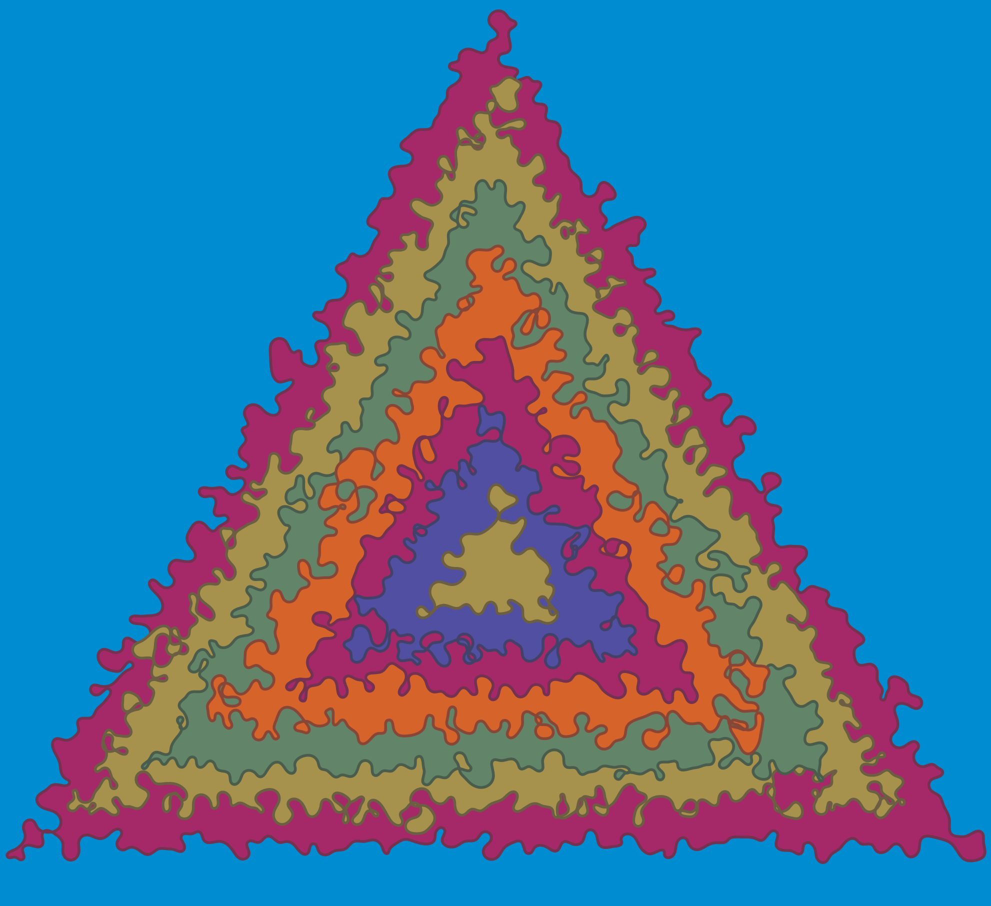
Wiskunde D

4 VWO

Katern 2

ConTeXt College



Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

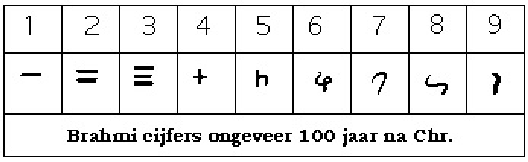
1

Soorten getallen

1.1 Gehele getallen

Inleiding

In de Oudheid was een getal een hoeveelheid, samengesteld uit eenheden. Deze definitie is terug te vinden in ‘De Elementen’, het beroemde wiskundeboek van Euclides (ca. 300 v.Chr.). Ons getal 1 werd toen niet als getal gezien en 0 was nog helemaal niet in beeld. Het getal 0 ontstond pas toen het tientallig stelsel als ‘positiestelsel’ * zijn intrede deed in de Oud-Indische cultuur. De eerste cijfers ontstonden in die tijd, evenals het eerste idee van negatieve getallen.
De getallen 0, 1, 2, 3, 4, ... worden tegenwoordig de natuurlijke getallen genoemd. Voeg je daar de negatieve getallen aan toe, dan spreek je van de gehele getallen. Veel getallentheorie gaat alleen over natuurlijke getallen.



Figuur 1.1

*Een **positiestelsel** is een talstelsel waarin een getal door een rij symbolen wordt voorgesteld. Dit zijn meestal cijfers, waarvan de positie op basis van een gekozen grondtal de bijdrage aan het getal bepaalt. Ons gebruikelijke talstelsel heeft 10 als grondtal. De positie van een cijfer bepaalt de bijdrage in machten van het grondtal 10 aan het getal. In dit stelsel heeft een getal als 1234 dan de betekenis: $1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$.

In het tegengestelde van het positiestelsel bestaan er verschillende tekens voor kleine en grote waarden. Romeinse cijfers zijn het bekendste voorbeeld. De ervaring heeft geleerd dat het positiestelsel in alle opzichten handiger is.

Je leert in dit onderwerp

- de natuurlijke en de gehele getallen onderscheiden;
- werken met even en oneven getallen en priemgetallen;
- een paar eigenschappen van deze getallen.

Voorkennis

- rekenen met getallen in het tientallig stelsel.

Verkennen

Opgave V1

Het gaat in dit onderwerp over soorten getallen.
In deze opgave beperk je je tot de natuurlijke getallen: 0, 1, 2, 3, 4, ...
Zoek eens uit wat er wordt verstaan onder de volgende soorten getallen en schrijf de eerste getallen van die soort op.

- even getallen
- oneven getallen
- vijfvouden
- priemgetallen
- perfecte getallen

- bevriende getallen
- gebrekkige getallen en overvloedige getallen
- pythagoreïsche drietallen

Uitleg

Het idee van getallen is ontstaan uit het tellen en uit aantallen. Daarom waren de eerste getallen niet erg groot, bijvoorbeeld 2, 3, 4, 5, ..., 10, 20, ..., 100, 200, 300, ... Bij duizenden hield het wel op. De grote getallen, negatieve getallen en breuken zijn pas later ontstaan.

Er waren in de Oudheid allerlei manieren om getallen op te schrijven. Vaak werden voor tientallen andere symbolen gebruikt dan voor eenheden. Denk hierbij aan de Romeinse cijfers.

Ons huidige stelsel lijkt te zijn ontstaan in het oude China en is via Indië en Arabië omstreeks 1200 na Christus naar West-Europa gekomen. Het bestaat uit tien cijfers waarmee alle getallen gevormd kunnen worden. De 0 is nodig om een ‘lege’ positie aan te geven: 1024 is opgebouwd uit 1 duizendtal, 0 honderdtallen, 2 tientallen en 4 eenheden.

Al in de Oudheid werden de soorten getallen benoemd en bestudeerd, onder andere:

- natuurlijke getallen, de gehele positieve getallen;
- even getallen, die in twee gelijke hele delen kunnen worden verdeeld;
- oneven getallen, die niet in twee gelijke hele delen kunnen worden verdeeld;
- priemgetallen, de natuurlijke getallen groter dan 1 die alleen deelbaar zijn door 1 en door zichzelf.

Het vinden van bewijzen voor de eigenschappen van getallen is de grote uitdaging.

Opgave 1

De meest bijzondere gehele getallen zijn de priemgetallen. Priemgetallen zijn de gehele positieve getallen groter dan 1 die alleen door 1 en door zichzelf deelbaar zijn.

a Schrijf de eerste vijftien priemgetallen op.

b Hoe kun je nagaan of een getal een priemgetal is?

Opgave 2

Een even getal g kun je altijd schrijven in de vorm $g = 2n$, met $n = 0,1,2,3,...$

a Waarom is dat zo?

b In welke vorm kun je een drievoud schrijven?

c In welke vorm kun je een zesvoud schrijven? Laat zien, dat elk zesvoud ook een even getal is.

d In welke vorm kun je een oneven getal altijd schrijven?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **positiestelsel** is een getallenstelsel waarbij de waarde van een cijfer afhangt van de positie van dat cijfer in een getal. Ons **decimale getallenstelsel** is een positiestelsel met grondtal 10. Een **verzameling** is een groep wiskundige elementen. Elementen hebben meestal een of meer dezelfde eigenschappen. Een verzameling heeft vaak een naam (symbool).

De **natuurlijke getallen** zijn de getallen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... De elementen van deze verzameling hebben de eigenschappen dat ze een getal zijn, geheel zijn en 0 of groter zijn. Deze verzameling heeft als symbool $\mathbb{N}$. Je schrijft: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,...\}$. Het aantal elementen van deze verzameling is ‘oneindig’.

De **gehele getallen** zijn de natuurlijke getallen waaraan je de verzameling tegengestelde getallen $\{-1,-2,-3\},...$ toevoegt. Deze verzameling heeft als symbool $\mathbb{Z}$. Je schrijft: $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.
Het symbool $\in$ betekent ‘is een element van’.
Dat -4 tot de verzameling van de gehele getallen behoort, noteer je zo: $-4 \in \mathbb{Z}$. -4 is geen natuurlijk getal. Dat schrijf je zo: $-4 \notin \mathbb{N}$.

De som van twee gehele getallen is weer een geheel getal. Hetzelfde geldt voor het verschil en het product van twee gehele getallen. Maar als je gehele getallen gaat delen, komt daar vaak geen geheel getal uit.

Een geheel getal heet **deelbaar** door een ander geheel getal als de deling weer een geheel getal oplevert. Naar deelbaarheid worden verschillende soorten gehele getallen onderscheiden. De meest gebruikte zijn:

- **even getallen**: getallen van de vorm $2z$ met $z \in \mathbb{Z}$. Deze getallen zijn dus deelbaar door 2;
- **oneven getallen**: getallen van de vorm $2z+1$ met $z \in \mathbb{Z}$. Deze getallen zijn dus niet deelbaar door 2;
- **priemgetallen**: getallen die alleen deelbaar zijn door 1 en door zichzelf en groter zijn dan 1.

Elk positief geheel getal is te schrijven als een uniek product van priemgetallen. Dit is de **hoofdstelling van de rekenkunde**.

Voorbeeld 1

Laat zien dat de som en het verschil van twee oneven getallen altijd even zijn, maar dat het product van twee oneven getallen altijd oneven is.

Antwoord

Neem twee oneven getallen $a = 2n+1$ en $b = 2m+1$, waarbij n en m verschillende gehele getallen zijn.

Optellen:
$a + b = 2n + 1 + 2m + 1 = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$
Dus $a + b$ is altijd deelbaar door 2 en daarom even.

Aftrekken:
$a – b = 2n + 1 – (2m + 1) = 2n – 2m = 2(n – m)$
Dus $a - b$ is altijd deelbaar door 2 en daarom even.

Vermenigvuldigen:
$a \cdot b = (2n + 1) \cdot (2m + 1) = 4mn + 2n + 2m + 1 = 2(2mn + n + m) + 1$
Dus $a \cdot b$ is altijd oneven.

Het bovenstaande geldt ook voor $m = n$.

Opgave 3

Leg uit of en waarom de volgende beweringen waar of niet waar zijn.

a $7 \in \mathbb{Z}$

b $\frac{7}{2} \in \mathbb{Z}$

c $-7 \notin \mathbb{N}$

d $2n \in \mathbb{N}$ als $n = 0,1,2,3,...$

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je dat de som en het verschil van twee oneven getallen altijd even zijn, maar dat het product ervan altijd oneven is.

a Hoe zit dat met twee even getallen? Toon dit op dezelfde wijze aan als in het voorbeeld.

b Is de som van twee drievouden altijd weer een drievoud? En het verschil? En het product? En het quotiënt? Licht je antwoord toe zoals in het voorbeeld.

Voorbeeld 2

Laat zien dat het kwadraat van een even getal altijd even is en dat het kwadraat van een oneven getal altijd oneven is.

Antwoord

Even getal: $a = 2n$ met $n \in \mathbb{Z}$.
Kwadrateren: $a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$.
Dus het kwadraat van een even getal is inderdaad deelbaar door 2.

Oneven getal: $b = 2n + 1$ met $n \in \mathbb{Z}$.
Kwadrateren: $b^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$.
Dus het kwadraat van een oneven getal is inderdaad oneven.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt aangetoond dat het kwadraat van een even getal altijd even is en dat het kwadraat van een oneven getal altijd oneven is.

a Is de derdemacht van een even getal altijd even? Licht toe op de manier in het voorbeeld.

b Is de derdemacht van een oneven getal altijd oneven? Licht toe op de manier in het voorbeeld.

c Toon aan dat voor elk even getal g en elke $a > 0$ geldt dat a^g een kwadraat is.

Opgave 6

Je bekijkt nu twee opeenvolgende natuurlijke getallen n en $n - 1$.

a Toon aan dat hun product een even getal is.

b Toon aan dat het verschil van hun kwadraten een oneven getal is.

Voorbeeld 3

Een **Pythagoreïsch tripel** is een drietal gehele getallen a, b, c dat voldoet aan de vergelijking $a^2 + b^2 = c^2$.
Bekende voorbeelden zijn de tripels $3{,}4{,}5$ en $5{,}12{,}13$.
Ze zijn te vinden door twee gehele getallen m en n te kiezen ($m > n$) en daar a,b en c in uit te drukken. Doe dat zo dat het grootste getal c is.

Kies voor a het getal $m^2 - n^2$, voor b het getal $2mn$ en voor c het getal $m^2 + n^2$.
Toon aan dat $a = m^2 - n^2$ en $b = 2mn$ en $c = m^2 + n^2$ getallen zijn die een Pythagoreïsch tripel vormen.

Antwoord

Je moet aantonen dat $a^2 + b^2 = c^2$ en dus dat $\left(m^2 - n^2\right)^2 + (2mn)^2 = \left(m^2 + n^2\right)^2$.

Links van het isgelijkteken:

$\left(m^2 - n^2\right)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2$

Rechts van het isgelijkteken:

$\left(m^2 + n^2\right)^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2$

Beide uitdrukkingen zijn identiek. Je krijgt inderdaad een drietal getallen dat aan de vergelijking $a^2 + b^2 = c^2$ voldoet.
Krijg je zo ook echt alle Pythagoreïsche tripels? (Denk eens aan de veelvouden van een Pythagoreïsch tripel.)

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** kom je de Pythagoreïsche tripels tegen.

a Kies $m = 17$ en $n = 12$. Welk Pythagoreïsch tripel levert dat op? Controleer met de vergelijking uit het voorbeeld of het goed gaat.

b Welke getallen moet je voor m en n kiezen om het tripel $3{,}4{,}5$ te krijgen?

c Welke getallen moet je voor m en n kiezen om het tripel $5{,}12{,}13$ te krijgen?

d Welke getallen moet je voor m en n kiezen om het tripel $56{,}90{,}106$ te krijgen?

Verwerken

Opgave 8

Als je een getal schrijft als een product van priemgetallen, dan is dit het ontbinden van een getal in priemfactoren. Je deelt het getal eerst zo vaak mogelijk door het kleinste priemgetal, dan zo vaak mogelijk door het op een na kleinste priemgetal, enzovoort.

a Ontbind 2520 in priemfactoren.

b Ontbind 2984800 in priemfactoren.

c Welke delers hebben deze twee getallen gemeenschappelijk?

d Wat is hun grootste gemeenschappelijke deler?

Opgave 9

De hoofdstelling van de rekenkunde houdt in dat elk positief geheel getal een uniek product van priemgetallen is. Die priemgetallen worden wel priemfactoren genoemd.

a Laat zien dat $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$.

b Schrijf 2009 als het product van priemgetallen.

c Schrijf 15360 als het product van priemgetallen.

d Leg uit dat elk natuurlijk getal te schrijven is als een product van priemfactoren.

Opgave 10

Bekijk de vijfvouden: $g = 5n$ en $h = 5m$ met $m,n \in \mathbb{Z}$.

a Toon aan dat de som van twee vijfvouden weer een vijfvoud is.

b Toon aan dat het product van twee vijfvouden weer een vijfvoud is.

c Toon aan dat het kwadraat van een vijfvoud weer een vijfvoud is.

d Toon aan dat het quotiënt van twee vijfvouden geen vijfvoud hoeft te zijn.

Opgave 11

Toon aan dat voor elk even getal g geldt dat $g^4 + g^3 + 2g^2$ deelbaar is door 16.

Opgave 12

Een ‘perfect getal’ is een getal waarvan de delers samen opgeteld gelijk zijn aan het getal zelf (het getal zelf doet niet mee).

a Laat zien dat 6 een perfect getal is.

b Laat zien dat 28 een perfect getal is.

c Er is een verband tussen perfecte getallen en een speciaal soort priemgetallen, de ‘mersennepriemgetallen’. Mersennepriemgetallen zijn priemgetallen van de vorm $2^n - 1$, waarbij n een priemgetal is. Er geldt: als $2^n - 1$ een priemgetal is, dan is $2^{n-1}(2^n - 1)$ een perfect getal. Bereken het volgende perfecte getal na 28 en toon aan dat het perfect is.

Toepassen

Opgave 13: De zeef van Eratosthenes

De zeef van Eratosthenes (bibliothecaris van Alexandrië vanaf ca. 240 v.Chr.) is een algoritme om priemgetallen te vinden. Deze methode is vooral efficiënt wanneer hij wordt gebruikt voor de kleinere priemgetallen.

Zoek uit hoe deze methode werkt en pas deze methode toe om de priemgetallen tussen 2 en 15 te vinden.

Opgave 14: Getallen met zeven verschillende cijfers

Je bekijkt alle getallen van 7 cijfers die je kunt maken met de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7. Je gebruikt alle cijfers één keer. Die getallen schrijf je in een rij van klein naar groot.
Je splitst vervolgens die rij getallen precies in het midden op.

Welk getal is het grootste getal van de eerste helft?

Testen

Opgave 15

Bekijk de zesvouden: $g = 6 \cdot n$.

a Toon aan dat de som van twee zesvouden een even getal is.

b Toon aan dat de som van twee zesvouden een zesvoud is.

c Toon aan dat het product van twee zesvouden een negenvoud is.

d Toon aan dat het quotiënt van twee zesvouden geen zesvoud hoeft te zijn.

Opgave 16

Laat zien dat voor elk geheel getal n geldt dat $n^3 - n$ deelbaar is door 3.

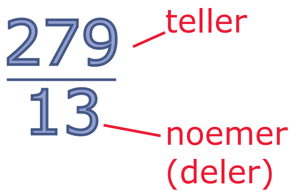
Opgave 17

Welke gemeenschappelijke delers hebben 11025 en 19305?

1.2 Rationale getallen

Inleiding

Als je gehele getallen gaat delen, dan krijg je soms weer een geheel getal, maar meestal komt de deling ‘niet uit’ en blijft er een rest over. Vaak werk je dan met een breuk. Dat is een schrijfwijze (waarin de deling nog zichtbaar is) voor een getal dat meestal niet meer geheel is. Het delen geeft dus aanleiding tot het invoeren van nieuwe getallen, namelijk de verzameling van alle getallen die je als breuk kunt schrijven. Omdat je elk geheel getal ook als breuk kunt schrijven, vormen die een deel van deze nieuwe verzameling getallen. Binnen deze nieuwe verzameling getallen zitten ook altijd de som, het verschil, het product en het quotiënt van twee breuken.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met rationale, irrationale en reële getallen;
- breuken als een decimaal getal schrijven en omgekeerd;
- som, verschil, product en quotiënt van rationale getallen als één rationaal getal schrijven;
- notaties van verzamelingen van getallen.

Voorkennis

- rekenen met getallen in het tientallig stelsel;
- haakjes uitwerken en ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Rekenen met breuken zonder rekenmachine kun je vast nog wel.

a Schrijf de volgende breuken in de vorm $a\frac{b}{c}$ met a,b en c geheel en a zo groot mogelijk: $\frac{279}{13}$ en $\frac{98}{17}$.

b Schrijf $\frac{279}{13}$ als decimaal getal.

Uitleg

Verdeel je € 279,00 onder 13 personen, dan deel je 279 door 13.

Dat levert de breuk $\frac{279}{13}$ op.

Je kunt nu met behulp van bijvoorbeeld een staartdeling nagaan of dit een geheel getal oplevert of niet:

$279/13 = 21,...$

$\underline{273}$

$\;\;6,0$

Je ziet dat deze getallen niet deelbaar zijn: $\frac{279}{13} = 21 + \frac{6}{13}$.

Dit schrijf je als $21\frac{6}{13}$.

Bij een staartdeling kun je doorrekenen om meer decimalen te vinden. Je vindt:

$21\frac{6}{13} = 21{,}4615384615384615384615384615384615384615 38...$

Je ziet een herhaling van steeds hetzelfde groepje decimalen. Je schrijft $21\frac{6}{13} = 21{,}\overline{461538}$. De streep staat boven het rijtje decimalen dat steeds wordt herhaald.

Opgave 1

Deel 51 door 7.

a Welke breuk krijg je dan? Haal de gehelen uit de breuk..

b Schrijf deze breuk als decimaal getal met behulp van een staartdeling.

c Welke herhaling van decimalen treedt hier op?

d Noem een voorbeeld van een decimaal getal waarin geen herhalend patroon van decimalen voorkomt.

Opgave 2

De exacte oplossing van de vergelijking $73x = 41$ is $x = \frac{41}{73}$. Deze oplossing als breuk is niet altijd handig. Met een decimaal getal is het vaak makkelijker werken.

a Schrijf $\frac{41}{73}$ als decimaal getal.

b Hoe groot is de twintigste decimaal van $\frac{41}{73}$?

c Welk cijfer staat er op de tweehonderdste plaats achter de komma?

Opgave 3

Je kunt getalverzamelingen beschrijven door uitdrukkingen met accolades. Bijvoorbeeld:

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$

Dit betekent dat $\mathbb{Q}$ de verzameling is van alle getallen van de vorm $\frac{p}{q}$, waarvan p en q gehele getallen zijn, maar q niet 0 is.

Beschrijf de volgende getalverzamelingen in woorden.

a $\{3n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$

b $\left\{\frac{1}{x} | x \in \mathbb{Q} \wedge x \neq 0\right\}$

Geef de volgende getalverzamelingen weer in de notatie met accolades.

c De oneven positieve getallen.

d De kwadraten kleiner dan 1000.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De verzameling van de **rationale getallen** bevat alle getallen die te schrijven zijn als een deling van twee gehele getallen. Deze verzameling noem je $\mathbb{Q}$. ‘Ratio’ betekent ‘verhouding’. $\mathbb{Q}$ bevat dus alle getallen die als $\frac{p}{q}$ geschreven kunnen worden en waarvoor geldt dat p en q gehele getallen zijn. Bovendien geldt: $q \neq 0$.

Je schrijft: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$. Het teken | betekent ‘waarvoor geldt’; het teken $\wedge$ betekent ‘en’.

