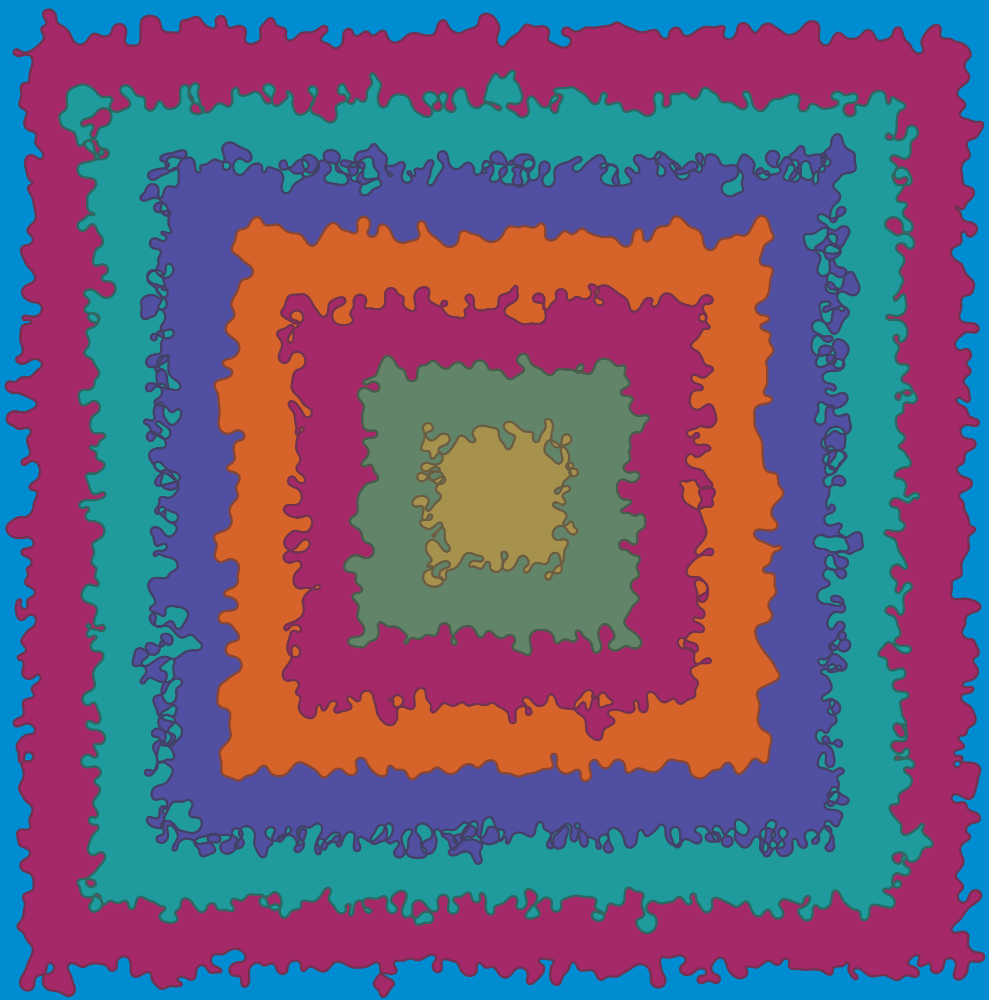
Wiskunde D

4 VWO

Katern 1

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Kansen en tellen

1.1 Experimenteren

Inleiding

Als je vaak met een zuivere dobbelsteen gooit, komt elk vlakje gemiddeld genomen ongeveer even vaak boven te liggen. In de praktijk blijkt dat dit bij steeds meer herhalingen steeds beter gaat kloppen.
Omdat een dobbelsteen 6 vlakken kent, zeg je dat de kans dat één van die vlakken boven komt 1 op de 6 is. Het is gebruikelijk om dit als breuk te schrijven en te zeggen dat de kans op het gooien van bijvoorbeeld 4 ogen met een zuivere dobbelsteen $\frac{1}{6}$ is.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen op grond van experimenten;
- simulaties van kansexperimenten uitvoeren;
- begrippen als gebeurtenis en relatieve frequentie kennen en ermee kunnen werken;
- de wet van de grote aantallen begrijpen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen.

Verkennen

Opgave V1

Of iets gaat gebeuren weet je meestal niet van tevoren. Kun je iets zeggen over de kansen bij de volgende situaties?

a Je gooit met twee dobbelstenen. Je telt het aantal ogen dat boven komt.

b Een voetbalwedstrijd kan beslist worden door het nemen van strafschoppen. Van tevoren weet je niet hoeveel ervan gemist zullen worden.

c De weersvoorspelling van morgen is betrouwbaarder dan die van over een week.

d In een bejaardentehuis is het bingo-avond. Wie wint de hoofdprijs?

Uitleg

Een paar uitspraken over kansen:

- Als je met twee dobbelstenen gooit, is de kans dat je 10 ogen gooit kleiner dan dat je 7 ogen gooit.
- De kans dat je wiskundeleraar morgen ziek is, is erg klein.
- De kans dat een kind van wie de vader en moeder bruine ogen hebben, ook bruine ogen heeft, is groot .

Kansen druk je uit in percentages (tussen 0% en 100%) of breuken (tussen 0 en 1).

Zo kun je zeggen:

- De kans dat je met een dobbelsteen een even aantal ogen gooit, is 50%.
- Op grond van eerdere resultaten schat ik dat Ajax 80% kans heeft om deze wedstrijd te winnen.
- Bij roulette heeft het balletje een kans van $\frac{18}{37}$ om op een rood veld te komen.

Kansen spelen een belangrijke rol bij sport en spel. Bijvoorbeeld bij kansspelen zoals dobbelen en roulette. Je neemt wel aan dat dobbelstenen en roulettetafels geen afwijkingen hebben, dat wil zeggen dat geen van de mogelijke uitkomsten waarschijnlijker is dan een andere.

Figuur 1.2

De kans dat iets gebeurt, kun je bepalen door te proberen. Als je bijvoorbeeld de kans wilt uitrekenen dat bij het werpen met een dobbelsteen het vlakje met vijf ogen bovenkomt, kun je gewoon enkele honderden of meer keren met een dobbelsteen gooien en proefondervindelijk vaststellen welk vlakje bovenkomt. Je voert dan hetzelfde kansexperiment heel vaak uit.

uitkomst X	1	2	3	4	5	6
na 600 keer werpen	103	101	96	98	98	104
na 6000 keer werpen	1003	991	1005	997	1003	1001

Tabel 1.1

Na 600 keer werpen kwam 5 ogen 98 keer voor.
De kans op 5 ogen kun je daarom benaderen door $\frac{98}{600} \approx 0{,}163$.
Na 6000 worpen is deze benadering $\frac{1003}{6000} \approx 0{,}167$.
De laatste schatting is betrouwbaarder omdat er meer experimenten zijn gedaan.

Opgave 1

Lees de **Uitleg** goed door.

a Waarom is bij het gooien met twee dobbelstenen de kans op 10 ogen kleiner dan die op 7 ogen?

b Hoe zou je de kans dat je wiskundeleraar morgen ziek is, kunnen berekenen?

c Sjon en Meindert spelen een spelletje dobbelen. Sjon gooit aan het eind van het potje met dezelfde dobbelsteen drie keer achter elkaar een 6, en wint daarmee het potje. Meindert is wantrouwig en zegt dat de dobbelsteen verzwaard is. Heeft Meindert gelijk?

d Bij het volgende potje dobbelen staat Meindert erop zijn ‘geluksdobbelsteen’ te gebruiken en haalt een nieuwe dobbelsteen uit z'n binnenzak. Ze beginnen een nieuw potje, dat Meindert direct wint door met zijn dobbelsteen drie zessen achter elkaar te gooien. Nu is het Sjon die Meindert beschuldigt van valsspelen. Meindert, op zijn beurt, noemt het karma. Wie heeft hier gelijk?

e Van een potje bingo is bekend dat iedereen een winkans van 2% heeft. Wat weet je van het aantal deelnemers?

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je de uitkomsten van worpen met een dobbelsteen.

a Hoe groot schat je de kans op 4 ogen bij 600 keer werpen met een dobbelsteen?

b En hoe groot schat je die kans bij 6000 keer werpen?

c Lijkt de conclusie gerechtvaardigd dat dit een zuivere dobbelsteen is?

Opgave 3

Stel, je vraagt je af of de kans dat een punaise, als hij valt, met de punt naar boven komt te liggen gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Hiertoe voer je een experiment uit: je laat een punaise tien keer op een houten tafel vallen. Deze komt zes keer met de punt naar boven neer.

Figuur 1.3

a Bepaal uit dit experiment de kans dat de punaise met de punt naar boven komt te liggen.

b Je herhaalt het experiment, maar dit keer door de punaise vijftig keer op een tapijt op de vloer te laten vallen. Nu komt deze achttien keer met de punt naar boven neer. Bepaal nogmaals de kans uit dit experiment.

c Als je het gemiddelde neemt van de resultaten bij a en b kom je door dit experiment op een kans van ongeveer $\frac{1}{2}$. Je zou de conclusie kunnen trekken dat een punaise daadwerkelijk ook een kans van $\frac{1}{2}$ heeft om met de punt boven te komen liggen. Lever commentaar.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een **kansexperiment** staat het resultaat niet bij voorbaat vast.
Een voorbeeld hiervan is het gooien met één dobbelsteen. De **mogelijke uitkomsten** zijn alle mogelijke resultaten van het kansexperiment. In dit geval het gooien van 1, 2, 3, 4, 5 of 6 ogen.
Een **uitkomst** of **gebeurtenis** is een (soms vooraf gedefinieerd) resultaat, bijvoorbeeld 'het werpen van 5 ogen' of 'het werpen van eerst 4 ogen en daarna 6 ogen'.

De **relatieve frequentie** van een gebeurtenis is:

$$\frac{\text{het aantal keren dat die gebeurtenis voorkomt}}{\text{het aantal herhalingen van het kansexperiment}}$$

De **experimentele wet van de grote aantallen** is een ervaringsregel: In de praktijk blijkt dat de relatieve frequentie bij een groot aantal keren uitvoeren van een kansexperiment naar één waarde lijkt te gaan.
Deze waarde noem je de **experimentele kans** op die gebeurtenis.

Relatieve frequenties zijn ook te bepalen uit statistieken.

Verder kunnen relatieve frequenties worden bepaald door **simuleren**: nabootsen met bijvoorbeeld een grafische rekenmachine. Bekijk het **Practicum**. Redenen om dit te doen, kunnen zijn: Sneller kunnen werken of het vermijden van gevaarlijke experimenten (bijvoorbeeld overstroming of falen van een vliegtuig).

Voorbeeld 1

Figuur 1.4

Je gooit heel vaak met een dobbelsteen en turft hoe vaak er 3 ogen boven komen. Bepaal zo de experimentele kans op deze gebeurtenis.

Je gooit daarna heel vaak met twee dobbelstenen en turft hoe vaak er 3 ogen boven komen. Bepaal zo ook de experimentele kans op deze gebeurtenis.

Kun je verklaren waarom de kans op 3 ogen bij het werpen met twee dobbelstenen kleiner is dan bij het werpen met één dobbelsteen?

Antwoord

Je gooit bijvoorbeeld honderd keer met die dobbelsteen en er komt 17 keer 3 ogen boven te liggen.
De relatieve frequentie van de gebeurtenis '3 ogen liggen boven' is dan $\frac{17}{100}$.
De kans op de 3 ogen is volgens dit experiment dus bij benadering 0,17.

Je gooit vervolgens 100 keer met die twee dobbelstenen en er komt 6 keer 3 ogen boven te liggen.
De relatieve frequentie van de gebeurtenis '3 ogen liggen boven' is dan $\frac{6}{100}$.
De kans op de 3 ogen is volgens dit experiment dus bij benadering 0,06.

Om 3 ogen met twee stenen te gooien, moet je 1 en 2 ogen gooien of 2 en 1 ogen, dat geeft een kans van $\frac{2}{36}$. De kans om 3 te gooien met één steen is $\frac{1}{6}$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je door experimenteren kansen kunt bepalen bij het werpen met dobbelstenen.

a Werp zestig keer met twee dobbelstenen en houd bij hoe vaak je 7 en hoe vaak je 10 ogen krijgt. Welke experimentele kans op 7 ogen vind je? En welke experimentele kans op 10 ogen?

b Is bij jou de experimentele kans op 7 ogen ook groter dan die op 10 ogen?

c Kun je beredeneren met de wet van de grote aantallen waarom dit (ook als het bij jou niet klopt) toch het geval is?

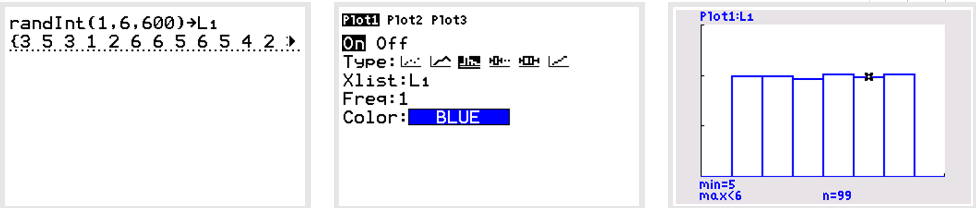
d Je gooit met twee dobbelstenen na elkaar. Met de eerste heb je al een 2 gegooid. Welke theoretische kans is groter: de kans dat je met de twee dobbelstenen bij elkaar een 6 gooit, of dat je met de tweede dobbelsteen een 6 gooit?

Voorbeeld 2

Wanneer je zeshonderd keer wilt werpen met een zuivere dobbelsteen om de experimentele kans op 5 ogen te bepalen, kost dat veel tijd. Zo'n experiment kun je sneller simuleren met de grafische rekenmachine. De grafische rekenmachine beschikt over een functie die willekeurig getallen genereert.

Bekijk de simulatie. Daarbij is ervoor gezorgd dat de kans op elke uitkomst in de grafische rekenmachine gelijk is aan de kans op die uitkomst in werkelijkheid.

Het staafdiagram geeft de relatieve frequenties bij het simuleren van 600 keer werpen met een dobbelsteen weer. De experimentele kans op 5 ogen is bij benadering $\frac{99}{600}$.



Figuur 1.5

Bij experimenten die uitkomsten hebben die geen getallen zijn, moet je elke uitkomst vertalen naar een getal of serie getallen. De kans op dat getal of die serie van getallen moet gelijk zijn aan de kans op die uitkomst.

Bestudeer het **Practicum** en voer de simulatie die hierboven beschreven is zelf uit.

Opgave 5

Met toevalsgetallen op de grafische rekenmachine kun je het werpen met een dobbelsteen simuleren. Je weet dat toevalsgetallen tussen de 0 en 1 liggen.

a Leg uit hoe je met de grafische rekenmachine een worp met twee dobbelstenen kunt simuleren.

b Simuleer zeshonderd worpen met twee dobbelstenen en geef de resultaten weer in een staafdiagram.

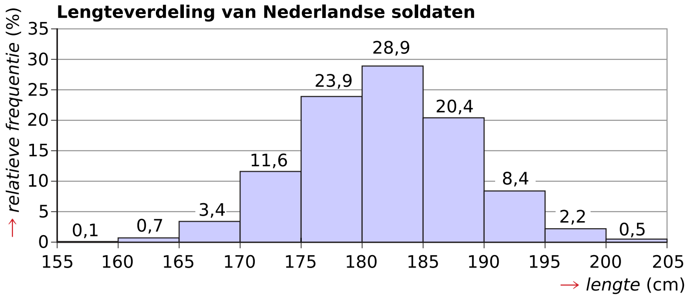
c Hoe groot schat je de experimentele kans op 5 ogen?

d Beredeneer wat de kans op 4 ogen zou moeten zijn en controleer dan of die overeenstemt met je simulatie.

Voorbeeld 3

Je ziet de relatieve frequenties van de lichaamslengten van vijfhonderd Nederlandse mannelijke soldaten.
Een fabrikant van truien voor Nederlandse mannelijke soldaten maakt deze in een aantal maten.
De maat S (small) bijvoorbeeld is bedoeld voor soldaten tot 175 cm lengte.

Welk deel van zijn truien produceert hij in maat S als hij dit diagram ziet?



Figuur 1.6

Antwoord

Met behulp van dit diagram ziet de fabrikant dat 15,8% van de gemeten soldaten maat S heeft.
Hij kan dit volgens de experimentele wet van de grote aantallen opvatten als de kans dat een willekeurige Nederlandse mannelijke soldaat die maat heeft. Het is dus een schatting van het percentage truien van maat S dat hij zou moeten laten maken.

Opgave 6

Je ziet in **Voorbeeld 3** het staafdiagram met de lengteverdeling van vijfhonderd Nederlandse mannelijke soldaten. De fabrikant van truien voor het leger heeft de maten small (S) voor soldaten tot 1,75 m; medium (M) voor soldaten vanaf 1,75 m tot en met 1,90 m en large (L) voor soldaten vanaf 1,90 m.

a Hoe groot schat je de kans dat een Nederlandse soldaat een trui van maat M nodig heeft? Geef de kans als getal tussen 0 en 1.

b Hoe groot schat je de kans dat een Nederlandse soldaat een trui van maat S of L nodig heeft? Geef de kans als getal tussen 0 en 1.

De fabrikant bepaalt op grond van deze experimentele kansen hoeveel truien van elke maat hij zal maken als er een grote bestelling binnenkomt. Maar hij krijgt te horen dat maat L niet bevalt: voor soldaten van meer dan 2,00 m lengte zijn deze truien te klein. Hij besluit een maat XL in te voeren voor deze soldaten.

c Hoeveel procent van zijn truien zal hij in maat XL laten produceren?

Opgave 7

De tabel geeft informatie over het voor komen van kleurenblindheid:

	Man	Vrouw	Totaal
Kleurenblind	479	58	537
Niet kleurenblind	5226	4237	9463
Totaal	5705	4295	10000

Tabel 1.2

Ga ervan uit dat de gegevens in de tabel maatgevend zijn voor alle Nederlanders.

a Je komt een man uit deze groep tegen en wilt de kans schatten dat hij kleurenblind is.
Welk getal beschouw je dan als 'aantal herhalingen van het kansexperiment' en welk getal als 'aantal keren dat die gebeurtenis (kleurenblind) voorkomt'?

b Hoe groot is die kans? Rond af op gehele procenten.

c Hoe groot is de kans dat de volgende persoon die je tegenkomt een kleurenblinde man is? Rond af op gehele procenten.

d Verklaar waarom het antwoord op b verschilt van dat op c.

Verwerken

Opgave 8

Stel je werpt met twee dobbelstenen in de vorm van een regelmatig viervlak met daarop de getallen 1 tot en met 4. Je let op de som van de getallen die onder komen te liggen.

Hoe groot schat je de kans op uitkomst 3?

Opgave 9

Beschrijf voor de volgende kansexperimenten hoe je ze kunt simuleren met de grafische rekenmachine.

a Het aantal keer kop bij het tossen van één muntje.

b Het aantal ogen bij het werpen van twee dobbelstenen.

c Het aantal ogen na het werpen van een dobbelsteen waar op de zijvlakken 1, 1, 3, 4, 4 en 6 ogen voorkomen.

Opgave 10

Twee spelers A en B spelen een spel. Beiden hebben twee lucifers waarvan ze er (zonder dat aan elkaar te laten zien) 0, 1 of 2 in de hand nemen. Ze leggen hun hand dicht voor zich op tafel. Daarna openen ze tegelijk hun hand en laten elkaar zien hoeveel lucifers ze in de hand hebben. A wint als beide aantallen lucifers precies één verschillen, anders wint B. Ga ervan uit dat het aantal lucifers dat de spelers in de hand nemen uitsluitend van het toeval afhangt.

a Hoe zou je dit spel kunnen simuleren met toevalsgetallen?

b Geef systematisch alle mogelijkheden van het spel weer.

c Denk je dat dit spel eerlijk is? Met andere woorden hebben A en B een gelijke kans om te winnen?

Opgave 11

Een fabrikant heeft steekproefsgewijs de levensduur in uren van zijn gloeilampen onderzocht. Je ziet de gegevens weergegeven in een tabel. Ga ervan uit, dat de gegevens uit de steekproef maatgevend zijn voor alle lampen van deze fabrikant.

a Hoeveel lampen zaten er in de steekproef?

b Maak een staafdiagram met relatieve frequenties.

c Hoe groot is de kans dat een lamp niet meer dan 1250 uur brandt? Rond af op gehele procenten.

d Hoe groot is de kans dat een lamp minstens 1650 uur mee gaat? Rond af op gehele procenten.

e Schat de kans dat de levensduur van een lamp meer dan honderd uur van het gemiddelde afwijkt.

levensduur	*aantal*
$950- < 1050$	4
$1050- < 1150$	9
$1150- < 1250$	16
$1250- < 1350$	36
$1350- < 1450$	51
$1450- < 1550$	58
$1550- < 1650$	53
$1650- < 1750$	37
$1750- < 1850$	20
$1850- < 1950$	9
$1950- < 2050$	3
$2050- < 2150$	1

Tabel 1.3

Opgave 12

In deze tabel worden de resultaten van het schoolexamens (S.E.) en het centraal examen (C.E.) van een bepaalde school vergeleken. De getallen zijn percentages die zijn ontstaan uit gemiddelden over vele jaren.

a Hoe groot is de kans dat iemand die op het S.E. een 5 scoort, op het C.E. een voldoende haalt? Geef het antwoord als breuk.

b Hoe groot is de kans dat iemand op het C.E. beter scoort dan op het S.E.? Geef het antwoord als breuk.

	SE				
CE	4	5	6	7	8
5	10	11	8	3	0
6	5	5	14	13	4
7	0	2	7	12	6

Tabel 1.4

Toepassen

Opgave 13: Rangen in een computerspel

Een online computerspel verdeelt z'n spelers in rangen 0 tot en met 5: spelers met rang 0 zijn beginners, en die met rang 5 worden gezien als heel ervaren spelers. Bij elk potje worden door een complex algoritme twee online spelers uitgekozen en tegen elkaar gepit. Als het goed is, hebben de spelers dezelfde rang (om het eerlijk te houden), maar dit lukt niet altijd. In dat geval wordt er gezocht naar een speler met een rang hoger of lager (dus rangverschil 1), en als dat niet lukt, wordt er wéér een rang hoger of lager gekeken (rangverschil 2). Zo gaat het door tot je een tegenstander hebt.

rang	0	1	2	3	4	5
0	458	108	75	35	8	1
1	135	521	159	89	27	5
2	84	121	409	154	92	36
3	34	86	146	388	137	81
4	8	26	98	126	535	101
5	2	7	30	92	123	463

Tabel 1.5

De ontwikkelaars van het spel willen graag weten of hun algoritme goed werkt en houden bij hoe spelers van verschillende rangen uitgekozen worden. Hierbij bekijken ze vijfduizend gespeelde spelletjes. De resultaten staan in de tabel.

Wat je ziet, is hoe vaak een uitdagende speler (verticaal) van een bepaalde rang gepit wordt tegen een ontvangende speler (horizontaal) van een bepaalde rang.

Wat is de kans dat het algoritme twee spelers van een verschillende rang tegen elkaar plaatst? Geef je antwoord in procenten, in twee decimalen nauwkeurig. Wat vind je van dit algoritme?

Opgave 14: Vreemde dobbelstenen

De investeerder Warren Buffett houdt van dobbelspelletjes met ongebruikelijke dobbelstenen. Hij daagt Bill Gates, de oprichter van Microsoft, uit voor een spelletje waarbij ze allebei een dobbelsteen mogen werpen. Degene met het hoogste ogenaantal wint.

Ze gebruiken drie dobbelstenen: een blauwe, een groene en een rode. De ogenaantallen op de dobbelstenen staan in tabel 1.

Warren laat Bill als eerste een dobbelsteen kiezen, en nadat Bill de blauwe pakt, kiest Warren de rode dobbelsteen.

a Schat met behulp van relatieve frequenties de kans dat Warren wint.

Even later spelen Warren en Bill weer tegen elkaar, maar de spelregels zijn veranderd. Er zijn nu twee blauwe, twee groene en twee rode dobbelstenen. Warren kiest twee dobbelstenen van gelijke kleur, waarna Bill twee andere dobbelstenen van gelijke kleur moet kiezen. De winnaar is degene met de hoogste som van zijn ogenaantallen. Warren begint. Hij kiest de twee rode dobbelstenen.

De kansverdeling voor de som van zijn ogenaantallen staat in tabel 2.

Bill kiest de twee groene dobbelstenen.

b Bereken de kans dat Bill wint.

blauw	3	3	3	3	3	6
groen	2	2	2	5	5	5
rood	1	4	4	4	4	4

tabel 1

som	2	5	8
kans	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

tabel 2

Tabel 1.6

Testen

Opgave 15

Bij een bepaald spel horen twee viervlaksdobbelstenen waarop de getallen 1 tot en met 4 staan.

a Stel je voor dat je er niet zeker van bent dat bij deze dobbelstenen elk vlakje een even grote kans heeft om onder te komen. Hoe kun je jezelf ervan overtuigen dat dit toch het geval is?

b Waarom kun je vraag a niet beantwoorden met een simulatie met de grafische rekenmachine?

c Neem aan, dat de dobbelsteen eerlijk is. Simuleer nu met behulp van de grafische rekenmachine 80 worpen met deze dobbelsteen. Maak een staafdiagram van de uitkomst.

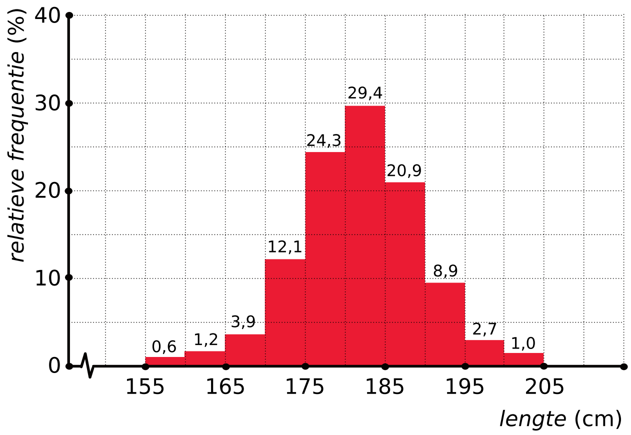
d Hoe groot is de experimentele kans op in totaal 4 ogen?

Opgave 16

Dit histogram laat de relatieve frequenties zien van de lichaamslengten van 500 soldaten.

