

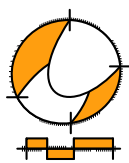
Wiskunde C / PGA

4 VWO / docentmateriaal

Veranderingen

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je begeleidt dan als docent de leerlingen die in kleine groepjes aan wiskundige problemen werken en op die manier een eigen theoretisch kader opstellen. Dit gebeurt voornamelijk op de wijze die wordt beschreven in het boek *Building Thinking Classrooms in Mathematics* van Peter Liljedahl. Dit boek is ook in het Nederlands beschikbaar. Het is verstandig om dit boek vooraf door te werken, maar je kunt ook beginnen met deze [beknopte handleiding](#).

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee de leerling kan nagaan of de stof wordt beheersd. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding staat in de marge naast de opgave.

- ★ het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
- ★ ★ een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die de leerling alleen hoeft te maken als er genoeg tijd voor is
- ★ ★ ★ een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die een leerling alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk was

In de bijlage staat een "[Leerdoelentabel](#)" waarin staat aangegeven door welke opgave het specifieke leerdoel wordt afgedekt en op welk niveau dit gebeurt. Als je deze tabel aan de leerlingen uitreikt, kunnen ze hun eigen vorderingen bijhouden.

Opgaven uit de samenvattende paragraaf *Totaalbeeld* worden voorafgegaan door een T.

1

Veranderingen

1.1	In grafieken	6
1.2	Veranderingen per stap	12
1.3	Differentiequotiënt	19
1.4	Differentiaalquotiënt	25
1.5	Hellingsgrafiek	31
1.6	Totaalbeeld	39

1.1 In grafieken

Inleiding

In de Delta Nederland verandert de waterstand voortdurend. De veranderingen worden beschreven met eb, laagwater, vloed en hoogwater. Tussen hoogwater en laagwater daalt het water. Maar stijging en daling zijn niet constant: vlak voor hoogwater neemt de stijging langzaam af en na hoogwater neemt de daling een paar uur lang toe.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen stijgend en dalend en constant gebruiken bij grafieken;
- toenemende, afnemende en constante stijging en daling herkennen;
- (lokale) maxima en minima van een grafiek bepalen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen.

Voor de docent

Bij het onderwerp 'Veranderingen in grafieken' gaat het om de woorden die worden gebruikt om de (globale) veranderingen weer te geven. Om dat op gang te krijgen, krijgen de leerlingen opdrachten voorgeschoteld waarover ze zelf moeten nadenken en het begrippenkader overzichtelijk opbouwen, de laatste opdracht is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Bij de eerste opdracht hoort een werkblad met daarop de grafiek. Dit kan worden uitgedeeld.
- Bij de derde opdracht is het de bedoeling dat hij mondeling wordt gegeven en dat de leerlingen desgewenst de benodigde informatie zelf even opschrijven (of onthouden). Eventueel kunnen hiervan ook kopieën worden uitgedeeld.

Opdracht 1.1

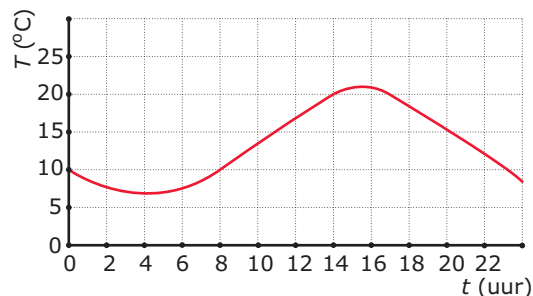
Deze grafiek geeft de temperatuur T (in $^{\circ}\text{C}$) op een bepaalde plaats weer afhankelijk van het tijdstip t (in uren) op de dag.

De temperatuur stijgt van $t = 4$ tot $t = 15,5$, want als t toeneemt vanaf 4 tot 15,5, wordt ook T groter. Je zegt dan dat de grafiek stijgend is op het interval $\langle 4; 15,5 \rangle$.

Schrijf de intervallen op waarop de grafiek dalend is.

Schrijf de intervallen op waarop de grafiek toenemende stijging vertoont, afnemende stijging vertoont, constante stijging vertoont, toenemende daling vertoont, afnemende daling vertoont en constante daling vertoont.

Schrijf ook de extreme waarden van de grafiek op.



Figuur 1.2

— Toelichting —

De figuur staat op dit [Werkblad](#).

Misschien zijn er leerlingen die de intervalnotatie niet meer kennen. Dit laat je door medeleerlingen uitleggen. Verder kunnen leerlingen moeite hebben met begrippen als 'toenemend, afnemend, constant'. Stel dan vragen als "Wat betekent 'toenemend/afnemend/constant' is het gewone taalgebruik? En wat betekent hier dan een 'toenemende/afnemende/constante stijging'?" en "Waar zie je een toenemende stijging in de grafiek?".

— Uitwerking —

De grafiek is dalend op de intervallen $\langle 0,4 \rangle$ en $\langle 15,5; 24 \rangle$.

De grafiek is toenemend stijgend op het interval $\langle 0,8 \rangle$.

De grafiek is afnemend stijgend op het interval $\langle 14; 15,5 \rangle$.

De grafiek is constant stijgend op het interval $\langle 8,14 \rangle$.

De grafiek is toenemend dalend op de intervallen $\langle 15,5; 18 \rangle$ en $\langle 22,24 \rangle$.

De grafiek is afnemend dalend op het interval $\langle 0,4 \rangle$.

De grafiek is constant dalend op het interval $\langle 18,22 \rangle$.

Kleine afwijkingen zijn denkbaar.

De grafiek heeft een minimum van 7°C op $t = 4$.

De grafiek heeft een maximum van 21°C op $t = 15,5$.

Opdracht 1.2

Gegeven is de functie f met functievoorschrift $f(x) = -5 + 36x - 6x^2$.

Beschrijf het verloop van de grafiek met de woorden 'toenemende, afnemende, constante stijging of daling' en geef de bijbehorende intervallen. Schrijf ook de extreme waarde op.

— Toelichting —

Leerlingen die geen idee hebben hoe ze dit moeten aanpakken wijs je op hun grafische rekenmachine. Mogelijke hulpvragen "Kun je al meteen zien wat voor grafiek je krijgt?", "Is er een maximum of een minimum?" en "Hoe krijg je de grafiek goed in beeld?".

Leerlingen die dit snel zien, daag je uit met iets lastiger functies zoals $g(x) = 36x - x^3$, etc.

— Uitwerking —

Breng eerst de grafiek in beeld, bijvoorbeeld met de grafische rekenmachine.



Figuur 1.3

De grafiek heeft een maximum van 49 bij $x = 3$. De grafiek gaat dus over van stijgend naar dalend. Aan de grafiek zie je met wat voor soort stijging en daling je te maken hebt.

De grafiek is afnemend stijgend op het interval $\langle -,3 \rangle$ en toenemend dalend op het interval $\langle 3, \rightarrow \rangle$.

Opdracht 1.3

Van een functie is gegeven dat:

- de grafiek constant stijgt tot $x = 2$;
- de grafiek constant is van $x = 2$ tot $x = 3$;
- de grafiek toenemend daalt van $x = 3$ tot $x = 4$ en dan afnemend daalt tot $x = 5$;
- de grafiek toenemend stijgt vanaf $x = 5$.

Maak een schets van de grafiek van deze functie en leg uit bij welke waarde van x de functie een extreme waarde moet hebben.

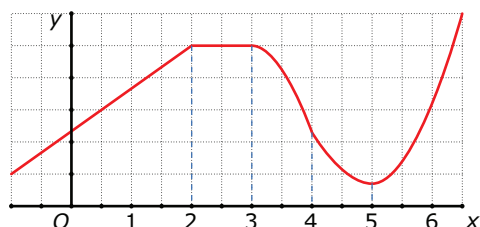
— Toelichting —

Geef de opdracht mondeling, maar laat de leerlingen de essentie op hun werkplekken noteren. Het kan zijn dat er leerlingen zijn die het verschil tussen 'constant zijn' en 'constant stijgen/dalen' niet meteen door hebben. Breng ze dan vragenderwijs op het juiste spoor.

Besprek na afloop de verschillen tussen de grafiek die bij de verschillende groepen zijn ontstaan.

— Uitwerking —

De grafiek heeft een minimum bij $x = 5$.



Figuur 1.4

Dit is een voorbeeld. Zelf kun je een heel andere grafiek hebben. Controleer of je eigen grafiek wel op de juiste intervallen stijgt, daalt, of constant is.

Opdracht 1.4

Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd door de gebruikte woorden bij een grafiek te schrijven waar ze in voorkomen. Bekijk vervolgens wat iedereen heeft bedacht.

— Toelichting —

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

— Uitwerking —

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

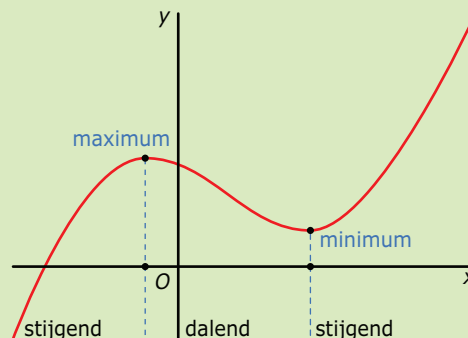
Om te onthouden

Een functie is:

- **stijgend** als de y -waarden groter worden bij groter wordende x ;
- **dalend** als de y -waarden kleiner worden bij groter wordende x .

Verder heeft de functie:

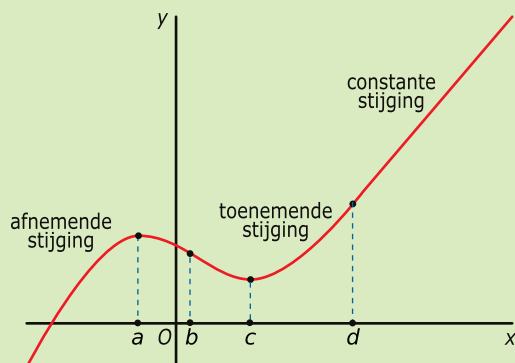
- een **maximum** als hij overgaat van stijgend in dalend in een aaneengesloten grafiek;
- een **minimum** als hij overgaat van dalend in stijgend in een aaneengesloten grafiek.



Figuur 1.5

Deze waarden noem je de **extremen**, ook wel de **uiterste waarden** van de functie.

Om aan te geven voor welke waarden van x van een bepaalde soort stijging of daling sprake is, gebruik je **intervallen**.



Figuur 1.6

Deze grafiek heeft een:

- **afnemende stijging** op het interval $\langle \leftarrow, a \rangle$, omdat de stijging daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende daling** op het interval $\langle a, b \rangle$, omdat de daling daar steeds sterker wordt;
- **afnemende daling** op het interval $\langle b, c \rangle$, omdat de daling daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende stijging** op het interval $\langle c, d \rangle$, omdat de stijging daar steeds sterker wordt;
- **constante stijging** op het interval $\langle d, \rightarrow \rangle$, omdat de stijging daar steeds even sterk blijft, de grafiek is daar een rechte lijn.

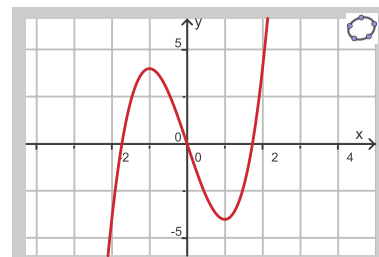
Verwerken

★ Opgave 1.1

Bekijk deze grafiek gemaakt met GeoGebra.

Geef voor deze functie aan:

- op welke intervallen de grafiek daalt dan wel stijgt en om welk soort stijging of daling het daarbij gaat;
- welke extremen er zijn;
- voor welke waarden van x de daling het sterkst is.



Figuur 1.7

★ Opgave 1.2

Gegeven is een functie met voorschrift $f(x) = x^3 - 3x$. Bekijk deze functie met de grafische rekenmachine.

- Beschrijf met intervallen het verloop van de grafiek van f .
- Wat zijn de extremen van f ?
- Waarom kun je niet aangeven waar de snelheid van stijgen het grootst is?

★ Opgave 1.3

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 0,5x^4 - 4x^2 + 8$.

- Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van deze functie bekijken. Welke extremen heeft deze functie?
- Op hoeveel intervallen is bij de grafiek van f sprake van toenemende daling?
- Geef het bereik van f .

★ Opgave 1.4

Sofie rijdt met de auto naar de supermarkt. De eerste 7 seconden trekt ze eerst rustig maar daarna snel op, daarna rijdt ze 15 seconden met een constante snelheid om vervolgens 10 seconden lang geleidelijk af te remmen, totdat ze stil staat voor een stoplicht. Ze staat daar 30 seconden stil. Als het stoplicht op groen springt, trekt Sofie geleidelijk op en na 8 seconden rijdt ze weer met een constante snelheid, totdat ze na 2 minuten bij de supermarkt is aangekomen en in 12 seconden geleidelijk afremt totdat ze stil staat.

Beschrijf met intervallen de soorten stijging en daling van de snelheid die optreden gedurende de route die Sofie naar de supermarkt aflegt.

★★ Opgave 1.5

Voor de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ op een bepaalde dag geldt:

- om 6:00 uur 's morgens ($t = 6$) is de temperatuur $T = 2^{\circ}\text{C}$;
- de grafiek toenemend stijgt van $t = 6$ tot $t = 12$;
- de grafiek afnemend stijgt van 12:00 uur tot 14:30 uur en dan toenemend daalt tot $t = 20$;
- de grafiek afnemend daalt van $t = 20$ tot aan het eind van de dag.

Maak een schets van een mogelijke grafiek van deze functie en leg uit bij welke waarde van t de functie T een uiterste waarde moet hebben.

Toepassen

★ ★

Opgave 1.6: Winstformule

Voor een klus maakt een bedrijf gebruik van de volgende winstformule $W = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2$, waarbij W de winst in honderden euro's is en x het aantal werknemers dat het bedrijf voor de klus gebruikt.

- a** Bij welk aantal werknemers is er maximale winst?

