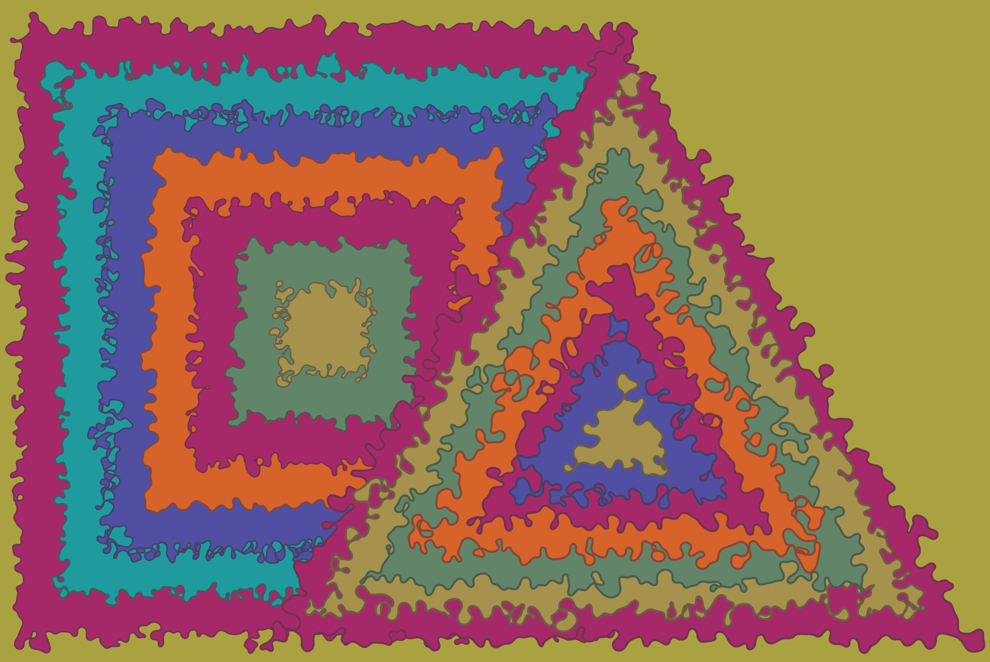
Wiskunde B

4 VWO

Katern 4

ConTeXt College



© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaart geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaarden ze geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie http://creativecommons.org/licenses/by/3.0).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Machtsfuncties

1.1 Machten

Inleiding

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$. Dit is een voorbeeld van een zogenaamd machtsverband, want de variabele h moet tot de macht $0{,}5$ worden verheven. Je kunt ook zeggen dat h een machtsfunctie is van a. Je maakt in dit onderdeel met machtsfuncties kennis.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- wat een machtsverband en een machtsfunctie is;
- bij een machtsverband heen en terug te rekenen;
- hoe bij een machtsverband de verandering van de éne variabele samenhangt met die van de andere.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen en ongelijkheden oplossen.

Verkennen

Opgave V1

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$.

Geef van de volgende beweringen aan of ze waar zijn of niet, en geef een uitleg.

a Als je op een toren van 100 m hoog staat kun je meer dan 30 km ver kijken.

b Als je op een toren van 50 m hoog staat kun je niet verder dan (afgerond) 18 km kijken.

c Op een hoogte van 100 m kun je twee keer zo ver kijken als op een hoogte van 50 m.

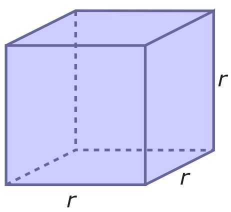
Figuur 1.2

Uitleg

De inhoud I van een kubus met ribben van lengte r is: $I = r \cdot r \cdot r = r^3$. Dit is een typisch voorbeeld van een machtsfunctie: de variabele r moet tot de derde macht worden verheven om een functiewaarde te vinden.

Als $r = 5$, dan is $I = 5^3 = 125$.

Al in de Oudheid vroegen de Grieken zich af hoe groot de ribbe is van een kubus die een inhoud heeft die precies het dubbele is van de gegeven inhoud. In ons geval: "Hoe groot is de ribbe van een kubus met een inhoud van 250?"



Figuur 1.3

De oplossing van deze vraag is zowel eenvoudig als heel erg moeilijk.

Je weet dat $\left(r^3\right)^{\frac{1}{3}} = r^{3 \cdot \frac{1}{3}} = r^1 = r$.

Je kunt daarom van r^3 terugrekenen naar r door de omgekeerde macht te gebruiken: Als $r^3 = 250$ dan is $r = 250^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{250} \approx 6{,}30$.

De benadering van $6{,}30$ kun je gemakkelijk met de rekenmachine krijgen, iets wat vroeger natuurlijk niet kon. Maar de rekenmachine zal altijd een benadering geven, want $\sqrt[3]{250}$ kun je niet als breuk schrijven.

Kijk je naar de massa van de kubus, dan moet je rekening houden met de soortelijke massa. Dat is de massa in kilogram van 1 dm^3. De soortelijke massa van bijvoorbeeld een massief ijzeren kubus is $7{,}87$ kg. De massa m is dan recht evenredig met de inhoud I: $m = 7{,}87 \cdot I$. Voor de massa van deze kubus geldt daarom: $m = 7{,}87 \cdot r^3$, waarin r is uitgedrukt in dm.

Dit is opnieuw een voorbeeld van een machtsfunctie: m is recht evenredig met een macht van r.

Opgave 1

De formule voor de inhoud I van een kubus is $I = r^3$, waarbij r de lengte van een ribbe is.

a Bereken de inhoud van een kubus waarvan de ribbe 4 cm is.

b Maak de ribbe twee keer zo groot. Wat gebeurt er met de inhoud?

c Bereken hoe groot je de ribbe moet nemen om een kubus te krijgen met een inhoud van 500 cm^3. Rond af op één decimaal.

De soortelijke massa van marmer is $2{,}7$ g/cm^3.

d Licht toe dat de massa m van een kubus van marmer recht evenredig is met een macht van de ribbe r. Geef de bijbehorende formule.

Opgave 2

Ook het verband tussen de ribbe r en de oppervlakte A van een kubus is een machtsverband. De bijbehorende formule is: $A = 6r^2$.

a Is A recht evenredig met de tweede macht van r, of is r recht evenredig met de tweede macht van A?

b Bereken de oppervlakte van een kubus met een ribbe van 4 cm.

c Bereken hoe groot je de ribbe moet nemen om een kubus te krijgen met een oppervlakte van 300 cm^2. Rond af op één decimaal.

d Hoeveel keer zo groot moet de ribbe worden om een kubus te krijgen met een viermaal zo grote oppervlakte?

e Druk r uit in A.

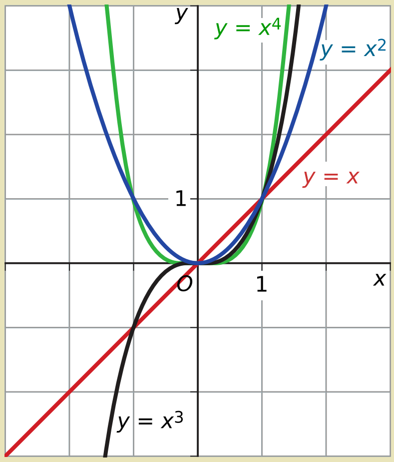
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Als y **recht evenredig met een macht** van x is, dus $y = c \cdot x^p$, dan spreek je van een **machtsfunctie**. De constante c is de **evenredigheidsconstante**.

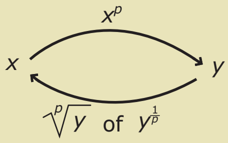
Bekijk de voorbeelden van grafieken van machtsfuncties. Daarbij is p steeds een positief getal of 0 en $c = 1$.



Figuur 1.4

Vanuit de machtsfunctie $y = x^p$ (dus als $c = 1$) kun je op twee manieren terugrekenen:

- $x = \sqrt[p]{y}$
- $x = y^{\frac{1}{p}}$



Figuur 1.5

Als de evenredigheidsconstante niet de waarde 1 heeft, begin je met door c te delen. Daarna pas je of de p-demachtswortel toe, of je werkt met de omgekeerde macht. Afhankelijk van de waarde van p zijn er één of twee mogelijke uitkomsten.

Voor elke x en voor willekeurige reële getallen a en b gelden de volgende eigenschappen.

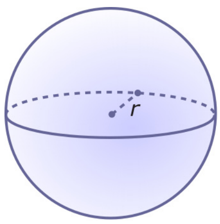
eigenschappen van machten en exponenten		
$x^0 = 1$	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ mits $x \neq 0$	$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$ mits $x \geq 0$ en $a > 0$
$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$	$x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$ mits $x \neq 0$	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Tabel 1.1

Voorbeeld 1

De inhoud van een bol is recht evenredig met de derdemacht van de straal: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

Hoe groot is de straal van een bol met een inhoud van $I = 1000$ cm^3?



Figuur 1.6

Antwoord

Daarvoor moet je de vergelijking $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 1000$ oplossen.

En dus: $r^3 = 238{,}73...$
Je vindt: $r = \sqrt[3]{238{,}73...} \approx 6{,}2$ cm.

Of zo: $r = (238{,}73...)^{\frac{1}{3}} \approx 6{,}2$ cm.

Je kunt ook eerst de formule voor de inhoud van een bol omrekenen, zodat de straal wordt uitgedrukt in de inhoud:

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = I$$

$$r^3 = \frac{3}{4\pi} \cdot I$$

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot I\right)^{\frac{1}{3}}$$

Je vindt: $r \approx 0{,}62 \cdot I^{\frac{1}{3}}$, dus r is recht evenredig met $I^{\frac{1}{3}}$.

En zo is $r \approx 0{,}62 \cdot 1000^{\frac{1}{3}} \approx 6{,}2$ cm.

Opgave 3

De formule voor de inhoud van een bol is $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, met straal r in cm.

a I is recht evenredig met r^3.
Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b r is recht evenredig met $I^{\frac{1}{3}}$.
Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

Opgave 4

Bij welke van de formules is y recht evenredig met een macht van x? Geef in dat geval de evenredigheidsconstante.

a $y = 2x$

b $y = 2x^4 + 5$

c $y = 5x^4$

d $x = 5y^4$

Opgave 5

Van een cilinder met straal r en hoogte h is het volume V:

$V = \pi r^2 h$

Neem aan dat $h = 2r$ en dat zowel straal als hoogte in cm zijn uitgedrukt.

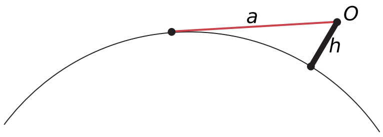
a Laat zien dat in dit geval V recht evenredig is met r^3.
Bepaal de evenredigheidsconstante.

b Bereken de straal van zo'n cilinder als het volume 1000 cm^3 is.
Doe dit zowel met je grafische rekenmachine als algebraïsch.

Je kunt de formule van V als functie van r herleiden tot een formule voor r als functie van V.

c Laat zien, hoe dat gaat.
Bereken met die formule de straal bij een volume van 1000 cm^3.

Voorbeeld 2



Figuur 1.7

In een vlak landschap is er een verband tussen hoe ver je kunt kijken en hoe hoog je ogen zich boven het landschap bevinden. Voor de kijkafstand a (meter) als functie van de hoogte h (meter) geldt: $a = 3572 \cdot h^{\frac{1}{2}}$.

Omdat $h^{\frac{1}{2}} = \sqrt{h}$ kun je deze formule ook schrijven als $a = 3572 \cdot \sqrt{h}$. Je kunt bij deze machtsfunctie bij een gegeven waarde van h de bijbehorende waarde van a berekenen en omgekeerd. Laat dat met voorbeelden zien.

Antwoord

Bijvoorbeeld bij $h = 30$ geldt $a = 3572 \cdot 30^{\frac{1}{2}} = 3572 \cdot \sqrt{30} \approx 19564$.

Neem je omgekeerd een kijkafstand van 20 km, dus $a = 20000$, dan geldt:

$$\begin{aligned} 3572 \cdot h^{\frac{1}{2}} &= 20000 && \text{links en rechts delen door 3572} \\ h^{\frac{1}{2}} &= \frac{20000}{3572} && \text{links en rechts kwadrateren} \\ h &= \left(\frac{20000}{3572}\right)^2 \end{aligned}$$

Er geldt: $h = \left(\frac{20000}{3572}\right)^2 \approx 31{,}3$ m.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** de formule voor de kijkafstand.

a Bereken in meters nauwkeurig hoe ver je kunt kijken vanaf een toren van 50 m hoog.

Op een eiland wordt een vuurtoren gebouwd. De toren wordt zo hoog gemaakt dat je bij helder weer 25 km ver kunt kijken.

b Bepaal de hoogte van de toren op de volgende manieren:

- Aflezen uit de grafiek: $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$.
- In de formule $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$ de variabele a vervangen door 25000; de vergelijking die je dan krijgt, moet je oplossen door hem stapsgewijs te vereenvoudigen.
- Berekenen met de formule: $h = \left(\frac{a}{3572}\right)^2$.

Voorbeeld 3

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij het warmteverlies van het dier. Diersoorten met een relatief grote huidoppervlakte in verhouding tot hun inhoud, zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten.

Meeh vond de formule: $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$

Hierin is H de huidoppervlakte (dm^2) en G het gewicht (kg) van het dier.

Je ziet dat de huidoppervlakte recht evenredig is met de $\frac{2}{3}$-de macht van het lichaamsgewicht. De factor c is de evenredigheidsconstante en verschilt per diersoort. In de biologie wordt deze evenredigheidsconstante de Meeh-coëfficiënt genoemd.

In de tabel zie je een vijftal waarden van G en H van Schotse hooglanders, een soort koeien. Bepaal de Meeh-coëfficiënt van de Schotse hooglander.

G	430	450	490	500	420
H	507	523	553	560	500

Tabel 1.2

Antwoord

Breid de tabel uit met een rij voor $G^{\frac{2}{3}}$ en een rij voor $\frac{H}{G^{\frac{2}{3}}}$.

Als het goed is, vind je in de laatste rij steeds (ongeveer) hetzelfde getal, namelijk $8{,}9$. Dit is de gevraagde Meeh-coëfficiënt. Voor de Schotse hooglander geldt $H = 8{,}9 \cdot G^{\frac{2}{3}}$.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3** het verband tussen huidoppervlakte (dm^2) en lichaamsgewicht (kg) van dieren.

a De tabel geeft het verband weer tussen het lichaamsgewicht en huidoppervlakte van Schotse Hooglanders. Laat door berekening zien dat hiervoor de constante c geldt: $c \approx 8{,}9$.

b De huid van een bepaalde Schotse Hooglander heeft een oppervlakte van ongeveer 510 dm^2. Hoe zwaar is dit dier?

c Als je de formule $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$ omrekent zodat het lichaamsgewicht uitgedrukt wordt in de huidoppervlakte, wat wordt dan de evenredigheidsconstante?

d Als het lichaamsgewicht twee keer zo groot wordt, wordt de huidoppervlakte dan meer of minder dan twee keer zo groot?

Opgave 8

Ook voor een massieve bol beschrijft de formule van Meeh het verband tussen de oppervlakte A en het gewicht G. Ga uit van een massieve ijzeren bol. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

a Zoek de formules voor de inhoud van een bol met straal r en de formule voor de oppervlakte van zo'n bol op.

b Welke formule geldt voor het gewicht G als functie van de straal r van de bol? Neem r in cm en G in grammen.

c Door de formules voor het gewicht en de oppervlakte van een bol met straal r te combineren, vind je $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de waarde van c.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de machtsfunctie $f(x) = 105x^6$.

a Bereken $f(3)$.

b Voor welke waarde van x is $f(x) = 15000$? Rond af op twee decimalen.

c Als de waarde van x vijf keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende functiewaarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 10

Er is een verband tussen de snelheid s (km/h) van een auto en de bijbehorende remweg r (m). De remweg is de afstand die de auto nog aflegt als je zo hard mogelijk remt. Een vuistregel voor dit verband is (bij droog weer en goede banden): $r = \frac{s^2}{100} \cdot 0{,}75$.

a r is recht evenredig met een macht van s. Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b In een weg zit een scherpe bocht waarin je maar 10 meter vooruit kunt kijken. Een eis voor veilig rijden is dat je moet kunnen stoppen binnen de afstand die je kunt overzien. Wat is volgens deze vuistregel de maximumsnelheid in deze bocht?

c Geef de formule waarmee de snelheid wordt uitgedrukt in de remweg.

d “Bij een snelheid van 60 km per uur is je remweg vier keer zo groot als bij een snelheid van 30 km per uur.”
Klopt deze uitspraak? Licht je antwoord toe met een berekening.

Opgave 11

Deze opgave gaat over de inhoud I van een kubus met ribben r in centimeters.

a Bereken de inhoud van een kubus met $r = 2$.

b Bereken de inhoud van een kubus met $r = 6$.

c De ribbe van de tweede kubus is drie keer zo groot als de ribbe van de eerste kubus. Wat betekent dit voor de inhoud van de kubus?

d Een kubus heeft een inhoud van 50 cm^3. Bereken r. Rond af op één decimaal.

e Geef de formule waarmee je de inhoud I uitdrukt in r.

f Geef de formule waarmee je de lengte r van de ribbe uitdrukt in inhoud I.

Opgave 12

Een formule voor de oppervlakte A van een kubus met ribbe r is: $A = 6r^2$.

a Licht toe hoe je deze formule kunt afleiden.

b Bereken de oppervlakte van een kubus met ribben van 3 cm en van een kubus met ribben van 6 cm.

c Wat gebeurt er met de oppervlakte als je de ribben twee keer zo groot maakt?

d Van een kubus is de oppervlakte 500 cm^2.
Bereken de lengte van de ribben. Rond af op twee decimalen.

e Geef een formule waarmee je de ribbe r uitdrukt in de oppervlakte A.

Opgave 13

Ga uit van een massieve ijzeren kubus met ribbe r (cm). De soortelijke massa van ijzer is $7{,}9$ g/cm^3.

a Stel een formule op voor het gewicht G van de kubus als functie van r.

b Stel een formule op voor de oppervlakte A van de kubus als functie van r.

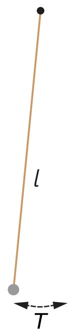
c Leid een formule af van de vorm $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de evenredigheidsconstante c. Rond af op twee decimalen.

d Bereken het gewicht van zo'n kubus in grammen als de totale buitenoppervlakte 150 cm^2 is.

Toepassen

Als je een gewichtje laat slingeren aan een koord met een verwaarloosbare massa, ontstaat er een zuivere slingerbeweging. De slingertijd (of periode) is de tijd waarin de slinger een complete slingerbeweging uitvoert. Daarin beweegt het gewichtje bijvoorbeeld van links naar rechts en weer terug. Als de uitwijking van de slingerbeweging niet te groot is, dan geldt voor de **slingertijd** bij benadering de formule:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Figuur 1.8

Hierin is T de slingertijd in seconden, l de lengte van het koord in meters en g de valversnelling in m/s^2. Op aarde is de valversnelling gemiddeld ongeveer $9{,}81$ m/s^2.

Omdat $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ kun je de formule ook schrijven als $T = 2\pi\left(\frac{l}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Je kunt bij deze machtsfunctie bij een gegeven waarde van l de bijbehorende waarde van T berekenen en omgekeerd.

Opgave 14

Bekijk de formule van de slingertijd van een zuivere slingerbeweging.

a Bereken de slingertijd bij een koordlengte van 70 cm. Rond af op één decimaal.

b Als je een zwaarder gewichtje aan het koord hangt terwijl de lengte van het koord hetzelfde blijft, zal de slingertijd niet veranderen. Leg uit hoe je dit aan de formule kunt zien.

De slingertijd van een gewicht aan een koord is $1{,}9$ seconde.

c Bepaal de lengte van het koord op de volgende manieren:

- Met behulp van de grafische rekenmachine en de grafiek van $T = 2\pi\left(\frac{l}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}}$.
- In de formule $T = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$ de variabele T vervangen door $1{,}9$ en de vergelijking die je dan krijgt oplossen door hem stapsgewijs te vereenvoudigen.

Opgave 15

Bekijk nogmaals de formule van de slingertijd van een zuivere slingerbeweging.

Je kunt de gegeven formule herleiden tot een vorm waarin l is uitgedrukt in T.

a Laat dat zien en bereken met behulp van deze formule de lengte van een slinger met een slingertijd van $2{,}5$ seconden. Rond af op twee decimalen.

b Geef de formule waarmee je T^2 uitdrukt in l.

Is T^2 recht evenredig met l? Zo ja, hoe groot is dan de evenredigheidsconstante?

