{,}5 = 175$ cm.



Figuur 2.3

Bekijk de lichaamslengtes tussen $162 - 3 \cdot 6{,}5 = 142{,}5$ cm en $162 + 3 \cdot 6{,}5 = 181{,}5$ cm.



Figuur 2.4

Experimenteer zelf nog met andere lichaamslengtes.

Omdat de vorm van een normale verdeling altijd hetzelfde is zijn ook de percentages van elke normale verdeling hetzelfde. Als $\mu(L)$ en $\sigma(L)$ bekend zijn, ligt de normale verdeling helemaal vast. Je kunt percentages aflezen of berekenen. Het percentage onder elke normale verdeling met waarden

- tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ cm is 68%;
- tussen $\mu - 2 \cdot \sigma$ en $\mu + 2 \cdot \sigma$ cm is 95% ;
- tussen $\mu - 3 \cdot \sigma$ en $\mu + 3 \cdot \sigma$ cm is nagenoeg 100%.

Deze percentages zijn vuistregels, want ze zijn afgerond. Deze vuistregels gebruik je vaak bij berekeningen.

Opgave 1

Gegeven is de normale verdeling uit **Uitleg 1**. Gebruik de vuistregels.

a De Bijenkorf maakt kleding voor deze groep vrouwen. Hoeveel procent van de kleding moet er gemaakt worden voor de vrouwen met een lichaamslengte tussen 155,5 en 168,5 cm?

b Hoeveel procent van de kleding moet er gemaakt worden voor de vrouwen met een lichaamslengte tussen 149 en 175 cm?

c Hoeveel procent van deze kleding moet er gemaakt worden voor de vrouwen met een lichaamslengte tussen 162 en 168,5 cm?

Opgave 2

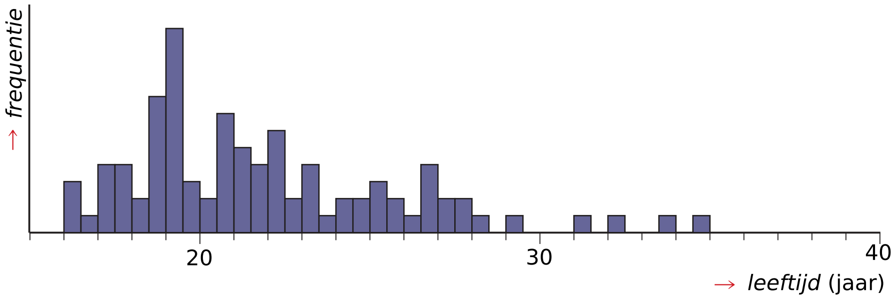
Het gewicht van potten jam is normaal verdeeld. Het gemiddelde is 200 gram en de standaardafwijking is 3 gram. Er mag maximaal 3% van de potten jam minder dan 194 gram wegen. Is aan deze eis voldaan?

Uitleg 2

Er is een heel groot concert met tienduizenden bezoekers. De organisatoren van het concert willen de gemiddelde leeftijd van de bezoekers weten.

Bij elk van de 50 ingangen zetten ze een enquêteur die aan elke volgende 100e bezoeker de leeftijd vraagt. Zo worden er 50 steekproeven genomen. Ga ervan uit dat deze steekproeven representatief zijn. Omdat niet iedereen wordt ondervraagd, kun je de gemiddelde leeftijd niet precies te weten komen. Je kunt deze alleen maar schatten.

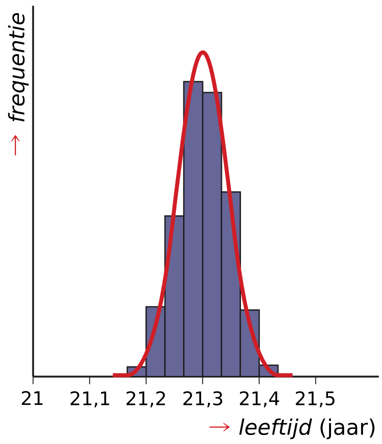
In het linker histogram zie je de resultaten van één van de 50 steekproeven.



Figuur 2.5

Het lijkt erop dat de leeftijden van de concertbezoekers niet een normale verdeling hebben, want de verdeling ziet er niet symmetrisch uit.
Van alle 50 steekproeven die genomen zijn is de gemiddelde leeftijd uitgerekend. Ook deze gegevens zijn in een histogram verwerkt.

Dit histogram heeft ongeveer een klokvorm en is daarom te benaderen met een normale verdeling. De verdeling van de gemiddelden van veel, minstens 50 steekproeven, is altijd bij benadering een normale verdeling.



Figuur 2.6

Opgave 3

Bestudeer **Uitleg 2**. Bekijk de verdeling van de gemiddelden van de leeftijd in de steekproeven.

a Lees uit de figuur het gemiddelde van deze normale verdeling af.

b Geef met de figuur een schatting van de standaardafwijking van deze normale verdeling.

c Stel je neemt opnieuw een serie van die steekproeven. Tussen welke leeftijden zal het gemiddelde in 95% van deze steekproeven liggen?

Opgave 4

Bestudeer **Uitleg 2**. De verkopers van drinken willen nog nauwkeuriger weten hoe de leeftijden van concertgangers verdeeld zijn. Noem twee mogelijke manieren om dit te bereiken.

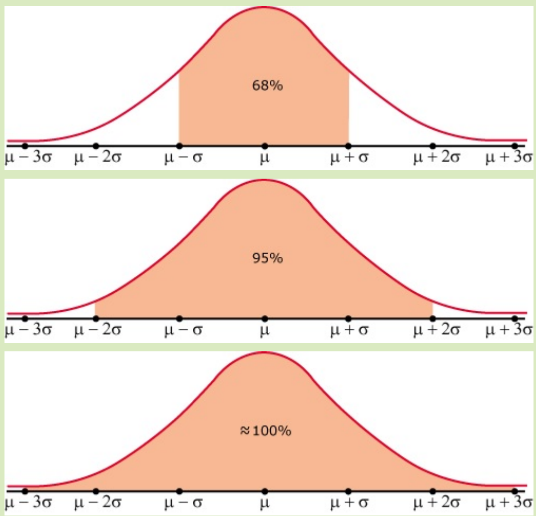
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Deze **vuistregels** gelden voor alle normaal verdeelde variabelen X:

- Ongeveer 68% van alle waarden van X ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$. De buigpunten van de normale verdeling liggen ook op deze afstand van μ.
- Ongeveer 95% van alle waarden van X ligt tussen $\mu - 2 \cdot \sigma$ en $\mu + 2 \cdot \sigma$.
- Nagenoeg 100% van alle waarden van X ligt tussen $\mu - 3 \cdot \sigma$ en $\mu + 3 \cdot \sigma$.

Er zijn veel statistische variabelen die niet normaal verdeeld zijn. De gegevens van een representatieve steekproef van zo'n populatie zijn dan ook NIET normaal verdeeld, want een representatieve steekproef heeft dezelfde verdeling als de populatie.



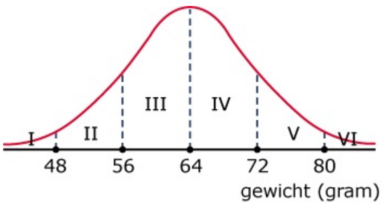
Figuur 2.7

Van elke steekproef kun je het gemiddelde of het gemiddelde percentage uitrekenen. Er blijkt iets bijzonders te gebeuren als je dit met veel steekproeven doet: de verdeling van de gemiddeldes of de gemiddelde percentages van de steekproeven lijkt steeds meer op een normale verdeling als het aantal steekproeven groter wordt. Dit heet een **steekproevenverdeling**. Bekijk de applet in het **Practicum**.

In de praktijk zijn minstens 50 steekproeven nodig voordat de steekproevenverdeling op een normale verdeling gaat lijken.

Voorbeeld 1

Eieren kunnen op grond van hun gewicht in klassen verdeeld worden. De gewichten zijn vrijwel normaal verdeeld met een gemiddelde van 64 gram en een standaardafwijking van 8 gram. In deze figuur zie je zes gewichtsklassen voor de gewichten van de eieren. Geef bij elke klasse de grenzen aan van het gewicht van de eieren die er in zitten en bepaal hoeveel procent van de eieren het betreft.



Figuur 2.8

Antwoord

De klassengrenzen zijn zo gekozen dat ze precies passen bij de vuistregels voor de normale verdeling:

- Klasse I: ≤ 48 gram met 2,5% van de eieren.
- Klasse II: tussen 48 en 56 gram ligt 13,5% van de eieren.
- Klasse III: tussen 56 en 64 gram ligt 34% van de eieren.
- Klasse IV: tussen 64 en 72 gram ligt 34% van de eieren.
- Klasse V: tussen 72 en 80 gram ligt 13,5% van de eieren.
- Klasse VI: ≥ 80 gram met 2,5% van de eieren.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Leg uit waaraan je ziet dat de klassengrenzen precies passen bij de vuistregels.

b Hoeveel procent van de eieren is lichter dan 80 gram?

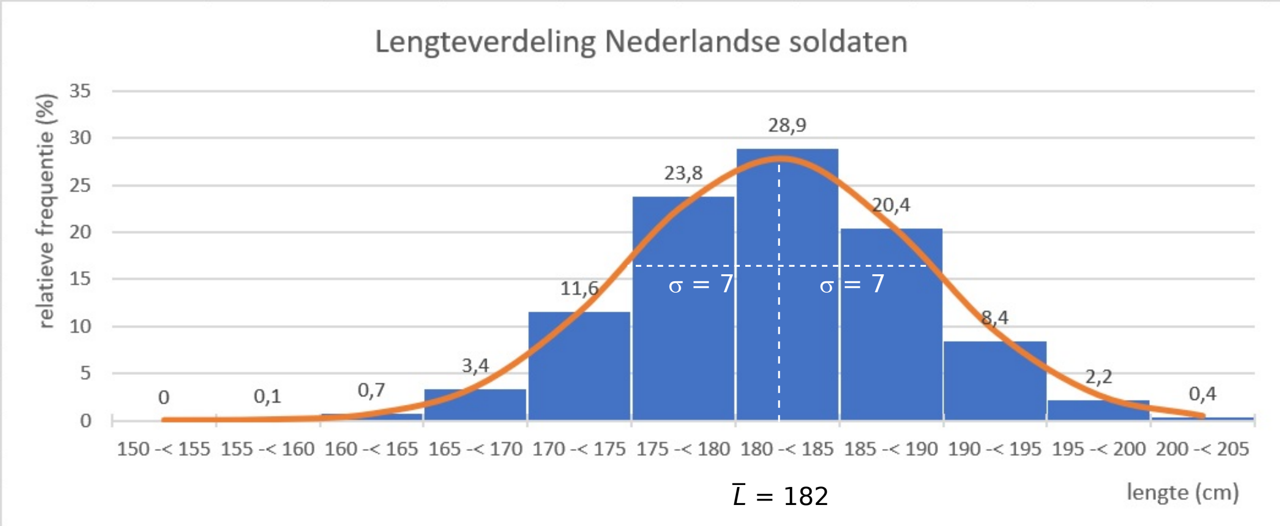
c Hoeveel procent van de eieren is zwaarder dan 72 gram?

d Je koopt bij de eierboer 100 ongesorteerde eieren. Hoeveel daarvan zullen waarschijnlijk minder dan 56 gram wegen?

e Waarom kun je niet met zekerheid zeggen dat er 16 eieren minder dan 56 gram wegen?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Normale verdeling



Figuur 2.9

Hier zie je een normale verdeling van de lengte van Nederlandse soldaten met $\mu = 182$ en $\sigma = 7$.

Bereken het percentage van deze soldaten met een lengte van meer dan 189 cm.

Antwoord

De eerste vuistregel zegt dat 68% van de soldaten een lengte heeft in het interval $[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = [175,189]$.

Dit betekent dat een percentage van $100 - 68 = 32$% daar buiten ligt.

Boven de 189 cm zit dus 16% van deze soldaten.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Tussen welke lengtes zit 95% van deze soldaten?

b Je wilt weten hoeveel procent van de soldaten langer is dan 195 cm. Waarom kun je dit niet met de vuistregels beantwoorden?

c Bepaal het percentage van de soldaten dat langer is dan 196 cm.

d Tussen welke lengtes zitten deze soldaten vrijwel allemaal?

Opgave 7

De gemiddelde lengte van vrouwen is bij benadering normaal verdeeld. In 2010 was de gemiddelde lengte van de vrouwen in Nederland 170 cm met een standaardafwijking van 6,5 cm.

a Schets hierbij een normale verdeling met de grenzen die horen bij de vuistregels.

b Schrijf drie uitspraken op over de lengte van vrouwen in 2010 gebaseerd op de vuistregels.

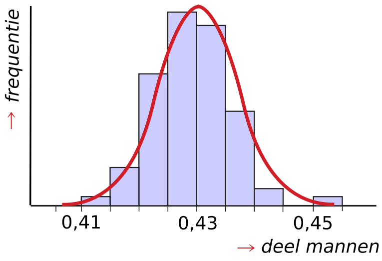
Voorbeeld 3

Er is een heel groot concert. Er zijn 50 ingangen. De verkopers van shirts willen weten hoe groot het deel mannen er is. Bij elke ingang zetten ze een enquêteur die van elke tiende bezoeker opschrijft of het een man is. Bij elkaar hebben de verkopers dus 50 steekproeven genomen. We nemen aan dat deze steekproeven representatief zijn.

Van de 50 steekproeven wordt uitgerekend welk deel van de bezoekers man is. Daar komt een getal tussen 0 (geen mannen) en 1 (allemaal mannen) uit. Deze 50 getallen worden in een histogram gezet. Het histogram lijkt op een normale verdeling. Deze normale verdeling is getekend.

Deze normale steekproevenverdeling heeft een gemiddelde $\mu = 0{,}43$. Voor de standaardafwijking geldt $\sigma = 0{,}01$.

Waarom zal in 95% van de steekproeven het deel van de bezoekers dat man is, tussen de $0{,}41$ en $0{,}45$ liggen?



Figuur 2.10

Antwoord

De steekproeven zijn representatief, dus er is alleen sprake van toevallige verschillen. Het deel mannen in deze steekproeven is normaal verdeeld met $\mu = 0{,}43$. De getallen $0{,}41$ en $0{,}45$ liggen daar $2 \cdot \sigma$ vanaf. Volgens de vuistregels is het percentage van de steekproeven waarin het deel mannen bij het concert tussen $0{,}41$ en $0{,}45$ ligt, dus 95%.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Bij hoeveel procent van de steekproeven ligt het deel van de bezoekers dat man is, tussen de $0{,}42$ en $0{,}44$?

b Bij hoeveel procent van de steekproeven ligt het deel van de bezoekers dat man is, boven de $0{,}46$?

Verwerken

Opgave 9

Een medicijnfabrikant heeft een statistisch onderzoek gedaan naar het gewicht X van tabletten. Het histogram was ongeveer klokvormig met $\mu(X) = 500$ mg en $\sigma(X) = 10$ mg.

a Maak een schets van de bijbehorende normale verdeling. Zet de variabele, de symbolen voor gemiddelde en standaardafwijking, de waarden en de eenheden er in.

b Hoeveel procent van de tabletten is lichter dan het gemiddelde gewicht?

c Geef een schatting van het percentage tabletten dat tussen 490 mg en 510 mg weegt.

Opgave 10

Een maat voor iemands intelligentie is het intelligentiequotiënt, IQ. Het IQ wordt bepaald door de score op een intelligentietest te vergelijken met de gemiddelde score op dezelfde test van leeftijdsgenoten. Het IQ is normaal verdeeld met een gemiddelde van 100 en een standaardafwijking van 15. Maak gebruik van de vuistregels en rond antwoorden af op halve procenten.

a Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ tussen 85 en 115?

b Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ hoger dan 115?

c Met welk IQ behoor je tot de mensen die de 16% laagste scores hebben?

d Hoeveel procent is de kans dat het IQ van een willekeurige voorbijganger minder is dan 130?

Opgave 11

Het gemiddelde gewicht van mannen ouder dan 20 jaar, is bij benadering normaal verdeeld. In 2011 was het gemiddelde gewicht van een man 84 kg. De standaardafwijking bij mannen is 11 kg.

Maak gebruik van de vuistregels en rond antwoorden af op halve procenten.

a Hoeveel procent van de mannen is naar schatting zwaarder dan 73 kg én lichter dan 84 kg?

b Hoeveel procent van de mannen is naar schatting zwaarder dan 73 kg én lichter dan 95 kg?

c Hoeveel procent van de mannen is naar schatting zwaarder dan 73 kg én lichter dan 106 kg?

d Mannen waarvan het gewicht meer dan twee keer de standaardafwijking afwijkt van het gemiddelde, zijn te licht of te zwaar. Hoeveel procent van de mannen is te licht of te zwaar?

(bron: CBS)

Opgave 12

In een groot stadion zijn bezoekers willekeurig door 75 ingangen naar de verschillende vakken in het stadion gegaan. Bij alle ingangen is door middel van een steekproef de leeftijden van de bezoekers gevraagd. Hierdoor zijn 75 steekproeven genomen. Je mag er vanuit gaan dat de steekproeven representatief en voldoende groot zijn. Uit dit onderzoek kwam naar voren dat de leeftijd van de bezoekers niet normaal verdeeld is.

a Leg uit of de leeftijd van de groep bezoekers van één ingang normaal verdeeld is.

b Leg uit of het steekproevengemiddelde van de leeftijd normaal verdeeld is.

Opgave 13

De gemiddelde lengte van mannen is bij benadering normaal verdeeld. In 2010 was de gemiddelde lengte van de mannen in Nederland 181 cm met een standaardafwijking van 7 cm.

a Schrijf de drie vuistregels op voor de lengte van mannen in 2010.

b Schrijf nog minimaal twee uitspraken op over de lengte van mannen in 2010, gebaseerd op de vuistregels.

c In 1981 waren mannen gemiddeld 3 cm kleiner. De standaardafwijking was vrijwel hetzelfde, dus 7 cm. Welke getallen in de antwoorden van de vorige twee vragen veranderen wel, en hoe, en welke niet?