Voor het bepalen van hoeveel werknemers het bedrijf moet inzetten, wordt er gekeken naar de extra winst per werknemer. Zo is de extra winst van de zesde werknemer $W(6) - W(5)$. De extra winst per werknemer wordt ook wel de marginale winst genoemd. Het bedrijf zorgt er voor dat er zoveel werknemers gebruikt worden dat de marginale winst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

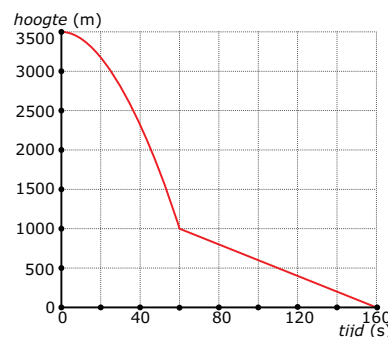
- b** Hoeveel werknemers moet men dan voor de klus inzetten?
c Het antwoord van b wijkt af van dat van a. Toch kan het voor het bedrijf beter zijn, om naar de extra winst te kijken zoals bij b is gedaan. Waarom?

★ ★

Opgave 1.7: Parachutist

Je ziet de grafiek die hoort bij een parachutesprong vanaf 3500 meter hoogte. Eerst maakt de parachutist een vrije val en daarna opent hij zijn parachute.

- a** Na hoeveel seconden heeft deze parachutist zijn valscherp geopend? Hoe zie je dat aan de grafiek?
b In de periode van vrije val is de grafiek toenemend dalend. Wat betekent dit voor de valsnelheid?
c Als de parachute uit is, is de valsnelheid constant. Hoe zie je dat aan de grafiek? Hoe groot is de valsnelheid als de parachute uitgevouwen is?



Figuur 1.8

1.2 Veranderingen per stap

Inleiding

Om veranderingen van grafieken nauwkeurig te beschrijven kijk je naar de toenames (of afnames) van de uitkomsten bij toename van de invoerwaarden met een vaste stapgrootte. Bijvoorbeeld bij een functie $y = f(x)$ bekijk je de toename van y bij een toename van x met een vaste stapgrootte. Je maakt van die toenames een toenamediagram.

Je leert in dit onderwerp

- een toenamediagram maken bij een gegeven grafiek of een gegeven functievoorschrift;
- de invloed van de stapgrootte op het toenamediagram bepalen;
- vanuit een gegeven toenamediagram (en 'beginwaarde') een mogelijke grafiek van de functie samenstellen of bepalen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, afnemende of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen.

Voor de docent

Bij het onderwerp 'Veranderingen per stap' gaat het om het zichtbaar maken van veranderingen in een grafiek met behulp van een toenamediagram. En vervolgens om vanuit een gegeven toenamediagram een mogelijke grafiek op te bouwen. Om dat op gang te krijgen, krijgen de leerlingen opdrachten voorgeschoteld waarover ze zelf moeten nadenken en het begrippenkader overzichtelijk opbouwen, de laatste opdracht is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

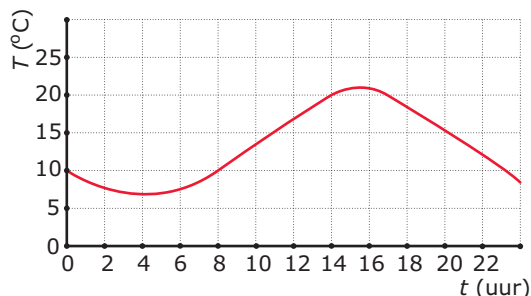
Gewenste materialen:

- Bij de eerste opdracht hoort een werkblad met daarop de grafiek. Dit kan worden uitgedeeld.
- Bij de tweede opdracht hoort een werkblad met daarop het toenamediagram. Dit kan worden uitgedeeld.

Opdracht 2.1

Deze grafiek geeft de temperatuur T (in $^{\circ}\text{C}$) op een bepaalde plaats weer afhankelijk van het tijdstip t (in uren) op de dag.

Je kunt de veranderingen in de grafiek weergeven in een zogenaamd 'toenamediagram'. Daarin geef je bijvoorbeeld per 2 uur aan hoeveel de grafiek is toegenomen/afgenomen. Maak zo'n toenamediagram en beschrijf hoe je de veranderingen eruit kunt aflezen.



Figuur 2.1

**Toelichting**

De figuur staat op dit [Werkblad](#).

Op het maken van een tabel zullen veel leerlingen wel komen. De toenames aangeven met ΔT zal wel niet meteen gebeuren, misschien een goed idee om die notatie hier en daar te noemen. Het toenamediagram zal in veel gevallen er misschien als staafdiagram uit komen te zien. Dan is het een goed idee om aan te geven dat er meestal alleen verticale lijnstukjes gebruikt worden aan het eind van elk interval, omdat pas dan de toename/afname echt plaats heeft gevonden, dit kan ook goed worden benoemd als de groepjes elkaars werk gaan bekijken. De karakteristieken van het toenamediagram moeten dan echt uit de verf komen.

Laat daarna desgewenst ook een nieuw toenamediagram maken met een andere stapgrootte. Je zou per groepje de stapgrootte kunnen laten verschillen en dan de invloed ervan op het toenamediagram bij verschillende groepen zichtbaar maken.

Uitwerking

Maak een tabel met toenames per twee uur, bij afnames komt er een negatieve waarde.

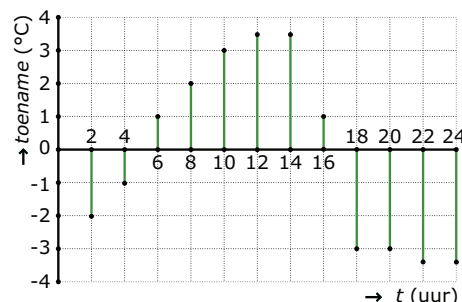
t (uur)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
ΔT		-2	-1	1	2	3	3,5	3,5	1	-3	-3	-3,5	-3,5

Tabel 2.1

Onder ΔT versta je de toename van de temperatuur T . Deze tabel kun je weergeven in een diagram. Als de toename negatief is, teken je een staafje naar beneden en als die positief is naar boven. Zo'n diagram noem je een toenamediagram.

In het toenamediagram zie je:

- waar de grafiek stijgend is, de toenames positief zijn (echte toenames);
- waar de grafiek dalend is, de toenames negatief zijn (afnames);
- waar de toenames steeds groter worden, is de stijging toenemend, enzovoort.

**Figuur 2.2****Opdracht 2.2**

Bekijk het toenamediagram van de grafiek van een functie f waarvoor geldt: $f(0) = 4$.

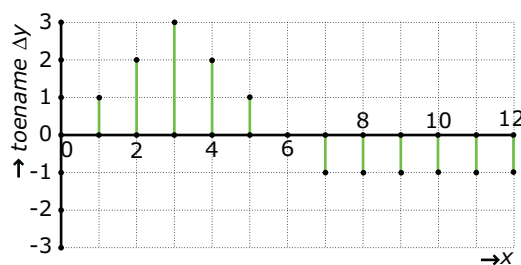
Maak een grafiek van de functie f .

Toelichting

De figuur staat op dit [Werkblad](#).

Leerlingen die geen idee hebben hoe ze dit moeten aanpakken wijs je op de mogelijkheid om een toenametafel te maken. Mogelijke hulpvragen: "Kun je een tabel maken van alle toenames?", "Heb je een bepaald startpunt?" en "Hoe krijg je vanuit dat startpunt het volgende punt?".

Loop na afloop de verschillende resultaten met de leerlingen door. Bespreek dat er verschillende grafieken kunnen zijn.

**Figuur 2.3**

Uitwerking

De bijbehorende toenametabel:

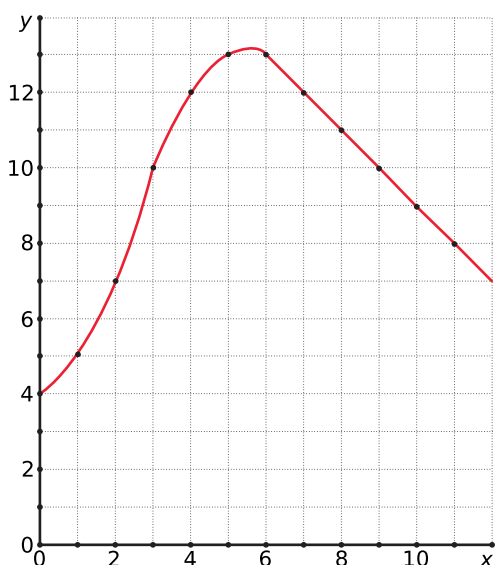
x	0	1	2	3	4	5	6
Δy		1	2	3	2	1	0
y	4	5	7	10	12	13	13

Tabel 2.2

x	7	8	9	10	11	12
Δy	-1	-1	-1	-1	-1	-1
y	12	11	10	9	8	7

Tabel 2.3

Er zijn meerdere grafieken mogelijk. Dit is er één van.



Figuur 2.4

Opdracht 2.3

Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd: bij een grafiek een bijpassend toenamediagram te maken en daarmee de veranderingen in de grafiek weer te geven. Schrijf ook de gebruikte notatie Δy voor de toe/afnames erbij. Maar ook: hoe je vanuit een toenamediagram de grafiek kunt opbouwen. Bekijk vervolgens wat iedereen heeft bedacht.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Bekijk de applet: [toenamediagram](#)

Bekijk deze grafiek op het interval: $[-2, 4]$.

Als je de waarden van x met een vaste **stapgrootte** laat toenemen, kun je daarbij een tabel maken met de toenames Δy van de functie-waarden.

Als je als stapgrootte 1 neemt, dan ziet die tabel er zo uit:

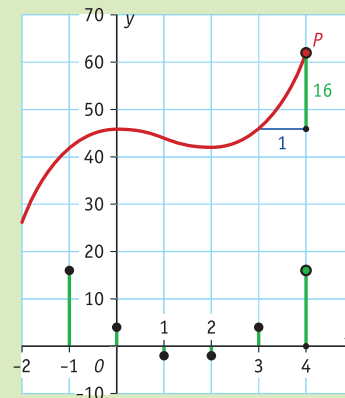
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	26	42	46	44	42	46	62
Δy		16	4	-2	-2	4	16

Tabel 2.4

Je ziet het bijbehorende **toenamediagram** in groen in de figuur.

De hoogte van het staafje bij $x = 3$ is bijvoorbeeld $\Delta y = y(3) - y(2) = 46 - 42 = 4$. Dus het staafje bij $x = 3$ wordt 4 hoog. Bij een negatieve toename teken je het staafje naar beneden, bij $x = 1$ bijvoorbeeld teken je het staafje 2 naar beneden.

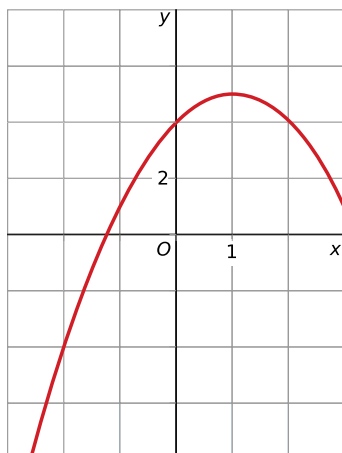
Als je het functievoorschrift weet, kun je de grafische rekenmachine gebruiken om een toenametabel te tekenen. Je voert dan $y_1 = f(x)$ en $y_2 = y_1(x) - y_1(x - 1)$ in, waarin f de gegeven functie is. Als je nu met de grafische rekenmachine een tabel met stapgrootte 1 maakt, krijg je de toenametabel. Een toenamediagram kan de rekenmachine niet maken.



Figuur 2.5

Verwerken

★ Opgave 2.1



Figuur 2.6

Teken bij de grafiek een toenamediagram met stapgrootte 1, te beginnen bij $x = -1$.

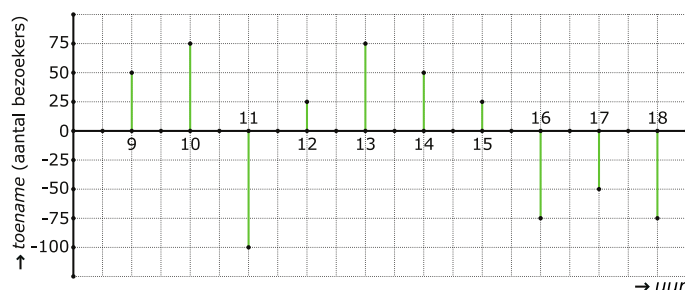
★ Opgave 2.2

Gegeven is de functie f met voorschrift: $f(x) = 0,5x^4 - 4x^2 + 8$.

- Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van deze functie bekijken en een toenametabel maken. Teken een toenamediagram op het interval $[-3,3]$ met een stapgrootte van 0,5.
- Hoe zie je aan het toenamediagram dat er precies één interval is waarop de grafiek toenemend daalt?
- Waarom kun je op grond van het toenamediagram concluderen dat er waarschijnlijk drie extremen zijn?

★★ Opgave 2.3

In een museum is vanaf de opening om 8:00 uur 's morgens tot de sluitingstijd om 18:00 uur elk uur het aantal bezoekers geteld. Van deze gegevens is een toenamediagram gemaakt. Om 12:00 uur waren er 50 bezoekers.



Figuur 2.7

- Maak een grafiek van het totaal aantal bezoekers afhankelijk van het uur van deze dag, van 8:00 uur tot 18:00 uur.
- Rond welk tijdstip waren er waarschijnlijk de meeste bezoekers in het museum?
- Kun je vaststellen hoeveel bezoekers er maximaal in het museum waren op enig moment die dag? Licht je antwoord toe.

★★

Opgave 2.4

Biologen houden het verloop van de aantallen van een bepaald soort vlinder bij in een afgesloten natuurgebied. De tabel geeft de verzamelde informatie weer:

Jaartal	2010	2011	2012	2013	2014
Aantal vlinders	2450	2050	1810	1665	1580
Verskil V t.o.v. vorig jaar		-400	-240	-145	-85

Tabel 2.5

Het lijkt erop dat het verschil V ten opzichte van het voorgaande jaar exponentieel verandert met de tijd t in jaren. Er lijkt te gelden: $V = -400 \cdot 0,6^{t-1}$ met $t = 0$ in het jaar 2010.