De gehele getallen zijn ook elementen van $\mathbb{Q}$. Immers elk geheel getal is te delen door 1 en dus ook een deling van twee hele getallen. Dit betekent dat $\mathbb{Z}$ een deel is van de verzameling $\mathbb{Q}$. Dat schrijf je als: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Het teken $\subset$ betekent ‘is een deelverzameling van’. Ook geldt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Een eigenschap van de rationale getallen is dat de som, het verschil, het product en het quotiënt van twee rationale getallen altijd weer een rationaal getal is. Voor de gehele getallen geldt dit niet, bij delen krijg je immers niet altijd weer een geheel getal.

Een **rationaal getal omzetten naar een decimaal getal** doe je met een **staartdeling**. Er zijn dan twee mogelijkheden:

- De staart van de deling komt uiteindelijk op 0 uit. Het decimale getal heeft dan een eindig aantal decimalen.

  Bijvoorbeeld: $\frac{1}{5} = 0{,}2$ en $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

- De staart van de deling komt uiteindelijk niet op 0 uit. Het decimale getal heeft dan een oneindig aantal decimalen en er treedt altijd herhaling van decimalen op.

  Bijvoorbeeld: $\frac{1}{9} = 0{,}111111... = 0{,}\overline{1}$

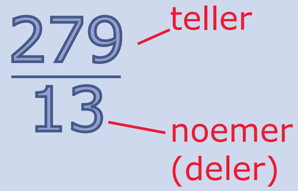
  $\frac{6}{13} = 0{,}\overline{461538}$ en $\frac{207}{990} = 0{,}2090909... = 0{,}2\overline{09}$.

  De streep geeft aan wat het zich herhalende deel is.

Als de deling niet op 0 uitkomt, treedt altijd herhaling op bij delen door q. Dat is duidelijk als je bedenkt dat er niet meer dan q verschillende resten kunnen zijn bij de staartdeling.

De **reële getallen** ($\mathbb{R}$) zijn alle getallen die als decimaal getal te schrijven zijn. Dit zijn dus alle getallen die je je op een getallenlijn kunt voorstellen. Er geldt: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

De **irrationale getallen** zijn de getallen die niet in $\mathbb{Q}$ zitten, maar wel in $\mathbb{R}$. Het zijn de getallen die niet te schrijven zijn als deling van twee gehele getallen. Irrationaal zijn bijvoorbeeld de getallen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ en $\sqrt{\frac{1}{6}}$.



Figuur 2.2

Voorbeeld 1

Kenmerkend voor de rationale getallen ongelijk aan 0 is dat de som, het verschil, het product en het quotiënt van twee rationale getallen altijd weer een rationaal getal is.
Toon dit aan.

Antwoord

Kies twee rationale getallen $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ ($a \neq 0$ en $b \neq 0$, $c \neq 0$ en $d \neq 0$ en $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$).
Dan is:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \frac{1}{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d} = ac \cdot \frac{1}{bd} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} / \frac{bc}{bd} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}$

Je ziet dat je in alle gevallen opnieuw een rationaal getal krijgt. Immers de som, het verschil en het product van twee gehele getallen is weer een geheel getal.

Opgave 4

Zijn de volgende uitspraken waar of niet waar? Licht je antwoord toe.

a $7 \in \mathbb{Q}$

b $3{,}5 \in \mathbb{Q}$

c $-7 \in \mathbb{Q}$

d $2^n \in \mathbb{Q}$ als $n \in \mathbb{Z}$

e $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$

f $\sqrt{1\frac{9}{16}} \in \mathbb{Q}$

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je dat som, verschil, product en quotiënt van twee rationale getallen altijd rationaal zijn. Neem aan dat $a \in \mathbb{Z}$ en $b \in \mathbb{Z}$.

a Neem de rationale getallen $\frac{a}{3}$ en $\frac{5}{2b}$ en laat zien dat ook hun som, verschil, product en quotiënt rationaal zijn als $b \neq 0$.

b Neem de rationale getallen $\frac{3}{a}$ en $\frac{5}{2b}$ en laat zien dat ook hun som, verschil, product en quotiënt rationaal zijn als $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

Voorbeeld 2

Schrijf $\frac{2}{7}$ als decimaal getal.

Antwoord

Voer de deling 2/7 uit:

$2/7 = 0{,}2857142...$

$\underline{0}$

$2{,}0$

$\underline{1{,}4}$

$0{,}60$

$\underline{0{,}56}$

$0{,}040$

$\underline{0{,}035}$

$0{,}0050$

$\underline{0{,}0049}$

$0{,}00010$

$\underline{0{,}00007}$

$0{,}000030$

$\underline{0{,}000028}$

$0{,}0000020$

$\underline{0{,}0000014}$

$0{,}0000006$

Er treedt herhaling op, dus $\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}$.

Opmerking: de nullen maken de uitwerking onoverzichtelijk, je laat ze meestal weg.
Bedenk dan wel welke decimaal de uitwerking betreft.

Opgave 6

Schrijf de volgende breuken als decimaal getal. Doe dit zonder rekenmachine door middel van een staartdeling.

a $\frac{3}{5}$

b $\frac{1}{11}$

c $\frac{12}{23}$

Voorbeeld 3

Schrijf $6{,}5\overline{1234}$ als deling van twee gehele getallen.

Antwoord

Stel $a = 6{,}5\overline{1234} = 6{,}51234123412341234...$

Dan is $10a = 65{,}1234123412341234...$ en $100000a = 651234{,}123412341234...$

Dus is $100000a - 10a = 651234{,}1234... - 65{,}1234... = 651169$

Ofwel $99990a = 651169$.

En $a = \frac{651169}{99990}$.

Conclusie: $6{,}5\overline{1234} = \frac{651169}{9999}$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je hoe een getal met repeterende decimalen als breuk kan worden geschreven. Schrijf de volgende decimale getallen in de vorm $\frac{p}{q}$ met $p \in \mathbb{Z}$ en $q \in \mathbb{Z}$.

a $0{,}\overline{123}$

b $2{,}1\overline{7}$

c $-0{,}1\overline{53}$

Verwerken

Opgave 8

Schrijf som, verschil, product en quotiënt van a en $\frac{2b}{3c}$ als één rationaal getal als $c \neq 0$.

Opgave 9

Schrijf de volgende breuken als decimaal getal zonder het gebruik van de rekenmachine.

a $\frac{3}{80}$

b $\frac{2}{3}$

c $\frac{2}{15}$

Opgave 10

Schrijf $\frac{11}{43}$ als exact decimaal getal. Uit hoeveel cijfers bestaat het zich herhalende deel?

Opgave 11

Beschrijf in de verzamelingsnotatie (met accolades): de kwadraten van gehele getallen waarvan het kwadraat groter dan 800 is.

Opgave 12

Schrijf het getal $2{,}91\overline{523}$ in de vorm $\frac{p}{q}$ met $p \in \mathbb{Z}$ en $q \in \mathbb{Z}$ en $q \neq 0$.

Opgave 13

Welke van de volgende getallen zijn rationaal?

a $2{,}\overline{16}$

b $\sqrt{1{,}6}$

c $\sqrt{0{,}16}$

d $\sqrt{0{,}\overline{1}}$

Toepassen

Opgave 14: Rode en gele karpers

In een vijver zwemmen rode en gele karpers. Twee vijfde van de karpers is geel, de rest is rood.
Driekwart van de gele karpers is een vrouwtje. In totaal zijn er even veel vrouwtjeskarpers als mannetjeskarpers.
Welk gedeelte van de totale karperpopulatie bestaat uit rode mannetjeskarpers?

Opgave 15: Puzzel je een breuk

p,q en r zijn positieve gehele getallen zo, dat $p + \frac{1}{q+\frac{1}{r}} = \frac{25}{19}$.

Hoe groot is hun product?

Testen

Opgave 16

Schrijf som, verschil, product en quotiënt van $\frac{1}{x}$ en $\frac{2}{x^2}$ als $\frac{t}{n}$ als x geheel is, $x \neq 0$ en t en n geheel zijn. vereenvoudig zo ver mogelijk.

Opgave 17

Schrijf de volgende breuken als decimaal getal. Doe dit handmatig, dus zonder rekenmachine.

a $\frac{7}{90}$

b $\frac{5}{70}$

Opgave 18

Schrijf het getal $3{,}\overline{1415}$ in de vorm $\frac{p}{q}$ met $p \in \mathbb{N}$ en $q \in \mathbb{N}$.

Opgave 19

Welke van de volgende getallen zijn rationaal?

a $-2{,}\overline{312}$

b $\sqrt{20\frac{1}{4}}$

c $\sqrt{15}$

d $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

1.3 Bewijzen

Inleiding

Als je gehele getallen gaat delen, dan krijg je soms weer een geheel getal, maar vaak ook niet. Je zegt dan dat bepaalde getallen deelbaar zijn. Er is veel onderzoek gedaan naar de deelbaarheid van getallen. Er ontstonden dan ‘vermoedens’ die men probeerde te ‘bewijzen’. Zo wist Euclides op zeer ingenieuze wijze te bewijzen dat er oneindig veel priemgetallen zijn en dat elk getal te schrijven is als een uniek product van priemgetallen. Hoe hij dat deed? Je ziet het in dit onderdeel.

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen k.g.v. en g.g.d. en met deze begrippen werken;
- de begrippen implicatie en equivalentie;
- het begrip bewijs (weer?) kennen en directe bewijzen leveren;
- indirecte bewijzen (bewijzen uit het ongerijmde) leveren.

Voorkennis

- rekenen met getallen in het tientallig stelsel;
- haakjes wegwerken en ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Als a een oneven geheel getal is, dan is $a^2 - 1$ deelbaar door 8.

a Ga dit eerst eens na voor een aantal gehele getallen. Waarom heb je dan nog geen bewijs?

b Probeer deze uitspraak te bewijzen.

Uitleg

Bekijk de volgende berekeningen:
$1^2 - 1 = 0$
$3^2 - 1 = 8$
$5^2 - 1 = 24$
$7^2 - 1 = 48$, enzovoort.

Je kunt je afvragen of geldt:
Als a een positief oneven getal is, dan is $a^2 - 1$ deelbaar door 8.

Je zoekt een overtuigende redenering.

Je bedenkt: $a = 2n + 1$, want a is oneven. n is een natuurlijk getal.
Dan is: $a^2–1 = (2n + 1)^2–1 = 4n^2 + 4n = 4\left(n^2 + n\right) = 4n(n + 1)$.
$a^2 - 1$ is in ieder geval een viervoud. Dat betekent dat $n(n + 1)$ deelbaar door 2 is.

Als n een even getal is, is $n(n + 1)$ ook even. Als n een oneven getal is, is $n + 1$ even en is $n(n + 1)$ opnieuw even. Q.e.d.*

*Q.e.d. staat voor ‘quod erat demonstrandum’ (Latijn voor ‘wat te bewijzen was’) en sluit traditiegetrouw een bewijs af.

Opgave 1

Als $n \cdot m$ oneven is, dan zijn n en m oneven.

Onderzoek of dit waar is voor n en m zowel even als oneven en zo ja, probeer dan een overtuigende redenering te vinden.

Opgave 2

Bekijk de stelling die in de **Uitleg** wordt geformuleerd. Er is nog een ander bewijs van deze stelling mogelijk. Denk eraan dat a oneven is.

a Ontbind $a^2 - 1$ in factoren.

b Leg uit waarom beide factoren even getallen zijn.

c Leg uit waarom één van die twee factoren een viervoud is.

d Bewijs hiermee de stelling.

Opgave 3

Bekijk de uitdrukking $x = 1$ als vergelijking.
Trek aan beide zijden x^2 af.
Je krijgt: $x - x^2 = 1 - x^2$.
Ontbinden geeft: $x(1 - x) = (1 - x)(1 + x)$.
Beide zijden delen door $1 - x$ geeft: $x = 1 + x$.
Omdat $x = 1$ wordt dit: $1 = 1 + 1 = 2$.
Je ziet hier een overtuigende redenering dat $1 = 2$.

Waar zit de fout in de redenering?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je op zoek bent naar eigenschappen van getallen vind je vaak door proberen wel een bepaalde regelmaat. Je krijgt dan een **vermoeden**.

Veel vermoedens hebben de vorm:
Als bewering A waar is, dan is bewering B ook waar.
Bijvoorbeeld: als a^2 even is, dan is a ook even. Je spreekt dan van een **implicatie** en je schrijft: a^2 is even $\Rightarrow$ a is even.

Om zeker te weten of dit vermoeden altijd geldig is, moet je een redenering geven die dit onomstotelijk aantoont. Zo'n overtuigende redenering noem je een **bewijs**.

Als een vermoeden is bewezen, is het een **stelling** geworden.

Er zijn verschillende soorten bewijzen:

- Een **direct bewijs**:
  Je laat door een waterdichte redenering zien dat bewering B inderdaad uit A volgt en dus dat de waarheid van A ook betekent dat B waar is.
- Een **indirect bewijs** of een **bewijs uit het ongerijmde**:
  Je gaat uit van de waarheid van A en je neemt aan dat B niet waar is. Vervolgens redeneer je door tot je een tegenspraak krijgt. Dan moet B dus waar zijn.

Verder zijn er verschillende soorten argumenten: algebraïsche methodes, figuren, meetkundige methodes, logische redeneringen, enzovoort. Alle wiskundig verantwoorde methodes zijn toegestaan.

Wanneer zowel ‘als A, dan B’ en ‘als B, dan A’ waar zijn, dan zijn A en B **gelijkwaardige beweringen**, ze zijn **equivalent**. Je schrijft dan: $A \Leftrightarrow B$.
Je bewijst zowel dat $A \Rightarrow B$ als dat $B \Rightarrow A$.

Onder het **kleinste gemeenschappelijke veelvoud** (**k.g.v.**) van twee positieve gehele getallen a en b versta je het kleinste getal dat deelbaar is door zowel a als b.

De **grootste gemeenschappelijke deler** (**g.g.d.**) van twee positieve gehele getallen a en b is het grootste gehele positieve getal waardoor zowel a als b kan worden gedeeld zonder dat er een rest overblijft.

Je schrijft kgv (a,b) en ggd (a,b). Je kunt het k.g.v. en de g.g.d. ook van meer dan twee getallen bepalen.

Voorbeeld 1

Bereken het k.g.v. (kleinste gemeenschappelijke veelvoud) van 25 en 70.

Bereken de g.g.d. (grootste gemeenschappelijke deler) van 132 en 96.

Antwoord

Je kunt het k.g.v. van 25 en 70 zo berekenen:

- Ontbind beide getallen in priemfactoren: $25 = 5 \cdot 5$ en $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.
- Vermenigvuldig nu de priemfactoren, waarbij je de priemfactoren die in beide getallen zitten, maar één keer meerekent: $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 350$.

Dus kgv $(25,70) = 350$.

Je kunt de g.g.d. van 132 en 96 zo berekenen:

- Ontbind beide getallen in priemfactoren: $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ en $96 = 2^5 \cdot 3$.
- Vermenigvuldig nu de priemfactoren die in beide getallen voorkomen: $2^2 \cdot 3 = 12$.

Dus ggd $(132,96) = 12$.

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** de berekening van het kleinste gemeenschappelijke veelvoud.

a Bereken kgv $(8,46)$.

b Welk getal is het k.g.v. van twee verschillende priemgetallen p en q?

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** de berekening van de grootste gemeenschappelijke deler.

a Bereken ggd $(a,0)$.

b Welke waarde heeft de g.g.d. van twee verschillende priemgetallen?

Opgave 6

Bewijs dat kgv $(a,b) = \frac{a \cdot b}{\text{ggd}\,(a,b)}$, waarbij a en b natuurlijke getallen zijn.
Tip: stel ggd $(a,b) = r$ en ontbind a en b.

Voorbeeld 2

Bewijs: a^2 is even $\Leftrightarrow$ a is even.

Antwoord

Dit zijn eigenlijk twee stellingen die allebei bewezen moeten worden:

- Als a een even geheel getal is $\Rightarrow$ a^2 ook even.
  Omdat a een even getal is, is er een geheel getal n waarvoor geldt: $a = 2n$. Kwadrateren geeft: $a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2\left(2n^2\right)$.
  Dus het kwadraat van een even getal is inderdaad deelbaar door 2.
- Als a^2 een even getal is $\Rightarrow$ a ook even.
  Het bewijs is: als a^2 is even, dan zijn er voor a twee mogelijkheden, namelijk a is even of a is oneven.
  Is a een oneven getal: $a = 2n + 1$. Kwadrateren geeft: $a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2\left(2n^2 + 2n\right) + 1$. Dus het kwadraat van een oneven getal is inderdaad oneven. a kan niet oneven zijn.

Q.e.d.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** wordt de gelijkwaardigheid bewezen van a^2 is even en a is even.

a Over welke twee stellingen heb je het dan?

b Bewijs nu zelf: a^2 is oneven $\Leftrightarrow$ a is oneven.

c Bewijs de juistheid, of toon met een tegenvoorbeeld de onjuistheid aan van de bewering:
a^3 is drievoud $\Leftrightarrow$ a is drievoud.

Voorbeeld 3

Bewijs: n is deelbaar door 2 en door $3 \Leftrightarrow n$ is deelbaar door 6.

Antwoord

n is deelbaar door 2 betekent: $n = 2 \cdot p$, waarbij p een geheel getal is.
n is ook deelbaar door 3 betekent (omdat 2 niet deelbaar is door 3) dat p deelbaar is door 3: $p = 3 \cdot q$, waarbij q een geheel getal is.
En daarom is: $n = 2 \cdot 3 \cdot q = 6 \cdot q$.
En dus is n deelbaar door 6.

Omgekeerd:
n is deelbaar door 6 betekent: $n = 6 \cdot q = 2 \cdot 3 \cdot q$.
En dit betekent dat n deelbaar is door zowel 2 als 3.

Q.e.d.

Opgave 8

Bekijk het bewijs in **Voorbeeld 3**. Als een getal deelbaar is door 12, dan is het ook deelbaar door 3 en deelbaar door 4.

a Bewijs dat dit waar is.

b Formuleer het omgekeerde van deze stelling en bewijs dat die stelling waar is.

c Formuleer deze stelling en het omgekeerde van deze stelling als één stelling.

Als een getal deelbaar is door 12, dan is het ook deelbaar door 2 en door 6.

d Bewijs dat dit waar is.

e Formuleer het omgekeerde van deze stelling en bewijs dat die stelling niet waar is.

f Kun je een algemene stelling formuleren en bewijzen?

Voorbeeld 4

Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn.
Het hier gegeven bewijs is een klassiek voorbeeld van een ‘bewijs uit het ongerijmde’. Het is afkomstig van Euclides.

Antwoord

Neem aan dat er een eindig aantal (n) priemgetallen is.
Noem die n priemgetallen: p_1, p_2, ..., p_n.

Bekijk nu het getal $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n + 1$.
Dit getal is groter dan elk van de n priemgetallen.
Als je dit getal deelt door p_1, of p_2, of ..., of p_n, dan blijft er steeds een rest van 1 over.
Dus a is niet deelbaar door één van de priemgetallen p_1, p_2, ..., p_n.

De hoofdstelling van de rekenkunde stelt dat elk natuurlijk getal groter dan 1 één of meer priemdelers heeft. Dit betekent:

- a is zelf een priemgetal

of

- a heeft een priemdeler die niet in p_1, p_2, ..., p_n zit.

In beide gevallen heb je een nieuw priemgetal. De stelling dat er maar eindig priemgetallen zijn, is dus onjuist. Hieruit volgt dat er inderdaad oneindig veel priemgetallen zijn.

Opgave 9

De volgende bewering ligt nogal voor de hand: ‘Als er tien duiven in negen duivenhokken zitten, is er minstens één duivenhok met minstens twee duiven.’

a Bewijs deze stelling indirect.

b Formuleer de stelling algemener. De stelling staat bekend als het duivenhokkenprincipe.

c Bewijs: Kies je uit de getallen $1,2,...,10$ zes getallen, dan zijn er zeker twee getallen bij die minstens 11 als som hebben.

d In een zaal bevinden zich vijftig mensen. Ze kennen allemaal wel één of meer van de anderen in de zaal, maar hoeveel precies is onbekend. Bewijs dat er twee mensen in de zaal zijn, die hetzelfde aantal kennissen in de zaal hebben.

Opgave 10

In **Voorbeeld 4** zie je het bewijs van Euclides dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

a Waarom is hier sprake van een ‘bewijs uit het ongerijmde’?

b Bewijs dat elk getal te schrijven is als het product van priemgetallen.

Verwerken

Opgave 11

a Wat is kgv $(5,7)$? En kgv $(10,15)$?

b Bereken kgv $(140,504)$.

Opgave 12

a Bereken ggd $(140,504)$.

b Bereken ggd $(143,2541)$.

Opgave 13

Gegeven zijn de getallen 39 en 102.

a Bereken de g.g.d. van beide getallen.

b Bereken het k.g.v. van beide getallen.

Opgave 14

Bewijs dat $(n^3 - n)^2$ voor elk natuurlijk getal n deelbaar is door 9.

Opgave 15

Je wilt bewijzen dat $n^5 - n$ voor elk natuurlijk getal n deelbaar is door 30.

a Toon aan dat van elke drie opeenvolgende natuurlijke getallen er altijd één even is en één een drievoud is.

b Bewijs deze bewering.

Toepassen

De grootste gemeenschappelijke deler van twee getallen is het grootste getal dat beide getallen zonder rest deelt. Euclides vond een manier om de g.g.d. van twee getallen a en b te vinden. Dit wordt het **algoritme van Euclides** genoemd. Het gaat als volgt:

1. Noem het grootste van de beide getallen A, het andere B.
2. Trek B net zo vaak van A af totdat er 0 overblijft of een getal kleiner dan B.
3. Wanneer er 0 overblijft, is B de g.g.d.
4. Zo niet, herhaal dan het algoritme met B en wat er van A over is.

Opgave 16

Bekijk in **Toepassen** hoe het algoritme van Euclides in elkaar zit.

a Stel er zijn twee getallen, a en b, die als g.g.d. het getal p hebben.

Bewijs dat uit $a - q \cdot b = r$ volgt dat ggd (a,b) = ggd (b,r).

b Bereken nu op deze manier ggd $(140,504)$.

c Bereken met behulp van het algoritme van Euclides ggd $(143,2541)$.

Opgave 17

Een kangoeroe springt vanuit 0 over de getallenlijn met sprongen van 39 of 102 naar links of naar rechts. Hoe kan deze kangoeroe weer op 0 uitkomen?

Testen

Opgave 18

Bewijs of toon de onjuistheid aan van de bewering: a is oneven $\Leftrightarrow$ a^3 is oneven.

Opgave 19

Gegeven zijn de getallen 33 en 91.

a Bereken de g.g.d. van beide getallen.

b Bereken het k.g.v. van beide getallen.

c Een kangoeroe springt vanuit 0 over de getallenlijn met sprongen van 33 of 91 naar links of naar rechts. Bepaal hoe deze kangoeroe op 1 kan uitkomen.

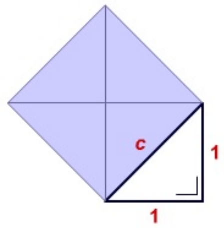
Opgave 20

Bewijs dat een geheel getal deelbaar is door 3 als de som van zijn cijfers deelbaar is door 3.