Een fabrikant van legertruien gaat ervan uit dat deze relatieve frequenties opgaan voor alle soldaten in Nederland. Hij maakt truien in drie maten:

- S (small) voor soldaten tot 180 cm.
- M (medium) voor soldaten van 180 cm tot 190 cm.
- L (large) voor soldaten vanaf 190 cm.



Figuur 1.7

a Een soldaat krijgt een nieuwe trui. Hoe groot is de kans dat hij een trui van maat S moet hebben? Geef je antwoord in procenten.

b Bereken ook voor de andere twee maten de kans (in procenten) dat een trui van die maat nodig is.

c De commandant van een legerplaats bestelt 300 truien. Hoeveel van elke maat kan hij het beste kopen?

Opgave 17

Bij een onderzoek naar linkshandigheid is bij 9000 mensen gevraagd naar hun voorkeurshand. De resultaten vind je in de tabel in percentages. Ga ervan uit, dat deze gegevens maatgevend zijn voor alle Nederlanders.

	linkshandig	rechtshandig
man	11,8	88,2
vrouw	9,6	90,4

Tabel 1.7

a Je komt op straat een Nederlandse man tegen. Hoe groot is de kans dat hij linkshandig is? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.

b Als je daarna een andere willekeurige Nederlander tegenkomt, hoe groot is dan de kans dat die een linkshandige persoon is? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.

c Hoeveel van de ondervraagde mensen waren linkshandig?

Practicum

Bekijk de applet.

Met de volgende practica kun je leren hoe je simulaties met de grafische rekenmachine kunt uitvoeren. Je vindt er ook informatie die je verderop bij dit onderwerp nodig hebt. Die kun je nu eerst even laten zitten.

- **Simulaties met de TI84**
- **Simulaties met de TInspire**
- **Simulaties met de Casio fx-CG50**
- **Simulaties met de HP Prime**
- **Simulaties met de NumWorks**

Je kunt ook eenvoudig met Excel kansspelen simuleren. Gebruik dit Excel-bestand: **Simulatie van kansspelen**.

1.2 Redeneren

Inleiding

Bij het werpen met een zuivere dobbelsteen weet je dat elk vlakje dezelfde kans heeft om boven te komen. Dat hoef je niet meer steeds experimenteel te bevestigen. Als je vooraf weet welke mogelijkheden even waarschijnlijk zijn kun je kansen berekenen door daarmee te redeneren.
Dan is het vooral een kwestie van alle even waarschijnlijke mogelijkheden in kaart te brengen. Op grond daarvan kun je dan een uitspraak doen over de kans op een bepaalde gebeurtenis.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen op grond van redeneren met even waarschijnlijke mogelijkheden;
- de verschillende mogelijkheden in kaart brengen;
- het begrip theoretische kans kennen en kunnen gebruiken.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen;
- werken met experimentele kansen en simulaties.

Verkennen

Opgave V1

Je werpt met twee dobbelstenen. Tel het aantal ogen dat boven komt.

Leg uit waarom de kans op het gooien van 3 ogen kleiner is dan op het gooien van 7 ogen.
Bepaal beide kansen door redeneren.

Uitleg

Stel je voor dat je zonder met een dobbelsteen te gooien, de kans wilt bepalen dat je na eenmaal werpen een vijf gooit. Stel, je weet het volgende:

- Het aantal mogelijke uitkomsten is zes, de dobbelsteen heeft immers zes zijkanten;
- Elk vlakje heeft dezelfde kans om boven te komen omdat de dobbelsteen zuiver is en er willekeurig wordt geworpen.

Dan geldt: De kans op het gooien van een vijf is te beredeneren als het aantal gewenste uitkomsten gedeeld door het aantal mogelijke uitkomsten. Die kans is $\frac{1}{6}$.

Opgave 1

Je gooit één keer met twee dobbelstenen.

a Hoe groot is de kans op het gooien van twee zessen?

b Bereken de kans op het gooien van een vijf en een zes.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je (zonder experimenteren) weet dat uitkomsten even waarschijnlijk zijn, kun je kansen berekenen door te redeneren.

Deze kans heet **theoretische kans** en is gelijk aan:

$\frac{\text{het aantal gunstige uitkomsten}}{\text{het aantal mogelijke uitkomsten}}$.

Het aantal gunstige uitkomsten is altijd kleiner dan of gelijk aan het totale aantal mogelijke uitkomsten. De theoretische kans is dus een breuk met een waarde tussen 0 en 1.

De **wet van de grote aantallen** geeft een verband tussen theoretische en experimentele kansen: Als je een kansexperiment een zeer groot aantal keren zou kunnen uitvoeren, is de kans dat de experimentele kans en de bijbehorende theoretische kans veel van elkaar verschillen gelijk aan 0.

De kans (theoretisch of experimenteel) op een uitkomst 5 bij het gooien met een dobbelsteen noteer je zo: $\text{P}(X = 5) = \frac{1}{6}$. Spreek uit: De kans op het werpen van vijf ogen is een zesde.

- De hoofdletter P is de afkorting van het Engelse woord **probability** (van het Latijnse woord probabilitas). Dit betekent waarschijnlijkheid of kans.
- X is de kansvariabele die de 'waarde' kan hebben van alle mogelijke uitkomsten van het theoretische of praktische kansexperiment.
- $X = 5$ is de notatie voor een gebeurtenis, in dit geval de gebeurtenis waarbij na het werpen met de dobbelsteen, de vijf boven ligt.

Heb je te maken met bijvoorbeeld meerdere dobbelstenen (of munten, of andere dingen) dan moet je de systematisch werken, zodat je geen mogelijkheid over het hoofd ziet. Tabellen en schema's kunnen daarbij helpen.

Voorbeeld 1

Hoe zit het met de mogelijke kansen als je met één dobbelsteen werpt?

Hoe groot is de kans dat je meer dan 4 ogen gooit?

Figuur 2.2

Antwoord

Noem het aantal ogen op een vlak van de dobbelsteen X.
Bij een zuivere dobbelsteen met op de zijvlakken de getallen 1 tot en met 6 kan de gebeurtenis $X = 7$ zich niet voordoen. $\text{P}(X = 7) = 0$. Zo is ook: $\text{P}(X = 0) = 0$.

$\text{P}(X = 1) = \text{P}(X = 2) = \text{P}(X = 3) = \text{P}(X = 4) = \text{P}(X = 5) = \text{P}(X = 6) = \frac{1}{6}$.

Meer dan 4 ogen gooi je als: $X = 5$ of $X = 6$. Het aantal gunstige uitkomsten is twee. Als mogelijke uitkomsten heb je 1, 2, 3, 4, 5 en 6 ogen. Het totaal aantal uitkomsten is zes.

De kans dat de uitkomst bij één worp meer dan 4 ogen is, is twee op zes:
$\text{P}(X = 5 \vee X = 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Opgave 2

Je hebt een vaas met vier rode en zes witte balletjes. De vaas wordt goed geschud. Jan haalt één balletje uit de vaas zonder te kijken. Hij zegt dat hij een kans van $\frac{1}{2}$ heeft, dat het een rood balletje is: er zijn immers twee kleuren, ‘rood’ en ‘wit’ en het balletje heeft één van die twee kleuren.

Waarom is die redenering fout? Hoe groot is de kans op een rode bal wel?

Opgave 3

Noem X het aantal ogen dat boven komt bij een dobbelsteenworp.

a Bereken $\text{P}(X \leq 4)$.

b Bereken $\text{P}(X < 4)$.

c Bereken $\text{P}(X = \text{oneven})$.

d Bereken de kans op minstens 2 ogen.

Voorbeeld 2

Hoe zit het met de mogelijke kansen als je met twee dobbelstenen werpt en je let op het totaal aantal ogen dat boven komt? Maak een overzicht.

Hoe groot is de kans dat je minstens 8 ogen gooit?

Figuur 2.3

Antwoord

Het aantal ogen dat in totaal boven kan komen, is 2, 3, 4, ..., 11, 12.
Dat zijn elf mogelijke uitkomsten. Die zijn echter niet even waarschijnlijk.

Bij iedere uitkomst voor de ene dobbelsteen zijn er immers zes mogelijkheden voor de andere; dat geeft in totaal 36 mogelijkheden. Neem X voor het aantal ogen op de ene dobbelsteen en Y voor het aantal ogen op de andere. In de figuur zie je alle 36 mogelijkheden voor $X + Y$, het totaal aantal ogen per worp.

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figuur 2.4

Het aantal gunstige uitkomsten voor een totaal van bijvoorbeeld 8 ogen is vijf.
De kans dat het totaal aantal ogen 8 is bedraagt
$\text{P}(X + Y = 8) = \frac{5}{36}$.

De kans op meer dan 8 ogen is: $\text{P}(X + Y > 8) = \frac{10}{36}$. De kans op minstens 8 ogen is: $\frac{5}{35} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36}$.

Opgave 4

Stel je voor dat je met twee dobbelstenen gooit en let op het aantal ogen dat bovenkomt. Het aantal ogen op de ene steen stellen we voor door X, dat op de andere steen door Y. Dus $X+Y$ is het totaal aantal ogen dat bovenkomt.

a Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

b Voor hoeveel mogelijkheden geldt: $\text{P}(X+Y=5)$?

c Hoe groot is dus $\text{P}(X+Y=5)$?

d Hoe groot is $\text{P}(X+Y=7)$?

e Schrijf met behulp van de symbolen P, X en Y de kans op minstens 9 ogen op. Hoe groot is die kans?

Voorbeeld 3

Ook bij het delen van speelkaarten spelen kansen een grote rol. Een normaal kaartspel telt 52 kaarten.
Er zijn vier 'kleuren': harten, schoppen, ruiten, klaveren.
Als het delen van kaarten eerlijk gebeurt, is er sprake van een aselecte trekking. Hoe groot is daarbij de kans dat je bij trekking van één kaart een aas krijgt? Hoe groot is de kans dat het hartenaas is?

Antwoord

Er zijn vier azen in het spel. De kans op een aas is $\text{P(aas)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

De kans op hartenaas is $\text{P(hartenaas)} = \frac{1}{52}$.

Figuur 2.5

Opgave 5

Stel je voor dat je aselect één kaart uit een goed geschud spel van 52 kaarten trekt.

a Hoe groot is de kans op een schoppen tien?

b Hoe groot is de kans op een plaatje?

c Hoe groot is de kans op een ruitenkaart?

Opgave 6

Welke van de volgende kansen kun je door redeneren bepalen? Bereken zo mogelijk de grootte van die kans, of geef aan hoe deze te bepalen is.

a De kans dat je in december minstens één keer te laat komt op school.

b De kans om een meerkeuzevraag met vier keuzemogelijkheden bij toeval goed te beantwoorden.

c De kans dat de eerstvolgende baby die wordt geboren een jongen is.

d De kans dat de eerstvolgende baby die wordt geboren in een gezin met al drie jongens, weer een jongen is.

e De kans dat het morgen zes uur regent in Enschede.

f Je werpt met een dobbelsteen in de vorm van een regelmatig achtvlak met 4 rode, 2 witte en 2 blauwe zijvlakken. Hoe groot is de kans dat bij het werpen met zo'n dobbelsteen, deze op een rood zijvlak komt te liggen?

Verwerken

Opgave 7

Je trekt aselect een kaart uit een kaartspel van 52 kaarten. Geef de antwoorden op onderstaande vragen in een breuk.

a Hoe groot is de kans op een hartenkaart?

b Hoe groot is de kans op een tien die geen harten is?

c Stel dat je een harten tien hebt getrokken, en je trekt daarna een tweede kaart uit het spel. Hoe groot is de kans op een tien?

Opgave 8

Je hebt een ondoorzichtige doos met daarin tien gekleurde balletjes, zeven groene en drie gele. De groene balletjes zijn genummerd 1 tot en met 7, de gele 1 tot en met 3. Je schudt die doos en haalt er zonder te kijken één balletje uit. Geef antwoorden op onderstaande vragen als breuk.

a Hoe groot is de kans dat het een geel balletje is?

b Hoe groot is de kans dat het een balletje met nummer 1 is?

c Hoe groot is de kans dat het balletje nummer 4 heeft?

d Hoe groot is de kans dat het een groen balletje met een nummer hoger dan 3 is?

Opgave 9

Je werpt met drie geldstukken.
Hoe groot is de kans op kop bij elk geldstuk? Hoe groot is de kans dat je drie keer kop gooit?

Opgave 10

Er wordt een loterij gehouden. De loten hebben nummers 000 tot en met 999. Alle loten zijn verkocht. Er is 1 eerste prijs, er zijn 2 tweede prijzen en er zijn 3 derde prijzen. Op volkomen aselecte wijze wordt een lotnummer getrokken. Geef de antwoorden op onderstaande vragen als breuk, indien van toepassing.

a Jij hebt het nummer 113. Hoe groot is de kans dat jij de eerste prijs hebt?

b Je vriendin zegt dat ze een even lotnummer heeft. Hoe groot is de kans dat zij de tweede prijs heeft?

c Hoe groot is de kans dat er een even lotnummer wordt getrokken?

d Waarom zijn de kansen bij b en c verschillend?

De tweede prijs is gevallen op lotnummer 771. Hierna wordt er weer een lot getrokken. Nummer 771 doet niet meer mee.

e Hoe groot is jouw kans op de andere tweede prijs?

f Hoe groot is nu de kans dat er een even lotnummer wordt getrokken?

Opgave 11

Je werpt met twee dobbelstenen en let op het aantal ogen dat bovenkomt. Geef de antwoorden op de onderstaande vragen als breuk.

a Hoe groot is de kans dat er 7 ogen boven komen te liggen?

b Hoe groot is de kans op hoogtens 7 ogen?

c Hoe groot is de kans op meer dan 11 ogen?

d Hoe groot is de kans op een even aantal ogen?

Opgave 12

Bij een voetbaltoernooi wordt aan het begin van elke wedstrijd getosst met een munt om te bepalen welke ploeg mag aftrappen. Tijdens dit toernooi speelt Cambuur vier wedstrijden.

a Hoe groot is de kans dat Cambuur bij de eerste wedstrijd de toss 'wint' en mag aftrappen?

b Hoe groot is de kans dat Cambuur alle vier de wedstrijden mag aftrappen?

c Hoe groot is de kans dat Cambuur minstens drie keer mag aftrappen?

Toepassen

Opgave 13: Knipperen met de ogen

Alle mensen knipperen met hun ogen. Daardoor staan op groepsfoto's vaak enkele personen met gesloten ogen. Svenson en Barnes hebben onderzocht hoeveel foto's je moet maken van een groep van n personen om 99% kans te hebben op een foto waarop niemand zijn ogen dicht heeft. Zij hebben bij hun berekeningen de volgende aannames gemaakt:

- Het knipperen met de ogen gebeurt met onregelmatige tussenpozen.
- Mensen knipperen gemiddeld tien keer per minuut met de ogen.
- Als iemand knippert, zijn de ogen gedurende $0{,}25$ seconden dicht.

a Op een willekeurig moment wordt één foto genomen van één persoon. Op basis van de aannames van Svenson en Barnes kunnen we de kans berekenen dat deze persoon niet met gesloten ogen op de foto staat.

Bereken deze kans in vier decimalen nauwkeurig.

Ga er van uit dat de kans dat iemand met open ogen op de foto staat gelijk is aan $0{,}96$. Bij een groepsfoto spreken we van een 'geslaagde' foto als alle personen op de foto hun ogen open hebben. Een fotograaf neemt één groepsfoto van een groep van 20 personen.

b Bereken de kans op een geslaagde groepsfoto.

Een fotograaf neemt 5 groepsfoto's van een groep van 25 personen.
De kans dat er minstens één geslaagde foto bij zit is ongeveer $0{,}89$.

c Toon dat met een berekening aan.

Opgave 14: Gezinssamenstelling

Voor een bevolkingsonderzoek worden willekeurige gezinnen uitgekozen die twee kinderen hebben van verschillende leeftijd, en waarvan ten minste één kind een jongen is. Meneer en mevrouw Dollekamp doen mee met het onderzoek.

Hoe groot is de kans dat hun beide kinderen jongens zijn?

Testen

Opgave 15

Je trekt aselect een kaart uit een volledig kaartspel (52 kaarten). Geef bij de onderstaande vragen je antwoorden als breuk.

a Hoe groot is de kans op een harten kaart?

b Hoe groot is de kans op een boer?

c Hoe groot is de kans op een hartenboer?

Opgave 16

Bij roulette wordt een balletje aselect in een draaiend rad geworpen. Dit rad bevat 37 vakjes, volgens een bepaald patroon genummerd van 0 tot en met 36. De vakjes zijn om en om rood en zwart gekleurd, behalve het vakje met 0, dat is groen. Elk fiche die je op het winnend nummer hebt gezet, krijg je 36 keer uitbetaald. Geef bij de onderstaande vragen je antwoorden als breuk, indien van toepassing.

a Waarom krijg je niet 37 keer uitbetaald?

b Hoe groot is de kans op winst bij één keer spelen met één fiche?

c Verandert die kans als je twee fiches op hetzelfde nummer inzet? En als je twee fiches op verschillende nummers inzet?

d Hoe groot is de kans dat het balletje op een oneven getal komt te liggen?

e Hoe groot is de kans dat het balletje op een rood getal komt te liggen?

f Hoe groot is de kans dat het balletje op een rood getal komt te liggen wanneer al 26 keer achter elkaar een zwart getal is gedraaid?

Opgave 17

Je werpt met twee dobbelstenen. P is het product van het aantal ogen dat boven komt.

Bereken de kans dat P minstens 20 wordt. Geef je antwoord als breuk.

1.3 Systematisch tellen

Inleiding

Bij het beredeneren van kansen speelt het tellen een belangrijke rol. Immers je deelt het aantal ‘gunstige’ mogelijkheden door het totaal aantal mogelijkheden. Maar dan moet je wel weten hoeveel mogelijkheden er zijn en vaak ook nog welke dat zijn. Om daar een goed overzicht over te krijgen moet je systematisch te werk gaan. Boomdiagrammen en tabellen helpen er bij.

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen op grond van redeneren bij experimenten met even waarschijnlijke mogelijkheden;
- boomdiagram, wegendiagram en venndiagram gebruiken om gebeurtenissen in kaart te brengen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen;
- werken met kansen.

Verkennen

Opgave V1

Je werpt vier geldstukken op tafel.

Hoe groot is de kans dat je drie keer kop en één keer munt, of drie keer munt en één keer kop krijgt?

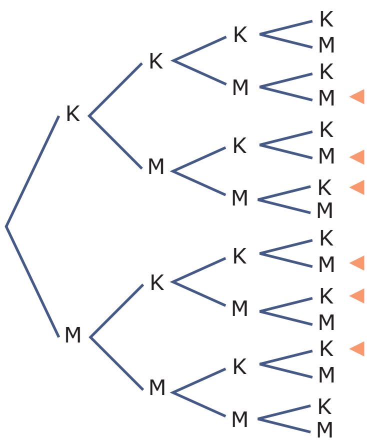
Figuur 3.1

Uitleg 1

Bij tossen wordt er met een geldstuk geworpen. Het werpen met een geldstuk heeft de uitkomsten kop of munt. Bij een zuivere munt zijn beide uitkomsten even waarschijnlijk:
de kans op kop (of de kans op munt) is $\frac{1}{2}$.

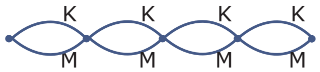
Gooi je met meerdere munten dan kun je kijken naar het aantal keren kop. Dat aantal kun je aangeven met X. Gooi je met vier munten dan kan X de waarden 0, 1, 2, 3 of 4 hebben.
Om de bijbehorende kansen te kunnen berekenen, moet je het aantal gunstige en het totaal aantal uitkomsten overzichtelijk bijhouden. Dat kun je doen met een boomdiagram zoals dit.
Alle zestien uitkomsten hebben dezelfde kans.
Ga na, dat $\text{P}(X = 2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Een boomdiagram maken kan veel werk zijn, maar in veel gevallen hoef je maar een klein stukje te tekenen om te zien hoe je de kansen berekent.



Figuur 3.2

Je kunt soms een wegendiagram maken. Daarin zie je snel dat er $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ mogelijkheden in totaal zijn. Alleen zijn de gunstige mogelijkheden nu moeilijker te tellen.



Figuur 3.3

Opgave 1

Bestudeer **Uitleg 1**.

a Wat is het verschil tussen een boomdiagram en een wegendiagram?

b Wanneer is een boomdiagram makkelijker, en wanneer een wegendiagram?

Opgave 2

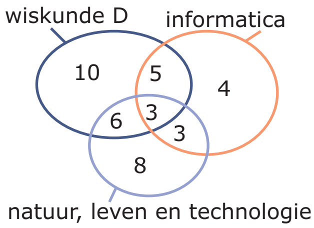
Je hebt in een hoge hoed vier kaartjes met daarop de letters A, B, C, D. Je haalt die kaartjes er aselect één voor één uit.

Bereken de kans dat je dit in de volgorde A-B-C-D doet.

Uitleg 2

Als leerlingen een vakkenpakket kiezen, kun je dat bekijken als meerdere keren een ja/nee-beslissing nemen. Voor twee of drie van dat soort beslissingen kan een venndiagram een goed overzicht geven van alle keuzes.

In de figuur is te zien dat van 39 leerlingen die de keuzevakken wiskunde D, informatica, of natuur, leven en technologie (NLT) of een combinatie van deze drie vakken doen, er 10 alleen wiskunde D doen, 6 wiskunde en NLT doen, 5 wiskunde en informatica doen, 3 informatica en NLT doen en 3 alledrie de vakken doen. Er zijn nog 4 leerlingen die alleen informatica volgen en 8 die alleen NLT hebben.



Figuur 3.4

Wanneer je een venndiagram maakt is er vaak een deel van de aantallen uitkomsten/keuzes gegeven. De andere aantallen keuzes kun je dan berekenen.

Opgave 3

Bestudeer de figuur in **Uitleg 2**.

a Hoeveel leerlingen doen NLT?

b Hoeveel leerlingen doen alleen NLT?

c Hoeveel leerlingen doen twee keuzevakken?

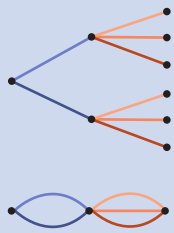
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het berekenen van kansen is meestal een kwestie van systematisch tellen van gebeurtenissen die even waarschijnlijk zijn. Daarvoor bestaat een aantal grafische hulpmiddelen:

Het **boomdiagram**:
Een schema waarin je alle gebeurtenissen weergeeft als vertakkingen vanuit punten. Een boomdiagram kun je altijd toepassen, maar het kan veel werk zijn om het volledig te tekenen. Dit boomdiagram heeft twee ‘lagen’ met in de eerste laag twee takken en in de tweede laag drie takken.

Het **wegendiagram**:
Een schema (ook wel genoemd graaf) waarin je de gebeurtenissen weergeeft als verbindingslijnen tussen punten. Een wegendiagram kun je toepassen als de aantallen gebeurtenissen in een niveau niet afhangen van wat er gebeurd is in andere niveaus. Het totaal aantal uitkomsten krijg je door de aantallen mogelijkheden om van punt naar punt te komen te vermenigvuldigen.



2 x 3 = 6 mogelijkheden

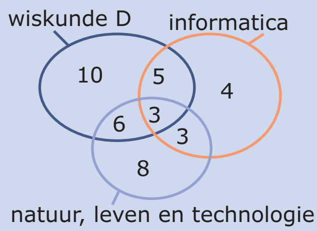
Figuur 3.5

Een **rooster**:
Dit rooster laat het aantal even waarschijnlijke uitkomsten bij werpen met twee geldstukken zien. Een rooster kun je altijd gebruiken als je met twee gebeurtenissen te maken hebt, zoals bijvoorbeeld het gooien van twee dobbelstenen.

	K	M
K	KK	KM
M	MK	MM

Figuur 3.6

Het **venndiagram**:
Een schema dat je gebruikt als verschillende eigenschappen elkaar overlappen, zodat iets meerdere eigenschappen tegelijk kan hebben. Het is ook te bekijken als de bijzondere weergave van de uitkomsten bij een twee of drie keer wel/niet-gebeurtenis. Denk maar aan de keuzemogelijkheden van vakken in de vrije ruimte.



Figuur 3.7

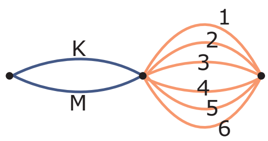
Voorbeeld 1

Iemand gooit tegelijkertijd met een munt en met een dobbelsteen.

Hoeveel mogelijke even waarschijnlijke uitkomsten zijn er in totaal? En bij hoeveel daarvan heb je hoogstens 5 ogen en kop?

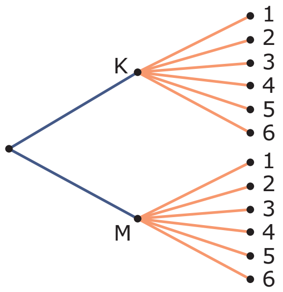
Antwoord

De mogelijke uitkomsten kun je in een wegendiagram weergeven. Er zijn totaal $2 \cdot 6 = 12$ verschillende uitkomsten mogelijk, want je kunt totaal op twaalf verschillende manieren van het beginpunt naar het eindpunt gaan. Er zijn $1 \cdot 5 = 5$ mogelijkheden op hoogstens (niet meer dan) 5 ogen en kop.



Figuur 3.8

De mogelijke uitkomsten van het gelijktijdig gooien van een munt en een dobbelsteen kun je ook in een boomdiagram weergeven. Alle twaalf mogelijkheden zijn afzonderlijk zichtbaar. Er zijn vijf mogelijkheden met hoogstens (niet meer dan) 5 ogen en kop.



Figuur 3.9

Opgave 4

Iemand heeft dobbelstenen in de vorm van een regelmatig viervlak. Op de grensvlakken staan de cijfers 1, 2, 3 en 4. Elk vlak heeft een gelijke kans om ‘onder’ te komen als je met zo'n dobbelsteen gooit. Er wordt geworpen met drie van die dobbelstenen, een rode, een groene en een witte. We letten op de vlakken die ‘onder’ komen na het werpen.

a Geef in een wegendiagram alle mogelijke uitkomsten weer. Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

b Tel het aantal uitkomsten waarbij precies één keer het cijfer 3 onder ligt, bij de rode dobbelsteen.

c Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij precies één keer de 3 onder ligt?

d Hoe groot is de kans dat er precies één 3 onder ligt?

Voorbeeld 2

Iemand gooit tegelijkertijd met twee dobbelstenen. Als je van tevoren het totaal aantal ogen goed raadt, win je het spelletje.

Waarom kun je beter gokken op 7 ogen dan op 2 ogen?