- Ga na of deze formule in overeenstemming is met de gevonden verschillen.
- Ga er vanuit dat deze formule geldig blijft in de jaren na 2014. Teken een toenamediagram van het aantal vlinders in dit natuurgebied met een stapgrootte van 1 jaar.
- Maak ook een grafiek van het aantal vlinders N in de loop van de jaren.
- Van wat voor soort daling is er sprake bij het aantal vlinders? Hoe kun je dat aan het toenamediagram zien?
- Het aantal vlinders van deze soort lijkt zich in dit natuurgebied te stabiliseren. Hoe kun je dat aan het toenamediagram zien? En wat betekent dit voor de grafiek van het aantal vlinders?

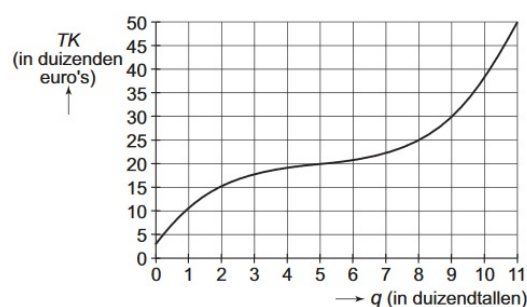
Toepassen

★

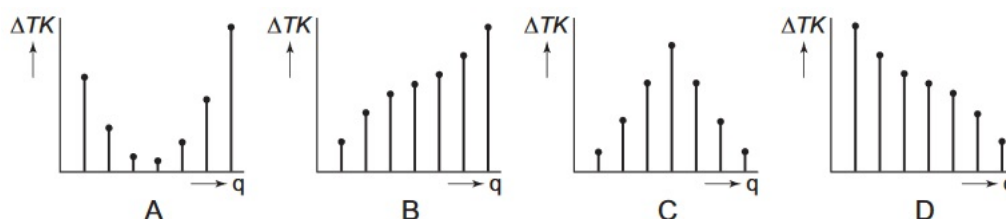
Opgave 2.5: Verpakkingen produceren

Een bedrijf maakt bijzondere verpakkingen. Het bedrijf heeft onderzocht hoe de kosten voor het maken van die verpakkingen samenhangen met het aantal verpakkingen. Het verband tussen de totale kosten TK (in duizenden euro's) en het aantal geproduceerde verpakkingen q (in duizendtallen) zie je in de figuur. Daaruit lees je bijvoorbeeld af dat bij een productie van 2000 verpakkingen de totale kosten € 15.000 zijn.

In de diagrammen A, B, C en D, is de toename ΔTK van TK weergegeven. Eén van de vier diagrammen past bij de grafiek.



Figuur 2.8



Figuur 2.9

- Welk toenamediagram past bij de grafiek? Licht je antwoord toe.
 - diagram A
 - diagram B
 - diagram C
 - diagram D
- Met hoeveel procent stijgen de totale kosten als de productie van 4000 naar 8000 verpakkingen gaat?

(naar: examen havo wiskunde A in 2006, eerste tijdvak)



★ ★ ★

Opgave 2.6: Model voor een chemische ramp

Onderzoekers hebben een model ontwikkeld voor een ramp met een chemische fabriek bij een middelgrote stad. In dit model wordt het aantal personen dat last heeft van ongemakken zoals buikloop, duizeligheid en hoofdpijn, voorgesteld door het functievoorschrift: $n(t) = -4(40 - t)^3 + 150(40 - t)^2 + 16000$.

Hierbij stelt t het aantal dagen na het plaatsvinden van de ramp voor en $n(t)$ het bijbehorend aantal slachtoffers.

- a** Plot de grafiek van n . Laat t lopen van 0 tot 40.
- b** Geef met intervallen aan welke soorten verandering je in de grafiek ziet.
- c** Na hoeveel dagen is er een maximaal aantal slachtoffers?
- d** De gevolgen van het ongeval zijn over het hoogtepunt heen als de toename van het aantal slachtoffers in vergelijking met twee dagen daarvoor kleiner is dan 1500. Na hoeveel dagen is dat het geval?

1.3 Differentiequotiënt

Inleiding

Je hebt veranderingen in grafieken leren beschrijven in woorden en met toenamediagrammen. Bij toenamediagrammen moet je met een vaste stapgrootte werken. Maar als je wilt nagaan of een wielrenner de eerste 10 minuten gemiddeld net zoveel heeft afgelegd als de volgende 15 minuten, heb je met ongelijke intervallen te doen. In dat geval werk je met gemiddelde veranderingen.

Je leert in dit onderwerp

- de betekenis van het begrip differentiequotiënt kennen;
- tussen twee punten uit een tabel of een grafiek het differentiequotiënt bepalen;
- het differentiequotiënt van een functie op een gegeven interval berekenen;
- werken met toepassingen van het differentiequotiënt.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- werken met toenamediagrammen.

Voor de docent

Bij het onderwerp 'Differentiequotiënt' gaat het om het berekenen van de gemiddelde verandering van een grafiek over een gegeven interval en de koppeling ervan aan de helling van een lijnstuk. Om dat op gang te krijgen, krijgen de leerlingen opdrachten voorgeschoteld waarover ze zelf moeten nadenken en het begrippenkader overzichtelijk opbouwen, de laatste opdracht is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Bij de eerste opdracht hoort een werkblad met daarop de tabel. Dit kan worden uitgedeeld.
- Bij de derde opdracht hoort een werkblad met daarop de tabel. Dit kan worden uitgedeeld.

Opdracht 3.1

Bij een wielrenner in een tijddrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel:

<i>tijd</i> (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
<i>afstand</i> (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 3.1

In welke periode in de tabel is hij/zij het snelste? En hoe bereken je dat? Waarom kun je nu de veranderingen niet goed in een toenamediagram zetten?

Maak een grafiek door de punten in de tabel door (rechte) lijnstukken te verbinden. Hoe zie je in die grafiek in welke periode hij/zij het snelste is?



Toelichting

De figuur staat op dit [Werkblad](#).

Het gaat er nu om dat de leerlingen het begrip ‘differentiequotiënt’ leren kennen in het kader van gemiddelde snelheid en dit gaan koppelen aan de helling van het lijnstuk dat past bij begin- en eindpunt van het interval waarover die gemiddelde snelheid moet worden berekend. Mogelijke hulpvragen: “Hoe bereken je de gemiddelde snelheid?”, “Wat is kenmerkend voor een toenamediagram?”, “Hoe zie je de gemiddelde snelheden in je grafiek?”.

In de gezamenlijke nabespreking moeten termen als ‘differentie’ (verschil) en ‘differentiequotiënt’ (gemiddelde verandering) over een interval worden benoemd. Dit moet dan worden gekoppeld aan de helling, de richtingscoëfficiënt van het bijbehorende lijnstuk. Het lijkt verstandig dat leerlingen hiervan zelf aantekeningen maken.

Uitwerking

Bereken gemiddelde snelheden.

Hij/zij legt de eerste 8 km in 10 minuten af, dat is 0,8 km per minuut.

De volgende $12 - 8 = 4$ km doet hij/zij in $18 - 10 = 8$ minuten, dat is 0,5 km per minuut.

De volgende $18 - 12 = 6$ km doet hij/zij in $34 - 18 = 16$ minuten, dat is $3/8 = 0,375$ km per minuut.

De volgende $23 - 18 = 5$ km doet hij/zij in $44 - 34 = 10$ minuten, dat is 0,5 km per minuut.

De volgende $29 - 23 = 6$ km doet hij/zij in $60 - 44 = 16$ minuten, dat is 0,375 km per minuut.

De volgende $37 - 29 = 8$ km doet hij/zij in $78 - 60 = 18$ minuten, dat is $4/9 \approx 0,44$ km per minuut.

De laatste $45 - 37 = 8$ km doet hij/zij in $94 - 78 = 16$ minuten, dat is 0,5 km per minuut.

Hij/zij was het snelste in de periode $(0,8)$ minuten.

Bij een toenamediagram is het belangrijk dat je regelmatig meetpunten hebt. Deze tijden zijn niet na vaste afstanden gemeten, dus is het niet mogelijk om een toenamediagram te maken.

In de grafiek geeft de helling van elk lijnstuk de gemiddelde snelheid weer. Die helling is het grootst in de eerste 8 minuten.

Opdracht 3.2

Bekijk de grafiek van $y = 0,5x^3 - 8x$ op je grafische rekenmachine.

1. Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$.
2. Bereken de gemiddelde helling op het interval $[2,4]$.
3. Bereken de richtingscoëfficiënt van het lijnstuk tussen beginpunt en eindpunt van de grafiek op het interval $[0,5]$.
4. Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-4, -2]$.
5. Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-4,4]$.
6. Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-2,2]$.
7. Op welk interval is de gemiddelde helling even groot als die op $[0,5]$?

Toelichting

Geef deze opdrachten stap voor stap, telkens ééntje en laat de groepjes de volgende opdracht komen ophalen. Laat ze steeds de berekeningen opschrijven. Markeer significante resultaten om die na afloop te kunnen bekijken met de groepen.

Loop na afloop de verschillende resultaten met de leerlingen door, bespreek nogmaals gebruikte notaties, wijs op begrippen die hetzelfde betekenen. En wijs ook vooral op antwoorden die op inzicht wijzen en berekeningen overbodig maken.

Uitwerking

Een geschikt venster is $-10 \leq x \leq 10$ bij $-30 \leq y \leq 30$.

1. Het differentiequotiënt op $[0,2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-12-0}{2-0} = -6$.

2. De gemiddelde helling op $[2,4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-12}{4-2} = -6$.

3. De richtingscoëfficiënt van het lijnstuk tussen beginpunt en eindpunt van de grafiek op $[0,5]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{22,5-0}{5-0} = 4,5.$$

- Het differentiequotiënt op $[-4, -2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-12}{-4-2} = 6$, dus hetzelfde als dat op $[2,4]$.
- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-4,4]$ is 0 (zie grafiek).
- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-2,2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-12-12}{2-2} = -6$.
- Aan de grafiek zie je dat dit bijvoorbeeld op $[-5,0]$ het geval is.

Opdracht 3.3

Ilse is om 14:00 uur begonnen met het verkopen van kaartjes voor een voorstelling. Zij heeft op een aantal tijdstippen bijgehouden hoeveel kaartjes ze verkocht heeft:

<i>tijd</i>	10:00	12:00	13:30	15:00	18:00
<i>aantal kaartjes</i>	0	178	331	405	642

Tabel 3.2

In welk tijdsinterval liep de kaartverkoop het best?

— Toelichting —

De tabel staat op dit [Werkblad](#).

Deze opdracht is bedoeld als toepassing van het voorgaande. Hij kan (als er weinig tijd voor is) ook worden overgeslagen. Mogelijke hulpvragen: “Gaaf het om de totale kaartverkoop binnen een interval?” en “Hoe heb je in de voorgaande opdrachten de verandering over een interval berekend?”.

— Uitwerking —

Tussen 10:00 en 12:00 uur is de gemiddelde verkoop per uur $\frac{178-0}{2} = 89$.

Tussen 12:00 en 13:30 uur is de gemiddelde verkoop per uur $\frac{331-178}{1,5} = 102$.

Tussen 13:50 en 15:00 uur is de gemiddelde verkoop per uur $\frac{405-331}{1,5} = 49\frac{1}{3}$.

Tussen 15:00 en 18:00 uur is de gemiddelde verkoop per uur $\frac{642-405}{3} = 79$.

Hoewel er tussen 10:00 en 12:00 uur meer kaarten zijn verkocht, liep tussen 12:00 en 13:30 uur de kaartverkoop gemiddeld het best. Met behulp van het berekenen van differentiequotiënten kun je de kaartverkoop eerlijk vergelijken op de verschillende tijdsintervallen.

Opdracht 3.4

Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd. Maak een lijstje van de belangrijkste begrippen en geef daarbij aan welke begrippen eigenlijk hetzelfde betekenen. Schrijf ook op welke notaties je moet gebruiken of in ieder geval begrijpen en welke rekenmethode je moet kennen. Geef desnoods een voorbeeldberekening met die begrippen en notaties erbij. Bekijk vervolgens wat iedereen heeft bedacht.

— Toelichting —

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

— Uitwerking —

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Bekijk de grafiek van de functie $y = f(x)$.

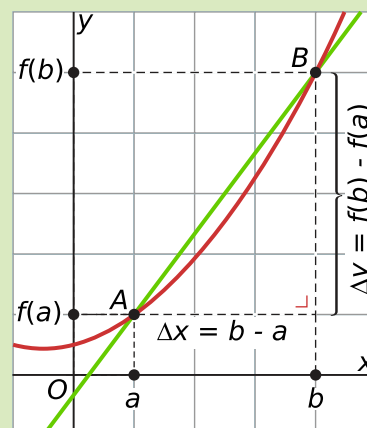
De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a, b]$ is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De uitkomst hiervan noem je het **differentiequotiënt** van de functie f op het interval $[a, b]$. In de grafiek van f is dit differentiequotiënt gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$.

Onthoud dat het differentiequotiënt gelijk is aan

- de helling van de lijn AB ;
- de richtingscoëfficiënt van de lijn AB ;
- de gemiddelde verandering van de grafiek op het interval $[a, b]$.



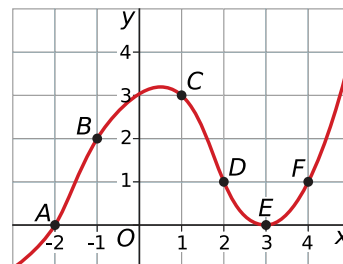
Figuur 3.1

Verwerken

★ Opgave 3.1

Je ziet een aantal punten op de grafiek.

- Bereken de gemiddelde helling van het lijnstuk AB .
- Bereken de gemiddelde helling van het lijnstuk CF .
- Voor twee lijnstukken die horen bij twee van de getekende punten hoort een differentiequotiënt van 0. Welke twee lijnstukken zijn dat?
- Punt F heeft een kleinere y -waarde dan punt C . Hoe kun je dat aan het differentiequotiënt op het interval $[1,4]$ zien?