Opgave 14

Er is onderzoek gedaan onder treinreizigers op het traject Den Haag CS - Utrecht CS. Er is gevraagd naar de totale reisduur van vertreklocatie (bv. huis) naar bestemming (bv. werk). De totale reisduur bleek normaal verdeeld te zijn. De standaardafwijking van deze totale reisduur bleek 15 minuten te zijn.

Bekijk nu niet de $2{,}5$% reizigers die de langste totale reisduur hadden. Bekijk ook niet de $2{,}5$% reizigers die de kortste totale reisduur hadden. Wat is het verschil in reistijd tussen langste en kortste totale reisduur van de overgebleven reizigers?

Toepassen

Opgave 15: Kniehoogtes

Open **het bestand met kniehoogtes** in Excel.

Dit is een Excel-bestand met een tabel van de kniehoogtes in cm van de 5001 vrouwen uit het onderzoek dat in 1947 door Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf is gedaan.

a Bereken met behulp van Excel de gemiddelde kniehoogte en de standaardafwijking.

b Hoe kun je onderzoeken of de kniehoogte normaal verdeeld is?

c Voer het onderzoek bedoeld bij b uit.

Testen

Opgave 16

De gemiddelde lengte van vrouwen is bij benadering normaal verdeeld. In 2010 was de gemiddelde lengte van de vrouwen in Nederland $167{,}5$ cm met een standaardafwijking van $6{,}5$ cm. Maak gebruik van de vuistregels en rond antwoorden af op halve procenten.

a Hoeveel procent van de vrouwen was waarschijnlijk kleiner dan $154{,}5$ cm?

b Hoeveel procent van de vrouwen was waarschijnlijk kleiner dan $180{,}5$ cm?

c Hoe groot is de kans dat een willekeurige vrouw groter is dan $180{,}5$ cm?

Opgave 17

In een concertzaal zijn bezoekers willekeurig door vier ingangen naar binnen gegaan. Bij alle ingangen zijn door middel van een steekproef de leeftijden van de bezoekers gevraagd. Hierdoor zijn vier steekproeven genomen. Je mag ervan uitgaan dat de steekproeven representatief en voldoende groot zijn. Uit dit onderzoek kwam naar voren dat de leeftijd van de bezoekers geen normale verdeling heeft.

a Leg uit of de leeftijd van de groep bezoekers van één ingang een normale verdeling heeft.

b Leg uit of het steekproefgemiddelde van de leeftijd een normale verdeling heeft.

Practicum

Het **trekken van een aselecte steekproef** kun je simuleren met deze VUstat-apps.
In de eerste simulatie kun je zien welk percentage een aselecte steekproef van bijvoorbeeld 200 (in te stellen bij ‘omvang’) uit een populatie van 5000 oplevert als je het percentage in de steekproef weet (instellen bij ‘percentage Groen’). Je kunt ook heel veel van die steekproeven laten doen en zien hoezeer de percentages gespreid liggen.
In de tweede simulatie trek je een groot aantal steekproeven (steekproefgrootte in te stellen) uit een populatie waarvan het populatiegemiddelde is in te stellen. Het doel is om te laten zien dat die steekproefgemiddelden normaal verdeeld liggen.

- **Simulatie steekproeven uit ja/nee populatie**
- **Simulatie steekproeven om een populatiegemiddelde te schatten**

Figuur 2.11

1.3 Populatieproportie schatten

Inleiding

Wat zegt de steekproefproportie over de populatieproportie? Kun je zo maar zeggen dat als je 10% rotte sinaasappels aantreft in jouw steekproef, dat dan ook 10% van alle sinaasappels rot is? Met welke betrouwbaarheid kan dat wel? Hoe bereken je de foutmarge?

Over deze vragen gaat dit onderdeel.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- vanuit een steekproefproportie een bijbehorende standaardafwijking berekenen;
- een betrouwbaarheidsinterval van een populatieproportie berekenen met behulp van de vuistregels.

Voorkennis

- de begrippen onderzoek, steekproef, populatie en representatief;
- de vuistregels van de normale verdeling en van elke steekproevenverdeling.

Verkennen

Opgave V1

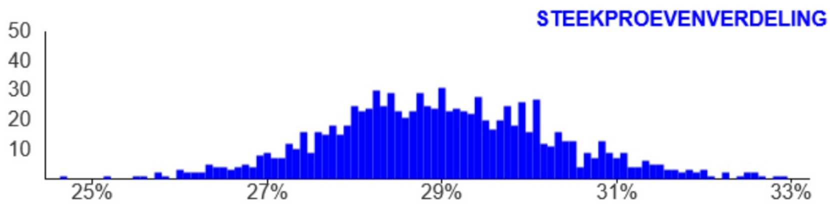
Je wilt bepalen hoeveel procent van de Nederlandse vrouwen tussen 15 en 25 jaar rookt.
In een aselecte steekproef van 1200 vind je 352 vrouwen die roken.

a Laat zien dat de steekproefproportie p gelijk aan 29,3% is.

In een tweede aselecte steekproef van 1200 vind je 338 vrouwen die roken.

b Bereken ook nu de steekproefproportie p.

Je ziet dat het steekproefresultaat afhankelijk is van toeval. Stel dat je in totaal 1000 van deze steekproeven neemt en je maakt dit staafdiagram van alle steekproefproporties.
Neem aan dat de steekproefproporties normaal verdeeld zijn met gemiddelde 0,29 en standaardafwijking 0,013.



Figuur 3.2

c Tussen welke waarden liggen dan de steekproefproporties van 95% van de steekproeven?

d Kun je nu met een betrouwbaarheid van 95% een uitspraak doen over het percentage vrouwen tussen 15 en 25 jaar die roken?

e Waarom zullen er in de praktijk nooit 1000 van die steekproeven worden genomen?

In de populatie vrouwen rookt een bepaald percentage, je weet het alleen niet.
Maar in het **Practicum** kun je bij een populatieproportie die je zelf instelt, nagaan hoe de steekproefproporties zich gedragen. Je gebruikt VUstat.

f Voer zo'n simulatie van 1000 steekproeven uit een populatie van 1200 uit met een populatieproportie van 0,30. Ga na dat de steekproefproporties ook rond de $0{,}30 \cdot 1200 = 360$ uitkomen.

Uitleg

Stel dat men wil onderzoeken hoeveel procent van de populatie jongeren vanaf 12 t/m 16 jaar lid is van een sportvereniging (geen fitnessclub). Dit heet de populatieproportie.

Het is ondoenlijk om de hele populatie te bevragen. Dus wordt er een (aselecte, representatieve) steekproef getrokken van $n = 500$ jongeren van 12 t/m 16. Er blijken 360 jongeren in de steekproef ‘ja’ te antwoorden op de vraag of ze lid zijn van een sportvereniging.

De steekproefproportie is $p = \frac{360}{500} = 0{,}72$ ofwel 72%,

Maar wat zegt dit over de populatieproportie?

Bij **Verkennen V1** heb je kunnen zien dat het trekken van veel even grote steekproeven uit een populatie een verzameling steekproefproporties p oplevert die normaal is verdeeld met een gemiddelde in de buurt van de populatieproportie. In de bijbehorende standaardafwijking gebruik je p in plaats van de onbekende populatieproportie:

$$\sigma = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Volgens de vuistregels van een normale verdeling ligt in 95% van de steekproeven p minder dan 2σ van de populatieproportie af. Nu is die populatieproportie nog onbekend, je hebt alleen p.

En als p minder dan 2σ van de populatieproportie af ligt, ligt de populatieproportie ook minder dan 2σ van p af. Dat gaat goed in 95% van de gevallen.

In de beschreven situatie is $\sigma = \sqrt{\frac{0{,}72 \cdot (1-0{,}72)}{500}} \approx 0{,}020$.

Dus de populatieproportie ligt dan (met een betrouwbaarheid van 95%) minder dan $2\sigma = 2 \cdot 0{,}020 = 0{,}04$ van $p = 0{,}72$ af, dus tussen $0{,}72 - 0{,}04 = 0{,}68$ en $0{,}72 + 0{,}04 = 0{,}76$.
Of in procenten tussen 68% en 76%.
Dit heet het 95% betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg**. Ga uit van het beschreven onderzoek onder jongeren vanaf 12 t/m 16 jaar.

a Reken zelf p en de standaardafwijking σ van de steekproevenverdeling na.

b Gebruik in het **Practicum** de simulatie van VUstat. Stel een populatieproportie van 72% in en simuleer eerst één steekproef met $n = 500$ en vervolgens een grote steekproevenverdeling. Ga na, dat het gemiddelde van de steekproevenverdeling ongeveer op 72% uitkomt en dat de standaardafwijking van de steekproevenverdeling voldoet aan de formule in de uitleg.

c Natuurlijk weet je in de praktijk niet hoe groot de populatieproportie is, dus kun je zo'n simulatie dan niet gebruiken.
Maar ga na dat je door nieuwe simulaties te doen met populatieproportie 72% en $n = 500$ je wel steeds op ongeveer dezelfde gemiddelde steekproevenproportie en standaardafwijking uitkomt.

Opgave 2

Er wordt een onderzoek gedaan naar welk deel van festivalgangers ouder dan 40 jaar is. Bij een festival is door middel van een steekproef aan 150 bezoekers de leeftijd gevraagd. Van deze groep blijken 50 bezoekers 40 jaar of ouder te zijn. Bereken in vier decimalen nauwkeurig de bijbehorende steekproefproportie en de standaardafwijking van de steekproevenverdeling. Geef ook het 95% betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Opgave 3

Er wordt in **Uitleg** geredeneerd met een betrouwbaarheid van 95%.

a Tussen welke grenzen ligt in 68% van de steekproeven het ‘Ja’-deel van de populatie?

b Tussen welke grenzen ligt in bijna 100% van de steekproeven het ‘Ja’-deel van de populatie?

Opgave 4

Om te bepalen hoeveel procent van de Nederlanders linkshandig is wordt een aselecte steekproef van 1500 Nederlanders getrokken. Daarvan waren er 136 linkshandig.

a Bereken het deel van de steekproef dat linkshandig is.

b Bereken de standaardafwijking van steekproevenverdeling in de steekproef. Rond je antwoord af op vier decimalen.

c Tussen welke waarden ligt met 95% betrouwbaarheid het deel van de populatie dat linkshandig is? Geef je antwoord in procenten in één decimaal nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij statistisch onderzoek worden uitspraken gedaan over de populatie.

Er wordt vaak gebruik gemaakt van vragen met maar 2 mogelijke antwoorden. Het deel van de steekproef dat dan het ene antwoord geeft heet de **steekproefproportie**, p. Andere steekproeven van grootte n zullen vaak andere waarden van p geven. Maar deze steekproefproporties zijn altijd normaal verdeeld. Deze normale verdeling heet **steekproevenverdeling** met standaardafwijking σ.

Er moet een conclusie worden getrokken over het deel van de populatie dat dit antwoord zou geven, de **populatieproportie**. De standaardafwijking van de steekproevenverdeling is:

$$\sigma = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Voor de populatieproportie geldt dan:

- In 68% van de steekproeven ligt de populatieproportie tussen $p - \sigma$ en $p + \sigma$.
  Dit heet het 68%-**betrouwbaarheidsinterval** van p en de 68% heet de **betrouwbaarheid**.
- In 95% van de steekproeven ligt de populatieproportie tussen $p - 2 \cdot \sigma$ en $p + 2 \cdot \sigma$.
  Dit heet het 95%-betrouwbaarheidsinterval van p.
- In bijna 100% van de steekproeven ligt de populatieproportie tussen $p - 3 \cdot \sigma$ en $p + 3 \cdot \sigma$.

De formule voor σ en de vuistregel voor een betrouwbaarheid van 95% vind je op deze **formulekaart**. In dit geval is $2 \cdot \sigma$ de **foutmarge**.

Voorbeeld 1

Er wordt onderzoek gedaan naar het percentage voorstanders van de hypotheekrenteaftrek onder stemgerechtigden. Gekozen is een betrouwbaarheid van 95%. Er wordt een steekproef genomen met een omvang van 1000. Het aantal voorstanders 570. Bereken het betrouwbaarheidsinterval van de populatieproportie van de voorstanders. Leg uit wat dit betekent.

Antwoord

De steekproefproportie is $p = \frac{570}{1000} = 0{,}57$.

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}57 \cdot (1-0{,}57)}{1000}} \approx 0{,}0157$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval ligt tussen $p - 2 \cdot \sigma$ en $p + 2 \cdot \sigma$.

Dus tussen $0{,}57 - 2 \cdot 0{,}0157 \approx 0{,}539$ en $0{,}57 + 2 \cdot 0{,}0157 \approx 0{,}601$. Je noemt die $2 \cdot 0{,}0157 \approx 3{,}1\%$ wel de foutmarge van de schatting van de populatieproportie.

De betekenis hiervan kun je op meerdere manieren omschrijven. Bijvoorbeeld:

- Het percentage voorstanders van hypotheekrenteaftrek wordt geschat tussen de $53{,}9$ en $60{,}1$.
- Bij 100 goede steekproeven, zal de populatieproportie ongeveer 95 keer tussen de zo berekende grenzen liggen.

Opgave 5

Bij een onderzoek naar de slagingskans voor het rijexamen wordt in een bepaald jaar van een steekproef van 800 pogingen vastgesteld of het examen is gehaald of niet. Van die 800 pogingen bleken er 683 succesvol te zijn.

a Bereken de steekproefproportie. Geef je antwoord exact en afgerond op twee decimalen.

b Bereken de standaardafwijking van de steekproevenverdeling. Rond je antwoord af op vier decimalen.

c Bepaal de foutenmarge bij een betrouwbaarheid van 95%.

Opgave 6

De Consumentenbond wil weten of een bepaald type laptop minstens acht uur op de accu kan werken. De bond test 50 aselect getrokken laptops van dat type. Het blijkt dat 41 van die laptops inderdaad minstens acht uur werkt op de accu.

a Hoeveel bedraagt de proportie laptops p in de steekproef, dat acht uur lang op de batterij werkt?

b Bereken de steekproefstandaardafwijking σ van de steekproefproportie volgens de formule in de uitleg. Rond je antwoord af op vier decimalen.

c Hoe groot is het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de steekproefproportie?

d Schrijf nu de uitspraak op die je met 95% betrouwbaarheid kunt doen.

Voorbeeld 2

Een fabrikant laat statistisch onderzoek doen. Hij wil weten hoeveel procent van de tennisballen die hij laat maken, zwaarder is dan $59{,}4$ gram. Uit een kleine steekproef komt dat ongeveer 6% van de tennisballen te zwaar is. De fabrikant neemt vervolgens een grotere steekproef om met een betrouwbaarheid van 95% te kunnen vaststellen dat tussen 5% en 7% van zijn tennisballen zwaarder is dan $59{,}4$ gram.

Hoe groot moet de steekproefomvang van de tweede steekproef zijn?

Antwoord

Ook voor de grotere steekproef moet dan

$p = \frac{0{,}05+0{,}07}{2} = 0{,}06$, dezelfde 6% als voor de kleinere steekproef.

Omdat het 95%-betrouwbaarheidsinterval ligt tussen $0{,}06 - 2\sigma$ en $0{,}06 + 2\sigma$ is $\sigma = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005$.

Dit betekent: $0{,}005 = \sqrt{\frac{0{,}06 \cdot (1-0{,}06)}{n}}$.

Oplossen geeft: $n = 2256$.

Dus er moeten minstens 2256 tennisballen worden getest.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Waar komt $\sigma = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01$ vandaan?

b Bereken zelf de waarde van n.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**. Als de fabrikant het 95% betrouwbaarheidsinterval tussen 4% en 8% had willen hebben, hadden er dan meer of minder ballen moeten worden getest? Licht je antwoord toe.

Verwerken

Opgave 9

Bij een aselecte steekproef in jouw provincie blijken onder 1500 geënquêteerden er 833 tegen de aanleg van een provinciale weg te zijn.

a Bereken de steekproefproportie.

b Bereken de standaardafwijking van deze steekproevenverdeling. Rond je antwoord af op vier decimalen.

Opgave 10

Bij een statistisch onderzoek is een steekproefproportie $p \approx 0{,}40$ gevonden en de standaardafwijking van de steekproevenverdeling $\sigma \approx 0{,}025$. Hiermee kan de populatieproportie met een zekere betrouwbaarheid worden geschat.

a Welke grenzen heeft het 68%-betrouwbaarheidsinterval?

b Welke grenzen heeft het 95%-betrouwbaarheidsinterval?

c Welke grenzen heeft het bijna 100%-betrouwbaarheidsinterval?

Opgave 11

Bij een aslecte steekproef op een grote school blijken in een steekproef van 150 leerlingen er 31 bloedgroep O te hebben.

a Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

b Wat zijn de gevolgen voor de breedte van het betrouwbaarheidsinterval als blijkt dat het aantal leerlingen met bloedgroep O niet 31 maar 32 is?

c Wat zijn de gevolgen voor de grenzen van het 95% betrouwbaarheidsinterval als blijkt dat het aantal leerlingen met bloedgroep O niet 31 maar 32 is?

Opgave 12

Er worden 500 aselect getrokken laptops onderzocht. Er blijken 406 van die laptops minstens 8 uur te werken op de batterij. Welke uitspraak kun je nu met een betrouwbaarheid van 95% doen?

Opgave 13

Uit een enquête in opdracht van de Stichting tegen Kanker van maart/april 2007 onder 1988 Belgen bleek 61% voorstander te zijn van het rookvrij maken van cafés. In oktober 2006 was dat nog 55% van de even grote groep van toen ondervraagde personen.

a Bepaal bij het onderzoek van oktober 2006 het betrouwbaarheidsinterval bij een betrouwbaarheid van 95%. Geef je antwoord in procenten.

b Bepaal bij het onderzoek van maart/april 2007 het betrouwbaarheidsinterval bij een betrouwbaarheid van 95%. Geef je antwoord in procenten.

c Welke conclusie kun je nu trekken?

Opgave 14

a Bij een steekproef van 500 lampen vond de controledienst 56 kapotte lampen. Wat kun je met 95% betrouwbaarheid zeggen over het percentage kapotte lampen van de hele populatie?

b Bij een steekproef van 500 lampen vond de controledienst 444 goede lampen. Wat kun je met 95% betrouwbaarheid zeggen over het percentage goede lampen van de hele populatie?

c Vergelijk de antwoorden van de vragen a en b met elkaar. Wat valt je op? Geef een verklaring.