Antwoord

Omdat je met twee dobbelstenen werpt, is een rooster een handige manier om alle mogelijkheden in beeld te krijgen.
Je ziet er in totaal 36 even waarschijnlijke mogelijkheden zijn.

En 7 ogen komt veel vaker voor dan 2 ogen.
Je ziet dat 7 ogen het vaakst voorkomt, dus daar moet je op gokken.

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figuur 3.10

Opgave 5

Bij het werpen met twee dobbelstenen kun je de mogelijkheden overzichtelijk weergeven in een rooster.

a Waarom gaat dat bij het werpen met drie dobbelstenen niet?

b Je werpt met twee dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat er minstens 9 ogen boven komen?

Opgave 6

Je hebt vier uiterlijk gelijke briefjes met daarop de namen Paul, Anja, Frits en Elly. De briefjes worden in een vaas gedaan, je moet er twee kiezen.

a Teken bij deze situatie een rooster.

b Laat zien dat een boomdiagram dezelfde mogelijkheden geeft.

c Bepaal de kans dat je zowel Paul als Anja kiest.

Voorbeeld 3

Op een school kiezen 26 leerlingen in vwo-4 het NT-profiel. In de vrije ruimte kunnen ze één, twee of drie vakken kiezen uit: wiskunde D, informatica en NLT (natuur, leven en technologie).
16 leerlingen kiezen wiskunde D, 12 kiezen informatica en 14 kiezen NLT.
Er zijn 13 leerlingen die maar één van deze drie vakken kiezen.
3 leerlingen kiezen wiskunde D en NLT, 8 leerlingen kiezen wiskunde D en informatica, waarbij de 3 leerlingen zitten die alle drie de vakken kiezen.

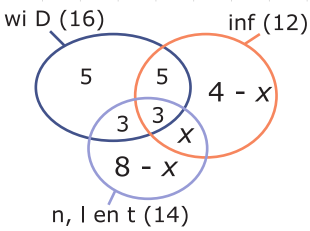
Hoeveel leerlingen kiezen alleen NLT en informatica?

Antwoord

Een venndiagram kan helpen. Het gevraagde aantal leerlingen dat alleen NLT en informatica kiest, stel je voor door x. Daarmee kun je het venndiagram invullen.

Het totaal is $5 + 3 + 3 + 5 + x + 4 - x + 8 - x = 28 - x$. Dit is gelijk aan de 26 leerlingen die er zijn. $28 - x = 26$ geeft $x = 2$.

Ter controle kun je nog even het hele diagram invullen.



Figuur 3.11

Opgave 7

Op een school kiezen 38 vwo leerlingen een NG-profiel. In de vrije ruimte kunnen ze één, twee of drie vakken kiezen: natuurkunde, NLT (natuur, leven en technologie) of aardrijkskunde. 27 leerlingen kiezen natuurkunde, 18 kiezen NLT en 24 kiezen aardrijkskunde. Daarvan kiezen 8 leerlingen natuurkunde en NLT, 11 kiezen natuurkunde en aardrijkskunde en 4 kiezen NLT en aardrijkskunde.

a Hoeveel leerlingen kiezen drie vakken?

b Hoe groot is de kans dat een leerling alleen maar aardrijkskunde heeft gekozen?

Verwerken

Opgave 8

Om het cijferslot van een koffer open te krijgen moet je een code van vier cijfers onthouden, waarbij de getallen 0 t/m 9 voor elk cijfer mogelijk zijn.

a Je weet alleen het eerste cijfer nog. Hoe groot is de kans dat je de koffer direct open krijgt?

b Je weet alle vier de cijfers nog, maar de volgorde niet meer. De cijfers in de code zijn onderling verschillend. Hoe groot is de kans dat je direct de koffer open krijgt?

Opgave 9

Je werpt met drie gewone dobbelstenen.

a Geef in een wegendiagram alle mogelijke uitkomsten weer.

b Hoe groot is de kans op precies één zes?

c Hoe groot is de kans op drie zessen?

d Hoe groot is de kans op minstens twee zessen?

e Hoe groot is de kans op hoogstens twee zessen?

Opgave 10

Een fabrikant van consumptie-ijs probeert drie smaken uit. Het gaat om de smaken ‘aardbeien’, ‘banaan’ en ‘citroen’. Hij laat een onderzoek instellen onder 170 willekeurig gekozen mensen. Tien ondervraagden waarderen alle drie de smaken positief. Acht mensen waarderen geen enkele smaak positief. De andere positieve oordelen zijn als volgt:

- alleen aardbeien: 42;
- alleen banaan: 49;
- alleen citroen: 41;
- alleen aardbei en banaan: 5;
- alleen aardbei en citroen: 7;
- er zijn ook mensen die alleen citroen en banaan lekker vinden.

a Maak een venndiagram van deze gegevens en bereken hoeveel mensen alleen citroen en banaan lusten.

b Hoeveel procent van de ondervraagden had een positief oordeel over banaan of citroen?

c Hoeveel mensen hadden een negatief oordeel over zowel aardbeien als banaan?

d Hoe groot is de kans dat een willekeurige ondervraagde niet van aardbeienijs houdt? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1. Rond af op twee decimalen.

Opgave 11

Een toets bestaat uit tien meerkeuzevragen. Op elke meerkeuzevraag kun je uit vier antwoorden kiezen; er is telkens maar één antwoord goed.

a Hoeveel manieren zijn er om de toets te maken?

b Er zijn zes vragen die je zeker weet. De overige vragen moet je raden. Op hoeveel mogelijke manieren kun je de toets nu nog maken?

c Hoe groot is de kans dat je nu ‘als je zes vragen zeker weet’ minstens een 8 haalt? Elk goed antwoord levert één punt op. Voor het cijfer 8 moet je dus acht antwoorden goed hebben.

d Als je alleen let op ‘goed’ of ‘fout’ en je moet alle 10 de vragen beantwoorden, hoeveel series antwoorden zijn dan mogelijk?

Opgave 12

Een fruitautomaat heeft drie vensters waarachter banden met plaatjes draaien. Op elke band staan twintig plaatjes en je brengt ze in beweging door aan een hendel te trekken. Eén druk op de knop en de banden stoppen. Zie je nu drie dezelfde plaatjes, dan win je een bepaald bedrag. Van de plaatjes is per band het aantal op die band aangegeven.

plaatje	band 1	band 2	band 3
BAR	1	2	1
bel	8	1	7
pruim	2	7	3
sinaasappel	2	8	4
twee kersen	7	2	0
citroen	0	0	5

Figuur 3.12

a Op hoeveel manieren kun je drie keer ‘sinaasappel’ krijgen?

b Op hoeveel manieren kun je drie keer ‘twee kersen’ krijgen?

c Hoe groot is de kans dat je iets wint?

d Je krijgt de plaatjes ‘bel’, en twee keer ‘pruim’. Op hoeveel manieren kun je deze combinatie van plaatjes krijgen?

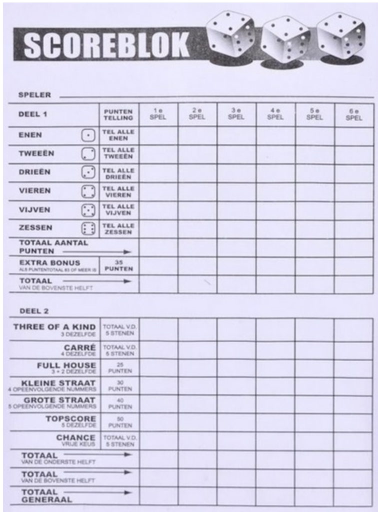
e Je krijgt de plaatjes ‘bel’, ‘sinaasappel’ en ‘citroen’. Op hoeveel manieren kun je deze combinatie van plaatjes krijgen?

f Hoeveel samenstellingen van drie verschillende plaatjes bestaan er?

Toepassen

Opgave 13: Yahtzee

Bij het dobbelspel Yahtzee gooi je met vijf dobbelstenen. Bij dit spel kun je afhankelijk van het aantal ogen op de dobbelstenen op een scoreformulier een puntentotaal noteren.



Figuur 3.13

a Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er bij het gooien met vijf dobbelstenen?

b Eén van de worpen die punten oplevert, is Grote Straat. Bij deze worp gooi je vijf opeenvolgende nummers. Hoeveel manieren zijn er om in één worp met vijf dobbelstenen Grote Straat te gooien?

Testen

Opgave 14

Op vakantie naar de zon neem je vooral luchtige kleding mee. Bijvoorbeeld: 2 paar schoenen, 6 paar sokken, 4 korte broeken en 5 shirts.

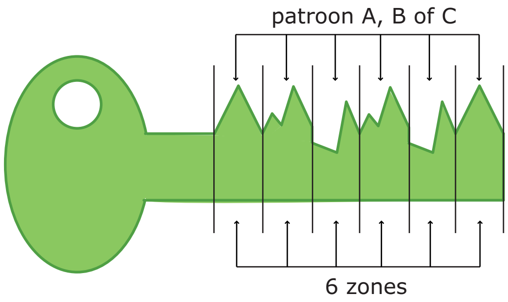
a Teken een wegendiagram van alle mogelijke combinaties van schoenen, sokken, broeken en shirts en bereken op hoeveel manieren je je kunt kleden.

b Op het strand heb je geen sokken en schoenen aan. Op hoeveel verschillende manieren kun je je daar luchtig gekleed vertoeven?

Opgave 15

Voor cilindersloten worden verschillende soorten sleutels gemaakt. De sleutel die je hier ziet, bestaat uit zes gedeelten. Voor elk gedeelte wordt één van de patronen A, B of C gekozen.

Hoe groot is de kans dat een willekeurige sleutel voor zo'n slot ook echt past?



Figuur 3.14

Opgave 16

Een deelnemer aan een tv-quiz krijgt vier kaarten met op ieder een naam van een populaire zangeres. Zijn opdracht is om deze kaarten onder de foto's van deze zangeressen te hangen, de juiste naam bij elke foto. Deze deelnemer kent geen van de vier zangeressen en besluit op goed geluk de kaarten op te hangen.

a Laat met behulp van een boomdiagram zien hoe groot de kans is dat hij één kaart goed hangt.

b Hoe groot is de kans dat hij alle kaarten goed hangt?

1.4 Machten en faculteiten

Inleiding

Bij het systematisch tellen heb je tot nu toe vooral gewerkt met diagrammen. Eigenlijk gaat dat alleen als het aantal mogelijkheden niet al te groot is. Want als je bijvoorbeeld met drie of meer dobbelstenen gaat gooien, dan wordt het aantal even waarschijnlijke uitkomsten al snel zo groot, dat een boomdiagram niet meer te maken is. Wegendiagrammen zijn dan nog wel te maken, maar daarin kun je weer niet zo gemakkelijk de afzonderlijke gunstige mogelijkheden tellen. Kortom: tijd om te proberen uitgebreide telvragen te vereenvoudigen. Daarbij is als eerste belangrijk om onderscheid te maken tussen situaties waarin herhaling optreedt en situaties waarin dat niet zo is.

Je leert in dit onderwerp

- werken met machten als je mogelijkheden telt in situaties waarin herhaling optreedt;
- werken met faculteiten als je mogelijkheden telt in situaties waarin steeds een mogelijkheid wordt afgestreept;
- de begrippen permutatie en variatie kennen en kunnen gebruiken.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- werken met kansen.

Verkennen

Opgave V1

Bankrekeningnummers bestonden voor de invoering van IBAN alleen uit cijfers. Neem eens aan dat elk bankrekeningnummer toen uit 7 cijfers bestond en dat op elke positie elk cijfer kon voorkomen.

a Hoeveel bankrekeningnummers kun je zo maken?

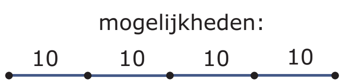
b Het eerste cijfer mag geen 0 zijn. Hoeveel bankrekeningnummers kun je nu nog maken?

c Hoeveel bankrekeningnummers zijn er met allemaal verschillende cijfers?

Uitleg

Stel je voor dat je wilt berekenen hoeveel verschillende pincodes van vier cijfers mogelijk zijn.
De eerste vraag die je kunt stellen: mag ik cijfers herhalen of niet?

Als bij de pincode herhaling van de cijfers is toegestaan, dan kun je de situatie weergeven in dit wegendiagram:



Figuur 4.1

Het aantal mogelijkheden is: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$
Hier bereken je het aantal mogelijkheden met behulp van machten. Dat komt omdat je cijfers mag herhalen.

Maar als je allemaal verschillende cijfers wilt hebben...

Als bij de pincode van 4 cijfers herhaling van cijfers niet is toegestaan dan ziet het wegendiagram met alle mogelijkheden er zo uit:

Figuur 4.2

Het aantal mogelijkheden is: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Omdat het berekenen van dergelijke aflopende vermenigvuldigingen nogal tijdrovend is, hebben wiskundigen daarvoor het begrip ‘faculteit’ ingevoerd.

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ wordt 10! genoemd.
Je rekenmachine beschikt over een functie om faculteiten te berekenen.
Controleer maar eens dat $10! = 3628800$.
Ga ook na dat: $6! = 720$, dat $1! = 1$> en dat $0! = 1$.

Je kunt $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ uitrekenen met behulp van faculteiten:
$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{6!}$.

Ga na, dat dit inderdaad 5040 oplevert.
Het werken met faculteiten is vooral handig als het om grote aantallen gaat.

Opgave 1

Je hebt zes verschillend gekleurde kaartjes. Op die kaartjes wil je de letters A, B, C, D, E of F zetten.

a Op hoeveel manieren kan dat als je op meerdere kaartjes dezelfde letter toelaat?

b Op hoeveel manieren kan dat als elk kaartje een verschillende letter moet krijgen?

Opgave 2

Je hebt zes verschillend gekleurde kaartjes. Op die kaartjes wil je één van de letters van het alfabet zetten.

a Op hoeveel manieren kun je er letters op zetten als je op meerdere kaartjes dezelfde letter toelaat?

b Op hoeveel manieren kun je er letters op zetten als elk kaartje een andere letter moet krijgen?

Theorie en voorbeelden

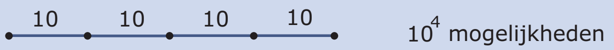
Om te onthouden

Trekking met terugleggen houdt in dat er bij elke keer een waarde trekken steeds dezelfde aantallen mogelijke uitkomsten zijn. De kans op gebeurtenissen wijzigt dus ook niet.

Trekking zonder terugleggen of houdt in dat een waarde maar één keer getrokken kan worden. De aantallen mogelijke waarden veranderen dus. De kans op een gebeurtenis wijzigt dus ook.

Let op de betekenis van herhalen: je herhaalt hier een keuze met of zonder teruglegging.

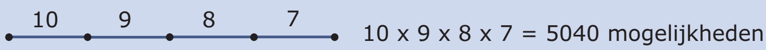
Bekijk het trekken van 4 elementen uit 10 verschillende elementen met terugleggen, waarbij je let op de uiteindelijke volgorde van het resultaat:



Figuur 4.3

Dan (met teruglegging) heb je $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$ mogelijke uitkomsten.
Hier bereken je het aantal uitkomsten dus met behulp van **machten** (dat is immers herhaald hetzelfde getal vermenigvuldigen!).

Bekijk het trekken van 4 elementen uit 10 verschillende elementen zonder teruglegging waarbij je let op de uiteindelijke volgorde van het resultaat:



Figuur 4.4

Dan (zonder terugleggen) heb je $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ mogelijke uitkomsten.
Een **permutatie** is een volgorde waarbij zonder terugleggen alle verschillende elementen worden getrokken. In dit geval zou dat $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutaties geven. Uiteraard is de volgorde van het resultaat hier belangrijk.

Een **variatie** is een volgorde waarbij uit verschillende elementen zonder terugleggen niet alle elementen worden getrokken (zoals hierboven, in dit geval dus $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ variaties). Uiteraard is de volgorde van het resultaat hier belangrijk. Variaties worden vaak ook permutaties genoemd.

De vermenigvuldiging van de aflopende rij opeenvolgende getallen 10 tot en met 1 wordt 10-**faculteit** genoemd. 10 faculteit schrijf je als 10!, dus $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$.
$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ is daarom te berekenen als $\frac{10!}{6!}$.

Afgesproken is dat $0! = 1$. Deze afspraak valt misschien het beste te verklaren met de gedachte dat er maar één manier is om nul dingen te trekken.

Je rekenmachine heeft een speciale functie om faculteiten en het aantal permutaties te berekenen. Bekijk daarvoor het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Figuur 4.5

In Nederland bestaat een bepaalde categorie kentekenplaten (op auto's) uit twee cijfers gevolgd door vier letters. Neem aan dat alle letters en cijfers mogen worden gebruikt.
Hoeveel kentekens kun je dan maken, als herhaling van letters en cijfers is toegestaan?

Antwoord

Dit kun je berekenen met machten. Voor elk kenteken heb je twee cijfers nodig en er zijn 10 verschillende cijfers. Je hebt dan totaal $10^2 = 100$ verschillende mogelijkheden.

Voor elk kenteken heb je vier letters nodig en er zijn 26 verschillende letters. Je hebt $26^4 = 456976$ verschillende mogelijkheden voor de letters.

In totaal zijn er dus $10^2 \cdot 26^4 = 45697600$ mogelijke kentekenplaten.
Dat is meer dan 45 miljoen!

(In werkelijkheid zijn het er minder, omdat niet alle letters worden gebruikt.)

Opgave 3

Nummerborden van een bepaalde generatie auto's bestaan uit twee letters, weer twee letters en ten slotte twee cijfers. Bijvoorbeeld DB-TR-69. De letters I, O en Q worden niet gebruikt. Ga ervan uit dat verder alle letters en alle cijfers kunnen worden gebruikt.

a Hoeveel van deze nummerborden zijn er dan mogelijk?

b Hoeveel van deze nummerborden zijn er mogelijk als je geen letters en cijfers mag herhalen?

In Nederland bestaat een bepaalde categorie kentekenplaten (op auto's) uit twee cijfers gevolgd door vier letters. Neem aan dat alle letters en cijfers worden gebruikt.

c Hoe groot is de kans dat een willekeurige auto met een nummerbord uit deze categorie een kenteken met allemaal verschillende tekens heeft?

Sinds 2015 worden nieuwe kentekens gebruikt voor onder andere brom- en snorfietsen. Deze kentekens zien er als volgt uit: XXX-99-X. Hierbij staat de X voor een letter en de 9 voor een getal. Elke voertuigcategorie (behalve de personenauto’s) heeft een eigen eerste letter op het kenteken, voor brom- en snorfietsen is dat D of F. Verder worden er geen klinkers (a, e, i, o en u) gebruikt. Ook sommige combinaties van letters (de naam van een politieke partij of afkortingen als NSB en PSV) worden gemeden, maar dit laten we hier even buiten beschouwing.

d Hoeveel verschillende van deze kentekens kun je maken?

Voorbeeld 2

Tijdens de finale van de 100 meter hardlopen op de Olympische Spelen strijden 8 lopers om 3 medailles. De lopers zijn allemaal topatleten. Je neemt aan dat ze volkomen gelijkwaardig zijn.

Op hoeveel manieren kunnen de medailles worden verdeeld?

Antwoord

Stel je een wegendiagram voor. Voor de eerste positie zijn 8 mogelijke kandidaten, voor de tweede dan nog 7 en voor de derde nog 6.

Er zijn $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ mogelijke uitslagen.
Dit is het aantal mogelijke variaties van 3 elementen uit 8 elementen.

De grafische rekenmachine kent hiervoor een speciale functie.

Figuur 4.6

Opgave 4

Uit een aanbod van 40 boeken moet een jury nummer 1, nummer 2 en nummer 3 kiezen.

Wanneer de jury op goed geluk deze boeken uitkiest, zonder verder naar de inhoud te kijken, hoeveel verschillende keuzes zijn er dan mogelijk?

Opgave 5

Er wordt onderscheid gemaakt tussen ‘permutaties’ en ‘variaties’. Let goed op het verschil tussen beide.

- **a** Omschrijf wat je verstaat onder het aantal permutaties van 10 elementen.
- **b** Bereken het bij a omschreven aantal.
- **c** Wat versta je onder het aantal variaties van 3 uit 10 elementen?
- **d** Bereken het bij c omschreven aantal.
- **e** Wat is het aantal variaties van 5 uit 100 elementen?

Opgave 6

Je maakt getallen en gebruikt hierbij de cijfers 4, 5, 6, 7 en 8.

- **a** Je maakt getallen van vijf cijfers. Hoeveel getallen zijn er mogelijk?
- **b** Je maakt getallen van vijf verschillende cijfers. Hoeveel getallen zijn er mogelijk?
- **c** Je maakt getallen van drie cijfers. Ze mogen vaker voorkomen. Hoeveel getallen zijn er mogelijk?
- **d** Je maakt getallen van drie verschillende cijfers. Hoeveel getallen zijn er mogelijk?
- **e** Je maakt van deze vijf cijfers getallen boven de 65000. Hoeveel getallen kun je maken als je de cijfers meerdere malen kunt gebruiken?
- **f** Je maakt getallen van vijf verschillende cijfers boven de 65000. Hoeveel getallen kun je maken?

Verwerken

Opgave 7

In Nederland bestaat de postcode uit vier cijfers, gevolgd door twee letters. Neem aan dat alle cijfers op elk van die vier plaatsen mogelijk zijn. Neem ook aan dat elke letter op elk van die twee plaatsen mogelijk is.

Hoeveel postcodes zijn er dan in Nederland in totaal mogelijk?

Opgave 8

De tekens van een grafische rekenmachine bestaan uit puntjes: elk teken past in een rechthoekje van 5 bij 7 puntjes. Een teken wordt gemaakt door deze puntjes 'aan' of 'uit' te zetten.

a Hoeveel tekens zijn er zo in principe mogelijk?

b Hoeveel codes zijn er mogelijk als er 10 puntjes 'aan' staan?

Opgave 9

Aan de herenfinale op de steeple-chase doen bij de Olympische Spelen 15 mannen mee. De nummers 1, 2 en 3 komen op het erepodium.

a Op hoeveel manieren kunnen die ereplaatsen theoretisch worden verdeeld?

b Hoe groot is de theoretische kans op één van deze volgordes?

Opgave 10

Een groep van acht personen heeft kaartjes voor een concert gekocht. Ze zitten alle acht naast elkaar op één rij.

a Hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk?

b Eén van de acht wil per se de buitenste van de groep zijn. Op hoeveel verschillende manieren kunnen ze nu nog zitten?

c Twee personen willen per se naast elkaar zitten. Hoeveel verschillende volgordes zijn er nu nog mogelijk?

Opgave 11

Je werpt met vier dobbelstenen. Je let op het totaal aantal ogen.

Bereken de kans dat het maximaal aantal ogen 23 of meer is.

Opgave 12

Een toets bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Op elke meerkeuzevraag kun je uit vier antwoorden kiezen; er is telkens maar één antwoord goed.

a Hoeveel mogelijke series antwoorden zijn er?

b Je hebt de toets goed voorbereid en je weet de eerste 24 antwoorden zeker; de rest moet je gokken. Hoeveel mogelijke series antwoorden zijn er dan nog?

De docent die de toets afneemt, is schappelijk en geeft iedere leerling drie 'jokers' om te gebruiken. Dit betekent dat als een leerling een vraag niet (of niet zeker) weet, deze leerling één van de jokers op deze vraag kan gebruiken. De vraag hoeft dan niet verder ingevuld te worden, en wordt automatisch goed gerekend.

c Je gebruikt je jokers in de situatie van b. Op hoeveel manieren kan dit?

d De rest van de vragen die je niet zeker weet, vul je op goed geluk in. Hoe groot is de kans dat je alle antwoorden goed hebt?

Toepassen

Opgave 13: Bingo

Bingo is een populair kansspel. Om te spelen moet een speler een Bingokaart kopen. Deze kaart bevat 5 rijen en 5 kolommen met willekeurige getallen. In het midden van de kaart is geen getal aanwezig. In de figuur zie je een voorbeeld van een Bingokaart.

De kolom onder de letter B bevat 5 getallen uit de reeks 1 tot en met 15. De kolom onder de letter I bevat 5 getallen uit de reeks 16 tot en met 30. De kolom onder de letter N bevat 4 getallen uit de reeks 31 tot en met 45. De kolom onder de letter G bevat 5 getallen uit de reeks 46 tot en met 60. De kolom onder de letter O bevat 5 getallen uit de reeks 61 tot en met 75. Elk getal komt niet vaker dan één keer per Bingokaart voor. Op elke Bingokaart staan dus 24 verschillende getallen. In elke kolom staan de getallen niet noodzakelijk op volgorde van grootte. Dus als je in Bingokaart 1 bijvoorbeeld de getallen 4 en 11 verwisselt, krijg je een andere Bingokaart.

B	I	N	G	O
4	18	32	48	71
11	25	45	54	62
13	19		51	67
8	24	39	49	74
1	27	36	59	63

Figuur 4.7 Bingokaart 1

a Toon aan dat er ongeveer $5{,}5 \cdot 10^{26}$ verschillende Bingokaarten mogelijk zijn.

Bij Bingo heeft de spelleider een bak met daarin 75 balletjes waarop de getallen 1 tot en met 75 staan. Tijdens een spel Bingo wordt telkens een balletje getrokken. Het getal op dat balletje wordt aan de spelers hardop voorgelezen. Als dat getal op een Bingokaart van een speler staat, kan de speler dat getal doorstrepen. Het getrokken balletje wordt niet teruggedaan in de bak. Zodra een speler alle 24 getallen op een kaart heeft doorgestreept, mag hij "BINGO!" roepen. De speler die als eerste "BINGO!" roept, wint een prijs. Dan is het spel afgelopen en kan een nieuw spel beginnen. Voor het spel maakt het dus niet uit hoe de getallen in de kolommen staan. In figuur 2 zie je Bingokaart 2 die is ontstaan door de getallen in elke kolom van de Bingokaart 1 in een andere volgorde te zetten.

B	I	N	G	O
11	18	39	49	47
4	25	45	51	67
1	19		54	63
8	27	32	48	71
13	24	36	59	62

Figuur 4.8 Bingokaart 2

De speler met Bingokaart 2 kan op precies hetzelfde moment "BINGO!" roepen als de speler met Bingokaart 1. We zeggen daarom dat Bingokaart 2 niet wezenlijk verschilt van Bingokaart 1.

b Bereken hoeveel verschillende Bingokaarten er kunnen bestaan die wezenlijk van elkaar verschillen.

Testen

Opgave 14

Je maakt getallen van vijf cijfers, die je kiest uit 0 tot en met 9.

a Hoeveel verschillende getallen zijn er mogelijk als ieder cijfer op elke positie is toegestaan?

b Hoeveel verschillende getallen zijn er mogelijk als de getallen niet met 0 mogen beginnen?

c Hoeveel van die getallen (als bij b) zijn er nog mogelijk als alle cijfers verschillend moeten zijn?

d Hoeveel getallen zijn er met vijf verschillende cijfers en boven de 43000?