Testen

Opgave 16

Gegeven is de machtsfunctie f met formule $y = 5 \cdot (3x)^4$.

a y is recht evenredig met een macht van x. Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b Voor welke waarden van x is $f(x) = 12000$? Rond af op twee decimalen.

c Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende functiewaarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 17

Het volume van een cilinder kun je berekenen met de formule $V = \pi r^2 h$. Hierin is r de straal van het grondvlak en h de hoogte van de cilinder, beide in cm. Je wilt blikken maken die even hoog als breed zijn, dus waarvan $h = 2r$.

a Welke formule geldt bij deze blikken voor V als functie van r?

b Herschrijf deze formule tot een formule waarin r recht evenredig is met een macht van V. Bepaal de evenredigheidsconstante. Rond af op twee cijfers achter de komma.

c De oppervlakte van zo'n blik bestaat uit een rechthoek en twee cirkels. Leid een formule af voor de oppervlakte A als functie van r.

d Laat zien dat tussen A en V een machtsverband bestaat van de vorm $A = c \cdot V^{\frac{2}{3}}$.

Bepaal de waarde van c. Rond af op twee cijfers achter de komma.

1.2 Machtsfuncties

Inleiding

Bij functies van de vorm $f(x) = x^p$ hangt het verloop van de functie af van de waarde van p. Voor bijvoorbeeld $p = 2$ krijg je een kwadratische functie met als grafiek een parabool. Deze functie is dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$.
Voor $p = 1$ krijg je een lineaire functie, die stijgend is voor elke waarde van x.
In dit onderdeel zul je zien dat voor negatieve en gebroken waarden van p je machtsfuncties krijgt met weer een ander karakter.

Je leert in dit onderwerp

- het verband tussen de waarde van p en het verloop van de grafiek van $f(x) = x^p$ kennen;
- het verloop van functies die door transformaties van $f(x) = x^p$ ontstaan;
- vergelijkingen en ongelijkheden van machtsfuncties algebraïsch oplossen.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen met machten oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Machtsfuncties hebben de vorm $f(x) = c \cdot x^p$. Je kunt de bijbehorende grafieken bekijken met de grafische rekenmachine. Je kiest dan voor c en voor p getallen. Neem voor het gemak steeds $c = 1$ en neem voor p een geheel getal.

a Voor welke waarden van p hebben deze machtsfuncties een minimum?

Wat zijn daar de coördinaten van?

b Zijn er machtsfuncties die overal op hun domein stijgend zijn?

Zo ja, geef dan een paar voorbeelden.

c Hoe kun je er voor zorgen dat de machtsfunctie $f(x) = x^p$ dalend is voor positieve waarden van x?

Neem nu ook gebroken getallen voor p.

d Welke verschillen zijn er tussen de grafiek bij $p = \frac{1}{2}$ en die bij $p = \frac{1}{3}$?

e Bekijk de grafiek bij $p = \frac{2}{3}$. Wat is er bij $x = 0$ aan de hand?

f Als p een niet geheel decimaal getal is, mag je alleen positieve waarden voor x toelaten. Waarom zou dat zijn?

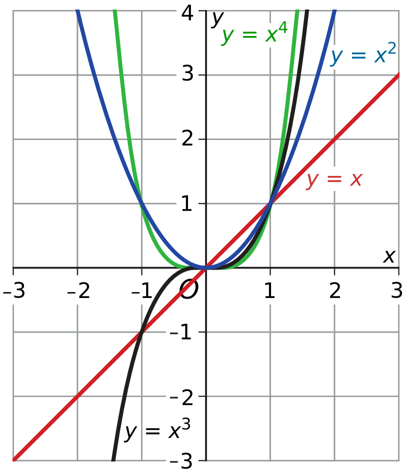
Uitleg 1

Bekijk de applet: Machtsfuncties.

Bekijk de grafieken van $f(x) = x^p$ voor enkele positieve gehele waarden van p.

Merk op:

- Als p een positief even getal is, geldt dat:
  - $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [0, \rightarrow\rangle$;
  - de grafiek dalend is als $x < 0$ en stijgend als $x > 0$;
  - de vergelijking $x^p = a$ twee oplossingen heeft als $a > 0$, één oplossing heeft als $a = 0$ en geen oplossingen heeft als $a < 0$.
- Als p een positief oneven getal is, geldt dat:
  - $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \mathbb{R}$;
  - de grafiek stijgend is voor elke waarde van x (behalve 0);
  - de vergelijking $x^p = a$ één oplossing heeft voor elke waarde van a.



Figuur 2.1

Opgave 1

Plot de grafieken van de functies $f(x) = x^4$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2$ en $j(x) = x$.

a Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = g(x)$?

b Voor welke waarden van x geldt: $f(x) > g(x)$?

c Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = h(x)$?

d Voor welke waarden van x geldt: $f(x) > h(x)$?

e Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = j(x)$?

f Voor welke waarden van x geldt: $f(x) > j(x)$?

Om de voorgaande vragen in het algemeen te kunnen beantwoorden, kijk je naar twee functies: $f(x) = x^p$ en $g(x) = x^q$, waarbij p een even positief getal is en q een oneven positief getal.

g Neem de tabel over en vul hem in. Gebruik de grafische rekenmachine.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$p < q$				
$p > q$			$f(x) < g(x)$	

Tabel 2.1

Opgave 2

Bekijk de functies $k(x) = x^5$ en $l(x) = x^6$.

a Maak een schets van de grafieken van $k(x)$ en $l(x)$. Geef ook punt $(1,1)$ aan. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

b Voor welke waarden van x geldt $x^6 = 10$? Los op: $x^6 < 10$. Rond af op twee decimalen.

c Voor welke waarde van x geldt $x^5 = 10$? Los op: $x^5 > 10$. Rond af op twee decimalen.

Uitleg 2

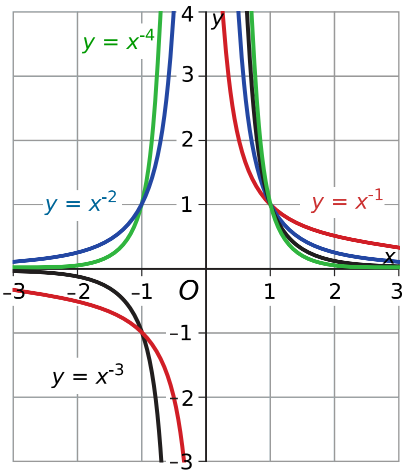
Bekijk de applet: Machtsfuncties.

Bekijk de grafieken van $f(x) = x^p$ voor enkele negatieve gehele waarden van p.

Merk op:

- Als p een negatief even getal is, geldt dat:
  - $\text{D}_f = \langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $\text{B}_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$;
  - de grafiek stijgend is als $x < 0$ en dalend als $x > 0$;
  - de vergelijking $x^p = a$ twee oplossingen heeft als $a > 0$ en geen oplossingen heeft als $a \leq 0$.
- Als p een negatief oneven getal is, geldt dat:
  - $\text{D}_f = \langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $\text{B}_f = \langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$;
  - de grafiek dalend is voor elke waarde van x (behalve 0);
  - de vergelijking $x^p = a$ één oplossing heeft voor elke waarde van a behalve $a = 0$.

Nu is $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.



Figuur 2.2

Bij functies van de vorm $f(x) = c \cdot x^{-n} = \frac{c}{x^n}$ is $f(x)$ recht evenredig met x^{-n} en omgekeerd evenredig met x^n. Deze functies hebben duidelijk twee asymptoten. Je ziet dat $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, zodat de horizontale asymptoot steeds $y = 0$ is. En verder dat $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$, terwijl $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$ als n even is en $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$ als n oneven is. De verticale asymptoot is $x = 0$.

Opgave 3

Maak met je grafische rekenmachine grafieken van de functies: $k(x) = x^{-1}$ en $l(x) = x^{-2}$.

a Welke asymptoten hebben deze functies? En welke limieten horen hier bij?

b Voor welke waarden van x geldt $k(x) = l(x)$?

c Los op: $k(x) < l(x)$.

d Los de volgende vergelijkingen op:

- $x^{-1} = 0{,}005$ en $x^{-2} = 0{,}005$
- $x^{-1} = 5000$ en $x^{-2} = 5000$

e Voor welke waarden van x geldt $x^{-1} < 0{,}005$?

f Voor welke waarden van x geldt $x^{-1} > 5000$?

g Voor welke waarden van x geldt $x^{-2} < 0{,}005$?

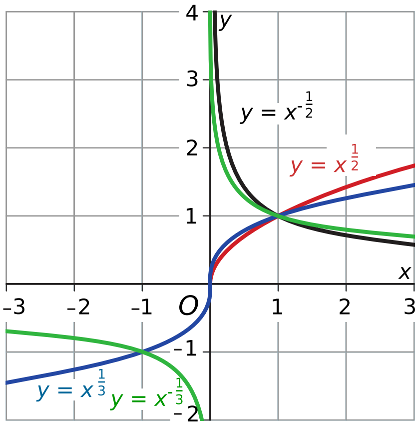
h Voor welke waarden van x geldt $x^{-2} > 5000$?

Uitleg 3

Bekijk de applet

Bekijk de grafieken van $f(x) = x^{\frac{1}{p}}$ voor enkele gehele waarden van p.

- Als $p > 1$ en p is even geldt dat:
  - $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [0, \rightarrow\rangle$;
  - de grafiek stijgend is voor alle x uit het domein;
  - de grafiek door $(0,0)$ en $(1,1)$ gaat;
  - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft als $a \geq 0$.
- Als $p > 1$ en p is oneven geldt dat:
  - $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \mathbb{R}$;
  - de grafiek stijgend is voor alle x uit het domein;
  - de grafiek door $(0,0)$, $(1,1)$ en $(-1,-1)$ gaat;
  - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft voor alle waarden van a.



Figuur 2.3

Bekijk de applet

- Als $p < -1$ en p is even geldt dat:
  - $D_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$;
  - de grafiek dalend is voor elke x uit het domein;
  - de grafiek horizontale asymptoot $y = 0$ en verticale asymptoot $x = 0$ heeft;
  - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft als $a > 0$.
- Als $p < -1$ en p is oneven geldt dat:
  - $D_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$;
  - de grafiek dalend is voor elke x uit het domein;
  - de grafiek horizontale asymptoot $y = 0$ en verticale asymptoot $x = 0$ heeft;
  - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft als $a \neq 0$.

Kijk nog eens goed of de grafische rekenmachine dezelfde grafieken geeft. Er kunnen verschillen zijn. Merk ook op dat de grafiek in de buurt van $x = 0$ niet altijd helemaal netjes wordt gemaakt.

Opgave 4

Maak met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies $a(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $b(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $c(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ en $d(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

a Voor welke waarden van x geldt $a(x) < b(x)$?

b Voor welke waarden van x geldt $d(x) < b(x)$?

c Voor welke waarden van x geldt $d(x) < c(x)$?

d Maak de grafiek van $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$.
Controleer je schets met de applet of de grafische rekenmachine.

e Voor welke waarden van x geldt $x^{\frac{1}{4}} > 4$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

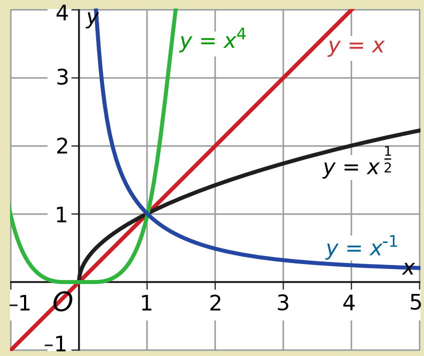
Bekijk enkele grafieken van de **machtsfunctie** $f(x) = x^p$ voor enkele verschillende waarden van p.

Eigenschappen voor $x > 0$ zijn:

- $p > 1$: de grafiek gaat door de punten $(0,0)$ en $(1,1)$ en stijgt steeds sneller;
- $p = 1$: f is een lineaire functie door de punten $(0,0)$ en $(1,1)$;
- $0 < p < 1$: de grafiek gaat door de punten $(0,0)$ en $(1,1)$ en stijgt steeds langzamer;
- $p < 0$: de functie is niet gedefinieerd voor $x = 0$, de grafiek gaat door het punt $(1,1)$ en daalt steeds langzamer, de x-as en de y-as zijn asymptoten van de grafiek.

Voor $x < 0$ bestaat de functie alleen als p een geheel getal is of als p een breuk is met een oneven noemer, zoals $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$.
Afhankelijk van het even of oneven zijn van p is de grafiek daar dalend of stijgend.

De vergelijking $x^p = a$ heeft één oplossing als p (ongelijk 0) een oneven geheel getal is.
Als p een even geheel getal (ongelijk 0) is en $a > 0$ zijn er twee oplossingen.
Als p een even geheel getal (ongelijk 0) is en $a < 0$ zijn er geen oplossingen.



Figuur 2.4

Voorbeeld 1

Los algebraïsch op: $-20x^{\frac{5}{4}} > -7$.

Antwoord

Los op: $-20x^{\frac{5}{4}} = -7$.

Je vindt: $x = \left(\frac{7}{20}\right)^{\frac{4}{5}} \approx 0{,}43$.

Maak de grafiek van $y = -20x^{\frac{5}{4}}$ op de grafische rekenmachine. Merk op dat het domein van de functie $[0, \rightarrow\rangle$ is. De vergelijking heeft inderdaad maar één oplossing. Nu lees je de (benaderde) oplossing van de (tweede) ongelijkheid uit de grafiek af: $0 \leq x < 0{,}43$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de ongelijkheid $-20x^{\frac{5}{4}} > -7$ oplost .

a Los de vergelijking $-20x^{\frac{5}{4}} = -7$ algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

b In het voorbeeld wordt daarbij een macht met exponent $\frac{4}{5}$ gebruikt.

Licht die stap toe. Heb je dat zelf ook gedaan?

c Los op dezelfde manier algebraïsch op $-180x^{\frac{7}{6}} > -30$.
Rond af op drie decimalen.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{5}(x+4)^3 + 6$.
Los algebraïsch op: $f(x) = 30$.

Antwoord

Functie f kan door transformatie ontstaan uit de machtsfunctie $y_1 = x^3$.

$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ y &= (x+4)^3 \\ y &= -\tfrac{1}{5}(x+4)^3 \\ y &= -\tfrac{1}{5}(x+4)^3 + 6 \end{aligned}$$

translatie van -4 ten opzichte van de y-as

vermenigvuldiging met $-\frac{1}{5}$ ten opzichte van de x-as

translatie van 6 ten opzichte van de x-as

Om $f(x) = 30$ algebraïsch op te lossen, moet je stap voor stap terugrekenen:

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{5}(x+4)^3 + 6 &= 30 \\ -\tfrac{1}{5}(x+4)^3 &= 24 \\ (x+4)^3 &= -120 \\ x+4 &= (-120)^{\frac{1}{3}} \\ x &= (-120)^{\frac{1}{3}} - 4 \end{aligned}$$

Je vindt $x = \sqrt[3]{-120} - 4 \approx -8{,}93$.

Opgave 6

Bekijk de functie $f(x) = -\frac{1}{3}(x-1)^3 - 5$.

a Beschrijf in de juiste volgorde welke transformaties er nodig zijn vanuit $y = x^3$ om tot de functie $f(x)$ te komen. Geef elke keer aan wat er met de grafiek gebeurt als je deze transformatie toepast.

b Los exact op: $f(x) > -10$.

Voorbeeld 3

Los algebraïsch op: $\frac{6}{x^4} > 4$.

Antwoord

Volgens de eigenschappen van machten en exponenten geldt: $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$.

Er is daarom sprake van een machtsfunctie: $f(x) = \frac{6}{x^4} = 6 \cdot \frac{1}{x^4} = 6x^{-4}$.

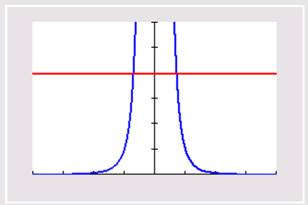
Maak de grafiek van f en de lijn $y_2 = 4$ op de grafische rekenmachine.

Los nu op: $6x^{-4} = 4$.

Oplossing: $x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{4}} \vee x = -\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}$, dus $x \approx -1{,}11 \vee x \approx 1{,}11$.

In de grafiek is de oplossing van de ongelijkheid af te lezen: $-1{,}11 < x < 0 \vee 0 < x < 1{,}11$.

Merk op dat je $x = 0$ uitzondert, omdat voor deze waarde de functie f niet gedefinieerd is.



Figuur 2.5

Opgave 7

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine. Houd rekening met het domein van de verschillende functies.

a $x^2 < \sqrt{x}$

b $\frac{1}{x^4} = 81$

c $\frac{1}{x^3} < 27$

d $\frac{5}{x^3} < 30$

e $x^5 < x^4$

f $x^6 < x^4$

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x+1)^{-2} - 4$.

a Welke asymptoten heeft de grafiek van $y = x^{-2}$? En welke limieten horen daarbij?

b Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren op de grafiek van $y = x^{-2}$ om die van f te krijgen.

c Welke asymptoten heeft de grafiek van $f(x)$? Welke limieten horen daarbij?

d Geef het domein en het bereik van f.

e Los exact op: $f(x) < 10$.

Verwerken

Opgave 9

In een grootwinkelbedrijf onderzoekt de commerciële afdeling hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat dan de volgende formule geldt: $a = \frac{750}{p}$. Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro's.

a Je ziet dat a omgekeerd evenredig is met p. Schrijf de formule zo, dat a recht evenredig is met een macht van p.

b Teken de grafiek met de grafische rekenmachine voor de prijs tussen € 1,00 en € 5,00 per kg. Als de prijs verdubbeld wordt, wordt de afzet dan meer of minder dan de helft?

c Het bedrijf heeft een voorraad van 550 kg tomaten. Bereken de prijs waarbij de voorraad binnen een dag is verkocht. Geef ook de formule waarmee je dit direct kunt berekenen.

d Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij € 100,00? Geef aan wat dit betekent voor de bruikbaarheid van deze formule.

Opgave 10

Van een rechthoek is de lengte x en de breedte y, beide in cm. De oppervlakte is 24 cm^2.

a Leg uit dat y omgekeerd evenredig is met x.

b Leg uit dat y recht evenredig is met een macht van x en geef de bijbehorende formule.

c Voor welke waarden van x geldt: $y \geq 10$?

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1}} + 5$.

a Leg uit hoe de grafiek van deze functie kan ontstaan door transformaties op de grafiek van $y = x^{-\frac{1}{2}}$ toe te passen.

b Geef het domein en het bereik van f.

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq 10$.

Opgave 12

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = -5 + 2\sqrt{x-3}$ en $g(x) = \sqrt{x}$ op de grafische rekenmachine.

a Schrijf f en g als machtsfunctie en beschrijf hoe de grafiek van $f(x)$ vanuit die van $g(x)$ kan ontstaan.

b Geef het domein en het bereik van zowel f als g.

c Los algebraïsch op: $f(x) \geq 100$.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{100}{(x-10)^2} + 25$.

a Laat zien hoe de grafiek van deze functie kan ontstaan uit een machtsfunctie.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van f? Welke limieten horen daarbij?

c Geef het domein en het bereik van f.

d Los algebraïsch op: $f(x) \leq 50$.

Opgave 14

Een functie die door transformatie uit een machtsfunctie ontstaat, is: $h(x) = a(x-b)^c + d$.

a Voor welke gehele waarden van c heeft de functie een maximum of een minimum?

b Waar hangt het vanaf of het een maximum of minimum is?

c Hoe kun je uit deze formule aflezen waar de top zich bevindt? Geef de coördinaten van deze top.

Toepassen

Opgave 15: De formule van Kleiber

De Amerikaanse veearts en onderzoeker Max Kleiber ontdekte in 1932 dat het zuurstofverbruik Z (in L) van verschillende soorten zoogdieren recht evenredig is met een macht van de massa m (in kg), dus $Z = c \cdot m^p$. In de tabel vind je enkele bijpassende gegevens. Kleiber heeft hiermee het verband $Z = 0{,}7m^{0{,}75}$ gevonden. Maak nu bij het opstellen van een formule voor Z afhankelijk van m gebruik van de gegevens van de muis en het paard.

soort	m(kg)	Z(L)
muis	0,20	0,19
rat	1,10	0,75
kat	5,80	2,62
hond	11,5	4,38
mens	76,1	18,0
paard	605,0	85,4

Tabel 2.2

a Laat zien hoe je de formule van Kleiber kunt vinden.

b Stel de formule op uitgaande van de gegevens van de rat en de mens. Vind je dezelfde formule?

c Bereken met de formule van Kleiber het zuurstofverbruik van een koe van 1000 kg.

Opgave 16: Energieverbruik van zoogdieren

Zoogdieren hebben allemaal ongeveer dezelfde lichaamstemperatuur. Hoe zwaarder een zoogdier is, hoe meer energie het kost om de lichaamstemperatuur constant te houden. Het gewicht G (gram) is recht evenredig met een macht van de energie P (joule) die per minuut nodig is om de lichaamstemperatuur constant te houden. Je ziet een tabel met een aantal waarden voor G en P.

G	1000	2000	5000	15000
P	3,02	5,08	10,11	23,04

Tabel 2.3

a Stel een formule op waarin je P uitdrukt in G.

b Hoeveel energie P per minuut heeft een mens van 70 kg nodig? Rond af op twee decimalen.

c Wat gebeurt er met P als G twee keer zo groot wordt?