Figuur 3.2

★ Opgave 3.2

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$.

- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$.
- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-1,2]$.
- Wat valt je bij b op? Kun je dat verklaren?

★ Opgave 3.3

Tijdens een hardloopwedstrijd van 10 kilometer wordt op drie momenten de (tussen)tijd gemeten. De resultaten van Bram zie je in de tabel.

tijd (minuten)	0	12	27	39
afstand (kilometer)	0	3	7	10

Tabel 3.3

- Op welk tijdsinterval liep Bram gemiddeld het snelst?
- Cedric loopt de eerste 1,5 kilometer in 6 minuten. Stel dat hij de hele wedstrijd met hetzelfde tempo loopt. Finisht hij dan voor of na Bram?

★★ Opgave 3.4

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2$. Toon aan dat het differentiequotiënt op elk interval $[a, a + 1]$ gelijk is aan $6 \cdot a + 3$.

★★★ Opgave 3.5

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2,5x^2 + 3x$.

- Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[0,2]$ exact.
- Geef nog een interval met eenzelfde differentiequotiënt als bij a.

Toepassen

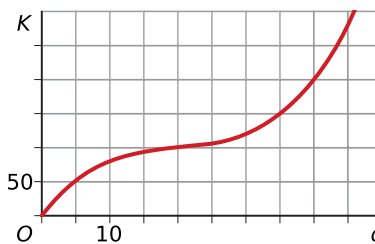
★ ★

Opgave 3.6: Koekjesproductie

Het bedrijf Fiesta produceert koekjes voor de horeca. Als verpakking gebruiken ze zakken van 3 kilogram. De kosten hangen af van het aantal zakken koekjes dat gemaakt wordt, q is het aantal geproduceerde zakken koekjes per uur.

Voor de kosten K (in euro) wordt het volgende functievoorschrift gebruikt:

$$K(q) = 0,01q^3 - 0,6q^2 + 13q$$



Figuur 3.3

- Bereken de totale kostenstijging bij een productietoename van 0 zakken per uur naar 20 zakken per uur.
- Bereken de gemiddelde kostenstijging bij een productietoename van 0 zakken per uur naar 20 zakken per uur.
- Plot zelf de grafiek op de grafische rekenmachine. Plot ook de lijn door de punten $(0,0)$ en $(20,100)$. De lijn snijdt de grafiek van K in een derde punt. Geef de coördinaten van dat punt.
- Kun je nu zonder berekening zeggen wat de gemiddelde kostenstijging is op het interval $[20,40]$? Licht je antwoord toe.

★ ★

Opgave 3.7: Afkoelende koffie

Het afkoelen van een kopje koffie hangt af van de temperatuur van de koffie bij het inschenken en van de kamertemperatuur. Ook de vorm en het materiaal waarvan het kopje is gemaakt, heeft invloed. De formule $T(t) = 20 + 70 \cdot 0,82^t$ geeft de temperatuur van de koffie.

- Hoe hoog is de temperatuur van de koffie bij het inschenken?
- Hoeveel graden daalt de temperatuur van de koffie gemiddeld in de eerste vijf minuten?
- Bereken ook in één decimaal nauwkeurig hoeveel de temperatuur gemiddeld daalt in de volgende vijf minuten.
- De temperatuur van de koffie daalt van $t = 0$ tot $t = 5$ sneller dan van $t = 5$ tot $t = 10$. Leg uit hoe je dit aan de differentiequotiënten bij b en c kunt zien. Geef ook een natuurkundige verklaring.

1.4 Differentiaalquotient

Inleiding

Als je in de auto vanuit een buitenwijk naar het centrum van de stad rijdt, leg je ongeveer 4 kilometer af in 15 minuten. Dat is 16 km/h (kilometer per uur).

Toch kun je onderweg wel een bekeuring oplopen voor het rijden van meer dan 50 km/h binnen de bebouwde kom. Je gemiddelde snelheid zegt nog weinig over je snelheid op elk moment van de route.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de verandering op een bepaald moment (het differentiaalquotient) benaderen;
- het begrip 'hellingsgetal in een punt' van een grafiek;
- een raaklijn in een punt van een grafiek aan die grafiek van een formule voorzien;
- werken met toepassingen van de verandering op een bepaald moment.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- werken met differentiequotienten.

Voor de docent

Bij het onderwerp 'Differentiaalquotient' gaat het om het berekenen van gemiddelde veranderings-snelheid van een grafiek in een bepaald punt en de koppeling ervan aan de helling van de raaklijn aan die grafiek in dat punt. Om dat op gang te krijgen, krijgen de leerlingen opdrachten voorgeschoteld waarover ze zelf moeten nadenken en het begrippenkader overzichtelijk opbouwen, de laatste opdracht is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Bij de tweede opdracht hoort het **Practicum** waarin staat hoe met behulp van de grafische rekenmachine het differentiaalquotient kan worden berekend. Deel (per groepje?) een versie van het juiste practicum uit.
- Bij de derde opdracht hoort een werkblad met daarop de grafiek. Dit kan worden uitgedeeld.

Opdracht 4.1

De snelheid van een startende zeilwagen neemt in het begin constant toe. De afgelegde afstand neemt dan kwadratisch toe. Voor de afgelegde afstand s (in meter) geldt bijvoorbeeld $s(t) = 1,2 \cdot t^2$, waarin t de tijd in seconden is.

1. Bereken het differentiequotient (de gemiddelde snelheid) op het interval $[4,6]$.
2. Bereken het differentiequotient (de gemiddelde snelheid) op de intervallen $[4;4,1]$, $[4;4,01]$, $[4;4,001]$, $[4;4,0001]$.
3. Bereken het differentiequotient (de gemiddelde snelheid) op het interval $[4,4 + h]$.
4. Welke conclusie kun je trekken als $h \rightarrow 0$? En wat gebeurt er met de hellingen als $h = 0$?

— Toelichting —

Geef de opdracht in vier stappen, laat de leerlingen steeds de volgende stap komen vragen.

Het gaat er nu om dat de leerlingen het begrip 'differentiaalquotiënt' leren kennen in het kader van snelheid op een bepaald moment. Laat ze eventueel een grafiek maken op hun grafische rekenmachine. Mogelijke hulpvragen: "Hoe bereken je de gemiddelde snelheid ook alweer? En wat betekent dit voor de grafiek?", "Wat zie je gebeuren als het interval kleiner wordt?", "Hoe zie je de gemiddelde snelheden in je grafiek? En wat gebeurt er als $h = 0$?"

In de gezamenlijke nabespreking moeten termen als 'differentiaalquotiënt' (veranderingssnelheid) op een bepaald tijdstip worden benoemd, noem de notaties $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=4}$ en $s'(4)$. Dit moet dan worden gekoppeld aan de helling, de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende 'raaklijn'. Het lijkt verstandig dat leerlingen hiervan zelf aantekeningen maken.

— Uitwerking —

Op het interval $[4,6]$ is het differentiequotiënt: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,2 \cdot 6^2 - 1,2 \cdot 4^2}{6 - 4} = \frac{24}{2} = 12$ m/s.

Op het interval $[4; 4,1]$ is het differentiequotiënt: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,2 \cdot 4,1^2 - 1,2 \cdot 4^2}{4,1 - 4} = \frac{0,972}{0,1} = 9,72$ m/s.

Op het interval $[4; 4,01]$ is het differentiequotiënt: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,2 \cdot 4,01^2 - 1,2 \cdot 4^2}{4,01 - 4} = \frac{0,09612}{0,01} = 9,612$ m/s.

Op het interval $[4; 4,001]$ is het differentiequotiënt: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,2 \cdot 4,001^2 - 1,2 \cdot 4^2}{4,001 - 4} = 9,6012$ m/s.

Op het interval $[4; 4,0001]$ is het differentiequotiënt: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,2 \cdot 4,0001^2 - 1,2 \cdot 4^2}{4,0001 - 4} = 9,600012$ m/s.

Op het interval $[4, 4 + h]$ is het differentiequotiënt: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,2 \cdot (4+h)^2 - 1,2 \cdot 4^2}{4+h-4} = \frac{9,6h + 1,2h^2}{h} = 9,6 + 1,2h$ m/s.

Als $h \rightarrow 0$ dan is dus de snelheid op $t = 4$ gelijk aan 9,6 m/s.

Opdracht 4.2

Bekijk de grafiek van $y = 0,5x^3 - 8x$ op je grafische rekenmachine.

1. Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 0$ met behulp van een tabel op het interval $[0, 0 + h]$ met voor h waarden die steeds dichter bij 0 komen.
2. Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 0$ met behulp van de grafische rekenmachine.
3. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 0$.

— Toelichting —

Geef deze opdrachten stap voor stap, telkens ééntje en laat de groepjes de volgende opdracht komen ophalen. Laat de leerlingen het practicum 'Veranderingen, differentiëren en de GR' (alleen de eerste twee paragrafen) passend bij hun grafische rekenmachine bekijken.

Mogelijke hulpvragen: "Wat betekent dit differentiaalquotiënt ook alweer voor de raaklijn?", "Hoe stel je ook weer de vergelijking van een lijn op als je de richtingscoëfficiënt weet en een punt weet waar hij doorheen gaat?"

Loop na afloop de verschillende resultaten met de leerlingen door, bespreek nogmaals gebruikte notaties, wijs op begrippen die hetzelfde betekenen. En wijs ook vooral op antwoorden die op inzicht wijzen en berekeningen overbodig maken.

— Uitwerking —

Een geschikt venster is $-10 \leq x \leq 10$ bij $-30 \leq y \leq 30$.

Met behulp van de tabel wordt $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = y'(0) = -8$.

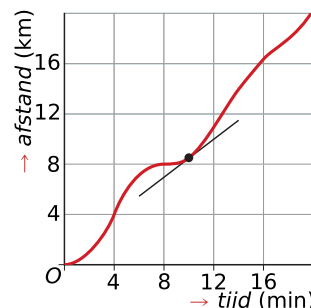
Met behulp van de grafische rekenmachine krijg je hetzelfde.

Raaklijn $y = -8x + b$ door $(0,0)$ geeft vergelijking $y = -8x$.

Opdracht 4.3

Bekijk de grafiek van de afgelegde afstand s van een auto op een binnenweg, uitgezet tegen de tijd t .

Je ziet dat de snelheid eerst langzaam toeneemt totdat hij na 4 minuten maximaal is. Dan neemt de snelheid weer af. Bij $t = 4$ gaat de grafiek van toenemend stijgend over in afnemend stijgend. Na 8 minuten staat de auto even stil om daarna weer langzaam op te trekken. Bepaal de snelheid van deze auto na precies 10 minuten, ook in km/uur.



Figuur 4.2

— Toelichting —

De grafiek staat op dit [Werkblad](#).

Deze opdracht is bedoeld als toepassing van het voorgaande in een situatie waarin er geen functievoorschrift gegeven is. Mogelijke hulpvragen: “Welke betekenis heeft de getekende raaklijn voor $t = 10$?” en “Hoe kun je de helling van die raaklijn bepalen?”.

— Uitwerking —

De snelheid na precies 10 minuten is het differentiaalquotiënt op $t = 10$. Omdat er geen functievoorschrift bij deze grafiek is, bepaal je de waarde van $\frac{ds}{dt}$ voor $t = 10$ met behulp van de grafiek en de getekende raaklijn.

Je ziet dat die raaklijn behalve door het punt $(10; 8,5)$ ook (bij benadering) door het punt $(12; 10)$ gaat. De helling van de raaklijn is daarom (ongeveer): $\frac{10,0 - 8,5}{12 - 10} = 0,75$.

De auto had na precies 10 minuten een snelheid van 0,75 km/minuut. Dat is ongeveer 45 km/uur.

Opdracht 4.4

Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd. Maak een lijstje van de belangrijkste begrippen en geef daarbij aan welke begrippen eigenlijk hetzelfde betekenen. Schrijf ook op welke notaties je moet gebruiken of in ieder geval begrijpen en welke rekenmethode (b.v. hoe je een differentiaalquotiënt op je grafische rekenmachine berekend) je moet kennen. Geef desnoods een voorbeeldberekening met die begrippen en notaties erbij. Bekijk vervolgens wat iedereen heeft bedacht.

— Toelichting —

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

— Uitwerking —

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Bekijk de applet: [differentiaalquotiënt](#).

Je ziet een deel van de grafiek van de functie $y = f(x)$.

De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a, b]$ is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De **verandering in een punt** met $x = a$ van de functie f vind je door een aantal keer het differentiequotiënt op $[a, a + h]$ te berekenen, waarbij je h steeds dichter bij 0 kiest: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Je krijgt dan een rij met differentiequotiënten die een bepaald getal benadert.

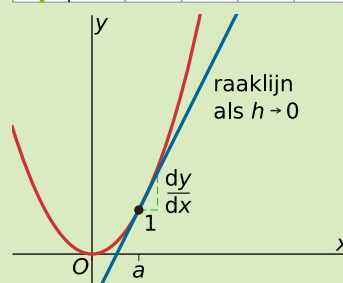
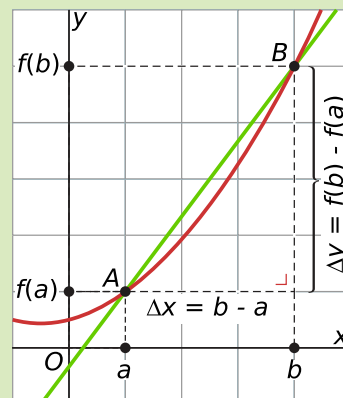
Dit getal heet het **differentiaalquotiënt** $\frac{dy}{dx}$ voor $x = a$.

In plaats van $\frac{dy}{dx}$ voor $x = a$, schrijf je ook wel $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$.

In de grafiek is het differentiaalquotiënt gelijk aan de **richtingscoëfficiënt** van de **raaklijn** in het punt van de grafiek met $x = a$.