Opgave 15

In de lottomachine zitten balletjes met de nummers 1 tot en met 41. Er worden één voor één zes balletjes uitgehaald. Het eerst getrokken balletje valt in het eerste bakje, het tweede in het tweede bakje enzovoort.

a Hoeveel verschillende trekkingen zijn er dan mogelijk?

b Op hoeveel manieren zijn deze zes balletjes met dezelfde nummers erop te trekken?

c Je hebt op je lottoformulier aangekruist 1, 13, 17, 19, 31 en 41. Hoe groot is de kans dat die getallen in die volgorde worden getrokken?

d Hoe groot is de kans dat de getallen bij c worden getrokken, als de volgorde niet uitmaakt?

Practicum

Met de volgende practica kun je leren hoe je met de grafische rekenmachine met faculteiten kunt werken. Verder wordt er beschreven hoe permutaties en combinaties snel kunnen worden berekend, dat hoort vooral bij het volgende onderdeel.

- **Simulaties en tellen met de TI84**
- **Simulaties en tellen met de TInspire**
- **Simulaties en tellen met de Casio fx-CG50**
- **Simulaties en tellen met de HP Prime**
- **Simulaties en tellen met de NumWorks**

1.5 Permutaties en combinaties

Inleiding

Je hebt kennis gemaakt met systematisch tellen, zowel met behulp van diagrammen als met behulp van machten en faculteiten. De termen 'variaties' en 'permutaties' zijn al voorbij gekomen. Het aantal variaties van 3 uit 8 is het aantal manieren om drie verschillende elementen uit een totaal van 8 te halen. Maar vaak heb je niet allemaal verschillende elementen, maar groepjes dezelfde elementen. Daar gaat het nu over.

Je leert in dit onderwerp

- onderscheid maken tussen permutaties, variaties en combinaties;
- het aantal combinaties van r uit n elementen berekenen;
- kunnen werken met de driehoek van Pascal.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- machten en faculteiten toepassen bij telproblemen met of zonder herhaling;
- het aantal variaties van r uit n elementen berekenen;
- werken met kansen.

Verkennen

Opgave V1

Acht hardlopers doen mee aan een wedstrijd over 100 meter. Ga ervan uit dat hun volgorde van aankomst uitsluitend van het toeval afhangt.

a Op hoeveel manieren kunnen deze acht hardlopers als eerste, als tweede en als derde aankomen?

b De eerste drie gaan door naar de volgende ronde. Hoeveel mogelijke drietallen zijn dat?

Uitleg

Bij de Olympische Spelen is de 100 m hardlopen een vast onderdeel. In de finale starten 8 lopers, zeg A, B, C, D, E, F, G en H. Ze strijden om goud, zilver of brons. Ga er vanuit dat alle lopers gelijkwaardig zijn. Je weet het aantal volgordes waarin alle hardlopers over de finish kunnen komen, permutaties dus: $8!$.
Hoeveel mogelijke lijstjes met drie medaillewinnaars kun je maken?

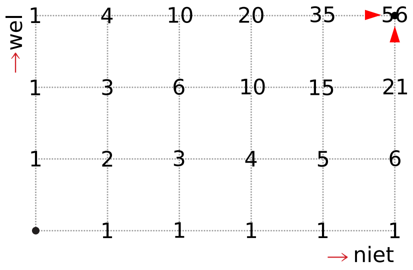
Het gaat hier om het aantal volgordes van 3 uit 8 waarbij de uiteindelijke volgorde van belang is: $8 \cdot 7 \cdot 6 = {}_8\text{P}_3 = 336$ mogelijkheden.

Maar in de voorrondes van de Spelen is het niet belangrijk of je nummer 1, nummer 2 of nummer 3 bent: de eerste drie gaan door naar de volgende ronde. De lijstjes BDG, BGD, DBG, GBD, DGB en GDB hebben dan allemaal hetzelfde resultaat. Dat zijn er 6 in totaal. Die tellen dan dus niet als afzonderlijke mogelijkheden, maar vormen samen één mogelijkheid. En dat geldt ook voor alle andere drietallen: de volgorde binnen die drietallen is niet belangrijk en die 6 (dus 3!) volgordes tellen telkens maar als één mogelijkheid mee. Dit betekent dat er geen 336 mogelijke lijstjes zijn, maar slechts 336 gedeeld door 3!, dus 56.

Dat kun je weergeven in een rooster van 3 bij 5. Elk element van de groep van 8 hoort dan wel of niet bij het uitverkoren drietal, je beweegt in het rooster alleen naar rechts (niet gekozen) of omhoog (wel gekozen).

Als je alle 8 hardlopers bij langs loopt en beslist of je hem/haar uitkiest, waarbij je er 3 kiest en 5 niet, krijg je een route in dit rooster. Op hoeveel manieren kun je dit doen?

Bedenk dat het aantal routes dat in elk punt bij elkaar komt telkens het aantal routes is, dat in het punt eronder en in het punt er links naast bij elkaar komt, bij elkaar opgeteld. Het is de som van de routes van de twee voorgangers.
Het aantal mogelijke (kortste) routes van linksonder naar rechtsboven is gelijk aan het aantal groepjes van 3 uit 8. En dat zijn inderdaad 56 combinaties.



Figuur 5.1

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg** over het wel/niet rooster.

a Bereken zelf op deze manier het aantal groepen van 4 dat je uit 9 deelnemers kunt samenstellen en controleer je antwoord met een berekening.

b Je mag 3 kleuren mag kiezen uit de beschikbare 100 kleuren verf. Op hoeveel manieren kan dit?

Opgave 2

Bekijk nog een keer de **Uitleg**.

a Maak zelf een rooster voor het aantal besturen van 4 leden die je uit 6 kandidaten kunt samenstellen.

b Bereken met faculteiten het aantal besturen van 4 leden uit 6 kandidaten.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je 3 elementen *zonder terugleggen* trekt uit 8 *verschillende* elementen en van de getrokken elementen is de *volgorde belangrijk*, dan heb je

$8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!} = {}_8\text{P}_3 = 336$

mogelijke uitkomsten.

Korter gezegd: Het aantal **permutaties** van r uit n elementen is:
${}_n\text{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Als de volgorde van de getrokken elementen er niet toe doet, zijn er minder mogelijke uitkomsten. Bij 2 getrokken elementen is het aantal mogelijke uitkomsten een factor 2 kleiner, bij 3 getrokken elementen een factor $3! = 6$, bij 4 getrokken elementen een factor $4! = 24$, en zo voort.

Als je 3 elementen *zonder terugleggen* trekt uit 8 *dezelfde of (gedeeltelijk) verschillende* elementen en van de getrokken elementen is de *volgorde niet belangrijk*, dan heb je

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8!}{5!} \cdot \frac{1}{3!} = 336 \cdot \frac{1}{6} = 56$

mogelijke uitkomsten.

Korter gezegd: het aantal **combinaties** van r uit n elementen is: ${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$.

Het aantal combinaties van 3 uit 8 wordt ook geschreven als $\binom{8}{3}$ en uitgesproken als ‘8 boven 3’.

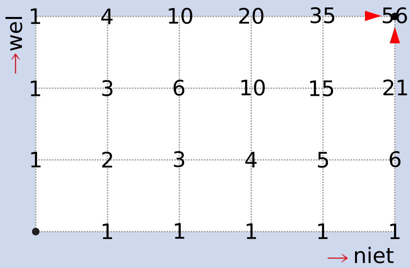
Combinaties kun je ook anders bekijken. Bij het aantal combinaties van 3 uit 8 gaat het er eigenlijk om de groep van 8 te verdelen in twee subgroepen, één van 3 en één van 5. Er geldt dus ${}_8\mathrm{C}_3 = {}_8\mathrm{C}_5$ en algemener: ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$.

Je kunt het aantal combinaties ook berekenen met een wel/niet rooster. Het aantal kortste routes naar het punt $(5,3)$ tel je vanuit het punt linksonder naar het punt rechtsboven door het aantal routes vanaf ieder eerder gepasseerd punt op te tellen: 56.

Berekening geeft: ${}_8\mathrm{C}_3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = 56$.

Bekijk in het **Practicum** hoe dit met je grafische rekenmachine gaat.

Een wel/niet rooster is een gedraaide versie van de **driehoek van Pascal**. In de driehoek van Pascal is elk getal de som van de twee getallen daar schuin boven.



Figuur 5.2

Voorbeeld 1

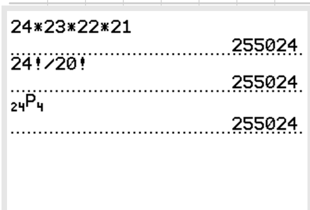
In een klas van 24 personen wordt door loting een groep van 4 personen samengesteld. Deze vier personen krijgen elk een andere taak.
Op hoeveel manieren kan dit als er per taak wordt geloot?

Antwoord

Nu is de volgorde in de groep die wordt geloot van belang: ben je als eerste ingeloot dan heb je een andere taak dan wanneer je als tweede, of derde of vierde wordt ingeloot.

Het gaat nu dus om het aantal permutaties van 4 uit 24.

Er zijn daarom $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = \frac{24!}{(24-4)!} = \frac{24!}{20!} = 255024$ mogelijkheden.



Figuur 5.3

Opgave 3

Je hebt een groep van 20 personen; 8 mannen en 12 vrouwen.

Uit de groep van 20 worden door loting vijf personen aangewezen. Elk van hen krijgt een andere opdracht. Op hoeveel manieren kunnen de opdrachten verdeeld worden?

Voorbeeld 2

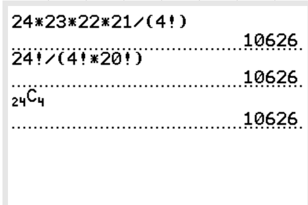
In een klas van 24 personen wordt door loting een groep van 4 personen gekozen. Deze vier personen krijgen elk een andere taak. Op hoeveel manieren kan dit als deze vier personen pas na de loting hun taken onderling verdelen?

Antwoord

Nu is de volgorde in de groep die wordt geloot niet van belang: ze verdelen pas na de loting onderling hun taken.

Het gaat nu dus om het aantal combinaties van 4 uit 24.

Er zijn daarom $\binom{24}{4} = \frac{24!}{4!\cdot(24-4)!} = \frac{24!}{4!\cdot 20!} = \frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21}{4!} = 23\cdot 22\cdot 21 =$ 10626 mogelijkheden.



Figuur 5.4

Opgave 4

Je hebt een groep van 20 personen, 8 mannen en 12 vrouwen.

Uit de groep van 20 worden door loting vijf personen gehaald. Elk van hen krijgt een bepaalde opdracht. Op hoeveel manieren kan dat als ze de opdrachten na de loting onderling verdelen?

Opgave 5

Ga uit van een systeem met 7 schakelaars die allemaal ‘aan’ of ‘uit’ kunnen staan.

a Geef in een roosterdiagram alle mogelijkheden weer.

b Zet bij elk punt van het rooster hoeveel kortste routes ernaartoe leiden. Gebruik de driehoek van Pascal.

c Op hoeveel manieren kun je 0 van de 7 schakelaars aanzetten?

d Op hoeveel manieren kun je 1 van de 7 schakelaars aanzetten?

e Op hoeveel manieren kun je 2 van de 7 schakelaars aanzetten?

f Het aantal manieren om 3 van de 7 schakelaars aan te zetten is gelijk aan het aantal manieren om er 4 van de 7 aan te zetten. Leg uit waarom dat zo is.

Opgave 6

Stel je voor dat er 30 schakelaars zijn (die 30 toneellampen bedienen), waarmee je de belichting op een podium kunt regelen. Voor een bepaalde scène moeten er vier van de 30 worden aangezet. Neem eerst aan dat de volgorde waarin ze worden aangezet wel van belang is.

a Op hoeveel manieren kun je vier schakelaars kiezen?

b Je moet voor een bepaalde scène de schakelaars $S5$, $S7$, $S8$ en $S9$ gebruiken. Op hoeveel verschillende volgordes kun je die schakelaars nog ‘aan’ zetten?

c Hoe kun je met behulp van de antwoorden op de vragen bij a en b berekenen op hoeveel manieren je vier schakelaars uit de 30 kunt kiezen als de volgorde niet belangrijk is?

d Op hoeveel manieren kun je 6 schakelaars kiezen uit de 30 als de volgorde niet belangrijk is?

Voorbeeld 3

Uit een groepje van 3 meisjes en 6 jongens kies je door loting een vijftal.
Hoe groot is de kans dat daar minstens 2 meisjes bij zijn?

Antwoord

Minstens 2 meisjes wil zeggen 2 of 3 meisjes in een groep van 5 (er zijn namelijk maximaal 3 meisjes).

Precies 2 meisjes kiezen geeft $\binom{3}{2} \cdot \binom{6}{3} = 60$ mogelijkheden. Naast de 2 meisjes heb je namelijk ook nog 3 jongens nodig.

Precies 3 meisjes kiezen geeft $\binom{3}{3} \cdot \binom{6}{2} = 15$ mogelijkheden. Naast de 3 meisjes heb je namelijk ook nog 2 jongens nodig.

Een vijftal kiezen met minstens 2 meisjes geeft dus 75 mogelijkheden.

Je kunt je deze keuzes voorstellen door middel van routes in een rooster. Het kiezen van een meisje zou je kunnen zien als de keuze ‘wel’ en het kiezen van een jongen als de keuze ‘niet’ (of omgekeerd).

In totaal kies je 5 mensen uit 9: dat zijn $\binom{9}{5} = 126$ mogelijkheden.

De kans op minstens 2 meisjes als je 5 mensen kiest, is dan ook: $\frac{75}{126} = \frac{25}{42}$.

Opgave 7

Gegeven is een groep van 20 mensen: 8 mannen en 12 vrouwen.

a Op hoeveel manieren kun je door loting een groep van vijf samenstellen die bestaat uit 3 mannen en 2 vrouwen?

b Hoe groot is de kans op een groep van vijf, bestaande uit 3 mannen en 2 vrouwen?

c Op hoeveel manieren kun je door loting een groep van vijf samenstellen die bestaat uit hoogstens 3 mannen?

Opgave 8

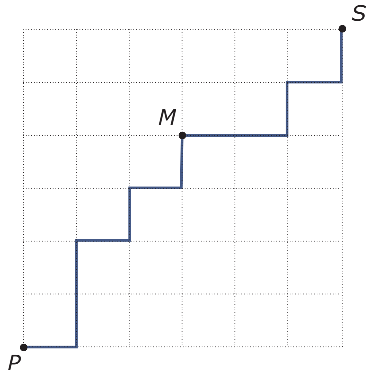
Gebruik de driehoek van Pascal in dit roosterdiagram.

a Hoeveel kortste routes zijn er van P naar M?

b Hoeveel kortste routes zijn er van M naar S?

c Hoeveel kortste routes zijn er van P naar S via M?

d Je kunt van linksboven naar rechtsonder een diagonaal tekenen. Daarop liggen 7 punten. Bereken hoeveel manieren er zijn om deze punten te bereiken. Kun je dat ook sneller uitrekenen en waarom?



Figuur 5.5

Verwerken

Opgave 9

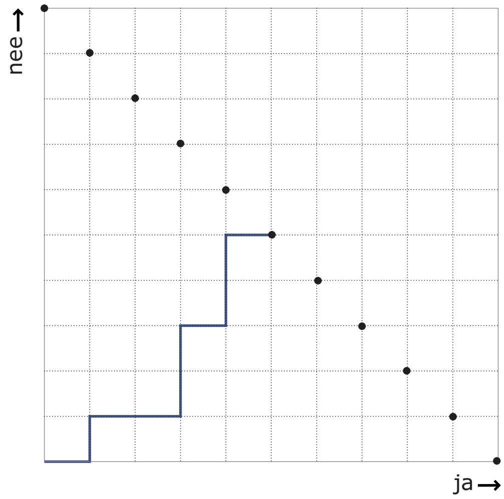
Iemand moet 10 vragen met ‘ja’ of ‘nee’ beantwoorden. In de figuur is een mogelijke lijst antwoorden in een rooster weergegeven met behulp van een lijn. Je ziet dat op vraag 1 ‘ja’ geantwoord is, de lijn is horizontaal.

a Wat is bij die lijst het antwoord op vraag 6?

b Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er mogelijk met precies drie keer ‘ja’?

c Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er in totaal mogelijk?

d Hoe groot is de kans dat je alle vragen goed beantwoordt als je dat volledig op de gok doet?



Figuur 5.6

Opgave 10

Voor een schaaktoernooi hebben zich 24 deelnemers gemeld. Ze spelen een halve competitie, dus elke deelnemer speelt precies één maal tegen iedere andere deelnemer. Het aantal wedstrijden kan nu worden berekend met behulp van combinaties.

Leg uit waarom dat zo is en bereken het aantal te spelen wedstrijden.

Opgave 11

Je gooit met vijf verschillende geldstukken en je let op het aantal keren ‘kop’.

a Hoeveel uitkomsten zijn er mogelijk?

b Hoeveel mogelijke antwoorden met precies twee keer ‘kop’ zijn er?

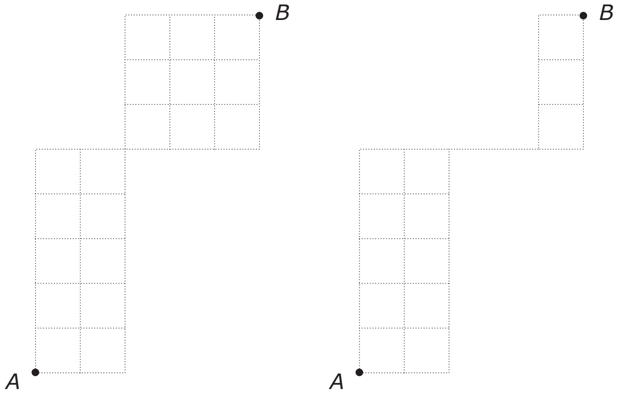
c Hoe groot is de kans op precies twee keer ‘kop’?

Je gooit nu met 50 geldstukken.

d Hoe groot is de kans op 20 keer ‘kop’? Rond af op drie cijfers achter de komma.

Opgave 12

Hoeveel kortste routes zijn er in deze roosters van punt A naar punt B?



Figuur 5.7

Opgave 13

Een groep bestaat uit 14 meisjes en 12 jongens. Er wordt een groepje van vier door loting uitgekozen.

a Als het groepje uitsluitend uit meisjes moet bestaan, hoeveel verschillende groepjes zijn er dan mogelijk?

b Beantwoord dezelfde vraag als het groepje uit twee jongens en twee meisjes moet bestaan.

Opgave 14

Een groep vrienden houdt een filmavond. Ze zijn fans van drie genres films, en hebben uit die genres aardig wat films om te kiezen. Om precies te zijn: 29 Godzillafilms, 5 comedies, en 12 tekenfilms. Ze kiezen drie films uit. Hieronder staan verschillende voorwaarden, bereken telkens het aantal mogelijke drietallen.

a Het maakt niet uit uit welk van de drie groepen de films komen, of in welke volgorde ze gekeken worden, er worden gewoon drie gekozen.

b Er wordt uit elk genre een film gekeken, maar het maakt niet uit in welke volgorde.

c Er worden twee Godzillafilms gekeken en een willekeurige derde van een ander genre, en het maakt wel uit in welke volgorde.

d Er worden ofwel drie Godzillafilms, ofwel drie comedies, ofwel drie tekenfilms gekeken, maar in elk geval wordt dan wel het willekeurige drietal gesorteerd op volgorde van jaartal. Ga er hier van uit dat er per groep niet meerdere films uit hetzelfde jaar komen.

Opgave 15

Je wilt acht verschillende boeken op een boekenplank sorteren. Op hoeveel manieren kun je de boeken neerzetten als geldt:

a Iedere volgorde is toegestaan.

b De drie wiskundeboeken moeten bij elkaar staan.

c De twee woordenboeken moeten op het rechtereind van de rij naast elkaar staan.

d Er worden drie boeken uitgekozen om te worden gekaft en dan naast elkaar aan een uiteinde te worden gezet. (Gekafte boeken beschouwen we niet als onderling verschillend.)

Toepassen

Opgave 16: Het binomium van Newton

Het 'binomium van Newton' is een belangrijke stelling die zegt dat iedere term van de vorm $(a+b)^n$ herleid kan worden tot: $\binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$

Dus bijvoorbeeld is $(a+b)^1 = \binom{1}{0} \cdot a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} \cdot a^0 \cdot b^1 = a + b$;
$(a+b)^2 = \binom{2}{0} \cdot a^2 \cdot b^0 + \binom{2}{1} \cdot a^1 \cdot b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^0 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$, enzovoort.

In deze opgave ga je Newton's binomium een beetje onderzoeken.

a Schrijf $(a+b)^3$ uit op de 'oude' manier (door haakjes weg te werken).

b Gebruik nu het binomium van Newton om $(a+b)^3$ uit te schrijven.

c We gaan de algemene stelling gevoelsmatig aantonen. Je hebt drie muntjes, ieder met de letters 'a' en 'b' aan weerszijden. Je werpt alle muntjes en bekijkt wat er bovenkomt. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

d Ervan uitgaande dat de volgorde niet uitmaakt, welke mogelijkheden zijn er?

e Bij de mogelijkheden van c, hoeveel volgordes zijn er per mogelijkheid?

f Formuleer op grond van je antwoorden bij c, d en e een verklaring voor het binomium van Newton voor algemene n.

Testen

Opgave 17

Een volleybalteam bestaat uit 12 spelers. De coach bepaalt welke spelers worden opgesteld en op welke van de zes posities in het veld.

a Als alle spelers even sterk zijn en op elke positie kunnen spelen, op hoeveel manieren kan de coach dan een team van zes samenstellen?

b Als hij dat team heeft samengesteld, hoeveel verschillende beginopstellingen kan hij dan nog maken?

Opgave 18

Een klas bestaat uit 26 leerlingen.

a Op hoeveel manieren kun je al die leerlingen op een rij zetten?

b Op hoeveel manieren kun je 5 van de 26 leerlingen op een rij zetten?

c Op hoeveel manieren kun je een groepje van 5 uit de 26 kiezen?

d Er zitten tien meisjes in deze klas. Op hoeveel manieren kun je een groepje van vijf leerlingen kiezen als daar precies twee meisjes in moeten voorkomen?

e Er zitten nog steeds tien meisjes in deze klas. Wat is de kans om hoogstens vier meisjes te kiezen als je een groepje van vijf leerlingen maakt. Rond af op drie cijfers achter de komma.

Opgave 19

Je werpt met drie dobbelstenen en let op het aantal ogen dat boven komt.

a Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er mogelijk?

b Je kunt op verschillende manieren 12 ogen gooien. Bijvoorbeeld door driemaal 4 te gooien, maar ook door een 6 en tweemaal 3 te gooien.
Bereken bij elke mogelijkheid de bijbehorende kans.

Practicum

Met de volgende practica kun je leren hoe je met de grafische rekenmachine met faculteiten kunt werken. Verder wordt er beschreven hoe permutaties en combinaties snel kunnen worden berekend.

- **Simulaties en tellen met de TI84**
- **Simulaties en tellen met de TInspire**
- **Simulaties en tellen met de Casio fx-CG50**
- **Simulaties en tellen met de HP Prime**
- **Simulaties en tellen met de NumWorks**

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Kansen en tellen**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- kansexperiment — gebeurtenis — experimentele kans — relatieve frequentie — simulatie
- aselect — theoretische kans — wet van de grote aantallen
- wegendiagram — boomdiagram — venndiagram
- *n*-faculteit — permutaties
- permutaties — combinaties — driehoek van Pascal

Activiteitenlijst

- kansen bepalen op grond van kansexperimenten en/of simulaties
- kansen bepalen op grond van redeneringen met even waarschijnlijke mogelijkheden
- diagrammen gebruiken om mogelijkheden te tellen
- machten en faculteiten gebruiken om mogelijkheden te tellen
- mogelijkheden tellen met behulp van permutaties en combinaties en de driehoek van Pascal

Achtergronden

Al heel lang beproeft de mens zijn geluk bij zogenaamde ‘kansspelen’. In de prehistorie gokte men op de uitkomsten van het gooien met het ‘sprongbeen’, een vroege vorm van onze dobbelsteen. Bij opgravingen in Ur (een stad in het Oude Mesopotamië) is een bordspel teruggevonden en zijn dobbelstenen in de vorm van een viervlak aangetroffen. Later (veertiende eeuw na Christus) ontstonden kaartspelen. En natuurlijk konden verwoede gokkers inzetten op uitslagen van wedstrijden.
Het duurde echter tot de veertiende eeuw voordat wiskundigen zich met het gokken gingen bezighouden. Een eerste vraagstuk (wat voor het eerst in een Italiaans geschrift uit 1380) was het **partijenvraagstuk**. Dat luidde als volgt:

Twee partijen spelen een balspel om punten. Ze hebben beide een even grote kans om een punt te scoren. Er is geen tijdsduur voor het spel vastgelegd en de partij die als eerste 6 punten gescoord heeft, wint de pot van 60 dukaten. Het spel moet (vanwege het weer) bij de stand 5-3 worden gestaakt. Er wordt besloten de pot te verdelen. De vraag is nu: hoe moet dat gebeuren?

De Italiaanse wiskundige **Luca Pacioli (1445—1517)** bedacht in 1494 dat de pot moest worden verdeeld in de verhouding 5 : 3 (de stand bij afbreken), maar zijn collega **Girolamo Cardano (1501—1575)** vond dat je rekening moest houden met de nog te scoren punten. In die tijd konden de wiskundigen geen bevredigende oplossing verzinnen.

Testen

Opgave 1

Iemand werpt met twee viervlaksdobbelstenen. Dergelijke dobbelstenen hebben de vorm van een regelmatig viervlak met daarop de getallen 1, 2, 3 en 4. Er wordt gelet op de som van de getallen die onder komen te liggen.

a Simuleer met behulp van toevalsgetallen veertig worpen met twee van die dobbelstenen. Hoe groot is de experimentele kans op 4?

b Hoe groot is de theoretische kans op 4?

Opgave 2

De Toto is een spel waarbij je voetbaluitslagen voorspelt. Bij Toto13 voorspel je van 13 wedstrijden of de thuisclub wint, verliest of gelijkspeelt.

a Hoe groot is de kans dat je een wedstrijd juist voorspelt als je geen enkel verstand van voetbal hebt?

b Hoeveel verschillende Toto13-uitslagen zijn er in totaal mogelijk?

c Hoe groot is de kans dat je alle 13 wedstrijden goed voorspelt? Geef je antwoord in wetenschappelijke notatie.