Testen

Opgave 17

Gegeven is de machtsfunctie $y = 2 \cdot x^{\frac{1}{4}}$.

a Wat is het domein en wat is het bereik van deze functie?

b Heeft deze functie een maximum of een minimum?

c Heeft de grafiek van deze functie een asymptoot?

d Los exact op: $2x^{\frac{1}{4}} \leq 10$

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = -2 + \frac{15}{(x+2)^2}$. Beschrijf in de juiste volgorde welke transformaties er nodig zijn om vanuit $y = x^{-2}$ tot de functie $f(x)$ te komen.

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $2(x+4)^4 - 10 = 500$

b $10 - 2\sqrt{x-4} > 6$

c $\sqrt[4]{x} < 20$

d $2(x+1)^3 > 100$

e $5 + 2\sqrt{x-3} < 20$

Practicum: Machtsfuncties

Met deze applet maak je machtsfuncties. Verzin zo'n functie, bedenk eerst hoe hij kan ontstaan uit $y = x^p$ en wat de karakteristieken zijn. Controleer dan je antwoord met de applet.

Bekijk de applet: Machtsfunctie

1.3 Kwadratische functies

Inleiding

Je gaat nu dieper in op de eigenschappen van machtsfuncties met een exponent 2, kwadraten dus. Kwadratische functies zijn functies waarvan de grafieken kunnen ontstaan door transformaties van de grafiek van $y=x^2$. De grafieken van kwadratische functies zijn parabolen. De eigenschappen van die kwadratische functies kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen en om formules bij gegeven parabolen op te stellen.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- de eigenschappen van een kwadratische functie afleiden uit het functievoorschrift;
- kwadratische vergelijkingen oplossen;
- een passend functievoorschrift opstellen bij een parabool die de grafiek is van een kwadratische functie.

Voorkennis

- algebraïsch vergelijkingen oplossen;
- transformaties van functies toepassen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet al van alles van kwadratische functies.

a Welke oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = 20$?

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = -1$?

c Heeft de ongelijkheid $x^2 > -1$ oplossingen? Zo ja, welke?

d Heeft elke kwadratische vergelijking oplossingen? Hoeveel oplossingen kunnen er zijn?

e Wat weet je allemaal van een kwadratische functie? Maak een overzicht.

Uitleg

Bekijk de applet: Kwadratische functies.

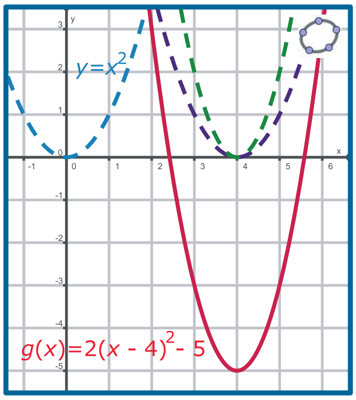
Kwadratische functies zijn de functie $f(x) = x^2$ en alle functies waarvan de grafiek door de bekende transformaties uit die van f verkregen kan worden. Ze hebben daarom de vorm $g(x) = a(x-p)^2 + q$.

Kies bijvoorbeeld $a = 2$, $p = 4$ en $q = -5$, dan krijg je de functie met voorschrift $g(x) = 2(x-4)^2 - 5$, waarvan de grafiek uit f verkregen kan worden door:

- een translatie van 4 ten opzichte van de y-as;
- vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x-as;
- een translatie van -5 ten opzichte van de x-as.

De grafiek van g is een dalparabool met top $(4,-5)$ en symmetrieas $x = 4$. De twee nulpunten bereken je door de vergelijking $2(x-4)^2 - 5 = 0$ op te lossen.

Neem je $a = -2$, dan wordt het functievoorschrift $h(x) = -2(x-4)^2 - 5$. De grafiek van h is dan een bergparabool, omdat vermenigvuldiging van een functievoorschrift met een negatief getal een spiegeling van de grafiek in de x-as betekent.



Figuur 3.2

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 4$.

a Door welke transformaties kan de grafiek van f uit die van $y = x^2$ ontstaan?

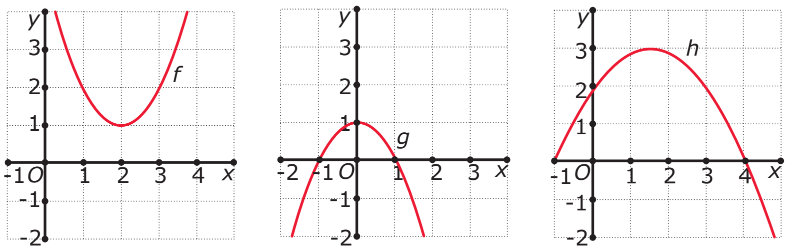
b Geef het domein en het bereik van f.

c Is bij functie f sprake van een minimum of een maximum? Hoe kun je dat aan het functievoorschrift zien?

d Los exact op: $f(x) < 100$.

Opgave 2

Bekijk de parabolen. Geef het bijbehorende functievoorschrift.



Figuur 3.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

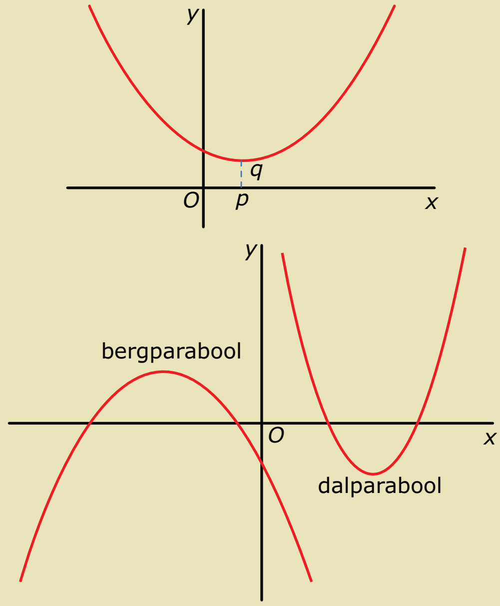
Bekijk de applet: Kwadratische functies.

Een functie van de vorm $f(x) = a(x-p)^2 + q$, noem je een **kwadratische functie** (als $a \neq 0$). De grafiek van elke kwadratische functie ontstaat door een transformatie van de grafiek van $y = x^2$. De grafiek van elke kwadratische functie is een **parabool** met **top** (p,q) en **symmetrieas** $x = p$. Als $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool**. Als $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool**.

De **kwadratische vergelijking** $a(x-p)^2 + q = u$ kun je herleiden tot $(x-p)^2 = c$.

- Als $c > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $c = 0$ is er één oplossing.
- Als $c < 0$ zijn er geen oplossingen.

Je vindt de oplossingen door worteltrekken.



Figuur 3.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

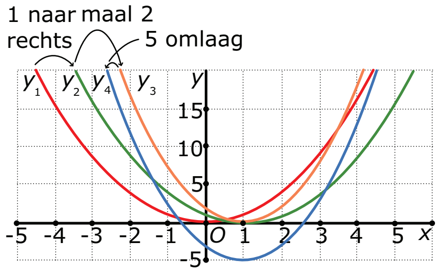
Gegeven is de kwadratische functie $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$.
Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$? Bepaal ook de top en de symmetrieas van de grafiek van f.

Antwoord

Ga na dat de grafiek wordt verkregen door op de grafiek van $y = x^2$ toe te passen:

- een translatie van 1 ten opzichte van de y-as;
- een vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x-as;
- een translatie van -5 ten opzichte van de x-as.

De grafiek is een dalparabool met top $(1, -5)$. De coördinaten van die top zijn direct uit het functievoorschrift af te lezen. De symmetrieas is de lijn $x = 1$.



Figuur 3.5

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$.

a Door welke transformaties kan de grafiek van f uit die van $y = x^2$ ontstaan?

b Geef het domein en het bereik van f.

c Bepaal de uiterste waarde van f.

d Los op: $f(x) > 100$. Rond af op één decimaal.

Opgave 4

Als je de grafiek van $y = x^2$ transleert en ten opzichte van de x-as vermenigvuldigt, krijg je weer een parabool als grafiek. Hiervan is het functievoorschrift als volgt te schrijven: $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

a Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is? Geeft dit ook aan of de grafiek een maximum of minimum heeft?

b Hoe kun je aan het functievoorschrift zien hoe groot het maximum of minimum is?

c Hoe kun je aan het functievoorschrift zien welke waarde van x je in moet vullen om het maximum of minimum te krijgen?

d Geef het domein en het bereik van deze functie.

Voorbeeld 2

Los de ongelijkheid $-5(x+3)^2 - 17 \geq -47$ op.

Antwoord

Eerst los je de bijbehorende vergelijking systematisch op:

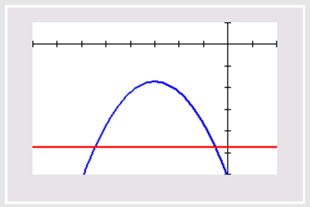
$$\begin{aligned} -5(x+3)^2 - 17 &= -47 \\ -5(x+3)^2 &= -30 \\ (x+3)^2 &= 6 \\ x+3 &= \pm\sqrt{6} \\ x &= -3 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

Je vindt de twee oplossingen: $x = -3 - \sqrt{6} \vee x = -3 + \sqrt{6}$.

Je ziet ook aan de grafiek van f dat de vergelijking $-5(x+3)^2 - 17 = -10$ geen oplossingen heeft. En dat de vergelijking $-5(x+3)^2 - 17 = -17$ precies één oplossing heeft, namelijk $x = -3$.

Bekijk de grafieken van $y_1 = -5(x+3)^2 - 17$ en $y_1 = -47$ om de ongelijkheid op te lossen.

Uit de grafiek lees je af dat $-3 - \sqrt{6} \leq x \leq -3 + \sqrt{6}$.



Figuur 3.6

Opgave 5

Los de vergelijkingen exact op.

a $x^2 = 100$

b $(x-4)^2 = 64$

c $-3(x+1)^2 = -75$

d $3(x+2)^2 - 3 = 27$

e $2x^2 - 7 = 0$

Opgave 6

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $(x-4)^2 < 10$

b $-2(x+3)^2 + 10 < 4$

c $3(x-5)^2 - 2 \geq 10$

Voorbeeld 3

De nulpunten van de kwadratische functie f zijn $(2,0)$ en $(4,0)$. Het snijpunt met de y-as is $(0,6)$. Welk functievoorschrift heeft deze functie?

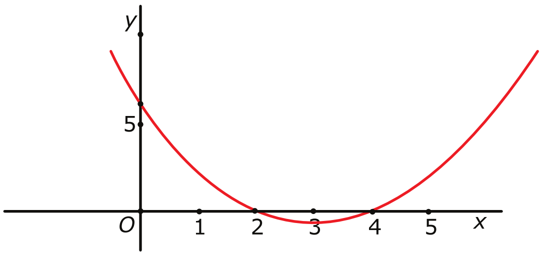
Antwoord

De grafiek van f is een parabool waarvan de symmetrieas een verticale lijn door (3,0) is. Dus is $f(x) = a(x-3)^2 + q$.

De grafiek gaat door het punt $(0,6)$, dus $f(0) = 6$ en $9a + q = 6$. De grafiek gaat ook door het punt $(2,0)$, dus $f(2) = 0$ en $a + q = 0$.

Uit $a + q = 0$ volgt $q = -a$. Vul je dit in de andere vergelijking in, dan vind je: $9a - a = 6$. En dus: $a = 0{,}75$. Omdat $q = -a$ is $q = -0{,}75$.

Het functievoorschrift is: $f(x) = 0{,}75(x-3)^2 - 0{,}75$.



Figuur 3.7

Opgave 7

Stel een voorschrift op van de kwadratische functie f waarvan de grafiek de assen in de punten $(-2,0)$, $(0,2)$ en $(4,0)$ snijdt.

Verwerken

Opgave 8

De grafiek van de functie $f(x) = 2(x+8)^2 - 8$ ontstaat door transformatie van de grafiek van $y = x^2$.

a Welke transformaties moet je dan toepassen?

b Verander de volgorde van de laatste twee transformaties en teken de grafiek van de functie g die zo ontstaat. Waarom is de volgorde van die transformatie dus belangrijk?

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = -2(x+4)^2 + 5$.

a Geef het maximum, of het minimum van f en de waarde van x waarvoor je deze extreme waarde krijgt.

b Los de vergelijking $-2(x+4)^2 + 5 = -5$ exact op.

c Los exact op: $f(x) = 5$.

d Los exact op: $f(x) = -10$.

e Los exact op: $f(x) > -3$.

f Los exact op: $f(x) < 0$.

g Los exact op: $f(x) < 20$.

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = -3(x+2)^2 + 10$.

a Op welk interval is deze functie dalend?

b Is de functie op de rest van het domein dus stijgend?

c Bereken exact de nulpunten van f.

Opgave 11

Los de ongelijkheden exact op.

a $5(x-1)^2 - 9 > 4$

b $5 - x^2 > -21$

c $3(x-1)^2 < 40$

d $-4(x+80)^2 - 40 < -100$

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}(x-5)^2 + c$. Hierin is c een nog onbekende constante.

a Welke extreme waarde heeft deze functie f?

b Voor welke waarden van c heeft de functie f twee nulpunten? Licht je antwoord toe.

c Voor welke waarden van c heeft de functie f geen snijpunten met de lijn $y = 1$?

d Voor welke waarden van c ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 2x - 1$?

Opgave 13

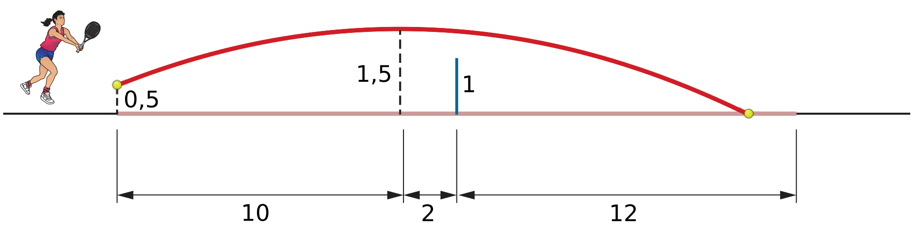
De grafiek van een kwadratische functie f gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(2,5)$.

De lijn $x = 4$ snijdt de grafiek van f in de top.

Stel het functievoorschrift op van f.

Toepassen

Bekijk de applet: Baan van een tennisbal.



Figuur 3.8

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf $0{,}5$ meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) **parabolische baan** ligt op 2 meter voor het net en $1{,}5$ meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, dat ongeveer 24 meter bedraagt.
Je kunt door berekening aantonen dat de bal 'in' is.
Breng daartoe een geschikt assenstelsel aan zoals dat in de figuur is te zien en stel een bijpassende kwadratische formule op voor de baan van de bal.

Opgave 14

De baan van een tennisbal kan worden beschreven met een kwadratische functie.

a De baan is slechts ongeveer parabolisch. Waarom is hij in de praktijk zeer waarschijnlijk niet precies parabolisch?

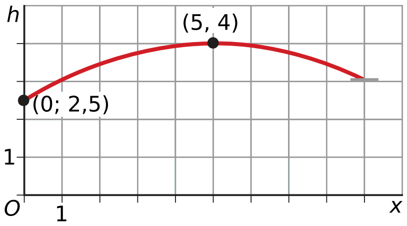
b Omdat de parabool door het punt $(0; 0{,}5)$ gaat, kun je de baan beschrijven met de formule $h(x) = a(x - 10)^2 + 1{,}5$. Licht dit toe.

c Laat zien dat $a = -0{,}01$.

d Bereken nu de twee nulpunten van de kwadratische functie die de baan van de tennisbal (ongeveer) beschrijft. Laat zien dat de bal inderdaad ‘in’ is.

Opgave 15

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool, zie de figuur. Het hoogste punt van de baan is gegeven. De speler laat de bal op $2{,}5$ meter boven de grond los.



Figuur 3.9

a Stel een formule op voor de functie $h(x)$ die de baan van de bal beschrijft.

b De ring van de basket hangt op $3{,}05$ meter boven de grond. Hoe ver staat de speler van (het midden van) de ring van de basket in cm nauwkeurig?

Testen

Opgave 16

Bepaal bij de volgende functies de top van de grafiek en het type parabool.

a $f(x) = -2x^2 - 2$

b $g(x) = 100(x - 4)^2 + 8$

c $h(x) = -(x + 5)^2$

Opgave 17

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Laat eventuele wortels staan.

a $3(x - 5)^2 - 5 = -2$

b $3(x - 5)^2 - 5 = -5$

c $-2(x + 4)^2 + 3 = 1$

d $2(x + 2)^2 > 10$

e $-(x + 4)^2 < -3$

f $(x + 4)^2 - 5 < -3$

Opgave 18

Stel een voorschrift op van de kwadratische functie f waarvan de nulpunten $x = 10$ en $x = 20$ zijn. Verder is gegeven dat $f(0) = 30$.

1.4 De abc-formule

Inleiding

In het vorige onderdeel heb je gezien hoe je de vergelijking $2(x-1)^2-5=3$ oplost door terug te rekenen. Dat terugrekenen lukt omdat de x maar op één plaats in de vergelijking voorkomt.
Kwadratische vergelijkingen komen ook voor in een vorm waarin terugrekenen niet mogelijk is. Werk je namelijk de haakjes weg, dan krijg je $2x^2-4x-3=3$.
De x komt nu op meer plekken voor en terugrekenen is niet meer mogelijk. Door kwadraatafsplitsen kun je ook een formule afleiden waarmee een dergelijke vergelijking in één keer op te lossen is. Dat is de zogenaamde abc-formule.

Je leert in dit onderwerp

- nagaan hoeveel oplossingen een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2+bx+c=0$ heeft;
- kwadratische vergelijkingen van de vorm $ax^2+bx+c=0$ oplossen;
- kwadratische ongelijkheden oplossen.

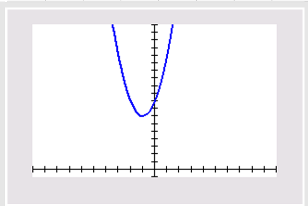
Voorkennis

- kwadratische vergelijkingen van de vorm $a(x-p)^2+q=u$ oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de grafiek van de functie $g(x)=2(x+1)^2+7$.



Figuur 4.1

a Schrijf het functievoorschrift van g in de vorm $g(x)=ax^2+bx+c$.

b Hoe kun je met de grafische rekenmachine nagaan of je dit goed hebt gedaan?

c Hoe kun je aan een functievoorschrift van $g(x)=ax^2+bx+c$ zien of de grafiek een dal- of een bergparabool is?

d Hoe bepaal je de top van de grafiek van g?

Bekijk vervolgens de grafiek van $f(x)=x^2+6x-8$.

e Hoe bepaal je algebraïsch de top en de nulpunten van de grafiek van f?

Uitleg 1

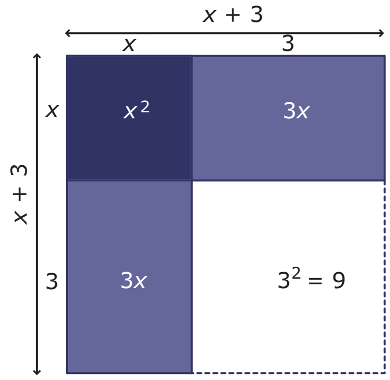
De vergelijking $x^2 + 6x = 16$ kun je niet oplossen door terugrekenen. Maar in de figuur zie je dat $x^2+6x = (x + 3)^2-3^2$. Dit betekent dat je de gegeven vergelijking kunt schrijven als: $(x + 3)^2 - 9 = 16$. En nu komt x weer op één plek voor en kun je terugrekenen:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - 9 &= 16\\ (x+3)^2 &= 25\\ x+3 &= \pm 5\\ x &= \text{-}3 \pm 5\end{aligned}$$

De oplossing van deze vergelijking is: $x = 2 \vee x = \text{-}8$.

Je hebt hier gebruikgemaakt van de algemene formule:
$x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$

De gebruikte techniek heet een kwadraat afsplitsen. De geldigheid van deze formule is eenvoudig aan te tonen door de haakjes weg te werken.



Figuur 4.2

Opgave 1

Bekijk de kwadratische functie f met functievoorschrift $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

a Herleid f door een kwadraat af te splitsen.

b Je kunt nu de coördinaten van de top van de grafiek van f makkelijk bepalen. Welke coördinaten zijn dit?

c Bereken algebraïsch de nulpunten van de grafiek van f. Rond af op twee decimalen.

Opgave 2

Splits van de functievoorschriften een kwadraat af.

a $f(x) = x^2 + 12x$

b $g(x) = x^2 - 8x + 15$

c $h(x) = 2x^2 - 12x - 12$

d $k(x) = \text{-}x^2 + 4x + 3$

Uitleg 2

De techniek van kwadraat afsplitsen kun je ook toepassen om bijvoorbeeld de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op te lossen. Je deelt dan eerst door 3 en daarna splits je het kwadraat af. Omdat dit tijdrovend kan zijn, hebben wiskundigen de oplossingen berekend voor het algemene geval. Dat gaat ook met kwadraat afsplitsen. Je krijgt het volgende resultaat:

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossing:

$$x = \frac{\text{-}b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{\text{-}b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dit noem je de abc-formule of wortelformule. Deze formule geeft meteen de twee oplossingen als je de juiste waarden voor a, b en c invult. Deze formule kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen, maar de vergelijking moet vaak wel eerst nog in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ worden gezet.