1.4 Reële getallen

Inleiding

De rationale getallen zijn gesloten voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, want de som, het verschil, het product en het quotiënt van twee rationale getallen is telkens weer een rationaal getal. Je zou zeggen: goed geregeld zo.
Maar ja, de stelling van Pythagoras gooide al meer dan twee millennia geleden roet in het eten.
De hypotenusa (schuine zijde) van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 1 heeft een lengte van $c = \sqrt{2}$ en... dat is geen rationaal getal.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen irrationaal en reëel getal kennen;
- wortels benaderen en rekenen met wortels;
- bewijzen dat wortels vaak irrationale getallen zijn.

Voorkennis

- rekenen met getallen in het tientallig stelsel;
- haakjes wegwerken en ontbinden in factoren;
- verschillende soorten bewijzen herkennen.

Verkennen

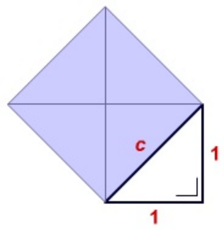
Opgave V1

Bekijk de figuur.

a Laat zien dat $c = \sqrt{2}$ en benader de lengte van c met de grafische rekenmachine.

b Waarom kan deze waarde van $\sqrt{2}$ nooit kloppen?

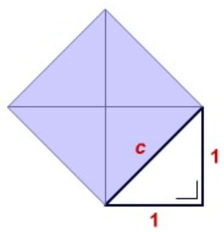
c Door inklemmen kun je $\sqrt{2}$ tot op zo veel decimalen bepalen als je maar wilt. Kom je ooit op een rationaal getal uit?



Figuur 4.2

Uitleg 1

De hypotenusa (schuine zijde) van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 1 heeft een lengte van $\sqrt{2}$ (c in de afbeelding).
Hoe kun je dit getal als breuk of decimaal getal schrijven?
Dit deden de Babyloniërs in de Oudheid op de volgende manier: Ze probeerden van een vierkant met oppervlakte 2 de lengte van de zijden te berekenen. Ze begonnen met een rechthoek met oppervlakte 2. Met een zijde van bijvoorbeeld $1{,}5$ moet de andere zijde $\frac{2}{1{,}5} = 1{,}333...$ zijn. Van beide getallen neem je het gemiddelde, ongeveer $1{,}41667$. Dit getal gebruik je als lengte van de ene zijde, de andere zijde is net zoals bij de eerste poging $\frac{2}{1{,}41667}$. Het gemiddelde van deze twee getallen is $1{,}41422$, enzovoort.
Op deze manier vond men de waarde van $\sqrt{2}$ in wel tien decimalen nauwkeurig.



Figuur 4.3

Maar omdat er geen herhaling van decimalen optrad, ontstond het vermoeden dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is, wat betekent dat het niet als breuk te schrijven is.
En inderdaad werd al in de Oudheid het bewijs geleverd dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is.

Opgave 1

In **Uitleg 1** wordt het getal $\sqrt{2}$ nader bekeken. Kijk nu naar $\sqrt{3}$.

a Waarom kun je $\sqrt{3}$ nooit precies als decimaal getal schrijven? (Tip: bedenk wat er gebeurt als je een getal met een eindig aantal decimalen kwadrateert). Benader $\sqrt{3}$ met de grafische rekenmachine. Als je tijd hebt, probeer het dan eens op de manier uit de Oudheid.

b Waarom weet je op grond hiervan nog steeds niet zeker dat $\sqrt{3}$ geen rationaal getal kan zijn?

c En hoe zit dat met bijvoorbeeld $\sqrt{4}$? En met $\sqrt{5}$?

d Wanneer is de wortel uit een getal in ieder geval een rationaal getal?

Opgave 2

Je kunt met behulp van de rekenmachine wel meer (verborgen) decimalen van wortels te zien krijgen.
Verzin een manier om dit te doen en bepaal $\sqrt{2}$ in dertien decimalen nauwkeurig.
Treedt er herhaling van de decimalen op?

Uitleg 2

Het getal $\sqrt{2}$ kun je niet als breuk schrijven en is dus geen rationaal getal. Dat kun je bewijzen met een bewijs uit het ongerijmde.

Stel $\sqrt{2}$ is wel rationaal en is wel te schrijven als rationaal getal:

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ waarin $\frac{p}{q}$ een niet te vereenvoudigen breuk van twee gehele getallen is.

Dan is: $2 = \frac{p^2}{q^2}$ en dus $p^2 = 2q^2$.

Dus p^2 moet deelbaar zijn door 2.
Dit kan alleen als p deelbaar is door 2. Dus $p = 2a$.
En dan is $(2a)^2 = 2q^2$, zodat $4a^2 = 2q^2$ en $2a^2 = q^2$.
Dus is ook q^2 deelbaar door 2 en is q deelbaar door 2, dat wil zeggen $q = 2b$.

Maar dan is $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$. Kennelijk is de breuk die $\sqrt{2}$ voorstelt dan altijd te vereenvoudigen. Maar je ging ervan uit dat dit niet het geval was. Er ontstaat dus een tegenspraak. Daarom kan de aanname dat $\sqrt{2}$ als breuk geschreven kan worden niet juist zijn.

Q.e.d.

Opgave 3

In **Uitleg 2** is bewezen dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is. Bekijk dat bewijs.

a In dit bewijs staat: dus p^2 moet deelbaar zijn door 2. Dit kan alleen als p deelbaar is door 2. Waarom is dat zo?

b Van wat voor type bewijs is hier sprake?

c Formuleer een vergelijkbaar bewijs voor de irrationaliteit van $\sqrt{3}$.

d Stel, je wilt de irrationaliteit van $\sqrt{4}$ op dezelfde manier bewijzen. Wat gaat er fout?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **reële getallen** $\mathbb{R}$ zijn alle denkbare decimale getallen.

De **irrationale getallen** zijn de reële getallen die niet rationaal zijn. De verzameling van de irrationale getallen heeft geen apart symbool.

Het getal $\sqrt{2}$ is niet als deling van twee gehele getallen te schrijven en is daarom een irrationaal getal.

Alleen de wortels uit kwadraten van gehele getallen en uit breuken waarvan teller en noemer beide een kwadraat van een geheel getal zijn, zijn rationale getallen.
Ook π is een irrationaal getal.

Omdat je de irrationale wortels op veel rekenmachines alleen kunt benaderen, is het belangrijk deze wortels in de berekening te laten staan. Indien wenselijk benader je pas op het eind van alle berekeningen door een (afgerond en dus niet precies) decimaal getal.

Voorbeeld 1

Uitdrukkingen waarin alleen veelvouden van $\sqrt{2}$ voorkomen, kunnen worden herschreven in de vorm $a + b \cdot \sqrt{2}$.
Zo kun je bijvoorbeeld breuken met wortels zo omschrijven, dat er geen wortel meer in de noemer staat.
Dit is belangrijk in situaties waarin je met exacte waarden wilt of moet blijven werken.

Je ziet een aantal voorbeelden.

- $3 + 5\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3 + 5\sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} = 3 + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3 + 7\sqrt{2}$
- $\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{18} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}} + \sqrt{9 \cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 3{,}5\sqrt{2}$
- $\frac{3}{2+\sqrt{2}} = \frac{3}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{6-3\sqrt{2}}{4-2} = 3 - 1{,}5\sqrt{2}$

Opgave 4

Schrijf de volgende wortelvormen in de vorm $a + b\sqrt{3}$.

a $2\sqrt{3} + \sqrt{48} + 6\sqrt{27}$

b $\left(3 + \sqrt{3}\right)^2$

c $\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{27}}$

d $\left(6 - 2\sqrt{3}\right)\left(6 + 2\sqrt{3}\right)$

e $\frac{12}{6-2\sqrt{3}}$

f $\sqrt{243} - 2\sqrt{27} + \sqrt{81}$

Voorbeeld 2

Bewijs dat de som van een rationaal en een irrationaal getal een irrationaal getal is.

Antwoord

Laat a een rationaal en b een irrationaal getal zijn. Neem aan dat de stelling niet waar is. Dan is $s = a + b$ dus een rationaal getal. Bekijk nu $b = s - a$. Als zowel s als a rationaal is, dan is $s - a$ rationaal en b dus ook. Hierdoor is een tegenspraak ontstaan, omdat b irrationaal moet zijn. De aanname dat de stelling niet waar is, leidt tot een tegenspraak, dus de stelling is waar.

Opgave 5

Bewijs of weerleg met behulp van een tegenvoorbeeld.

a De som van twee irrationale getallen is irrationaal.

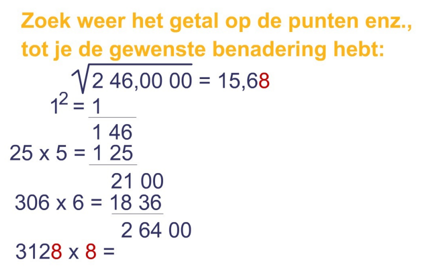
b Het product van een irrationaal getal en een rationaal getal, beide ongelijk aan 0, is irrationaal.

Voorbeeld 3

Je ziet hiernaast hoe je kunt worteltrekken zonder rekenmachine.
$\sqrt{441}$ is een geheel getal. De uitkomst kun je schrijven als $10a + b$.
En dan moet gelden: $(10a + b)^2 = 441$.
Werk nu de haakjes weg: $(10a + b)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 10ab + b^2$.
Schrijf dit als: $100a^2 + (2 \cdot 10a + b) \cdot b$.
Nu moet waarschijnlijk gelden:
$100a^2 = 400$, waaruit volgt $a = 2$ en $(2 \cdot 10a + b) \cdot b = 41$, waaruit volgt $b = 1$.
Dus $\sqrt{441} = 21$.

Deze methode kun je ook gebruiken om de wortel te trekken van andere getallen, zelfs als die wortels niet geheel zijn.

Het verdelen van het getal in groepjes van twee (vanaf de komma) is nodig omdat het kwadraat van een tiental een honderdtal, van een honderdtal een tienduizendtal is, enzovoort. Op deze manier kun je wortels in meer decimalen berekenen dan de meeste rekenmachines.



Figuur 4.4

Opgave 6

Je bent nu niet meer afhankelijk van een rekenmachine om wortels uit te rekenen in het aantal decimalen dat je wilt hebben.

a Bereken $\sqrt{961}$. Gebruik de methode die in het **Voorbeeld 3** uitgelegd wordt.

b Bereken $\sqrt{3969}$.

c Leg uit hoe de berekening van wortels zonder rekenmachine gaat. Neem $\sqrt{133225}$ als voorbeeld. Licht toe hoe $(a+b)^2 - a^2 = (2a+b)b$ daarbij een rol speelt.

Verwerken

Opgave 7

Bewijs dat $\sqrt{7}$ een irrationaal getal is.

Opgave 8

Schrijf de volgende wortelvormen in de vorm $a + b\sqrt{7}$.

a $2\sqrt{112} - \sqrt{28} + 6\sqrt{49}$

b $\left(7 - 2\sqrt{7}\right)^2$

c $\sqrt{28} - 8\sqrt{\frac{1}{7}}$

d $\left(8 - 2\sqrt{7}\right)\left(8 + 2\sqrt{7}\right)$

e $\frac{14}{7-\sqrt{7}}$

f $\sqrt{252} - 2\sqrt{112} + \sqrt{2401}$

Opgave 9

Bewijs de irrationaliteit van $\sqrt[3]{2}$.

Opgave 10

Bewijs of weerleg (bijvoorbeeld door een tegenvoorbeeld te geven).

a Het quotiënt van twee irrationale getallen is irrationaal.

b Het quotiënt van een rationaal getal en een irrationaal getal is irrationaal.

Opgave 11

Bereken zonder rekenmachine.

a $\sqrt{13}$ in zes decimalen nauwkeurig.

b $\sqrt{4281346624}$ exact.

Toepassen

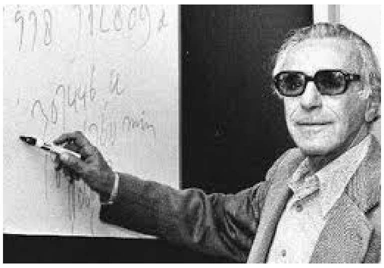
Opgave 12: Willy Wortel

Willem Klein (1912—1986) was een rekenwonder met de artiestennaam Willy Wortel. Hij kon binnen één minuut uit zijn hoofd de wortel trekken uit een getal van 216 cijfers.

a Bereken $\sqrt{178929}$ zonder rekenmachine.

b Bereken $\sqrt{152399025}$ zonder rekenmachine.

c Geef een benadering in tien decimalen van $\sqrt{123456789}$.



Figuur 4.5

Testen

Opgave 13

Bewijs dat $\sqrt{5}$ een irrationaal getal is.

Opgave 14

Schrijf de volgende wortelvormen in de vorm $a + b\sqrt{5}$.

a $2\sqrt{20} - \sqrt{45} + 6\sqrt{180}$

b $\left(5 - 2\sqrt{20}\right)^2$

c $\sqrt{500} - 10\sqrt{\frac{1}{5}}$

d $\left(10 + 2\sqrt{5}\right)\left(10 - 2\sqrt{5}\right)$

e $\frac{100}{5-\sqrt{5}}$

f $\sqrt{4500} + 5\sqrt{2500} - \sqrt{2000}$

Opgave 15

Tussen twee willekeurige rationale getallen liggen oneindig veel rationale getallen. Maar hoeveel irrationale getallen liggen er tussen?
Geef een irrationaal getal tussen:

a 1 en 2.

b 1,123 en 1,124.

c Twee willekeurige rationale getallen v en w.

1.5 Dominoprincipe

Inleiding

Als een rij dominostenen zo staat opgesteld dat elke steen een opvolger raakt als hij omvalt, dan hoef je alleen de eerste steen een zetje te geven om de hele rij te laten vallen. Een belangrijke methode om stellingen te bewijzen die te maken hebben met de natuurlijke getallen, lijkt op dit ‘dominoprincipe’: Je toont aan dat een vermoeden klopt voor een bepaalde waarde. Daarna toon je aan dat als het klopt voor een bepaalde waarde, dat het dan ook klopt voor de volgende waarde.

Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- de bewijsmethode van volledige inductie (het dominoprincipe) toepassen.

Voorkennis

- rekenen met getallen in het tientallig stelsel;
- haakjes wegwerken en ontbinden in factoren;
- verschillende soorten bewijzen herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Over de beroemde wiskundige Carl Friedrich Gauss (1777—1855) gaat het verhaal dat hij als 11-jarige de opdracht kreeg om de getallen 1 tot en met 100 bij elkaar op te tellen in de veronderstelling dat hij daarmee wel even bezig zou zijn. Na enkele seconden te hebben nagedacht, wist Gauss meteen het antwoord 5050. Hij bedacht ter plekke dat je deze getallen kunt optellen door het eerste getal en het laatste getal op te tellen en dan de uitkomst te vermenigvuldigen met het halve aantal getallen.

a Ga na, dat deze methode inderdaad juist is.

b Welke formule volgt hier uit voor $1+2+3+...+n$? Kun je die formule bewijzen?

Figuur 5.2

Uitleg

Als een rij dominostenen zo staat opgesteld, dat elke steen een opvolger raakt als hij omvalt, dan hoef je alleen de eerste steen een zetje te geven om de hele rij te laten vallen.

Een belangrijke methode om stellingen te bewijzen die te maken hebben met de natuurlijke getallen, lijkt op dit ‘dominoprincipe’. Je toont aan dat een vermoeden klopt voor een bepaalde waarde. Daarna toon je aan: als het klopt voor één waarde, dan klopt het ook voor de volgende waarde. Daarmee is je vermoeden bewezen.

Figuur 5.3

Je past deze methode toe op het volgende vermoeden:

Voor $n \in \mathbb{N}$ en $n \geq 1$ geldt: $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

- Je laat eerst zien: Het vermoeden geldt voor de kleinste n, hier $n=1$ (je gooit de eerste steen om).

  Dit klopt inderdaad voor $n=1$, want $1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)$.
- Daarna laat je zien: Als het vermoeden geldt voor n, dan volgt daaruit dat het ook geldt voor $n+1$ (elke omvallende steen raakt zijn opvolger die dan ook omvalt).
- Dit betekent dat je moet aantonen:

  Als geldt: $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ dan is ook waar:

  $1+2+3+\ldots+n+n+1=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ (n is vervangen door $n+1$).

Als je dat aantoont, is het vermoeden juist.

Dat doe je als volgt:

$1+2+3+\ldots+n+n+1=\frac{1}{2}n(n+1)+n+1$.

En $\frac{1}{2}n(n+1)+n+1$ kun je herleiden tot $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Het vermoeden is dus juist.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt het 'dominoprincipe' gebruikt om een stelling over natuurlijke getallen te bewijzen.

a Wat wordt in dit verband bedoeld met het dominoprincipe?

b In welke situaties kun je dit dominoprincipe in een bewijs gebruiken?

c Werk het voorbeeld door en toon nu zelf aan dat uit

$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ volgt dat

$1+2+3+\ldots+n+n+1=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

d Ga na dat uit de bewezen formule volgt: $1+2+3+\ldots+99+100=5050$.

Opgave 2

Je kunt de stelling $1+2+3+\ldots+n-1+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ook anders bewijzen.

Zet $1+2+3+\ldots+n-1+n$ en $n+n-1+\ldots+3+2+1$ onder elkaar en tel ze op. Hoe gaat het bewijs dan verder?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Sommige beweringen hebben de vorm:

Voor alle waarden van n vanaf n_0, waarbij $n \in \mathbb{N}$ geldt...

Deze beweringen kun je soms bewijzen met behulp van **volledige inductie**. Inductie betekent: vanuit het bijzondere het algemene afleiden.

Het werkt als volgt:

- Je bewijst dat de bewering waar is voor $n = n_0$.
  (Het bijzondere: je duwt de eerste steen om.)
- Je bewijst dat voor elke $n \geq n_0$ geldt:
  Als de bewering waar is voor n, dan is hij ook waar voor $n + 1$.
  (Het algemene: als de eerste steen omvalt, gaat de rest ook om.)

Voorbeeld 1

Toon aan met het dominoprincipe:

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is $n^3 - n$ deelbaar door 3.

Antwoord

Gebruik de bewijsmethode van volledige inductie:

- De kleinste n is 0. Daarvoor klopt het, want $0^3 - 0 = 0$ en dat is deelbaar door 3.
- Nu moet je aantonen:
  Als $n^3 - n$ deelbaar is door 3, dan geldt ook:
  $(n + 1)^3 - (n + 1)$ is deelbaar door 3.
  Dat gaat als volgt:
  Maak uit de uitdrukking $(n + 1)^3 - (n + 1)$ de uitdrukking $n^3 - n$ vrij:
  $(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3\left(n^2 + n\right)$
  Bekijk nu het tweede deel van de uitdrukking: $3\left(n^2 + n\right)$. Dat is deelbaar door 3.

Conclusie:
Als $n^3 - n$ deelbaar is door 3, dan is
$n^3 - n + 3\left(n^2 + n\right)$ deelbaar door 3 en omdat dat gelijk is aan
$(n + 1)^3 - (n + 1)$, is dat ook deelbaar door 3.

Omdat het vermoeden voor $n = 0$ klopt, klopt het dus voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 3

Bekijk een drietal beweringen.

- $1+\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=2-\frac{1}{4}$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=2-\frac{1}{8}$

Je kunt er regelmaat in ontdekken.

a Ga na dat deze beweringen correct zijn.

b Hoe zou de volgende bewering in deze serie luiden?

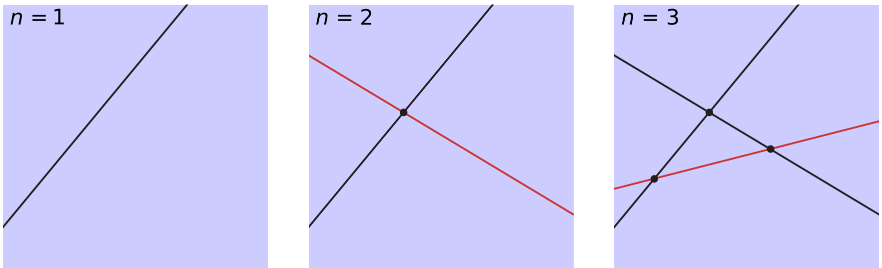
c Formuleer een algemene regel en bewijs die regel met behulp van volledige inductie.

Voorbeeld 2

Bewijs: het aantal delen waarin het vlak verdeeld wordt door n lijnen die elkaar twee aan twee snijden, is $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$.

Antwoord

Teken dit om in te zien dat het toevoegen van de lijn met nummer n betekent dat er precies $n-1$ snijpunten bijkomen. De lijn met nummer n snijdt namelijk met alle lijnen die er al staan. Het betekent ook dat er n nieuwe delen bijkomen. Het is bijvoorbeeld zo dat bij $n=3$ dat het deel links van het linker snijpunt in tweeën wordt verdeeld, zo ook tussen de twee snijpunten in en rechts van het rechter snijpunt. Zo worden er dus n nieuwe delen gemaakt.



Figuur 5.4

Gebruik volledige inductie:

- Voor $n=1$ klopt de stelling:

  met 1 lijn zijn er $\frac{1}{2}(1^2+1+2)=2$ delen.
- De stelling geldt voor $n \Rightarrow$ de stelling geldt voor $n+1$:

  Bij n lijnen zijn er $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ delen.
  Voeg je de lijn met nummer $n+1$ toe, dan komen er ook $n+1$ nieuwe delen bij.

  Bij $n+1$ zijn er dus $\frac{1}{2}(n^2+n+2)+n+1$ delen. Dit moet gelijk zijn aan $\frac{1}{2}\left((n+1)^2+(n+1)+2\right)$ delen. Door de haakjes weg te werken, zie je dat het klopt.

Q.e.d.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** wordt het principe van volledige inductie toegepast op een meetkundig probleem.

a Laat met behulp van één of meer tekeningen zien dat de stelling geldt voor $n = 2$.

b Laat met behulp van één of meer tekeningen zien dat de stelling geldt voor $n = 3$.

c Waarom is het nodig dat er geen drie lijnen door één punt gaan?

d Voeg aan je figuur (of figuren) een vierde lijn toe. Hoeveel vlakdelen komen er dan bij?

e Waarom komen er bij de $(n+1)$-de lijn $n+1$ vlakdelen bij?

f Loop nu zelf het bewijs van de stelling na.

Opgave 5

Teken je op een cirkel n punten op gelijke afstanden van elkaar, dan zijn dat hoekpunten van een regelmatige n-hoek. Het gaat om het aantal diagonalen van zo'n regelmatige n-hoek.

a Neem $n = 3$. Hoeveel diagonalen zijn er?

b Neem $n = 4$. Hoeveel diagonalen zijn er?

c Neem $n = 5$. Hoeveel diagonalen zijn er?

d Laat zien dat het aantal diagonalen bij $n = 6$ gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 - 6$.

e Bewijs met behulp van volledige inductie dat het aantal diagonalen in een regelmatige n-hoek gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) - n$.