- Als $\frac{dy}{dx} > 0$, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn positief en stijgt de grafiek dus.
- Als $\frac{dy}{dx} < 0$, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn negatief en daalt de grafiek dus.
- Als $\frac{dy}{dx} = 0$, dan is het hellingsgetal van de raaklijn 0. Er kan dan sprake zijn van een top, maar dat hoeft niet.
- Het hellingsgetal van de raaklijn in een top is altijd 0.

Op de grafische rekenmachine vind je het differentiaalquotiënt als dy/dx . Als je hier een x -waarde aan koppelt dan vind je direct het hellingsgetal van de raaklijn in dat punt aan de grafiek. Bekijk daarvoor het [Practicum](#).



Figuur 4.3

Verwerken

★ Opgave 4.1

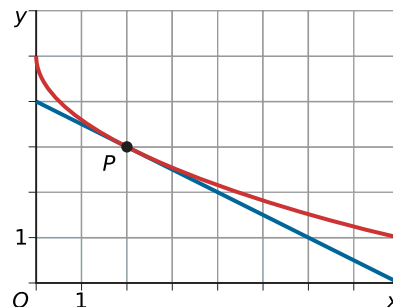
Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 5x^2 - x^3$ op de grafische rekenmachine.

- Bereken het hellingsgetal van de raaklijn aan f voor $x = 2$ met behulp van een rij differentiequotiënten.
- Je kunt van tevoren aan de grafiek zien of het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 2$ positief of negatief is. Waaraan kun je dat zien?
- Stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 2$ aan de grafiek van f .

★ Opgave 4.2

Je ziet een deel van een grafiek met een raaklijn aan de grafiek in het punt bij $x = 2$.

- Bepaal het differentiaalquotiënt voor $x = 2$ met behulp van de grafiek.
- Stel de vergelijking op van de getekende raaklijn.
De grafiek hoort bij de functie $f(x) = 5 - \sqrt{2x}$.
- Controleer je antwoord bij a door het differentiaalquotiënt door de grafische rekenmachine te laten bepalen.



Figuur 4.4

★ Opgave 4.3

Gegeven is de functie met voorschrift $g(x) = \frac{4}{x}$ op het interval $[-5, 5]$.

- Bereken de verandering van $g(x)$ voor $x = 1$.
- Er is een punt op de grafiek van g waar de helling dezelfde waarde heeft als die in het punt $(1, 4)$. Welk punt is dat? Licht je antwoord toe.
- Voor $x = 0$ heeft de functie g geen functiewaarde. Wat betekent dit voor de helling? En wat is er met de grafiek aan de hand?

★ Opgave 4.4

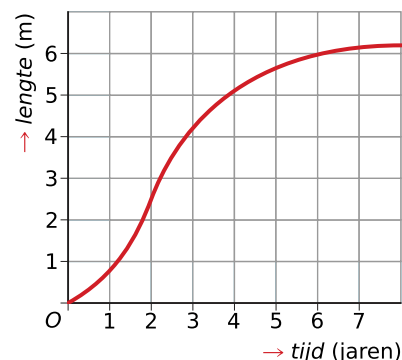
De concentratie C van een bepaalde stof die is opgelost in water, neemt met de tijd af volgens de formule $C(t) = 10 \cdot 0,9^t$. Hierin is C in gram per liter (g/L) en t in uren.

- Er verdwijnt niet elk uur een even grote hoeveelheid van deze stof uit het water. Hoe komt dat?
- Hoeveel gram van deze stof verdwijnt er gemiddeld in de eerste 5 uren? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- De vervalsnelheid van deze stof op $t = 5$ is niet gelijk aan de hoeveelheid die er tot dan toe gemiddeld per uur is verdwenen. Bereken deze vervalsnelheid in twee decimalen nauwkeurig.

★ Opgave 4.5

Bekijk de grafiek van de lengtegroei van een boom. Neem de grafiek over.

- Hoeveel meter per jaar groeit deze boom gemiddeld, gerekend over de eerste vijf jaar?
- Wat is de groeisnelheid na precies vijf jaar? Geef een zo nauwkeurig mogelijke schatting.
- Op welk tijdstip is de groeisnelheid het grootst? Licht je antwoord toe.
- Welke waarde krijgt de groeisnelheid uiteindelijk als de boom gezond blijft?



Figuur 4.5

★★ Opgave 4.6

De baan van een vuurpijl is bij benadering parabolisch tot hij uit elkaar spat. Bij deze baan past de formule $h(x) = -x^2 + 10x$, waarin zowel h als x in meters wordt uitgedrukt.

- Welke helling heeft de baan als de vuurpijl wordt afgeschoten?
- In welk punt van de baan is de helling 0?
- Als de pijl horizontaal 8 meter heeft afgelegd, spat hij uiteen. Hoe hoog is de pijl dan en welke helling heeft de baan op dat punt?

Toepassen

★★ Opgave 4.7: Vallend voorwerp

Een steen valt van een loodrechte rotswand 500 meter naar beneden. Voor de afgelegde weg y (in meter) geldt de formule $y(t) = 4,9t^2$, waarin t de tijd in seconden is, tenminste zolang de steen nog aan het vallen is en niet op de grond terecht is gekomen.

- Bereken de gemiddelde snelheid van de steen gedurende de eerste 5 seconden.
- Bereken de snelheid van de steen na precies 5 seconden. Gebruik een rij van differentiequotiënten en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.
- Bereken de snelheid waarmee de steen op de grond terechtkomt.

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het bepalen van een differentiaalquotiënt.

- [Veranderingen, differentiëren en de TI84](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de TIInspire](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de Casio](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de HPprime](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de NumWorks](#)

1.5 Hellingsgrafiek

Inleiding

Je kunt bij veel functies in een punt van de grafiek de helling van die grafiek berekenen. Bij de meeste x -waarden hoort wel een hellingsgetal. En dus kun je een grafiek maken van het hellingsgetal afhankelijk van de waarde van x . Zo'n 'hellingsgrafiek' zegt dan weer het nodige over de grafiek van de functie zelf.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- bij een gegeven grafiek een hellingsgrafiek schetsen;
- bij een gegeven functievoorschrift een hellingsgrafiek tekenen en in eenvoudige gevallen het voorschrift van de hellingsfunctie bepalen;
- uit een gegeven hellingsgrafiek gegevens over de bijbehorende functie aflezen;
- werken met tekenschema's van de hellingen van een functie.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- met een differentiequotiënt de gemiddelde verandering op een interval uitrekenen;
- met een differentiaalquotiënt de verandering voor een bepaalde invoerwaarde berekenen.

Voor de docent

Bij het onderwerp 'Hellingsgrafiek' gaat het om het begrip 'afgeleide (functie)' en hoe je daarvan de grafiek kunt maken op een grafische rekenmachine. En ook om het omgekeerde: vanuit een grafiek van de afgeleide of een tekenschema van de afgeleide het verloop en de positie van de extremen van de functie zelf terugredeneren. Om dat op gang te krijgen, krijgen de leerlingen opdrachten voorgeschoteld waarover ze zelf moeten nadenken en het begrippenkader overzichtelijk opbouwen, de laatste opdracht is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Bij de tweede opdracht hoort het **Practicum** waarin staat hoe met behulp van de grafische rekenmachine de afgeleide kan worden getekend. Deel (per groepje?) een versie van het juiste practicum uit.
- Bij de derde opdracht hoort een werkblad met daarop het tekenschema. Dit kan worden uitgedeeld.

Opdracht 5.1

Je weet nu hoe je bij een gegeven functie in elk gegeven punt het hellingsgetal, het differentiaal-quotiënt, kunt bepalen (met behulp van de grafische rekenmachine). Je krijgt nu telkens een andere functie gegeven. Maak daarbij een tabel zoals deze en teken een grafiek die hoort bij alle hellingsgetallen, een zogenaamde 'hellingsgrafiek'.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							

Tabel 5.1

Wat valt je op aan deze hellingsgrafieken?

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2 + 10$
3. $f(x) = (x - 2)^2$
4. $f(x) = 3x^2$
5. $f(x) = 3(x - 2)^2 + 10$
6. $f(x) = x^3$
7. $f(x) = x^3 + 10$
8. $f(x) = (x - 2)^3$
9. $f(x) = 3x^3$
10. $f(x) = 3(x - 2)^3 + 10$

— Toelichting —

Geef de opdracht mondeling in tien stappen, laat de leerlingen steeds de volgende stap komen vragen.

Mogelijke hulpvragen: "Hoe bereken je het hellingsgetal ook alweer?", "Wat zie je gebeuren als de functies kwadratisch zijn?", "Wat gebeurt er bij derdemachtsfuncties?". Als iets meer uitdaging kun je ze vragen om de functievoorschriften van de afgeleide functies op te schrijven.

In de gezamenlijke nabespreking moeten termen als 'hellingsgrafiek' en 'afgeleide (functie)' $f'(x)$ worden benoemd.

— Uitwerking —

Bij kwadratische functies krijg je rechte lijnen.

Bij de eerste twee de grafieken van $f'(x) = 2x$, bij de derde de grafiek van $f'(x) = 2(x - 2)$, bij de vierde de grafiek van $f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$ en bij de laatste de grafiek van $f'(x) = 3 \cdot (x - 2)$.

Bij derdegraads functies krijg je parabolen.

Bij de eerste twee de grafieken van $f'(x) = 3x^2$, bij de derde de grafiek van $f'(x) = 3(x - 2)^2$, bij de vierde de grafiek van $f'(x) = 3 \cdot 3x^2 = 9x^2$ en bij de laatste de grafiek van $f'(x) = 3 \cdot 3(x - 2)^2 = 9(x - 2)^2$.

Opdracht 5.2

Bekijk de grafiek van $y = 0,5x^4 - 4x^2$ op je grafische rekenmachine.

1. Zoek uit hoe je hierbij een hellingsgrafiek, een grafiek van de afgeleide, kunt maken.
2. Maak de grafiek van $\frac{dy}{dx}$.
3. Leg uit hoe je aan de grafiek van de afgeleide kunt zien waar de extremen van de gegeven functie zitten.

Toelichting

Laat de leerlingen het practicum 'Veranderingen, differentiëren en de GR' (nu vooral de laatste twee paragrafen) passend bij hun grafische rekenmachine bekijken.

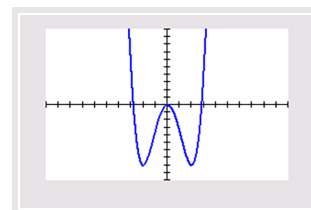
Mogelijke hulpvragen: "Hoe krijg je de grafiek van deze functie goed in beeld?", "Hoe bepaal je met je rekenmachine de afgeleide, wat moet je invoeren als tweede functie?" en "Welke waarde heeft de afgeleide als de functie zelf een maximum of een minimum heeft?". Een nuttige vervolgvraag zou zijn: "Zitten er altijd extremen bij de nulpunten van de afgeleide?" en "Hoe zit dit bijvoorbeeld bij $y = x^3$ uit de vorige opdracht?".

Loop na afloop de resultaten met de leerlingen door, bespreek nogmaals gebruikte notaties en werkwijzen.

Uitwerking

De grafiek past wel in het standaardvenster.

Maak eventueel met behulp van de grafische rekenmachine een tabel met hellingsgetallen.



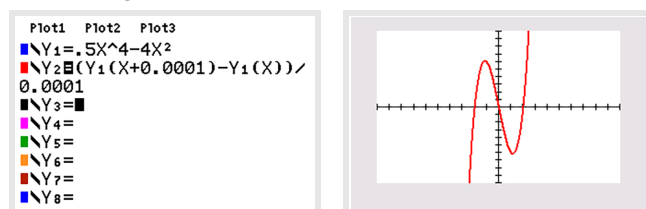
Figuur 5.2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x) = \frac{dy}{dx}$	-30	0	6	0	-6	0	30

Tabel 5.2

Teken de bij deze tabel passende grafiek.

Je kunt ook direct de grafische rekenmachine een goede benadering van de hellingsgrafiek laten tekenen. Daartoe laat je hem voor willekeurige x het differentiaalquotiënt benaderen door een differentiequotiënt op het interval $[x; x + 0,001]$ en daarvan een grafiek maken. Ook kun je de benadering van de afgeleide direct door de rekenmachine laten maken.



Figuur 5.3

De extremen vind je bij de nulpunten van de afgeleide, een maximum als de afgeleide van positief naar negatief gaat en een minimum als de afgeleide van negatief naar positief gaat.

Opdracht 5.3

De hellingfunctie zegt veel over het verloop van een grafiek. Het gaat er dan vooral om waar de hellingen positief, negatief of 0 zijn. Daarvoor heb je geen hellinggrafiek nodig, een tekenschema van de afgeleide is genoeg.

Je ziet hier een tekenschema van de hellingfunctie van een onbekende functie f .

+	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+	$f'(x)$
					-1				2						x

Figuur 5.4

Schets een mogelijke grafiek van f .

— Toelichting —

De grafiek staat op dit [Werkblad](#), eventueel kan dit worden uitgedeeld.

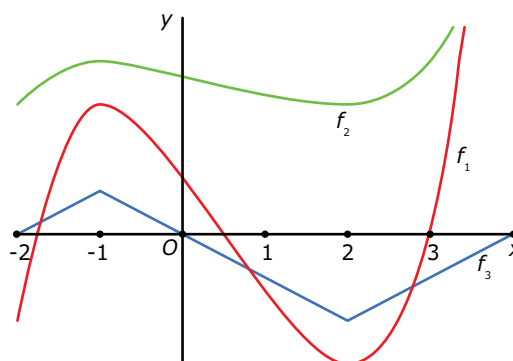
Mogelijke hulpvragen: “Wat betekent het voor de grafiek van f als de afgeleide positief/negatief is?” en “Hoe kun je nu een grafiek van f schetsen? Hoeveel zijn er nog mogelijk?”.

— Uitwerking —

Als de hellingfunctie positief is, is de grafiek van f stijgend, als de hellingfunctie negatief is, is die grafiek dalend. Dit betekent dat:

- op het interval $(-\infty, -1)$ de grafiek moet stijgen;
- op het interval $(-1, 2)$ de grafiek moet dalen;
- op het interval $(2, \infty)$ de grafiek moet stijgen.