Ga na dat de oplossing van $3x^2 + 17x = 45$, en dus $3x^2 + 17x - 45 = 0$ is:

$x = \frac{-17+\sqrt{829}}{6} \vee x = \frac{-17-\sqrt{829}}{6}$

De uitdrukking $b^2 - 4ac$ onder het wortelteken heet de discriminant. Omdat de discriminant in dit geval positief is, namelijk 829, zijn er twee mogelijke antwoorden. Is de discriminant negatief, dan zijn er geen reële oplossingen. Je kunt de discriminant beter eerst uitrekenen.

Opgave 3

Met de abc-formule kun je kwadratische vergelijkingen oplossen.

a Los de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op met behulp van de abc-formule. Rond af op twee decimalen.

b Los de vergelijking $x^2 - 6x + 1 = 0$ op met behulp van de abc-formule.

c Los de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op met kwadraat afsplitsen.

d Probeer de abc-formule af te leiden door de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ op te lossen met kwadraat afsplitsen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Een algemene vorm voor een **kwadratische functie** is:
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Aan het functievoorschrift zie je niet meteen hoe hij door transformatie uit de machtsfunctie $y = x^2$ kan ontstaan. Dat is lastig als je de top en de nulpunten van de bijbehorende parabool wilt vinden. Door **kwadraat afsplitsen** kun je de functie f omzetten naar de vorm:
$f(x) = a(x-p)^2 + q$

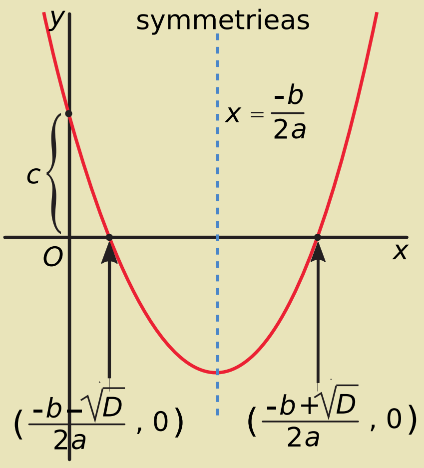
waarin (p,q) de top van de grafiek is. Je gebruikt daarbij de eigenschap:
$x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$

Controleer met haakjes wegwerken dat $f(x) = 2x^2 - 4x$ dezelfde functie is als $g(x) = 2(x-1)^2 - 2$.

Het is handig als je $f(x) = ax^2 + bx + c$ met behulp van kwadraat afsplitsen omzet naar de vorm waarin je de top en de symmetrieas zo kunt aflezen.

Wiskundigen hebben al lang geleden de **abc-formule** afgeleid. Daarmee kun je de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen en zo de nulpunten van de kwadratische functie berekenen. De gevonden oplossing is:

$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$



Figuur 4.3

Bewijs 1

Los $ax^2+bx+c=0$ in algemene zin op met behulp van kwadraat afsplitsen.

Neem aan dat $a \neq 0$ (anders is het ook geen kwadratische vergelijking). Je kunt dan aan beide zijden van het isgelijkteken delen door a. Dat geeft:

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

Kwadraat afsplitsen levert op:

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$ en $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Worteltrekken:

$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

En herleiden:

$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Hiermee is de abc-formule gevonden.

De uitdrukking $D=b^2-4ac$, die onder het wortelteken staat, heet de **discriminant** van de kwadratische vergelijking. Omdat alleen de wortel uit een positief getal of 0 een reëel getal oplevert, bepaalt die discriminant het aantal oplossingen van de vergelijking.

- Als $D>0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $D=0$ is er één oplossing.
- Als $D<0$ zijn er geen reële oplossingen.

Voorbeeld 1

Los algebraïsch op: $x^2+10x=15$.

Antwoord

Terugrekenen kan niet, maar op x^2+10x kun je kwadraat afsplitsen toepassen: $x^2+10x=(x+5)^2-25$.

De vergelijking wordt dan zo opgelost:

$$\begin{aligned}(x+5)^2-25 &= 15\\ (x+5)^2 &= 40\\ x+5 &= \pm\sqrt{40}\\ x &= -5\pm\sqrt{40}\end{aligned}$$

Je kunt ook de abc-formule toepassen.

Eerst schrijf je de vergelijking als: $x^2+10x-15=0$.

Dan neem je: $a=1$, $b=10$ en $c=-15$.

Discriminant: $D=b^2-4ac=10^2-4\cdot 1\cdot -15=160$.

De discriminant is positief, er zijn dus twee oplossingen:

$x=\frac{-10+\sqrt{160}}{2} \vee x=\frac{-10-\sqrt{160}}{2}$

Ga na dat beide oplossingsmethodes hetzelfde opleveren.

Opgave 4

Los de vergelijking $x^2 - 12x = 30$ op.

a Doe dit eerst met behulp van kwadraat afsplitsen.

b Doe dit vervolgens met de abc-formule.

c Los op: $x^2 - 12x \leq 30$.

Opgave 5

Je wilt de ongelijkheid $3x^2 + 6x < x + 8$ oplossen.

Daarvoor los je eerst de vergelijking $3x^2 + 6x = x + 8$ op.

Als je de abc-formule wilt gebruiken om deze vergelijking op te lossen, moet de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ staan.

a Schrijf de bij de ongelijkheid horende vergelijking $3x^2 + 6x = x + 8$ in deze vorm en bereken de oplossingen met de abc-formule.

b Controleer de oplossingen met de grafische rekenmachine en geef de oplossing van de ongelijkheid.

Opgave 6

Kwadratische vergelijkingen/ongelijkheden kunnen soms ook opgelost worden door ontbinden in factoren. Ga bij elk van de volgende vergelijkingen/ongelijkheden na of ze zo opgelost kunnen worden. Bereken van elk van de vergelijkingen de oplossing. Gebruik de abc-formule alleen als dat echt nodig is.

a $x^2 - x - 3 = 0$

b $-4x^2 + 5x - 14 = 0$

c $2x^2 - 10x + 10 < 2x - 6$

d $x - 5x^2 = 10$

e $x(x - 7) > 8$

Voorbeeld 2

Bepaal algebraïsch de nulpunten en de top van de grafiek van de functie $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

Antwoord

Kwadraat afsplitsen:

$$2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2) = 2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2}$$

De nulpunten vind je uit: $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2} = 0$.

Ga na dat je door terugrekenen vindt: $(-1,0)$ en $(2,0)$.

Je kunt ook meteen de vergelijking $2x^2 - 2x - 4 = 0$ oplossen. Dat kun je doen met behulp van de abc-formule, maar veel sneller door ontbinden in factoren toe te passen.

Ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt. Voordeel van het kwadraat afsplitsen is dat je ook meteen de top van de grafiek uit het functievoorschrift kunt aflezen.

De top is $\left(\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}\right)$.

Opgave 7

Bekijk de kwadratische functie $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$. Je wilt de nulpunten en de top van de grafiek van f bepalen.

a Bepaal de nulpunten en de top eerst met behulp van kwadraat afsplitsen. Rond af op twee decimalen.

b Je kunt de nulpunten ook meteen met de abc-formule berekenen. Bepaal wat a, b en c zijn. Bereken daarna de discriminant.

c Kun je aan de discriminant zien hoeveel oplossingen de vergelijking $f(x) = 0$ heeft?

d Los de vergelijking $f(x) = 0$ op en ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt als bij a.

e Werk je met de abc-formule, dan kun je vanuit de nulpunten de top bepalen. Hoe gaat dat in zijn werk?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Een kwadratische vergelijking heeft precies één oplossing als de discriminant 0 is. Stel dat je een functie hebt zoals $f_k(x) = x^2 + kx + 3$, waarin k een nog onbekende constante is. Je wilt deze constante zo kiezen, dat de grafiek van f precies met zijn top op de x-as ligt.
Welke waarde moet k dan krijgen?

Antwoord

Kwadraat afsplitsen geeft:

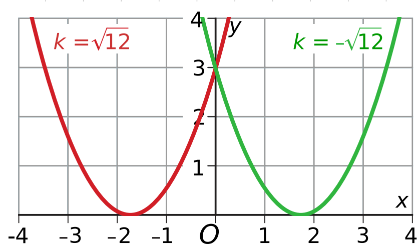
$$f_k(x) = \left(x + \tfrac{1}{2}k\right)^2 - \tfrac{1}{4}k^2 + 3$$

Top: $\left(-\tfrac{1}{2}k, -\tfrac{1}{4}k^2 + 3\right)$

Als de top op de x-as ligt, is $y_{\text{top}} = 0$.

Dit levert op: $-\tfrac{1}{4}k^2 + 3 = 0$ en dus $k^2 - 12 = 0$ zodat $k = \pm\sqrt{12}$.

Je had dit ook anders kunnen aanpakken, namelijk met behulp van de discriminant van de vergelijking $x^2 + kx + 3 = 0$. Ga na dat je hetzelfde vindt.



Figuur 4.4

Opgave 8

Het voorschrift $f_k(x) = x^2 + kx + 3$ levert voor verschillende waarden van k steeds een andere functie met een andere grafiek op.

a Bepaal de top van deze parabool als $k = 2$.

b Bepaal de top van deze parabool als $k = 1$.

In **Voorbeeld 3** wordt gevraagd om k zo te bepalen dat de top van de parabool op de x-as ligt. Dit betekent ook dat $x^2 + kx + 3 = 0$ precies één oplossing heeft.

c Laat zien dat de top op de x-as ligt als $k = -\sqrt{12} \vee k = \sqrt{12}$.

d Voor welke waarden van k ligt de top van de grafiek van f_k op de lijn $y = 1$?

e Als k varieert, lijkt de top van de parabool zelf ook een parabool te doorlopen. Stel een formule op voor die parabool.

Opgave 9

Gegeven is de functie f_p met $f_p(x) = px^2 - 4x + 5$.

a Neem $p = 1$ en bepaal de nulpunten en de top van de grafiek van f_1.

b Neem $p = 0$. Waarom is de grafiek van f_0 nu geen parabool?

c Voor welke waarde(n) van p heeft de grafiek van f_p precies één punt met de x-as gemeen?

d Laat zien dat de top van de grafiek van f_p op de lijn $y = -2x + 5$ ligt.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de kwadratische functie f met $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

a Schrijf het functievoorschrift in een zodanige vorm dat je de top van de grafiek kunt aflezen.

b Je kunt nu op drie manieren de nulpunten van de grafiek van f berekenen. Doe dit eerst door het functievoorschrift dat je bij a hebt gevonden te gebruiken.

c Bereken de nulpunten ook met behulp van de abc-formule.

d Ten slotte kun je gebruikmaken van ontbinden in factoren. Dat gaat verreweg het snelst als je de ontbinding ‘ziet’. Bereken de nulpunten nog eens op deze manier.

Opgave 11

Teken met de grafische rekenmachine in één figuur de grafieken van $f(x) = 2x^2 - x + 1$ en $g(x) = 10 - 3x$.

a Los exact op: $f(x) = g(x)$.

b Los op: $f(x) > g(x)$. Rond af op drie decimalen.

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $x^2 - 3x - 13 = 0$

b $\frac{1}{3}x^2 + 10x + 1 = 0$

c $2x^2 - 5x = x$

d $2x^2 - 12x = -18$

e $x^2 - 5x + 10 = 0$

Opgave 13

Los de ongelijkheden algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

a $-13x^2 + 10x + 8 \geq -8x^2 + 3x$

b $-2x^2 - x < -6$

c $0{,}5x - 4 > 0{,}25x^2 + 3x - 8$

Opgave 14

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = px^2 + 6x + 2p$ en $g(x) = 6 - x$.

a Neem $p = 2$ en bereken de nulpunten van f en de top van de grafiek van f.

b Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f precies één punt met de x-as gemeen?

c Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f drie verschillende snijpunten met de assen?

d Voor welke waarden van p hebben de functies f en g precies één snijpunt?

Opgave 15

Gegeven is de kwadratische functie $f_p(x) = \frac{1}{8}x^2 + px - 1$. Als je de waarde van p varieert, dan verandert natuurlijk ook de plaats van de top.

De toppen lijken op een parabool te liggen. Stel de formule van deze parabool op.

Toepassen

Ook de vergelijking $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$ kun je opvatten als kwadratische vergelijking.

Dat komt omdat $x^4 = \left(x^2\right)^2$.

Je kunt de vergelijking daarom schrijven als $p^2 - 6p + 4 = 0$ waarin $p = x^2$.
Je kunt dan de twee waarden van p die hieraan voldoen vinden door kwadraat afsplitsen of met de abc-formule: $p = 3 \pm \sqrt{5}$. Dit betekent dan dan $x^2 = 3 - \sqrt{5} \vee x^2 = 3 + \sqrt{5}$. En hieruit kun je dan x berekenen.

Opgave 16

Bekijk bij **Toepassen** hoe je de oplossingstechnieken voor kwadratische vergelijkingen ook in sommige andere situaties kunt toepassen.

a Los zelf de vergelijking $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$ op.

b Los op: $x^6 + 4x^3 = 12$.

Ook de vergelijking $x - 4\sqrt{x} - 5 = 0$ kun je zo oplossen, want $x = (\sqrt{x})^2$.

c Laat zien, hoe dat gaat.

Opgave 17

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

a $3x^4 - 2x^2 = 5$

b $2x^3 - 5x^{1{,}5} - 4 = 0$

c $\text{-}\,x^{100} = \text{-}\,40x^{50} + 15$

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $x^2 - 2x - 15 = 0$

b $\text{-}\,x^2 - x - 1 = 0$

c $20 - x^2 = 11$

d $x(x + 2) < 14$

e $x^2 - x + 10 \geq 3$

Opgave 19

Gegeven zijn de functies $f(x) = p - x^2$ en $g(x) = x^2 - 3x$. Hierin is p een nog onbekende constante.

a Voor welke waarden van p heeft functie f geen nulpunten?

b Neem $p = 4$ en bereken de snijpunten van de twee grafieken van f en g in twee decimalen nauwkeurig.

c Bepaal de coördinaten van de top van de grafiek van g.

d Voor welke waarde van p hebben beide grafieken precies één snijpunt?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van kwadratische vergelijkingen**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.5 Meer machtsfuncties

Inleiding

Alle functies die door transformatie kunnen ontstaan uit $y = x^p$ (waarin p elk willekeurig reëel getal kan zijn) zijn machtsfuncties.
Dat geldt ook voor een gebroken functie f met bijvoorbeeld als functievoorschrift $f(x) = \frac{2}{x+4} + 5$, want dit is te schrijven als $f(x) = 2(x+4)^{-1} + 5$.
En het geldt voor een wortelfunctie g met bijvoorbeeld als functievoorschrift $g(x) = 2\sqrt{x+4} + 5$, want dit kun je schrijven als $g(x) = 2(x+4)^{0,5} + 5$.
Over dergelijke functies gaat het hier.

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken functies waarvan de grafiek een hyperbool is;
- werken met wortelfuncties waarvan de grafiek een halve parabool is.

Voorkennis

- werken met machtsfuncties in het algemeen;
- transformaties toepassen op functies;
- vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch oplossen.

Verkennen

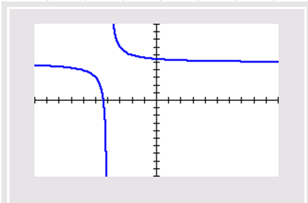
Opgave V1

Bekijk de grafiek van de gebroken functie f met functievoorschrift $f(x) = \frac{2}{x+4} + 5$.

a Welke karakteristieken heeft de grafiek van f?

b Geef het domein en bereik van f.

c Waarom is f een machtsfunctie?



Figuur 5.1

Bekijk de grafiek van de wortelfunctie g met functievoorschrift $g(x) = 2\sqrt{x+4} + 5$.

d Welke karakteristieken heeft de grafiek van g?

e Geef het domein en bereik van g.

f Waarom is g een machtsfunctie?

Uitleg

Alle functies van de vorm $f(x) = x^p$ met p een willekeurig reëel getal en alle functies die daaruit door transformatie kunnen ontstaan, heten machtsfuncties. Dat geldt voor alle lineaire en kwadratische functies, maar ook voor veel gebroken functies en veel wortelfuncties:

- Gebroken functies:
  - $f(x) = \frac{200}{x+30} - 100$ is te schrijven als machtsfunctie $f(x) = 200(x+30)^{-1} - 100$.
  - $g(x) = 40 - \frac{1}{x^2}$ is te schrijven als machtsfunctie $g(x) = -x^{-2} + 40$.
- Wortelfuncties:
  - $h(x) = 200\sqrt{x+30} - 100$ is te schrijven als machtsfunctie $h(x) = 200(x+30)^{\frac{1}{2}} - 100$.
  - $k(x) = 40 - \sqrt[3]{x}$ is te schrijven als machtsfunctie $k(x) = -x^{\frac{1}{3}} + 40$.

Al deze functies kun je door transformatie afleiden uit de bijbehorende machtsfunctie. Ze hebben daarom dezelfde eigenschappen. Bij gebroken functies moet je rekening houden met asymptoten.

Opgave 1

Schrijf deze gebroken functies als machtsfunctie als dat mogelijk is.

a $f(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$

b $g(x) = \frac{1}{4+x^2}$

c $h(x) = \frac{2}{(x-3)^4} + 10$

d $k(x) = \frac{4-x}{x}$

Opgave 2

Schrijf deze wortelfuncties als machtsfunctie als dat mogelijk is.

a $f(x) = 4\sqrt{x} + 3$

b $g(x) = \sqrt{4 + x^2}$

c $h(x) = -5\sqrt{2x - 8} + 6$

d $k(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 3$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Soorten machtsfuncties.

Een **machtsfunctie** is een functie van de vorm $f(x) = a(x+b)^p + c$, waarin ook p elke reële waarde kan aannemen. Zo'n functie ontstaat door transformatie van de machtsfunctie $y = x^p$.

Voorbeelden zijn:

- $p = 0$: $f(x) = a + c$, een constante functie
- $p = 1$: $f(x) = ax + d$, een lineaire functie
- $p = 2$: $f(x) = a(x+b)^2 + c$, een kwadratische functie
- $p = \frac{1}{2}$: $f(x) = a(x+b)^{\frac{1}{2}} + c = a\sqrt{x+b} + c$, een wortelfunctie
- $p = -1$: $f(x) = a(x+b)^{-1} + c = \frac{a}{x+b} + c$, een hyperbolische functie

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{200}{x+30} - 100$. Leg uit hoe de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^{-1}$ en bereken de snijpunten met de assen en de asymptoten.

Antwoord

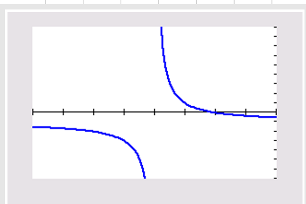
$f(x) = \frac{200}{x+30} - 100 = 200(x+30)^{-1} - 100$

De grafiek van f ontstaat door transformatie van $y = x^{-1}$:

- translatie van -30 ten opzichte van de y-as;
- vervolgens vermenigvuldiging met 200 ten opzichte van de x-as;
- ten slotte translatie van -100 ten opzichte van de x-as.

Deze transformaties kun je ook toepassen op de instellingen van het venster van de rekenmachine. Je ziet de grafiek van $y = x^{-1}$ goed in beeld als het venster is ingesteld op $[-4,4] \times [-3,5]$.

Dit wordt na transformatie $[-34,-26] \times [-700,900]$. Ga na, dat je dan de grafiek van f goed in beeld hebt.



Figuur 5.2

Je vindt verder:

- het snijpunt met de y-as: $f(0) = \frac{200}{30} - 100 = -93\frac{1}{3}$, dus dit wordt $\left(0, -93\frac{1}{3}\right)$;
- het snijpunt met de x-as: $f(x) = 0$ als $\frac{200}{x+30} = 100$ en dus $x + 30 = 2$; dit geeft $x = -28$ met snijpunt $(-28,0)$;

- een verticale asymptoot: delen door 0 geeft geen reëel getal, dus $x + 30 \neq 0$; de verticale asymptoot is $x = -30$ met bijbehorende limieten $\lim_{x \uparrow -30} f(x) = -\infty$ en $\lim_{x \downarrow -30} f(x) = \infty$;
- een horizontale asymptoot: als x een heel groot (negatief) getal is, dan is $\frac{200}{x+30} \approx 0$ en dus wordt $f(x) \approx -100$; de horizontale asymptoot is $y = -100$ met limieten $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -100$.

Opgave 3

Bekijk de functie $g(x) = 200 - \frac{50}{(x-4)^2}$.

a Schrijf het functievoorschrift als machtsfunctie.

b Uit welke machtsfunctie van de vorm $y = x^p$ kan de grafiek van g door transformatie ontstaan? Welke transformaties moet je achtereenvolgens toepassen?

c Bepaal de twee asymptoten van de grafiek van g.

d Bepaal het domein en het bereik van g.

e Bereken de snijpunten van de grafiek van g met de beide coördinaatassen.