Verwerken

Opgave 6

Je ziet een drietal beweringen.

- $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$
- $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

Je kunt regelmaat ontdekken.

a Ga na dat deze beweringen waar zijn.

b Hoe zou de volgende bewering in deze serie luiden?

c Formuleer een algemene regel en bewijs die regel met behulp van volledige inductie.

Opgave 7

Bewijs met volledige inductie dat $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Opgave 8

a Bewijs: Als 100 deelbaar zou zijn door 3, dan zou 10 ook deelbaar zijn door 3.

b Bewijs dat $23^{500} - 23^{100}$ deelbaar is door 10.

Opgave 9

Bewijs dat $9^n - 1$ voor alle $n \geq 1$ deelbaar is door 8.

Opgave 10

Bewijs met volledige inductie dat als r een reëel getal is met $r \geq -1$ voor elk natuurlijk getal n geldt: $(1 + r)^n \geq 1 + n \cdot r$.

Opgave 11

Bewijs met volledige inductie dat $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ een zevenvoud is.

Toepassen

Opgave 12: Graankorrels op het schaakbord

Ibn Kallikan (omstreeks 1256) heeft het verhaal van Sissa ben Dahir opgetekend. Voor de uitvinding van het schaakspel vroeg Sissa aan de Indiase koning Shirham de hoeveelheid graan die verzameld zou worden als men op het eerste veld van het schaakbord één graankorrel zou leggen, op het tweede het dubbele aantal, op het derde weer het dubbele tot en met het 64e veld. De koning zei: “En is dat alles wat je hebben wilt, Sissa, jij dwaas? Je krijgt het meteen mee!”. Maar Sissa zei: “Vergis u niet, dit zijn in totaal 18446744073709551615 graankorrels. Genoeg om heel India met een laag graan van 1 voet dikte te bedekken!”

a Hoeveel graankorrels liggen er op de eerste vier vakjes van het schaakbord samen? Laat zien dat $1 + 2 + 4 + 8 = 2^4 - 1$.

b Laat zien dat voor het aantal graankorrels op de eerste vijf vakjes samen geldt: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^5 - 1$.

c Het aantal graankorrels op de eerste vijf vakjes kun je ook afleiden door bij het totaal van de graankorrels op de eerste vier vakjes nog 2^4 op te tellen. Laat zien dat $2^4 - 1 + 2^4 = 2^5 - 1$.

d Bewijs met volledige inductie dat $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n = 2^{n+1} - 1$ als $n \in \mathbb{N}$ en $n \geq 1$.

e Klopt het aantal graankorrels dat Sissa noemde?

Opgave 13: Wortels construeren

Uit de Griekse Oudheid stamt de stelling: ‘Als je een lijnstuk van lengte 1 hebt, kun je met passer en liniaal een lijnstuk met lengte $\sqrt{n}$ construeren, waarbij n een natuurlijk getal is.’

a Laat zien dat dit waar is voor $n = 2$. Denk erom dat je alleen liniaal en passer gebruikt en geen gradenboog.

b Laat zien dat uit de lijnstukken met lengte 1 en $\sqrt{2}$ een lijnstuk met lengte $\sqrt{3}$ te construeren is.

c Bewijs de stelling.

Testen

Opgave 14

Bewijs met volledige inductie dat $1+2^3+3^3+4^3+...+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Opgave 15

Bewijs met behulp van het dominoprincipe dat de som van de hoeken van een n-hoek met hoeken kleiner dan 180° gelijk is aan $(n-2) \cdot 180$. Waarom is het nodig dat alle hoeken kleiner dan 180° zijn?

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Soorten Getallen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- natuurlijk getal — geheel deel — tegengestelde — deelbaar — even/oneven getal — priemgetal
- breuk — rationaal getal — staartdeling — decimaal getal
- vermoeden — bewijs — stelling — direct/indirect bewijs — tegenvoorbeeld — bewijs uit het ongerijmde — implicatie — equivalentie — gelijkwaardige beweringen
- wortel — irrationaal getal — reëel getal
- de bewijsmethode van de volledige inductie

Activiteitenlijst

- natuurlijke en gehele getallen herkennen — schrijfwijzen bij verzamelingen gebruiken — ontbinden in priemfactoren
- rekenen met breuken — rationale getallen herkennen — een breuk omzetten naar een decimaal getal en omgekeerd
- kennismaken met bewijzen, zowel directe als indirecte bewijzen
- bewijzen dat een wortel soms geen rationaal getal is — werken met reële getallen
- de bewijsmethode van de volledige inductie gebruiken

Achtergronden

Getallen zijn en blijven fascinerend...
In de Oudheid geloofde men dat alle getallen door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen uit de natuurlijke getallen konden worden afgeleid. De Pythagoreërs gingen zelfs zo ver dat ze veronderstelden dat het hele universum uit de natuurlijke getallen te herleiden was. Toen dan ook Hippasus van Metapontum (zelf een Pythagoreër) omstreeks 500 jaar v.Chr. bewees dat getallen zoals $\sqrt{2}$ geen natuurlijk getal kon zijn, werden zijn mede-Pythagoreërs zo kwaad dat ze hem wegens ketterij verdronken. Tenminste, zo gaat het verhaal...

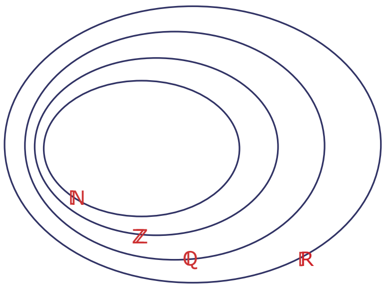
Getallen als $\sqrt{2}$ gedragen zich echter nog behoorlijk netjes: als je ze kwadrateert, krijg je al weer een geheel getal. Ze heten wel **algebraïsche getallen** omdat ze de oplossing zijn van een veeltermvergelijking $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ met $a_n, a_{n-1}, \ldots$ gehele getallen en $a_n \neq 0$.
Nee, dan de echte jongens zoals π en e (het getal van Euler). Dat zijn pas vreemde objecten. Want zij zijn geen oplossingen van een veeltermvergelijking. En bijvoorbeeld is π niet als breuk te schrijven, is π^n nooit een geheel getal, en wat te denken van π^π?

Deze getallen heten **transcendente getallen** en ze werden voor het eerst in 1844 ontdekt door **Joseph Liouville (1809—1882)** die het getal
$L = 0{,}110001000000000000000001...$ met een 1 op plek $n!$ (met $n = 1{,}2{,}3{,}...$) achter de komma
bedacht en aantoonde dat dit getal niet de oplossing van een veeltermvergelijking is. In 1873 bewees **Charles Hermite (1822—1901)** dat dit ook voor e geldt en in 1882 bewees **Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852—1939)** dat π transcendent is. Op dit moment is het onderzoek naar transcendente getallen nog volop gaande...

Testen

Opgave 1

Bekijk het diagram waarin de verzamelingen van de natuurlijke getallen, de gehele getallen, de rationale getallen en de reële getallen zijn aangegeven.



Figuur 6.1

a Zet de getallen in het diagram: 0, $-\frac{1}{3}$, $\pi - 1$, $-\frac{18}{3}$, $\sqrt{1\frac{5}{9}}$, $\sqrt{1\frac{7}{9}}$, $\sqrt{196}$.

b Het getal i is de oplossing van de vergelijking $x^2 = -1$. Waar plaats je i in dit diagram?

Opgave 2

Bereken de g.g.d. en het k.g.v. van de getallen 13464 en 46035. Schrijf de getallen eerst als het product van priemgetallen.

Opgave 3

Schrijf de getallen in de vorm $a + b\sqrt{6}$.

a $\left(1 + \sqrt{6}\right)^2$

b $\sqrt{54} - \sqrt{24} + \sqrt{36}$

c $\frac{3-2\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$

Opgave 4

Bij breuken waarvan de noemer priem is, is het vaak veel werk om ze als (exact) decimaal getal te schrijven.

a Schrijf $\frac{5}{41}$ als decimaal getal.

b Schrijf $0{,}\overline{538461}$ in de vorm $\frac{p}{q}$ met $p,q \in \mathbb{Z}$.

Opgave 5

Bekijk het getal $\sqrt{10}$.

a Dit getal is het product van de twee irrationale getallen $\sqrt{2}$ en $\sqrt{5}$. Mag je op grond daarvan concluderen dat $\sqrt{10}$ irrationaal is?

b Bewijs de irrationaliteit van $\sqrt{10}$.

Opgave 6

Bewijs dat ${}^{5}\log(7)$ een irrationaal getal is.

Opgave 7

Bewijs met behulp van volledige inductie dat
$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^n = \frac{1}{2} \cdot (3^{n+1} - 1)$.

Toepassen

Opgave 8: Modulair rekenen

Een voorbeeld van modulair rekenen is klokrekenen met gehele urenaantallen: als je bij 9 uur 5 uur optelt, krijg je 14 uur, maar op de klok is dat weer 2 uur. Dat komt omdat je alleen rekent met de twaalf getallen $0,1,2,3,...,10,11$. Zodra je bij 12 bent is dat weer 0, etc.
Je zegt wel $12 \equiv 0 (\text{mod } 12)$. Uitspraak: "$12$ komt overeen met 0 modulo 12".

a Noem nog drie getallen die overeenkomen met $0 (\text{mod } 12)$.

b Waarom komen alle getallen van de vorm $3 + k \cdot 12$ met $k \in \mathbb{Z}$ overeen met $3 (\text{mod } 12)$?

Alle getallen die overeen komen met $3 (\text{mod } 12)$ vormen de **restklasse** $\overline{3}$.

c Welke getallen vormen de restklasse $\overline{4}$?

Je kunt $1314 + 967 (\text{mod } 12)$ en $1314 \cdot 967 (\text{mod } 12)$ op twee manieren berekenen: eerst de optelling / vermenigvuldiging uitvoeren en dan veelvouden van 12 weglaten of eerst veelvouden van 12 weglaten bij de afzonderlijke getallen 1314 en 967 en de bewerking uitvoeren.

d Toon aan dat dit geen verschil maakt.

e Bewijs dat $a \pm b (\text{mod } m) = a (\text{mod } m) \pm b (\text{mod } m)$ en $a + b (\text{mod } m) = a (\text{mod } m) + b (\text{mod } m)$.

Delen is bij restklassen een heel ander verhaal. Je komt dit bijvoorbeeld tegen bij het oplossen van eenvoudige vergelijkingen.

f Los op: $x + 5 \equiv 2 (\text{mod } 12)$.

g Los op: $7x \equiv 3 (\text{mod } 12)$.

h Welk probleem doet zich voor als je $2x \equiv 3 (\text{mod } 12)$ wilt oplossen?

In de moderne **cryptografie (geheimschrift schrijven)** wordt van het rekenen met restklassen gebruik gemaakt. Alle symbolen worden dan omgezet naar hun bijbehorende **ASCII-code**, naar tweecijferige decimale getallen. Vervolgens kun je elk symbool versleutelen naar bijvoorbeeld $f(x) \equiv 12 \cdot x + 34 (\text{mod } 97)$ waarin x de tweecijferige ASCII-code van het symbool voorstelt en f de zogenaamde encryptiefunctie is. Door $\text{mod } 97$ te werken gebruik je alleen de eerste 97 ASCII-tekens.

i Versleutel zo het woord WISKUNDE.

j Hoe kun je het vanuit het versleutelde woord de oorspronkelijke tekst weer terugvinden? Gaat dat gemakkelijk?

Opgave 9: Het vermoeden van Goldbach en andere openstaande kwesties

Het **vermoeden van Goldbach** is een tot nu toe onbewezen vermoeden over getallen. Nog nooit heeft iemand een tegenvoorbeeld gevonden voor dit vermoeden, maar een bewijs...?

Op 7 juni 1742 schreef **Christian Goldbach** een brief aan Euler. Hij beweert hierin:

> Elk even getal groter of gelijk aan 4 is te schrijven als de som van twee priemgetallen.

Tot nu toe heeft niemand een sluitend bewijs kunnen vinden...

Het is één van de vermoedens in de wiskunde die nog openstaan voor een bewijs, dus voel je uitgedaagd!

a Laat zien dat het vermoeden van Goldbach geldt voor de getallen 48 en 76. Probeer zelf nog maar een paar andere getallen.

b Waarom is het onmogelijk (ook als je veel helpers zou hebben met snelle computers voor het rekenwerk) om de stelling op deze manier te bewijzen?

c Zoek nog één of twee openstaande vraagstukken in de wiskunde en probeer er meer informatie over te verzamelen. Leg dit vast in een voor jou begrijpelijke tekst.

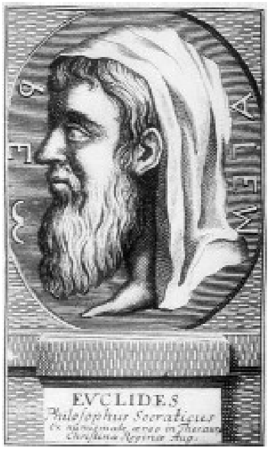
2

Redeneren en bewijzen

2.1 Basisbegrippen

Inleiding

De Griek **Euclides (ongeveer 300 v.Chr.)** was de eerste die een wiskundige theorie opbouwde. Hij legde de grondbegrippen van de theorie vast in definities, hij ging uit van een klein aantal aannames die hij proposities of axioma's noemde, en verder gebruikte hij enkele algemene aannames. Die theorie verwoordde hij in zijn boek 'Stoicheia' ofwel 'De Elementen' het beroemdste wiskundeboek aller tijden. Hij poogde er een fundament mee te leggen voor alle wiskunde, ook getallen behandelde hij als lijnstukken omdat de hele theorie op meetkundige inzichten was gestoeld. Alle wiskunde van die tijd leidde hij uit zijn definities en axioma's af door logische redeneringen, die bewijzen worden genoemd.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen definitie, axioma, vermoeden en bewijs gebruiken;
- (eenvoudige) bewijzen leveren vanuit de basisdefinities en axioma's;
- het begrip bewijs uit het ongerijmde.

Voorkennis

- verstandig redeneren.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.

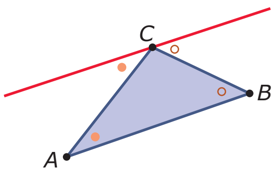
Je weet wel dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is. Maar kun je dat ook bewijzen?

Uitleg

Bekijk de applet

Het bewijs dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is, wordt vaak als volgt geleverd.

- Trek door C een lijn evenwijdig aan AB.
- Bij C vind je dan drie hoeken die samen een gestrekte hoek vormen: een hoek die (Z-hoeken) gelijk is aan $\angle A$, en een hoek die (Z-hoeken) gelijk is aan $\angle B$.
- Een gestrekte hoek is 180° dus de hoeken A, B en C zijn samen 180°.



Figuur 1.2

Maar dit ‘bewijs’ rammelt nogal. Wat zijn Z-hoeken? Waarom en wanneer zijn Z-hoeken gelijk? En hoe zit het met een gestrekte hoek? Er worden begrippen gebruikt die kennelijk al eerder aan de orde zijn geweest. En zijn die begrippen ook goed vastgelegd en zijn hun eigenschappen eerst bewezen?
Voor een goed bewijs moet dat in elk geval zeker zijn. Voor een goed bewijs heb je dus nodig:

- goede afspraken over de betekenis van alle begrippen: goede definities;
- een aantal goed omschreven uitgangspunten: goede ‘axioma's’;
- goede logische ‘redeneerregels’ die iedereen hanteert.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet een redenering waaruit blijkt dat de som van de hoeken van een driehoek $180°$ is.

a Laat zien dat deze redenering ook geldt als $\angle B$ stomphoekig is.

b Wat zijn Z-hoeken? Waarom is de evenwijdigheid van de lijn door C met AB belangrijk?

Opgave 2

Je kent de stelling van Pythagoras. Zoek een bewijs van die stelling op, bijvoorbeeld via internet.
Probeer dat bewijs zo te formuleren dat je het zelf goed begrijpt. Schrijf een aantal aannames op die in dit bewijs worden gedaan.

Opgave 3

Je krijgt een potlood, een (grote) passer, een liniaal zonder maatverdeling en een vel A4 waarop een lijnstuk is getekend.

a Hoe kun je dat lijnstuk in vier gelijke delen verdelen?

b Hoe kun je een hoek van $45°$ maken?

c Hoe kun je, ergens op het papier, een hoek van $60°$ maken? En een van $30°$?

Opgave 4

In de Oudheid werden voor constructies alleen een liniaal zonder maatverdeling en een passer gebruikt. Stel je hebt een potlood, een passer, een liniaal zonder maatverdeling en een vel papier waarop drie lijnstukken zijn getekend.

a Hoe kun je een driehoek tekenen met de drie lijnstukken als zijden? Lukt dat altijd? Wanneer wel en wanneer niet? Als het wel lukt, kun je dan maar één driehoek tekenen of zijn er meer oplossingen mogelijk?

b Teken een lijn l en een punt P dat niet op l ligt. Construeer de lijn door P evenwijdig aan l.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **wiskundige theorie** bestaat uit:

- een aantal **definities** van begrippen;
- een zo klein mogelijk aantal basisaannames of **axioma's**;
- **stellingen**, dat wil zeggen beweringen die door middel van logisch redeneren kunnen worden afgeleid uit de axioma's. Zo'n logische redenering heet het bewijs van de stelling.

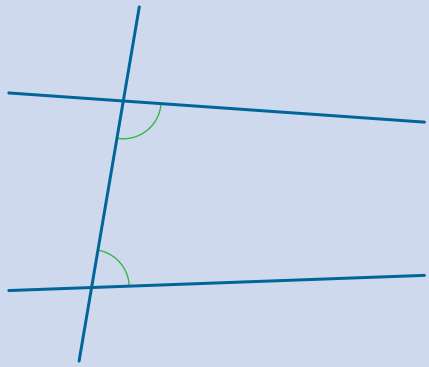
Ook de vlakke meetkunde kent zo'n theorieopbouw die al meer dan 2200 jaar geleden is gestart met de Griek Euclides.
In de **vlakke meetkunde** heb je basisdefinities en basisbegrippen.

De begrippen punt, lijn, lijnstuk en hoek worden bekend verondersteld.

- De **afstand** tussen twee punten A en B is de lengte van het lijnstuk AB, genoteerd als $|AB|$, als AB of als $d(A,B)$ (de d van ‘distance’).
- Een **cirkel** bestaat uit alle punten op een bepaalde afstand van een vast punt, het middelpunt.
- Een **halve lijn** is het deel van een lijn aan één kant van een punt op die lijn, inclusief dat punt (de benen van een hoek zijn halve lijnen).
- Het **verlengde** van een lijnstuk AB is de halve lijn van de lijn door A en B die in B begint en waar A niet op ligt (het verlengde van BA is een andere halve lijn).
- Een **gestrekte hoek** is een hoek $(180°)$ waarvan de benen in elkaars verlengde liggen.
- Een **rechte hoek** $(90°)$ is de helft van een gestrekte hoek $(180°)$.
- Twee hoeken die samen een gestrekte hoek vormen, zijn elkaars **nevenhoek**.
- Een **driehoek** bestaat uit drie punten (de hoekpunten), niet op één lijn, en de drie lijnstukken tussen die punten (de zijden). Telkens tussen twee zijden liggen de drie hoeken van de driehoek. Je duidt een driehoek aan met zijn hoekpunten: ΔABC.
- Twee lijnen **snijden** elkaar als ze één punt gemeenschappelijk hebben, het **snijpunt**.
- Twee lijnen heten **evenwijdig** als ze elkaar niet snijden (dat wil zeggen geen punt gemeen hebben).
- De **loodlijn** uit een punt P op een lijn l is de lijn door P die een rechte hoek maakt met l (**loodrecht** staat op l). Het snijpunt van l en de loodlijn S is het **voetpunt** van de loodlijn.
- De **middelloodlijn** van een lijnstuk AB is de lijn die AB loodrecht middendoor snijdt.

De vlakke meetkunde kent vijf axioma's, de befaamde axioma's (aannames) van de **Euclidische vlakke meetkunde**.

1. Tussen twee willekeurige punten kun je een lijn tekenen.
2. Een lijnstuk kan verlengd worden tot een rechte lijn.
3. Gegeven een punt M en een lijnstuk. Je kunt een cirkel tekenen met middelpunt M met een straal gelijk aan het lijnstuk.
4. Alle rechte hoeken zijn aan elkaar gelijk.
5. Als twee lijnen gesneden worden door een derde lijn en de som van de binnenhoeken kleiner is dan $180°$, dan snijden de lijnen elkaar. Zie de figuur.



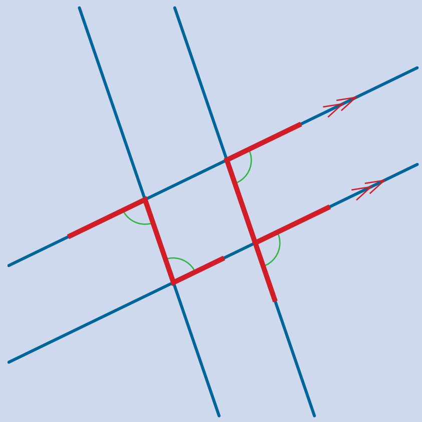
Figuur 1.3

Met behulp van de axioma's kun je het volgende bewijzen:

Als twee evenwijdige lijnen worden gesneden door een derde lijn zijn de F-hoeken en de Z-hoeken gelijk.

In deze figuur zie je de F-hoek en de Z-hoek.

Omdat het opbouwen van de gehele theorie van de vlakke meetkunde teveel tijd kost, is er voor het leveren van bewijzen een **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde** ontwikkeld die als uitgangspunt wordt genomen, en die je dus moet kennen. De schuin gedrukte en onderstreepte termen dienen als verwijzing in een bewijs.



Figuur 1.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Stelling

De som van de hoeken van een driehoek is $180°$.

Lever het bewijs van deze stelling.

Antwoord

Bewijs

Trek door (bijvoorbeeld) C een lijn evenwijdig aan lijnstuk AB. (Dit kan volgens axioma 5)

Je ziet nu bij punt C twee nieuwe hoeken ontstaan waarvan $\angle A = \angle C_1$ en $\angle B = \angle C_3$ (Z-hoeken zijn gelijk).

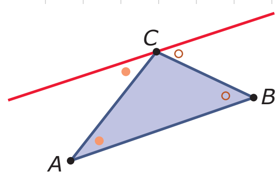
$\angle C_1 + C_2 + C_3 = 180°$ (gestrekte hoek).

Dus $\angle A + \angle B + \angle C_2 = 180°$

Q.e.d.

of

Quod erat demonstrandum: wat te bewijzen was.



Figuur 1.5

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** het bewijs dat de hoeken van een driehoek samen $180°$ zijn.

a Teken zelf de figuur bij dit bewijs en verleng zijde AC aan de kant van C.