Toepassen

Opgave 15: Opiniepeilingen

Voorafgaande aan verkiezingen worden opiniepeilingen gehouden. Daarbij worden door een onderzoeksbureau 2000 aselect getrokken Nederlanders gevraagd naar de partij van hun voorkeur. Een partij gaat in zo'n opiniepeiling van 30 naar 31 zetels (van de 150 zetels).

Gebruik een betrouwbaarheidsniveau van 90%. Daar hoort een foutmarge van $1{,}65 \cdot \sigma$ bij.

Onderzoek of er reden tot blijdschap voor deze partij is vanwege deze peiling.

Opgave 16: Hoe groot moet je steekproef zijn?

Je wilt een populatieproportie bepalen met een steekproef. Je wilt dat de foutmarge maximaal $0{,}03$ is bij een 95% betrouwbaarheid. Ga uit van $p_{\text{steekproef}} = 0{,}5$ en een stad met 500000 inwoners. Hoeveel mensen moet je minstens ondervragen?

Testen

Opgave 17

Helmond is een stad van ongeveer 90000 inwoners en de stad heeft een stadspanel met 1300 deelnemers. Op een verzoek van de gemeente om een vragenlijst over de lokale omroep in te vullen hebben 839 mensen gereageerd.
Uit deze meting blijkt dat 37% de lokale omroep niet kent.

a Welke uitspraak kun je doen met 95%-betrouwbaarheid over de onbekendheid van de lokale omroep in Helmond?

b Welke uitspraak kun je met 95% betrouwbaarheid doen over de bekendheid van de lokale omroep in Helmond?

c Welke kanttekeningen kun je bij dit onderzoek maken?

Opgave 18

Bij een marktonderzoek wordt gekeken naar de belangstelling voor elektrische auto's onder particulieren in Nederland. In een aselecte steekproef worden 1660 mensen benaderd en hiervan zeggen 917 particulieren dat ze de overstap naar een elektrische auto serieus overwegen.
De onderzoekers willen het percentage belangstellenden met een betrouwbaarheid van 95% vaststellen met een marge van $0{,}5$%.

Hoe groot moet hun steekproef dan zijn?

Practicum

Een applet van een groot aantal steekproeven (steekproefgrootte in te stellen) uit een populatie waarvan de populatieproportie is in te stellen. Het doel is om te laten zien dat die steekproefproporties normaal verdeeld liggen. Zo kun je een **populatieproportie schatten**, met een bijbehorend een betrouwbaarheidsinterval en een foutenmarge.

- **Simulatie steekproeven om een populatieproportie te schatten**

Dit practicum is ontwikkeld door Piet van Blokland en Carel van de Giessen, zie **www.vusoft.eu**

Figuur 3.3

Simulaties van schattingen in Excel

Het trekken van aselecte steekproeven uit een populatie is ook te bekijken via het practicum:

- **Steekproeven en uitspraken**

1.4 Populatiegemiddelde schatten

Inleiding

Wat zegt het steekproefgemiddelde over het gemiddelde in een populatie? Kun je zo maar zeggen dat als de sinaasappels in jouw steekproef een diameter van 11,4 cm hebben, dat dan ook de gemiddelde diameter van alle sinaasappels 11,4 cm is? Met welke betrouwbaarheid kan dat wel? Hoe bereken je de foutmarge?

Over deze vragen gaat dit onderdeel.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- vanuit een steekproefstandaardafwijking de standaardafwijking van een steekproevenverdeling berekenen;
- het betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde berekenen vanuit de vuistregels.

Voorkennis

- de begrippen onderzoek, steekproef, populatie en representatief;
- de begrippen populatiegemiddelde, steekproefgemiddelde, betrouwbaarheidsinterval en betrouwbaarheid.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt bepalen hoeveel de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouwen tussen 15 en 25 jaar op dit moment is. In een aselecte steekproef van 100 vind je een gemiddelde lengte van $\overline{L} = 171$ cm met een standaardafwijking van $S = 6{,}5$ cm.
Op internet vind je dat de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw $\mu(L) = 170{,}5$ cm is met een standaardafwijking van $\sigma(L) = 6{,}75$.

a Je hebt alleen maar deze ene steekproef en je weet dat het steekproefresultaat afhankelijk is van toeval. Simuleer daarom in het **Practicum** een steekproevenverdeling: neem 2000 keer een steekproef van 100 met $\mu = 170{,}5$ en $\sigma = 6{,}75$ en teken het staafdiagram van de steekproefproporties en de bijpassende normaalkromme.

b Ga na, dat na de simulatie een steekproevenverdeling ontstaat met een gemiddelde in de buurt van 172 en een standaardafwijking in de buurt van $\frac{6{,}75}{\sqrt{100}}$.

c Ligt jouw steekproefgemiddelde tussen $\mu - 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}}$ en $\mu + 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}}$?

d Ligt het populatiegemiddelde tussen $\overline{L} - 2 \cdot S$ en $\overline{L} + 2 \cdot S$?

Uitleg 1

Een fabrikant controleert hoeveel gram product er in zijn pakjes hagelslag zit. De fabrikant neemt een steekproef van $n = 100$ verpakkingen. Hij vindt:

- het gemiddelde gewicht in de steekproef is $\overline{X} = 290$ gram;
- de standaardafwijking van het gewicht in die ene steekproef is $S = 30$ gram.

Nu is het niet juist om op grond van deze ene steekproef te concluderen dat het gemiddelde gewicht van alle pakjes hagelslag 290 gram is. Dit gemiddelde is het toevallige gemiddelde in deze steekproef, bij een tweede steekproef kan het wel een iets andere waarde zijn. De 290 gram is een schatting van het gemiddelde gewicht van alle pakken.

Toch zal de fabrikant een uitspraak willen doen over het gemiddelde gewicht van al zijn pakken hagelslag. Nu kan er gebruik worden gemaakt van de steekproevenverdeling (van de gemiddelden). Al eerder is genoemd dat deze verdeling een normale verdeling is.

Het gemiddelde van deze verdeling is het populatiegemiddelde μ, en de standaardafwijking is $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, waarbij σ de populatiestandaardafwijking is en n de steekproefomvang.
Volgens de vuistregels ligt bij 95% van de steekproeven het steekproefgemiddelde $\overline{X}$ minder dan $2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ van μ af. Maar μ ken je niet (wil je juist schatten) en de populatiestandaardafwijking ken je ook niet.
Er is maar één steekproef en omdat die groot genoeg is, kun je de steekproefstandaardafwijking S wel gebruiken in plaats van σ.

En als $\overline{X}$ minder dan $2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ van μ af ligt, ligt μ ook minder dan $2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ van $\overline{X}$ af. Dat gaat goed bij 95% van de steekproeven.

De conclusie van de fabrikant mag nu zijn: met 95% zekerheid ligt het gemiddelde gewicht van alle pakken hagelslag tussen $290 - 3 = 287$ gram en $290 + 3 = 293$ gram.
Dit heet het 95% betrouwbaarheidsinterval.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Er worden steeds steekproeven van $n = 100$ stuks genomen.

a Bereken de standaardafwijking van de steekproevenverdeling van het gemiddelde als het gemiddelde gewicht in de steekproef 295 gram zou zijn met een standaardafwijking van 40 gram.

b Bereken de standaardafwijking de steekproevenverdeling van het gemiddelde als het gemiddelde gewicht in de steekproef 305 gram zou zijn met een standaardafwijking van 50 gram.

Opgave 2

Een machine vult pakken koffie met een standaardafwijking van $22{,}4$ gram. Een kwaliteitscontroleur neemt een aselecte steekproef van 500 pakjes. Deze pakken hebben een totaal gewicht van 255 kg.

a Hoe groot is het gemiddelde gewicht van de pakjes in de steekproef?

b Bereken de standaardafwijking van de steekproevenverdeling die hierbij past en bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval.

c Op de verpakking staat dat er 500 gram koffie in zit. Wat vind je van de conclusie van de kwaliteitscontroleur dat er voldoende koffie in de pakken zit? Licht je antwoord toe.

Uitleg 2

In een ziekenhuis wordt onderzoek gedaan naar het gemiddeld geboortegewicht van alle baby's die het afgelopen jaar zijn geboren. Er wordt een steekproef genomen van $n = 30$ baby's.

Het gemiddelde gewicht van de baby's in de steekproef is het steekproefgemiddelde $\overline{G} = 3{,}516$ kg.
De standaardafwijking van het gewicht in de steekproef is $S = 0{,}509$ kg.

Tussen welke twee grenzen ligt met 95% betrouwbaarheid het gemiddelde geboortegewicht van alle baby's in dit ziekenhuis?

De gemiddelden (hier van geboortegewichten) van veel steekproeven zijn normaal verdeeld. Als schatting voor het gemiddelde wordt genomen:

$\mu = \overline{G} = 3{,}516$ kg.

De standaardafwijking van deze gemiddelden is $\frac{0{,}509}{\sqrt{30}} \approx 0{,}093$.

Het gemiddeld geboortegewicht ligt met een betrouwbaarheid van 95% tussen $3{,}516 - 2 \cdot 0{,}093$ en $3{,}516 + 2 \cdot 0{,}093$, dus tussen $3{,}330$ en $3{,}702$ kg. Dit is het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

a Bereken de standaardafwijking van de steekproevenverdeling als er steeds steekproeven van 50 baby's zouden zijn onderzocht. Neem aan dat de standaardafwijking in de steekproef niet veranderd zou zijn.

b Hoe groot is in de Uitleg het verschil tussen de bovengrens en de ondergrens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval waarin het gemiddelde gewicht van alle baby's ligt?

Opgave 4

Soms wil een onderzoeker een kleiner betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde in een populatie.

a Wat kan een onderzoeker aan de steekproef veranderen om daarvoor te zorgen? Licht je antwoord toe.

b Wat gebeurt er met het betrouwbaarheidsinterval als een betrouwbaarheid van bijna 100% wordt genomen in plaats van 95%?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij statistisch onderzoek is vaak het **populatiegemiddelde**, het gemiddelde van een statistische variabele van de hele populatie belangrijk. Dat gemiddelde wordt meestal geschat door een steekproef te nemen en daarvan het **steekproefgemiddelde** $\overline{X}$ en de standaardafwijking S te berekenen. Maar door het nemen van een steekproef ontstaat een toevalsfout. Deze toevalsfout ontstaat in het gemiddelde, maar ook in de standaardafwijking. Met de toevalsfout in de standaardafwijking wordt geen rekening gehouden.

Als er veel steekproeven worden genomen zal de **steekproevenverdeling** van de gemiddelden altijd normaal verdeeld zijn. (Let op: De variabele zelf kan en hoeft dus niet normaal verdeeld zijn!)

De standaardafwijking van deze steekproevenverdeling is: $\frac{S}{\sqrt{n}}$.

Omdat de steekproefgemiddelden normaal verdeeld zijn, kunnen de vuistregels voor de normale verdeling worden gebruikt. Daarmee kan het gebied waarin het populatiegemiddelde ligt worden berekend.

Dit gebied heet het **betrouwbaarheidsinterval**. De grootte ervan hangt af van de gewenste **betrouwbaarheid**.

- De grenswaarden van het 95%-betrouwbaarheidsinterval zijn $\overline{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ en $\overline{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.

De conclusie is dan:

Van 95% van de steekproeven ligt het gemiddelde van de populatie tussen de ‘ondergrens’ en de ‘bovengrens’. Zie de **formulekaart**.

Voorbeeld 1

Een fabriek voor voedingsmiddelen neemt elke dag 100 monsters van een product. Daarvan meet men het aantal bacteriën per cL. Daarna berekent men het daggemiddelde en de dagstandaardafwijking van deze 100 monsters. Op een zekere dag is dit gemiddelde 60 en de standaardafwijking 20 bacteriën per cL.

Bepaal het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde aantal bacteriën per cL in het product. Wat is de betekenis van dit interval?

Als het gemiddelde en de standaardafwijking van het aantal bacteriën per cL in de dagproductie kleiner zijn dan respectievelijk 60 en 20, heeft dat gevolgen voor het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Beredeneer wat deze gevolgen zijn.

Antwoord

Nu is $\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = 2$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is: $60 \pm 2 \cdot 2 = 60 \pm 4$.
De grenzen van het betrouwbaarheidsinterval zijn 56 en 64 bacteriën per cL.

De betekenis is: met 95% betrouwbaarheid ligt het aantal bacteriën per cL in hele dagproductie tussen 56 en 64.

Als het gemiddelde afneemt, schuift het interval naar links.
Als de standaardafwijking kleiner wordt, wordt het interval smaller.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Wat verandert er aan het betrouwbaarheidsinterval als het gemiddelde toeneemt?

b Wat gebeurt er met het betrouwbaarheidsinterval als de standaardafwijking groter wordt?

c Wat gebeurt er met de kleinste waarde van het betrouwbaarheidsinterval als de standaardafwijking groter wordt?

Opgave 6

Een ziekenhuis heeft een nieuw computersysteem aangeschaft voor het plannen van onderzoeken voor patiënten. Vóór de aanschaf van het computersysteem was de doorlooptijd (de tijd tussen het eerste en het laatste onderzoek) gemiddeld $3{,}3$ dagen. De standaardafwijking was erg klein.

Uit een representatieve steekproef van 100 patiënten blijkt dat het dat na de aanschaf van het computersysteem de gemiddelde doorlooptijd is gedaald tot $2{,}9$ dagen. De standaardafwijking van de doorlooptijd in de steekproef blijkt $1{,}8$ dagen te zijn.

a Bepaal het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde doorlooptijd van de patiënten na invoering.

b Kan het ziekenhuis met 95% zekerheid zeggen dat de gemiddelde doorlooptijd is gedaald? Licht je antwoord toe.

Voorbeeld 2

Een machine vult medicijnverpakkingen met poeder. Het gewenste vulgewicht is 20 mg. De fabrikant bewaakt het vulgewicht. Daarom onderzoekt de kwaliteitsafdeling deze verpakkingen. Het is bekend dat de standaardafwijking van het vulgewicht $0{,}35$ mg is.

De kwaliteitscontroleur wil het vulgewicht met een nauwkeurigheid van 1% van het gewenste vulgewicht bepalen. Daarmee bedoelt hij dat de afwijking van het gewenste vulgewicht maximaal 1% ervan mag zijn. Hoe groot moet de steekproefomvang zijn om dit met een 95%-betrouwbaarheid te kunnen doen?

Antwoord

Gegeven is $S = 0{,}35$ mg.

De afwijking van het gewicht mag maximaal 1% van het gewenste gewicht zijn. Dat is $0{,}2$ mg.

Bij een betrouwbaarheid van 95% komt dit overeen met $2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 0{,}2$.

Dit betekent: $0{,}2 = 2 \cdot \frac{0{,}35}{\sqrt{n}}$.

Oplossen geeft: $n = 12{,}25$.

De steekproefomvang moet dus minstens 13 zijn.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Los de vergelijking $0{,}2 = 2 \cdot \frac{0{,}35}{\sqrt{n}}$ op.

b Als de kwaliteitsafdeling met een nauwkeurigheid van 0,5% het gewenste vulgewicht wil bepalen, hoe groot moet dan de steekproefomvang zijn?

c Als de nauwkeurigheid 1% zou zijn en de steekproefstandaardafwijking zou verdubbelen, hoe groot zou dan de steekproefomvang moeten zijn?

Verwerken

Opgave 8

De vuilnisdienst van een stad wil weten hoeveel huisvuil een gezin uit deze stad tweewekelijks buitenzet. Er wordt een aselecte steekproef genomen van 250 gezinnen. Het gemiddelde gewicht aan huisvuil dat deze gezinnen buiten zetten was 12,5 kg, met een standaardafwijking van 5,3 kg.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van de hoeveelheid huisvuil (in kg) dat per gezin in de hele stad wordt opgehaald.

Opgave 9

Bij een statistisch onderzoek wordt het populatiegemiddelde $\mu \approx 44$ geschat. De standaardafwijking van de steekproevenverdeling is $\sigma \approx 1{,}2$.

a Hoe groot zijn de grenzen van het 95% betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde?

b Het nagenoeg 100%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is $\overline{X} \pm 3 \cdot \sigma$.

Hoe groot zijn de grenzen van het nagenoeg 100% betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde?

Opgave 10

In een onderzoek is gekeken naar de soort vriendschappen die mensen hebben. De mensen zijn in drie categorieën ingedeeld: mensen met een lage zelfwaardering, mensen met een normale zelfwaardering en mensen met een hoge zelfwaardering.

De groep met een hoge zelfwaardering bestaat uit 50 mensen. Uit deze groep komen de volgende soorten vriendschappen:

soort vriendschap	gemiddeld ($\overline{V}$)	standaardafwijking (s)
hechte vriendschappen	$12{,}8$	$10{,}4$
kennissen	$86{,}3$	125
what's app/sms contacten	27	$16{,}6$

Tabel 4.1

De groep met lage zelfwaardering bestaat uit 32 mensen. Uit deze groep komen de volgende vriendschappen:

soort vriendschap	gemiddeld ($\overline{V}$)	standaardafwijking (s)
hechte vriendschappen	$11{,}4$	$7{,}41$
kennissen	$41{,}2$	35
what's app/sms contacten	$28{,}6$	$13{,}5$

Tabel 4.2

a Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van het aantal hechte vriendschappen voor de groep mensen met hoge zelfwaardering.

b Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van het aantal hechte vriendschappen voor de groep mensen met lage zelfwaardering.

c Vergelijk de betrouwbaarheidsintervallen van a en b. Welke conclusie kun je met 95% betrouwbaarheid trekken over het aantal hechte vriendschappen van mensen met verschillende zelfwaardering?

Opgave 11

Een christelijke politieke partij, het CDA, kijkt via een aselecte steekproef of haar katholieke partijleider ook populair is onder andere christelijke stromingen. Het CDA selecteert 300 leden die christelijk maar niet-katholiek zijn. Ze vragen naar een rapportcijfer van de partijleider. Het gemiddelde rapportcijfer is $6{,}1$, de standaarddeviatie is $1{,}7$.

a Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval.

b Welke conclusie kan het CDA nu trekken?