Voorbeeld 2

Los op: $40 - \frac{1}{x^2} < 24$.

Antwoord

Voor het oplossen van een ongelijkheid is een grafiek handig.

De functie $y_1 = 40 - \frac{1}{x^2}$ is een machtsfunctie, want hij is te schrijven als $y_1 = -x^{-2} + 40$.

De functie ontstaat door transformatie van $y = x^{-2}$:

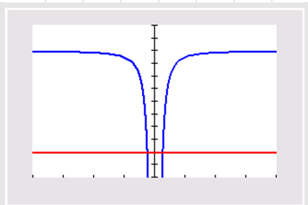
- vermenigvuldiging met -1 ten opzichte van de x-as (spiegelen in de x-as);
- translatie van 40 eenheden ten opzichte van de x-as.

De grafiek van $y = x^{-2}$ komt goed in beeld met venster $[-4,4] \times [-4,4]$.
De grafiek van y_1 komt goed in beeld met venster $[-4,4] \times [36,44]$.
Omdat je $y_2 = 24$ ook in beeld wilt hebben, kies je $[-4,4] \times [20,44]$.

Bij $x = 0$ zit een verticale asymptoot!

Dan los je op: $40 - \frac{1}{x^2} = 24$.

Je vindt: $x = 0{,}25 \vee x = -0{,}25$.
De oplossing van de ongelijkheid is $-0{,}25 < x < 0 \vee 0 < x < 0{,}25$.



Figuur 5.3

Opgave 4

Los de ongelijkheden op.

a $\frac{200}{x-40} \geq 50$

b $\frac{25}{(2x+6)^2} - 100 < 200$

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie h met $h(x) = 200\sqrt{x+30} - 100$. Leg uit hoe de grafiek van h kan ontstaan uit die van $y = x^{\frac{1}{2}}$ en bereken de snijpunten met de assen.

Antwoord

$h(x) = 200\sqrt{x+30} - 100$ is te schrijven als machtsfunctie $h(x) = 200(x+30)^{\frac{1}{2}} - 100$.

Dit is een machtsfunctie die ontstaat door transformatie van $y = x^{\frac{1}{2}}$:

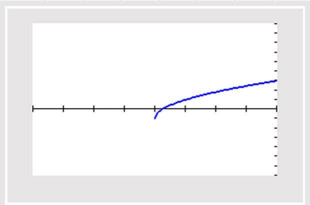
- translatie van -30 ten opzichte van de y-as;
- vervolgens vermenigvuldiging met 200 ten opzichte van de x-as;
- ten slotte translatie van -100 ten opzichte van de x-as.

Deze transformaties kun je ook toepassen op de instellingen van het venster van de rekenmachine. Je ziet de grafiek van $y = x^{\frac{1}{2}}$ goed in beeld als het venster is ingesteld op $[-4,4] \times [-3,5]$.

Dit wordt na transformatie $[-34,-26] \times [-700,900]$. Ga na dat je dan de grafiek van h goed in beeld hebt.

Je vindt verder:

- het snijpunt met de y-as: $h(0) = 200\sqrt{0+30} - 100 \approx 995{,}45$ en dus wordt dit $(0; 995{,}45)$;
- het snijpunt met de x-as: $h(x) = 0$ als $200\sqrt{x+30} - 100 = 0$ en dus als $x + 30 = 0{,}5^2 = 0{,}25$. Dit geeft $x = -29{,}75$ en dus als nulpunt $(-29{,}75; 0)$;
- asymptoten zijn er nu niet.



Figuur 5.4

Opgave 5

Bekijk de functie $g(x) = 200 - 50\sqrt{x+4}$.

a Schrijf het functievoorschrift als machtsfunctie.

b Uit welke machtsfunctie van de vorm $y = x^p$ kan de grafiek van g door transformatie ontstaan? Welke transformaties moet je achtereenvolgens toepassen?

c Bepaal het domein en het bereik van g.

d Bereken de snijpunten van de grafiek van g met de beide coördinaatassen.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies f met $f(x) = 2x\sqrt{x} + 4$ en g met $g(x) = 2x\sqrt{x+4}$.

a Waarom is f wel een machtsfunctie en g niet?

b Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) \geq g(x)$.

Voorbeeld 4

Los op: $40 - \sqrt[3]{x} < 24$.

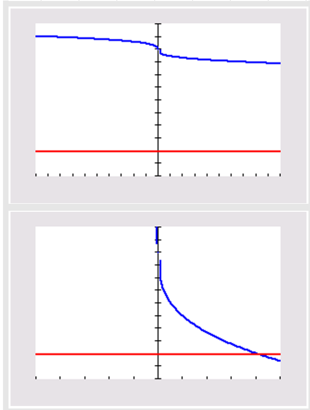
Antwoord

Voor het oplossen van een ongelijkheid is een grafiek handig.
De functie $y_1 = 40 - \sqrt[3]{x}$ is een machtsfunctie, want hij is te schrijven als $y_1 = -1x^{\frac{1}{3}} + 40$.

De functie ontstaat door transformatie van $y = x^{\frac{1}{3}}$:

- vermenigvuldiging met -1 ten opzichte van de x-as (spiegelen in de x-as);
- translatie van 40 eenheden ten opzichte van de x-as.

De grafiek van $y = x^{\frac{1}{3}}$ komt goed in beeld met venster $[-10,10] \times [-4,4]$, dus die van y_1 komt goed in beeld met venster $[-10,10] \times [36,44]$. Omdat je $y_2 = 24$ ook in beeld wilt hebben, kies je $[-10,10] \times [20,44]$ (bovenste figuur).
Je ziet dat het snijpunt van beide grafieken niet in beeld komt; in de x-richting moet je veel grotere getallen instellen!
Dus kies je bijvoorbeeld als venster $[-5000,5000] \times [20,44]$.
Dan los je op: $40 - \sqrt[3]{x} = 24$.
Je vindt: $x = 16^3 = 4096$.
De oplossing van de ongelijkheid is $x > 4096$.



Figuur 5.5

Opgave 7

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $200\sqrt{x - 40} \geq 50$

b $100 - 25\sqrt{2x + 6} < 20$

Opgave 8

Gegeven is de gebroken functie f met voorschrift $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$.

a Laat zien dat $f(x) = 1 - \frac{2}{x+4}$.

b Laat zien dat f een machtsfunctie is.

c Welke asymptoten heeft de grafiek van f?
Welke limieten horen er bij?

d Geef het domein en het bereik van f.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = 40 - \frac{100}{(x+10)^3}$.

a Laat zien dat f een machtsfunctie is.

b Bepaal de asymptoten van de grafiek van f met de bijbehorende limieten.

c Geef het domein en het bereik van f.

d Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van f.

e Los op: $f(x) \geq x$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 10

Los de ongelijkheden exact op.

a $\frac{16}{x^4} \geq \frac{1}{2}x$

b $\frac{2x}{x-10} + 20 < 100$

Opgave 11

Gegeven is de functie g met $g(x) = 20x^2\sqrt{x} - 100$.

a Laat zien dat g een machtsfunctie is.

b Geef het domein en bereik van g.

c Bereken exact het nulpunt van de grafiek van g.

d Los op: $g(x) \geq x$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 12

Los de ongelijkheden exact op.

a $16x^{\frac{1}{4}} \geq \frac{1}{2}x$

b $2\sqrt{2x - 40} + 20 < 100$

Opgave 13

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = \frac{10}{x\sqrt{x}}$ en $g(x) = \frac{10x}{\sqrt{x}}$.

a Beide functies zijn machtsfuncties. Verklaar op grond van de exponent van deze machtsfuncties waarom de grafiek van f altijd dalend en die van g stijgend is.

b Welke asymptoten hebben deze functies?

c Los exact op: $f(x) \geq g(x)$.

Toepassen

Opgave 14: Parabool benaderen

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$.

a Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van f?

b Bepaal de coördinaten van de toppen van f.

c Licht toe waarom de grafiek van f de parabool $y = x^2$ benadert.

Testen

Opgave 15

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden exact op.

a $40 - \frac{5}{x^4} = 0$

b $\sqrt[3]{2x - 10} = 5$

c $\frac{2\sqrt{x}+100}{\sqrt{x}} > 12$

d $\frac{10}{(5-x)^4} \geq 0{,}016$

Opgave 16

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{4}{\sqrt{10-x}}$ en $g(x) = \sqrt{10 - x}$.

a Waarom zijn beide functies machtsfuncties?

b Geef het domein en bereik van beide functies.

c Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken van f en g.

d Los op: $f(x) \geq g(x)$

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden met wortelvormen en gebroken vormen**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Machtsfuncties**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- recht evenredig met een macht — machtsverbanden;
- machtsfuncties, eigenschappen afhankelijk van exponent — machtsvergelijking;
- kwadratische functie — dal- en bergparabool — top — symmetrieas — kwadratische vergelijking;
- *abc*-formule;
- gebroken functie — wortelfunctie.

Activiteitenlijst

- machtsverbanden herkennen — heen- en terugrekenen bij machtsverbanden;
- de eigenschappen van machtsfuncties vinden — werken met transformaties van machtsfuncties;
- kwadratische functies tekenen — kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen;
- kwadratische functies schrijven als machtsfuncties — de *abc*-formule gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met gebroken functies en wortelfuncties die als machtsfuncties zijn te schrijven.

Achtergronden

Een kwadraat is (de oppervlakte van) een vierkant, in de Oudheid werden kwadraten altijd door vierkanten voorgesteld. En (vierkants)wortels zijn de lengten van de zijden van een vierkant. Heel lang kon daar alleen meetkundig mee worden gemanipuleerd, want in de Oudheid waren de enige getallen 1, 2, 3, ... en de verhoudingen van die getallen (breuken dus).
En daarmee was bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ geen getal, maar kon alleen worden benaderd met getallen. Hetzelfde gold voor kubussen (derde machten zouden wij zeggen) en kubische wortels (derdemachts wortels). Maar heel af en toe waren dat getallen, meestal niet. Toch werd met dergelijke machten gewerkt, maar steeds als vierkant of kubus. Ook gewone getallen (meetbare getallen) waren eigenlijk concrete lengtes net als wortels en π (onmeetbare getallen). Tot ruim voorbij de Middeleeuwen werd op die manier over getallen gedacht.

Vergelijkingen werden geformuleerd in termen van 'een vierkant en een lengte zijn samen 90, hoe groot is die lengte?'.
Nu noteer je dat als $x^2 + x = 90$ en dan wil je weten hoe groot x is.
Na de Griekse wiskundige **Diophantos (ongeveer 200—284)** hielden vooral geleerden uit het grote Islamitische Rijk dat van 622 tot 1450 het Midden-Oosten domineerde zich met het oplossen van kwadratische vergelijkingen bezig. De wiskundige **Al-Khwarizmi (ongeveer 780—845)** bedacht de abc-formule, hoewel hij totaal andere notaties gebruikte.

Pas veel later ontstonden in West-Europa de moderne notaties zoals de gewoonte om letters te gebruiken voor variabelen en het wortelteken. Ook werd het getalbegrip verruimd, zodat alle wortels als getallen werden opgevat.

Figuur 6.1

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 10 - 2(x-1)^5$.

a Laat zien door welke transformaties de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^5$.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de beide coördinaat-assen.

c Los exact op: $f(x) = 496$.

d Los exact op: $f(x) > 8$.

Opgave 2

Los de vergelijkingen en ongelijkheden exact op.

a $-0{,}5(x-2)^4 + 45 \leq 4{,}5$

b $x(x-2) = 3x - 6$

c $x^3 - 4x^2 = 10x$

d $6 - 0{,}1(x-3)^{\frac{1}{3}} = 5$

e $\frac{1}{4}x^2 \geq x + 5$

f $\frac{4}{(x-2)^3} - 6 = 14$

Opgave 3

Gegeven is voor elke waarde van p de functie $f(x) = 8 + 4px - px^2$.

a Neem $p = 1$ en bereken de karakteristieken van de grafiek van f.

b Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f geen snijpunten met de x-as?

c Voor welke waarden van p ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 50 - 2x$?

Opgave 4

Een kalkoen braden is lastig, omdat het enige tijd duurt voordat ook het binnenste van de kalkoen op temperatuur komt. Hoe lang dat duurt hangt af van het gewicht. Het is de kunst om de kalkoen zo lang te braden dat het binnenste net gaar is. Je kunt dat niet controleren zonder de kalkoen aan te snijden. De optimale braadtijd is daarom moeilijk vast te stellen. Gelukkig geven kookboeken vaak aanwijzingen voor de braadtijd, die afhankelijk is van het gewicht van de kalkoen. Onderzoekers hebben vastgesteld dat met de volgende formule het beste resultaat wordt verkregen:

$t = 11g^{\frac{2}{3}}$

Hierin is g het gewicht van de kalkoen in kilogram en t de tijd in minuten die nodig is om het binnenste van de kalkoen op een temperatuur van 85 °C te brengen.

a Bereken hoe lang het bij een kalkoen van 3 kg duurt voor het binnenste op een temperatuur van 85 °C is. Verwacht je dat een kalkoen van 6 kg daarvoor twee keer zoveel tijd nodig heeft?

Als het binnenste van de kalkoen een temperatuur heeft van 85 °C duurt het nog een tijd voordat de kalkoen gaar is. Ga ervan uit dat die tijd 80 minuten is en dat die tijd niet afhangt van het gewicht van de kalkoen.

b Geef de formule voor de totale braadtijd T van een kalkoen afhankelijk van het gewicht. Is de totale braadtijd recht evenredig met een macht van het gewicht?

c Verklaar waarom het minder moeilijk is om kooktijden vast te stellen dan braadtijden. Is de kooktijd van bijvoorbeeld aardappels ook afhankelijk van het gewicht? En de totale tijd dat aardappels op het fornuis moeten staan?

Opgave 5

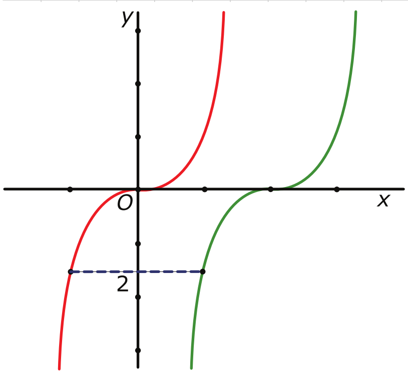
Bekijk de grafiek van $y_1 = x^3$ en de grafiek van y_2. De grafiek van y_2 ligt rechts van die van y_1 zo, dat alle verbindingslijnstukken evenwijdig aan de x-as de lengte 2 hebben.

a Geef het functievoorschrift van y_2.

b De functie $v(x)$ stelt de lengte van de verbindingslijnstukken die evenwijdig lopen aan de y-as voor. Toon aan dat $v(x) = 6x^2 - 12x + 8$.

c Voor welke waarden van x is de lengte van het verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y-as minder dan 8?

d Bepaal de lengte van het kortste verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y-as.



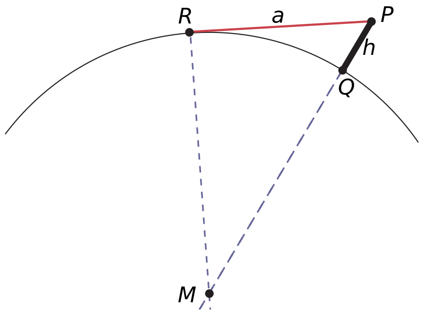
Figuur 6.2

Toepassen

Opgave 6: Kijkafstand

De formule voor de kijkafstand uit het begin van het onderwerp 'Machtsfuncties' kun je heel goed zelf afleiden.

Neem eens aan dat de Aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km. De hoogte h (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand a (in m) is dan de lengte van PR (eigenlijk van de boog QR maar dat verschilt niet veel van elkaar).



Figuur 6.3

Je vindt uiteindelijk iets als $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

De kijkafstand a is dus bij benadering een machtsfunctie van de hoogte h die je ogen boven het aardoppervlak zitten.

a Laat zien, hoe je a kunt berekenen. Maak zo een formule voor a afhankelijk van h.

b Laat zien dat geldt $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

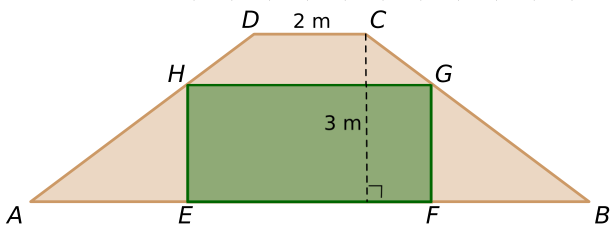
c De gevonden formule is iets anders dan die aan het begin van het onderwerp 'Machtsfuncties'. Hoe zou dat kunnen komen?

d Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.

e Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op Aarde?

Opgave 7: Boekenkast

Boven op zolder, onder het schuine dak, maak je een rechthoekige boekenkast op zolder. Neem aan dat de zolder 10 m breed is en 3 m hoog is. De vorm van de zijmuur $ABCD$ waar de boekenkast tegenaan komt is een symmetrisch trapezium.
Wanneer is de oppervlakte van het vooraanzicht $EFGH$ van de boekenkast zo groot mogelijk?



Figuur 6.4

Bekijk de applet

a Experimenteer eerst met de applet.

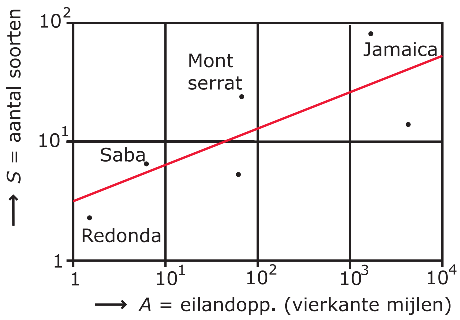
b Kies een geschikte variabele en leidt een formule af voor de oppervlakte K van het vooraanzicht.

c Bereken met behulp van die formule de maximale waarde van K.

Examen

Opgave 8: Diersoorten

Het lijkt aannemelijk dat er een verband bestaat tussen de oppervlakte van een gebied en het aantal verschillende diersoorten dat in dat gebied voorkomt. Een theorie hierover stelt dat het aantal verschillende diersoorten op een eiland in een bepaalde klimaatzone alleen afhankelijk is van de oppervlakte van het eiland. In deze opgave kijken we naar de verschillende soorten reptielen op eilanden in het Caraïbisch gebied.
Onderzoekers telden op vele eilanden het aantal verschillende soorten reptielen (S). In de volgende figuur zijn de gegevens van enkele eilanden weergegeven.



Figuur 6.5

Volgens de theorie is het verband tussen de oppervlakte A van een eiland (in vierkante mijlen) en het aantal soorten reptielen (S) op dat eiland te beschrijven met de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$.
De lijn in de figuur is de grafiek die bij deze formule behoort.

a Op het eiland Jamaica zijn meer soorten reptielen aangetroffen dan op grond van de theorie (de formule) verwacht mag worden. Hoeveel soorten reptielen zou een even groot eiland volgens de theorie hebben? Licht je antwoord toe.

b Binnen de theorie geldt als ruwe regel: ‘Bij een 10 keer zo groot eiland vinden we 2 keer zoveel diersoorten.’ Laat zien dat dit uit de formule volgt.

Op een groot eiland worden veel verschillende soorten reptielen met uitsterven bedreigd. Men wil maatregelen nemen om de natuur te beschermen. Daarbij moet er een keuze worden gemaakt uit twee mogelijkheden:

- Oprichting van 1 groot natuurreservaat met een oppervlakte van 400 vierkante mijlen.
- Oprichting van 2 kleinere reservaten, elk met een oppervlakte van 200 vierkante mijlen. Dergelijke natuurreservaten liggen geïsoleerd in de bewoonde wereld en kunnen als ‘eilanden’ beschouwd worden.

Voor het schatten van het aantal soorten reptielen dat in zo’n reservaat zal voorkomen kan de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$ gebruikt worden. Of voor 1 of 2 gekozen wordt, is mede afhankelijk van het aantal soorten dat de twee kleinere reservaten gemeen zullen hebben. Men neemt aan dat er 8 soorten reptielen zijn die zowel in het éne als het andere kleine reservaat zullen voorkomen. Men wil de mogelijkheden kiezen waarbij in totaal zoveel mogelijk verschillende soorten reptielen zullen voorkomen.

c Welke van de twee mogelijkheden zal men kiezen? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)

Opgave 9: Tornado's

In tornado's kunnen hoge windsnelheden bereikt worden. De zwaarte of heftigheid van een tornado wordt intensiteit genoemd. Er zijn verschillende schalen om de intensiteit van een tornado uit te drukken in een getal. Zo is er de Fujita-schaal die in 1971 is ontwikkeld. Voor de intensiteit op de Fujita-schaal geldt de volgende formule:

$$F = \left(\frac{v}{6{,}3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$$

Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en F de intensiteit van de tornado op de Fujita-schaal. F wordt afgerond op een geheel getal.
In een zware tornado worden maximale windsnelheden van ongeveer 280 km/h bereikt.

a Bereken de intensiteit van deze tornado op de Fujita-schaal.

b Een tornado met intensiteit 4 op de Fujita-schaal komt niet zo vaak voor.