Bij punt C tref je nu meerdere hoeken aan. $\angle C$ zit in de ΔABC en heet daarom een binnenhoek van deze driehoek. De hoek tussen BC en het verlengde van AC is een buitenhoek van ΔABC. $\angle A$ en $\angle B$ zijn ook binnenhoeken van de driehoek. Het zijn de niet-aanliggende binnenhoeken van de buitenhoek van $\angle C$.

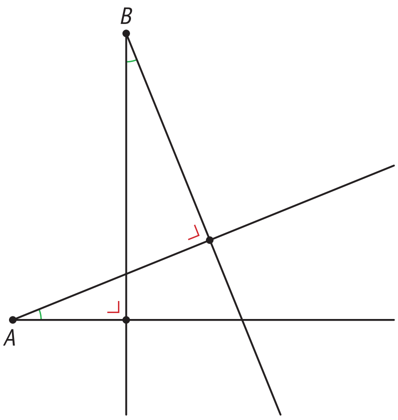
b Bewijs de stelling: ‘In een driehoek is elke buitenhoek gelijk aan de som van de niet-aanliggende binnenhoeken.’

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Uitspraak: ‘Als elk van de benen van een hoek loodrecht staat op een van de benen van een andere hoek, dan zijn die hoeken gelijk.’

Dit lijkt een goede uitspraak. Maar je kunt gemakkelijk een voorbeeld verzinnen waarin de uitspraak onwaar is, een tegenvoorbeeld. De uitspraak (een vermoeden) kan daarom geen stelling worden, hij is niet algemeen geldig.



Figuur 1.6

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt een vermoeden beschreven.

a Schrijf nog eens nauwkeurig op wat het vermoeden is dat daar wordt geuit.

b Teken een situatie waarin het vermoeden niet juist is en beschrijf wat er fout gaat.

c Waarom is slechts één tegenvoorbeeld genoeg om te bewijzen dat het vermoeden niet waar is?

d Kun je het vermoeden iets anders formuleren zodat het wel kan worden bewezen? Welke stelling krijg je?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Bekijk de applet.

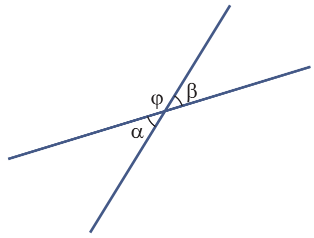
Stelling
De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk.

Antwoord

Bewijs

α en β zijn twee overstaande hoeken. Beide hebben dezelfde nevenhoek φ.
Dus is $\alpha + \varphi = 180°$ en is ook $\beta + \varphi = 180°$ (gestrekte hoek).

Hieruit volgt: $\alpha = \beta$.



Figuur 1.7

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** wordt een eenvoudige uitspraak bewezen.

a Wat is het verschil tussen een vermoeden en een stelling?

b Waarom is ook voor zo'n eenvoudige uitspraak een bewijs nodig?

c Wat is een tegenvoorbeeld?

Opgave 8

De lijnen l en m staan loodrecht op elkaar, s is een derde lijn.

a Bewijs de stelling: Als s loodrecht staat op l, is s evenwijdig met m.

b Schrijf het omgekeerde van deze stelling op. Is dit ook een ware bewering?

Voorbeeld 4

Bekijk de applet.

Bij een ‘bewijs uit het ongerijmde’ ga je ervan uit dat wat je wilt bewijzen niet waar is. Daaruit leid je een tegenspraak af met het gegeven of met een al bekende stelling.

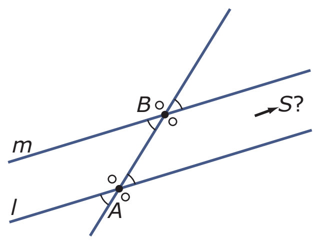
Bewijs hiermee: ‘Als twee lijnen gesneden worden door een derde lijn en de F-hoeken zijn gelijk, dan zijn die twee lijnen evenwijdig.’

Antwoord

Bij twee gelijke F-hoeken zijn ook hun overstaande hoeken gelijk.
En de vier nevenhoeken van al die F-hoeken zijn ook gelijk.
De acht hoeken in de figuur zijn dus vier aan vier gelijk.

Neem nu aan dat beide lijnen l en m niet evenwijdig zijn, dus elkaar snijden in een punt S. Kijk naar twee hoeken tussen de twee lijnen en de derde lijn aan de kant waar S ligt. Die twee hoeken zijn hoeken van driehoek ASB.
Eén van hen is gelijk aan de nevenhoek van de F-hoek van de andere.
Omdat de F-hoeken gelijk zijn, zijn de twee hoeken samen $180°$.
Maar dat is onmogelijk, omdat het maar twee hoeken van een driehoek zijn en de som van de hoeken van een driehoek $180°$ is. De aanname dat beide lijnen elkaar snijden, is dus onjuist, ze zijn evenwijdig.

Q.e.d.



Figuur 1.8

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 4** nog eens een bewijs uit het ongerijmde. Bekijk nu de stelling: ‘In ΔABC is $\angle A$ stomp en het voetpunt D van de loodlijn uit C op AB ligt op het verlengde van BA.’

a Laat zien dat punt D niet kan samenvallen met punt A. Beschrijf de tegenspraak waar dit toe leidt.

b Laat zien dat punt D niet tussen A en B kan liggen of met B kan samenvallen of op het verlengde van AB kan liggen.

c Waarom is hiermee de stelling bewezen?

Opgave 10

Uitspraak: ‘Als de lijnen m en n evenwijdig zijn met de lijn l, dan zijn m en n ook evenwijdig aan elkaar.’

Dit lijkt een simpele uitspraak. Maar omdat hij niet bij de axioma's hoort, moet je hem daaruit kunnen afleiden. Laat zien hoe. Gebruik een bewijs uit het ongerijmde.

Verwerken

Opgave 11

Als een driehoek rechthoekig is, dan is één van de zijden langer dan de andere twee zijden.

a Is dat waar?

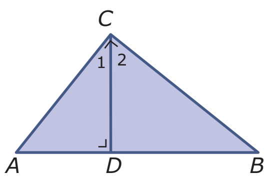
b Is het omgekeerde van deze uitspraak waar?

c Wat kun je over de hoeken van een driehoek zeggen als één van de zijden langer is dan de andere?

Opgave 12

Driehoek ABC heeft een rechte hoek bij C.
Vanuit C is een loodlijn getrokken op AB.

Bewijs dat $\angle A = \angle C_2$.



Figuur 1.9

Opgave 13

Strikt genomen is evenwijdigheid wel gedefinieerd voor lijnen maar niet voor lijnstukken.

a Bij een gegeven lijnstuk is er precies één lijn waar dat lijnstuk op ligt. Waarom?

b Bedenk een definitie voor evenwijdigheid van lijnstukken.

Opgave 14

In deze opdracht geef je een ander bewijs voor de stelling dat in een driehoek de som van de hoeken $180°$ is. Je bewijst de stelling eerst voor rechthoekige driehoeken en daarna voor een willekeurige driehoek.

a Teken een rechthoek $ABCD$ en teken daarin de diagonaal AC. Waarom is $\angle CAB = \angle ACD$?

b Bewijs dat in een rechthoekige driehoek de som van de hoeken $180°$ is.

c Teken nu een willekeurige scherphoekige driehoek ABC en teken de loodlijn CD vanuit C op AB. In de driehoek heb je twee rechthoekige driehoeken gekregen. Bewijs hiermee, en met het voorgaande, dat de som van de hoeken $180°$ is.

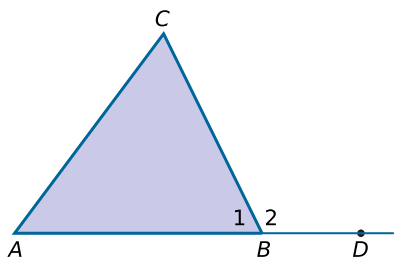
d Je hebt de stelling bewezen voor scherphoekige driehoeken. Geef een bewijs voor stomphoekige driehoeken.

Opgave 15

Gegeven is ΔABC. Punt D ligt op het verlengde van AB.

a Bewijs dat $\angle A + \angle C = \angle B_2$.

b Welke stelling uit de **Lijst van definities en stellingen** heb je bij a bewezen?



Figuur 1.10

Toepassen

Opgave 16: Verdelen in vier gelijke delen

Hoe verdeel je een lijnstuk in vier gelijke delen als je alleen een liniaal zonder maatverdeling en een passer mag gebruiken?

Opgave 17: Driehoeken op een bol

Toen in West-Europa landen ontstonden met eigen regeringen en ambtenaren, werd het bepalen van de grootte van het grondgebied belangrijk. Landmeters gebruikten daarbij driehoeksmeting. Ze werken dan met driehoeken. En ook zij namen aan dat de som van de hoeken van een driehoek $180°$ is.

Kun je laten zien dat dit voor driehoeken op het aardoppervlak niet waar kan zijn? Waarom ontdekten de landmeters dat niet meteen?

Testen

Opgave 18

Gegeven een stomphoekige driehoek. Bewijs uit het ongerijmde dat de driehoek twee scherpe hoeken heeft.

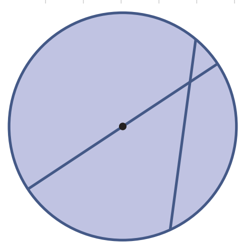
Opgave 19

Bekijk een koorde van een cirkel (dat is het lijnstuk tussen twee punten op de cirkel).

a Wat vermoed je over de lengte van die koorde, vergeleken met de lengte van een middellijn?

b Als je vermoeden klopt, moet je het kunnen bewijzen. Probeer dat met hulplijnen.

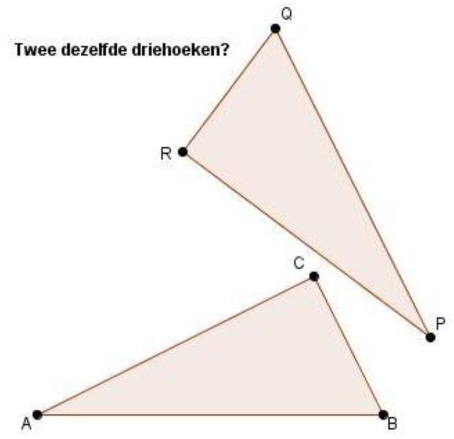
c Er doet zich een speciaal geval voor. Heb je daar rekening mee gehouden?


Figuur 1.11

2.2 Congruentie

Inleiding

Bij het leveren van meetkundige bewijzen wil je vaak aantonen welke verschillende (delen van) figuren hetzelfde zijn. Figuren die qua vorm en afmeting gelijk zijn noem je congruent. Ze hebben dan dezelfde hoeken en afmetingen. Omdat veel figuren in driehoeken zijn te verdelen is het voor bewijzen belangrijk om te weten wanneer driehoeken congruent zijn.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de congruentiekenmerken van driehoeken;
- bewijzen leveren met behulp van congruente driehoeken;
- de eigenschappen van bijzondere driehoeken gebruiken;
- de driehoeksongelijkheid toepassen.

Voorkennis

- eenvoudige bewijzen leveren vanuit basisdefinities en axioma's van de meetkunde.

Verkennen

Opgave V1

Er zijn precies vijf verschillende situaties waarin je een driehoek precies kunt tekenen en er ook maar ééntje mogelijk is.
Eén daarvan is ZZZ: de drie zijden zijn gegeven.

a Laat zien dat bij drie gegeven zijden er ook maar één driehoek is te tekenen door hem te construeren. Neem als lengtes van zijden $|AB| = 6$, $|BC| = 3$ en $|AC| = 4$.

b Lukt dit bij elke willekeurige set van drie getallen?

Een andere situatie is ZHZ: twee zijden en de hoek ertussen zijn gegeven.

c Laat ook nu zien dat er zo maar één driehoek te construeren is. Neem $\angle A = 60°$, $|AB| = 6$ en $|AC| = 8$.

d Bedenk zelf de andere drie situaties.

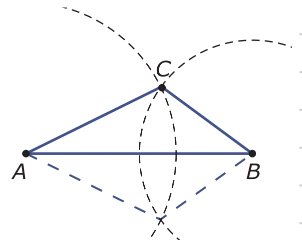
e Waarom is ZZH niet zo'n situatie?

Uitleg

Als van een driehoek de drie zijden (bijvoorbeeld $|AB| = 6$, $|BC| = 3$ en $|AC| = 4$) zijn gegeven, kun je hem construeren. Er zijn dan twee driehoeken op AB mogelijk. In de constructie kun je zien dat die qua vorm en afmetingen gelijk zijn. Het zijn 'congruente driehoeken'. Als twee driehoeken gelijke zijden hebben, zijn ze altijd congruent. Deze eigenschap van driehoeken heet een 'congruentiekenmerk'.
De congruentiekenmerken voor driehoeken zijn:

- drie gelijke zijden (ZZZ);
- twee zijden en de ingesloten hoek (ZHZ);
- twee hoeken en de zijde ertussen (HZH);
- een zijde, een hoek op die zijde en de overstaande hoek (ZHH);
- twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden (ZZR).

De drie letters gebruik je in bewijzen om het congruentiekenmerk weer te geven. Dat ΔABC en ΔPQR congruent zijn, geef je zo weer $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.
Ga zelf na, dat je in alle vijf gevallen precies één driehoek kunt construeren (of twee congruente). Met behulp van deze congruentiekenmerken kun je allerlei eigenschappen van bijzondere driehoeken bewijzen. Daarin geef je hoeken vaak aan met behulp van drie letters. $\angle ABC$ is de hoek met hoekpunt B en benen BA en BC.



Figuur 2.2

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je dat er vijf congruentiekenmerken zijn. Bij deze kenmerken gaat het steeds om de hoeken en/of lijnen die twee driehoeken gelijk hebben.

a Waarom is HHH geen congruentiekenmerk?

b ZZR is een congruentiekenmerk, maar ZZH niet. Ga na waarom je niet een driehoek ABC vastlegt door te zeggen: $|AB| = 5$ cm, $|AC| = 4$ cm en $\angle ABC = 45°$.

Opgave 2

Je ziet in de **Uitleg** hoe je een driehoek construeert als de drie zijden zijn gegeven. Die constructie hoort bij congruentiekenmerk ZZZ.

Geef een voorbeeld van een constructie die hoort bij HZH. Beschrijf mogelijke gegevens en voer de constructie uit.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Twee driehoeken zijn **congruent** als ze gelijk hebben:

- drie zijden (ZZZ);
- twee zijden en de ingesloten hoek (ZHZ);
- twee hoeken en de zijde ertussen (HZH);
- een zijde, een hoek op die zijde en de overstaande hoek (ZHH);
- twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden (ZZR).

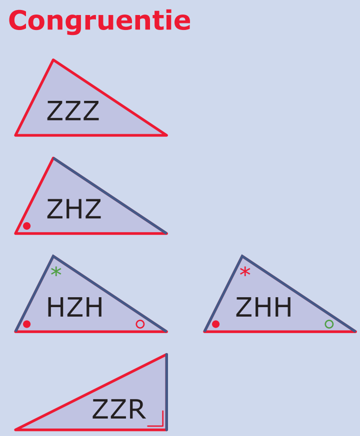
Je noemt dit de **congruentiekenmerken** van driehoeken. Dat ΔABC en ΔPQR congruent zijn geef je zo weer: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$. Let bij het noteren van congruente driehoeken op de volgorde van de letters.

Met behulp van congruentie kun je allerlei eigenschappen van (bijzondere) driehoeken bewijzen. Bijvoorbeeld:

- In elke **rechthoekige driehoek** (een driehoek met een rechte hoek) is de stelling van Pythagoras toepasbaar. Dus als de rechthoekszijden lengtes van a en b hebben en de hypotenusa (schuine zijde) heeft lengte c, dan is $a^2 + b^2 = c^2$.
- Als in een driehoek met zijden a, b en c geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$, dan is het een rechthoekige driehoek (omgekeerde stelling van Pythagoras).
- In elke **gelijkbenige driehoek** (een driehoek met twee gelijke zijden) zijn de basishoeken tegenover de even lange zijden even groot.
- In elke **gelijkzijdige driehoek** (een driehoek met drie gelijke zijden) zijn alle hoeken even groot.

Tenslotte is bij driehoeken nog van belang dat elke zijde van een driehoek altijd kleiner is dan de som van de twee andere. Dit heet de **driehoeksongelijkheid**: Voor drie punten A, B en C, die niet op één lijn liggen, geldt: $|AB| + |BC| > |AC|$.

Let op. In congruente driehoeken moet de volgorde van de letters overeenkomen met de congruentie.

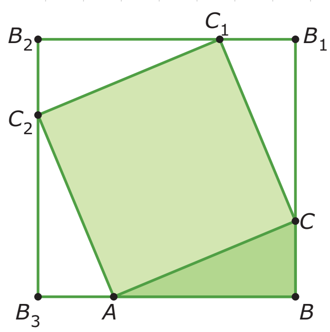


Figuur 2.3

Voorbeeld 1

Je ziet een figuur waarmee je de stelling van Pythagoras kunt bewijzen in de rechthoekige driehoek ABC.

Eerst wordt een vierkant op zijde AC geconstrueerd. Daarna wordt de driehoek om P (het snijpunt van de diagonalen van het vierkant) over 90° gedraaid. Als je dit drie keer doet, ontstaan vier congruente rechthoekige driehoeken.
Belangrijk is dat vanwege de congruentie van de vier driehoeken bij de punten C, C_1, C_2 en A gestrekte hoeken ontstaan.
Dit komt omdat congruente driehoeken gelijke hoeken hebben.



Figuur 2.4

Vanwege de congruentie geldt: $\angle CAB = \angle C_1CB_1$.

Verder geldt: $\angle CAB + 90° + \angle BCA = 180°$ (hoekensom driehoek) en dus $\angle CAB + \angle BCA = 90°$.

Uit bovenstaande volgt nu dat $\angle BCA + 90° + \angle C_1CB_1 = 180°$, dus de drie hoeken vormen een gestrekte hoek. Op dezelfde manier toon je aan dat dit ook geldt bij de drie hoeken bij de punten C_1,C_2 en A.

Nu weet je dat $BB_1B_2B_3$ een vierkant is met zijden van $a+b$.
Verder is C_1C_2AC een vierkant met zijden c.
En ten slotte heeft elk van de vier rechthoekige driehoeken een oppervlakte van $\frac{1}{2}ab$.

Ga nu zelf na dat uit $(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$ volgt dat $a^2 + b^2 = c^2$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** wordt een bewijs voor de stelling van Pythagoras geleverd.

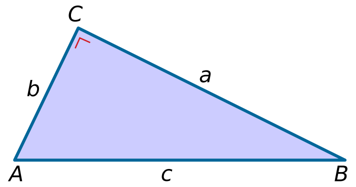
a Waarom moet worden aangetoond dat $BB_1B_2B_3$ een vierkant is?

b Ga de laatste regel van het bewijs ook inderdaad zelf na.

Voorbeeld 2

In ΔABC geldt: $a^2 + b^2 = c^2$.
Bewijs nu dat deze driehoek rechthoekig is.

Dit wordt ook wel de omgekeerde stelling van Pythagoras genoemd.



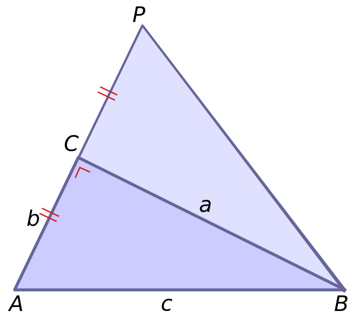
Figuur 2.5

Antwoord

Construeer op ΔABC een rechthoekige ΔCBP waarvan $\angle BCP = 90°$ en bovendien $|CP| = |CA| = b$.

In ΔCBP geldt: $(|CB|)^2 + (|CP|)^2 = (|BP|)^2$ (stelling van Pythagoras).
En dus is $(|BP|)^2 = b^2 + a^2 = c^2$ en $|BP| = |AB|$.

Daarom zijn de twee driehoeken ABC en PBC congruent (ZZZ).
En dus is $\angle ACB = \angle BCP = 90°$.



Figuur 2.6

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** wordt de omgekeerde stelling van Pythagoras bewezen.

a Van welk congruentiekenmerk wordt gebruikgemaakt?

b Bewijs dat een driehoek met zijden van 16, 30 en 34 cm rechthoekig is.

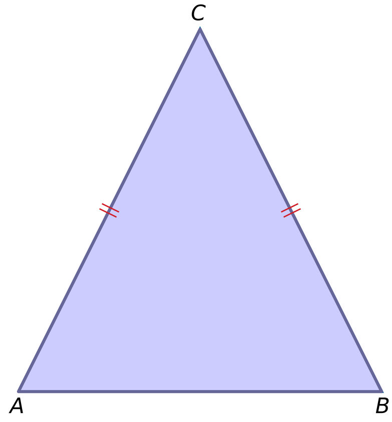
Gegeven is ΔABC met $|AB| = 10$ en $|BC| = 24$.

c Als je wilt dat de driehoek rechthoekig is, welke lengte moet AC dan krijgen?

d Is er nog een andere lengte mogelijk voor AC?

Voorbeeld 3

ΔABC is gelijkbenig, want de driehoek heeft twee gelijke zijden AC en BC.
Bewijs dat hij twee gelijke hoeken heeft.



Figuur 2.7

Antwoord

Teken de loodlijn CD op AB.
Bekijk de twee driehoeken ADC en BDC.
Hiervan is: $|AC| = |BC|$, $|CD| = |CD|$ en $\angle BDC = \angle ADC = 90°$.
En dus is ΔADC congruent met ΔBDC (ZZR). Daarom is $\angle A = \angle B$.

Je kunt dit ook bewijzen door aan te tonen dat ΔABC congruent is met ΔBAC (ZZZ).
Bedenk zelf hoe dan het bewijs precies verloopt.

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 3** het bewijs dat een gelijkbenige driehoek twee gelijke hoeken heeft.

In het antwoord staat een tweede manier beschreven om dit bewijs te leveren. Schrijf op hoe dit tweede bewijs verloopt.

Opgave 6

Bewijs: ‘Elke gelijkbenige rechthoekige driehoek heeft twee hoeken van $45°$.’

Opgave 7

Bewijs met behulp van congruentie de stelling: ‘Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan is die driehoek gelijkbenig.’

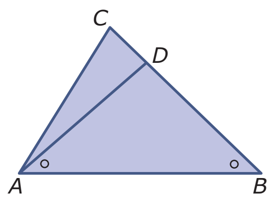
Voorbeeld 4

Gegeven is ΔABC met $\angle A > \angle B$.

Bewijs dat tegenover de grootste hoek ook de langste zijde zit, dus $|BC| > |AC|$.

Antwoord

Teken een geschikte figuur. Teken op BC een punt D, zo, dat $\angle BAD = \angle ABD$.



Figuur 2.8

Omdat $\angle BAD = \angle ABD$ is ΔABD gelijkbenig en dus: $|AD| = |BD|$.

Vanwege de driehoeksongelijkheid is:
$|AC| < |AD| + |DC| = |BD| + |DC| = |BC|$.

Dus er geldt: $|BC| > |AC|$.