Welke waarden $f(x)$ precies aanneemt is niet bekend. Daarom kies je zelf een startpunt, bijvoorbeeld $(0,0)$. De helling is daar negatief, dus de grafiek dalend. Hoe steil, is onbekend. Verder heeft de grafiek een maximum bij $x = -1$, omdat daar de helling overgaat van positief in negatief. Een minimum treedt op bij $x = 2$, omdat dan de helling van negatief in positief verandert.



Figuur 5.5

Je ziet drie mogelijke grafieken. Maar er zijn nog veel meer mogelijkheden. De grafieken hoeven niet door het punt $(0,0)$ te gaan.

Opdracht 5.4

Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd. Maak een lijstje van de belangrijkste begrippen en geef daarbij aan welke begrippen eigenlijk hetzelfde betekenen. Schrijf ook op welke notaties je moet gebruiken of in ieder geval begrijpen en welke rekenmethode (b.v. hoe je een afgeleide op je grafische rekenmachine maakt) je moet kennen. Geef desnoods een voorbeeldberekening met die begrippen en notaties erbij. Bekijk vervolgens wat iedereen heeft bedacht.

— Toelichting —

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

— Uitwerking —

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.



Theorie

Om te onthouden

Bekijk de applet: Hellingsgrafiek

Een functie $y = f(x)$ heeft meestal in een punt van de grafiek een helling die wordt bepaald door het differentiaalquotiënt in dat punt.

Van die hellingsgetallen kun je ook weer een grafiek maken. Je ziet de grafiek van een functie (in rood) met de **hellingsgrafiek** (in blauw). De bijbehorende functie van de hellingsgrafiek wordt de **hellingsfunctie** of **afgeleide** van f genoemd en kun je korter schrijven als f' (spreek uit f accent). Je ziet:

- als de hellingsfunctie positieve waarden heeft, stijgt de bijbehorende functie;
- als de hellingsfunctie negatieve waarden heeft, daalt de bijbehorende functie;
- met wat voor soort stijging/daling je te maken hebt;
- waar de hellingsfunctie de waarde 0 heeft, heeft de grafiek van de bijbehorende functie een horizontale raaklijn; vaak gaat het daarbij om extremen van de functie.

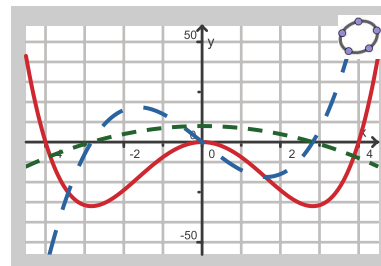
Hieruit blijkt dat vooral het positief, negatief, of 0 zijn van de hellingsfunctie van belang is om het verloop van de grafiek van een functie te beschrijven. Dezelfde gegevens kun je ook terugvinden in een **tekenschema**, dat je onder de hellingsgrafiek ziet getekend. Een tekenschema is een getallenlijn waarop je aangeeft wanneer een functie positief, negatief of 0 is. Hoe steil de grafiek moet lopen kun je niet van een tekenschema aflezen. Wel waar toppen zitten.

Verwerken

★ Opgave 5.1

Je ziet hier drie grafieken gemaakt met GeoGebra.

Welke van de twee gestippelde grafieken is de hellingsgrafiek van de rode grafiek?



Figuur 5.6

★ Opgave 5.2

Bekijk het tekenschema van de hellingsfunctie van een functie g .
Schets een mogelijke grafiek van g .

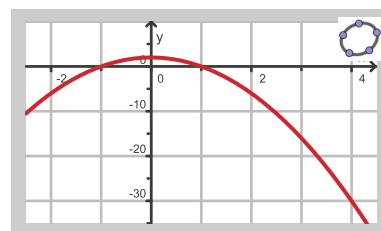
---	0	---	0	+	0	---	0	+	+	+	$g'(x)$
	-2		0		1		3				x

Figuur 5.7

★ Opgave 5.3

Bekijk de hellingsgrafiek van functie f , gemaakt met GeoGebra.

- Op welk interval stijgt de grafiek van f ?
- Voor welke waarde(n) van x heeft de grafiek van f een maximum?
- Kun je uit de hellingsgrafiek aflezen hoe groot dit maximum is?
- Neem aan dat $f(0) = 2$. Schets de grafiek van f .



Figuur 5.8

★ Opgave 5.4

Gegeven is de functie $f(x) = 0,5x^2 + 3x$.

Stel de formule op van de hellingsgrafiek van f door eerst een tabel van differentiaalquotiënten te maken.

★★ Opgave 5.5

Er zijn vier functies gegeven:

- $f(x) = -x^2 + 4$
- $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
- $h(x) = \frac{4}{x}$
- $k(x) = -x^4 + 4x$

- Bereken elk van deze functies het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 1$.
- Teken van elk van deze functies de grafiek van de hellingsfunctie.
- Bepaal met behulp van de hellingsgrafiek de extremen van de gekozen functie.

★★ Opgave 5.6

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 8x$.

- Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van f zo in beeld brengen dat alle drie de nulpunten en de twee toppen zichtbaar zijn. Toon aan dat deze grafiek de x -as snijdt in het punt $(4,0)$.
- Bereken het hellingsgetal van de grafiek in dit punt.

- c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 4$.
- d Teken de grafiek van de afgeleide van f .
- e Met behulp van de grafiek van die afgeleide kun je de extremen van f berekenen. Doe dat met behulp van de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

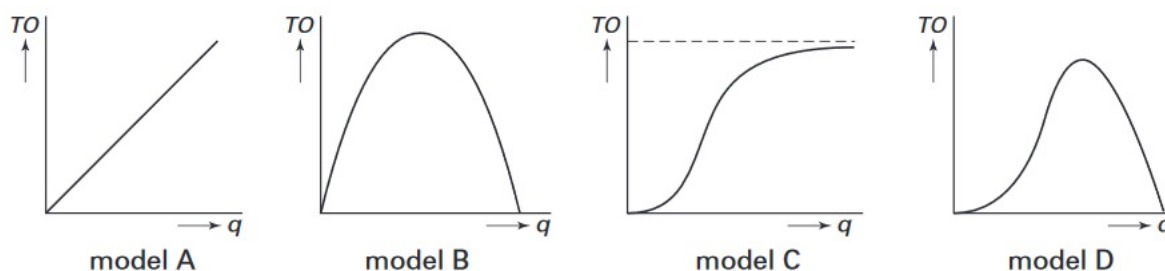
★★ Opgave 5.7: Elektrische auto

Een elektrische auto trekt op als het stoplicht op groen springt. Voor de afgelegde weg geldt: $s(t) = 1,6t^2$ waarin s de afgelegde weg in meters en t de tijd in seconden. (Een elektrische auto hoeft niet te schakelen.)

- a De snelheid van deze auto wordt uitgedrukt in meter per seconde. Teken de grafiek van de snelheid v van deze auto als functie van de tijd t .
- b Als het goed is, is je grafiek van de snelheid een rechte lijn. Stel een bijpassende formule op voor de snelheid $v(t)$.
- c Na hoeveel seconden is de snelheid meer dan 80 km/h? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

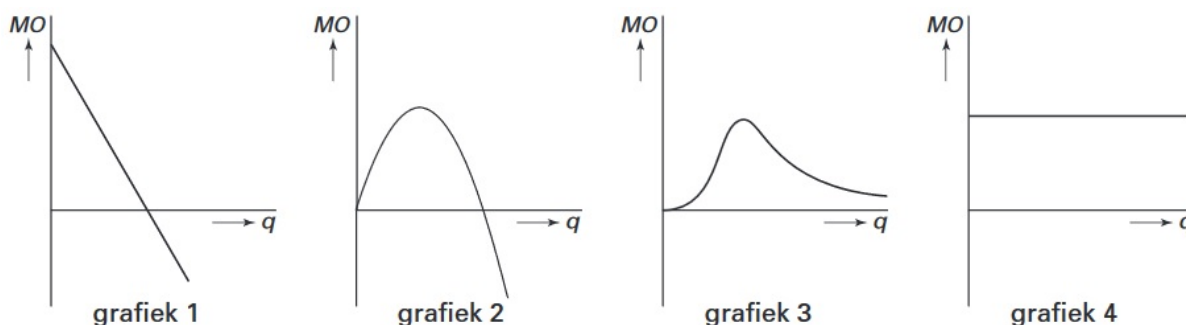
★★★ Opgave 5.8: Economische modellen

Een producent verkoopt q eenheden van een product. De totale opbrengst is TO . In de figuur staat voor vier economische modellen een schets van de grafiek van TO .



Figuur 5.9

Als je wilt weten hoe groot de totale opbrengst verandert bij een kleine toename van q , dan kijk je naar de marginale opbrengst MO . In de volgende figuur zie je bij elk van de modellen uit de figuur met economische modellen de grafiek van de marginale opbrengst, maar ze staan niet in de juiste volgorde.



Figuur 5.10

Geef voor elk van de grafieken 1, 2, 3 en 4 aan bij welk economisch model de grafiek hoort. Licht je antwoord toe.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2002, tweede tijdvak)



Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het maken van hellingsgrafieken.

- [Veranderingen, differentiëren en de TI84](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de TIInspire](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de Casio](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de HPprime](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de NumWorks](#)

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- toenemende, afnemende of constante stijging of daling — extremen
- toenametabel — vaste stapgrootte — toenamediagram
- gemiddelde verandering — differentiequotiënt — koorde
- veranderingssnelheid in een punt — differentiaalquotiënt — raaklijn
- hellingsgrafiek — hellingsfunctie — tekenschema

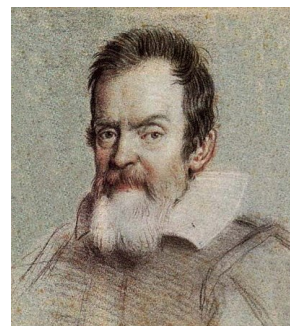
Activiteitenlijst

- bij een functie (of grafiek) aangeven waar hij (toenemend, afnemend) stijgt en daalt;
- bij een functie (of grafiek) een toenamediagram tekenen en omgekeerd bij een toenamediagram mogelijke grafieken van een bijpassende functie tekenen;
- bij een functie (of grafiek) het differentiequotiënt op een gegeven interval berekenen en de betekenis daarvan omschrijven;
- bij een functie (of grafiek) het differentiaalquotiënt voor een gegeven invoerwaarde berekenen en de betekenis ervan omschrijven — het hellingsgetal van een raaklijn aan een grafiek berekenen;
- bij een functie (of grafiek) een hellingsgrafiek tekenen — uit een hellingsgrafiek eigenschappen van de functie (stijgen, dalen, extremen) aflezen.

Achtergronden

Het wiskundig beschrijven van veranderingen is nog niet zo heel oud. Eigenlijk begon het allemaal met de Fransman **Nicole Oresme (1323–1382)** die de ‘grafiek’ bedacht om het bewegen van voorwerpen langs een rechte lijn te beschrijven.

Later gebruikte **Galileo Galileï (1564–1642)** de grafieken van Oresme om er de vrije val van een voorwerp in vacuüm mee weer te geven. En **Isaac Newton (1642–1727)** en **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)** bedachten een goede techniek om veranderingen te berekenen: de ‘differentiaalrekening’.



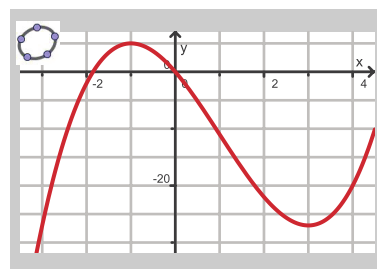
Figuur 6.1 Galileo Galileï (Wikipedia)

Testen

★ Opgave 6.1

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$, gemaakt met GeoGebra.

- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-3, 1]$.
- Geef een interval waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 0.
- Stel de vergelijking op van de raaklijn aan f voor $x = 1$.
- Maak de hellingsgrafiek bij deze functie.
- Uit de hellingsgrafiek kun je de x -waarden van de extremen van de gegeven functie halen. Leg uit hoe en bereken de extremen van f .



Figuur 6.2

★ Opgave 6.2

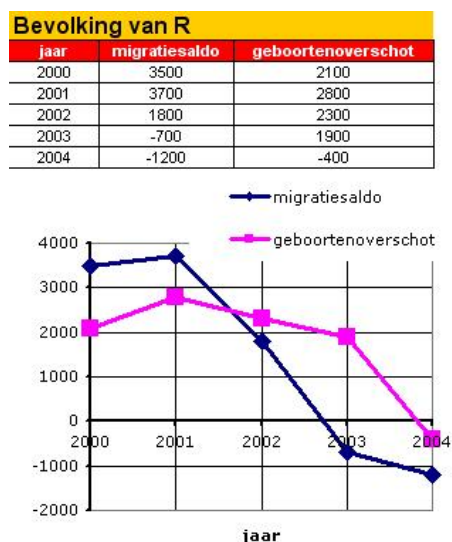
De hoogte van een vuurpijl die je van de grond afschiet, wordt gegeven door $h(t) = 60t - 5t^2$, waarin h de hoogte boven de begane grond in meter en t de tijd in seconden na het afschieten.

- Na tien seconden ontploft de vuurpijl. Op welke hoogte is dat?
- Teken een bijpassend toenamediagram van 0 tot 6 met stapgrootte 1.
- Bereken de gemiddelde snelheid van de vuurpijl over de eerste zes seconden.
- Bereken de snelheid van de vuurpijl op $t = 4$.
- Plot de grafiek van de snelheid $h'(t)$ van de vuurpijl. Maak eerst een tabel met hellingsgetallen.
- De grafiek van de snelheid die je bij e hebt getekend moet een rechte lijn zijn. Stel bij die rechte lijn een formule op en bereken met die formule de snelheid op het moment van ontploffen.

★ Opgave 6.3

Het migratiesaldo van R geeft het verschil tussen het aantal mensen dat in R komt wonen, en het aantal mensen dat uit R vertrekt. Het geboorteovershot is het verschil tussen het aantal geboorten en het aantal overledenen in R. In deze grafiek zie je het migratiesaldo en het geboorteovershot voor de jaren 2000 tot en met 2004.