Bereken de minimale waarde van v in zo'n tornado. Rond af op één decimaal.

Een andere schaal voor de intensiteit van tornado's is de in 1972 ontwikkelde Torro-schaal T. Het verband tussen v en T wordt gegeven door de formule:

$$v = 2{,}39(T + 4)^{\frac{3}{2}}$$

Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en T de intensiteit van de tornado op de Torro-schaal. T wordt afgerond op een geheel getal.
Er bestaat een lineair verband tussen de onafgeronde F- en T-waarden.
Dit lineaire verband kan worden beschreven met een formule van de vorm $F = at + b$.

c Bereken de waarden van a en b. Rond af op twee decimalen.

(bron: examen havo wiskunde A in 2013, eerste tijdvak)

2

Analytische meetkunde

2.1 Cartesisch assenstelsel

Inleiding

In de zestiende eeuw maakte de wiskunde door René Descartes een enorme sprong. Voor het eerst gebruikte Descartes systematisch assenstelsels om meetkundige problemen te beschrijven. Zo worden meetkundige figuren met getallen en variabelen beschreven. Om Descartes te blijven herinneren is het coördinatenstelsel, dat geschikt is voor het werken met meetkundige objecten, een cartesisch coördinatenstelsel genoemd.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met een cartesisch coördinatenstelsel;
- de afstand tussen twee punten te berekenen;
- de coördinaten van het midden tussen twee punten te berekenen.

Voorkennis

- werken met coördinaten;
- meetkundige begrippen zoals loodrecht, evenwijdig, hoek en afstand gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Op een eiland is een schat begraven. De volgende aanwijzingen moeten je bij de schat brengen:

“Ga in een rechte lijn van de oude eik naar de grote zwerfkei. Ga vervolgens in een lijn loodrecht op de vorige richting dezelfde afstand. Loop vanaf het punt waar je bent gekomen in een rechte lijn naar de tweede zwerfkei en vervolg je route in de richting loodrecht op het laatst gelopen stuk, even ver als dit stuk. Ga ten slotte in een rechte lijn terug naar de oude eik. Halverwege zul je de schat aantreffen.”

Bekijk de applet: Schatgraversprobleem.

Er is echter een probleem: de oude eik is totaal verdwenen.

Maak eerst een schets van de situatie: Kies een punt E voor de oude eik en construeer punten Z_1 en Z_2 voor de zwerfkeien. Bij Z_1 en Z_2 maak je rechte hoeken en cirkels om gelijke afstanden op de goede plek te krijgen. Kijk eens wat er gebeurt als je de oude eik verplaatst. De schat heb je gevonden, maar hoe verklaar je dat de positie van de oude eik onbelangrijk is?

Uitleg

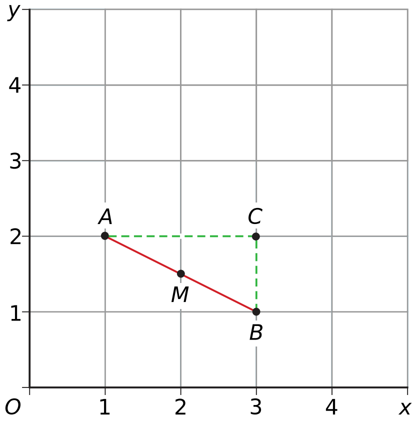
Bekijk de applet.

Meetkundige problemen gaan over punten, lijnen en lijnstukken, hoeken, afstanden en dergelijke.

Dat zijn zaken die zich goed laten aanpakken met behulp van coördinaten. Vandaar dat in de meetkunde het cartesisch coördinatenstelsel Oxy wordt gebruikt: twee onderling loodrechte assen met daarop dezelfde schaalverdeling.

Bekijk het assenstelsel met de twee punten $A(1,2)$ en $B(3,1)$. Hun onderlinge afstand is de lengte van lijnstuk AB. De lengte van lijnstuk AB noteer je als $|AB|$. Je berekent de lengte door in ΔABC de stelling van Pythagoras toe te passen. De lengte van AC vind je door de x-coördinaten van A en C van elkaar af te trekken. De lengte van CB vind je door de y-coördinaten van deze punten af te trekken. De lengte van lijnstuk AB is gelijk aan $|AB| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$.

Verder vind je het midden M van lijnstuk AB door het gemiddelde van hun coördinaten te nemen. Dus $M\left(\frac{1+3}{2},\frac{2+1}{2}\right) = \left(2,1\frac{1}{2}\right)$.



Figuur 1.2

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je wat een cartesisch coördinatenstelsel is.

a Waarom is het in de meetkunde van belang dat beide assen loodrecht op elkaar staan en dezelfde schaalverdeling hebben?

b Teken de punten $A(1,3)$ en $B(4,1)$ in een cartesisch coördinatenstelsel.

c Bereken de lengte van AB.

d Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB.

Opgave 2

Gegeven zijn de punten $A(-1,3)$ en $B(1,4)$.

a Bereken de lengte van lijnstuk AB.

b Bereken de coördinaten van het midden M van AB.

Opgave 3

Gegeven de punten $A(-10,33)$ en $B(20,45)$.

a Bereken de lengte van lijnstuk AB.

b Bereken de coördinaten van het midden M van AB.

Opgave 4

Ga uit van $A(x_A,y_A)$ en $B(x_B,y_B)$.

a Bereken de lengte van lijnstuk AB.
Laat zien hoe je de coördinaten van A en B daarbij gebruikt.

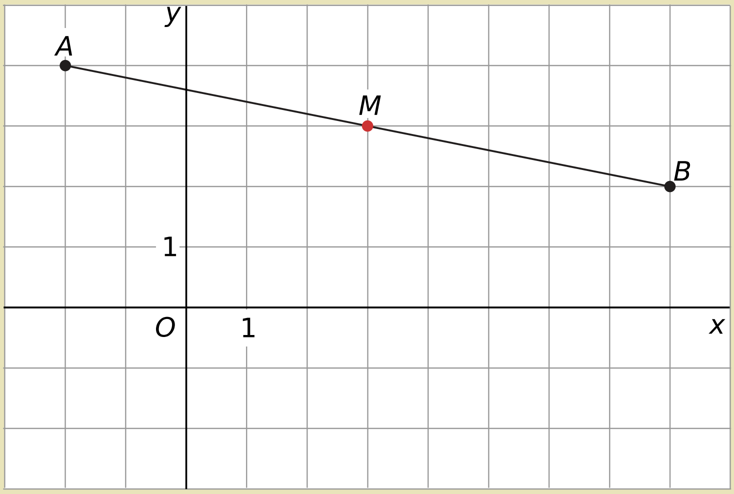
b Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB.
Laat ook nu zien hoe je daarbij de coördinaten van A en B gebruikt.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Meetkunde kun je door een slimme keuze van een assenstelsel omzetten in berekeningen met coördinaten.



Figuur 1.3

Een **cartesisch assenstelsel** is een Oxy-assenstelsel waarvan de x-as en de y-as loodrecht op elkaar staan en waarvan de assen dezelfde lineaire schaalverdeling hebben.
Een cartesisch assenstelsel zet gelijke maten (lengten, hoeken) om naar gelijke getallen en ongelijke maten naar ongelijke getallen.
Het **midden** M van lijnstuk AB kan bijvoorbeeld op deze manier worden bepaald. Als door de keuze van het cartesisch coördinatenstelsel A gelijk is aan (x_A, y_A) en B aan (x_B, y_B), geldt: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.
De **lengte van een lijnstuk** AB schrijf je als $|AB|$. Met de stelling van Pythagoras geldt in een cartesisch coördinatenstelsel:

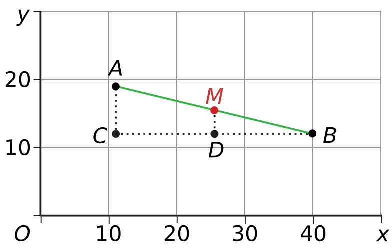
$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Je ziet de punten $A(11{,}19)$, $B(40{,}12)$ en $C(11{,}12)$.
M is het midden van lijnstuk AB en $MD//AC$.

Gebruik gelijkvormigheid en laat zien dat $x_M = 25\frac{1}{2}$ en $y_M = 15\frac{1}{2}$.
Bereken ook de coördinaten van M met de formule uit de theorie en laat zien dat je dezelfde coördinaten vindt.



Figuur 1.4

Antwoord

Bekijk de twee driehoeken CBA en DBM. De overeenkomende paren hoeken van deze driehoeken zijn even groot, dus de driehoeken zijn gelijkvormig.
Omdat $|AM| = |MB|$ geldt ook $|CD| = |DB|$.

Omdat $|CB| = 40 - 11 = 29$, is $|CD| = 14\frac{1}{2}$.

Dus is $x_M = x_A + 14\frac{1}{2} = 11 + 14\frac{1}{2} = 25\frac{1}{2}$.

Op dezelfde manier laat je zien dat $y_M = 15\frac{1}{2}$. Dus $M\left(25\frac{1}{2}, 15\frac{1}{2}\right)$.

De formule volgens de theorie geeft: $M\left(\frac{11+40}{2}, \frac{19+12}{2}\right)$ en dus $M\left(25\frac{1}{2}, 15\frac{1}{2}\right)$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**. Het midden van AB, met punten $A(11{,}19)$ en $B(40{,}12)$, is het punt $M\left(25\frac{1}{2}, 15\frac{1}{2}\right)$. Je hebt met behulp van de figuur laten zien dat $x_M = 25\frac{1}{2}$.

a Teken zelf een figuur om y_M mee uit te rekenen.

b Laat met behulp van de figuur zien dat $y_M = 15\frac{1}{2}$.

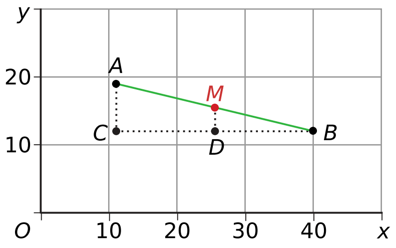
Opgave 6

Teken in een cartesisch coördinatenstelsel de punten $A(\text{-}3{,}5)$ en $B(6{,}4)$.
Bereken de coördinaten van het midden van lijnstuk AB.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Je ziet de punten $A(11,19)$ en $B(40,12)$. Bereken de lengte van AB met de formule $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. Toon aan dat je uitkomst klopt.



Figuur 1.5

Antwoord

$|AB| = \sqrt{(40-11)^2 + (12-19)^2} = \sqrt{890}$

Je kunt aantonen dat dit klopt door een rechthoekige driehoek CBA te maken en daarin de stelling van Pythagoras toe te passen.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zijn de punten $A(11,19)$ en $B(40,12)$ gegeven.

a Laat zien dat de formule voor de lengte van AB klopt in dit geval.

b Neem nu $C(-15,32)$ en $D(47,-13)$. Bereken $|CD|$ met de formule voor de lengte en laat met een tekening zien dat dit inderdaad de juiste lengte oplevert.

Opgave 8

Teken in een assenstelsel Oxy de punten $A(-3,6)$, $B(6,0)$ en $C(18,18)$.

a Bereken de lengtes van AB, BC en AC.

b Bewijs dat driehoek ABC rechthoekig is.

c Noem het midden van AB punt D, het midden van BC punt E, en het midden van AC punt F.
Bereken de coördinaten van de hoekpunten van driehoek DEF.

d Bewijs dat ook driehoek DEF rechthoekig is.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: Schatgraversprobleem.

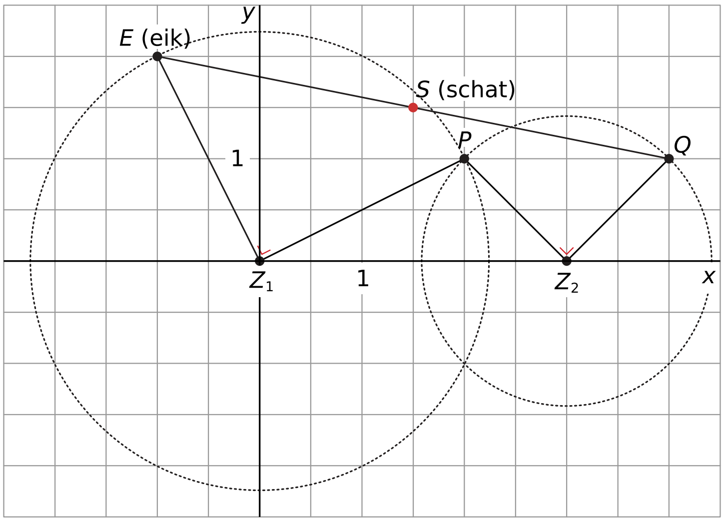
Op een eiland is een schat begraven. De volgende aanwijzingen moeten je bij de schat brengen:

“Ga in een rechte lijn van de oude eik naar de grote zwerfkei. Ga vervolgens in een lijn loodrecht op de vorige richting dezelfde afstand. Loop vanaf het punt waar je bent gekomen in een rechte lijn naar de tweede zwerfkei en vervolg je route in de richting loodrecht op het laatst gelopen stuk, even ver als dit stuk. Ga ten slotte in een rechte lijn terug naar de oude eik. Halverwege zul je de schat aantreffen.”

Er is echter een probleem: de oude eik is totaal verdwenen.

Maak eerst een schets van de situatie: Z_1 en Z_2 zijn de zwerfkeien, die punten liggen vast. De oude eik wordt zo maar ergens een punt, de rest construeer je. Bij Z_1 en Z_2 maak je rechte hoeken, de cirkels zijn nodig om gelijke afstanden op de goede plek te krijgen. Wat gebeurt er als je de oude eik verplaatst? De schat heb je gevonden, maar licht nu toe dat de positie van de oude eik onbelangrijk is.

Bekijk de figuur.



Figuur 1.6

E is variabel, Z_1 en Z_2 liggen vast. Gegeven: $|EZ_1| = |Z_1P|$ en $|PZ_2| = |Z_2Q|$ en de hoeken EZ_1P en PZ_2Q zijn recht. Toon aan dat het midden S van EQ niet van plaats kan veranderen.

Antwoord

Je ziet in de figuur de congruente (gelijke) driehoekjes: $\Delta EAZ_1 \cong \Delta Z_1BP$ en $\Delta PBZ_2 \cong \Delta Z_2CQ$.

Neem $E(\text{-}x,y)$, dan is $|EA| = y$ en $|AZ_1| = x$. En dus is ook $|Z_1B| = y$ en $|BP| = x$.

$|BZ_2| = 3–y$. Ten slotte is $|Z_2C| = |BP| = x$ en $|CQ| = |BZ_2| = 3 - y$.

De coördinaten van Q zijn daarom $(3 + x, 3 - y)$. Het midden van EQ is dus $S\left(\frac{\text{-}x+3+x}{2}, \frac{y+3-y}{2}\right)$ en dat geeft $S(1{,}5; 1{,}5)$.

Kennelijk is de plaats van S niet van x en y afhankelijk, de plek van de schat ligt vast.

Opgave 9

In de figuur in **Voorbeeld 3** heeft de positie van punt E geen invloed op de plaats van de schat, punt S.

a Neem voor de oude eik het punt $E(\text{-}1,2)$ en toon door berekening aan dat de schat (het punt S) niet verandert.

b Neem voor de oude eik het punt $E(\text{-}x,y)$ en toon zelf door berekening aan dat de schat (het punt S) niet verandert.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven zijn de punten $A(-11,23)$ en $B(106,133)$.

a Bereken $|AB|$ en het midden M van AB.

b B is het midden van lijnstuk AC. Bereken de coördinaten van C.

Opgave 11

Teken de punten $A(6,0)$, $B(10,8)$, $C(6,10)$ en $D(2,2)$ in een cartesisch coördinatenstelsel.

a Toon met een berekening aan dat vierhoek $ABCD$ een rechthoek is.

b Bepaal de coördinaten van het snijpunt S van de diagonalen van rechthoek $ABCD$.

c Bereken de oppervlakte van driehoek ABS.

Opgave 12

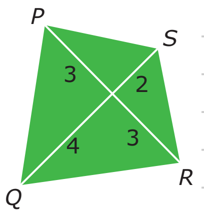
Ga uit van de vlieger $PQRS$. De middens van de zijden van deze vlieger vormen een rechthoek (zoals trouwens voor elke vlieger het geval is). Dat kun je met behulp van analytische meetkunde aantonen.

a Welke eigenschappen heeft een vlieger?

b Teken een cartesisch assenstelsel met O op het snijpunt van de diagonalen van de vlieger. De assen kies je precies langs de diagonalen. Waarom kan dat eigenlijk?

c De hoekpunten zijn $P(-3,0)$, $Q(0,-4)$, $R(3,0)$ en $S(0,2)$.
Bereken de middens A van PQ, B van QR, C van RS en D van PS.

d Toon aan dat $ABCD$ een rechthoek is.



Figuur 1.7

Opgave 13

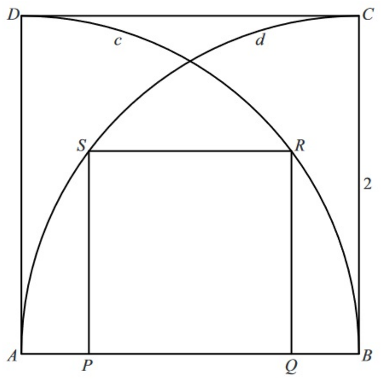
Gegeven zijn de punten $A(-2,-1)$ en $B(3,1)$.

a Bereken $|AB|$.

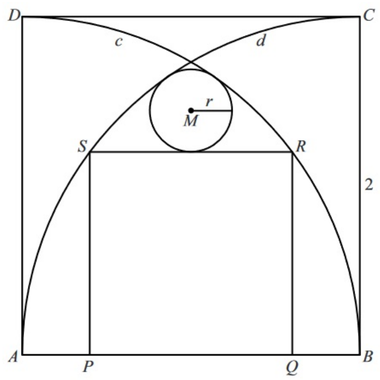
b Bepaal alle roosterpunten waarvan de afstand tot A gelijk is aan $|AB|$.

Toepassen

Opgave 14: Rakende cirkel



figuur 1



figuur 2

Figuur 1.8

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met zijde 2. Bekijk figuur 1.

In dit vierkant zijn getekend:

- de kwartcirkel c met middelpunt A en eindpunten B en D;
- de kwartcirkel d met middelpunt B en eindpunten A en C;
- het vierkant $PQRS$ met P en Q op AB, R op c en S op d.

Er geldt: $PQ = \frac{6}{5}$

a Toon dit op algebraïsche wijze aan.

b Aan figuur 2 is een cirkel met middelpunt M en straal r toegevoegd die RS en de beide kwartcirkels raakt.
Bereken exact de straal r.

(bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2013, eerste tijdvak)

Opgave 15: Schepen op zee

Twee schepen op zee varen een onderling loodrechte koers. Die twee koersen kun je aangeven met lijnen die elkaar in S snijden. Het ene schip vaart met een snelheid van 20 km/h en is nog 80 km van S verwijderd. Het andere schip vaart met 10 km/h en is nog 60 km van S af.

Hoe groot is de kleinste onderlinge afstand van beide schepen?

Testen

Opgave 16

Gegeven zijn de punten $P(-120,-35)$ en $Q(0,12)$.

a Bereken de lengte van PQ in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de afstand van het midden van PQ tot de oorsprong van het assenstelsel in twee decimalen nauwkeurig.

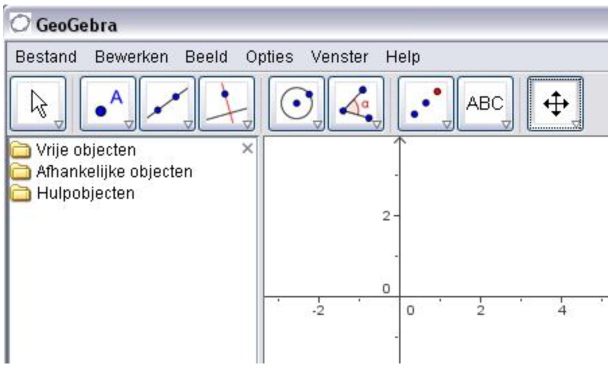
Opgave 17

Als je in een gelijkbenige driehoek ABC met twee benen AC en BC van 5 cm en $AB = 6$ cm het midden P van AC met B en het midden Q van BC met A verbindt, krijg je twee lijnstukken die elkaar snijden in punt S. Nu geldt $AS : SQ = BS : BP = 2 : 1$.

Toon dit aan met behulp van een goed gekozen assenstelsel.

Practicum: GeoGebra I

Bij vlakke meetkunde kun je **constructies uitvoeren met behulp van GeoGebra**. Je kunt dit (gratis) downloaden via **www.geogebra.org**. Installeer GeoGebra eerst of werk met de online-versie. Voor de iPad is er een GeoGebra-app.



Figuur 1.9

Met dit programma maak je constructies met behulp van de knoppen die je hier in beeld ziet. Links zie je het algebravenster met daarin alle objecten die je maakt. Rechts zie je het tekenvenster waarin je de objecten plaatst en construeert. Je kunt met of zonder rooster en/of assen werken, via het menu 'Beeld' zet je ze aan of uit.