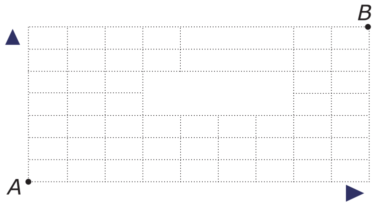
d Je weet dat er twee uitslagen fout zijn voorspeld. Hoeveel mogelijke rijtjes goede voorspellingen zijn er dan?

e Je weet dat er hoogstens twee uitslagen fout zijn voorspeld. Hoeveel mogelijke rijtjes goede voorspellingen zijn er dan?

f Hoe groot is de kans op de situatie bij e? Geef je antwoord in wetenschappelijke notatie.

Opgave 3

Op hoeveel manieren kun je in dit rooster van A naar B?



Figuur 6.1

Opgave 4

Een gezin bestaat uit vier personen: vader Jan, moeder Jannie, kinderen Wim en Marietje. Twee van hen moeten de afwas doen. Wie dat zijn, wordt bepaald door loting.

a Hoe groot is de kans dat beide kinderen de afwas moeten doen?

b Hoe groot is de kans dat beide mannelijke gezinsleden moeten afwassen?

Opgave 5

Het bekende dominospel bestaat uit 28 stenen. Elke steen bestaat uit twee helften. Op elke helft komen 0, 1, 2, 3, 4, 5, of 6 ogen voor. Op de ene helft staat hooguit het aantal ogen als op de ander. Je kiest aselect één steen.

a Laat zien waarom er 28 dominostenen zijn.

b Hoe groot is de kans dat je een ‘dubbele’ kiest (aan beide kanten even veel ogen)?

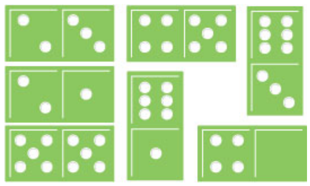
c Hoe groot is de kans dat de som van het aantal ogen minstens tien is?

d Hoe groot is de kans dat het verschil van het aantal ogen hoogstens twee is?

e Hoe groot is de kans dat het grootste aantal ogen op één enkele van beide zijden drie is?

f Je speelt met Petra een spelletje domino. Jullie krijgen allebei zeven stenen uitgedeeld. In de figuur zie je de stenen die je uitgedeeld hebt gekregen.

Jij begint het spel met de ‘dubbel-vijf’. Hoe groot is de kans dat zij kan aanleggen? Geef je antwoord in procenten nauwkeurig.



Figuur 6.2

Opgave 6

Als je twee opeenvolgende verkiezingen voor de Tweede Kamer met elkaar vergelijkt, dan zie je dat mensen regelmatig van partij veranderen. Aan 415 Nederlanders die beide keren hebben gestemd, is gevraagd op welke partij dat was. De gegevens staan in deze tabel. De categorie ‘overige’ wordt opgevat als één partij.

		vorige keer				
		CDA	PvdA	VVD	D'66	Overigen
deze keer	CDA	55	2	0	3	5
	PvdA	3	71	6	3	8
	VVD	20	5	68	2	4
	D'66	4	9	10	57	5
	Overigen	11	17	12	8	27

Figuur 6.3

Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat een willekeurig gekozen ondervraagde

a de vorige keer op het CDA stemde;

b deze keer op de PvdA stemt;

c weer op zijn eigen partij stemt;

d die de vorige keer op de PvdA stemde, nu op het CDA stemt;

e die de vorige keer op D'66 stemde, nu op een andere partij stemt.

Opgave 7

Er worden voor Sinterklaas in een gezin van vier personen lootjes getrokken. Als iemand zijn eigen naam trekt moet er opnieuw worden geloot.

Hoe groot is de kans dat dit het geval is?

Opgave 8

De leerlingenraad bestaat uit 22 personen, verdeeld over diverse jaargroepen. Er zitten 8 leerlingen uit de bovenbouw en 14 leerlingen uit de onderbouw in. Er moet een dagelijks bestuur worden gekozen van vijf personen (voorzitter, secretaris, penningmeester, vice-voorzitter en vice-secretaris).

a Op hoeveel manieren kun je dit dagelijks bestuur kiezen als ze pas achteraf de functies onderling verdelen?

b Op hoeveel manieren kun je dit dagelijks bestuur samenstellen als de leden in functie worden gekozen?

c Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als het moet bestaan uit twee leerlingen uit de onderbouw en drie uit de bovenbouw?

d Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als er minstens één onderbouwleerling deel van moet uitmaken?

e Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als de voorzitter uit de bovenbouw moet komen?

Toepassen

Opgave 9: Mantoux-reactie

Ongeveer 0,02% van alle mensen lijdt aan TBC (tuberculose). Om te onderzoeken of iemand met TBC is besmet wordt er vlak onder de huid een stof ingebracht waarop 98% van de mensen die aan tbc lijden positief reageert. Echter ook ongeveer 1% van de mensen die niet aan TBC lijden reageert er positief op. Deze test heet de Mantoux-test.

a Maak van de gegevens een tabel. Ga uit van 1.000.000 mensen.

b Iemand ondergaat deze Mantoux-test en reageert positief. Hoe groot is de kans dat hij niet aan TBC lijdt?

Opgave 10: Erfelijkheidsleer

Een bekende toepassing van de kansrekening in de biologie is de **erfelijkheidsleer**. Een leeuwenbekje is een plantje dat zowel in de kleuren rood, wit als roze voorkomt. Het is verbazingwekkend dat witte en rode planten alleen roze nakomelingen krijgen, en dat van roze planten de nakomelingen wit, rood of roze zijn. Om dit te begrijpen moet je het een en ander weten van chromosomen, genen en celdeling en de **wetten van Mendel**. Maar ook van kansrekening.

Op chromosomen worden de erfelijke eigenschappen vastgelegd in de genen. Bij veel levende wezens horen bij iedere eigenschap twee genen, een gen van de moeder en een gen van de vader. Voor het leeuwenbekje bijvoorbeeld geldt:

- De kleur wordt bepaald door de genen R en r.
- Een rood leeuwenbekje heeft twee R-genen, is dus van het type RR.
- Een wit leeuwenbekje heeft twee r-genen, is dus van het type rr.
- Een roze leeuwenbekje is van het type Rr.

In een kruisingstabel kun je zien wat er gebeurt als je een rood met een wit leeuwenbekje kruist. En zo kun je ook laten zien wat er gebeurt als je twee roze leeuwenbekjes kruist: de helft van de nakomelingen wordt weer roze, maar $\frac{1}{4}$ deel wordt rood en $\frac{1}{4}$ deel wordt wit.

wit \ rood	R	R
r	rR	rR
r	rR	rR

roze \ roze	r	R
r	rr	rR
R	rR	RR

Figuur 6.4

Cavia's komen voor in drie kleuren, bruingeel, lichtgeel en wit. Die kleuren worden bepaald door een gen dat in twee typen voorkomt, te weten B en b. Een cavia van het type BB is bruingeel, een cavia van het type bb is wit, een cavia van het type Bb is lichtgeel.

a Een bruingele cavia wordt gekruist met een witte cavia. Stel de bijbehorende kruisingsmatrix op.

b Lichtgele cavia's worden onderling gekruist. Dit levert 134 bruingele, 265 lichtgele en 137 witte cavia's op. Verklaar deze aantallen met behulp van een kruisingsmatrix.

c Wat kun je verwachten van de nakomelingen bij de kruising van een lichtgele en een witte cavia?

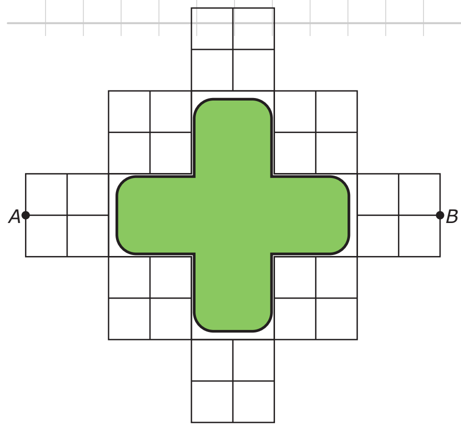
Examen

Opgave 11: Vijver

Hier zie je een plattegrond van paden rond een kruisvormige vijver. Een route van A naar B moet zo kort mogelijk zijn en mag niet buiten de paden leiden.

Hoeveel routes van A naar B zijn er mogelijk?

(bron: examen wiskunde A havo 1989, eerste tijdvak)



Figuur 6.5

2

Rijen

2.1 Rijen beschrijven

Inleiding

Vaak heb je bij het voorspellen van groei- en vervalprocessen te maken met 'losse' getallen. Denk maar aan het saldo van een spaarrekening met een maandelijkse rentebijschrijving, de wekelijkse tellingen van een bepaald soort vogels, etc.
Vooral het berekenen van het saldo op je spaarrekening is natuurlijk van groot belang...

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip rij;
- rijen beschrijven met een directe formule;
- rijen beschrijven door middel van recursie.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt op 1 januari 2012 een saldo van € 1240,00.
En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten. Verder ga je aan het begin van elke maand 50 euro naar die spaarrekening overmaken, te beginnen op 1 februari 2012. Je krijgt aan het eind van elke maand rente van $0{,}5\%$ over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.

a Hoe hoog is je saldo op 1 januari 2013?

b Wanneer is je saldo meer dan € 3000,00?

Uitleg

Stel je wilt een kamer huren voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.
Omdat je weet dat er jaarlijkse huurverhogingen zijn, wil je afspreken hoe hoog de jaarlijkse huurverhoging maximaal bedraagt. Je kunt dit op twee manieren afspreken:

- De jaarlijkse huurverhoging is (maximaal) 60 euro.
- De jaarlijkse huurverhoging is (maximaal) 2%.

Om de huurprijzen te vergelijken zet je ze voor de komende jaren op een rij. Noem de huurprijs bij de eerste afspraak h_1 en die bij de tweede h_2. Je krijgt dan twee **rijen** getallen. De startdatum is 1 januari van een bepaald jaar en dan is het aantal huurjaren $n = 0$.
De rij getallen voor h_1 kun je op twee manieren maken:

- De huurprijs na n jaren is: $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$.
  Je berekent de huurprijs direct uit de huurjaren.
- De huurprijs na n jaren is 60 meer dan die na $n - 1$ huurjaren: $h_1(n) = h_1(n-1) + 60$.
  Je berekent de huurprijs door te kijken naar de prijs van het jaar ervoor. Dit heet ‘recursie’.

Voor de rij h_2 gaat dit op vergelijkbare wijze.

huurprijs per jaar		
	jr.verhoging 60 euro	jr.verhoging 2%
n	*h_1*	*h_2*
0	2880	2880,00
1	2940	2937,60
2	3000	2996,35
3	3060	3056,28
4	3120	3117,40
5	3180	3179,75
6	3240	3243,35
7	3300	3308,21
8	3360	3374,38
9	3420	3441,87
10	3480	3510,70
11	3540	3580,92
12	3600	3652,54
13	3660	3725,59
14	3720	3800,10
15	3780	3876,10
16	3840	3953,62

Figuur 1.2

Opgave 1

Bekijk het verhaal van het huren van een kamer in de **Uitleg**. Neem aan dat de jaarlijkse huurverhoging 60 euro is.

a Maak eerst zelf een tabel met huurprijzen voor $n = 0,1,2,3,4,\ldots$

b Hoe heb je jouw tabel gemaakt: met behulp van recursie of door direct de prijzen te berekenen?

c Licht zowel de formule bij de directe berekening als die bij de recursie toe. Leg duidelijk het verschil tussen beide uit.

Opgave 2

Bij het verhaal in de **Uitleg** is ook sprake van een jaarlijkse huurverhoging van 2%.

a Maak ook hiervoor een tabel met huurprijzen voor $n = 0,1,2,3,4,\ldots$

b Hoe heb je jouw tabel gemaakt: met behulp van recursie of door direct de prijzen te berekenen?

c Stel een formule op voor het berekenen van de huurprijs h_2 door middel van recursie.

d Stel ook een formule op voor $h_2(n)$ waarmee je de huurprijs van jaar n direct kunt berekenen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **rij** getallen $u(n)$ is een functie waarbij n alleen de waarden $0, 1, 2, 3, 4, ...$ (alle positieve gehele getallen en 0) aanneemt. De functiewaarden $u(n)$ vormen de **termen van de rij**.
De eerste term van de rij is dan $u(0)$, de tweede term is $u(1)$, enz.
In plaats van $u(n)$ wordt soms u_n geschreven.
In plaats van n wordt ook de letter t gebruikt, zeker als het om tijd gaat.
Meestal wordt de rij genummerd vanaf 0, maar als dat beter uitkomt wordt ook wel vanaf 1 genummerd. Voordeel van nummeren vanaf 0 is dat de formules vaak eenvoudiger zijn, nadeel is dat bijvoorbeeld de tiende term $u(9)$ is.
Je kunt op twee manieren een formule voor een rij maken:

- **directe formule**:
  Elke term $u(n)$ wordt direct berekend vanuit n, bijvoorbeeld:
  $u(n) = 2880 \cdot 1{,}02^n$.
  Dit is vooral ook handig voor de grafische rekenmachine, want dan kun je een rij als functie invoeren. Zet je de stapgrootte in de tabel op 1, dan heb je de rij snel voor je neus. Maar directe formules zijn niet altijd gemakkelijk te vinden.
- **recursieformule**:
  Elke term $u(n)$ wordt berekend vanuit zijn voorganger $u(n-1)$, bijvoorbeeld:
  $u(n) = u(n-1) \cdot 1{,}02$.
  Maar dan moet wel de eerste term bekend zijn: $u(0) = 2880$.
  Anders kun je de rij niet opbouwen vanaf het begin.

Je hebt op je grafische rekenmachine een speciale ‘mode’ voor het rekenen met rijen. Bekijk het **Practicum** maar eens.

Voorbeeld 1

Je wilt een kamer huren voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.

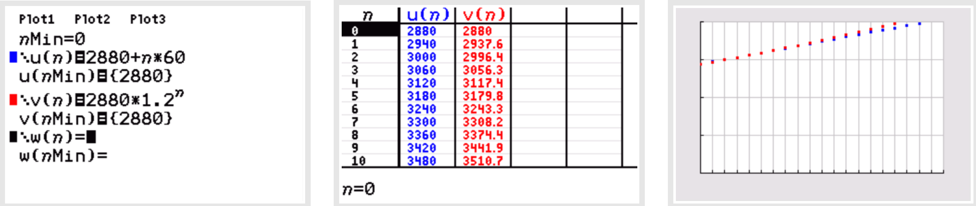
Bij een jaarlijkse huurverhoging van € 60 is de huurprijs na n jaren: $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$.

Bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren: $h_2(n) = 2880 \cdot 1{,}02^n$.

Bereken met je grafische rekenmachine tot welk jaar de huurverhoging in procenten voordeliger is.

Antwoord

Omdat dit twee directe formules zijn kun je beide als functie in je GR invoeren.
Maar je rekenmachine heeft ook een speciale instelling om met rijen te werken. Daarmee maak je ook snel een tabel van beide rijen samen. Je ziet dat tot $n = 6$ de huurverhoging in procenten het gunstigst is.



Figuur 1.3

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Waarom zijn de twee gegeven formules directe formules?

b Maak tabellen bij beide formules op je grafische rekenmachine in de functie-mode.

c Maak ook tabellen bij beide formules op je grafische rekenmachine in de rijen-mode. Doe eventueel eerst het **Practicum**.

d Ga na, dat tot $n = 6$ de huurverhoging in procenten het gunstigst is.

Voorbeeld 2

Je wilt een kamer huren voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.

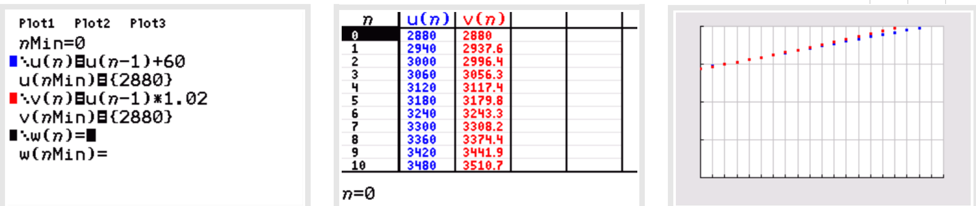
Bij een jaarlijkse huurverhoging van € 60 is de huurprijs na n jaren: $h_1(n) = h_1(n-1) + 60$ met $h_1(0) = 2880$.

Bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren: $h_2(n) = h_2(n-1) \cdot 1{,}02$ met $h_2(0) = 2880$.

Bereken met je grafische rekenmachine tot welk jaar de huurverhoging in procenten voordeliger is.

Antwoord

Omdat dit twee recursieformules zijn kun je beide alleen invoeren als je rekenmachine is ingesteld op werken met rijen. Dan maak je ook snel een tabel van beide rijen samen. Je ziet dat tot $n = 6$ de huurverhoging in procenten het gunstigst is.



Figuur 1.4

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Waarom zijn de twee gegeven formules recursieformules?

b Maak tabellen bij beide formules op je grafische rekenmachine in de rijen-mode. Bekijk eventueel het **Practicum** nog eens.

c Maak grafieken bij beide rijen.

d Ga na, dat tot $n = 6$ de huurverhoging in procenten het gunstigst is.

Voorbeeld 3

Je hebt op 1 januari 2008 een saldo van € 1240,00.
En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten. Verder ga je aan het begin van elke maand 50 euro naar die spaarrekening overmaken, te beginnen op 1 februari 2008. Je krijgt aan het eind van elke maand rente van 0,5% over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.
Wanneer is je saldo meer dan € 3000,00?

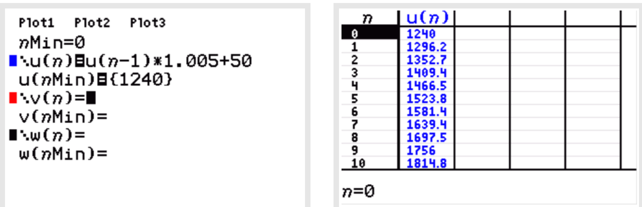
Figuur 1.5

Antwoord

Nu is het maken van een directe formule nog niet eenvoudig. Maar de recursie is wel eenvoudig: je vermenigvuldigt telkens je saldo met 1,005 en telt er 50 euro bij op. Neem je $t = 0$ op 1-1-2008 en t in maanden, dan geldt voor het saldo S:

$S(t) = S(t-1) \cdot 1{,}005 + 50$ met $S(0) = 1240$.

Voer dit in je GR in en bekijk de tabel van de rij. Op $t = 30$ zit je voor het eerst boven de 3000 euro. Dan heb je 30 maanden gespaard.



Figuur 1.6

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** wordt bekeken hoe je bij een rij een formule kunt maken. Een directe formule is altijd het handigst, dan hoef je de rij niet vanaf het begin op te bouwen, maar kun je elke waarde direct berekenen. Maar niet altijd is zo'n directe formule gemakkelijk te vinden.

a Licht de gevonden recursieformule toe. Waarom moet je bij een recursieformule ook altijd minstens één term van de rij weten?

b Laat zien hoe de recursie werkt door met de hand de eerste vier termen van de rij te berekenen. Controleer je antwoorden door op de grafische rekenmachine een tabel te maken bij deze rij.

Opgave 6

Hier zie je een aantal rijen waarvan de regelmaat is gegeven. Stel telkens zowel een recursieformule als een directe formule op. Nummer de termen steeds vanaf 0.

a De even getallen: $0, 2, 4, 6, 8, \ldots$

b De oneven getallen: $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

c De kwadraten: $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

d De faculteiten: $1, 1, 2, 6, 24, 120, \ldots$

Verwerken

Opgave 7

Bekijk de rij 2, 5, 8, 11, 14, ... (elke term is 3 groter dan de voorgaande term).

a Schrijf de volgende vijf termen op.

b Beschrijf de rij met een directe formule.

c Beschrijf de rij met een recursieformule.

Opgave 8

Bekijk de rij 2, 6, 18, 54, 162, ... (elke term is 3 maal de voorgaande term).

a Schrijf de tiende term op.

b Beschrijf de rij met een directe formule.

c Beschrijf de rij met een recursieformule.

Opgave 9

A en B huren elk een winkelpand voor € 20.000 per jaar. De huur voor A wordt jaarlijks verhoogd met € 1000, die van B wordt jaarlijks verhoogd met 4%.

a Stel een formule op voor de huur a_n van A in jaar n (nummer de jaren met 0, 1, 2, ...).

b Stel een formule op voor de huur b_n van B in jaar n (nummer de jaren met 0, 1, 2, ...).

c Na hoeveel jaren wordt de huur van B groter dan die van A?

B nummert de jaren toch liever met 1, 2, 3, ...

d Hoe luidt dan de formule voor zijn huur?

A betrekt zijn pand in 2003 en wil de jaren nummeren met 2003, 2004, 2005, ...

e Hoe luidt dan de formule voor zijn huur?

Opgave 10

Hieronder staat van een aantal rijen het begin. Het vervolg raad je zelf wel. Stel voor elke rij een mogelijke directe formule op. Begin de nummering met 0.

a $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

b $6, 11, 16, 21, \ldots$

c $1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots$

d $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots$

e $1024, 512, 256, 128, 64, 32, \ldots$

f $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$

g $13, 8, 3, -2, -7, \ldots$

h $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

Opgave 11

Stel recursieformules op voor de rijen bij b, c, d, e en g van de vorige opgave indien mogelijk.

Opgave 12

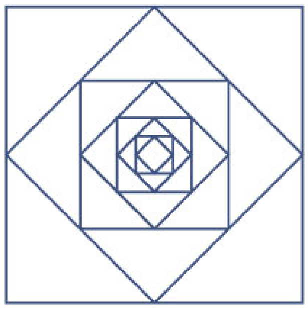
De rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ is gegeven door de directe formule $t_n = n^2 + n$.

a Schrijf de eerste 10 termen op.

b Bepaal de kleinste n waarvoor $t_n > 1000$.

Opgave 13

Bij een vierkant V_0 met zijden van 1 meter zijn de middens van de zijden de hoekpunten van een kleiner vierkant V_1. Net zo maak je V_2 bij V_1, enzovoort. Laat $O(n)$ de oppervlakte van V_n in m^2 zijn en $Z(n)$ de lengte van zijn zijde in m.



Figuur 1.7

a Hoe lang zijn de zijden van V_5 en hoe groot is de oppervlakte van V_5?

b Stel een directe formule op voor $Z(n)$ en voor $O(n)$.

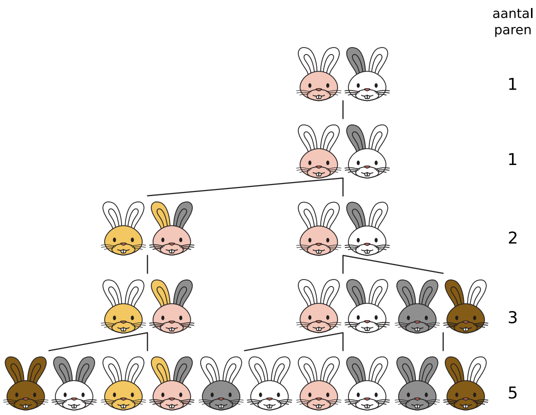
c Stel een recursieformule op voor $Z(n)$ en voor $O(n)$.

d Breng de rij $O(0)$, $O(1)$, $O(2)$, ... met de grafische rekenmachine in beeld. Kun je daarmee bepalen voor welke n (in theorie) $O(n)$ kleiner wordt dan 1 mm^2? Zo nee, probeer een andere manier.

Toepassen

Opgave 14: Konijnen

Fibonacci was een Italiaanse wiskundige.
In zijn boek *Liber Abaci* stelt Fibonacci een eenvoudige vraag: “Als een konijnenpaar elke maand een jong konijnenpaar voortbrengt, dat na twee maanden zelf ook weer een nieuw konijnenpaar voortbrengt, hoeveel konijnenparen heb je dan na verloop van tijd, verondersteld dat ze allen in leven blijven?”



Figuur 1.8

a Zet deze redenering voort.
Hoeveel konijnenparen zijn er dan vijf maanden na de start?

b Het aantal konijnenparen per maand vormt de rij u_n.
Maak van deze rij een tabel met n van 0 t/m 6.

c Er zit een bepaalde regelmaat in deze rij, maar hij is niet eenvoudig te vinden. Zoek de regelmaat.

d Bereken de achtste en de negende term.

e Hoeveel konijnenparen zijn er na een jaar?

Testen

Opgave 15

De rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ is gegeven door de directe formule $t_n = 1 + 2n$.

a Schrijf de eerste twaalf termen op.

b Hoe groot is de 100-ste term?

c Aan welke recursieformule voldoet deze rij?

d Geef de eerste zes termen van een andere rij die aan dezelfde recursie voldoet.

Opgave 16

De rij $u(0), u(1), u(2), \ldots$ is gegeven door $u(n) = 10 + \frac{1}{2}n(n+1)$.

a Schrijf de eerste tien termen op.

b Gebruik de grafische rekenmachine om de kleinste n te vinden waarvoor geldt: $u(n) > 10^6$.

Opgave 17

Bij de volgende beginstukken van rijen ligt het vervolg voor de hand. Geef bij elk geval een directe en een recursieformule bij nummering vanaf 0.

a $4, 8, 12, 16, 20, \ldots$

b $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

c $1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots$

d $\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, \ldots$

Practicum

Met de volgende practica leer je enkele technieken op de GR die bij het werken met rijen onontbeerlijk zijn.

- **Rijen met de TI84**
- **Rijen met de TInspire**
- **Rijen met de Casio fx-CG50**
- **Rijen met de HP prime**
- **Rijen met de NumWorks**

Overigens kun je voor het echte werken met rijen veel beter **Excel** gebruiken. Deze tabel kun je gemakkelijk maken:

- met directe formules:
  in cel B4 zet je: =2880+$A4*60
  in cel C4 zet je: =2880*1,02^$A4
  en dan naar beneden kopiëren.
- met recursieformules:
  in cel B4 zet je 2880 en in cel B5: =$B4+60
  in cel C4 zet je 2880 en in cel B5: =$B4*1,02
  en dan naar beneden kopiëren.

huurprijs per jaar		
	jr.verhoging 60 euro	jr.verhoging 2%
n	h_1	h_2
0	2880	2880,00
1	2940	2937,60
2	3000	2996,35
3	3060	3056,28
4	3120	3117,40
5	3180	3179,75
6	3240	3243,35
7	3300	3308,21
8	3360	3374,38
9	3420	3441,87
10	3480	3510,70
11	3540	3580,92
12	3600	3652,54
13	3660	3725,59
14	3720	3800,10
15	3780	3876,10
16	3840	3953,62

Figuur 1.9

2.2 Verschil en som

Inleiding

Heb je te maken met een vaste huurverhoging per jaar, dan weet je hoeveel je jaarlijks meer moet gaan betalen voor je studentenkamer. Maar heb je een vaste procentuele huurverhoging, dan weet je dat niet onmiddellijk. Je betaalt dan immers een vast percentage van een steeds hoger wordend bedrag.
En hoe zit het met het bedrag dat je in totaal kwijt bent als je bijvoorbeeld de kamer vijf jaar huurt?