Opgave 12

Een bedrijf maakt en verkoopt light producten. Ze beweert dat haar producten slechts 140 calorieën per pakje bevatten. De Consumentenbond controleert dit met een aselecte steekproef van 25 pakjes. Ze vinden gemiddeld 147 calorieën. De standaardafwijking van deze steekproef is 15 calorieën.

a De bewering van het bedrijf lijkt niet te kloppen. Onderzoek of de Consumentenbond mag zeggen: “Met 95% betrouwbaarheid zit er meer dan 140 calorieën in het lightproduct.”

b Wat moet het bedrijf aanpassen aan het aantal calorieën zodat de uitspraak van de Consumentenbond niet klopt?

Toepassen

Opgave 13: Laboratoriumpraktijk

Een laborant analyseert de concentratie van een actieve stof in een geneesmiddel. De standaardafwijking van deze concentratie is bekend, deze is $0{,}0062$. De laborant doet drie metingen met als resultaat in g/L: $0{,}8303$, $0{,}8259$ en $0{,}8330$.

a Bereken de standaardafwijking van de steekproevenverdeling. Rond je antwoord af op vier decimalen.

b Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval voor de waarde van de gemiddelde concentratie van de actieve stof.

c Hoeveel metingen moet de laborant minstens doen om de breedte van het 95% betrouwbaarheidsinterval kleiner dan $0{,}01$ te krijgen?

Testen

Opgave 14

Bij een steekproef onder 30 pasgeboren baby's is de lengte (in cm) gemeten. De gemiddelde lengte is $52{,}2$ cm en $S = 2{,}38$ cm.

a Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval.

b Onder de metingen zit een meetfout. Een van de baby's is geen 43 maar 48 cm. Dit heeft gevolgen voor het gemiddelde en voor de steekproefstandaardafwijking. Nu is $S = 1{,}84$.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval opnieuw.

c Leg uit waarom een meetfout van één waarde in een kleine steekproef grotere gevolgen heeft dan in een grote steekproef voor het betrouwbaarheidsinterval.

Opgave 15

Een gemeente heeft lampen gekocht voor de straatverlichting met volgens de fabrikant een gemiddelde levensduur van 1500 uur. Er wordt een steekproef genomen om na te gaan of dit klopt. Hierbij werd een gemiddelde levensduur van 1488 uur gemeten met een standaardafwijking van 120 uur. De bewering van de fabrikant kon met 95% betrouwbaarheid worden verworpen.

Hoe groot was de steekpoef minstens?

Practicum

Een applet van een groot aantal steekproeven (steekproefgrootte in te stellen) uit een populatie waarvan het populatiegemiddelde is in te stellen. Het doel is om te laten zien dat die steekproefgemiddelden normaal verdeeld liggen. Zo kun je een **populatiegemiddelde schatten**, met een bijbehorend een betrouwbaarheidsinterval en een foutenmarge.

- **Simulatie steekproeven om een populatiegemiddelde te schatten**

Dit practicum is ontwikkeld door Piet van Blokland en Carel van de Giessen, zie **www.vusoft.eu**.

Simulaties van schattingen in Excel

Het trekken van aselecte steekproeven uit een populatie is ook te bekijken via het practicum:

- **Steekproeven en uitspraken**

Figuur 4.2

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van het onderwerp **Statistisch onderzoek** doorgewerkt. Het is nu tijd om een overzicht over het geheel te krijgen.

Begrippenlijst

- onderzoek, populatie — steekproef, aselect en representatief
- vuistregels normale verdeling — steekproevenverdeling
- betrouwbaarheidsinterval, foutmarge — standaardafwijking steekproefproporties
- betrouwbaarheidsinterval, foutmarge — standaardafwijking steekproefgemiddelden

Activiteitenlijst

- representatieve, aselecte steekproeven herkennen
- vuistregels normale verdeling gebruiken — vuistregels gebruiken bij steekproevenverdelingen
- foutmarges en betrouwbaarheidsintervallen bij steekproefproporties berekenen — populatieproporties schatten
- foutmarges en betrouwbaarheidsintervallen bij steekproefgemiddelden berekenen — populatiegemiddelden schatten

Achtergronden

Ronald Aylmer Fisher (1890—1962) was een Britse wetenschapper op het gebied van de statistiek, evolutietheorie en erfelijkheidsleer.

Fisher werd geboren in Londen op 17 februari 1890. Hij begon zijn studie wiskunde en sterrenkunde in Cambridge in 1909 en behaalde een graad in wiskunde en natuurkunde in 1912. In april van dat jaar publiceerde hij al een artikel over wat nu de 'methode van de grootste aannemelijkheid' (maximum likelihood) heet. Hij correspondeerde hierover met W.S. Gosset, nu ook bekend onder het pseudoniem 'Student', en kwam tot het inzicht dat een duidelijk onderscheid gemaakt dient te worden tussen de populatie en de steekproef daaruit.
Hij schreef onder andere in 1925 het standaardwerk 'Statistical Methods for Research Workers'.

Figuur 5.1 R.A. Fisher
bron: Wikipedia

Testen

Opgave 1

Zijn de volgende steekproeven aselect en/of representatief? Zo niet, geef een argument.

a Om de gemiddelde leeftijd van concertgangers te meten wordt mensen bij een klassiek concert gevraagd hoe oud ze zijn.

b Een restaurantenketen onderzoekt hoe gasten de hygiëne van hun restaurants ervaren. Hiervoor stellen ze de gasten bij één van hun restaurants vragen.

c Om de verdeling van het gewicht van de gemiddelde Nederlandse tiener te bepalen worden de gewichten van de leerlingen op jouw school gebruikt.

Opgave 2

Geef kritiek op de volgende enquêtevragen, en kom met een beter alternatief (of alternatieven).

a “Doe je wel eens aan sporten of aan binnenshuisactiviteiten?”

b “Vind je niet dat de nieuwe wetgeving onzinnig is?”

c “Hoe vaak heb je afgelopen jaar aardappelen met groente en vlees gegeten?”

Opgave 3

Een steekproef heeft aangewezen dat de inhoud van literpakken melk normaal is verdeeld met een gemiddelde van 1040 ml en een standaardafwijking van 25 ml.

a Hoeveel procent van de melkpakken heeft naar schatting een grotere inhoud dan 990 ml en een kleinere inhoud dan 1090 ml?

b Hoeveel procent van de melkpakken heeft naar schatting een grotere inhoud dan 1015 ml?

Opgave 4

Lees het volgende artikel uit Gazet van Antwerpen:

Vlaamse gezinnen streven gezond ontbijt na
Vooral moeders eten en drinken wat zij denken dat bij een evenwichtig ontbijt hoort. Dat blijkt uit een onderzoek van de Gezinsbond over het ontbijtgedrag van hun leden.
In vier op de tien van de 1301 ondervraagde gezinnen wordt samen ontbeten. Vaders ontbijten wel vaker in hun eentje. Oudere kinderen eten vaker alleen dan hun jongere broertjes of zusjes.
Vlaams minister van Volksgezondheid en Gezin Inge Vervotte benadrukt dat een gezellig ontbijt bijdraagt tot een positieve gezinscultuur. Ze nodigt de Gezinsbond uit om samen met andere betrokkenen concrete acties op te zetten om gezonde voeding nog meer te stimuleren.
Hoger opgeleiden en lagere schoolkinderen zijn oververtegenwoordigd.

Vlaamse gezinnen weten over het algemeen goed wat gezond ontbijten is en proberen daar zo consequent mogelijk naar te handelen.

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het percentage van de gezinnen waar samen wordt ontbeten.

Opgave 5

Bij een steekproef van een flinke populatie is van 100 pasgeboren baby's is de lengte (in cm) gemeten. De gemiddelde lengte in de steekproef is $52{,}2$ cm en voor de standaardafwijking van de lengte geldt $S = 2{,}38$.

a Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde lengte van de populatie.

b Onder de metingen zit een meetfout. Een van de baby's is geen 43 maar 49 cm. Dit heeft gevolgen voor het gemiddelde en voor s. Nu is $S = 1{,}84$. Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval opnieuw.

c Leg uit waarom een meetfout in een kleine steekproef grotere gevolgen heeft voor het betrouwbaarheidsinterval dan een meetfout in een grote steekproef.

d Vierenveertig van de baby's in de steekproef waren jongetjes. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie jongetjes.

Opgave 6

Een opdrachtgever eist van een fabrikant dat het gemiddelde gewicht werkzame stof in een partij van 2000 flessen met reinigingsmiddel 12 gram is.

De fabrikant test dit door middel van een steekproef. Hij vindt een betrouwbaarheidsinterval met een breedte van 2 gram voldoende klein en hij gaat uit van een betrouwbaarheid van 95%.

De fabrikant weet dat de standaardafwijking van het gewicht van de werkzame stof bij zijn productieproces 4 gram is.

De fabrikant wil weten hoe groot de steekproefomvang moet zijn om aan deze eisen te kunnen voldoen.

Bereken de minimaal benodigde steekproefomvang.

Toepassen

Opgave 7: Onderzoek over ‘Women and Love’

In 1987 verscheen het geruchtmakende boek “Women and Love: A Cultural Revolution in Progress” van Shere Hite. De auteur beschreef daarin de resultaten van een onderzoek onder 100.000 vrouwen met betrekking tot hun relatie. Van de vrouwen die de vragenlijst terug stuurden:

- voelde 84% zich emotioneel niet goed in hun relatie;
- had 95% psychische of lichamelijk mishandeling doorstaan;
- gaf 13% aan na twee jaar huwelijk nog van hun man te houden.

Om te laten zien dat ze een representatieve steekproef had opgesteld gebruikte ze tabellen zoals deze:

En zo hield ze ook rekening met ras/afkomst en de regio. Zo'n 4500 vrouwen stuurden de vragenlijst ingevuld terug aan de auteur.

a Wat denk je van de representativiteit van de steekproef?

b Waarom zou zo'n steekproef een gelaagde steekproef worden genoemd?

c De vragenlijst bevatte meer dan 100 vragen die de vrouwen zelf moesten invullen en terugsturen. Waarom stuurde Shere Hite geen interviewers op pad?

d In dat zelfde jaar verscheen een andere opiniepeiling waaruit bleek dat 89% van de respondenten wel degelijk voldoening putte uit hun relatie. Dit cijfer was ongeveer gelijk voor mannen en voor vrouwen. Is dit in strijd met de resultaten van Hite? En hoe zou dat komen?

e Shere Hite had te maken met een grote non-respons. Waardoor zou dat komen? En welke gevolgen heeft dat voor de betrouwbaarheid? Is er sprake van vertekening en waardoor komt dat dan?

f Stel je eens voor dat Hite ook de overige 95500 vragenlijsten terug had gekregen en daarvan alle vrouwen zich emotioneel goed voelden in hun relatie. Welk percentage vrouwen die zich emotioneel niet goed voelen in hun relatie had deze auteur dan gevonden?

Jaarlijks inkomen (x 1000 dollar)		
	In steekproef (%)	V.S. (%)
0 - < 2	19,0	18,3
2 - < 6	22,5	25,4
6 - < 10	17,0	17,1
10 - < 15	13,0	15,0
15 - < 20	10,0	9,8
20 - < 25	8,0	6,4
≥ 25	8,5	8,2

Woonplaats		
	In steekproef (%)	V.S. (%)
Grote stad	60	62
Platteland	27	26
Kleine stad	13	12

Figuur 5.2

Opgave 8: Noord/Zuidlijn Amsterdam

Op de website van de Dienst Onderzoek en Statistiek van de gemeente Amsterdam stond in december 2008 het volgende:

"In totaal hebben 379 Amsterdammers meegedaan aan de telefonische enquête van november. Op de vraag of men voor of tegen de aanleg van de Noord/Zuidlijn is, zegt ongeveer de helft van respondenten (49%) voor de aanleg te zijn. Het percentage voorstanders ligt hoger dan bij de vorige meting: in september was 38% voorstander. Het percentage voorstanders is hiermee terug op het niveau van 2006 toen 48% voorstander was. Het effect van de gebeurtenissen rond de Vijzelgracht lijkt te zijn vervlogen in de mening van Amsterdammers."

a Welke uitspraak over het aantal voorstanders in december 2008 van de Noord/Zuidlijn kon men toen met 95% betrouwbaarheid doen?

b In september kon men met een betrouwbaarheid van 95% beweren dat het aantal voorstanders tussen de 37% en de 39% lag. Hoeveel mensen zijn er toen ondervraagd?

Examen

Opgave 9: Rookgedrag van leerlingen

Sinds de jaren tachtig meet het Trimbos-instituut regelmatig via een enquête het gebruik van alcohol, drugs en tabak in aselecte, representatieve steekproeven onder alle leerlingen van het voortgezet onderwijs. Ook werd de leerlingen in de enquête gevraagd naar hun leeftijd (in jaren), hun geslacht (jongen, meisje), en hun schoolniveau (vmbo, havo, vwo).

Aan de enquête van 2015 deden 6714 leerlingen mee in de leeftijd van 12 tot en met 16 jaar. In deze groep is onder andere gekeken naar de lifetime-prevalentie van roken. Hieronder staat wat dit begrip betekent:

lifetime-prevalentie van roken = het percentage van de leerlingen dat rookt of ooit gerookt heeft in zijn of haar leven.

steekproefomvang	6714
aantal dat rookt of ooit gerookt heeft	1544
lifetime-prevalentie	23%

Tabel 5.1

In de tabel zie je dat van de leerlingen in de steekproef 23%, bijna een kwart, rookt of ooit gerookt heeft. Op basis van bovenstaande gegevens kun je het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de lifetime-prevalentie van roken berekenen.

Bereken dit 95%-betrouwbaarheidsinterval. Rond de percentages in je antwoord af op gehele getallen.

(bron: examen wiskunde A havo in 2018, tweede tijdvak)

2

Veranderingen

2.1 In grafieken

Inleiding

In de Delta Nederland zijn vooral de waterstanden aan verandering onderhevig. Het water in de zee kent eb (laagwater) en vloed (hoogwater). Daartussen stijgt het water of daalt het water. Maar stijging en daling zijn niet constant: vlak voor hoogwater neemt de stijging langzaam af en na hoogwater neemt de daling een paar uur lang toe.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen stijgend en dalend en constant gebruiken bij grafieken;
- toenemende, afnemende en constante stijging en daling herkennen;
- (lokale) maxima en minima van een grafiek bepalen.

Voorkennis

- grafieken bij formules tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met formules, grafiekwaarden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Zoek via **deze website van Rijkswaterstaat** een grafiek van de waterstand bijvoorbeeld bij Vlissingen. Gebruik de kaart.

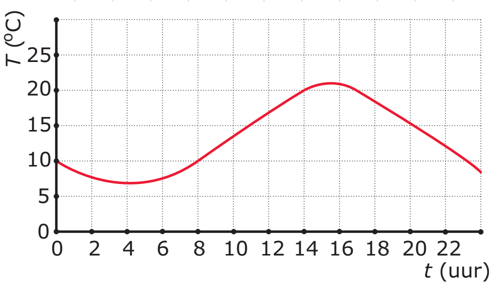
a Herken je stijging en daling in de grafiek? Kun je soorten stijging en daling beschrijven?

b Wanneer stijgt het water het snelst?

c Hoe zit het met de stijging van het water bij ‘hoog water’?

Uitleg

Deze grafiek geeft de gemiddelde temperatuur T (°C) weer, afhankelijk van de tijd t (h).



Figuur 1.2

De temperatuur stijgt van $t = 4$ tot aan $t = 15{,}5$. Als t toeneemt van 4 tot $15{,}5$, wordt T groter. De grafiek is stijgend op het interval $\langle 4; 15{,}5 \rangle$. Dit betekent: alle getallen tussen 4 en $15{,}5$, maar 4 en $15{,}5$ zelf niet.

De temperatuur daalt van $t = 15{,}5$ tot aan $t = 24$. Als t toeneemt van $15{,}5$ tot 24, wordt T kleiner. De grafiek is dalend op het interval $\langle 15{,}5; 24 \rangle$.De temperatuur is nergens constant.

Op het interval $\langle 4; 15{,}5 \rangle$ blijkt dat de stijging op het interval $\langle 4{,}8 \rangle$ steeds groter wordt. De grafiek wordt steiler. Er is op dat interval sprake van toenemende stijging.

Op het interval $\langle 8{,}14 \rangle$ is er een constante stijging. De grafiek blijft daar voortdurend even steil.

Op het interval $\langle 14; 15{,}5 \rangle$ is de stijging steeds minder. Er is op dat interval sprake van afnemende stijging.

Op het interval $\langle 0{,}4 \rangle$ is er een afnemende daling.
Op het interval $\langle 17{,}24 \rangle$ is er een vrijwel constante daling.

De hoogste temperatuur is 21 °C. Dit is het maximum van T en het wordt bereikt op $t = 15{,}5$.
De laagste temperatuur is 7 °C. Dit is het minimum van T en het wordt bereikt op $t = 4$.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de gemiddelde temperatuur in **Uitleg 1**.

a Als de grafiek stijgend is, neemt T dan toe of juist af?

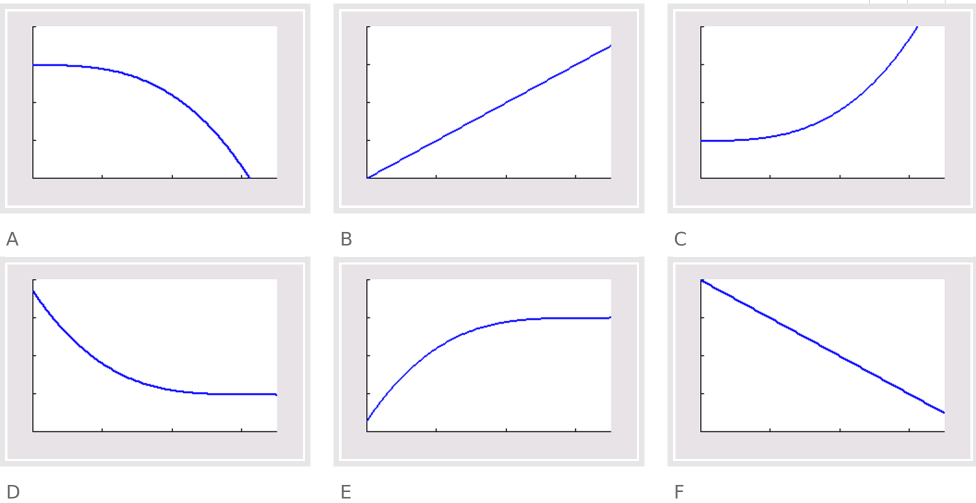
b Als de grafiek toenemend stijgend is, wat gebeurt er dan met T?

c Wat betekent een afnemende daling? Wat betekent dit voor de temperatuur T?

d Hoeveel graden stijgt de temperatuur op het interval $\langle 4{,}8 \rangle$?