Van elk object kun je door er met de rechter muisknop op te klikken allerlei eigenschappen aanpassen (kleur, dikte, etc.), de naam en de waarde aan/uitzetten, het object wel of niet tonen, etc. Experimenteer zelf...

Bekijk het schatgraversprobleem bij. De constructie van de applet gaat zo:

- Plaats drie punten (niet op één lijn) en noem ze E (oude eik), Z_1 en Z_2 (de zwerfkeien).
- Maak lijnstuk EZ_1.
- Maak lijn b door Z_1 en loodrecht EZ_1.
- Maak cirkel c met middelpunt Z_1 en door E.
- Maak punt P, het snijpunt van cirkel c en lijn b.
- Maak lijnstuk PZ_2.
- Maak lijn e door Z_2 en loodrecht PZ_2.
- Maak cirkel f met middelpunt Z_2 en door P.
- Maak punt Q, het snijpunt van cirkel f en lijn e.
- Maak lijnstuk QE.
- Maak punt S het midden van QE.

Als je nu E beweegt zie je dat S (de schat!!) op zijn plek blijft...

Practicum

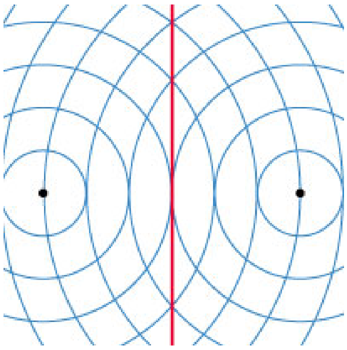
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het berekenen van het midden en de afstand tussen twee punten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.2 Lijnen

Inleiding

Ook lijnen en veel andere meetkundige vormen kun je met een cartesisch coördinatenstelsel omzetten naar formules. Descartes beschreef ze als vergelijkingen in x en y. Bijvoorbeeld $y=2x+3$. Waarschijnlijk denk je daarbij eerder aan functies en grafieken dan aan meetkunde.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- hoe je een rechte lijn kunt beschrijven met een vergelijking van de vorm $px+qy=r$ en die lijn dan kunt tekenen;
- hoe je een vergelijking van de vorm $px+qy=r$ kunt herleiden tot $y=ax+b$ en omgekeerd;
- hoe je richtingscoëfficiënt van een rechte lijn in het Oxy-vlak berekent.

Voorkennis

- werken met het begrip richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) van een rechte lijn;
- werken met cartesische coördinaten;
- middens en lengtes van lijnstukken berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.

In de applet zie je een Oxy-assenstelsel met 121 roosterpunten. Door de punten $A(1,3)$ en $B(4,2)$ is een (rechte) lijn getekend. Daarbij staat de vergelijking $x+3y=10$.

a Ga na, dat de coördinaten van A inderdaad aan deze vergelijking voldoen.

b Ga na, dat de coördinaten van B inderdaad aan deze vergelijking voldoen.

c Hoe zou je zelf een formule opstellen bij de lijn door A en B?

d Welke van deze roosterpunten liggen op de lijn met vergelijking $x+2y=6$?

e Welke van deze roosterpunten liggen op de lijn met vergelijking $x-2y=6$?

f Welke van deze roosterpunten liggen op de lijn met vergelijking $x=3$?

Uitleg

Bekijk de applet

Door twee verschillende punten in een plat vlak gaat precies één lijn. Bij een lijn hoort een formule van de vorm $y = ax + b$, waarbij a het hellingsgetal (de richtingscoëfficiënt) is en b de y-coördinaat van het snijpunt van de lijn met de y-as.

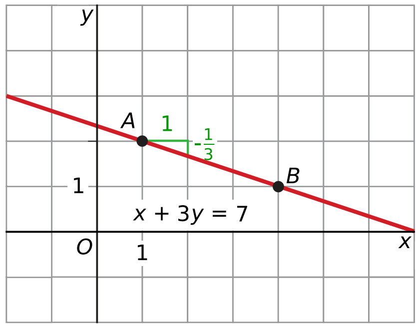
Voor de lijn door punten $A(1,2)$ en $B(4,1)$ geldt:

$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3}$

De constante b bereken je door de coördinaten van $A(1,2)$ en $B(4,1)$ in te vullen in de vergelijking $y = -\frac{1}{3}x + b$.

De formule voor de lijn wordt dan $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$.

Een verticale lijn door $A(1,2)$ en bijvoorbeeld $C(1,4)$ heeft als formule $x = 1$. Deze formule kan niet worden geschreven als $y = ax + b$, omdat in die laatste formule altijd een y voorkomt. Met formules van de vorm $px + qy = r$ kun je alle lijnen in het vlak beschrijven. Kies je namelijk $q = 0$, dan krijg je een verticale lijn.



Figuur 2.2

Opgave 1

In de **Uitleg** zijn de punten $A(1,2)$ en $B(4,1)$ gegeven.

a Laat zien dat bij de lijn door A en B de vergelijking $x + 3y = 7$ past.

b Welke richtingscoëfficiënt heeft deze lijn? En wat betekent dit getal?

Opgave 2

Laat zien dat de lijn door $A(1,2)$ en $C(1,4)$ niet de vorm $y = ax + b$ kan hebben.

Opgave 3

Laat zien dat bij de lijn door $A(1,2)$ en $C(1,4)$ de vergelijking $x = 1$ past.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

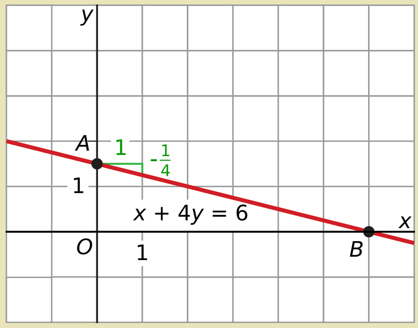
Analytische meetkunde vertaalt vormen naar vergelijkingen. Coördinaten van punten die op de vorm liggen, maken de vergelijking kloppend. Coördinaten van andere punten doen dat niet.

De vergelijking van elke **lijn** in een cartesisch assenstelsel kan worden geschreven in de vorm $px + qy = r$. Een lijn is recht en heet daarom ook 'rechte'.

Speciale gevallen zijn lijnen evenwijdig aan de assen:

- De vergelijking van een lijn evenwijdig aan de y-as is $x = \frac{r}{p}$.
  Deze ontstaat door $q = 0$ te nemen.
- De vergelijking van een lijn evenwijdig aan de x-as is $y = \frac{r}{q}$.
  Deze ontstaat door $p = 0$ te nemen.

Elke lijn die niet evenwijdig is aan de y-as heeft ook de vergelijking $y = ax+b$. In dat geval is a het **hellingsgetal** of de **richtingscoëfficiënt** van de lijn en is b de y-coördinaat van het snijpunt van de lijn met de y-as.



Figuur 2.3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Teken lijn l met vergelijking $2x + 5y = 10$.
Bereken de richtingscoëfficiënt van l.

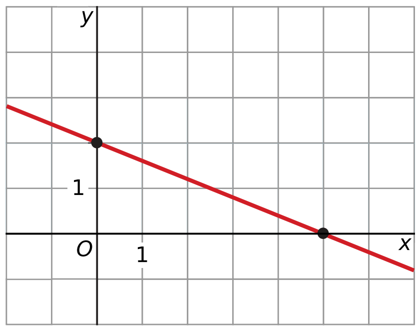
Antwoord

Bereken eerst de snijpunten van de lijn met beide assen:

- Het snijpunt met de x-as: $y = 0$ invullen, geeft $2x = 10$ en dus $x = 5$.
  Het snijpunt met de x-as is dus $(5,0)$.
- Het snijpunt met de y-as: $x = 0$ invullen, geeft $5y = 10$ en dus $y = 2$.
  Het snijpunt met de y-as is dus $(0,2)$ op.

Teken de lijn door deze punten.

De vergelijking $2x + 5y = 10$ kun je herleiden tot: $y = -0{,}4x + 2$. De richtingscoëfficiënt is dus $-0{,}4$. Je kunt ook de punten $(5,0)$ en $(0,2)$ tekenen in een cartesisch assenstelsel en deze twee punten verbinden met een rechte lijn.



Figuur 2.4

Opgave 4

Waarom beschrijven de volgende vergelijkingen dezelfde lijn?

- $2x + 4y = 12$
- $x + 2y = 6$
- $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Opgave 5

Bekijk de algemene vergelijking van een lijn $l : px + qy = r$.

a Hoe loopt deze lijn als $p = 0$?

b Hoe loopt deze lijn als $q = 0$?

c Welke richtingscoëfficiënt hoort bij l als $q = 0$?

d Welke richtingscoëfficiënt heeft l als $p = q$?

e Wat is er met l aan de hand als $r = 0$?

Opgave 6

Bepaal indien mogelijk de richtingscoëfficiënt van de lijn.

a $6x - 2y = 13$

b $2x = 7$

c $15 - 2y = 3x$

d $2(x + 2y) = 5$

e $y = -5$

f $6(y - 1) - 2(3 - x) = x + y - 4$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

De lijn l gaat door de punten $P(1,3)$ en $Q(5,2)$. Stel exact vergelijkingen op voor l van de vormen $y = ax + b$ en $px + qy = r$. Bepaal ook de snijpunten van l met de assen.

Antwoord

Gebruik de vorm $y = ax + b$ omdat de lijn niet evenwijdig is aan de y-as.
Het hellingsgetal is $a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{2-3}{5-1} = -\frac{1}{4}$.

Dit geeft $y = -\frac{1}{4}x + b$.

$P(1,3)$ ligt op l. Dit invullen geeft $3 = -\frac{1}{4} \cdot 1 + b$ en dus $b = 3\frac{1}{4}$.

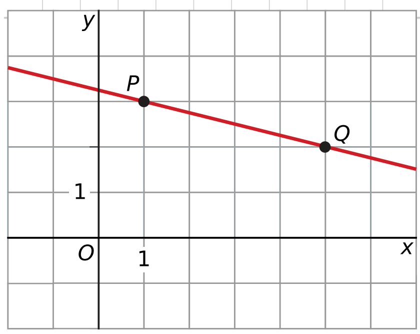
Een vergelijking van l in de vorm $y = ax + b$ wordt dan:

$y = -\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4}$.

Herleid deze vergelijking tot de vorm $px + qy = c$:

$$\begin{aligned} y &= -\tfrac{1}{4}x + 3\tfrac{1}{4} \\ 4y &= -x + 13 \\ x + 4y &= 13 \end{aligned}$$

Een vergelijking van l in de vorm $px + qy = r$ wordt dan $x + 4y = 13$.



Figuur 2.5

Het snijpunt met de y-as: $x = 0$ invullen in één van de vergelijkingen geeft $\left(0,3\frac{1}{4}\right)$.
Het snijpunt met de x-as: $y = 0$ invullen in één van de vergelijkingen geeft $(13,0)$.

Opmerking: ga na welke vergelijking je hiervoor het best kunt gebruiken.

Opgave 7

Stel exact vergelijkingen op van de vormen $y = ax + b$ en $px+qy = r$ van de lijn l die door de punten $R(-22,-35)$ en $S(12,25)$ gaat.
Bereken de richtingscoëfficiënt van deze lijn en de snijpunten met de assen.

Opgave 8

Stel exact vergelijkingen op van de vormen $y = ax + b$ en $px + qy = r$ van de lijn l die door het punt $T(38,-15)$ gaat en een richtingscoëfficiënt van -12 heeft.
Bereken de snijpunten van deze lijn met beide assen.

Opgave 9

Lijn l is gegeven door $y = 2x + 1$. Een andere lijn m is evenwijdig met l en gaat door het punt $P(0,10)$ en kan geschreven worden in de vorm $px + qy = r$.

Bereken drie bij elkaar horende waarden van p, q en r voor lijn m.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven zijn de lijnen $x + y = 6$, $y = 2x$, $x - 2y = 4$ en $x = 5$.

a Teken deze vier lijnen in een cartesisch assenstelsel.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt dat het dichtst bij de oorsprong ligt.

Opgave 11

Gegeven zijn de volgende lijnen:
$l : 7x + 2y = 14$
$m : -5x = 12$
$n : 14x = 28 - 4y$
$p : 7x + 2y = 15$
$q : 3y = 15 - 7x$
$r : y = -3\frac{1}{2}x + 3$

a Welke lijnen zijn evenwijdig?

b Welke vergelijkingen horen bij dezelfde lijn?

c Welke vergelijkingen horen bij een roosterlijn?

Opgave 12

In een cartesisch assenstelsel Oxy zijn gegeven de punten $A(2,0)$, $B(7,3)$ en $C(0,5)$.

a Stel exact een vergelijking op van de lijn l door A en B van de vorm $ax + by = c$.

b Geef een vergelijking van de vorm $ax + by = c$ van de lijn door C die evenwijdig is met l.

Opgave 13

Gegeven is de lijn l met vergelijking $x - 2y = 6$.

a Bepaal de vergelijking van de lijn die ontstaat door l te spiegelen in de x-as.

b Bepaal de vergelijking van de lijn die ontstaat door l te spiegelen in de y-as.

c Bepaal de vergelijking van de lijn die ontstaat door l te spiegelen in de lijn $y = x$.

Opgave 14

Gegeven zijn twee lijnen in het cartesisch assenstelsel: $k : 3x + 2y = 6$ en $l : 2x - y + 7 = 0$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van lijn l met de assen.

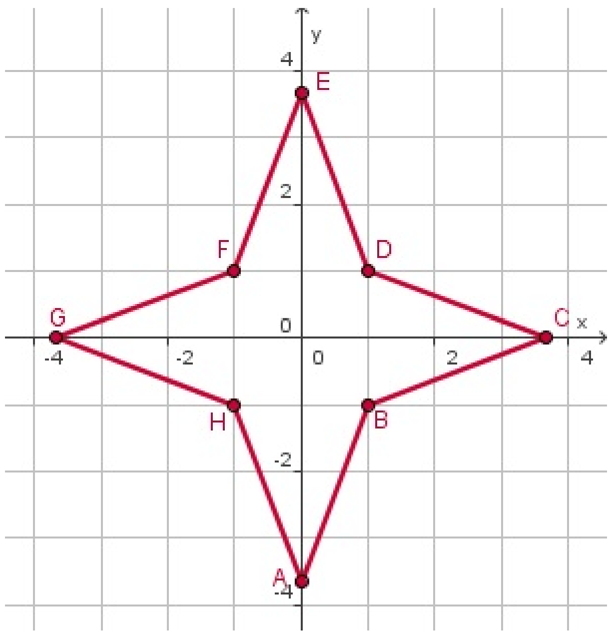
b Lijn m is evenwijdig met k en gaat door het punt $(0,10)$. Stel een vergelijking op van m in de vorm $ax + by = c$.

c Bereken het snijpunt van lijn m en l.

Toepassen

Opgave 15: Symmetrische ster

Bekijk de symmetrische ster die bestaat uit acht even grote lijnstukken. Hij is getekend in GeoGebra. Een van die lijnstukken ligt op de lijn met vergelijking $3x + y = 4$.



Figuur 2.6

a Stel vergelijkingen op van de lijnen waarop de andere zeven lijnstukken liggen.

b Bereken de totale omtrek en de totale oppervlakte van de ster. Rond af op twee decimalen.

Opgave 16: Loodrechte stand

Gegeven is de lijn $l : y = nx$, waarbij n een willekeurige constante is. Geef een vergelijking van de lijnen die loodrecht op l staan.

Testen

Opgave 17

De lijn l gaat door $A(-10{,}45)$ en $B(15,-5)$.

a Stel een vergelijking op van l van de vorm $ax + by = c$.

b Bereken de richtingscoëfficiënt van deze lijn en de snijpunten met de assen.

Opgave 18

Gegeven is de lijn $l : 4x - 5y = 20$.

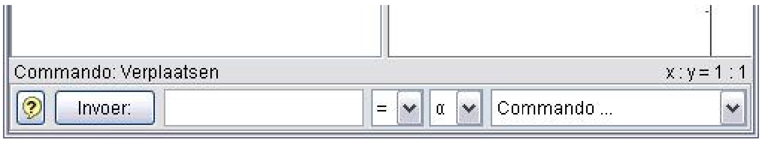
a Stel een vergelijking op van de lijn door $P(3{,}2)$ die evenwijdig is met l.

b Stel een vergelijking op van de lijn m die ontstaat door l te spiegelen in de x-as.

c Stel een vergelijking op van de lijn n die ontstaat door l te spiegelen in de lijn $y = x$.

Practicum: GeoGebra II

In GeoGebra kun je eenvoudig **vergelijkingen invoeren**. Dat doe je in de invoerbalk onderaan het venster. Je typt de formule gewoon in het vak achter de knop invoer en [ENTER]. Het sterretje * is het vermenigvuldigingsteken. De lijnen die je in dit onderdeel tegenkomt kun je zelf eenvoudig maken, gebruik eventueel de helpfunctie via het menu ‘Help’; hij is vrij duidelijk en uitgebreid.



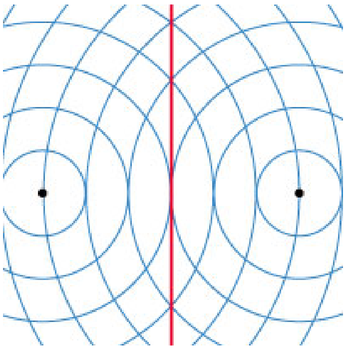
Figuur 2.7

Een vergelijking met **parameters** kan ook. Je voert dan eerst een waarde voor de parameter in, bijvoorbeeld $a = 2$ en dan $b = 1$ en $c = 6$. Vervolgens voer je een vergelijking in x en y in waar deze parameters in voorkomen, bijvoorbeeld $a \cdot x + b \cdot y = c$. Je kunt de parameters als schuifbalkjes zichtbaar maken door in het algebravenster met de rechter muisknop op de parameter te klikken en ‘object tonen’ te kiezen.

2.3 Cirkels

Inleiding

Je kunt lijnen nu vertalen naar vergelijkingen. Maar andere vormen zoals cirkels, parabolen en andere gebogen figuren (krommen genoemd) kunnen ook worden vertaald naar vergelijkingen.



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- hoe je een cirkel kunt beschrijven met een vergelijking in x en y;
- berekenen of punten op, binnen of buiten een gegeven cirkel liggen;
- bij een gegeven cirkelvergelijking de cirkel tekenen.

Voorkennis

- werken met cartesische coördinaten, afstanden berekenen en vergelijkingen van lijnen;
- kwadraat afsplitsen.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt al kennis gemaakt met vergelijkingen van lijnen. Je weet dat die de vorm $ax + by = c$ hebben. Hoe ziet de verzameling van alle punten $P(x, y)$ er uit als ze voldoen aan de volgende vergelijking?

a $y = 2x + 6$

b $x^2 + y^2 = 25$

c $x^2 = 4$

d $y = 25 - x^2$

Uitleg

Bekijk de applet

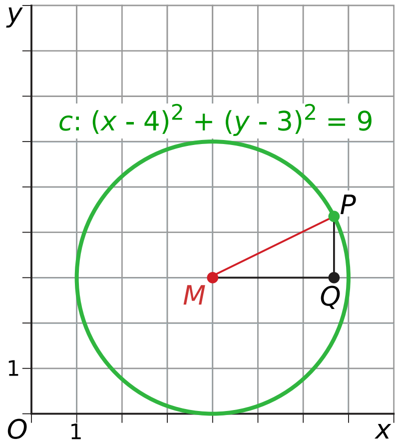
Een cirkel in de meetkunde bestaat uit alle punten die even ver van het middelpunt liggen. Je ziet cirkel c met middelpunt $M(4,3)$ en straal 3 in een coördinatenstelsel. Het bijzondere van alle punten op deze cirkel is, dat ze op afstand 3 van M liggen. Punten die niet op de cirkel liggen, hebben een andere afstand tot M.

Voor alle punten P op de cirkel geldt dus $|MP| = 3$.

$|MP|$ kun je in een coördinatenstelsel met de stelling van Pythagoras berekenen: $|MQ|^2 + |QP|^2 = |MP|^2$
Noem nu de coördinaten van $P(x,y)$. Bekijk de figuur en controleer dat, afhankelijk van de plek van P op de cirkel, geldt:

- $|MQ| = x - 4$ of $|MQ| = 4 - x$
- $|QP| = y - 3$ of $|QP| = 3 - y$

Een vergelijking van een cirkel met $M(4,3)$ en straal 3 ontstaat door dit in de stelling van Pythagoras in te vullen: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3^2$.



Figuur 3.2

Opgave 1

Gegeven is de volgende formule voor een cirkel: $(x-4)^2+(y-3)^2 = 9$.

a Controleer of de punten $(1,3)$, $(4,0)$, $(7,3)$ en $(4,6)$ inderdaad voldoen aan de formule voor de cirkel.

b Hoe kun je nagaan of het punt $(6,5;1)$ binnen of buiten de gegeven cirkel ligt? (Denk er aan, dat alleen tekenen geen bewijs is!)

c Experimenteer met de applet. Pas de straal van de cirkel aan en verplaats het middelpunt. Bekijk hoe de vergelijking verandert.