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip verschilrij en het begrip somrij en bijbehorende notaties;
- de som van een aantal termen van een rij berekenen met de rekenmachine.

Voorkennis

- rijen in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met directe formules en recursieformules.

Verkennen

Opgave V1

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.

- bij een jaarlijkse huurverhoging van 60 euro betaal je na n jaar $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$ euro/jaar.
- bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren:
  $h_2(n) = 2880 \cdot 1{,}02^n$ euro/jaar.

a Bij de eerste manier van huur verhogen betaal je elk jaar 60 euro meer. Hoe zit dat bij de tweede manier?

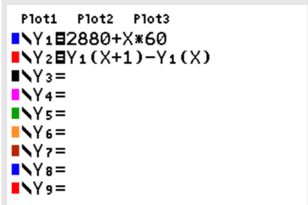
b En hoeveel ben je bij beide manieren gerekend over de eerste vijf jaar in totaal kwijt?

Uitleg

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.

- bij een jaarlijkse huurverhoging van 60 euro betaal je na n jaar $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$ euro/jaar.
- bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren: $h_2(n) = 2880 \cdot 1{,}02^n$ euro/jaar.

Bij de eerste manier van huur verhogen betaal je elk jaar 60 euro meer. Bij de tweede manier is dit telkens een ander bedrag. De rij $V(n) = h_2(n) - h_2(n-1)$ brengt die getallen in beeld. Dit is de verschilrij van rij h_2. Je geeft hem wel aan als $V(n) = \Delta h_2(n)$.
Je kunt hem met de grafische rekenmachine wel maken, maar dan alleen als je de directe formule van de rij in de functie-mode hebt ingevoerd. In de rij-mode kun je geen verschilrij maken.

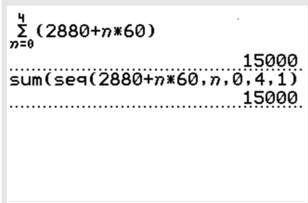


Figuur 2.2

Wil je weten hoeveel je over de eerste vijf jaar gerekend aan huur moet betalen, dan moet je in het eerste geval $S(4) = h_1(0) + h_1(1) + h_1(2) + h_1(3) + h_1(4)$ uitrekenen. Een korte schrijfwijze hiervoor is:

$$S(4) = \sum_{n=0}^{4} h_1(n)$$

Je rekenmachine heeft een aantal functies om dit mee te berekenen.
En voor rij h_2 gaat dit net zo...



Figuur 2.3

Opgave 1

In de **Uitleg** is sprake van rijen van verschillen. Die verschilrijen maak je met je grafische rekenmachine. Maar dan moet je wel de directe formule van de rij hebben.

a Maak de verschilrij V_1 bij h_1. Hij is nogal saai. Waarom is dat zo?

b Maak nu de verschilrij V_2 bij h_2.

c Hoeveel is $V_2(5)$?

d Waarom bestaan $V_1(0)$ en $V_2(0)$ eigenlijk niet?

Opgave 2

De verschilrijen in de **Uitleg** gaan over de jaarlijkse huurverhoging. Maar je kunt ook kijken naar het totaalbedrag dat je gerekend over een aantal jaren kwijt bent aan huur. Je moet daarvoor de termen van de rijen h_1 en h_2 optellen.

a $S_1(5) = h_1(0) + h_1(1) + h_1(2) + h_1(3) + h_1(4) + h_1(5)$. Hoe kun je dit korter opschrijven?

b Bereken $S_1(5)$ met je grafische rekenmachine. Wat stelt dit bedrag precies voor?

c Bereken ook $S_2(5)$ met je grafische rekenmachine.

d Is de procentuele huurverhoging de eerste zes jaar gunstiger?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **verschilrij** van een rij $u(n)$ is de rij
$V(n) = \Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$.
Je kunt hem met de grafische rekenmachine maken, maar alleen als je een directe formule van de rij in de functie-mode hebt ingevoerd. In de rij-mode kun je geen verschilrij maken.

De **somrij** van een rij $u(n)$ is de rij
$S(n) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + ... + u(n)$.
Een korte schrijfwijze hiervoor is:

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)$$

De Griekse hoofdletter Σ (Sigma) wordt gebruikt als somteken. Je rekenmachine heeft een aantal functies om dit mee te berekenen. Pas er wel voor op dat de som van de eerste n termen gelijk is aan $S(n-1)$ omdat je bij 0 begint te nummeren.

Zo is de som van de derde tot en met de twintigste term gelijk aan:

$$S(19) - S(1) = \sum_{k=2}^{19} u(k)$$

Voor je rekenmachine is dat allemaal geen probleem...
Maar let wel goed op in situaties dat er genummerd wordt vanaf 1.

Voorbeeld 1

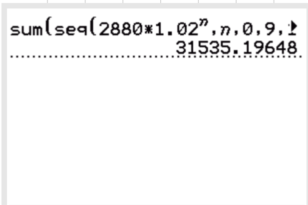
Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.
Bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren:
$h_2(n) = 2880 \cdot 1{,}02^n$ euro/jaar.
Stel een formule op voor jaarlijkse huurverhogingen.
Bereken de totale huurprijs over de eerste 10 jaren.

Antwoord

De formule voor de jaarlijkse huurverhogingen is de formule voor de verschilrij van h_2:
$V(n) = \Delta h_2(n) = h_2(n) - h_2(n-1) = 2880 \cdot 1{,}02^n - 2880 \cdot 1{,}02^{n-1}$
Dit kun je herleiden:
$V(n) = 2880 \cdot 1{,}02^{n-1}(1{,}02 - 1) = 57{,}6 \cdot 1{,}02^{n-1}$.
Merk op dat bij de verschilrij moet worden genummerd vanaf $n = 1$.

De totale huurprijs over de eerste 10 jaar is: $S(9) = \sum_{n=0}^{9} 2880 \cdot 1{,}02^n$.

Met de grafische rekenmachine vind je: $S(9) \approx 31535{,}20$.



Figuur 2.4

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** worden de verschil en som van een rij met huurprijzen nog eens bekeken.

a De nummering van de huurprijzen begint bij 0. Hoe zit dat met de verschilrij? En met de somrij?

b Maak een tabel van de verschilrij zonder er eerst een formule voor af te leiden.

c Voer zelf de afleiding van de formule voor de verschilrij uit. Ga na, dat de waarden van die verschilrij overeenkomen met de tabel bij b.

d Leg uit, waarom de totale huurprijs over de eerste 10 jaren $S(9)$ is en niet $S(10)$.

e Bereken met je grafische rekenmachine $\sum_{n=0}^{8} 2880 \cdot 1{,}02^n$. Wat heb je nu precies berekend?

Voorbeeld 2

Gegeven is de rij kwadraten door $k_n = n^2$ met n een geheel getal en $n \geq 1$. Bekijk de verschilrij en stel er een formule voor op.
Stel op grond van de verschilrij een recursieformule voor de rij kwadraten op.

Antwoord

De verschilrij is $V(n) = \Delta k_n = n^2 - (n-1)^2$.
Haakjes wegwerken geeft: $V(n) = 2n - 1$ met $n \geq 2$.

Dus is $k_n - k_{n-1} = 2n - 1$.
En dat betekent: $k_n = k_{n-1} + 2n - 1$.
De recursieformule is daarom: $k_n = k_{n-1} + 2n - 1$ met $k_1 = 1$ en n geheel en $n \geq 2$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** wordt de rij kwadraten bekeken.

a Leid zelf de formule voor de verschilrij V_n af. Waarom moet $n \geq 2$?

b Bereken V_{100} zowel met behulp van de formule voor V_n als vanuit de kwadratenrij zelf.

Bekijk nu de rij met derde machten: $d_n = n^3$ voor $n \geq 1$.

c Leid een formule af voor de verschilrij van d_n.

d Je ziet in **Voorbeeld 2** hoe je door naar de verschilrij te kijken een recursieformule voor de kwadratenrij kunt maken. Maak nu een recursieformule voor de rij met derde machten.

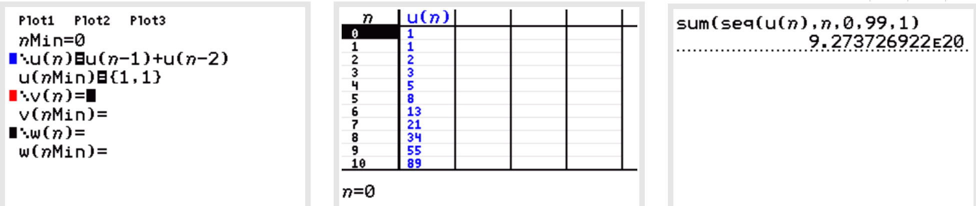
Voorbeeld 3

De beroemde rij van Fibonacci is: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$
Wat valt je op als je de bijbehorende verschilrij bekijkt?
Bereken de som van de eerste 100 termen van de rij van Fibonacci.

Antwoord

De verschilrij is: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$
Behalve de eerste term is de verschilrij gelijk aan de rij zelf, alleen de nummering verschuift met 2. (Denk er om dat er geen nulde term is bij de verschilrij!)
Noem nu de termen van de rij van Fibonacci $f(n)$ met $n = 0,1,2,...$
Dan is dus de verschilrij: $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1) = f(n-2)$.
De rij van Fibonacci heeft daarom als recursieformule:
$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ met $f(0) = 1$ en $f(1) = 1$.

Nu kun je de rij in de grafische rekenmachine invoeren en de som van de eerste 100 termen laten berekenen door de machine. (Het kost wat rekentijd...)



Figuur 2.5

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** maak je kennis met de rij van Fibonacci. Je zult er later nog toepassingen van tegenkomen.

a Bekijk hoe de recursieformule van deze rij wordt opgesteld.

b Bereken met je grafische rekenmachine de som van de eerste 20 termen van de rij van Fibonacci.

Opgave 6

Gegeven is de rij $t(i) = 5i + 2$ voor $i \geq 0$.

a Stel een formule op voor de verschilrij $V(i)$.

b Bereken $\sum_{i=0}^{5} t(i)$. Is dit nu de vierde, vijfde of de zesde term van de somrij $S(i)$? Is het $S(4)$, $S(5)$ of $S(6)$?

c Welke termen van $t(i)$ moet je optellen om $\sum_{i=2}^{5} t(i)$ te berekenen? Waarom is dit gelijk aan $S(5) - S(1)$?

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de rij $t(n) = 2n + 1$ met $n \geq 0$.

a Schrijf de eerste zes termen van de verschilrij $V(n)$ op.

b Schrijf de eerste zes termen van de somrij $S(n)$ op.

c Bereken $S(19)$.

d Bereken $\sum_{n=10}^{19} t(n)$.

Opgave 8

Bekijk de rij $2, 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, ...$
Je hoeft niet op zoek te gaan naar een directe formule, hoewel die wel is te vinden. De n-de term van deze rij is $u(n)$ met $n \geq 0$.

a Welke verschilrij hoort er bij deze rij?

b Beschrijf de verschilrij met een directe formule.

c Leid nu voor $u(n)$ een recursieformule af.

d $S(n)$ is de bijbehorende somrij. Bereken $S(20)$.

e Bereken ook $\sum_{n=15}^{20} u(n)$.

Opgave 9

Dit toenamediagram kun je opvatten als de weergave van zes termen van een verschilrij.

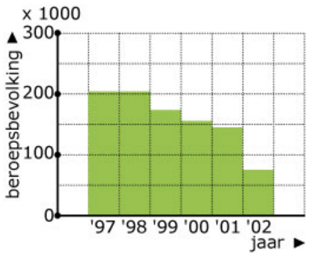
a Schrijf de grootte (ongeveer) van deze termen op.

b Stel dat de beroepsbevolking aan het begin van 1997 bestond uit 3 miljoen personen. Hoe groot ongeveer was dan de beroepsbevolking aan het eind van 1997? En aan het eind van 1999?

c Is er een verband tussen toenamediagrammen en verschilrijen?

d Welke uitspraken over de periode 1997 tot en met 2002 hieronder zijn juist?

1. De beroepsbevolking is elk jaar toegenomen.
2. Over de hele periode is de beroepsbevolking afgenomen.
3. In 2002 is de beroepsbevolking minder toegenomen dan in 2001.
4. Aan het eind van 2002 was de beroepsbevolking kleiner dan aan het eind van 2001.



Figuur 2.6

Opgave 10

De rij $t_0, t_1, t_2, ...$ is gegeven door $t_n = 0{,}5n^2 + 1{,}5n + 1$.

a Schrijf de eerste tien termen van deze rij op.

b Schrijf de eerste negen termen op van de verschilrij.

c Schrijf de eerste acht termen op van de verschilrij van die verschilrij.

Bekijk nu de rij $u_0, u_1, u_2, ...$ met $u_n = n^2 + 5n$.

d Bepaal weer een stuk van de verschilrij en de verschilrij van de verschilrij. Is er een overeenkomst met het antwoord van c? Geef een verklaring.

Toepassen

Opgave 11: Stoelen in een theater

In een theater zijn 30 rijen met stoelen. Op de eerste rij staan 40 stoelen, op de tweede rij 42, op de derde rij 44, enzovoort.

Hoeveel stoelen staan er in dit theater?

Opgave 12: Salarisverhoging

Iemand heeft een nieuwe baan. Zij begint met een jaarsalaris van € 31500,00. Elk jaar wordt haar salaris met $1,5$% verhoogd.

a Stel dat deze persoon tien jaar lang deze baan houdt. Hoeveel verdient zij dan in totaal in die tien jaar? Rond af op honderden euro.

b Bepaal de jaarlijkse salarisverhogingen in de eerste zes jaar.

Opgave 13: Periodieke rijen

Een rij u_0, u_1, ... noemen we periodiek met periode p als p het kleinste positieve gehele getal is waarbij voor alle waarden van n geldt dat $u_{n+p} = u_n$.
Een voorbeeld van een periodieke rij met periode 4 is de rij 1, 5, 16, 12, 1, 5, 16, 12, 1, 5, 16, 12, ...

Gegeven is een rij u_0, u_1, u_2, ... waarvoor geldt:

$$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_1 & = & 7 \\ u_{n+2} & = & \frac{5}{u_n \cdot u_{n+1}} \quad (n = 0,1,2,3,...) \end{cases}.$$

a Toon aan dat de rij periodiek is.

b Bereken u_{2005}.

We nemen in de bovengenoemde rij in plaats van 3 en 7 de startwaarden a en b. Dus $u_0 = a$ en $u_1 = b$.

c Bereken exact voor welke waarde van a en voor welke waarde van b de rij periode 1 heeft.

We kiezen weer $u_0 = 3$ en $u_1 = 7$.
We definiëren een bij de rij u_0, u_1, u_2, ... horende productrij P_0, P_1, P_2, ... als volgt:

$$\begin{cases} P_0 & = & u_0 \\ P_1 & = & u_0 \cdot u_1 \\ P_2 & = & u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \\ ... \\ P_n & = & u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_n \quad (n = 3,4,5,...) \end{cases}$$

d Toon aan dat $P_{3k+1} = 21 \cdot 5^k$ voor elke positieve gehele waarde van k.

(bron: examen wiskunde B vwo 2005, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 14

De rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ is gegeven door de directe formule $u_n = n^2 - n$.

a Bereken de eerste vijf termen van de verschilrij V_n van deze rij.

b Stel een directe formule op voor V_n. Maak hiermee een recursieformule voor u_n.

c Bereken de eerste vijf termen van de somrij van deze rij.

d Bereken $\sum_{n=6}^{8} u_n$.

2.3 Rekenkundige rijen

Inleiding

Het voorbeeld van het huren van een studentenkamer met twee manieren van huur verhogen is niet voor niks gekozen om met rijen kennis te maken. Bij de éne soort huurverhoging wordt de jaarlijkse huur met een vast bedrag verhoogd. Rijen waarbij je de termen kunt bepalen door (vanaf de eerste term) steeds hetzelfde getal op te tellen bij de voorgaande term heten rekenkundige rijen.
Dergelijke rijen ga je nu nader bestuderen.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip rekenkundige rij;
- de somformule voor een rekenkundige rij.

Voorkennis

- rijen in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met directe formules en recursieformules;
- werken met de verschilrij en de somrij bij een gegeven rij.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de beroemde wiskundige **Carl Friedrich Gauss**. Over hem gaat het verhaal dat hij als 11-jarig jongetje door zijn leraar de (in de ogen van de leraar) vervelende opdracht kreeg om de getallen 1 t/m 100 op te tellen.
Waarop de kleine Carl na enig nadenken zei: ‘Het antwoord is 5050’.

a Hoe vond hij dit zo snel uit zijn hoofd?

b En wat heeft dit met de titel van dit onderdeel te maken?

Figuur 3.2

Uitleg

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar. Bij een jaarlijkse huurverhoging van 60 euro betaal je $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$ euro/jaar.

Bij deze manier van huur verhogen betaal je elk jaar 60 euro meer. Bekijk je de grafiek van deze rij op je grafische rekenmachine dan zie je een rij punten die op een rechte lijn liggen: h_1 is een lineaire functie. Je noemt een rij waarbij de directe formule een lineaire functie is een **rekenkundige rij**.

Wil je weten hoeveel je over de eerste vijf jaar gerekend aan huur moet betalen, dan moet je
$S(4) = h_1(0) + h_1(1) + h_1(2) + h_1(3) + h_1(4) =$
$2880 + 2940 + 3000 + 3060 + 3120$
uitrekenen. Dat kun je uit het hoofd doen.
Je zet dan de optelling twee keer onder elkaar en telt ze op:

$2880 + 2940 + 3000 + 3060 + 3120$

$3120 + 3060 + 3000 + 2940 + 2880 \quad +$

$6000 + 6000 + 6000 + 6000 + 6000$

Dus je krijgt: $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6000 = 15000$ in totaal.

Deze handigheid kun je bij elke rekenkundige rij toepassen. De som van de eerste n termen is dan:

$S(n-1) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$.

Opgave 1

In de **Uitleg** is sprake van een rekenkundige rij.

a Hoe kun je aan de directe formule van een rij zien dat hij rekenkundig is?

b Hoe ziet de recursieformule van een rekenkundige rij er altijd uit?

Opgave 2

Bij rekenkundige rijen kun je de som van een aantal termen op een handige manier vinden zonder de grafische rekenmachine te hoeven gebruiken.

a Bereken $100 + 150 + 200 + 250 + ... + 900$ op dezelfde manier als in de **Uitleg**.

b Bereken nu $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$ op deze manier.

Opgave 3

Een rekenkundige rij ziet er altijd zo uit: a, $a + v$, $a + 2 \cdot v$, $a + 3 \cdot v$, $a + 4 \cdot v$, ...

a Hoe ziet de directe formule van deze rij $u(n)$ er uit?

b Hoe ziet de recursieformule van deze rij er uit?

c Bereken de som van de eerste 10 termen van deze rij.

d Bereken de som van de eerste n termen van deze rij.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **rekenkundige rij** is een rij waarvan de directe formule een lineaire functie is. Dit betekent dat elke term ontstaat door bij zijn voorganger een vast getal v op te tellen. De rij ziet er dus uit als a, $a + v$, $a + 2v$, $a + 3v$,...

- directe formule: $u(n) = a + n \cdot v$ met $n = 0,1,2,3,4,...$
- recursieformule: $u(n) = u(n-1) + v$ met $u(0) = a$ en $n = 1,2,3,4,...$

De **verschilrij van een rekenkundige rij** is nogal saai: alle verschillen zijn gelijk aan v.

Voor de **somrij van een rekenkundige rij** kun je gebruik maken van het handigheidje dat ook bij de uitleg is gebruikt. Dan blijkt dat de som van de eerste n termen is:

$S(n-1) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$

ofwel:

$S(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} u(k) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (u(0) + u(n-1))$.

Voorbeeld 1

Je ziet hier het begin van drie rijen:

- rij u: $10, 15, 20, 25, \ldots$
- rij v: $10, 20, 40, 80, \ldots$
- rij w: $10, 40, 90, 160, \ldots$

Welke van deze rijen is (waarschijnlijk) een rekenkundige rij? Stel een daarbij passende directe formule op.

Antwoord

Om te onderzoeken of een rij rekenkundig is bekijk je de verschillen tussen opvolgende termen. Als die steeds hetzelfde getal v opleveren, heb je te maken met een rekenkundige rij. Dit is alleen het geval bij rij u.

De directe formule voor rij u vind je door vast te stellen, dat:

- $u(0) = 10$;
- het verschil tussen twee opvolgende termen is steeds 5.

De gevraagde directe formule wordt: $u(n) = 10 + 5n$ met $n = 0,1,2,3,4,\ldots$

Opgave 4

Welke van de volgende rijen zijn rekenkundig? Geef van elke rekenkundige rij de directe formule en het complete recursievoorschrift. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 1**.

a $5, 14, 23, 32, 41, \ldots$

b $320, 160, 80, 40, \ldots$

c $10, 2, -6, -14, \ldots$

d $1, 4, 9, 16, \ldots$

e $1, 3, 9, 27, \ldots$

f $2, 6, 18, 54, \ldots$

g $5, 5\sqrt{3}, 15, 15\sqrt{3}, 45, \ldots$

Voorbeeld 2

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar. Bij een jaarlijkse huurverhoging van 60 euro betaal je na n jaar $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$ euro/jaar.
Hoeveel betaal je in totaal gerekend over de eerste 10 jaar?

Antwoord

Je moet $S(9)$ berekenen:

$S(9) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (u(0) + u(9)) = 5 \cdot (2880 + 3420) = 31500$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe de somformule voor een rekenkundige rij wordt gebruikt. Gegeven is de rij $h_n = 2400 + 50n$ met $n \geq 0$.

a Bereken de som van de eerste 10 termen van deze rij met je grafische rekenmachine.

b Bereken de som van de eerste 10 termen van deze rij met de somformule voor een rekenkundige rij.

c Bereken $\sum_{n=5}^{9} h_n$. Gebruik weer de somformule.

Opgave 6

Janna is net 16 geworden en wil graag een scooter kopen. Ze leent daartoe op 1 juli 2011 € 2500 van de bank. Ze zal dit terug betalen in 25 maandelijkse termijnen van 100 euro. Maar de bank vraagt rente: elke maand 1% over het bedrag dat op dat moment nog niet is afgelost.

a Hoeveel moet Janna op 1 augustus aan de bank betalen?

b En hoe groot is dat bedrag op 1 september? En op 1 oktober?

c Waarom heet dit wel een lineaire aflossingsvorm?

d De rij met te betalen bedragen is een rekenkundige rij. Stel voor die rij een directe formule $B(t)$ op. Neem $t = 0$ op 1 juli 2011 en geef aan welke waarden t aanneemt.

e Bereken met behulp van de somformule voor een rekenkundige rij hoeveel Janna in totaal aan de bank betaalt voor haar scooter.

Voorbeeld 3

Een rekenkundige rij is gegeven door $u(n) = a + n \cdot v$ met $n = 0,1,2,3,4,\ldots$
Stel een formule op voor de som van de 11de tot en met de 26ste term.

Antwoord

Gebruik dat de som van de eerste n termen is:

$S(n-1) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$.

De som van de eerste 10 termen is $S(9) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (u(9) + u(0)) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (2a + 9v)$.

De som van de eerste 26 termen is $S(25) = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot (u(25) + u(0)) = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot (2a + 25v)$.

De som van de 11de term ($u(10)$) tot en met de 26ste term ($u(25)$) is dus:
$S(25) - S(9) = 13(2a + 25v) - 5(2a + 9v) = 16a + 280v$.

Merk op dat dit hetzelfde is als $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (u(10) + u(25)) = 8 \cdot (a + 10v + a + 25v)$.

Dus de somformule $\frac{1}{2} \cdot n \cdot$ (eerste term + laatste term) geldt ook voor een aaneengesloten rijtje tussentermen.

Opgave 7

Je ziet in **Voorbeeld 3** hoe je een formule kunt opstellen voor de som van een deel van een rekenkundige rij $u(n) = a + n \cdot v$ met $n \geq 0$.

a Stel een formule op voor $S(20)$.

b Stel een formule op voor $\sum_{n=10}^{20} u(n)$.

Verwerken

Opgave 8

De rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ is gegeven door $t_n = 5n + 2$.

a Laat zien dat dit een rekenkundige rij is.

b Schrijf de som van de eerste zeven termen met het Σ-symbool en bereken die som.

c Schrijf de som van de daarop volgende zeven termen met het Σ-symbool en bereken die som.

Opgave 9

Hieronder staan telkens de twee eerste termen van een rekenkundige rij $r(n)$ met $n \geq 0$. Schrijf bij elk geval de eerste zeven termen op en geef een directe formule voor de rij.

a $5, 7$

b $5, 2$

c $1, \frac{9}{10}$

d $5, 5$

Bij elk van deze rijen kun je naar de som van een aantal termen kijken.

e Bepaal bij elk van deze rijen de som van de eerste 12 termen.

f Bepaal bij elk van deze rijen ook $\sum_{n=5}^{10} r(n)$.

Opgave 10

Bereken:

a $\sum_{n=0}^{20} (50 + 2{,}5n)$

b $\sum_{n=10}^{20} (50 + 2{,}5n)$

Opgave 11

Van een rekenkundige rij is de derde term 10 en de zevende term 22. Bepaal een recursieformule en een directe formule voor de rij. Geef duidelijk je nummering aan!