Opgave 8

In **Voorbeeld 4** is bewezen dat in een driehoek de grootste hoek altijd tegenover de langste zijde zit. Geldt ook dat de langste zijde altijd tegenover de grootste hoek zit? Onderzoek dit en geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

Opgave 9

De afstand van een punt P tot een lijn l is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van P en een punt Q op die lijn l.

Bewijs met behulp van de stelling van Pythagoras dat dit kortste verbindingslijnstuk PQ een rechte hoek met lijn l maakt.

Verwerken

Opgave 10

In een vierkant $ABCD$ zijn de twee diagonalen AC en BD getrokken. Hun snijpunt is S.

a Bewijs dat de driehoeken ABD en ABC congruent zijn.

b Bewijs dat de driehoeken ABS en CDS congruent zijn.

c Bewijs dat S het midden is van AC en van BD.

Opgave 11

Een driehoek heeft een zijde van 8 cm en een zijde van 5 cm.

a Kan de derde zijde 13 cm zijn? Wat kun je zeggen over de lengte van de derde zijde?

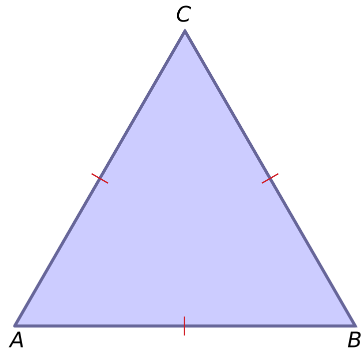
Een andere driehoek heeft een zijde met een lengte van 1 m.

b Wat kun je zeggen over de som van de lengtes van de andere zijden? En over hun verschil?

Opgave 12

Je ziet de gelijkzijdige driehoek ABC. Dit betekent dat de drie zijden even lang zijn.

Bewijs dat de driehoek drie gelijke hoeken van 60° heeft.



Figuur 2.9

Opgave 13

Bewijs dat de omtrek van een vierhoek groter is dan de som van de lengtes van de diagonalen.

Opgave 14

Definitie: ‘De afstand tussen twee evenwijdige lijnen is de lengte van een loodlijn die je vanuit een punt op de ene lijn op de andere lijn neerlaat’.
Daar is nog wel wat op aan te merken. Maakt het niets uit waar je dat punt kiest? Maakt het niets uit op welk van de twee lijnen je dat punt kiest? En is dat dan echt de kortste afstand van alle lijnstukjes tussen de twee lijnen?
Noem de lijnen l en m.

a Bewijs: als P een punt op l is en PQ de loodlijn vanuit P op m, dan is QP de loodlijn vanuit Q op l.

b Bewijs: als P' een (ander) punt is op l en $P'Q'$ de loodlijn vanuit P' op m, dan zijn PQ en $P'Q'$ even lang (gebruik een hulplijn).

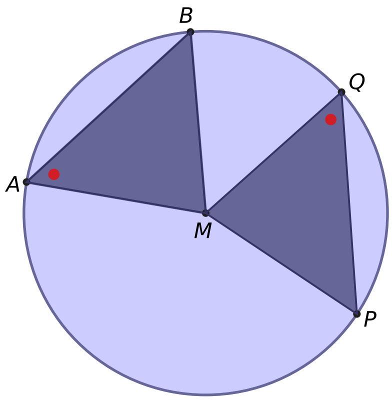
c Waarom kun je nu de definitie goedkeuren?

d Is de zo gedefinieerde afstand tussen twee evenwijdige lijnen ook de kleinst mogelijke afstand tussen een punt op de ene en een punt op de andere lijn? Geef een bewijs. Gebruik de stelling van Pythagoras.

Opgave 15

Je ziet een cirkel met middelpunt M. De punten A, B, P en Q liggen op de cirkel. Verder is gegeven dat $\angle BAM = \angle PQM$.

Bewijs dat $\Delta BAM \cong \Delta PQM$.



Figuur 2.10

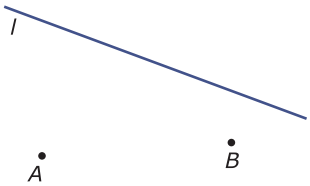
Toepassen

Opgave 16: Kortste weg

Je wilt de kortste weg van A naar B via een punt op lijn l tekenen.

a Neem de figuur over en teken die kortste weg.

b Bewijs dat dit inderdaad de kortste weg is. Gebruik de driehoeksongelijkheid.



Figuur 2.11

Opgave 17: Rechthoekige driehoeken met gehele zijden

Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met $\angle B = 90°$.

De lengtes van de zijden van de driehoek zijn geheel.

a Stel dat $|AC| = 50$. Welke driehoeken zijn er mogelijk? Geef ook aan welke driehoeken congruent zijn.

b Stel dat $|AB| = 3$. Waarom is er nu maar één driehoek mogelijk?

Opgave 18: Stomphoekige driehoek

Gegeven zijn twee gehele getallen a en b met $0 < a < b < 100$. De driehoek waarvan de zijden de lengte a, b en 100 hebben, is stomphoekig.

Wat is de grootste waarde die a kan hebben?

Testen

Opgave 19

Van ΔABC is gegeven: $|AC| = |BC|$. D is het midden van AC en E is het midden van BC.

Bewijs dat de loodlijnen vanuit D en vanuit E op AB even lang zijn.

Opgave 20

Van de vierhoek $ABCD$ is gegeven: $|AB| = |CD|$, $|AD| = |BC|$ en $\angle ABC = 90°$.

a Laat met een hulplijn zien: de vier hoeken zijn samen $360°$.

b Bewijs dat $\angle ADC = 90°$.

c Bewijs dat $\angle BAD = \angle BCD = 90°$.

d Bewijs dat de twee diagonalen even lang zijn.

e Bewijs dat $\angle BAC = \angle ABD = \angle ACD = \angle BDC$.

f Bewijs dat de diagonalen elkaar doormidden delen.

Opgave 21

In een rechthoekige driehoek ABC (met de rechte hoek bij A) is D een punt op BC zo, dat $\angle DAB = \angle DBA$. (Maak zelf een tekening).

a Laat zien dat $\angle ACB = 90° - \angle CBA$.

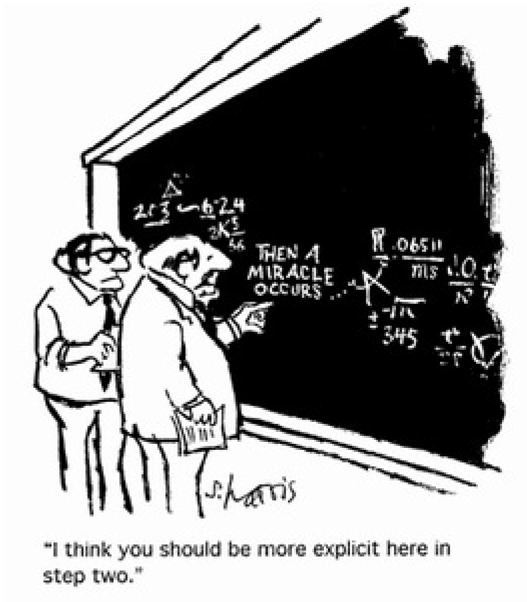
b Laat zien dat ΔDCA gelijkbenig is.

c Bewijs dat $|AD| = |DB| = |CD|$.

2.3 Bewijzen

Inleiding

Een bewijs in de wiskunde is een logische redenering waarmee wordt aangetoond dat een bepaalde bewering volgt uit de (voor waar aangenomen) axioma's en uit eerder bewezen stellingen. Die bewering wordt (als een bewijs is geleverd) dan een stelling en toegevoegd aan het theoretische bouwwerk (zoals de vlakke meetkunde). Elk bewijs kent een vaste structuur. Verder moet je goed afspreken van welke theorie je mag uitgaan.



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- een bewijs leveren volgens een vaste structuur;
- bewijzen leveren met behulp van de lijst van definities/stellingen in de Vlakke Meetkunde voor vwo wiskunde B.

Voorkennis

- eenvoudige bewijzen leveren vanuit de basisdefinities en axioma's van de vlakke meetkunde.
- gebruik maken van congruentie en de congruentiekenmerken van driehoeken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**. Probeer door alleen gebruik te maken van die lijst de volgende stelling te bewijzen:

‘Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig.’

Uitleg

Bekijk de applet

In deze figuur is een vierkant $ABCD$ geconstrueerd. De punten P, Q en R zijn de middens van drie zijden van het vierkant. Je 'ziet' dat ΔPQR een gelijkbenige rechthoekige driehoek is.

Het volgende 'vermoeden' ontstaat:

'Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig.'

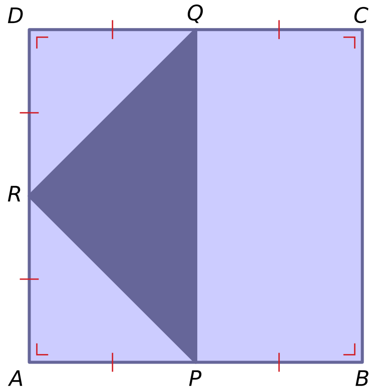
Maar kun je dat ook echt bewijzen?

Om zo'n bewering (vermoeden) te bewijzen is het verstandig om eerst de gegevens netjes op een rijtje te zetten en letters in te voeren. In de figuur is dat al gedaan. **Gegeven** is: $ABCD$ is vierkant en $AP = PB$, $CQ = QD$ en $DR = RA$. Voor het gemak zijn de absoluutstrepen weggelaten.

Te bewijzen is nu dat $PR = QR$ en $\angle PRQ = 90°$.
Nu kun je over het **bewijs** gaan nadenken.

Ga uit van de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**.

Bij bewijzen in de vlakke meetkunde kun je vaak goed gebruik maken van 'GeoGebra', een computerprogramma dat je gratis kunt downloaden en speciaal bedoeld is voor de vlakke meetkunde.



Figuur 3.2

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de bewijsstructuur 'Gegeven, te bewijzen, bewijs' ingeleid.

a Wat is het verschil tussen de stelling zelf en de beschrijving ervan onder de kopjes 'Gegeven' en 'Te bewijzen'?

b Wat is het belang van zo'n vaste bewijsstructuur?

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt een begin gemaakt met het bewijs van de stelling: 'Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig.'

a Laat zien dat de driehoeken APR en DQR congruent zijn.

b Leg uit hoe je daaruit het bewijs levert.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **bewijs** is een logische redenering waarin je laat zien hoe een bepaalde bewering uit de al bestaande axioma's en definities en eerder bewezen stellingen volgt. Als het bewijs is geleverd wordt de bewering een **stelling**. Je uitgangspunt is de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**. Je moet door alleen gebruik te maken van die lijst alle stellingen bewijzen. Gebruik de volgende structuur voor een bewijs:

Gegeven:

- Beknopte en duidelijke beschrijving van wat er gegeven is, vaak met een duidelijke figuur erbij. Kies alvast letters voor punten, lijnen, e.d.

Te bewijzen:

- Beknopte en duidelijke beschrijving van wat je wilt bewijzen. Gebruik de gekozen letters.

Bewijs:

- Het eigenlijke bewijs met verwijzingen naar de boven genoemde lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde.

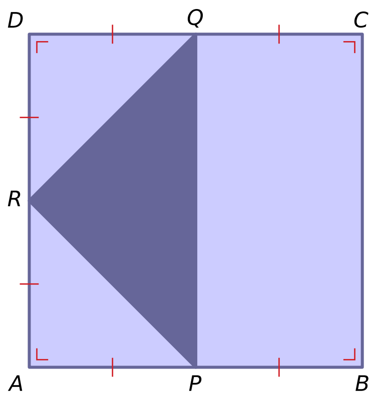
Er zijn meerdere manieren om bewijzen te leveren. Twee belangrijke zijn:

- een **direct bewijs** waarbij je rechtstreeks vanuit de gegeven lijst van definities en stellingen redeneert en laat zien dat het vermoeden daaruit volgt;
- een **indirect bewijs** of **bewijs uit het ongerijmde** waarin je aanneemt dat het vermoeden niet waar is en laat zien dat dit in tegenspraak is met de lijst van definities en stellingen.

Voorbeeld 1

In een opgave in de **Uitleg** heb je het volgende bewezen:
‘Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig.’

Zet dit bewijs in de structuur van Gegeven, Te bewijzen, Bewijs.



Figuur 3.3

Antwoord

Gegeven:
Zie figuur; er zijn letters ingevoerd, de streepjes geven gelijke lijnstukken aan. $ABCD$ is een vierkant.
$AP = PB$, $CQ = QD$ en $DR = RA$

Te bewijzen:
$PR = QR$ en $\angle PRQ = 90°$.

Bewijs:
Omdat $AP = QD$ (halve zijde van vierkant $ABCD$), $DR = RA$ (gegeven) en $\angle A = \angle D = 90°$ zijn driehoeken APR en DQR congruent (ZHZ).
Dus is: $PR = QR$.

Omdat zowel ΔAPR als ΔDQR gelijkbenig en rechthoekig is, is:
$\angle ARP = \angle DRQ = 45°$ (hoekensom driehoek)
Dus is: $\angle PRQ = 180 - 45 - 45 = 90°$.

Q.e.d.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je een bewijs van de stelling: 'Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig'.

a Hoe wordt in dit bewijs gebruik gemaakt van 'Lijst van definities/stellingen in de vlakke meetkunde voor vwo wiskunde D'?

b Loop dit bewijs zelf na. Zorg ervoor dat je elke stap begrijpt.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt met behulp van congruentie bewezen dat ΔRPQ rechthoekig is. Je kunt dit ook bewijzen door gebruik te maken van de (omgekeerde) stelling van Pythagoras.

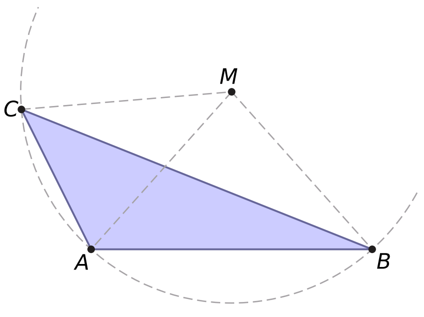
a Schrijf a als de lengte van de zijden van het vierkant en bewijs dat $PR^2 = QR^2 = \frac{1}{2}a^2$.

b Bewijs dat $PQ = a$.

c Bewijs nu met behulp van de omgekeerde stelling van Pythagoras dat ΔRPQ rechthoekig is.

Voorbeeld 2

Bewijs:
'Het middelpunt van een cirkel door de drie hoekpunten van een stomphoekige driehoek ligt niet binnen die driehoek.'



Figuur 3.4

Antwoord

Gegeven:
ΔABC met $\angle BAC > 90°$.
$MA = MB = MC$.

Te bewijzen:
M ligt niet binnen ΔABC.

Bewijs: (indirect)
Stel de stelling is niet waar, dus M ligt binnen ΔABC en $MA = MB = MC$.
De driehoeken ABM, BCM en CAM zijn dan gelijkbenig (stelling gelijkbenige driehoek).
Is nu $\angle ABM = \angle BAM = \alpha$, $\angle CBM = \angle BCM = \beta$ en $\angle CAM = \angle ACM = \gamma$, dan is $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$ (hoekensom driehoek).
Dus $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, zodat $\angle BAC = \alpha + \gamma < 90°$.

In tegenspraak met wat gegeven is. De stelling is dus waar.

Q.e.d.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** vind je een bewijs van een stelling over het middelpunt van een cirkel door de drie hoekpunten van een driehoek.

a Hoe construeer je de cirkel door de drie hoekpunten van een driehoek?

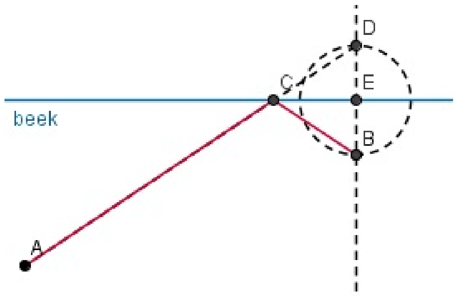
In het computerprogramma GeoGebra kun je de figuren die je bij een bewijs vaak wilt tekenen, gemakkelijk zelf construeren. Vaak kun je dan nog allerlei punten, lijnen en cirkels verplaatsen en bekijken wat daarvan het effect is.

b Construeer in GeoGebra nu een driehoek ABC en teken een cirkel door de drie hoekpunten. Bepaal het middelpunt M van die cirkel en bekijk wat er met M gebeurt als je de punten A, B en/of C verplaatst. (Zo maak je zelf de applet in het voorbeeld.)

c Kun je nog een andere vergelijkbare stelling formuleren en bewijzen?

Voorbeeld 3

Je ziet hoe de kortste weg van punt A naar punt B via de beek wordt geconstrueerd door een loodlijn door B op de beek te trekken. Vervolgens een punt D te tekenen dat op die loodlijn en even ver van de beek ligt. Het snijpunt C van AD en de beek levert de kortste route $AC + CB$.
Bewijs dat deze constructie juist is.



Figuur 3.5

Antwoord

Gegeven:
Uit de constructie volgt dat BD loodrecht staat op de beek, dus $\angle BEC = \angle DEC = 90°$. Verder is $BE = ED$ en lijn AD een rechte lijn.

Te bewijzen:
$AC + CB$ is de kortste afstand van A naar B via de beek.

Bewijs:
Uit de gegevens volgt meteen dan ΔCBE en ΔCDE congruent zijn (ZHZ).
Dus is $CD = CB$.
De punten A, C en D liggen op de rechte lijn AD en dus is $AC+CD$ de kortste afstand van A naar D. Immers als je via een ander punt dan C gaat, zeg C_1, dan is AD altijd korter dan $AC_1 + C_1D$ (driehoeksongelijkheid).
Dus $AC + CB = AC + CD$ is de kortste afstand.
Q.e.d.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** zie je het bewijs van de kortste verbinding via een lijn tussen twee punten A en B die aan dezelfde kant van die lijn liggen (maar er niet op).

Loop dit bewijs nog eens na, maak de constructie met GeoGebra.

Opgave 7

Gegeven is rechthoek $ABCD$ met diagonaal AC. Bewijs dat de loodlijn uit punt D op AC gelijk is aan de loodlijn uit punt B op AC.

a Teken een geschikte figuur of construeer hem in GeoGebra. Teken beide loodlijnen erin, noem ze DE en BF.

b Welke lijnstukken in je figuur moeten nu gelijk zijn?

c Kun je geschikte congruente driehoeken vinden?

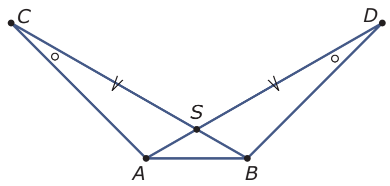
d Formuleer nu een volledig en duidelijk bewijs.

Verwerken

Opgave 8

In de figuur zie je twee driehoeken ABC en ABD getekend. Verder is $CS = DS$ en $\angle C = \angle D$.

Bewijs dat $AS = BS$.



Figuur 3.6

Opgave 9

Twee lijnstukken AB en CD zijn niet even lang en hebben een snijpunt S zo, dat $AS = SB$ en $CS = SD$.

Bewijs dat AC evenwijdig is aan BD.

Opgave 10

In ΔABC is $AB = AC$. D is het midden van AB, E het midden van AC.

Bewijs dat $BE = CD$.

Opgave 11

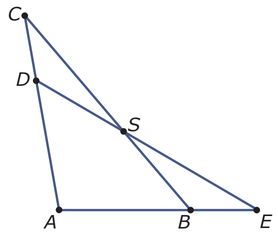
Op een lijn liggen, in deze volgorde, de punten A, D, B en C. P is geen punt op die lijn. Verder is gegeven dat $\angle APB = 2 \cdot \angle APD$.

Bewijs dat $\angle CPD = \frac{1}{2} \cdot (\angle CPB + \angle CPA)$.

Opgave 12

In de figuur zie je twee driehoeken ABC en AED getekend. Verder is $AB = AD$ en $AC = AE$.

Bewijs dat $\angle C = \angle E$.

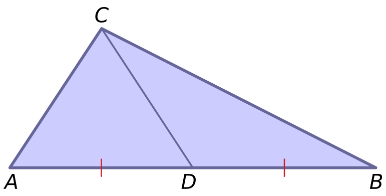


Figuur 3.7

Opgave 13

Gegeven is driehoek ABC waarbij $\angle ACB$ een stompe hoek is en D het midden is van AB.

Bewijs dat $|CD| < \frac{1}{2} \cdot |AB|$.

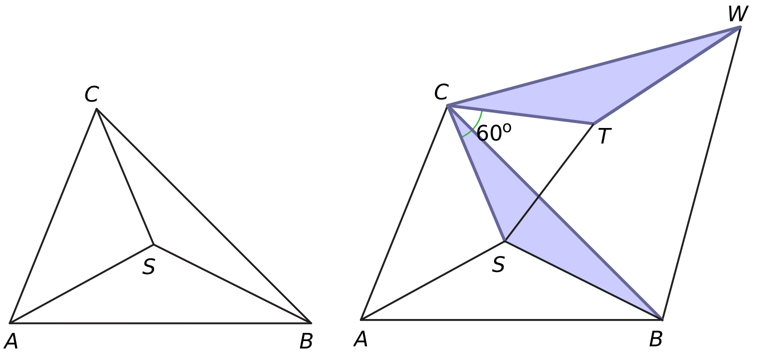


Figuur 3.8

Toepassen

Opgave 14: Het punt van Torricelli

Gegeven is een driehoek ABC waarvan de hoeken niet groter zijn dan $120°$. In deze opgave ga je op zoek naar een punt S binnen de driehoek, zodanig dat $|SA|+|SB|+|SC|$ minimaal is. Dit punt wordt ook wel het punt van Torricelli genoemd.



Figuur 3.9

a Als je driehoek BCS $60°$ draait om C tegen de klok in, krijg je de rechter figuur. De driehoeken BCS en WCT zijn dus congruent.

Bewijs dat het gezochte punt S op lijnstuk AW moet liggen.

b Je weet nu dat punt S op lijnstuk AW moet liggen. Geef door middel van een constructie aan waar dit punt moet liggen.

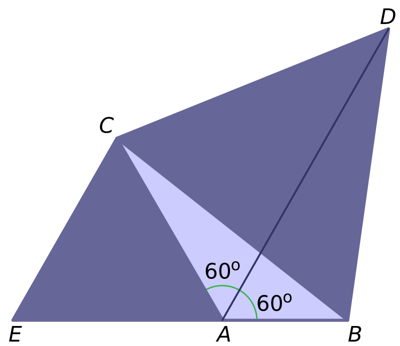
Opgave 15: Vanuit een stomphoekige driehoek

Gegeven is ΔABC. Op zijde BC is de gelijkzijdige driehoek CBD getekend. Lijnstuk AD verdeelt $\angle CAB$ in twee hoeken van $60°$.

Op zijde AC is ΔEAC getekend met $EA = AC$ en E ligt op het verlengde van BA.

Bewijs dat $AD = AB + AC$.