Opgave 2

Bekijk de grafieken. Zet bij elke grafiek van welke soort stijging of daling er sprake is. Kies uit:
afnemende stijging - constante stijging - toenemende stijging - afnemende daling - constante daling - toenemende daling



Figuur 1.3

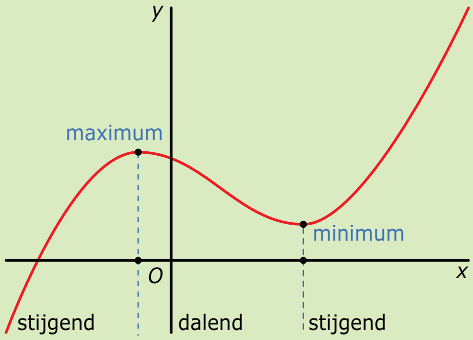
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een grafiek is:

- **stijgend** als de y-waarden groter worden bij groter wordende x.
- **dalend** als de y-waarden kleiner worden bij groter wordende x.

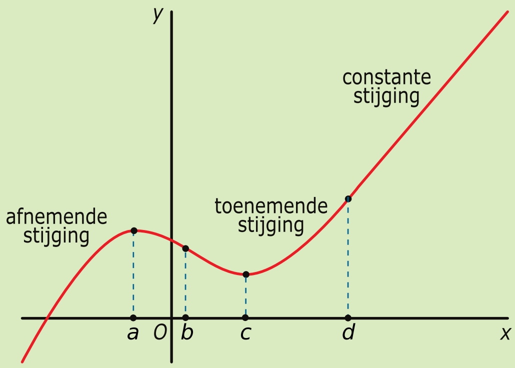
Als het om stijgen en dalen gaat noteer je de grenzen (de kleinste en de grootste x-waarden) met een open **interval**: $\langle ...,... \rangle$.
Dan horen de grenswaarden zelf niet bij het interval.
Bij een interval waarbij de grenswaarden wel bij het interval horen, gebruik je: [...,...]. Voor intervallen die aan één kant geen grenswaarde hebben gebruik je daar een pijltje.



Figuur 1.4

Deze grafiek heeft een:

- **afnemende stijging** op het interval $\langle \leftarrow, a \rangle$, omdat de stijging daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende daling** op het interval $\langle a,b \rangle$, omdat de daling daar steeds sterker wordt;
- **afnemende daling** op het interval $\langle b,c \rangle$, omdat de daling daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende stijging** op het interval $\langle c,d \rangle$, omdat de stijging daar steeds sterker wordt;
- **constante stijging** op het interval $\langle d, \rightarrow \rangle$, omdat de stijging daar steeds even sterk blijft.



Figuur 1.5

Verder heeft de grafiek:

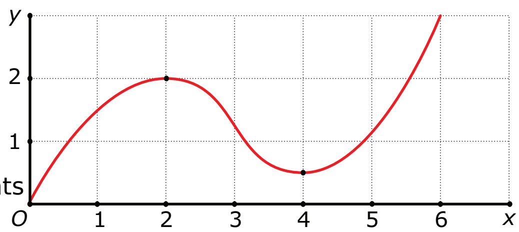
- een **maximum** of maximale y-waarde als hij overgaat van stijgend in dalend.
- een **minimum** of minimale y-waarde als hij overgaat van dalend in stijgend.

Maxima en/of minima worden **extreme waarden** (kortweg "extremen") genoemd.

Voorbeeld 1

Beschrijf de veranderingen van deze grafiek.

Geef ook de maxima en minima van de grafiek.



Figuur 1.6

Antwoord

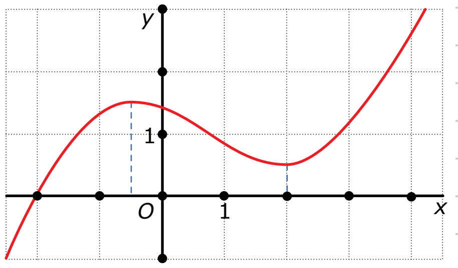
Beschrijf de veranderingen van deze grafiek van links naar rechts als volgt:

- De grafiek is afnemend stijgend op het interval $\langle 0,2 \rangle$.
- De grafiek is toenemend dalend op het interval $\langle 2,3 \rangle$.
- De grafiek is afnemend dalend op het interval $\langle 3,4 \rangle$.
- De grafiek is toenemend stijgend op het interval $\langle 4,6 \rangle$.

Verder heeft de grafiek

- een maximum van 2 voor $x = 2$.
- een minimum van $0{,}6$ voor $x = 4$.

Dat er een minimum is bij $x = 4$, wil niet zeggen dat y niet lager kan zijn. Het minimum is een lokaal (plaatselijk) minimum, net als het maximum.



Figuur 1.7

Opgave 3

Bekijk de grafiek.

a Geef het minimum van de grafiek.

b Op welk interval is er sprake van toenemende daling?

A. $\langle -0{,}5; 0{,}75 \rangle$
B. $\langle 0{,}75; 2 \rangle$

c Op welk interval is er sprake van toenemende stijging?

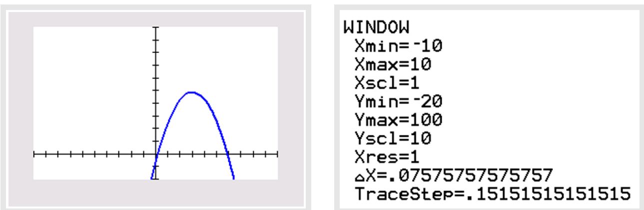
d Op welke intervallen is de grafiek stijgend?

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule: $y = -6x^2 + 36x - 5$.
Beschrijf de veranderingen van het verloop van de bijbehorende grafiek.

Antwoord

Plot de grafiek.
Lees af dat er een maximum zit bij $(3{,}49)$. Daar gaat de grafiek over van stijgend naar dalend.
De grafiek is afnemend stijgend op het interval $\langle \leftarrow, 3 \rangle$ en toenemend dalend op het interval $\langle 3, \rightarrow \rangle$.



Figuur 1.8

Opgave 4

Gegeven is de formule: $y = -x^2 + 6x$

a Plot de grafiek. Op welk interval is de grafiek stijgend?

b Om welke soort stijging gaat het bij a?

A. toenemende stijging
B. afnemende stijging
C. constante stijging

c Is er in de grafiek sprake van toenemende of afnemende daling?

A. toenemende daling
B. afnemende daling

d Deze grafiek heeft een top. Hoort daarbij een minimum of een maximum?

A. een minimum van 9
B. een maximum van 9

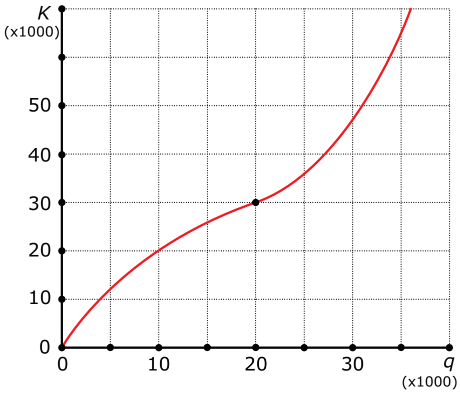
Voorbeeld 3

Bij de productie van telefoonhoesjes stijgen de kosten K met een toename van het geproduceerde aantal q. Die kostenstijging neemt echter af omdat de productielijn steeds efficiënter wordt gebruikt. Wanneer er zo'n 20000 artikelen per week worden gemaakt bedragen de kosten € 30000,00. Om nog meer telefoonhoesjes te produceren moet de productielijn worden aangepast en de kostenstijging neemt daarom weer toe.

Maak een schets van een bijpassende grafiek.

Antwoord

Op de horizontale as komt het aantal q, op de verticale as de kosten K, want de kosten hangen af van het aantal geproduceerde telefoonhoesjes. De grafiek begint in $(0,0)$ met sterke stijging die meteen afvlakt. Dat gaat zo door tot het punt met $q = 20000$ en $K = 30000$. Daarna stijgt de grafiek steeds sterker.



Figuur 1.9

Opgave 5

Van een grafiek is gegeven dat:

- de grafiek constant stijgt tot $x = 2$.
- de grafiek constant is vanaf $x = 2$ tot aan $x = 3$.
- de grafiek toenemend daalt vanaf $x = 3$ tot $x = 4$ en dan afnemend daalt tot $x = 5$.
- de grafiek toenemend stijgt vanaf $x = 5$.

Maak een schets van de grafiek en geef aan bij welke waarde van x de grafiek een maximum of een minimum heeft.

Opgave 6

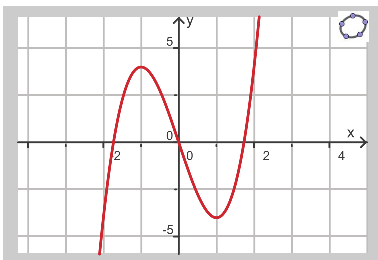
Je gebruikt nu steeds een grafiek om de veranderingen en de extremen van een formule te bepalen. Waarom kun je op deze manier nooit zeker zijn of je wel alle veranderingen en extremen hebt gevonden?

Verwerken

Opgave 7

Schrijf voor deze functie op:

- op welke intervallen de grafiek dalend dan wel stijgend is en om welk soort stijging of daling het daarbij gaat;
- welke extremen er zijn;
- voor welke waarden van x de snelheid van dalen dan wel stijgen het grootst is.



Figuur 1.10

Opgave 8

Gegeven is een functie met formule $y = 12x - x^3$.

Schrijf op:

- op welke intervallen de grafiek dalend dan wel stijgend is en om welk soort stijging of daling het daarbij gaat;
- welke extremen er zijn;
- voor welke waarden van x de snelheid van dalen dan wel stijgen het grootst is.

Opgave 9

Gegeven is de formule: $y = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 8$

a Plot de grafiek van deze formule. Welke maxima en minima heeft deze grafiek?

b Op hoeveel intervallen is er sprake van afnemende daling?

Opgave 10

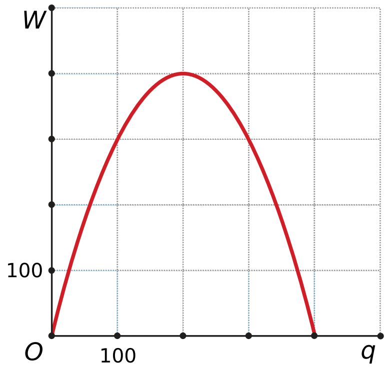
Bekijk de winstgrafiek van een bedrijf. Hierin is q het aantal geproduceerde producten en W de winst in honderden euro.

a Welke soorten stijging en daling komen er in de grafiek voor?

b Geef de bijbehorende intervallen.

c Hoeveel neemt de winst toe als q toeneemt van 100 naar 200?

d Hoe groot is de maximale winst die het bedrijf kan halen?



Figuur 1.11

Opgave 11

Voor de temperatuur T in °C op een bepaalde dag geldt:

- Om 6:00 uur ’s morgens ($t = 6$) was de temperatuur $T = 2$ °C.
- De grafiek stijgt toenemend vanaf $t = 6$ tot aan $t = 12$.
- De grafiek stijgt afnemend van 12:00 uur tot 14:30 uur en daalt dan toenemend tot $t = 20$.
- De grafiek daalt afnemend van $t = 20$ tot aan het eind van de dag.

Maak een schets van de grafiek en leg uit bij welke waarde van t de T een maximum of minimum moet hebben.

Toepassen

Opgave 12: Winstformule

Een bedrijf maakt gebruik van de winstformule:
$W = -0{,}02q^2 + 5q - 10$.
Hierin is W de winst in duizenden euro en q het aantal geproduceerde producten in honderdtallen.

a Hoe groot is de winst als er 10000 producten worden geproduceerd?

b Beschrijf met behulp van intervallen het verloop van de grafiek van W.

c Hoe hoog is de maximale winst?

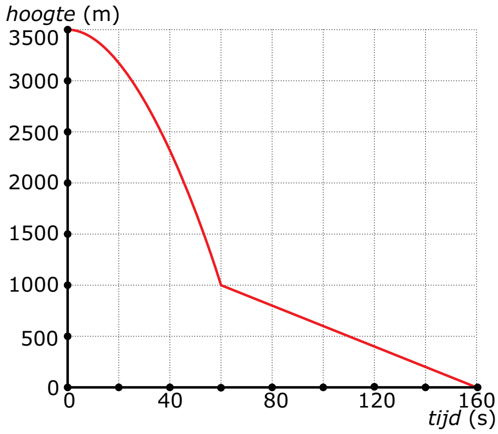
Opgave 13: Parachutist

Je ziet de grafiek die hoort bij een parachutesprong vanaf 3500 meter hoogte. Eerst maakt de parachutist een vrije val en daarna opent hij zijn parachute.

a Na hoeveel seconden heeft deze parachutist zijn valscherm geopend? Hoe zie je dat aan de grafiek?

b In de periode van vrije val is de grafiek toenemend dalend. Wat betekent dit voor de valsnelheid?

c Als de parachute uit is, is de valsnelheid constant. Hoe zie je dat aan de grafiek? Hoe groot is de valsnelheid als de parachute uitgevouwen is?



Figuur 1.12

Testen

Opgave 14

Je ziet hier de grafiek van de lengte van een man vanaf zijn twaalfde levensjaar tot zijn huidige leeftijd.

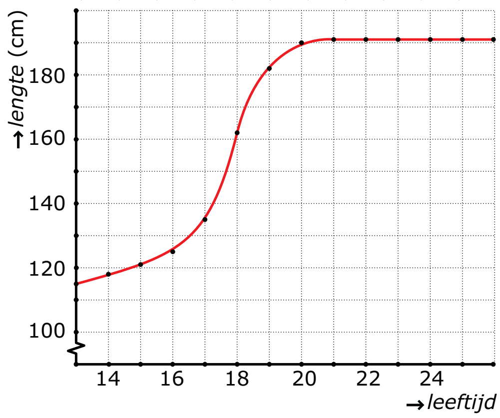
a Gedurende welk levensjaar groeit hij het snelst? Hoeveel cm groeide hij dat jaar?

b Gedurende welke periode is de grafiek stijgend?

c Gedurende welke periode is er sprake van een afnemende stijging?

d Gedurende welke periode is zijn lengte constant?

e Gedurende welke perioden is de groeisnelheid constant? Hoe zie je dat aan de grafiek?



Figuur 1.13

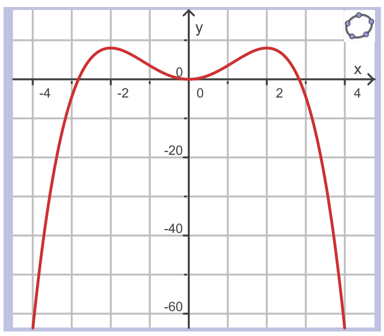
Opgave 15

Je ziet hier de grafiek van de functie $y = -0{,}5x^4 + 4x^2$.

a Op welke intervallen is de grafiek dalend?

b Op hoeveel intervallen is de grafiek afnemend dalend.

c Geef de extreme waarden van de grafiek.



Figuur 1.14

2.2 Verandering per stap

Inleiding

Om veranderingen van grafieken nauwkeurig te beschrijven kijk je naar de toenames (of afnames) van de uitkomsten bij toename van de invoerwaarden met een vaste stapgrootte.
Bijvoorbeeld bij een formule zoals $y = x^2$ bekijk je de toename van y bij een toename van x met een vaste stapgrootte. Je maakt van die toenames een toenamediagram.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- een toenamediagram maken bij een gegeven grafiek of een gegeven formule;
- de invloed van de stapgrootte op het toenamediagram;
- vanuit een gegeven toenamediagram (en 'beginwaarde') een mogelijke grafiek samenstellen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet een grafiek met het verloop van het niveau van zeewater over een dag. De hoogte wordt gemeten in meter ten opzichte van een afgesproken hoogte in Amsterdam, het Normaal Amsterdams Peil of NAP.

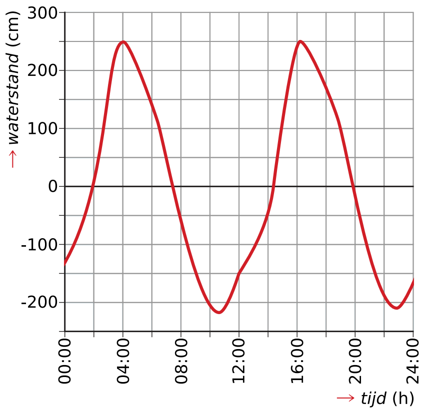
Om nauwkeuriger zicht te krijgen op de veranderingen van de waterstand, kun je ook een staafdiagram maken van de veranderingen per uur.

a Maak zo'n staafdiagram voor de periode van middernacht tot twee uur 's middags.

b Hoe kun je aan het staafdiagram zien of het water stijgt of daalt?

c Hoe kun je aan dat staafdiagram zien wanneer het water snel stijgt?

d In de Westerschelde moet je goed weten waar je wel en waar je niet kunt varen. Wat heb je dan aan het diagram met veranderingen van de waterstand?



Figuur 2.2

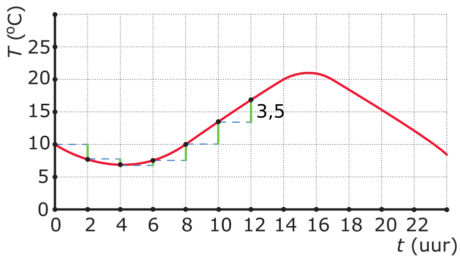
Uitleg

De grafiek geeft de gemiddelde dagtemperatuur T op een bepaalde plaats weer (in °C) afhankelijk van het tijdstip t (in uren) op die dag.