Toepassen

Opgave 12: Lineaire hypotheek

Iemand koopt een huis voor € 240.000. Dit geld leent hij bij een bank, dat heet een hypotheek. Hij komt met de bank overeen dat hij deze hypotheek in 30 jaar volledig aflost in even grote bedragen per jaar. Daar bovenop moet hij de bank jaarlijks rente betalen over zijn schuld van dat jaar, het rentepercentage wordt voor 30 jaar vastgezet op 4%. Om het eenvoudig te houden is $t = 0$ het moment waarop hij het geld leent en begint zijn aflossing een jaar later op $t = 1$.

a Hoeveel moet deze persoon op $t = 1$ aan de bank betalen aan aflossing en rente?

b En hoe groot is dat bedrag op $t = 2$? En op $t = 3$?

c Waarom heet dit wel een lineaire hypotheek? En waarom komt hij niet veel voor?

d De rij met te betalen bedragen is een rekenkundige rij. Stel voor die rij een directe formule op. Geef aan welke waarden t aanneemt.

e Bereken met behulp van de somformule voor een rekenkundige rij hoeveel hij in totaal aan de bank betaalt voor dit huis.

Opgave 13: Startnummers marathon

Het aantal deelnemers aan een marathon ligt tussen de 10 en 100. Ze dragen de startnummers 1, 2, 3, ... enzovoort. Een van de deelnemers merkt op dat de som van de nummers die kleiner zijn dan zijn eigen startnummer gelijk is aan de som van de nummers die groter zijn dan zijn eigen startnummer.

Wat is zijn startnummer en hoeveel lopers deden er mee aan de marathon?

Testen

Opgave 14

Bereken $1024 + 1022 + 1020 + \ldots + 4 + 2$.

Opgave 15

Bereken:

a $\sum_{i=0}^{20} \left(8 + \frac{1}{3}i\right)$

b $\sum_{k=1}^{100} (5 + 2k)$

Opgave 16

Samir koopt een nieuwe PC. Hij leent daartoe op 1 januari 2010 € 800 van de bank. Hij moet dit terug betalen in 16 maandelijkse termijnen. Maar de bank vraagt rente: elke maand 1% over het bedrag dat op dat moment nog niet is afgelost.

a Hoeveel moet hij op 1 maart 2010 aan de bank betalen?

b De rij met te betalen bedragen is een rekenkundige rij. Stel voor die rij een directe formule $B(t)$ op. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010 en geef aan welke waarden t aanneemt.

c Bereken met behulp van de somformule voor een rekenkundige rij hoeveel Samir in totaal aan de bank betaalt voor zijn PC.

2.4 Meetkundige rijen

Inleiding

Het voorbeeld van het huren van een studentenkamer met twee manieren van huur verhogen is niet voor niks gekozen om met rijen kennis te maken. Bij de éne soort huurverhoging wordt de jaarlijkse huur met een vast percentage verhoogd. Rijen waarbij je de termen kunt bepalen door (vanaf de tweede term) steeds de voorganger met hetzelfde getal te vermenigvuldigen heten meetkundige rijen. Dergelijke rijen ga je nu nader bestuderen.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip meetkundige rij;
- de somformule voor een meetkundige rij.

Voorkennis

- rijen in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met directe formules en recursieformules;
- werken met de verschilrij en de somrij bij een gegeven rij.

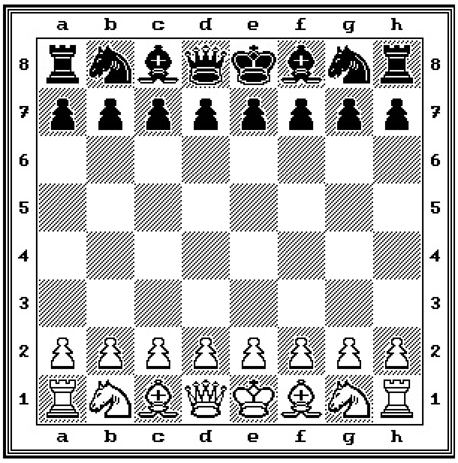
Verkennen

Opgave V1

Er bestaat een mythe over de uitvinding van het schaakspel. Die vertelt dat de uitvinder ervan (Sissah ben Dahir) van zijn koning elke willekeurige beloning mocht vragen. Hij vroeg: 1 graankorrel voor het eerste veld van het schaakbord, 2 voor het tweede veld, 4 voor het derde veld, 8 voor het vierde veld, enz.

a Hoeveel graankorrels horen er dan bij het 64ste veld?

b Hoeveel graankorrels vroeg hij in totaal? Enig idee hoeveel graan dat is?



Figuur 4.1

Uitleg

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar. Bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% betaal je $h_2(n) = 2880 \cdot 1{,}02^n$ euro/jaar.

Bekijk je de grafiek van deze rij op je grafische rekenmachine dan zie je een rij punten die op een kromme stijgende lijn liggen: h_2 is een exponentiële functie. Je noemt een rij waarbij de directe formule een exponentiële functie is een **meetkundige rij**.

Wil je weten hoeveel je over de eerste vijf jaar gerekend aan huur moet betalen, dan moet je
$S(4) = h_2(0) + h_2(1) + h_2(2) + h_2(3) + h_2(4) =$
berekenen.

$S(4) = 2880 + 2880 \cdot 1{,}02 + 2880 \cdot 1{,}02^2 + 2880 \cdot 1{,}02^3 + 2880 \cdot 1{,}02^4$
$1{,}02 \cdot S(4) = 2880 \cdot 1{,}02 + 2880 \cdot 1{,}02^2 + 2880 \cdot 1{,}02^3 + 2880 \cdot 1{,}02^4 + 2880 \cdot 1{,}02^5$

Van elkaar aftrekken geeft:
$S(4) - 1{,}02 \cdot S(4) = 2880 - 2880 \cdot 1{,}02^5$

Dus je krijgt: $(1 - 1{,}02) \cdot S(4) = 2880 \cdot \left(1 - 1{,}02^5\right)$.

En dus is $\sum_{n=0}^{4} 2880 \cdot 1{,}02^n = \frac{2880(1-1{,}02^5)}{1-1{,}02} \approx 14987{,}64$.

Opgave 1

In de **Uitleg** is sprake van een meetkundige rij.

a Hoe kun je aan de directe formule van een rij zien dat hij meetkundig is?

b Hoe ziet de recursieformule van een meetkundige rij er altijd uit?

Opgave 2

Bij meetkundige rijen kun je de som van een aantal termen op een handige manier vinden zonder de grafische rekenmachine te hoeven gebruiken.

a Bereken $100 + 200 + 400 + 800 + ... + 12800$ op dezelfde manier als in de **Uitleg**.

b Bereken nu $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{10}$ op deze manier.

Opgave 3

Een meetkundige rij ziet er altijd zo uit: a, $a \cdot r$, $a \cdot r^2$, $a \cdot r^3$, $a \cdot r^4$, ...

a Hoe ziet de directe formule van deze rij $u(n)$ er uit?

b Hoe ziet de recursieformule van deze rij er uit?

c Bereken de som van de eerste 10 termen van deze rij.

d Bereken de som van de eerste n termen van deze rij.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **meetkundige rij** is een rij waarvan de directe formule een exponentiële functie is. Dit betekent dat elke term ontstaat door zijn voorganger met een vast getal r te vermenigvuldigen. De rij ziet er dus uit als a, $a \cdot r$, $a \cdot r^2$, $a \cdot r^3$, ...
Meestal wordt in plaats van groeifactor het woord **reden** gebruikt voor de vaste vermenigvuldigingsfactor.

- directe formule: $u(n) = a \cdot r^n$ met $n = 0,1,2,3,4,...$
- recursieformule: $u(n) = u(n-1) \cdot r$ met $u(0) = a$ en $n = 1,2,3,4,...$

De **verschilrij van een meetkundige rij** is: $V(n) = a{\cdot}r^n - a{\cdot}r^{n-1} = a(r-1){\cdot}r^{n-1}$.

Voor de **somrij van een meetkundige rij** kun je gebruik maken van de techniek die bij de is gebruikt. Dan blijkt dat de som van de eerste n termen is:

$$S(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} a \cdot r^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Voorbeeld 1

Je ziet hier het begin van drie rijen:

- rij u: $10, 15, 20, 25, \ldots$
- rij v: $10, 20, 40, 80, \ldots$
- rij w: $10, 40, 90, 160, \ldots$

Welke van deze rijen is (waarschijnlijk) een meetkundige rij? Stel een daarbij passende directe formule op.

Antwoord

Om na te gaan of een rij meetkundig is, deel je steeds een term door zijn voorganger. Komt daar steeds hetzelfde getal r (de reden, de groeifactor) uit, dat heb je met een meetkundige rij te maken. Hier is dat de rij v.

De directe formule voor rij v vind je door vast te stellen, dat:

- $v(0) = 10$;
- de reden is $r = 2$.

De gevraagde directe formule wordt: $v(n) = 10 \cdot 2^n$ met $n = 0,1,2,3,4,\ldots$

Opgave 4

Welke van de volgende rijen zijn meetkundig? Geef van elke meetkundige rij de directe formule en het complete recursievoorschrift. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 1**.

a $5, 14, 23, 32, 41, \ldots$

b $320, 160, 80, 40, \ldots$

c $10, 2, -6, -14, \ldots$

d $1, 4, 9, 16, \ldots$

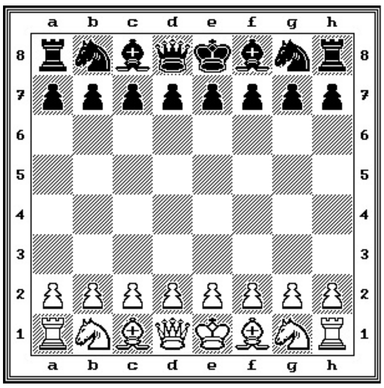
e $1, 3, 9v27, \ldots$

f $2, 6, 18, 54, \ldots$

g $5, 5\sqrt{3}, 15v15\sqrt{3}, 45, \ldots$

Opgave 5

De uitvinder van het schaakbord vroeg als beloning: 1 graankorrel voor het eerste veld van het schaakbord, 2 voor het tweede veld, 4 voor het derde veld, 8 voor het vierde veld, enz. Je wilt weten hoeveel graankorrels dat samen zijn.



Figuur 4.2

a Bereken de som van de eerste 20 termen van de rij graankorrels met je grafische rekenmachine.

b Bereken de som van de eerste 20 termen van deze rij met de somformule voor een meetkundige rij.

c Bereken $\sum_{n=5}^{9} a_n$. Gebruik weer de somformule.

d Hoeveel bedraagt het totaal aantal graankorrels?

Voorbeeld 2

Jan is op 31-12-2000 geboren. In de jaren 2000 t/m 2016 zetten zijn ouders aan het eind van elk jaar € 500,00 op zijn spaarrekening. Ze zijn steeds uitgegaan van 4% rente per jaar en laten dit geld staan tot zijn zeventiende verjaardag. (Er worden ook geen extra stortingen gedaan.)
Hoeveel geld staat er op Jan's zeventiende verjaardag op deze spaarrekening?

Antwoord

Er worden tot Jan's zeventiende verjaardag 17 bedragen gestort (de laatste keer wordt er niets gestort, die 500 euro krijgt Jan voor zijn verjaardag).

- Op 31-12-2000 de eerste 500 euro, die 17 jaar rente oplevert: $500 \cdot 1{,}04^{17}$.
- Op 31-12-2001 de tweede 500 euro, die 16 jaar rente oplevert: $500 \cdot 1{,}04^{16}$.
- Op 31-12-2002 de derde 500 euro, die 15 jaar rente oplevert: $500 \cdot 1{,}04^{15}$.

enzovoorts...
In totaal is dit $500 \cdot 1{,}04^{17} + 500 \cdot 1{,}04^{16} + 500 \cdot 1{,}04^{15} + \ldots + 500 \cdot 1{,}04$ euro.
Dit is de som van een meetkundige rij zonder nulde term. Dus staat er op Jan's spaarrekening op 31-12-2017:
$\sum_{k=0}^{17} \left(500 \cdot 1{,}04^k\right) - 500 = \frac{500(1-1{,}04^{18})}{1-1{,}04} - 500 \approx 12322{,}71$ euro.
(In werkelijkheid kan het bedrag iets anders zijn i.v.m. het jaarlijks afronden op centen.)

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** gaat het over sparen met een vast jaarlijks spaarbedrag en een vaste jaarlijkse rente.
Stel je voor dat je vanaf je 16e verjaardag ($t = 0$) elke maand 50 euro op een nieuwe spaarrekening zet. Je krijgt een rente van $0{,}5\%$ per maand.

a Hoeveel heb je twee maanden na je verjaardag op deze spaarrekening staan? En drie maanden na je verjaardag?

b Waarom is er telkens sprake van de som van een meetkundige rij?

c Stel voor die meetkundige rij een directe formule $B(t)$ op. Neem t in maanden vanaf je verjaardag.

d Bereken met behulp van de somformule voor een meetkundige rij hoeveel je totale saldo S na 24 maanden sparen bedraagt.

Opgave 7

Iemand huurt vanaf 1 januari 2010 een appartement voor € 550 per maand. Zij houdt rekening met een huurverhoging van 5% per jaar.

a Hoeveel moet zij jaarlijks aan huur betalen over het jaar 2011? En over 2012?

b Stel een formule op voor de jaarlijkse huurbedragen h_n, met $n = 0$ in 2010.

c Hoeveel betaalt ze in totaal aan huur gerekend over de eerste 10 jaar?

Voorbeeld 3

Gegeven is de meetkundige rij 1, , $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

Bereken de som van alle termen van deze rij.

Antwoord

De som van al deze termen kun je zo noteren: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

Het symbool ∞ betekent 'oneindig'.

Met de somformule vind je dat $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$.

Hoe groter je de waarde voor n kiest, hoe dichter $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ naar 0 nadert.

Dit betekent dat $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Er geldt dus dat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots. = 2$.

Opgave 8

Bereken de som van alle termen van de meetkundige rijen.

a $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

b 10; 2; 0,4; 0,02; 0,004; ...

Opgave 9

Gegeven is de meetkundige rij $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$
Waarom kun je de som van alle termen alleen uitrekenen als $-1 < r < 1$?

Verwerken

Opgave 10

De rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ is gegeven door $t_n = 3 \cdot 2^{n+1}$.

a Laat zien dat dit een meetkundige rij is.

b Schrijf de som van de eerste zeven termen met het Σ-symbool en bereken die som.

c Schrijf de som van de daarop volgende zeven termen met het Σ-symbool en bereken die som.

Opgave 11

Hieronder staan telkens de twee eerste termen van een rekenkundige rij $r(n)$ met $n \geq 0$. Schrijf bij elk geval de eerste zeven termen op en geef een directe formule voor de rij.

a $3, 6$

b $1, -2$

c $100, 10$

d $5, 5$

Bij elk van deze rijen kun je naar de som van een aantal termen kijken.

e Bepaal bij elk van deze rijen de som van de eerste 12 termen.

f Bepaal bij elk van deze rijen ook $\sum_{n=5}^{9} r(n)$.

Opgave 12

Van een meetkundige rij is de derde term 10 en de zevende term 40. Bepaal een recursieformule en een directe formule voor de rij. Geef duidelijk je nummering aan!

Opgave 13

Twee huurders huren elk een huis tegen een jaarhuur van € 3000 in het eerste jaar. De jaarhuur van huurder A wordt elk jaar met € 140 verhoogt, die van huurder B met 4%.

a Stel formules op voor hun jaarhuur in de opeenvolgende jaren.

b In welk jaar gaat B meer huur betalen dan A? (Gebruik de grafische rekenmachine).

c Hoeveel is A over de eerste tien jaar aan huur kwijt?

d Hoeveel is B over de eerste tien jaar aan huur kwijt?

Opgave 14

Je leent bij een kredietbank een bepaald bedrag tegen een rente van $1{,}3\%$ per maand.

Laat zien dat dit overeenkomt met een jaarrente van ongeveer $16{,}8\%$.

Opgave 15

Gegeven is de meetkundige rij $u_n : 15, 5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \ldots$ met $u_0 = 15$.

a Bereken in één decimaal nauwkeurig de som van de eerste tien termen.

b Bereken $\sum_{k=4}^{12} u_k$ in twee decimalen nauwkeurig.

c Bepaal de kleinste waarde c waarvoor alle n geldt dat $\sum_{k=0}^{n} u_k < c$.

Toepassen

Opgave 16: Hypotheekvormen

Iemand wil € 240.000 lenen van een bank, om een huis te kopen of een zaak te beginnen. De bank wil 5% rente per jaar hebben en de lening moet in 30 jaar worden terugbetaald. Hoe ga je zo'n schuld aflossen? Twee bekende methoden zijn:

Lineair afbetalingssysteem

Een lineair afbetalingssysteem, waarbij je elk jaar $\frac{1}{30}$ste deel van de schuld terugbetaald en jaarlijks rente betaalt over de nog uitstaande restschuld.
Stel je leent op 1-1-2010 ($t = 0$ in jaren) en je betaalt voor het eerst op 31-12-2010.

- Je betaalt dus op $t = 1$: $8000 + 0{,}05 \cdot 240000$ euro.
- Je betaalt op $t = 2$: $8000 + 0{,}05 \cdot 232000$ euro.

Enzovoorts...
In jaar t betaal je: $B(t) = 8000 + 0{,}05 \cdot (240000 - 8000(t-1))$ euro.
$B(t)$ is een rekenkundige rij, dus je berekent je totale kosten voor deze lening met de somformule voor zo'n rij.

Annuïteiten afbetalingssysteem

Een afbetalingssysteem met annuïteiten, waarbij je elk jaar evenveel betaalt, rente en aflossing samen (in het begin veel rente en weinig aflossing, later andersom). Natuurlijk betaal je ook nu rente over je restschuld.
Noem de annuïteit A, je leent op 1-1-2010 en betaalt op 31-12 van elk jaar.

- Je restschuld op $t = 1$ is: $240000 \cdot 1{,}05 - A$ euro.
- Je restschuld op $t = 2$ is: $240000 \cdot 1{,}05^2 - A \cdot 1{,}05 - A$ euro.

Na t jaar is je restschuld: $S(t) = 240000 \cdot 1{,}05^t - A \cdot 1{,}05^{t-1} - A \cdot 1{,}05^{t-2} - ... - A$. Je hebt alles afbetaald als dit samen 0 is. Hieruit bereken je de annuïteit en je totale kosten.

a Bij een lineair afbetalingssysteem betaal je elk jaar evenveel aflossing en rente over de restschuld. Maak hierbij een tabel van jaarlijks te betalen bedragen en bereken het totaalbedrag dat je hiervoor kwijt bent als de situatie zich verder niet wijzigt.

b Bij een afbetalingssysteem gebaseerd op annuïteiten betaal je elk jaar een vast bedrag. Bereken de grootte van dit bedrag en het totaalbedrag dat je hiervoor kwijt bent als de situatie zich verder niet wijzigt.

Testen

Opgave 17

Bereken $1024 + 512 + 256 + ... + 4 + 2 + 1$.

Opgave 18

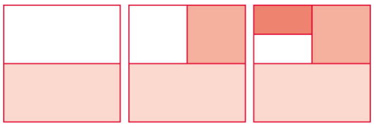
Bereken:

a $\sum_{i=0}^{10} 100 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i$

b $\sum_{k=5}^{10} 4 \cdot (-2)$

Opgave 19

Een wit vierkant van 1 m^2 wordt in stappen rood gekleurd. In stap 1 wordt de helft gekleurd, in elke volgende stap de helft van het dan nog witte deel.



Figuur 4.3

a Hoe groot is de oppervlakte van het nog witte deel na drie stappen?

b Stel een formule op voor de oppervlakte van het rode deel na n stappen.

c Na hoeveel stappen is het witte deel kleiner dan 1 cm^2?

Bekijk de drie rijen gevormd door

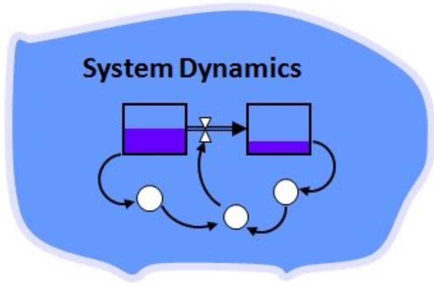
1. de lengte van de opeenvolgende witte stukken;
2. de oppervlakten van die stukken;
3. de oppervlakten van de opeenvolgende rode stukken.

d Ga voor elk van die rijen na of hij rekenkundig of meetkundig is.

2.5 Discrete modellen

Inleiding

Een belangrijke toepassing van (vooral meetkundige) rijen zijn de discrete dynamische modellen. Daarbij verandert een bepaalde hoeveelheid (geld, aantal mensen, dieren of planten, oppervlakte bosgrond, etc.) met de tijd. Die tijd wordt dan met vaste stapgrootte doorlopen, bijvoorbeeld maandelijks, of jaarlijks.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip discreet dynamisch model;
- recursieformules opstellen bij een discreet dynamisch model;
- in lineaire situaties een directe formule opstellen bij een discreet dynamisch model.

Voorkennis

- rijen in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met directe formules en recursieformules;
- werken met rekenkundige en meetkundige rijen en hun somformules.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt op 1 januari 2012 een saldo van € 1240,00.
En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten. Verder ga je aan het begin van elke maand 50 euro naar die spaarrekening overmaken, te beginnen op 1 februari 2012. Je krijgt aan het eind van elke maand 0,5% rente over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.

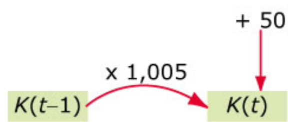
a Stel voor dit spaarsysteem een recursieformule op.

b Probeer een bijpassende directe formule te vinden.

Figuur 5.2

Uitleg

Je hebt op 1 januari 2012 een saldo van € 1240,00.
En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten. Verder ga je aan het begin van elke maand 50 euro naar die spaarrekening overmaken, te beginnen op 1 februari 2012. Je krijgt aan het eind van elke maand 0,5% rente over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.



Figuur 5.3

Bekijk het probleem bij **Verkennen V1** nog eens. Je krijgt aan het eind van elke maand 0,5% rente over het saldo van dat moment en je stort dan weer € 50.

De recursieformule is: $K(t) = K(t-1) \cdot 1{,}005 + 50$ met $K(0) = 1240$.
Je noemt dit wel een **discreet dynamisch model**: dynamisch omdat het kapitaal met de tijd verandert en discreet omdat het over vaste tijdstappen van 1 maand gaat. Hierbij kun je in Excel zo'n **werkblad spaarkapitaal** maken.

Het maken van een directe formule gaat zo:

- op $t = 0$ is: $K(0) = 1240$;
- op $t = 1$ is: $K(1) = 1240 \cdot 1{,}005 + 50$;
- op $t = 2$ is: $K(2) = 1240 \cdot 1{,}005^2 + 50 \cdot 1{,}005 + 50$;
- op $t = 3$ is: $K(3) = 1240 \cdot 1{,}005^3 + 50 \cdot 1{,}005^2 + 50 \cdot 1{,}005 + 50$;

en na t maanden:
$K(t) = 1240 \cdot 1{,}005^t + 50 \cdot 1{,}005^{t-1} + 50 \cdot 1{,}005^{t-2} + \ldots + 50$.
Met de somformule voor een meetkundige rij kun je dit nog korter schrijven.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je een voorbeeld van een discreet dynamisch model.

a Waarom heet dit model zo?

b Vanuit de recursieformule wordt een directe formule afgeleid. Schrijf die formule korter met behulp van de somformule voor een meetkundige rij.

Opgave 2

Een bosbouwer verkoopt hout van bomen die hij zelf aanplant. Stel je voor dat hij op een bepaald stuk bos ongeveer 5000 bomen heeft geplant. Na een aantal jaren zijn de eerste bomen groot genoeg om te kunnen worden gekapt. Maar om ook daarna elk jaar opbrengst van dit perceel te hebben zal hij

- de meeste bomen moeten laten staan;
- nieuwe bomen aanplanten.

Hij besluit elk jaar 15% van de bomen te kappen en dan weer 1000 aan te planten. Hij plant dus meer aan dan hij kapt, teneinde de opbrengst te verhogen. Op dit perceel is namelijk wel ruimte voor zo'n 8000 bomen.

a Onderzoek hoe het aantal bomen dat er jaarlijks op dit perceel staat, gaat verlopen. Maak een grafiek.

b Zal het aantal bomen de 7000 gaan overstijgen, denk je?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Wanneer een bepaalde hoeveelheid H met de tijd t in vaste tijdstappen verandert en je beschrijft die verandering met één of meer recursieformules, dan spreek je van een **discreet dynamisch model**.
Door de recursie uit te voeren ontstaat een rij getallen voor $H(t)$.

Deze **lineaire differentievergelijking** is er een voorbeeld van:

- $H(t) = g \cdot H(t-1) + b$
- $H(0) = c$

Door uitschrijven kun je hier een directe formule bij opstellen:
$H(t) = c \cdot g^t + b \cdot g^{t-1} + b \cdot g^{t-2} + \ldots + b$.
Met de somformule voor een meetkundige rij schrijf je dit als:

$H(t) = c \cdot g^t + b \cdot \frac{1-g^t}{1-g} = \frac{b}{1-g} + \left(c - \frac{b}{1-g}\right) \cdot g^t$.

Vaak zijn discrete dynamische modellen echter veel ingewikkelder en bestaan ze ook uit meerdere vergelijkingen. In de voorbeelden zul je daar iets van aantreffen...

Voorbeeld 1

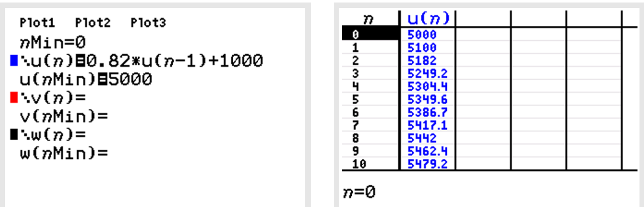
Staatsbosbeheer heeft op een bepaald perceel waarop ongeveer 6000 bomen van een bepaalde soort kunnen staan. Dit perceel is bedoeld als productiebos: na een aantal jaren zijn de eerste bomen groot genoeg om te kunnen worden gekapt. Om een stabiele jaarlijkse opbrengst te hebben wordt er jaarlijks maar 18% van de bomen gekapt en worden er 1000 aangeplant. Het eerste jaar zijn er 5000 bomen geplant.
Stel een dynamisch model op voor het aantal bomen op dit perceel en breng het verloop ervan in beeld.

Antwoord

Noem het aantal bomen B, dan is:

- $B(t) = 0{,}82 \cdot B(t-1) + 1000$
- $B(0) = 5000$

Met Excel of met je GR maak je hierbij snel een tabel.



Figuur 5.4

Je kunt hierbij ook een directe formule opstellen door de recursie uit te schrijven:
$B(t) = 5000 \cdot 0{,}82^t + 1000 \cdot 0{,}82^{t-1} + 1000 \cdot 0{,}82^{t-2} + \ldots + 1000$.
Met de somformule voor een meetkundige rij:
$B(t) = 5555\frac{5}{9} - 555\frac{5}{9} \cdot 0{,}82^t$.
Uiteindelijk zullen er jaarlijks ongeveer 5556 bomen op dit perceel staan.