- Met hoeveel mensen is het aantal inwoners in R in het jaar 2000 toegenomen?
- In welk jaar is het aantal inwoners in deze stad afgenomen?
- Het aantal inwoners van R was aan het begin van het jaar 2000 ongeveer 72600 (op honderdtallen afgerond). Teken een grafiek van het aantal inwoners in R in de jaren 2000 tot en met 2004.
- Hoe groot was het aantal inwoners op 1 januari 2005?



Figuur 6.3

★ Opgave 6.4

In een viskwekerij wordt vis uitgezet in een aantal nieuw aangelegde kweekvijvers. Als er geen vis wordt gevangen zal de visstand zich in de loop der jaren uitbreiden. De grafiek geeft een model van de groei van de visstand.

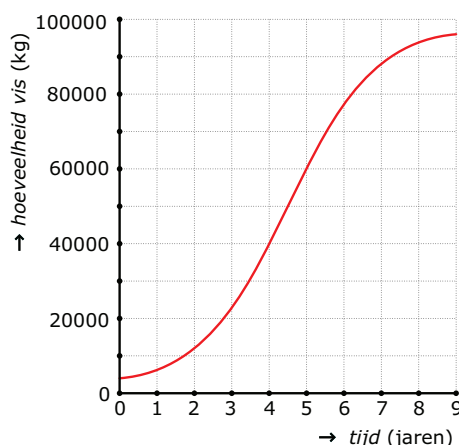
- Teken het toenamediagram met stapgrootte 1.
- De viskweker zal een aantal jaren afwachten alvorens te oogsten. Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens de grafiek.

Welk advies zou je de viskweker geven over:

- het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten.
- de grootte van de jaarlijkse vangst.

Geef bij dit advies een toelichting waarmee je de viskweker denkt te overtuigen.

(bron: examen wiskunde A vwo in 1989, eerste tijdvak)



Figuur 6.4

Toepassen

★★

Opgave 6.5: Suikerbieten

Een boer verbouwt suikerbieten op een bepaalde lap grond. Voor het onkruid wieden heeft hij personeel in dienst. De opbrengst bij de verkoop van de suikerbieten neemt toe als er beter wordt gewied, dus als hij meer werknemers in dienst neemt. Maar dat gaat niet onbeperkt: op zeker moment lopen de bietenwieders elkaar voor de voeten en wordt het wieden er niet beter van.

Een mogelijk verband tussen de opbrengst R (in honderden euro) en het aantal werknemers w wordt gegeven door de formule $R = -\frac{1}{3}w^3 + 6w^2$.

Voor de boer is het interessant om te weten hoeveel werknemers hij het beste kan inhuren. Daarbij kijkt hij naar de meeropbrengst van een werknemer. Zo is de meeropbrengst van de derde werknemer $R(3) - R(2)$. De meeropbrengst per werknemer heet in econometaal ook wel marginale opbrengst. De boer zorgt er voor dat hij zoveel werknemers in dienst neemt dat de marginale opbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

- Hoeveel bedraagt de marginale opbrengst (de meeropbrengst) van de derde werknemer?
- Je kunt met de grafische rekenmachine een tabel maken van de meeropbrengsten van elk van de eerste 10 werknemers. Maak die tabel en beslis op grond daarvan hoeveel werknemers de boer in dienst zal nemen voor het bieten wieden.
- De boer kiest voor zoveel werknemers, dat de meeropbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is. Waarom doet hij dat? Waarom kiest hij niet voor het aantal werknemers waarbij de opbrengst zo groot mogelijk is?

★★

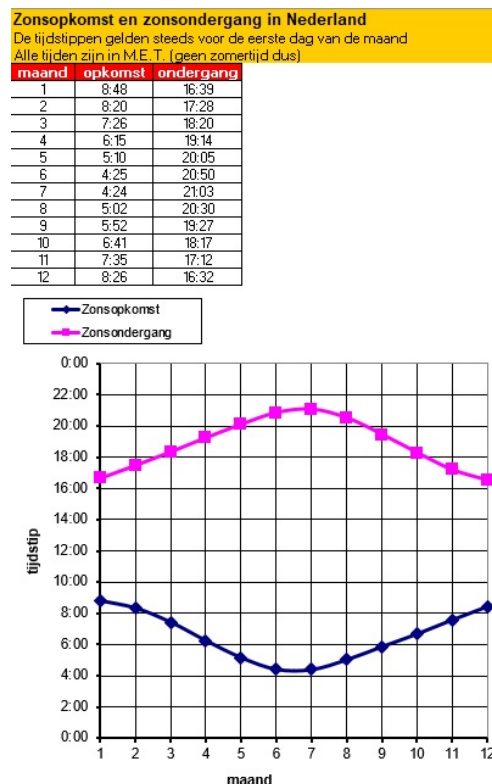
Opgave 6.6: Daglengte

Door het KNMI worden de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang gedurende het jaar bijgehouden. Via internet kun je actuele informatie over dit onderwerp vinden. [Hier](#) zie je een tabel en een grafiek voor Amsterdam in een bepaald jaar gemaakt in MS-Excel.

Je ziet dat de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang in de loop van het jaar veranderen. Bovendien is de snelheid waarmee die veranderingen plaatsvinden ook veranderlijk. In de tweede helft van de maand juni bijvoorbeeld verandert het tijdstip van zonsondergang maar weinig per dag. Maar in september is die verandering per dag juist behoorlijk groot. Ook de daglengte (verschil tussen zonsopkomst en zonsondergang) verandert in de loop van het jaar. En ook die verandering gaat soms sneller en soms minder snel...

Een goede manier om de veranderingen nauwkeurig te bekijken is een toenamediagram bijvoorbeeld per maand.

- Het tijdstip van zonsopkomst verandert per dag. In welke maanden verandert het tijdstip van zonsopkomst het snelst per dag? Hoe zie je dat aan de grafiek?
- Ook het tijdstip van zonsondergang verandert per dag. Verandert het tijdstip van zonsondergang het snelst per dag in dezelfde maanden als dat van zonsopkomst? Kun je dit verklaren?
- De daglengte-grafiek is af te leiden uit die van zonsopkomst en zonsondergang. Hoe?
- In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder?
- Teken zelf in Excel een grafiek en een toenamediagram van de daglengte in de loop van het jaar. Neem de gegevens over. Neem voor het toenamediagram een stapgrootte van 1 maand.



Figuur 6.5

- f De daglengte verandert dagelijks. In welke maanden verandert de daglengte het snelst? Hoe zie je dat aan de grafiek en hoe aan het toenamediagram?
- g In bepaalde maanden lijkt de daglengte wel vrijwel constant. In welke maanden is dat het geval? En hoe zie je dat aan het toenamediagram?
- h In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?

★★★

Opgave 6.7: Snelheid, versnelling

Voor de snelheid v in m/s van een bewegend voorwerp geldt: $v = 2,4t$ waarin t de tijd in seconden is.

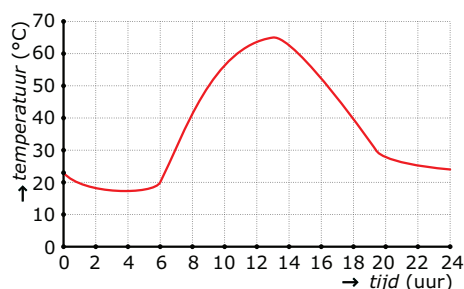
- a De grafiek van v is de hellingsgrafiek van de grafiek van de afgelegde weg $s(t)$ waarin s in meters is uitgedrukt. Neem aan, dat $s(0) = 0$. Maak een zo nauwkeurig mogelijke grafiek van $s(t)$.
- b Bij de grafiek van $v(t)$ hoort ook een hellingsgrafiek. Teken die hellingsgrafiek.
- c Wat stelt de hellingsgrafiek van $v(t)$ voor?
- d Voor de afgelegde weg geldt de formule $s(t) = 1,2t^2$.
Laat met behulp van het differentiequotient op het interval $[t, t + h]$ zien, dat de gegeven functie v inderdaad de hellingfunctie van s is.

Examen

★★

Opgave 6.8: Woestijnhagedis

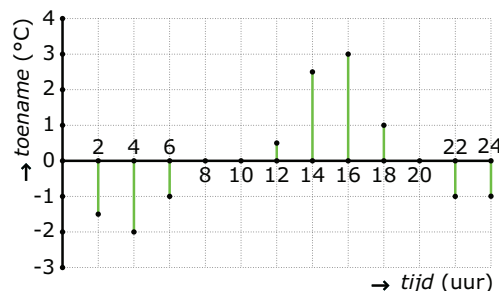
De woestijnhagedis (*diposaurus dorsalis*) leeft in de woestijnen van Californië (V.S.). In deze woestijn zijn er dagelijks grote temperatuurschommelingen. In de zomer kan de temperatuur op een dag variëren van ongeveer 20 °C tot ongeveer 65 °C. In de winter kan het er zelfs vriezen. Omdat de hagedis een koudbloedig dier is, is zijn gedragspatroon erg afhankelijk van de temperatuur. Je ziet in de figuur het temperatuurverloop voor een zomerdag (eind juli/begin augustus) in de Californische woestijn. Deze figuur is typerend voor alle dagen in de periode eind juli/begin augustus. Alleen als de temperatuur tussen de 36 °C en 42 °C ligt, is de hagedis voortdurend buiten zijn hol actief met het zoeken naar voedsel. Hij heeft dan geen beschutting nodig. Als de temperatuur tussen de 42 °C en de 50 °C is moet hij af en toe beschutting zoeken tegen de zon. Bij alle andere temperaturen bevindt de hagedis zich voortdurend in zijn hol.



Figuur 6.6

- a Hoeveel uur per dag is de hagedis in de periode eind juli/begin augustus voortdurend buiten zijn hol actief? Licht je antwoord toe.
- b In de figuur is te zien, dat de temperatuur tussen 6:00 uur en 10:00 uur vrij snel stijgt. Hoeveel bedraagt in deze periode de gemiddelde temperatuurstijging per uur?

In dit diagram zie je de toename/afname van de temperatuur in het hol van de hagedis. Ook deze figuur is typerend voor de periode eind juli/begin augustus. Omdat het niet zo eenvoudig is om deze temperaturen te meten, kun je in het diagram slechts aflezen hoeveel de temperatuur per 2 uur is gestegen of gedaald. Om 8:00 uur 's morgens is de temperatuur in het hol ongeveer 38 °C.



Figuur 6.7

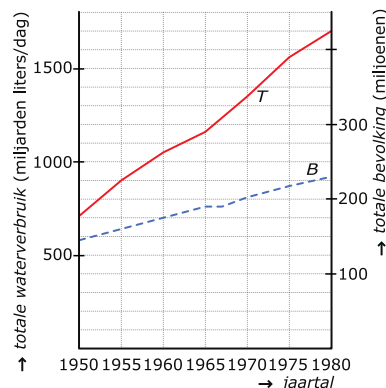
- c Teken een grafiek van de temperatuur in het hol van de hagedis uitgaande van het toename-/afnamediagram.
- d Bepaal op welke momenten van de dag het temperatuurverschil tussen de binnenkant van het hol en de omgeving het grootst is.

(bron: examen wiskunde A havo 1996, tweede tijdvak, aangepast)

★★ Opgave 6.9: Schoon drinkwater

Overall op aarde is de behoefte aan schoon water groot. Niet alleen voor huishoudelijk gebruik (o.a. drinkwater), maar vooral voor niet-huishoudelijk gebruik (landbouw en industrie) is heel veel water nodig. Deze opgave gaat over het waterverbruik in de Verenigde Staten vanaf 1950.

In de grafiek staan gegevens over het totale jaarverbruik (T) en de grootte van de bevolking (B) van de V.S. Je kunt er bijvoorbeeld uit aflezen dat in 1980 het totale waterverbruik ongeveer 1680 miljard liter per dag bedroeg, en dat de bevolking in dat jaar ongeveer 230 miljoen mensen telde.

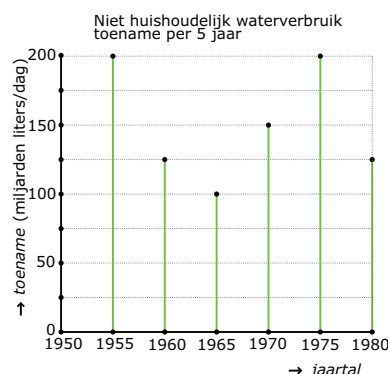


Figuur 6.8

- a Laat zien dat het totale verbruik per jaar in 1975 gemiddeld ongeveer 2,6 miljoen liter water per inwoner was.

Het aantal liters in opgave a is erg groot. Dat komt vooral door het niet-huishoudelijk waterverbruik. In 1950 was het totale waterverbruik (700 miljard liter per dag) opgebouwd uit 625 miljard liter water voor niet-huishoudelijk gebruik en 75 miljard liter per dag voor huishoudelijk verbruik.

- b Bekijk ook het toename-diagram van het waterverbruik per dag in de V.S. voor niet-huishoudelijk gebruik. Onderzoek of het niet-huishoudelijk verbruik als percentage van het totale waterverbruik per dag in 1980 groter was dan in 1950.
- c Bij een onderzoek schatte men dat de toename van het totale waterverbruik elke 5 jaar zou liggen tussen 110 en 200 miljard liter per dag. Tussen welke twee getallen ligt volgens deze veronderstelling het totale waterverbruik in de V.S. in 2010?