De grafiek begint op $t = 0$ met een temperatuur van 10 °C. Na 2 uur is die temperatuur gezakt tot ongeveer 8 °C. De temperatuur neemt dus af met 2 °C. Er is sprake van een toename van -2 °C.

Weer twee uur later is de temperatuur nog een graad gezakt: bij $t = 4$ is er van een toename van -1 °C ten opzichte van de temperatuur bij $t = 2$.

En zo kun je doorgaan met het bepalen van de toenames (of afnames) in stappen van 2 uur. Je doorloopt de tijd met een stapgrootte van 2 uur en je maakt een tabel van de toenames:



Figuur 2.3

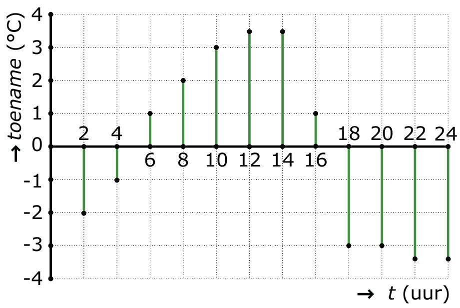
t (uur)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
ΔT		-2	-1	1	2	3	3,5	3,5	1	-3	-3	-3,5	-3,5

Tabel 2.1

Onder ΔT (spreek uit "delta t", Δ is de Griekse D van differentie (verschil)) versta je de toename van de temperatuur T. Deze tabel kun je weergeven in een diagram. Als de toename negatief is, teken je een staafje naar beneden en als die positief is naar boven. Zo'n diagram noem je een toenamediagram.

In het toenamediagram zie je:

- waar de grafiek stijgend is, de toenamen positief zijn (echte toenamen);
- waar de grafiek dalend is, de toenamen negatief zijn (afnamen);
- waar de toenamen steeds groter worden, is de stijging toenemend, enzovoort.



Figuur 2.4

Opgave 1

Bekijk de grafiek in de **Uitleg**.

a Maak een tabel met toenames van $t = 0$ met een stapgrootte van $\Delta t = 3$.

b Teken het toenamediagram van de temperatuurgrafiek met een stapgrootte van $\Delta t = 3$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

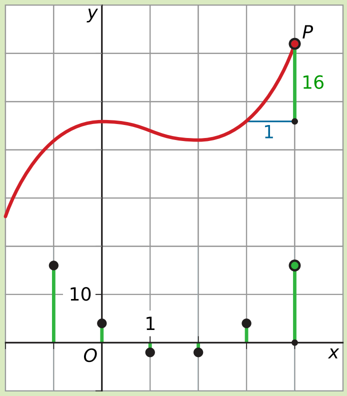
Bekijk de applet: toenamediagram

Als je de waarden van x met een vaste **stapgrootte** h laat toenemen, kun je daarbij een tabel maken van de toenames Δy van de grafiek.

Als $h = 1$ dan krijg je de volgende tabel:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	26	42	46	44	42	46	62
Δy		16	4	-2	-2	4	16

Tabel 2.2



Figuur 2.5

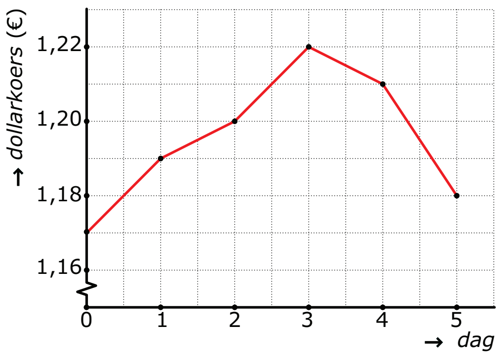
Het **toenamediagram** dat je van de tabel kunt maken, zie je in groen in de figuur.

Als je de formule weet, kun je de grafische rekenmachine gebruiken en bij y_1 de formule invoeren en bij $y_2 = y_1(x) - y_1(x-1)$. Dit geeft een toenametabel met stapgrootte 1.
Bekijk het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek van het verloop van de koers van de dollar. Aan het begin van dag één kun je $ 1,00 inwisselen voor € 1,19.

Maak een toenamediagram met stapgrootte 1 dag.



Figuur 2.6

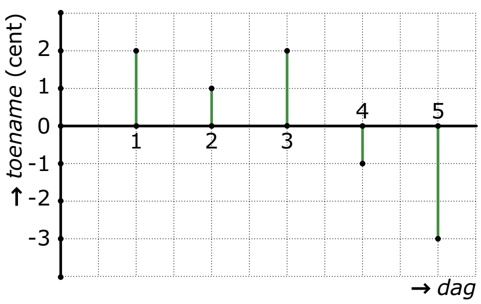
Antwoord

Maak eerst een tabel met toenames.

dag	0	1	2	3	4	5
toename (cent)		2	1	2	-1	-3

Tabel 2.3

Zet vervolgens de toenames verticaal uit.



Figuur 2.7

Opgave 2

Bekijk de grafiek uit **Voorbeeld 1**.

a Stel dat je aan het begin van dag zes € 1,20 voor $ 1,00 kreeg. Hoe hoog moet je dan het staafje in het toenamediagram tekenen bij dag zes?

b Stel dat de zesde dag de dollarkoers met 1 cent afneemt ten opzichte van dag vijf. Hoe hoog moet je dan het staafje in het toenamediagram tekenen bij dag zes?

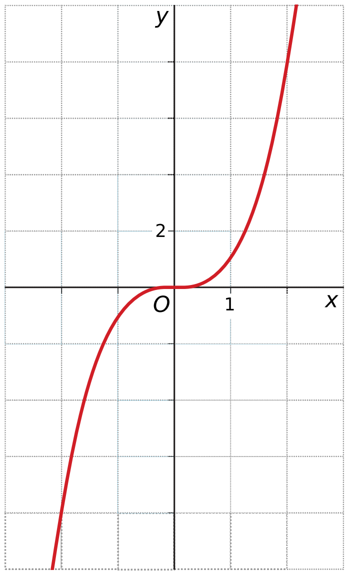
Opgave 3

Bekijk de grafiek.

a Maak een toenametabel die begint bij $x = -2$ met stapgrootte 1.

b Teken het bijpassende toenamediagram.

c Als je de grafiek twee omhoog zou verschuiven, wat voor effect heeft dat dan op het toenamediagram dat je bij b hebt getekend?



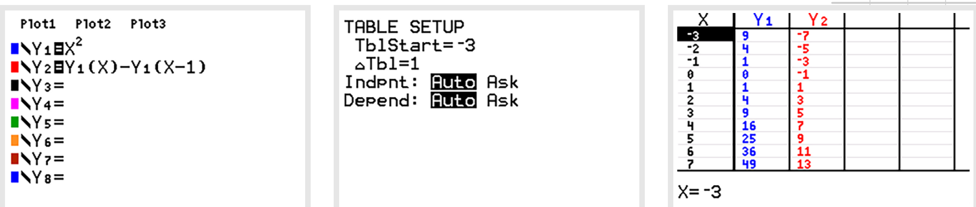
Figuur 2.8

Voorbeeld 2

Een toenamediagram kun je maken met de grafische rekenmachine. Bekijk het **Practicum**.

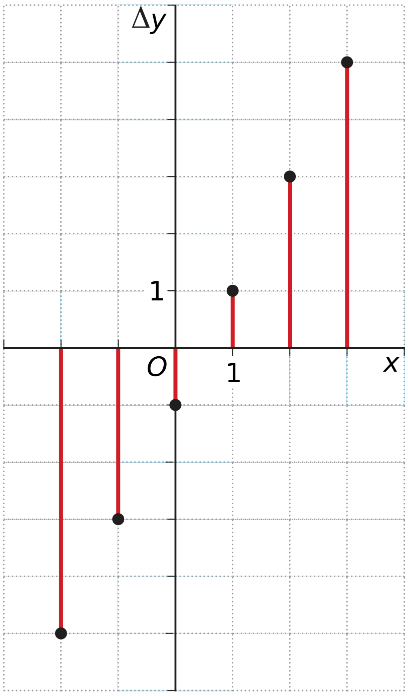
Gegeven is de formule $y = x^2$. Maak met de grafische rekenmachine het toenamediagram bij deze formule met stapgrootte 1, waarbij je x laat lopen van -3 tot 3. Teken vervolgens het bijbehorende toenamediagram.

Antwoord



Figuur 2.9

Het bijbehorende toenamediagram.



Figuur 2.10

Opgave 4

Gegeven is de formule: $y = -x^3 + 6x$

a Maak met de grafische rekenmachine een toenametabel met stapgrootte 1 van $x = -3$ tot en met $x = 3$.

b Wat weet je op grond van alleen de toenametabel over het maximum van deze grafiek?

A. Het maximum ligt tussen $x = 0$ en $x = 1$, want bij die waarden horen dezelfde toenamen.

B. Het maximum ligt tussen $x = 0$ en $x = 1$, want bij die waarden horen de grootste toenamen.

C. Het maximum ligt bij $x = 1,5$, want precies daar gaan de toenamen over in afnamen.

D. Het maximum ligt tussen $x = 1$ en $x = 2$, want bij die waarden gaan de toenamen over van positief in negatief

c Teken het bijpassende toenamediagram.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Uit een toenamediagram kun je de grafiek van de formule weer samenstellen.
Je moet wel een punt van de grafiek weten, anders weet je niet waar je moet beginnen.

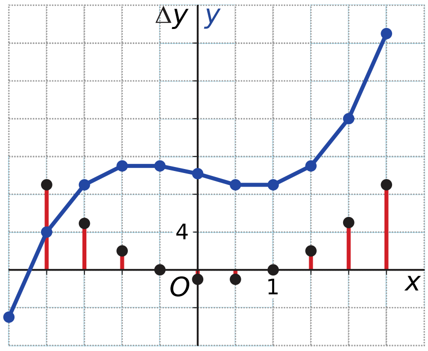
Bekijk het toenamediagram met stapgrootte $\frac{1}{2}$.

Stel dat de grafiek door het punt $(0{,}10)$ moet gaan. Je kunt dan vanuit het toenamediagram de tabel maken:

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
Δy	-	9	5	2	0	-1	-1	0
y	-5	4	9	11	11	10	9	9

Tabel 2.4

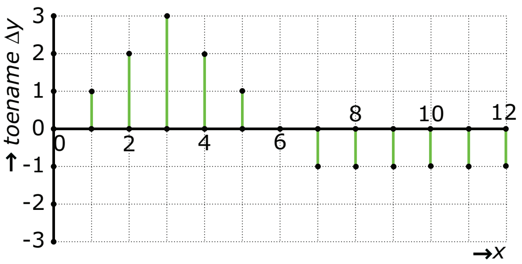
Kijk hoe je de y-waarden kunt vinden van punten met x-waarden kleiner dan 0. Teken de grafiek.



Figuur 2.11

Opgave 5

Bekijk het toenamediagram van een grafiek die door het punt $(0{,}4)$ gaat.



Figuur 2.12

a Teken een mogelijke grafiek.

b Je hebt een grafiek getekend. Maar waarom zijn er nog meerdere grafieken mogelijk?

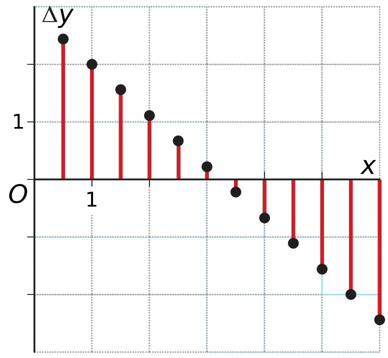
A. Het toenamediagram is te onduidelijk om de y-waarden nauwkeurig uit af te lezen.

B. Omdat er een vaste stapgrootte is, kun je geen tussenliggende y-waarden bepalen.

C. Er zijn meerdere toenametabellen mogelijk bij dit toenamediagram.

Opgave 6

Bekijk het toenamediagram. Schets bij het toenamediagram een grafiek die door het punt $P(4,7)$ gaat.

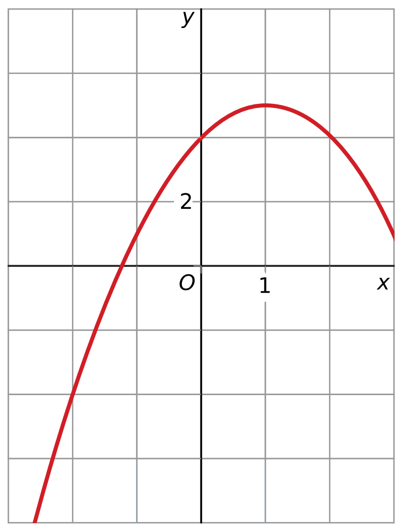


Figuur 2.13

Verwerken

Opgave 7

Teken bij deze grafiek een toenamediagram met stapgrootte 1, te beginnen bij $x = -2$.



Figuur 2.14

Opgave 8

Een parkeerwachter houdt op een dag bij hoeveel parkeerplekken er op een parkeerplaats bezet zijn. De resultaten staan in de tabel.

tijd (h)	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00
aantal bezette plekken	52	96	112	135	99	129	129	157	112	84

Tabel 2.5

Teken het toenamediagram bij de tabel met stapgrootte 1 uur.

Opgave 9

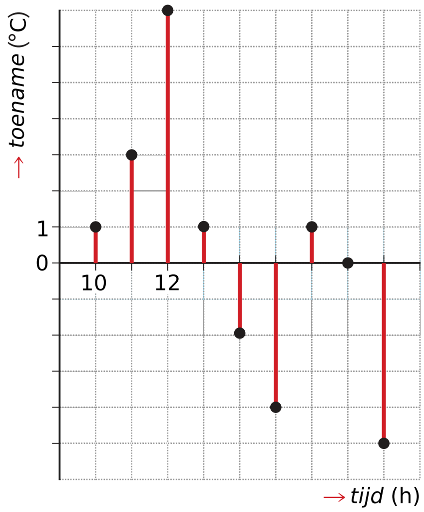
Dit toenamediagram beschrijft het verloop van de temperatuur op een deel van een dag. Om 15:00 uur was het 3 °C.

a Kyra beweert dat het om 13:00 uur kouder was dan om 12:00 uur. Leg uit of zij gelijk heeft of niet.

b Mike beweert dat het tussen 16:00 en 17:00 uur voortdurend dezelfde temperatuur was. Leg uit of hij gelijk heeft of niet.

c Hoe hoog was de temperatuur om 9:00 uur?

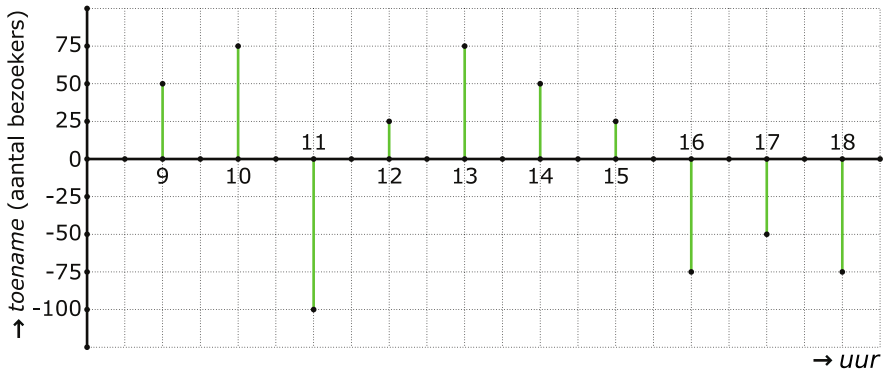
d Teken een grafiek.



Figuur 2.15

Opgave 10

In een museum is vanaf de opening om 8:00 uur ’s morgens tot de sluitingstijd om 18:00 uur elk uur het aantal bezoekers geteld. Van deze gegevens is een toenamediagram gemaakt. Toen het museum om 8:00 uur opende, waren er geen bezoekers binnen.



Figuur 2.16

a Maak een grafiek van het totaal aantal bezoekers afhankelijk van het uur van deze dag, van 8:00 uur tot 18:00 uur.

b Rond welk tijdstip waren er waarschijnlijk de meeste bezoekers in het museum?

c Kun je vaststellen hoeveel bezoekers er maximaal in het museum waren op enig moment die dag? Licht je antwoord toe.

Opgave 11

Gegeven is de formule: $y = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 8$

a Bekijk met de grafische rekenmachine de grafiek van deze formule en maak een toenametabel. Teken een toenamediagram met een stapgrootte van $0{,}5$. Laat x lopen van -3 tot 3.

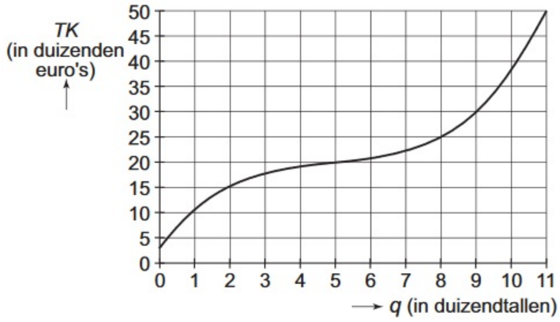
b Hoe zie je aan het toenamediagram dat er precies één interval is waarop de grafiek toenemend daalt?

c Waarom kun je op grond van het toenamediagram concluderen dat er waarschijnlijk drie minimale/maximale waarden zijn?

Toepassen

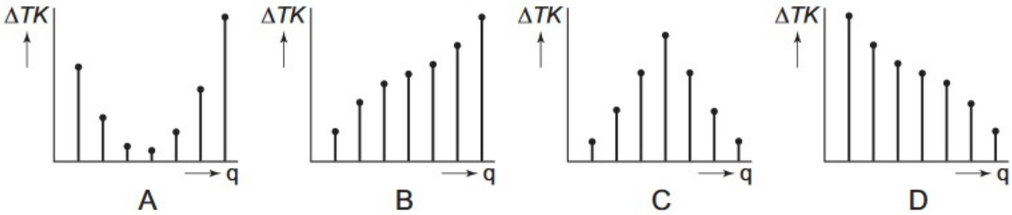
Opgave 12: Verpakkingen

Een bedrijf maakt bijzondere verpakkingen. Het bedrijf heeft onderzocht hoe de kosten voor het maken van die verpakkingen samenhangen met het aantal verpakkingen. Het verband tussen de totale kosten TK (duizenden euro) en het aantal geproduceerde verpakkingen q (duizendtallen) zie je in de figuur. In de figuur lees je bijvoorbeeld af dat bij een productie van 2000 verpakkingen de totale kosten € 15000,00 zijn.