Opgave 3

Bekijk in de **Theorie** wat een lineaire differentievergelijking is.
Stel je voor dat je bij een bank een rente van 12% per jaar kunt krijgen. Je spaart € 1500,00 per jaar en je bent gestart op 1 januari 2000.

a Stel een lineaire differentievergelijking op voor $K(t)$, het kapitaal aan het begin van het t-de jaar.

b Maak een tijdgrafiek bij de rij met saldi. Wat gebeurt er met het saldo als t toeneemt?

c Op welk tijdstip is het saldo meer dan € 20000,00?

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** tref je een model aan voor het kappen en aanplanten van bos.

a Leg uit hoe de lineaire differentievergelijking in dit voorbeeld uit de gegevens kan worden afgeleid.

b Maak zelf een tabel van het aantal bomen met je grafische rekenmachine en bepaal de grenswaarde voor het aantal bomen.

c Laat zien hoe je met behulp van de somformule voor een meetkundige rij de directe formule voor $B(t)$ af kunt leiden.

d Leg uit hoe je de grenswaarde van 5556 bomen uit de directe formule kunt afleiden.

Voorbeeld 2

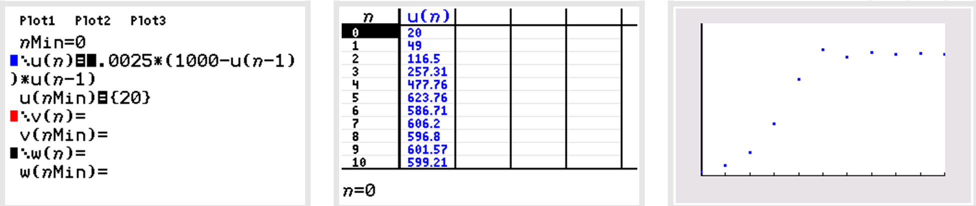
De Belgische wiskundige Pierre François Verhulst (1804—1849) ontdekte dat de meeste populaties niet exponentieel groeien. Hij ontwikkelde op basis van een aangenomen maximale populatieomvang M een beter passend model: het logistische groeimodel. Daarbij hoort een recursieformule van de vorm

- $H(t) = c \cdot (M - H(t-1)) \cdot H(t-1)$
- $H(0) = b$

Neem $M = 1000$, $b = 20$ en $c = 0{,}0025$ en laat met je grafische rekenmachine zien dat H naar een bepaalde grenswaarde toe groeit.

Antwoord

Je kunt deze rij in de GR of in Excel invoeren. Je ziet dat $H(t)$ inderdaad naar de grenswaarde 600 nadert.



Figuur 5.5

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** vind je een voorbeeld van het logistische groeimodel.
Neem nu $M = 1200$, $b = 100$ en $c = 0{,}002$.

a Voer zelf dit groeimodel in op je grafische rekenmachine.

b Nadert deze rij een grenswaarde? En zo ja welke waarde is dat?

Voorbeeld 3

Onder verstedelijking wordt de trek van de bevolking van een bepaalde regio van het platteland naar de steden verstaan. De tabel geeft daarover informatie voor deze regio.
(S = stedelijk gebied, P = platteland)
Hierbij kun je dit dynamische model opstellen:

- $S(t) = 0{,}8 \cdot S(t-1) + 0{,}3 \cdot P(t-1)$
- $P(t) = 0{,}2 \cdot S(t-1) + 0{,}7 \cdot P(t-1)$

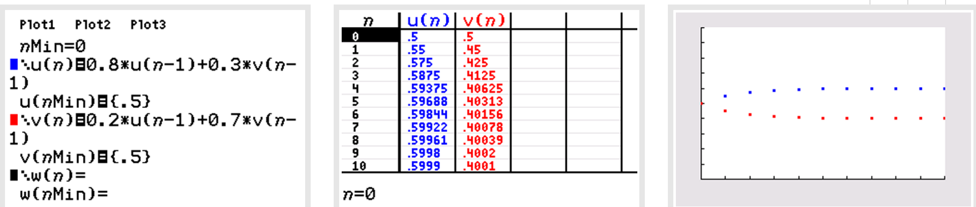
		van	
		S	P
naar	S	0,8	0,3
	P	0,2	0,7

Tabel 5.1

Onderzoek of er een soort van evenwichtstoestand ontstaat voor wat betreft de verdeling van de bevolking van deze regio over stad en platteland.

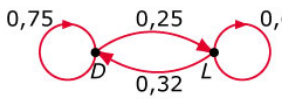
Antwoord

Je kunt ook zo'n stelsel rijen in de GR of in Excel invoeren. Begin bijvoorbeeld met een verdeling van 50% op het platteland en 50% in stedelijke gebieden. Je ziet dat $S(t)$ en $P(t)$ in dit model naar een evenwicht toegroeien.



Figuur 5.6

Opgave 6



Figuur 5.7

In **Voorbeeld 3** zie je een stelsel van twee lineaire differentievergelijkingen. Stel je voor dat er maar twee softwarebedrijven zijn die een internetbrowser op de markt brengen. Noem die browsers bijvoorbeeld ‘Discoverer’ en ‘Landscape’. Beide bedrijven beconcurreren elkaar heftig, zodat de gebruikers van een internetbrowser jaarlijks reikhalzend uitzien naar de nieuwste versie van de Discoverer of van Landscape. Ervaren gebruikers wisselen ook nogal eens van browser. In deze graaf zie je de wisselingen in beeld gebracht.

a Stel bij deze graaf een stelsel differentievergelijkingen op. Noem het aantal gebruikers van de Discoverer $D(t)$ en dat van Landscape $L(t)$.

b Maak op je grafische rekenmachine de grafieken van de rijen $D(t)$ en $L(t)$ voor $n = 0,1,2,3,...,10$. Ga er van uit dat $D(0) = 0,5$ en $L(0) = 0,5$.

c Bereken met die differentievergelijkingen hoeveel procent van de gebruikers uiteindelijk in de evenwichtssituatie de Discoverer zal gebruiken.

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de lineaire differentievergelijking $u(t) = u(t-1) \cdot 0,6 + 20$ met $u(0) = 100$.

a Maak een grafiek bij deze lineaire differentievergelijking.

b Stel een directe formule bij deze lineaire differentievergelijking op.

c Op welke waarde komt $u(t)$ uiteindelijk uit?

Opgave 8

In 1999 heeft iemand onverwacht € 500.000 gekregen. Hij heeft dit bedrag op 1 januari 2000 op een renterekening tegen 5% rente per jaar (dat kon in die tijd). Hij haalde elke maand € 2500 van deze rekening. Het saldo van de renterekening S_n veranderde daardoor maandelijks.

a Stel hierbij een recursieformule op.

b Maak een grafiek van de rij S_n. Beschrijf het verloop van het saldo.

c Na hoeveel jaar zou het geld op deze renterekening op zijn geweest als de spaarrente zo was gebleven?

d Stel een directe formule op voor het saldo S_n.

Opgave 9

In 2000 leefden er in een natuurgebied 2000 konijnen. Hun aantal is in de jaren daarna telkens met 5% toegenomen.

a Stel een recursieformule op voor het aantal konijnen $K(t)$ waarin t het aantal jaren na 2000 is.

b Stel een directe formule op voor $K(t)$.

c Maak een grafiek en een tabel van de rij $K(t)$. In welk jaar is het aantal konijnen meer dan verdubbeld?

Opgave 10

Als je melk uit de koelkast haalt en in een glas schenkt loopt de temperatuur op vanaf $T(0) = 6$ °C (de temperatuur binnen de koelkast) naar de kamertemperatuur van 20 °C. De toename van de temperatuur per minuut is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

a Leg uit, dat hieruit deze recursieformule is af te leiden: $T(t+1) = T(t) + c \cdot (20 - T(t))$ waarin t het aantal minuten voorstelt.

Neem aan dat $c = 0{,}1$.

b Maak een grafiek van deze rij en bepaal na hoeveel minuten de temperatuur van de melk minder dan 1 °C verschilt van de kamertemperatuur.

c Laat zien hoe de grenswaarde uit de gegeven recursieformule is af te leiden.

Opgave 11

Er wordt een nieuw maandblad voor jongeren opgericht. Aanvankelijk groeit het aantal abonnees sterk. Van het eerste blad werden 3000 exemplaren verkocht, maar van het tweede waren dat er al 5670, een stijging van ongeveer 90%. De redactie hoopt dat het aantal abonnees voorlopig met hetzelfde percentage zal blijven stijgen.

Ze gaan er van uit dat die stijging de komende maanden zo door gaat.

a Stel een daarbij passende differentievergelijking voor het aantal abonnees $A(t)$ in maand t. Neem aan dat $t = 0$ de maand van de eerste oplage voorstelt.

b Waarom is dit groeimodel voor het aantal abonnees van dit blad onwaarschijnlijk?

Na verloop van tijd wordt de groei van het aantal abonnees echter kleiner. Voor $A(t)$ blijkt de volgende recursieformule te gelden:

$A(t) = 1{,}95 \cdot A(t-1) - 0{,}00002 \cdot (A(t-1))^2$

c Teken de bijpassende grafiek, weer uitgaande van $A(0) = 3000$.

d Op hoeveel abonnees zal dit maandblad uiteindelijk uitkomen?

Testen

Opgave 12

Iemand heeft een miljoen op de bank gezet tegen een rente van 6% per jaar. Hij gaat er van leven en haalt maandelijks € 1500 van deze rekening voor zijn levensonderhoud.

a Stel hierbij een lineaire differentievergelijking op.

b Teken een bijpassende grafiek en bepaal daarmee of de rij van saldi S_t naar een grenswaarde toegroeit.

c Stel een directe formule op voor S_t en leid ook daaruit de evenwichtswaarde af.

Opgave 13

Een viskwekerij heeft een bepaald bassin waarin maximaal 5000 meervallen kunnen leven. De kweker zet daarin 1000 meervallen uit. Het aantal meervallen zal dan gaan groeien, maar omdat er maximaal 5000 meervallen in het bassin kunnen leven, zal de groei gaan afnemen naarmate het aantal meervallen dichter bij de 5000 komt.

De kweker veronderstelt daarom dat de toename van het aantal meervallen per jaar recht evenredig is met het verschil tussen het aantal meervallen en het maximale aantal van 5000:

$\Delta N_t = c \cdot (5000 - N_t)$,

waarin N_t het aantal meervallen na t jaar is.

Figuur 5.8

a Is er hier sprake van een logistisch groeimodel?

b Toon aan dat de veronderstelling van de kweker leidt tot een groeimodel met als bijbehorende differentievergelijking: $N_{t+1} = (1 - c) \cdot N_t + 5000 \cdot c$.

c Na een jaar zijn er ongeveer 1600 meervallen in het bassin. Bereken c.

d Teken een grafiek van N_t. Vanaf welk moment gaat het aantal meervallen minder snel toenemen?

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Rijen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- rij, termen van een rij — directe formule — recursie en recursieformule
- verschilrij — somrij
- rekenkundige rij — somformule van een rekenkundige rij
- meetkundige rij — somformule van een meetkundige rij
- discreet dynamisch model — (lineaire) differentievergelijking

Activiteitenlijst

- rijen beschrijven met een directe formule — rijen beschrijven met een recursieformule
- de verschilrij van een rij bepalen — de som van (de eerste) n termen van een rij berekenen
- werken met rekenkundige rijen, o.a. de somformule toepassen
- werken met meetkundige rijen, o.a. de somformule toepassen
- meetkundige rijen toepassen bij discrete dynamische modellen

Achtergronden

Leonardo van Pisa (1170—1250) (bijgenaamd Fibonacci) was één der eersten die over rijen schreef. In zijn boek 'Liber Abaci' beschreef hij een model voor de ontwikkeling van een populatie konijnen.

Figuur 6.1

Hij ging uit van één paar konijnen, en nam aan:

- elk paar is na zijn tweede levensmaand volwassen;
- elke maand komt er per volwassen paar een paar jongen bij;
- er gaan geen konijnen dood.

De vraag die hij wilde beantwoorden was: hoeveel paren konijnen zijn er aan het eind van één jaar?

Het aantal konijnen dat je onder deze aannames per maand hebt geeft de rij: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$
Dit is de beroemde **rij van Fibonacci**.
De bijbehorende recursieformule is $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 1$ voor $n = 2,3,4,5,\ldots$
Een bijpassende directe formule is niet eenvoudig te vinden, maar hij bestaat wel.

De rij van Fibonacci komt op veel plaatsen voor. Onder andere in de spiralen in de bloem van een zonnebloem en in de schubben op een dennenappel. Maar ook de beroemde 'Gulden Snede' heeft met de rij van Fibonacci te maken. Op het internet bestaan heel veel sites over deze rij, zoek maar eens.

Testen

Opgave 1

Stel bij deze rijen zowel een mogelijke directe formule als een mogelijke recursieformule op.

a $7, 14, 28, 56, 112, \ldots$

b $5, 8, 11, 14, 17, \ldots$

Opgave 2

Bekijk de rijen uit de vorige opgave nog eens.

a Welke van beide rijen zou een rekenkundige rij kunnen zijn? Licht je antwoord toe.

b Bereken van de rekenkundige rij bedoeld in a de som van de eerste 100 termen.

c Bekijk nu de andere rij. Waarom zou dat een meetkundige rij kunnen zijn? Motiveer weer je antwoord.

d Bereken van de meetkundige rij bedoeld in c de som van de eerste 100 termen.

Opgave 3

Kees betaalt elk jaar op 1 januari premie voor een inboedelverzekering. De maatschappij waarbij hij verzekerd is belegt dat geld. Gemiddeld maken ze daarmee per jaar 9% winst.
Na 16 jaar te hebben betaald krijgt Kees op 2 januari een schadegeval van € 3500, dat door de polis wordt gedekt. De verzekeringsmaatschappij betaalt hem dus uit.

Heeft de maatschappij nu winst of verlies geleden op de verzekering van Kees?
Geef een duidelijke toelichting.

Opgave 4

Een gepensioneerde heeft een kapitaal K op de bank dat uitstaat tegen 7,2% rente per jaar. De bank schrijft elke laatste dag van de maand rente over het dan aanwezige saldo bij. Op elke eerste dag van de maand neemt deze gepensioneerde een bedrag O op, de eerste opname vindt één maand na storting van het beginkapitaal plaats.

a Toon aan dat het saldo na de n-de opname is:
$S_n = 1{,}0058^n \cdot K - \left(1{,}0058^{n-1} + 1{,}0058^{n-2} + \cdots + 1{,}0058 + 1\right) \cdot O$

Neem nu aan dat $K = 100000$ en $O = 2000$, beide in euro.

b Hoe groot is het saldo na 12 opnamen?

c Na hoeveel maanden is het kapitaal op deze manier ‘op’? Leg ook uit waarom er aanhalingstekens zijn gebruikt.

Opgave 5

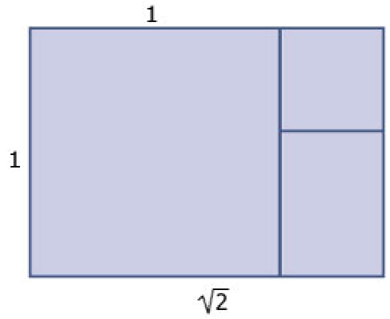
Een A4-tje is een vel papier van (afgerond) 297 mm bij 210 mm.

a Ga na dat de lengte en de breedte zich verhouden als $\sqrt{2} : 1$ (bij goede benadering).

Twee A4'tjes met de lange zijden tegen elkaar vormen een vel A3.

b Ga na dat de lengte en de breedte van een A3 zich ook verhouden als $\sqrt{2} : 1$ (bij goede benadering).

c Ga na: als je een rechthoek met breedte b en lengte $b\sqrt{2}$ in twee gelijke helften verdeelt door een lijn evenwijdig met de korte zijden, verhouden de lengte en de breedte van de twee helften zich weer als $\sqrt{2} : 1$.



Figuur 6.2

Het standaardvel A0 is (afgerond) 1189 mm bij 841 mm. Halveren geeft A1; nog drie keer halveren geeft A4.

d Ga na dat de oppervlakte van zo'n vel A0 praktisch 1 m^2 is.

e Laat l_n de lengte in m zijn van An. Stel een recursieformule en een directe formule op voor de rij l_0, l_1, l_2, ...

f Doe hetzelfde voor de rij der oppervlakten van An (kies zelf namen en eenheden).

g Bereken nauwkeurig de lengte en breedte van een vel A0 uit de gegevens: de oppervlakte is 1 m^2 en lengte en breedte verhouden zich als $\sqrt{2} : 1$.

Opgave 6

Een gasfles is gevuld met een hoeveelheid gas onder druk. De fles loopt langzaam leeg door een lekkende afsluiter. Het verlies per uur is recht evenredig met de druk in de fles, dus ook met de hoeveelheid gas in de fles.

Stel per uur is het verlies 4% van de aan het begin van het uur aanwezige hoeveelheid gas. Aan het begin is de hoeveelheid gas 100 liter, na 1 uur is dus $0{,}04 \cdot 100$ liter ontsnapt, in het tweede uur ontsnapt $0{,}04 \cdot (100 - 0{,}04 \cdot 100)$ liter.

a De hoeveelheden nog aanwezig gas na 0, 1, 2, ... uur vormen een meetkundige rij. Met welke reden? Stel een directe formule voor die rij op.

b Hoeveel ontsnapt dus in het n-de uur?

c Zowel uit het antwoord bij a als uit dat bij b kun je een formule halen voor de hoeveelheid gas die in de eerste n uur ontsnapt. Ga na of je hetzelfde krijgt.

Opgave 7

Bij de geboorte van zijn eerste kleinzoon stopt opa € 50 in een potje. Bij de eerste verjaardag doet hij daar € 100 bij, bij de tweede verjaardag € 150, enzovoort, telkens € 50 meer. Hij doet dat voor het laatst op de zestiende verjaardag, en geeft dan meteen het hele bedrag aan zijn kleinzoon.

a Hoe groot is dat bedrag?

Bij de geboorte van haar eerste kleindochter pakt oma het anders aan. Zij stort € 350 op een spaarrekening die 3% rente per jaar geeft, en herhaalt dit jaarlijks, voor het laatst op de zestiende verjaardag.

b Hoe groot is het bedrag op de spaarrekening op de dag na de zestiende verjaardag? (Je hoeft er geen rekening mee te houden dat de bank de rente op centen afrondt).

Bij de geboorte van die kleindochter pakt de andere oma het nog anders aan. Zij werkt met dezelfde bedragen als de opa, maar stort ze op een spaarrekening die 3% rente per jaar geeft.

c Hoe groot is het bedrag op de spaarrekening op de zestiende verjaardag?

Opgave 8

Pas gezette koffie heeft een temperatuur van zo'n 80 °C. Schenk je deze koffie in een kopje en zet je dat in de kamer dan wordt de temperatuur lager totdat hij de kamertemperatuur (20 °C) benadert.
De daling van de temperatuur per minuut is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

a Leg uit, dat hieruit deze differentievergelijking is af te leiden: $T_{t+1} = T_t + c \cdot (T_t - 20)$, waarin t het aantal minuten voorstelt na het inschenken.

Neem aan dat c = -0,05.

b Maak een grafiek van de rij T_t. Welke grenswaarde zal de rij T_t bereiken?

c Laat zien hoe de grenswaarde uit de gegeven recursieformule is af te leiden.

d Bepaal na hoeveel minuten de temperatuur van de koffie minder dan 1 °C verschilt van de kamertemperatuur.

Toepassen

Opgave 9: Varkenscyclus

In de economie is de **varkenscyclus** een bekend dynamisch vraag-en-aanbodmodel. Op de varkensmarkt kunnen de aanbieders van varkens namelijk niet onmiddellijk reageren op een prijsverandering omdat het vetmesten van varkens tijd kost.
De volgende modelaannames worden gehanteerd:

- Bij een lage prijs van varkensvlees wordt het aantal aanbieders kleiner, bij een hoge prijs juist groter.
- Bij een laag aanbod van varkensvlees wordt de prijs hoger, bij een hoog aanbod wordt de prijs juist lager.
- Het vetmesten van een varken duurt ongeveer 0,5 jaar.

Nu kan de vrager onmiddellijk reageren op elke prijsverandering, maar de aanbieder niet want meer vlees aanbieden betekent meer varkens vetmesten en dat kost tijd.
Noem de prijs p, de aangeboden hoeveelheid q_A en de gevraagde hoeveelheid q_V.
Een mogelijk stelsel modelformules is dan: $q_A(t) = p(t-1) - 15$ en $q_V(t) = 400 - 1{,}5p(t)$.

Hierin is t de tijd in stappen van $0{,}5$ jaar.
In het Excel bestand **Model varkenscyclus** zie je wat de computer er van maakt. Je ziet dat de rij getallen $p(t)$ naar een **evenwichtsprijs** nadert.

a Leg uit dat de gegeven modelformules in overeenstemming zijn met de aannames.

b Waar vind je de periode van $0{,}5$ jaar (nodig voor het vetmesten van een varken) terug?

c Welke evenwichtsprijs levert het model op?

d Stel een differentievergelijking op voor de rij $p(t)$ er van uitgaande dat vraag en aanbod elkaar in evenwicht houden.

Opgave 10: Prooidier-roofdier modellen

In veel natuurgebieden is er sprake van een wisselwerking tussen de roofdieren en hun prooi, zoals vossen en konijnen. Modellen die zo'n wisselwerking bestuderen heten **prooi-roofdiermodellen**. De Italiaanse wiskunde **Vito Volterra** en de Amerikaanse wiskundige **Alfred J. Lotka** ontwierpen in 1925/1926 een dynamisch model voor dergelijke wisselwerkingen. Als $P(t)$ het aantal prooidieren en $R(t)$ het aantal roofdieren op tijdstip t is, zien hun vergelijkingen er in discrete vorm zo uit:

- $P(t) = P(t-1) \cdot (a - b \cdot R(t-1))$
- $R(t) = -R(t-1) \cdot (c - d \cdot P(t-1))$

Figuur 6.3

Hierin zijn a, b, c en d positieve getallen. Bekijk maar eens met behulp van een rekenblad in Excel of je grafische rekenmachine hoe dit model zich gedraagt.

De eerste vergelijking laat zien dat de prooidieren bij afwezigheid van de roofdieren ($b = 0$) exponentieel toenemen. De uitdrukking $a - b \cdot R(t-1)$ laat echter zien, dat de groeifactor vermindert afhankelijk van het aantal roofdieren R dat een periode eerder op ze heeft kunnen jagen.
De vergelijking voor de roofdieren kent een vergelijkbare interpretatie.

Kies waarden voor a, b, c en d en reken een prooi-roofdiermodel door. Onderzoek wat er of er een evenwichtssituatie ontstaat waarin de aantallen stabiliseren. Het beste kun je een rekenblad in Excel maken waarin deze vier parameters instelbaar zijn zodat je wat realistische resultaten krijgt...
Tegenwoordig bestaan er diverse aangepaste prooi-roofdiermodellen en animaties ervan op internet. Bekijk bijvoorbeeld dit **artikel uit de Scholarpedia**.

Examen

Opgave 11: Ureum-gehalte

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 g toeneemt. Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo ververst worden dat de wettelijke norm van 2 g ureum per m^3 water niet overschreden wordt. In een model gaan we er van uit dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken en dat de verversing van het water 's nachts plaatsvindt. Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 m^3 ververst wordt (dus 3% van het totaal). We beginnen de eerste dag met 0 g ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 g ureum in het water. Na het verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 g ureum over.

a Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 g ureum in het water zit.

b In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

c Toon aan dat voor de hoeveelheid ureum (notatie U_n) aan het begin van de n-de dag dag geldt $U_n = 0{,}8 \cdot U_{n-1} + 400$.

Stel je voor dat het water 0 g ureum aan het begin van de eerste dag bevat.

d Toon aan dat de hoeveelheid ureum in gram aan het begin van de $n$de dag rechtstreeks kan worden berekend met de formule: $U_n = 2000 - 2500 \cdot (0{,}8)^n$.

e Leg met behulp van deze formule uit dat aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm wordt voldaan.

f In de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden. Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(bron: examen wiskunde A havo van voor 1990)

Opgave 12: Nationaal inkomen

In de afgelopen 20 jaar is het wereldinkomen (het totale inkomen van alle mensen samen) sneller gegroeid dan de wereldbevolking. Dat betekent dat het gemiddeld inkomen per hoofd van de bevolking is gestegen. In de theorie van de economische groei spelen de kapitaalgoederen een belangrijke rol. Bij kapitaalgoederen kun je bijvoorbeeld denken aan machines. De kapitaalgoederen hebben een grote invloed op de productie. Hier zie je een eenvoudig model voor economische groei:

- $I_t = S_t$.
  I_t zijn investeringen in jaar t; S_t zijn besparingen in jaar t. De investeringen zijn steeds gelijk aan de besparingen.
- $I_t = K_{t+1} - K_t$.
  K_t is hoeveelheid kapitaalgoederen in jaar t. De investeringen leiden uitsluitend tot uitbreiding van de kapitaalgoederen.
- $S_t = s \cdot Y_t$.
  Y_t is het nationaal inkomen in jaar t. De besparingen zijn steeds een vast gedeelte van het nationaal inkomen; s heet de spaarquote.

Figuur 6.4

- $K_t = k \cdot Y_t$.
  De hoeveelheid kapitaalgoederen is gelijk aan k keer de productiecapaciteit. Omdat wordt aangenomen dat de productiecapaciteit volledig wordt benut, is de productiecapaciteit gelijk aan het nationaal inkomen; k heet de kapitaalcoëfficiënt.

Kies $s = 0{,}3$, $k = 2$ en $K_0 = 200$. Alle bedragen zijn steeds in miljoenen dollars.

a Toon aan dat volgens het model geldt: $K_{t+1} = 1{,}15 \cdot K_t$.

b Voor welke t geldt dat het nationaal inkomen Y_t voor het eerst boven de 1 miljard dollar komt? Licht je antwoord toe.

De spaarquote en de kapitaalcoëfficiënt bepalen de groei van het nationaal inkomen. Ontwikkelingslanden hebben lage gemiddelde inkomens en kunnen nauwelijks sparen: s is laag. In de figuur zie je dat dit leidt tot een vicieuze cirkel van armoede.

c Toon aan dat ook volgens het model geldt: als s afneemt, dan neemt de groei van het nationaal inkomen af.

(bron: voorbeeldexamen vwo wiskunde A1,2 uit 1998)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

www.math4all.nl