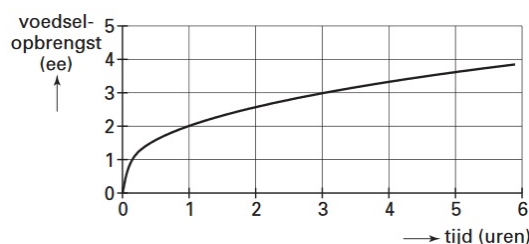


Figuur 6.9

(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)

★★ Opgave 6.10: Roofdieren

De meeste roofdieren proberen iedere dag hun voedsel zo snel mogelijk te vangen. Naarmate meer voedsel is gevangen, wordt het vaak moeilijker om nog nieuw voedsel te vangen. Deze opgave gaat over het wiskundige model dat daarbij gemaakt kan worden. In dat model geeft de opbrengstfunctie het verband aan tussen de hoeveelheid voedsel (de voedselopbrengst) en de tijd die nodig is om die hoeveelheid voedsel te vangen. In de figuur is de grafiek getekend van de opbrengstfunctie voor roofdiersoort A. De voedselopbrengst is uitgedrukt in energie-eenheden (ee) en de benodigde tijd in uren.

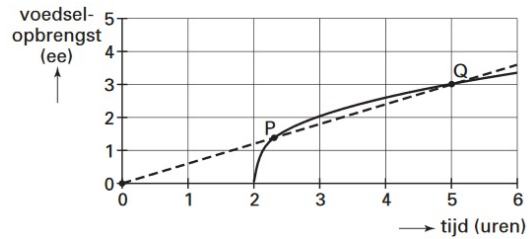


Figuur 6.10

We bekijken een roofdier van soort A. Na 0,5 uur heeft dit roofdier een bepaalde hoeveelheid energie aan voedsel gevangen. Om de dubbele hoeveelheid te vangen is meer dan het dubbele van 0,5 uur nodig.

- a Bepaal met behulp van de grafiek hoeveel maal zo groot de daarvoor benodigde tijd is.
- Sommige roofdieren leven niet in hetzelfde gebied als hun prooidieren. Zulke roofdieren moeten zich eerst verplaatsen naar hun voedselgebied voordat ze met de jacht kunnen beginnen. De tijd die nodig is om een bepaalde hoeveelheid voedsel te vangen wordt daardoor uitgebreid met de tijd die nodig is om naar het voedselgebied te gaan. Dit heeft gevolgen voor de gemiddelde opbrengst per uur. In de figuur is de grafiek van de opbrengstfunctie van roofdiersoort B getekend. Zoals je in de figuur kunt zien, is een roofdier van deze soort twee uur onderweg (1 uur heen en 1 uur terug).

Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich het punt Q met coördinaten $(5,3)$. Dat wil zeggen dat, als een roofdier van roofdiersoort B vijf uur jaagt (inclusief verplaatsing), dan is zijn voedselopbrengst 3 ee. De gemiddelde voedselopbrengst is dan $\frac{3}{5} = 0,6$ ee/h. In de figuur is ook een stippellijn getekend die gaat door de oorsprong en punt Q . Deze stippellijn snijdt de grafiek van roofdiersoort B ook in punt P .



Figuur 6.11

- b** Leg uit, zonder berekening, dat de gemiddelde voedselopbrengst die hoort bij punt P ook gelijk is aan 0,6 ee/uur.
- c** Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich een punt waarbij de gemiddelde opbrengst per uur voor een roofdier van soort B maximaal is.

Bepaal met behulp van de figuur bij b, bij welke tijd de gemiddelde opbrengst per uur maximaal is. Licht je antwoord toe.

Een roofdier van soort C is in totaal 1 uur onderweg. Voor deze roofdieren is de opbrengstfunctie gegeven door de formule:

$$r = 4\sqrt{t-1} \text{ als } t > 1 \text{ (voor het eerste uur geldt: } r = 0)$$

Hierin is t de tijd in uren en r de hoeveelheid gevonden voedsel in ee.

Deze opbrengstfunctie r heeft voor $t > 1$ de volgende twee eigenschappen:

- een langere tijd levert altijd een hogere opbrengst op;
- de toename van de opbrengst wordt steeds geringer naarmate t groter wordt.

Deze twee eigenschappen zijn zichtbaar in de grafiek van r , maar ze kunnen ook worden verklaard aan de hand van de grafiek van de afgeleide van r .

- d** Schets de grafiek van de afgeleide van r en verklaar de beide eigenschappen aan de hand van deze grafiek.

(bron: vwo wiskunde A examen 2006, eerste tijdvak)

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:

✓ goed gemaakt — S wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — H hulp nodig gehad — G samen met groepje goed gemaakt — X fout gemaakt en niet goed begrepen — N niet bekeken

1	In grafieken	★	★★	★★★
	De begrippen stijgend, dalend en constant gebruiken bij grafieken.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.4 ☐ T 6.3 ☐	1.5 ☐ 1.7 ☐ T 6.6 ☐	
	Toenemende, afnemende en constante stijging en daling herkennen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ T 6.1 ☐ T 6.2 ☐	1.5 ☐ 1.6 ☐ 1.7 ☐ T 6.6 ☐	
	(lokale) maxima en minima van een grafiek bepalen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ T 6.2 ☐	1.5 ☐ 1.6 ☐ T 6.6 ☐	
2	Veranderingen per stap	★	★★	★★★
	Een toenamediaagram maken bij een gegeven grafiek of een gegeven functievoorschrift.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.5 ☐ T 6.2 ☐ T 6.4 ☐	2.4 ☐ T 6.5 ☐ T 6.6 ☐ T 6.8 ☐ T 6.9 ☐	2.6 ☐
	De invloed van de stapgrootte op het toenamediaagram bepalen.		T 6.5 ☐ T 6.6 ☐ T 6.8 ☐ T 6.9 ☐	2.6 ☐
	Vanuit een gegeven toenamediaagram (en "beginwaarde") een mogelijke grafiek tekenen.	T 6.3 ☐	2.3 ☐ 2.4 ☐ T 6.8 ☐	
3	Differentiequotiënt	★	★★	★★★
	De betekenis van het begrip differentiequotiënt kennen.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ T 6.1 ☐ T 6.2 ☐	3.4 ☐ 3.6 ☐ 3.7 ☐	
	Tussen twee punten uit een tabel of een grafiek het differentiequotiënt bepalen.	T 6.1 ☐ T 6.2 ☐		
	Het differentiequotiënt van een functie op een gegeven interval berekenen.	3.2 ☐	3.4 ☐ 3.6 ☐ 3.7 ☐	3.5 ☐
	Werken met toepassingen van het differentiequotiënt.	3.3 ☐	3.6 ☐ 3.7 ☐	
4	Differentiaalquotiënt	★	★★	★★★
	De verandering op een bepaald moment (het differentiaalquotiënt) benaderen.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐ T 6.1 ☐	4.6 ☐ 4.7 ☐	
	het begrip 'hellingsgetal in een punt' van een grafiek; .	4.1 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐ T 6.1 ☐	4.6 ☐ 4.7 ☐ T 6.10 ☐	T 6.7 ☐
	De formule van een raaklijn aan een grafiek opstellen.	4.2 ☐ 4.5 ☐ T 6.1 ☐	T 6.10 ☐	T 6.7 ☐
	Werken met toepassingen van het differentiaalquotiënt.	4.4 ☐ 4.5 ☐	4.6 ☐ 4.7 ☐ T 6.10 ☐	

5

Hellingsgrafiek	★	★★	★★★
Bij een gegeven grafiek een hellingsgrafiek schetsen.	5.1 ☐ T 6.1 ☐ T 6.2 ☐	T 6.10 ☐	5.8 ☐ T 6.7 ☐
Bij een gegeven functievoorschrift een hellingsgrafiek tekenen en in eenvoudige gevallen het voorschrift van de hellingsfunctie bepalen.	5.4 ☐ T 6.2 ☐	5.5 ☐ 5.6 ☐ 5.7 ☐ T 6.10 ☐	5.8 ☐ T 6.7 ☐
Uit een gegeven hellingsgrafiek gegevens over de bijbehorende functie aflezen.	5.3 ☐ 5.4 ☐	5.5 ☐ 5.6 ☐	5.8 ☐
Werken met tekenschema's.	5.2 ☐		

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

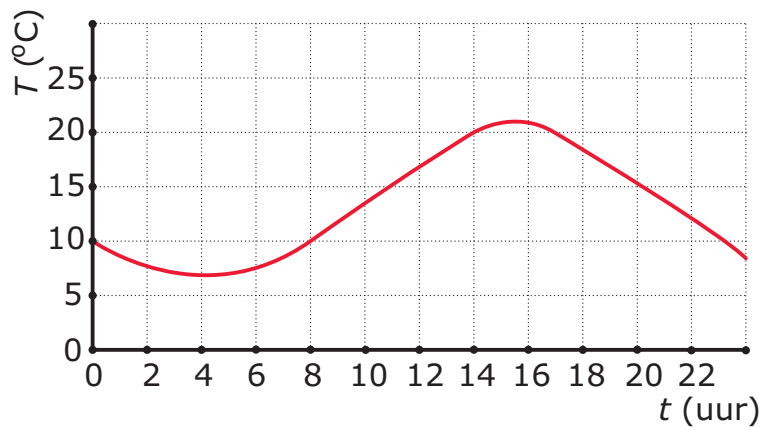
Stichting Math4All



www.math4all.nl

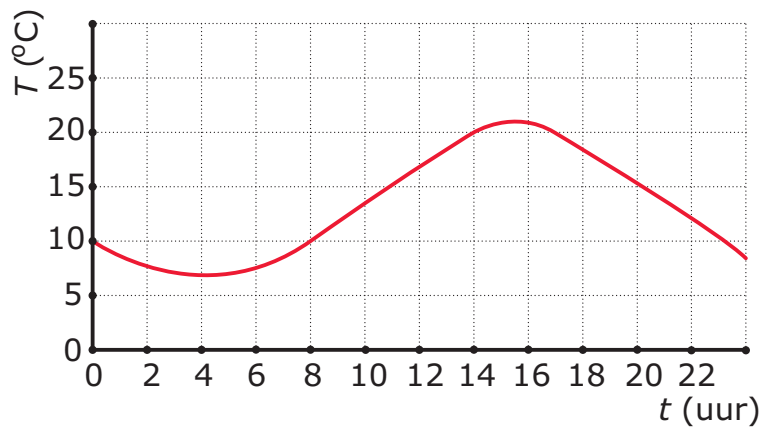


Werkblad bij Opdracht 1.1



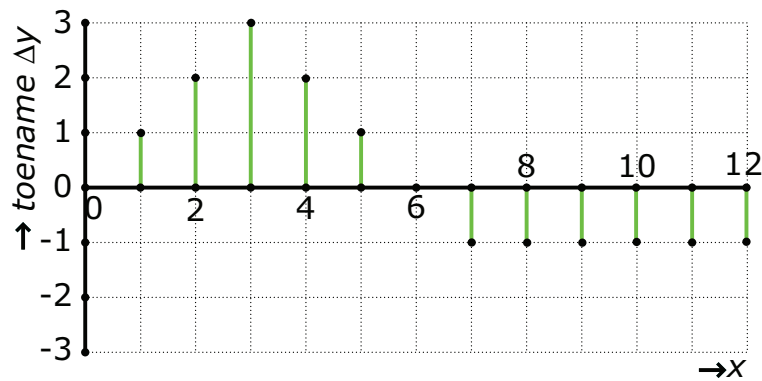
Deze grafiek geeft de temperatuur T (in $^{\circ}\text{C}$) op een bepaalde plaats weer afhankelijk van het tijdstip t (in uren) op de dag.

Werkblad bij Opdracht 2.1



Deze grafiek geeft de temperatuur T (in $^{\circ}\text{C}$) op een bepaalde plaats weer afhankelijk van het tijdstip t (in uren) op de dag.

Werkblad bij Opdracht 2.2



Dit is het toenamediaagram van de grafiek van een functie f waarvoor geldt:
 $f(0) = 4$.

Werkblad bij Opdracht 3.1

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel:

<i>tijd</i> (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
<i>afstand</i> (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

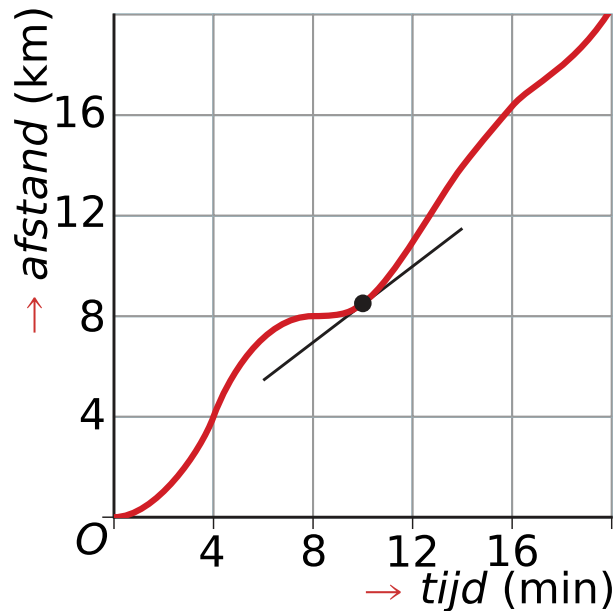
Werkblad bij Opdracht 3.3

Ilse is om 14:00 uur begonnen met het verkopen van kaartjes voor een voorstelling. Zij heeft op een aantal tijdstippen bijgehouden hoeveel kaartjes ze verkocht heeft:

<i>tijd</i>	10:00	12:00	13:30	15:00	18:00
<i>aantal kaartjes</i>	0	178	331	405	642

Werkblad bij Opdracht 4.3

Bekijk de grafiek van de afgelegde afstand s van een auto op een binnenweg, uitgezet tegen de tijd t .



Je ziet dat de snelheid eerst langzaam toeneemt totdat hij na 4 minuten maximaal is. Dan neemt de snelheid weer af. Bij $t = 4$ gaat de grafiek van toenemend stijgend over in afnemend stijgend. Na 8 minuten staat de auto even stil om daarna weer langzaam op te trekken. Bepaal de snelheid van deze auto na precies 10 minuten.

Werkblad bij Opdracht 5.3

Tekenschema van de afgeleide $f'(x)$ van een functie f .

$$\begin{array}{cccccccccccc} + & + & + & + & + & 0 & - & - & - & - & 0 & + & + & + & + & + \\ \hline & & & & & -1 & & & & & 2 & & & & & x \end{array} \quad f'(x)$$