Figuur 2.17

Bekijk de vier diagrammen A, B, C en D, waarin de toename ΔTK van TK is weergegeven. Eén van de vier diagrammen past bij de grafiek.



Figuur 2.18

a Welk toenamediagram past bij de grafiek? Licht je antwoord toe.

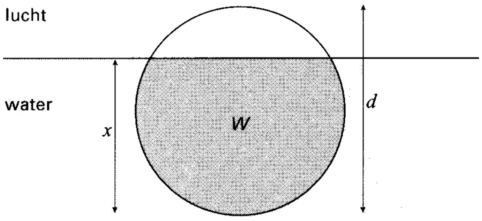
A. Diagram A
B. Diagram B
C. Diagram C
D. Diagram D

b Hoeveel procent worden de totale kosten meer, als de productie van 4000 naar 8000 verpakkingen gaat?

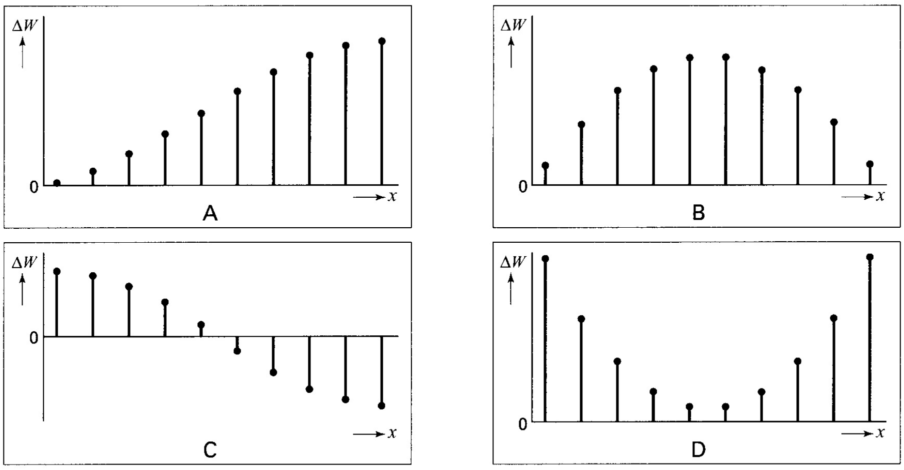
(bron: examen havo wiskunde A in 2006, eerste tijdvak)

Opgave 13: Bal uit het water

Als je met een bal in het water speelt en je laat hem onder water los, schiet hij omhoog. In het plaatje zie je zo'n bal die gedeeltelijk onder water gehouden wordt. W is het volume van het deel van de bal onder water.



Figuur 2.19



Figuur 2.20

In de toenamediagrammen zie je de toename van W als de bal onder water geduwd wordt. X is de diepte onder water van de onderkant van de bal. Drie van de vier diagrammen zijn niet goed.

Leg uit welk toenamediagram past bij het onder water duwen van de bal.

A. Diagram A
B. Diagram B
C. Diagram C
D. Diagram D

(naar: examen havo wiskunde A in 2001, tweede tijdvak)

Testen

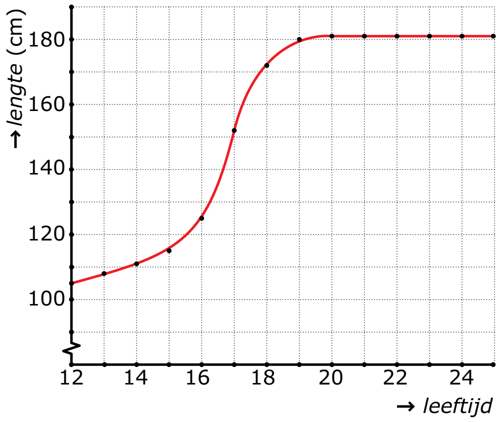
Opgave 14

Je ziet hier de grafiek van de lengte van een man vanaf zijn twaalfde levensjaar tot zijn huidige leeftijd.

a Maak bij deze grafiek een toenamediagram met een stapgrootte van 1 jaar.

b Gedurende welke periode is zijn lengte constant? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?

c Gedurende welke perioden is de groeisnelheid constant? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?



Figuur 2.21

Opgave 15

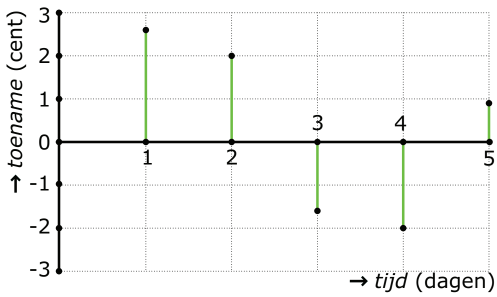
Gegeven is de functie $y = x^2 + 2x$.

a Teken een toenamediagram met een stapgrootte van $0{,}5$ vanaf $x =$ -2 tot $x = 2$.

b Als gegeven zou zijn dat $y = x^2 + 2x + 5$. Hoe ziet dan het toenamediagram eruit vergeleken met dat wat je getekend hebt bij a?

Opgave 16

De Amerikaanse dollar stond op een dinsdag in 2002 op een koers van € 1,22. De figuur heeft betrekking op dezelfde week van zondag tot en met vrijdag. In de figuur zie je de toename of afname van de koers per dag in tienden van centen nauwkeurig. Teken een grafiek waarin de koers van de dollar in de loop van die week zichtbaar is.



Figuur 2.22

Practicum

Het **maken van een toenametabel** kun je gemakkelijk door de grafische rekenmachine laten doen. Bekijk het eerste deel van het practicum:

- **Veranderingen, differentiëren en de TI84**
- **Veranderingen, differentiëren en de TInspire**
- **Veranderingen, differentiëren en de Casio**
- **Veranderingen, differentiëren en de HPprime**
- **Veranderingen, differentiëren en de NumWorks**

2.3 Differentiequotiënt

Inleiding

Je hebt veranderingen in grafieken leren beschrijven in woorden en met toenamediagrammen. Bij toenamediagrammen moet je met een vaste stapgrootte werken. Maar als je wilt nagaan of een wielrenner de eerste 10 minuten gemiddeld net zoveel heeft afgelegd als de volgende 15 minuten, heb je met ongelijke intervallen te doen. In dat geval werk je met gemiddelde veranderingen.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- berekenen van de gemiddelde verandering of het differentiequotiënt;
- aangeven van de gemiddelde verandering in een grafiek;
- werken met toepassingen van de gemiddelde verandering.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften en berekenen van functiewaarden;
- herkennen van toenemende, of afnemende, of constante stijging en daling,
- herkennen van extremen;
- werken met toenamediagrammen.

Verkennen

Opgave V1

Van een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel.

tijd (min.)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 3.1

a Is zij de eerste 8 km gemiddeld sneller of langzamer dan in de volgende 4 km?

b Waarom is er bij deze situatie eigenlijk geen toenamediagram te maken?

Je maakt bij de tabel een grafiek door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd, op de verticale as de afgelegde afstand. Niet alle lijnstukken zijn even steil.

c Hoe kun je de helling van zo'n lijnstuk in een getal uitdrukken?

d Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de periode vanaf de twaalfde tot en met de achttiende km. Wat betekent het getal dat je zojuist hebt gevonden voor de wielrenner?

Uitleg

Een zeilwagen rijdt op het strand. Als de zeilwagen start en de windkracht is constant, dan neemt zijn snelheid recht evenredig met de tijd toe. Voor de afgelegde afstand s (m) geldt: $s = 1{,}2t^2$
Hierin is t de tijd in seconden.

Na 1 seconde is de afgelegde afstand $1{,}2 \cdot 1^2 = 1{,}2$ meter.
Na 4 seconden is de afgelegde afstand $1{,}2 \cdot 4^2 = 19{,}2$ meter.

De zeilwagen heeft $19{,}2 - 1{,}2 = 18$ meter afgelegd in $4 - 1 = 3$ seconden.
De gemiddelde verandering van de afstand per seconde (de gemiddelde snelheid) op het interval $[1,4]$ is:
$\frac{19{,}2-1{,}2}{4-1} = \frac{18}{3} = 6$ m/s.

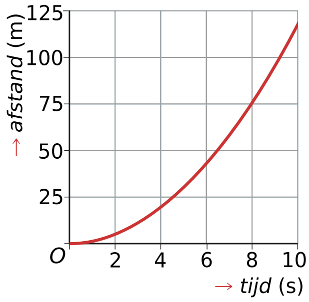
$[1,4]$ is een gesloten interval. De waarden $t = 1$ en $t = 4$ worden meegerekend.

Je berekent de gemiddelde snelheid door het verschil in afstand te delen door het verschil in tijd:

gemiddelde verandering van afstand = *gemiddelde snelheid* = $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

Het teken Δ (de Griekse hoofdletter ‘delta’) staat voor ‘differentie’, wat ‘verschil’ betekent.

De breuk $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ heet het ‘differentiequotiënt’.



Figuur 3.2

Opgave 1

Voor de afgelegde afstand s in meter van de zeilwagen geldt de formule: $s = 1{,}2t^2$. Hierin is t de tijd in seconden. Je wilt de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0,6]$ berekenen.

a Bereken Δt op dit interval.

b Bereken Δs op dit interval.

c Hoeveel bedraagt de gemiddelde snelheid op het interval $[0,6]$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de grafiek van de formule: $y = x^2$

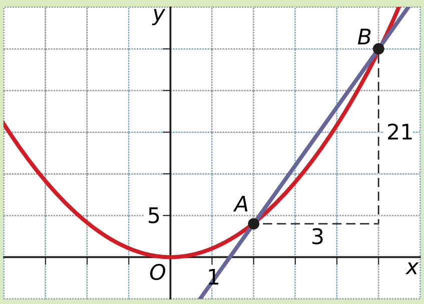
De **gemiddelde verandering** van deze grafiek op het interval $[2,5]$ is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5^2-2^2}{5-2} = 7$.

Dit getal heet het **differentiequotiënt** van de grafiek op het interval $[2,5]$.

In de grafiek is het differentiequotiënt gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door $A(2,4)$ en $B(5,25)$.

Het differentiequotiënt is gelijk aan:

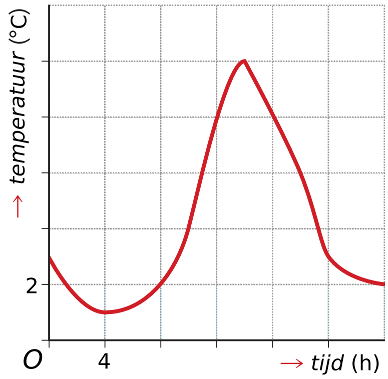
- de helling van de lijn door A en B;
- de richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B;
- de gemiddelde verandering van de grafiek op het interval $[2,5]$.



Figuur 3.3

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek die de temperatuur op een dag weergeeft.
Bereken het differentiequotiënt op het interval $[8,12]$ en leg uit wat dit betekent.



Figuur 3.4

Antwoord

Om 12:00 uur was het 8 °C.
Om 8:00 uur was het 2 °C.

Het differentiequotiënt op het interval $[8,12]$ is:

$$\frac{\Delta \text{ temperatuur}}{\Delta \text{ tijd}} = \frac{8-2}{12-8} = 1{,}5$$

Dit betekent dat de temperatuur gemiddeld $1{,}5$ °C per uur is gestegen tussen 8:00 en 12:00 uur.

Opgave 2

Bekijk de temperatuurgrafiek in **Voorbeeld 1**.

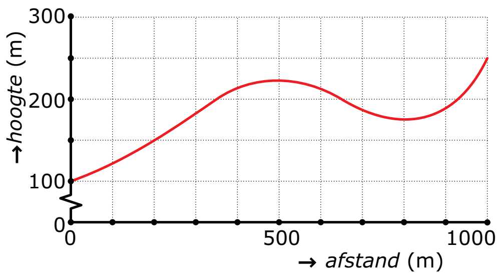
a Met hoeveel graden neemt de temperatuur gemiddeld per uur toe van 4:00 tot 10:00 uur?

b Bereken de gemiddelde verandering op het interval $[12,20]$.

c Geef een interval waarop het differentiequotiënt 0 is.

Opgave 3

Bij het begin van een berghelling staat een waarschuwingsbord: helling van 15%.
De grafiek geeft de berghelling weer. De afstand die je hebt afgelegd, is afgezet tegen de hoogte waarop je je bevindt.



Figuur 3.5

a Hoeveel bedraagt de hoogteverandering per meter horizontaal afgelegde afstand bij een hellingspercentage van 15%?

b Hoeveel is de gemiddelde hoogteverandering gerekend over de hele berg?

c Hoeveel is de gemiddelde hoogteverandering ongeveer op het interval $[400,500]$?

d Schat de steilste helling van deze berg.

Voorbeeld 2

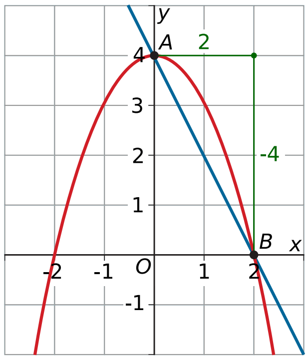
Gegeven is de formule: $y = 4 - x^2$
Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$ en leg uit wat dit getal betekent.

Antwoord

$x = 2$ geeft $y = 4 - 2^2 = 0$.
$x = 0$ geeft $y = 4 - 0^2 = 4$.

Het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$ is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{2-0} = -2$.

Bekijk de grafiek van deze formule. Het differentiequotiënt is gelijk aan het hellingsgetal van het lijnstuk AB. Het is de gemiddelde verandering van de uitkomsten op het interval $[0,2]$.



Figuur 3.6

Opgave 4

Gegeven is de formule: $y = (x-2)^2 + 3$.
Bereken het differentiequotiënt op het interval $[1,5]$ in stappen.

a Bereken Δx op het interval $[1,5]$.

b Bereken Δy op het interval $[1,5]$.

c Bereken het differentiequotiënt op dit interval.

Opgave 5

Gegeven is de formule: $y = -0{,}5x^3 + 5x - 4$.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[1,6]$.

b Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-4,3]$.

Voorbeeld 3

Een hardloper doet mee aan een wedstrijd over 10 kilometer. Op enkele plekken is zijn tussentijd gemeten. De resultaten staan in de tabel.

tijd t (min)	0	10	18	25	34
afstand s (km)	0	3,0	5,5	7,8	10

Tabel 3.2

Gedurende de eerste 10 minuten liep hij 3,0 km. Gedurende de volgende 8 minuten liep hij 2,5 km.

Op welk van deze twee tijdsintervallen liep hij het snelst?

Antwoord

De gemiddelde snelheid is gelijk aan het differentiequotiënt, dus voor de gemiddelde snelheid geldt:

- op het interval $[0,10]$: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3{,}0-0}{10-0} = 0{,}30$ km/min
- op het interval $[10,18]$: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5{,}5-3{,}0}{18-10} \approx 0{,}31$ km/min

Hij liep dus het snelst op het tweede tijdsinterval.

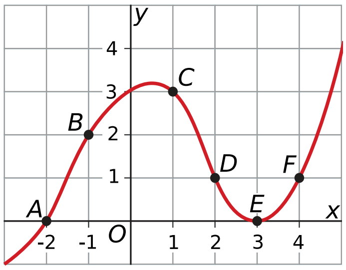
Opgave 6

Gebruik de tabel met tussentijden uit **Voorbeeld 3**. Op welk van de vier tijdsintervallen liep de hardloper het snelst?

Verwerken

Opgave 7

Bekijk de grafiek.



Figuur 3.7

a Bereken de helling van de lijn AB.

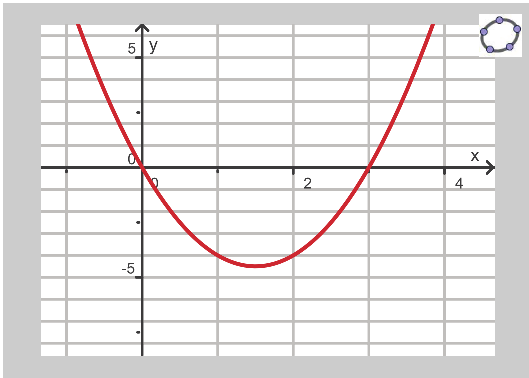
b Bereken de helling van de lijn CF.

c Bij twee lijnen tussen de getekende punten hoort een differentiequotiënt van 0. Welke twee lijnen zijn dat?

d Punt F heeft een kleinere y-waarde dan punt C. Hoe kun je dat aan het differentiequotiënt op het interval $[1,4]$ zien?

Opgave 8

Bekijk de grafiek, getekend met GeoGebra. Bereken het differentiequotiënt op het interval $[1,3]$.



Figuur 3.8

Opgave 9

Gegeven de functie $y = x^3 - 3x^2 + 6$.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$.

b Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-1,2]$.

c Wat valt je bij b op? Kun je dat verklaren?

Opgave 10

Op een ochtend heeft een school veel griepmeldingen gekregen. Het aantal griepmeldingen tussen 8:00 en 10:00 uur is weergegeven in de tabel.

tijd (h)	8:00	8:30	9:10	10:00
aantal ziekmeldingen	10	25	42	49

Tabel 3.3

a Tussen welke tijdstippen kwamen er gemiddeld per minuut de meeste griepmeldingen?

b Sarah was de 28ste leerling die zich heeft ziekgemeld. Dat deed ze om 8:42 uur. Hoeveel ziekmeldingen waren er gemiddeld per minuut tussen 8:42 en 9:10 uur?

Opgave 11

Gegeven is de formule: $y = 3 \cdot \sqrt{2x+4} - 5$.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-2,6]$.

b Bereken het differentiequotiënt op het interval $[4,10]$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

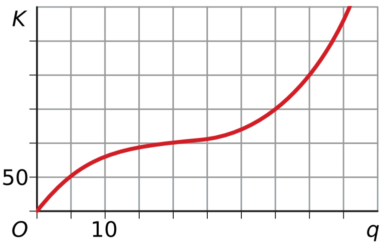
c Maak met de grafische rekenmachine een tabel met stapgrootte 1 van de formule en zoek een interval met beginpunt -2 waarop de gemiddelde verandering gelijk is aan 3.