(naar: examen vwo wiskunde B in 2013, eerste tijdvak)



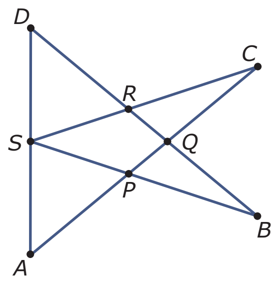
Figuur 3.10

Testen

Opgave 16

In de figuur hiernaast is gegeven $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ en punt S is het midden van lijnstuk AD.

Bewijs dat $AC = BD$.



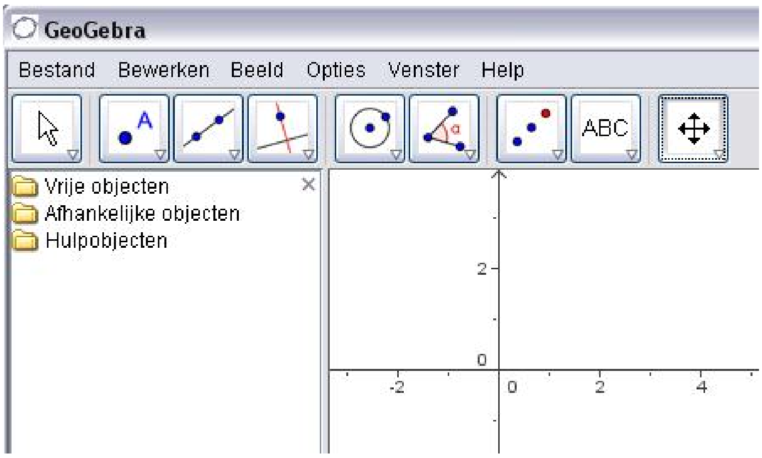
Figuur 3.11

Opgave 17

Bewijs dat in een gelijkbenige driehoek de lijnstukken vanuit de hoeken tegenover de gelijke benen en loodrecht op die benen even lang zijn.

Practicum: GeoGebra I

Bij vlakke meetkunde kun je constructies uitvoeren met behulp van **GeoGebra**. Je kunt dit (gratis) downloaden via **www.geogebra.org**. Installeer GeoGebra eerst, of werk online. Voor de iPad is er een GeoGebra-app.
Met dit programma maak je constructies m.b.v. de knoppen die je hier in beeld ziet. Links zie je het algebravenster met daarin alle objecten die je maakt. Rechts zie je het tekenvenster waarin je de objecten plaatst en construeert. Je kunt met of zonder rooster en/of assen werken, via het menu 'Beeld' zet je ze aan of uit.



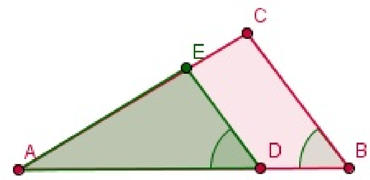
Figuur 3.12

Van elk object kun je door er met de rechter muisknop op te klikken allerlei eigenschappen aanpassen (kleur, dikte, etc.), de naam en de waarde aan/uitzetten, het object wel of niet tonen, etc. Je kunt geen bewijzen leveren met GeoGebra, wel bekijken welke eigenschappen een figuur blijft houden ook als je punten, lijnen, cirkels verplaatst of draait. Zo krijg je vermoedens die je dan weer moet bewijzen...

2.4 Gelijkvormigheid

Inleiding

Hier zie je twee gelijkvormige driehoeken ABC en ADE. Van gelijkvormigheid kun je bij bewijzen (en berekeningen) vaak goed gebruik maken. Maar wanneer zijn twee driehoeken nu precies gelijkvormig?



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- gelijkvormige driehoeken herkennen;
- bewijzen leveren met de gelijkvormigheidskenmerken.

Voorkennis

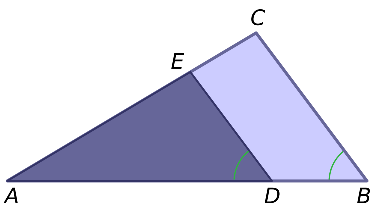
- eenvoudige bewijzen leveren vanuit de lijst met definities/ stellingen voor Vlakke Meetkunde.
- gebruik maken van congruentie en de congruentiekenmerken van driehoeken.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je twee gelijkvormige driehoeken ABC en ADE. Van gelijkvormigheid kun je bij bewijzen (en berekeningen) vaak goed gebruik maken. Maar wanneer zijn twee driehoeken nu precies gelijkvormig?

Kun je gelijkvormigheidskenmerken formuleren op dezelfde wijze als de congruentiekenmerken?

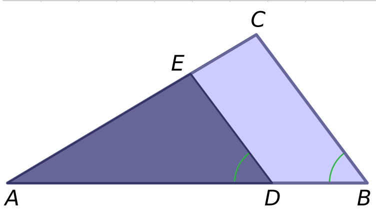


Figuur 4.2

Uitleg

Bekijk de applet: Gelijkvormige driehoeken.

Twee driehoeken heten ‘gelijkvormig’ als de ene driehoek een vergroting of verkleining is van de andere driehoek.
Je ziet twee driehoeken ABC en ADE.
$\angle BAC = \angle DAE$ want ze vallen samen.
Ook geldt $\angle ABC = \angle ADE$ (gegeven door beide boogjes).



Figuur 4.3

Je kunt $|AD|$ vermenigvuldigen met een zodanige factor k dat hij gelijk wordt aan $|AB|$. Omdat de hoeken gelijk blijven wordt dan ook $|AC| = k \cdot |AE|$ en $|DE| = k \cdot |BC|$. En dus is ΔABC een vergroting van ΔADE.

Het gelijkvormigheidskenmerk dat je nu hebt gebruikt is hh: beide driehoeken zijn gelijkvormig als hun hoeken gelijk zijn.

Je ziet, dat daaruit automatisch volgt dat ook hun zijden gelijke verhoudingen hebben: $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|} = k$. Ook die gelijke verhoudingen van zijden kun je als kenmerk voor gelijkvormigheid gebruiken.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt een begin gemaakt met de gelijkvormigheidskenmerken. Bekijk de driehoeken ABC en ADE in de figuur.

a Waarom wordt het gebruikte gelijkvormigheidskenmerk aangeduid met hh en niet met hhh?

b Met welke factor moet je $|AD|$ vermenigvuldigen om $|AB|$ te krijgen?

c Leg uit, waarom je $|AC|$ krijgt door $|AE|$ met diezelfde factor te vermenigvuldigen.

Een ander gelijkvormigheidskenmerk wordt aangeduid met zhz: beide driehoeken hebben één gelijke hoek en de zijden op de benen van die hoek hebben dezelfde verhoudingen.

d Waarom levert het kenmerk zhz twee gelijkvormige driehoeken op?

Opgave 2

Zijn congruente driehoeken altijd gelijkvormig? Geldt het omgekeerde ook?

Theorie en voorbeelden

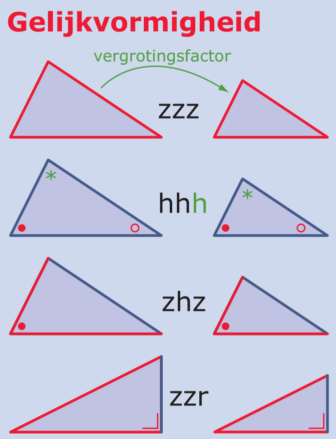
Om te onthouden

Twee driehoeken heten **gelijkvormig** als de ene driehoek een vergroting of verkleining is van de andere driehoek. Ze hebben dan dezelfde hoeken en de verhoudingen van hun zijden zijn gelijk.

Of twee driehoeken gelijkvormig zijn, volgt uit deze **gelijkvormigheidskenmerken**. Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- de verhoudingen van de zijden (zzz);
- één paar hoeken en de verhouding van de omliggende zijden (zhz);
- twee paren hoeken (hh);
- één rechte hoek en de verhouding van twee niet omliggende zijden (zzr).

Een paar zijden (hoeken) betekent hier steeds een zijde (hoek) van de ene driehoek en de overeenkomstige zijde (hoek) van de andere driehoek. Deze gelijkvormigheidskenmerken staan ook op de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**. Merk op dat er kleine letters worden gebruikt om er naar te verwijzen in tegenstelling tot de congruentiekenmerken.
De gelijkvormigheidskenmerken zijn af te leiden uit de congruentiekenmerken.



Figuur 4.4

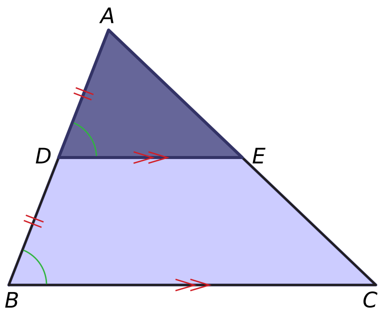
Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Middenparallel.

Bewijs:

De lengte van een lijnstuk vanuit het midden van een zijde van een driehoek en evenwijdig met een andere zijde van die driehoek is gelijk aan de helft van de lengte van de zijde waaraan het evenwijdig is.

Zo'n lijnstuk heet een ‘middenparallel’ in de gegeven driehoek.



Figuur 4.5

Antwoord

Gegeven:
D is het midden van AB en $DE // BC$.

Te bewijzen:

$|DE| = \frac{1}{2}|BC|$

Bewijs:
Omdat $DE // BC$ is $\angle ADE = \angle ABC$ en $\angle DEA = \angle BCA$ (F-hoeken)
Dus zijn ΔABC en ΔADE gelijkvormig (hh).
De zijden van beide driehoeken hebben daarom dezelfde verhoudingen, namelijk $1 : 2$. En dus is $|DE| = \frac{1}{2}|BC|$.

Q.e.d.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** wordt de stelling bewezen dat een middenparallel binnen een driehoek de helft is van de zijde waaraan hij evenwijdig is.

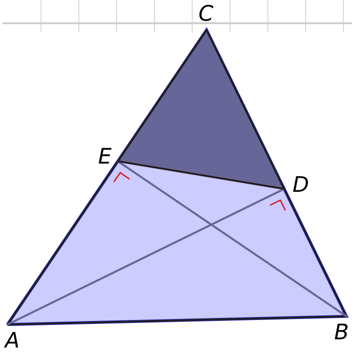
a Loop het bewijs na. Welk gelijkvormigheidskenmerk wordt gebruikt?

b Neem de driehoek uit het voorbeeld over en teken de lijnstukken BE en CD. Deze lijnstukken snijden elkaar in punt S. Welke twee gelijkvormige driehoeken ontstaan nu?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

In ΔABC zijn de hoogtelijnen AD en BE getrokken. Bewijs dat ΔDEC gelijkvormig is met ΔABC.



Figuur 4.6

Antwoord

Gegeven:
$\angle ADC = \angle BEC = 90°$

Te bewijzen:
ΔDEC is gelijkvormig met ΔABC.

Bewijs:
Omdat $\angle ADC = \angle BEC = 90°$ en $\angle C = \angle C$ zijn ΔADC en ΔBEC gelijkvormig (hh).

En daarom is $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|CB|}$.
Vanwege deze gelijke verhoudingen en $\angle C = \angle C$ zijn ΔABC en ΔDEC gelijkvormig (zhz).

Q.e.d.

Opgave 4

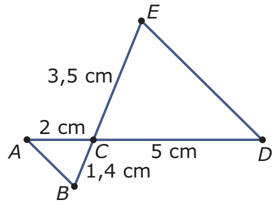
Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Maak een verhoudingstabel van de zijden van de driehoeken ABC en DEC. Ga na, dat bij deze tabel ook inderdaad $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|CB|}$ past.

b Gegeven is $|AB| = 6$, $|BC| = 4$ en $|ED| = 2{,}5$. Welke van beide andere zijden van ΔDEC kun je met deze gegevens berekenen? Voer die berekening uit.

Opgave 5

Hier zie je twee driehoeken, namelijk ΔABC en ΔCDE.



Figuur 4.7

a Met welk gelijkvormigheidskenmerk toon je aan dat beide gelijkvormig zijn? Je noteert dit wel zo: $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

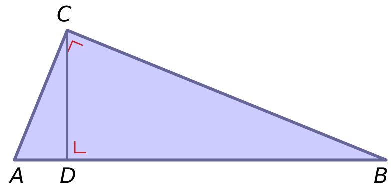
b Wat kun je op grond daarvan zeggen over de zijden AB en DE?

c Neem aan, dat $|AB| = 1{,}8$ cm. Hoe lang is dan DE?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

ΔABC heeft in C een rechte hoek.
Bewijs dat $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$. Dit is de stelling van Pythagoras.



Figuur 4.8

Antwoord

Gegeven:
$\angle ACB = 90°$. Je tekent hoogtelijn CD, dus ook
$\angle ADC = \angle CDB = 90°$.

Te bewijzen:
$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$

Bewijs:
De driehoeken ABC, CBD en ACD zijn gelijkvormig (hh). De verhoudingen van hun zijden zijn daarom gelijk, dus je kunt deze verhoudingstabel maken.

ΔABC	$\lvert AB \rvert$	$\lvert BC \rvert$	$\lvert AC \rvert$
ΔCBD	$\lvert CB \rvert$	$\lvert BD \rvert$	$\lvert CD \rvert$
ΔACD	$\lvert AC \rvert$	$\lvert CD \rvert$	$\lvert AD \rvert$

Tabel 4.1

Hieruit kun je afleiden:
$|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$ en $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$
Dus:
$|AC|^2+|BC|^2 = |AB|\cdot|BD|+|AB|\cdot|AD| = |AB|\cdot(|BD|+|AD|) = |AB|^2$.

Q.e.d.

Je ziet een geheel nieuw bewijs van de stelling van Pythagoras.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** vind je een ander bewijs van de stelling van Pythagoras.

a Neem aan dat $|AC| = 5$ en $|BC| = 12$. Bereken de lengte van CD.

b Bewijs dat in een rechthoekige driehoek het kwadraat van de hoogtelijn op de hypotenusa gelijk is aan het product van de lengtes waarin hij die hypotenusa verdeelt.

Opgave 7

Gegeven is een driehoek ABC en een punt S in de driehoek. A' ligt op het verlengde van AS, waarbij $|SA'| = 2|SA|$. Net zo ligt B' op het verlengde van BS met $|SB'| = 2|SB|$ en C' op het verlengde van CS met $|SC'| = 2|SC|$.

a Maak een tekening.

b Met welk kenmerk kun je aantonen dat $\Delta SAB \sim \Delta SA'B'$?

c Wat concludeer je over $|A'B'|$? Wat gaat natuurlijk net zo?

d Met welk kenmerk kun je aantonen dat $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$?

e Hoe belangrijk is de factor 2 in het gegeven? Had die factor ook kleiner dan 1 mogen zijn?

f Formuleer op grond van het bovenstaande een stelling. Maak hem zo algemeen mogelijk.

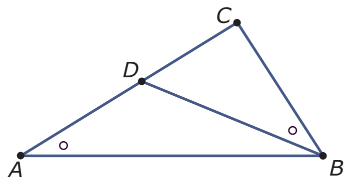
Verwerken

Opgave 8

In deze figuur is $\angle BAD = \angle DBC$, $|AB| = 10$, $|AC| = 8$ en $|BC| = 5$.

a Welke twee gelijkvormige driehoeken zijn er? Bewijs de gelijkvormigheid.

b Bereken de lengte van DB.



Figuur 4.9

Opgave 9

Op een been van een hoek met hoekpunt A ligt een punt B en op het andere been ligt een punt C. $AB = 12$ cm en $AC = 20$ cm. Op het verlengde van BA ligt een punt D met $AD = 5$ cm en op het verlengde van CA ligt een punt E zo, dat $\angle EDA = \angle BCA$.

Bereken de lengte van AE.

Opgave 10

Teken in een willekeurige scherphoekige driehoek ABC een loodlijn AD vanuit A op zijde BC en een loodlijn BE vanuit B op zijde AC. Het snijpunt van deze loodlijnen is S.

Bewijs dat $|AS| \cdot |SD| = |BS| \cdot |SE|$.

Opgave 11

Vierhoek $ABCD$ is een ruit. De punten P, Q, R en S zijn de middens van de zijden van die ruit.

Bewijs met behulp van gelijkvormigheid dat $PQRS$ een rechthoek is.

Opgave 12

Bewijs dat je elke driehoek in vier gelijke delen kunt verdelen met behulp van drie middenparallellen.

Opgave 13

In een driehoek ABC wordt op AC een punt P_0 gekozen zo, dat $|AP_0| : |AC| = 1 : 5$. Dan wordt vanuit P_0 een lijn evenwijdig aan BC getrokken naar P_1 op AB. Vervolgens vanuit P_1 een lijn evenwijdig aan CA naar P_2 op BC en vanuit P_2 een lijn evenwijdig aan AB naar P_3 op CA. Met P_3 in plaats van P_0 worden net zo weer drie lijnen getrokken, naar P_4 op AB, P_5 op BC en naar P_6 op CA.

a Teken de situatie. Welk vermoeden levert een tekening over de ligging van P_6?

b Bewijs dat vermoeden.

Aanwijzing: In welke verhouding verdelen de punten P de zijden van de driehoek?

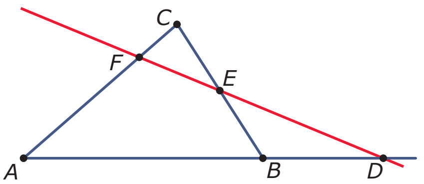
Toepassen

Opgave 14: De stelling van Menelaos

De drie (verlengde) zijden van een driehoek ABC worden gesneden door een lijn m. Het snijpunt van (het verlengde van) AB met m is punt D, het snijpunt van (het verlengde) van BC met m is punt E en het snijpunt van (het verlengde) van AC met m is punt F.

Bewijs dat nu geldt: $\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BE|}{|CE|} \cdot \frac{|CF|}{|AF|} = 1$.

Dit is een variant van een uitgebreidere **stelling** die wordt toegeschreven aan Menelaos van Alexandrië (70—140 na Chr.).



Figuur 4.10

a In de getekende situatie ligt alleen D op het verlengde van AB. Lever eerst voor deze situatie het bewijs.

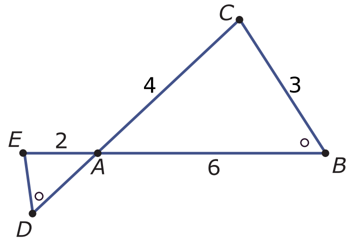
b Teken nu een situatie waarin niet alleen D op het verlengde van AB, maar ook E op het verlengde van BC en F op het verlengde van AC ligt. Lever ook voor die situatie een bewijs.

Testen

Opgave 15

In de figuur hiernaast zie je twee lijnstukken EB en DC die elkaar snijden in A. Verder is gegeven $\angle B = \angle D$.

Bereken de lengte van AD en die van ED.



Figuur 4.11

Opgave 16

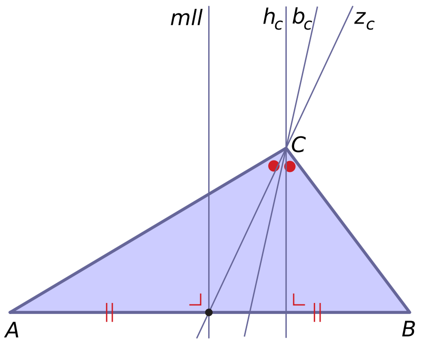
In driehoek ABC is D het midden van BC en E het midden van AC. De lijnstukken BE en AD snijden elkaar in S.

Bewijs dat $|AS| : |SD| = |BS| : |SE| = 2 : 1$.

2.5 Bijzondere lijnen

Inleiding

Je ziet hier in een ΔABC de hoogtelijn uit C, de zwaartelijn uit C, de bissectrice (deellijn) van $\angle C$ en de middelloodlijn van AB. Verander je de driehoek, dan kunnen een aantal van deze lijnen gaan samenvallen. Verder kun je in elke driehoek drie van elk van die soorten lijn(stukk)en tekenen.
Welke eigenschappen hebben ze?



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- de namen van enkele bijzondere lijnen in driehoeken;
- deze lijnen construeren;
- eigenschappen van deze bijzondere lijnen en daarmee bewijzen leveren.

Voorkennis

- eenvoudige bewijzen leveren vanuit de lijst met definities/stellingen voor Vlakke Meetkunde.
- gebruik maken van congruentie en gelijkvormigheid van driehoeken.

Verkennen

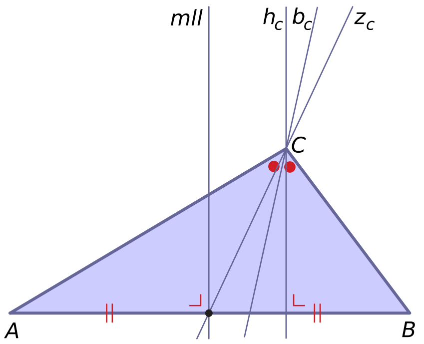
Opgave V1

Je ziet hier in een ΔABC de hoogtelijn uit C, de zwaartelijn uit C, de bissectrice (deellijn) van $\angle C$ en de middelloodlijn van AB. Verander je de driehoek, dan kunnen een aantal van deze lijnen gaan samenvallen. Verder kun je in elke driehoek drie van elk van die soorten lijn(stukk)en tekenen.

Bekijk de figuur nog eens.

a Bij welke soort driehoeken vallen de vier getekende lijnen samen?

b Kun je een driehoek maken waarbij alleen de bissectrice uit C en de hoogtelijn uit C samenvallen?



Figuur 5.2

Uitleg

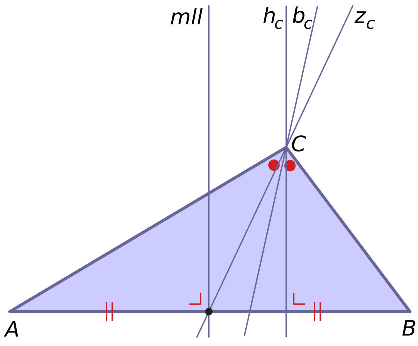
Bekijk de applet: Bijzondere lijnen in een driehoek.

Je ziet in een ΔABC de hoogtelijn uit C, de zwaartelijn uit C, de bissectrice (deellijn) van $\angle C$ en de middelloodlijn van AB. Verander je de driehoek, dan kunnen een aantal van deze lijnen gaan samenvallen.
Allereerst moet goed worden vastgelegd wat je onder elk van deze lijnen verstaat. Er zijn nog meer bijzondere lijnen, bijvoorbeeld de middenparallel. De definitie hiervan staat beschreven in de theorie.

Merk op dat de vier getekende lijnen alleen samenvallen als $AC = BC$, dus als ΔABC gelijkbenig is met tophoek C. Dit zijn eigenlijk twee stellingen:

- Als in een ΔABC de hoogtelijn uit C, de zwaartelijn uit C, de bissectrice (deellijn) van $\angle C$ en de middelloodlijn van AB samenvallen is $AC = BC$.
- Als in een ΔABC geldt dat $AC = BC$ dan vallen de hoogtelijn uit C, de zwaartelijn uit C, de bissectrice (deellijn) van $\angle C$ en de middelloodlijn van AB samen.