Toepassen

Opgave 12: Koekjesproductie

Het bedrijf Fiesta produceert koekjes voor de horeca. Als verpakking gebruiken ze zakken van 3 kilogram. De kosten hangen af van het aantal zakken koekjes dat gemaakt wordt, q is het aantal geproduceerde zakken koekjes per uur.
Voor de kosten K (in euro) wordt het volgende functievoorschrift gebruikt:

$K = 0{,}01q^3 - 0{,}6q^2 + 13q$



Figuur 3.9

a Bereken de totale kostenstijging bij een productietoename van 0 zakken per uur naar 20 zakken per uur.

b Bereken de gemiddelde kostenstijging bij een productietoename van 0 zakken per uur naar 20 zakken per uur.

c Plot zelf de grafiek op de grafische rekenmachine. Plot ook de lijn door de punten $(0,0)$ en $(20,100)$. De lijn snijdt de grafiek van K in een derde punt. Geef de coördinaten van dat punt.

d Kun je nu zonder berekening zeggen wat de gemiddelde kostenstijging is op het interval $[20,40]$? Licht je antwoord toe.

Opgave 13: Afkoelen van koffie

Hoe snel een kopje koffie afkoelt, hangt af van de temperatuur van de koffie bij het inschenken en de kamertemperatuur. Ook de vorm van het kopje en het materiaal waarvan het kopje is gemaakt hebben invloed. De formule $T(t) = 20 + 70 \cdot 0{,}82^t$ geeft de temperatuur van de koffie. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t de tijd in minuten.

a Wat is de temperatuur van de koffie bij het inschenken?

b Hoeveel graden daalt de temperatuur van de koffie gemiddeld in de eerste vijf minuten? Rond je antwoord af op één decimaal.

c Bereken hoeveel de temperatuur gemiddeld per minuut daalt in de volgende vijf minuten. Rond je antwoord af op één decimaal.

d De temperatuur van de koffie daalt van $t = 0$ tot $t = 5$ sneller dan van $t = 5$ tot $t = 10$. Leg uit hoe je dit aan de differentiequotiënten bij b en c kunt zien.

Testen

Opgave 14

Sofie is om 10:00 uur begonnen met het verkopen van kaartjes voor een voorstelling. Zij heeft op een aantal tijdstippen bijgehouden hoeveel kaartjes ze verkocht heeft:

tijd	10:00	12:00	13:30	15:00	18:00
aantal kaartjes	0	178	331	405	642

Tabel 3.4

a Op welke tijdsintervallen liep de kaartverkoop het best?

b Emmy kocht om 12:10 uur het 181ste kaartje. Hoeveel is de gemiddelde verkoop per minuut tussen 12:10 en 13:30 uur?

Opgave 15

Gegeven is de functie $y = 0{,}5x^2 - 2x + 1$.

a Bereken de gemiddelde verandering op het interval $[0{,}2]$.

b Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-1{,}8]$.

c Geef een interval waarop het differentiequotiënt 0 is.

2.4 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Veranderingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- stijgen en dalen — toenemende, afnemende of constante stijging of daling — interval — extremen
- toenametabel — vaste stapgrootte — toenamediagram
- gemiddelde verandering — differentiequotiënt — koorde

Activiteitenlijst

- bij een functie (of grafiek) aangeven waar hij (toenemend, afnemend) stijgt en daalt — intervalnotatie gebruiken
- bij een functie (of grafiek) een toenamediagram tekenen en omgekeerd bij een toenamediagram mogelijke grafieken van een bijpassende functie tekenen;
- bij een functie (of grafiek) het differentiequotiënt op een gegeven interval berekenen en de betekenis daarvan omschrijven;

Achtergronden

Het wiskundig beschrijven van veranderingen is nog niet zo heel oud.
Eigenlijk begon het allemaal met de Fransman **Nicole Oresme (1323—1382)** die de 'grafiek' bedacht om het bewegen van voorwerpen langs een rechte lijn te beschrijven.
Later gebruikte de natuurkundige Galileo Galileï (1564—1642) de grafieken van Oresme om er de vrije val van een voorwerp in vacuüm mee weer te geven.
En **Isaac Newton (1642—1727)** en **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716)** bedachten een goede techniek om veranderingen te berekenen: de 'differentiaalrekening'. Dit valt echter buiten het bestek van havo wiskunde A.

Figuur 4.1 **Galileo Galileï (Wikipedia)**

Testen

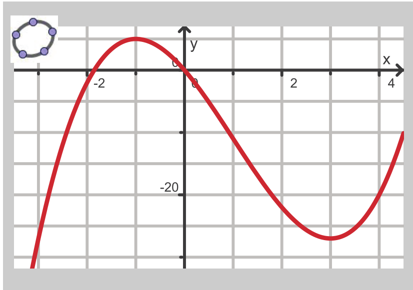
Opgave 1

Bekijk de grafiek van de formule: $y = x^3 - 3x^2 - 9x$

a Van welke soort daling is er sprake op het interval $[0,1]$?

b Bereken het differentiequotiënt op dit interval en leg uit wat de betekenis van dit getal is.

c Is de grafiek voor $x = 1$ stijgend of dalend?



Figuur 4.2

Opgave 2

Het migratiesaldo van de stad R geeft het verschil tussen het aantal mensen dat in de stad komt wonen, en het aantal mensen dat uit de stad vertrekt. Het geboorteoverschot is het verschil tussen het aantal geboortes en het aantal overledenen in de stad. Bekijk de grafiek met het migratiesaldo (rood) en het geboorteoverschot (groen) voor de jaren 2015 tot en met 2019.

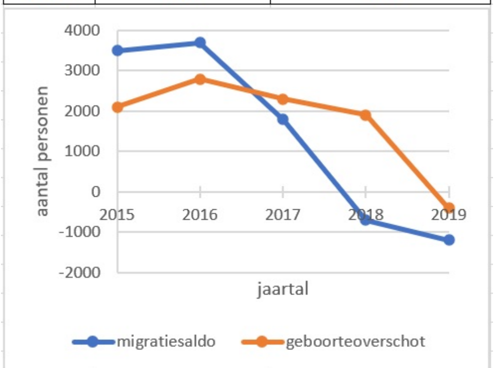
a Met hoeveel mensen is het aantal inwoners in de stad in het jaar 2015 toegenomen?

b In welk jaar is het aantal inwoners in deze stad afgenomen?

c Het aantal inwoners van de stad was aan het begin van het jaar 2015 ongeveer 72600 (op honderdtallen afgerond). Teken een grafiek van het aantal inwoners in de stad in de jaren 2015 tot en met eind 2019.

d Wat is de gemiddelde bevolkingstoename per jaar in de periode van begin 2015 tot begin 2020?

Bevolking van R		
jaar	migratiesaldo	geboorteoverschot
2015	3500	2100
2016	3700	2800
2017	1800	2300
2018	-700	1900
2019	-1200	-400



Figuur 4.3

Opgave 3

Voor de hoogte van een vuurpijl die je van de grond afschiet geldt:
$h(t) = 60t - 5t^2$
Hierin h de hoogte boven de begane grond in meter en t de tijd in seconden na het afschieten.

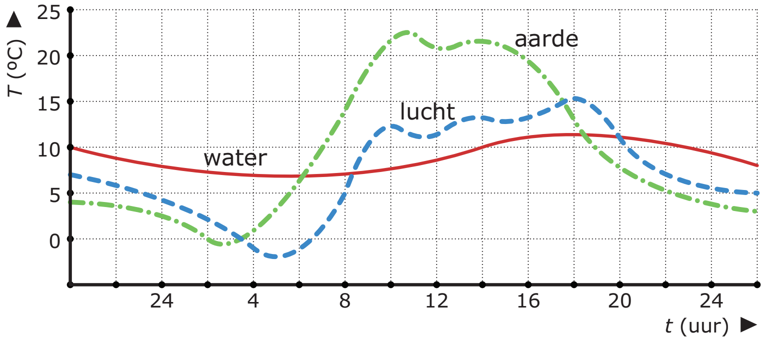
a Na tien seconden ontploft de vuurpijl. Op welke hoogte is dat?

b Teken een bijpassend toenamediagram van 0 tot 6 met stapgrootte 1.

c Bereken de gemiddelde snelheid van de vuurpijl over de eerste zes seconden.

Opgave 4

Bekijk de grafiek van het verloop van de temperatuur van het aardoppervlak T_A, de lucht T_L en het water T_W gedurende een etmaal.



Figuur 4.4

a Bereken de gemiddelde veranderingssnelheid $\frac{\Delta T_A}{\Delta t}$ van de temperatuur van het aardoppervlak tussen 4:00 uur en 12:00 uur.

b Is de veranderingssnelheid van T_A gedurende de hele periode tussen 4:00 uur en 12:00 uur constant? Waaraan zie je dat?

c Bereken de gemiddelde verandering voor T_A,T_L en T_W voor de periode 14:00 tot 22:00 uur.

d Op welke tijdstippen van de dag stegen T_A, T_L en T_W het snelst?

Toepassen

Opgave 5: Suikerbieten

Een boer verbouwt suikerbieten op een bepaalde lap grond. Voor het onkruid wieden heeft hij personeel in dienst. De opbrengst bij de verkoop van de suikerbieten neemt toe als er beter wordt gewied, dus als hij meer werknemers in dienst neemt. Maar dat gaat niet onbeperkt: op zeker moment lopen de bietenwieders elkaar voor de voeten en wordt het wieden er niet beter van.

Een mogelijk verband tussen de opbrengst R (in honderden euro) en het aantal werknemers w wordt gegeven door de formule $R = -\frac{1}{3}w^3 + 6w^2$.

Voor de boer is het interessant om te weten hoeveel werknemers hij het beste kan inhuren. Daarbij kijkt hij naar de meeropbrengst van een werknemer. Zo is de meeropbrengst van de derde werknemer $R(3) - R(2)$. De meeropbrengst per werknemer heet in economentaal ook wel marginale opbrengst. De boer zorgt er voor dat hij zoveel werknemers in dienst neemt dat de marginale opbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

a Hoeveel bedraagt de marginale opbrengst (de meeropbrengst) van de derde werknemer?

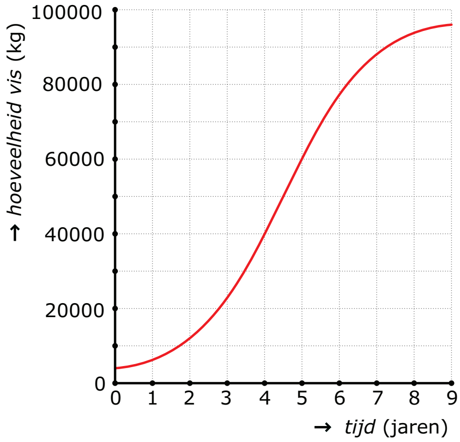
b Je kunt met je grafische rekenmachine een tabel maken van de meeropbrengsten van elk van de eerste 10 werknemers. Maak die tabel en beslis op grond daarvan hoeveel werknemers de boer in dienst zal nemen voor het bieten wieden.

c De boer kiest voor zoveel werknemers, dat de meeropbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is. Waarom doet hij dat? Waarom kiest hij niet voor het aantal werknemers waarbij de opbrengst zo groot mogelijk is?

Examen

Opgave 6: Viskweker

In een viskwekerij wordt vis uitgezet in een aantal nieuw aangelegde kweekvijvers. Als er geen vis wordt gevangen zal de visstand zich in de loop der jaren uitbreiden. De grafiek geeft een model van de groei van de visstand.



Figuur 4.5

a Teken het toenamediagram voor intervallen van een jaar, te beginnen met het interval $[1,2]$.

b De viskweker zal een aantal jaren afwachten alvorens te oogsten. Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens de grafiek.
Welk advies zou je de viskweker geven over:

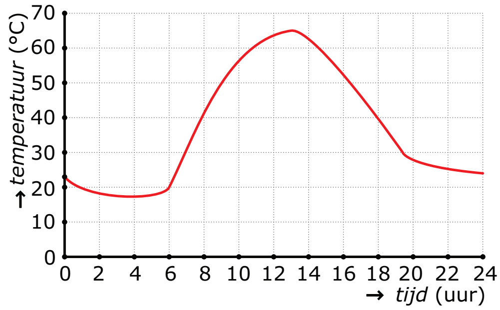
- het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten;
- de grootte van de jaarlijkse vangst?

Geef bij dit advies een toelichting waarmee je de viskweker denkt te overtuigen.

(bron: examen wiskunde A vwo 1989, eerste tijdvak)

Opgave 7: Woestijnhagedis

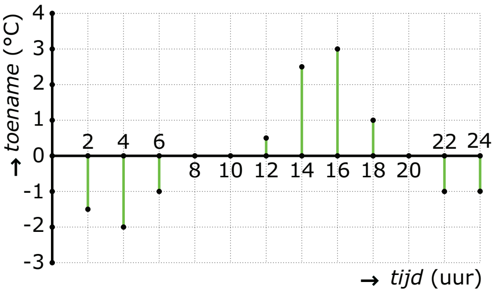
De woestijnhagedis leeft in de woestijnen van Californië (VS). Bekijk de grafiek van het temperatuurverloop voor een zomerdag (eind juli/begin augustus) in de woestijn. De grafiek is typerend voor alle dagen in de periode eind juli/begin augustus. Alleen als de temperatuur tussen de 36 °C en 42 °C ligt, is de hagedis voortdurend buiten zijn hol actief met het zoeken naar voedsel. Hij heeft dan geen beschutting nodig. Als de temperatuur tussen de 42 °C en de 50 °C is, moet hij af en toe beschutting zoeken tegen de zon. Bij alle andere temperaturen bevindt de hagedis zich voortdurend in zijn hol.



Figuur 4.6

a Hoeveel uur per dag bevindt de hagedis zich in de periode eind juli/begin augustus voortdurend buiten zijn hol? Licht je antwoord toe.

b In de figuur is te zien dat de temperatuur tussen 6:00 uur en 10:00 uur vrij snel stijgt. Wat is in deze periode de gemiddelde temperatuurstijging per uur?



Figuur 4.7

Bekijk het diagram met de toename/afname van de temperatuur in het hol van de hagedis. Dit diagram is typerend voor de periode eind juli/begin augustus. In het diagram kun je aflezen hoeveel de temperatuur per 2 uur is gestegen of gedaald. Om 8:00 uur 's morgens is de temperatuur in het hol ongeveer 38 °C.

c Teken een grafiek van de temperatuur in het hol op basis van het toename-/afnamediagram.

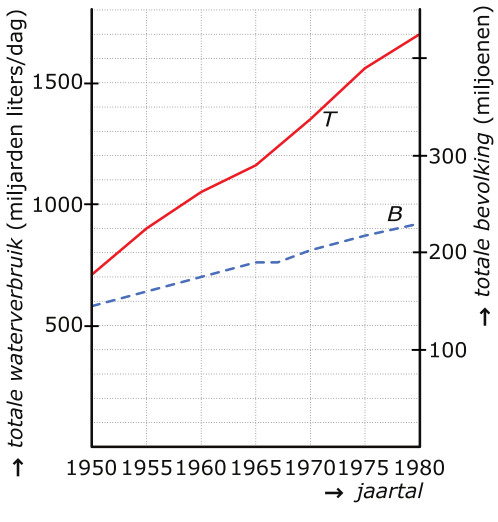
d Bepaal op welke momenten van de dag het temperatuurverschil tussen de omgeving en in het hol het grootst is.

(naar: examen havo wiskunde A in 1996, tweede tijdvak)

Opgave 8: Schoon drinkwater

Overal op aarde is de behoefte aan schoon water groot. Niet alleen voor huishoudelijk gebruik (o.a. drinkwater), maar vooral voor niet-huishoudelijk gebruik (landbouw en industrie) is heel veel water nodig. Deze opgave gaat over het waterverbruik in de Verenigde Staten vanaf 1950.

a In de grafiek staan gegevens over het totale jaarverbruik (T) en de grootte van de bevolking (B) van de V.S. Je kunt er bijvoorbeeld uit aflezen dat in 1980 het totale waterverbruik ongeveer 1680 miljard liter per dag bedroeg, en dat de bevolking in dat jaar ongeveer 230 miljoen mensen telde.
Laat zien dat het totale verbruik per jaar in 1975 gemiddeld ongeveer 2,6 miljoen liter water per inwoner was.



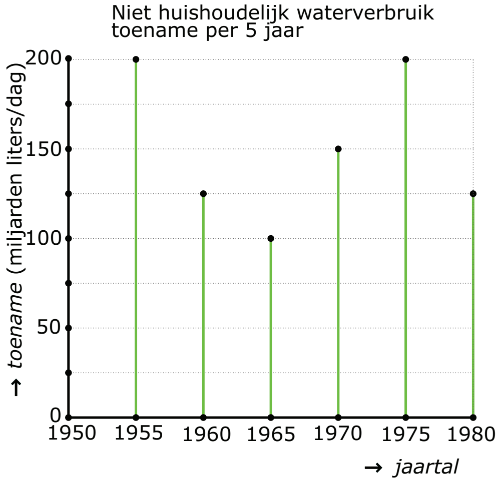
Figuur 4.8

b Het aantal liters in opgave a is erg groot. Dat komt vooral door het niet-huishoudelijk waterverbruik. In 1950 was het totale waterverbruik (700 miljard liter per dag) opgebouwd uit 625 miljard liter water voor niet-huishoudelijk gebruik en 75 miljard liter per dag voor huishoudelijk verbruik.

Bekijk ook het toenamediagram van het waterverbruik per dag in de V.S. voor niet-huishoudelijk gebruik.
Onderzoek of het niet-huishoudelijk verbruik als percentage van het totale waterverbruik per dag in 1980 groter was dan in 1950.

c Bij een onderzoek schatte men dat de toename van het totale waterverbruik elke 5 jaar zou liggen tussen 110 en 200 miljard liter per dag. Tussen welke twee getallen ligt volgens deze veronderstelling het totale waterverbruik in de V.S. in 2010?

(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)



Figuur 4.9

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

Math4all

www.math4all.nl