Je zegt wel dat het samenvallen van de vier genoemde lijnen en de eigenschap $AC = BC$ 'equivalent of gelijkwaardig' zijn. Dit is alleen het geval als van een stelling ook zijn omgekeerde waar is.



Figuur 5.3

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je een zwaartelijn in een driehoek ABC.

a Teken een driehoek ABC met daarin alle drie de zwaartelijnen.

b Gaan de drie zwaartelijnen door één punt?

Opgave 2

Bewijs: 'Als in een driehoek de hoogtelijn en de zwaartelijn uit hetzelfde hoekpunt samenvallen, dan is die lijn ook bissectrice van deze hoek en is de driehoek gelijkbenig.'

Opgave 3

Bewijs de volgende stellingen over hoogtelijnen, zwaartelijnen en bissectrices in een gelijkbenige driehoek.

a In een gelijkbenige driehoek zijn er twee even lange hoogtelijnen.

b In een gelijkbenige driehoek zijn er twee even lange zwaartelijnen.

c In een gelijkbenige driehoek zijn er twee even lange bissectrices.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De definities van een aantal bijzondere lijnen zijn:

- De **middelloodlijn** van een lijnstuk is de lijn die het lijnstuk loodrecht middendoor snijdt.
- De **bissectrice** of **deellijn** van een hoek is de halve lijn die de hoek middendoor deelt.
- De **middenparallel** van twee evenwijdige lijnen is de lijn die evenwijdig aan de twee lijnen is en midden tussen deze twee lijnen ligt. In een driehoek wordt een lijnstuk evenwijdig aan een zijde en door de middens van de andere twee zijden ook zo genoemd.
- Een **hoogtelijn** van een driehoek is de lijn door een hoekpunt van de driehoek die de lijn door de tegenoverliggende zijde loodrecht snijdt.
- Een **zwaartelijn** van een driehoek is de lijn door een hoekpunt van de driehoek die door het midden van de tegenoverliggende zijde gaat.

Deze definities staan ook op de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**.

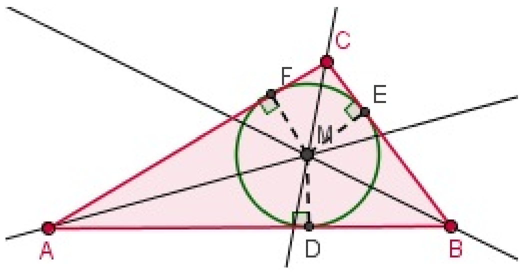
In een driehoek kun je drie middelloodlijnen, drie bissectrices, drie zwaartelijnen, drie hoogtelijnen en ook drie middenparallellen tekenen. Bij bepaalde driehoeken vallen meerdere van die lijnen samen, vaak gaan ze door één punt. Ze hebben bepaalde eigenschappen die je met behulp van congruentie en gelijkvormigheid kunt bewijzen.

Als van een stelling ook het omgekeerde waar is, dan noemen we die stelling en zijn omgekeerde **gelijkwaardig** of **equivalent**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Bissectrices.

Bewijs dat de bissectrices van de drie hoeken van een driehoek elkaar in één punt snijden en dat dit punt gelijke afstanden heeft tot elk van de zijden van de driehoek.



Figuur 5.4

Antwoord

Gegeven:
Zie de figuur, geconstrueerd in GeoGebra. AM en BM zijn bissectrices; CM is de lijn door C en M.

Te bewijzen:
$MD = ME = MF$ en lijn CM is bissectrice.

Bewijs:
Omdat AM bissectrice van $\angle A$ is, geldt: $\angle DAM = \angle FAM$. Verder is $AM = AM$ en $\angle ADM = \angle AFM = 90°$. Dus zijn ΔDAM en ΔFAM congruente driehoeken (ZHH).
Dit betekent $MD = MF$.
Op vergelijkbare wijze is $MD = ME$.
Omdat $CM = CM$, $MF = ME$ en $\angle CEM = \angle CFM = 90°$ zijn ΔCEM en ΔCFM congruent (ZZR).
En dus is $\angle ECM = \angle FCM$ en CM bissectrice van $\angle C$.

Q.e.d.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt bewezen dat de drie bissectrices van een driehoek ABC door één punt gaan.

a Loop het bewijs na. Welke congruentiekenmerken worden gebruikt?

b Waarom kun je een cirkel tekenen met middelpunt M die precies alle drie de zijden van ΔABC raakt?

Opgave 5

Teken (met 'GeoGebra' of maak een paar voorbeelden) een driehoek ABC met daarin de drie middelloodlijnen van de zijden.

a Bewijs dat deze drie middelloodlijnen door één punt M gaan.

b Ligt punt M altijd binnen de driehoek? Wanneer wel en wanneer niet?

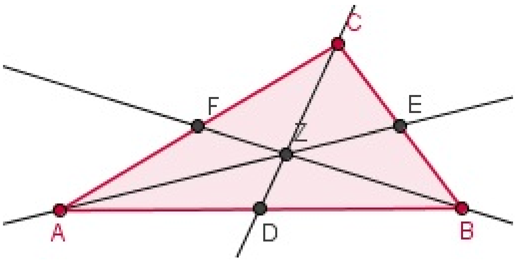
c Waarom kun je een cirkel met middelpunt M door de hoekpunten van de driehoek tekenen?

d Waarom kun je door drie willekeurige punten die niet op één rechte lijn liggen altijd een cirkel tekenen?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Zwaartelijnen.

Bewijs dat de zwaartelijnen van een driehoek elkaar in één punt snijden en dat dit punt de zwaartelijnen verdeelt in stukken die zich verhouden als $1 : 2$.



Figuur 5.5

Antwoord

Gegeven:
Zie de figuur, geconstrueerd in GeoGebra.
AE, BF en CD zijn zwaartelijnen, dus $BE = EC$, $AF = FC$ en $AD = DB$. Z is het snijpunt van AE en BF.

Te bewijzen:
CD gaat door Z en $FZ : ZB = EZ : ZA = DZ : ZC = 1 : 2$.

Bewijs:
$CA = 2 \cdot CF$ en $CB = 2 \cdot CE$, dus ΔABC is gelijkvormig met ΔFEC (zhz). Dit betekent: $AB = 2 \cdot FE$ en $AB // FE$. Hieruit volgt: $\angle BAE = \angle AEF$ en $\angle ABF = \angle BFE$ (Z-hoeken). En dus is ΔABZ gelijkvormig met ΔEFZ (hh).
Omdat $AB = 2 \cdot FE$ is $FZ : ZB = 1 : 2 = EZ : ZA$. De zwaartelijnen AE en BF verdelen elkaar dus in de verhouding $1 : 2$.
Eenzelfde redenering geldt voor bijvoorbeeld de zwaartelijnen AE en CD. En dus moet CD wel door punt Z gaan. Alle drie de zwaartelijnen gaan door één punt Z, het zwaartepunt van de driehoek.

Q.e.d.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt bewezen dat de drie zwaartelijnen van een driehoek ABC door één punt gaan. In deze opgave ga je bewijzen dat de drie hoogtelijnen door één punt gaan.

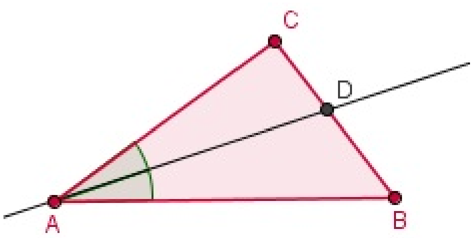
a Teken een driehoek ABC met daarin de drie hoogtelijnen.

b Bewijs dat die drie hoogtelijnen door één punt gaan. Teken daartoe ΔDEF door een lijn door A en evenwijdig BC, door B en evenwijdig AC en door C een lijn evenwijdig aan AB te trekken.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Bewijs dat de bissectrice van een hoek in een driehoek de tegenoverliggende zijde verdeelt in stukken die zich verhouden als de zijden op de benen van die hoek.



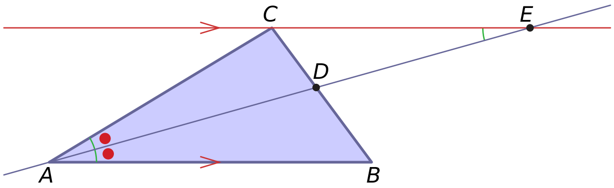
Figuur 5.6

Antwoord

Gegeven:
$\angle BAD = \angle CAD$, zie de figuur, geconstrueerd in GeoGebra.

Te bewijzen:
$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

Bewijs:
Trek een lijn door C evenwijdig met AB.



Figuur 5.7

Punt E is het snijpunt van de bissectrice met deze lijn.
Nu is $\angle CED = \angle BAD$ (Z-hoeken) en $\angle BAD = \angle CAD$ (gegeven) dus is $AC = CE$ (gelijkbenige driehoek AEC).

Verder zijn de driehoeken ABD en ECD gelijkvormig (hh).

Dus: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

Q.e.d.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3** het bewijs dat een bissectrice van een hoek in een driehoek de overstaande zijde in stukken verdeelt met dezelfde verhouding als de zijden op de benen van die hoek.

a Voer zelf dit bewijs uit voor de bissectrice van $\angle C$.

b Stel je voor dat in ΔABC geldt: $|AB| = 8$, $|BC| = 4$ en $|AC| = 6$. BD is de bissectrice van $\angle B$. Bereken de lengtes van AD en CD.

Verwerken

Opgave 8

A en B zijn punten van een cirkel. Bewijs dat de middelloodlijn van AB door het middelpunt M van de cirkel gaat.

Opgave 9

In ΔABC is h_A de lengte van de hoogtelijn uit A op BC en h_B die op AC.

$|BC| = a$ en $|AC| = b$.

a Bewijs met gelijkvormigheid dat: $h_A : h_B = b : a$.

b Bewijs deze stelling ook door formules voor de oppervlakte van een driehoek te gebruiken.

Opgave 10

Hoe kun je met behulp van middelloodlijnen het middelpunt van een cirkel vinden?

Opgave 11

Bewijs: 'Een driehoek die twee zwaartelijnen van gelijke lengte heeft is gelijkbenig.'
(Je kunt hier werken met de stelling dat de zwaartelijnen in een driehoek elkaar verdelen in een verhouding van 1 : 2.)

Opgave 12

Een hoek in een driehoek heeft twee buitenhoeken. Dat zijn de hoeken met de verlengde van de zijden. De hoek zelf en een buitenhoek zijn dus samen altijd $180°$. De bissectrice van een buitenhoek heet de buitenbissectrice van die hoek.

a Bewijs dat bij een driehoek ABC de bissectrice van $\angle A$ en de buitenbissectrices bij B en C door één punt gaan.

b Bewijs dat de bissectrice van de hoek loodrecht staat op de buitenbissectrice van de bijbehorende buitenhoek.

c Bewijs: ‘Als in een hoekpunt van een driehoek de buitenbissectrice loodrecht staat op de zwaartelijn vanuit dat hoekpunt, dan is de driehoek gelijkbenig’.

Toepassen

Opgave 13: Bissectrice in parallellogram

Gegeven is een parallellogram $ABCD$. De bissectrice van hoekpunt A snijdt CD in E en het verlengde van BC in F.

Bewijs dat ΔECF een gelijkbenige driehoek is.

Testen

Opgave 14

In ΔABC is D het snijpunt van de hoogtelijn uit A op BC en E het snijpunt van de hoogtelijn uit B op AC.
Gegeven is: $\angle A > 90°$.

Bewijs dat $\angle ABC = \angle DEC$.

Opgave 15

Van een driehoek is gegeven dat voor twee van zijn zijden geldt: hun middelloodlijn gaat door het overstaande hoekpunt.

Toon aan dat de driehoek gelijkzijdig is.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Redeneren en bewijzen** doorgewerkt. Je werkt bij redeneren en bewijzen in de vlakke meetkunde vanuit de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**. Naar de stellingen en definities die daar op staan kun je verwijzen. De lijst bevat meer zaken dan in dit onderwerp aan de orde zijn geweest, omdat hij is gemaakt in een tijd dat er op dit gebied meer zaken binnen het wiskundeprogramma vielen.
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- definitie — vermoeden — axioma — bewijs (uit het ongerijmde)
- congruentie — congruentiekenmerken driehoeken — driehoeksongelijkheid
- gegeven, te bewijzen, bewijs als structuur van een bewijs — direct en indirect (uit het ongerijmde) bewijs
- gelijkvormigheid — gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken
- hoogtelijn, zwaartelijn, bissectrice (deellijn), loodlijn, middelloodlijn, middenparallel (in driehoeken)

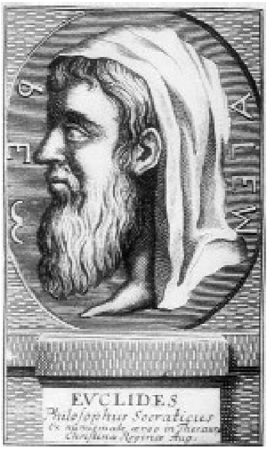
Activiteitenlijst

- eenvoudige bewijzen leveren vanuit basisdefinities en axioma's
- congruentiekenmerken van driehoeken gebruiken in bewijzen
- bewijzen leveren volgens een vaste structuur
- werken met gelijkvormige driehoeken in bewijzen
- de eigenschappen van bijzondere lijnen bewijzen

Achtergronden

De oorsprong van de meetkunde ligt in praktische problemen: begrippen als afstand, rechte lijn, hoek, omtrek, oppervlakte had men nodig bij landmeting, bij het bouwen (van piramides) en bij het begrijpen en voorspellen van de stand van planeten en sterren. De Griek **Euclides (omstreeks 300 v.Chr.)** bouwde voort op eerder werk van **Thales (624—547 v.Chr.)** en **Pythagoras (580—500??? v.Chr.)**. Hij was de eerste die in zijn werk 'De Elementen' een systematische opbouw nastreefde.

- Hij legde de grondbegrippen vast in definities.
- Hij ging uit van een klein aantal aannames die hij proposities (of axioma's) noemde.
- Hij gebruikte enkele algemene inzichten.



Figuur 6.1

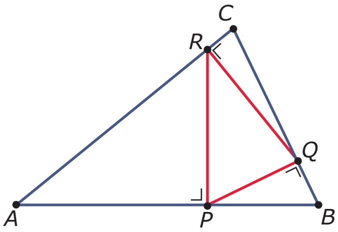
Al deze beweringen dienden als fundament voor zijn meetkunde. Ze werden als vanzelfsprekend beschouwd.
Alle volgende beweringen (stellingen) moesten door een logische redenering (een bewijs) daaruit, of uit al eerder bewezen stellingen, worden afgeleid. Dat geeft de garantie dat je die stellingen

kunt toepassen in elke praktijksituatie waarin het fundament geldt. Een bewijs van (bijvoorbeeld) de stelling van Pythagoras geeft je de zekerheid dat je die stelling kunt gebruiken bij elke rechthoekige driehoek.
Ook Babyloniërs en Egyptenaren kenden enige wiskunde, maar hun redeneringen gingen altijd over concrete voorbeelden ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Het gebruik van variabelen ($a^2 + b^2 = c^2$) kenden zij niet.

Testen

Opgave 1

Bekijk de figuur.
Bewijs dat ΔPQR gelijkvormig is met ΔABC.



Figuur 6.2

Opgave 2

Gegeven is een driehoek ABC. Op AC wordt een gelijkzijdige driehoek ACD en op BC wordt een gelijkzijdige driehoek BCE gemaakt. $\angle ACD = \angle BCE$ en beide gelijkzijdige driehoeken overlappen driehoek ABC niet.

Bewijs dat $|BD| = |AE|$.

Opgave 3

l, m en n zijn drie evenwijdige lijnen met m tussen l en n. De lijn s staat loodrecht op l en snijdt l, m en n in respectievelijk A, B en C. $|AB| : |BC| = 1 : 3$. Je gaat bewijzen dat van elke lijn die de drie lijnen snijdt het stuk tussen l en n door m verdeeld wordt in stukken die zich verhouden als $1 : 3$.

a Bewijs eerst dat s ook m en n loodrecht snijdt.

b Bekijk een lijn t die ook loodrecht op l staat. Geef voor dat geval een bewijs. Gebruik rechthoeken, hulplijnen, congruentie en gelijkvormigheid.

c Neem nu een lijn die niet loodrecht op l staat. Geef voor dat geval een bewijs, gebruik hulplijnen.

Opgave 4

Ga uit van een rechthoekige driehoek ABC met $\angle A = 90°$. Op BC ligt punt D zo, dat $AD = AC$. Lijnstuk DE staat loodrecht op AD en punt E ligt op AB.

Bewijs dat $ED = EB$.

Opgave 5

Gegeven is een gelijkbenige driehoek ABC met $|AB| = |AC| = 8$ en $|BC| = 4$.

Bereken de straal van de ingeschreven cirkel (dat is de cirkel die alle zijden van de driehoek raakt).

Opgave 6

In ΔABC zijn AD, BE en CF de hoogtelijnen.

Bewijs dat deze hoogtelijnen bissectrices zijn in ΔDEF.

Toepassen

Opgave 7: Constructies met passer en liniaal

Constructies met passer en liniaal waren bij de Oude Grieken zeer geliefd. In feite vonden ze dat iets alleen kon bestaan als het met passer en liniaal kon worden geconstrueerd. En daardoor ontstonden belangrijke vraagstukken...

Een loodlijn van een punt P op een lijn l construeer je door eerst een cirkel met middelpunt P te maken, zo groot dat hij l in twee punten snijdt. Noem die punten A en B. Vervolgens maak je met middelpunt A en daarna met middelpunt B een even grote cirkel. Het snijpunt van die cirkels is S. En PS staat loodrecht op l.

a Bewijs dat PS loodrecht op l staat.

De middelloodlijn van lijnstuk AB construeer je door twee even grote cirkels met middelpunten A en B met elkaar te snijden. (De straal van deze cirkels moet groter zijn dan de helft van de lengte van lijnstuk AB). Als hun snijpunten P en Q zijn is lijn PQ de middelloodlijn van AB.

b Bewijs dat PQ de middelloodlijn van AB is.

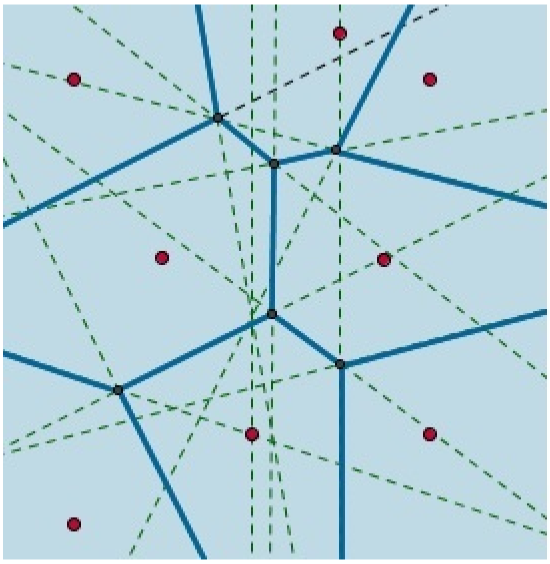
Voor de constructie van de bissectrice van $\angle A$ met benen l en m, ga je als volgt te werk.
Open de passer een stukje en beschrijf een cirkel met middelpunt A. Die snijdt l en m, zeg in B respectievelijk C (je hoeft daarvoor niet de hele cirkel te tekenen). Zonder de stand van de passer te veranderen maak je nu een cirkel met middelpunt B en een met middelpunt C en bepaalt hun snijpunt D. Dan is AD de gezochte bissectrice.

c Bewijs dat AD een bissectrice is.

Opgave 8: Voronoi-diagrammen

Bij mobiele telefonie wordt contact gemaakt met de dichtstbij zijnde antenne die de telefoon herkent. Om elke antenne bestaat een gebied waarvan de punten juist tot deze antenne de kortste afstand hebben. De grenzen van deze gebieden zijn (stukken van) middelloodlijnen. Je spreekt wel van een **voronoidiagram**...

Hier zie je een hoe een voronoidiagram met 8 'antennes' (de rode punten) kan worden geconstrueerd. Volgens het **naaste-buur-principe** bestaat het gebied rond elke antenne uit punten waarvoor die antenne dichterbij is dan elke andere. De grenzen van die gebieden liggen telkens evenver van twee antennes af, het zijn daarom (delen van) de middelloodlijnen van lijnstukken tussen die twee antennes.



Figuur 6.3

Voronoidiagrammen zijn bedacht door de Russische wiskundige (van Oekraïense afkomst) Georgy F. Voronoi (1868—1908). Meer lezen over voronoidiagrammen en hun toepassingen, of ze snel maken? Ga naar

- **Wikipedia: Voronoi-diagram**
- **Voronoi diagram Wolfram MathWorld**
- **Voronoi-applet**

a Teken een voronoidiagram met 3 punten. In welke situatie gaan de drie grenslijnen niet door één punt?

b Je wilt een voronoidiagram maken met 4 punten. Hoeveel middelloodlijnen spelen er dan een rol?

c Teken drie voronoidiagrammen met 4 punten, bij één ervan gaan de grenslijnen door één punt, bij een andere lopen alle grenslijnen evenwijdig en bij de derde zijn de punten volstrekt willekeurig gekozen.

Opgave 9: De rechte van Euler

Teken je in een driehoek het snijpunt H van de hoogtelijnen, het snijpunt Z van de zwaartelijnen en het snijpunt M van de middelloodlijnen, dan blijken die drie punten op één rechte lijn te liggen, de zogenaamde rechte van Euler.

Bekijk de applet: Rechte van Euler.

Probeer een bewijs te vinden voor deze stelling. Zoek rustig op internet, maar formuleer het bewijs op je eigen manier en zo dat je het begrijpt.

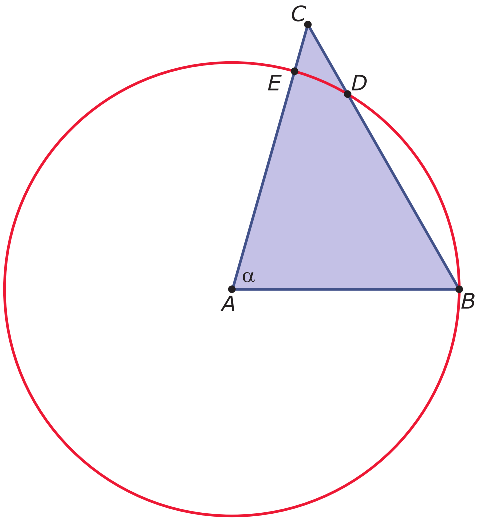
Examen

Opgave 10: Driehoek en cirkel

In de figuur hiernaast is een scherphoekige driehoek ABC getekend, met $AC > AB$, en de cirkel met middelpunt A en straal AB. Deze cirkel snijdt BC in D en AC in E. De grootte van $\angle BAC$ noemen we α.

Druk $\angle CDE$ uit in α. Bewijs dat je antwoord juist is.

(bron: examen wiskunde B vwo 2008, tweede tijdvak)



Figuur 6.4

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

Math4all

www.math4all.nl