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je hoe de vergelijking van een cirkel er uitziet bij een gegeven middelpunt en straal.

a Stel een formule op bij een cirkel met middelpunt $M(0,0)$ en straal 5.

b Welke vergelijking hoort bij een cirkel met middelpunt $M(3,1)$ en straal 2?

c Welk middelpunt en welke straal heeft een cirkel met vergelijking $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 15$?

Iemand heeft bij de vergelijking van een cirkel de haakjes weggewerkt en $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ gekregen.

d Hoe kun je vanuit deze vergelijking middelpunt en straal van de cirkel bepalen?

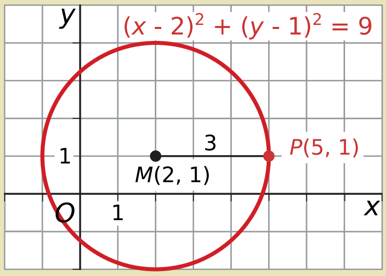
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

De **vergelijking van een cirkel** in een cartesisch Oxy-assenstelsel met middelpunt $M(a,b)$ en straal r is $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Door haakjes wegwerken kun je zo'n vergelijking ook de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + c = 0$ geven. Het is dan echter lastiger om middelpunt en straal van de cirkel terug te vinden. Daarvoor moet je kwadraat afsplitsen.

Als een vergelijking in x en y niet in een van deze vormen te schrijven is, dan beschrijft de vergelijking geen cirkel. Kan dat wel, dan krijg je alleen een cirkel als $r^2 > 0$.



Figuur 3.3

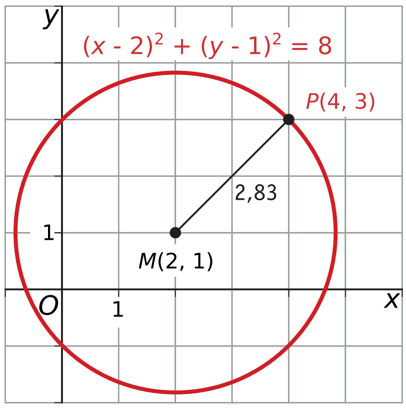
Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Teken in een cartesisch Oxy-assenstelsel de cirkel met vergelijking $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$.

Antwoord

Het middelpunt van de cirkel lees je uit de vergelijking af: $M(2,1)$. Voor de straal r geldt: $r^2 = 8$ en dus $r = \sqrt{8} \approx 2{,}83$. Je kunt roosterpunten op de cirkel vinden door in te zien dat $\sqrt{8} = \sqrt{4+4} = \sqrt{2^2+2^2}$. Alle punten die 2 rechts of links van M en tegelijk 2 onder of boven M liggen, zijn roosterpunten van de cirkel. Bijvoorbeeld $(2+2, 1+2) = (4,3)$. Dit kun je gebruiken om de cirkel nauwkeurig te tekenen.



Figuur 3.4

Opgave 3

Bepaal alle roosterpunten op de cirkel $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$.

Opgave 4

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de cirkel met vergelijking $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$. Bepaal alle roosterpunten op deze cirkel.

Opgave 5

Waarom liggen op de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 7$ geen roosterpunten?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(-1,3)$ die gaat door het punt $P(1,2)$.

Antwoord

De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(a,b)$ en straal r is: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
Omdat $M(-1,3)$, wordt dit: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = r^2$.
P invullen geeft: $(1+1)^2 + (2-3)^2 = r^2$. Dus $r^2 = 5$.
De gevraagde vergelijking wordt $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

Opgave 6

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(3,4)$ die gaat door punt $P(-1,7)$. Laat met een berekening zien dat deze cirkel ook door $O(0,0)$ gaat.

Voorbeeld 3

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$.

Antwoord

Het is niet eenvoudig om het middelpunt en de straal uit de gegeven vergelijking af te lezen. Je kunt beter de vergelijking herleiden met behulp van kwadraat afsplitsen. Omdat $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$ en $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$ kun je de gegeven vergelijking schrijven als:
$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 2 = (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 2 = 0$

En dit geeft:
$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 11$

De cirkel heeft dus middelpunt $M(3,-2)$ en straal $\sqrt{11} \approx 3{,}32$.

Om hem te tekenen zet je eerst M in het assenstelsel. En vervolgens maak je met de passer een cirkel met M als middelpunt en straal ongeveer $3{,}3$ eenheden. Er liggen geen roosterpunten op deze cirkel.

Opgave 7

Door kwadraat afsplitsen kun je een cirkelvergelijking in een vorm brengen waarin je middelpunt en straal kunt aflezen.

Bepaal middelpunt en straal van de cirkel c met vergelijking: $x^2 + y^2 + 10x - 12y = 0$.

Opgave 8

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$. Schrijf de vergelijking van c in de vorm $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Geef het middelpunt en de straal van deze cirkel.

Opgave 9

Gegeven is de vergelijking van cirkel $c : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ en die van cirkel $d : x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$. Toon aan dat deze twee cirkels over elkaar heen vallen als je ze in een cartesisch assenstelsel tekent.

Opgave 10

Niet altijd levert een vergelijking van de vorm $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ook echt een cirkel op. Je ziet of dit het geval is als je middelpunt en straal probeert te bepalen door kwadraat afsplitsen.

a Ga na dat de vergelijking $x^2 + y^2 + 8x + 4y = 0$ een cirkel oplevert.

b Ga na dat de vergelijking $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 30 = 0$ geen cirkel oplevert.

c Wat voor figuur hoort er bij de vergelijking $x^2+y^2+8x+4y+20=0$?

Verwerken

Opgave 11

In een cartesisch assenstelsel Oxy zijn de punten $A(2,0)$, $B(7,3)$ en $C(0,5)$ gegeven.

a Stel een vergelijking op van de cirkel door C met middelpunt A.

b Stel een vergelijking op van de cirkel door B en C waarvan het middelpunt op de lijn BC ligt. Onderzoek of deze cirkel ook door A gaat.

Opgave 12

Onderzoek of de vergelijkingen bij een cirkel horen. Bereken in dat geval het middelpunt en de straal van die cirkel.

a $x^2 + y^2 - 8x - 12y = 0$

b $x^2 + y^2 = 5x$

c $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 52 = 0$

d $x^2 - 2x + 10y + 52 = 0$

Opgave 13

Gegeven zijn de punten $P(0,4)$ en $Q(4,0)$ in een cartesisch assenstelsel Oxy.

a Welk middelpunt heeft de cirkel die door O, P en Q gaat?

b Stel een vergelijking van deze cirkel op.

Opgave 14

De lijn met vergelijking $2x + 3y = 6$ heeft twee snijpunten met de assen, de punten A en B. Er is een cirkel door deze twee punten waarvan het middelpunt het midden van lijnstuk AB is. Stel een vergelijking van deze cirkel op.

Opgave 15

Gegeven is de vergelijking van een cirkel $c_1 : x^2 + y^2 + px + 12 = 0$.

Voor welke waarde van p is c_1 een cirkel met een straal groter dan 3?

Opgave 16

Gegeven zijn de punten $A(0,0)$ en $B(6,0)$.

Stel de vergelijking op van de cirkel c door A en B met $r = 5$.

Toepassen

Opgave 17: Een ontdekking van Thales

Door de drie hoekpunten van een rechthoekige driehoek kun je altijd een cirkel tekenen waarvan het middelpunt op de schuine zijde ligt. Een van de eersten die dit opmerkte, was Thales van Milete (omstreeks 600 v.Chr.).

a Toon aan dat dit voor elke rechthoekige driehoek geldt.

Neem een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van a cm en b cm. Kies een cartesisch assenstelsel Oxy zo, dat O het hoekpunt met de rechte hoek is en de rechthoekszijden langs de assen liggen.

b Stel de vergelijking op van de cirkel die de genoemde eigenschap heeft.

Opgave 18: Een parabool

Een parabool bestaat uit punten $P(x,y)$ die een gelijke afstand hebben tot een gegeven punt en een lijn, bijvoorbeeld $F(0,2)$ en de x-as. De afstand tot de x-as is de y-waarde van P en de afstand tot punt F kun je berekenen met de afstandsformule.

a Laat zien dat de parabool kan worden beschreven door $4y = x^2 + 4$.

b Schrijf je de vergelijking van de parabool in de vorm $y = ...$, dan kun je hem in de grafische rekenmachine invoeren. Laat zien dat je een grafiek krijgt die de vorm van een parabool heeft.

c Welke vergelijking hoort bij een parabool waarvan alle punten gelijke afstand hebben tot brandpunt $B(2,0)$ en de y-as?

d Wat gebeurt er met de parabool als je in de vergelijking x en y omwisselt?

Testen

Opgave 19

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 13$.

a Bepaal middelpunt en straal van deze cirkel.

b Toon aan dat $A(5,1)$ op deze cirkel ligt.

c Toon aan dat $B(1,3)$ buiten cirkel c ligt.

Opgave 20

Bepaal het middelpunt en de straal van de cirkel c die is gegeven door $x^2 + y^2 - 6x + 5y = 0$.

Opgave 21

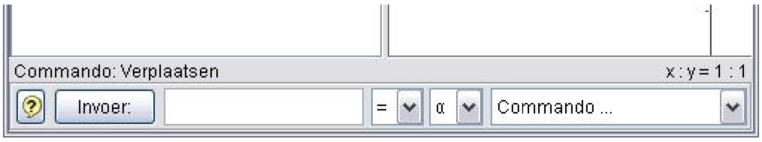
Stel een vergelijking op van de cirkel door de punten $A(1,0)$ en $B(5,0)$ waarvan het middelpunt op de lijn $y = 4$ ligt. Bepaal alle roosterpunten op deze cirkel.

Practicum: GeoGebra III

Je hebt nu hopelijk een aantal keren met GeoGebra gewerkt (loop anders GeoGebra I en II nog een keer door).

In GeoGebra kun je ook **cirkelvergelijkingen invoeren**. Dat doe je in de invoerbalk onderaan het venster. Je typt de formule gewoon in het vak achter de knop invoer en [ENTER].

Zo'n cirkelvergelijking kan de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, maar ook de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + c = 0$. Je kunt door met de rechter muisknop op de cirkel of de bijbehorende formule te klikken de vorm ervan aanpassen. Hiermee kun je de vergelijking van de éne vorm naar de andere overzetten.



Figuur 3.5

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het berekenen van het middelpunt en de straal van een gegeven cirkel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier. Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.4 Snijden en raken

Inleiding

Stel je een uitgestrekt en nogal leeg gebied voor met daarin een rechte weg. Je wilt telefoneren want je weet niet of je de goede kant op rijdt. Maar telefoonmasten hebben een beperkt bereik, bij T staat er één met een bereik van 30 km. Tussen welke punten op de weg kun je bellen? Het gaat dus om de snijpunten van een lijn en een cirkel. Bij het berekenen van snijpunten kun je de analytische aanpak van meetkundige problemen goed gebruiken.

Je leert in dit onderwerp

- het snijpunt berekenen van twee lijnen;
- snijpunten berekenen van een lijn en een cirkel;
- snijpunten berekenen van twee cirkels;
- vast te stellen wanneer een lijn een cirkel raakt.

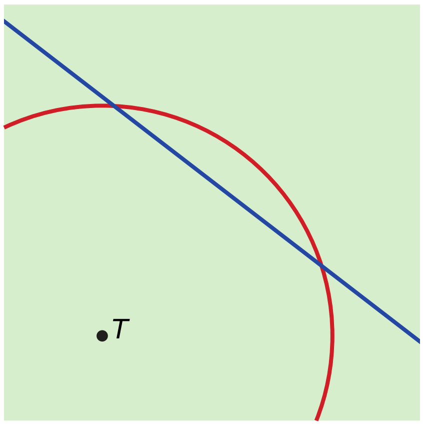
Voorkennis

- werken met vergelijkingen van (rechte en kromme) lijnen in het platte vlak;
- systematisch lineaire en kwadratische vergelijkingen oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Stel je een uitgestrekt en nogal leeg gebied voor met daarin een rechte weg. Je wilt telefoneren want je weet niet of je de goede kant op rijdt. Maar telefoonmasten hebben een beperkt bereik, bij T staat er één met een bereik van 50 km. Tussen welke punten op de weg kun je bellen? Het gaat dus om de snijpunten van een lijn en een cirkel. Bij het berekenen van snijpunten kun je de analytische aanpak van meetkundige problemen goed gebruiken.



Figuur 4.1

Kies het assenstelsel en de eenheden zo dat de cirkel als middelpunt $O(0,0)$ en een straal van 5 cm heeft. Stel dat de lijn door $(0,5)$ en $(10,0)$ gaat.

a Welke vergelijkingen kun je voor de lijn en de cirkel dan opstellen?

b Bepaal de snijpunten van de lijn en de cirkel en bereken de afstand tussen beide punten.

c Hoeveel km op deze weg heb je bereik?

Uitleg 1

Stel je wilt het snijpunt van de lijnen $l : x + 2y = 8$ en $m : 3x - 4y = 12$ berekenen. Daarvoor bestaan meerdere methodes:

- Methode I: je kunt beide vergelijkingen herschrijven naar de vorm $y = ...$ Je kunt dan beide uitdrukkingen in x gelijkstellen en de vergelijking die ontstaat, oplossen.
- Methode II (substitutiemethode): je schrijft een van beide vergelijkingen in de vorm $x = ...$ of $y = ...$ Hier lukt dat gemakkelijk met $l : x = 8 - 2y$. Dit vul je in de andere vergelijking in: $3(8 - 2y) - 4y = 12$. En hieruit bepaal je de y-waarde van het snijpunt en vervolgens de x-waarde.
- Methode III (balansmethode): je kunt ook beide vergelijkingen optellen of aftrekken links en rechts van het isgelijkteken. Maar daar heb je alleen wat aan als of de x of de y als variabele wegvalt.

  $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$ wordt $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$

  Tel je nu beide vergelijkingen links en rechts van het isgelijkteken op, dan krijg je: $5x = 28$ en dus $x = 5{,}6$. De bijbehorende y-waarde vind je uit $5{,}6 + 2y = 6$.

Dit zijn drie methodes om een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden op te lossen.

Opgave 1

Bestudeer **Uitleg 1**. Het is nuttig om alle drie de oplossingsmethoden om het snijpunt van lijnen te berekenen goed te beheersen. Soms is de éne, dan weer de andere handiger.

a Bereken het snijpunt van de lijnen l en m door beide vergelijkingen om te schrijven naar de vorm $y = ...$ Doe dit algebraïsch.

b Bereken het snijpunt van l en m ook door middel van substitutie.

c En werk ten slotte de balansmethode nog een keer door.

Opgave 2

Bereken het snijpunt van l en m in de volgende gevallen.

a $l : 2x - 3y = 6$ en $m : x + 4y = 10$

b $l : 4x + 12 = 0$ en $m : 5x + 2y = 20$

Opgave 3

Welke van de drie methodes werkt het beste als je het snijpunt van de lijnen $p : 5x - 3y = 15$ en $q : 2x - 6y = 11$ wilt berekenen? Bereken dit snijpunt.

Opgave 4

Bereken het snijpunt van $l : 2x + 3y = 6$ en $m : y = 4 - \frac{2}{3}x$. Wat gaat er mis? Licht je antwoord toe.

Opgave 5

Het snijpunt van twee lijnen bereken je door het stelsel lineaire vergelijkingen op te lossen.

a Hoeveel oplossingen kan een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden hebben? Schrijf alle mogelijke situaties op.

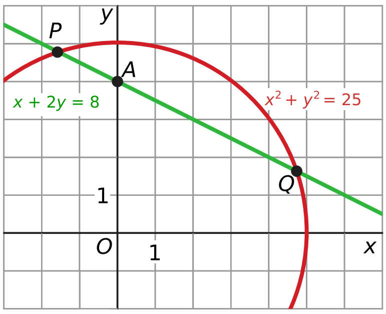
b Hoeveel snijpunten hebben de lijnen $x + 2y = 6$ en $2x + 4y = 10$?

c Hoeveel snijpunten hebben de lijnen $x + 2y = 6$ en $2x + 4y = 12$?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je ziet een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en een straal van 5 en een lijn door $(0,4)$ en $(8,0)$. Om de snijpunten P en Q van beide te berekenen, stel je eerst de vergelijkingen van de lijn en de cirkel op:



Figuur 4.2

- cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$
- rechte $l : x + 2y = 8$

Dit stelsel los je op met de substitutiemethode. Vul $x = -2y + 8$ in de cirkelvergelijking in: $(-2y + 8)^2 + y^2 = 25$. Haakjes wegwerken geeft:
$5y^2 - 32y + 39 = 0$

Oplossingen: $y \approx 1{,}64 \vee y \approx 4{,}76$ (met de abc-formule of de grafische rekenmachine, afgerond op twee decimalen).

De snijpunten zijn: $P(-1{,}52; 4{,}76)$ en $Q(4{,}72; 1{,}64)$.

Opgave 6

Bereken de snijpunten van de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$ en de lijn $m : 2x - y = 4$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 7

Hoeveel gemeenschappelijke punten kunnen een lijn en een cirkel hebben?

Opgave 8

Bereken het snijpunt van $k : y = -0{,}75x + 6{,}25$ en de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **snijpunten** van twee lijnen, een lijn en een cirkel, of twee cirkels, zijn de punten die op beide lijnen en/of cirkels liggen. Je berekent ze door het bijbehorende **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** op te lossen:

- Het snijpunt van twee rechte lijnen kun je berekenen door een van beide lijnen te herleiden tot de vorm $x = ...$ of $y = ...$ Je vult dan de gevonden uitdrukking in de andere vergelijking in. Maar soms helpt de balansmethode beter: je telt dan de linkerzijden en de rechterzijden van beide vergelijkingen bij elkaar op of trekt ze van elkaar af, waarbij je ervoor zorgt dat een van de variabelen wegvalt.
- De snijpunten van een rechte lijn met een cirkel kun je berekenen door de vergelijking van de lijn te herleiden tot de vorm $x = ...$ of $y = ...$ Je substitueert dan de gevonden uitdrukking in de vergelijking van de cirkel.
- De snijpunten van twee cirkels bereken je door in beide vergelijkingen de haakjes weg te werken en dan met behulp van de balansmethode alle kwadraten weg te laten vallen. Je houdt dan een lineair verband over in de vorm $x = ...$ of $y = ...$ dat je in een van beide cirkelvergelijkingen invult.

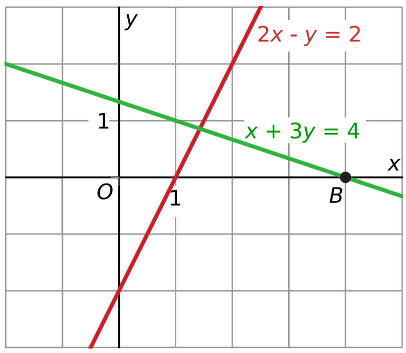
Zijn er geen oplossingen, dan spreek je van een **strijdig stelsel**. Je hebt dan bijvoorbeeld te maken met twee evenwijdige rechte lijnen of twee cirkels die elkaar niet snijden.
Beschrijven de twee vergelijkingen dezelfde lijn of dezelfde cirkel, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen. Je noemt dat een **afhankelijk stelsel**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet de twee rechten $l: 2x - y = 2$ en $m: x + 3y = 4$.
Bereken hun snijpunt.

m is een rechte uit de familie $m_p: x + py = 4$. Door parameter p te variëren, kun je ervoor zorgen dat l en m_p geen snijpunt hebben. Voor welke waarde van p is dit het geval?



Figuur 4.3

Antwoord

Schrijf de vergelijking van l als $y = 2x - 2$. Vul dit in de vergelijking van m in: $x + 3(2x - 2) = 4$. Dit geeft $x = \frac{10}{7}$ en $y = 2 \cdot \frac{10}{7} - 2 = \frac{6}{7}$.

Het snijpunt is $\left(\frac{10}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

Nu wil je p berekenen als l en m_p geen snijpunt hebben. Weer schrijf je de vergelijking van l als $y = 2x - 2$.
Vul dit in de vergelijking van m_p in: $x + p(2x - 2) = 4$.

Dit geeft: $(1+2p)x = 4+2p$. Deze laatste vergelijking heeft geen oplossingen als $1+2p = 0$.
Dus alleen voor $p = -0{,}5$ hebben l en m_p geen snijpunt.

Een andere methode is de volgende: schrijf beide vergelijkingen van de lijnen in de vorm $y = ...$. Je krijgt $l : y = 2x - 2$ en $m_p : y = -\frac{1}{p}x + \frac{4}{p}$.
De lijnen snijden elkaar niet als ze evenwijdig lopen: de richtingscoëfficiënten moeten dus hetzelfde zijn. Er moet dan gelden $2 = -\frac{1}{p}$ en dit geeft $p = -0{,}5$.

Opgave 9

Het snijpunt van $l : 2x - y = 2$ en $m : x + 3y = 4$ kan je berekenen met substitutie.
Daarbij wordt de vergelijking van l herschreven naar $y = ...$, en ingevuld in m. Voer deze berekening nog eens uit, maar nu door de vergelijking van m te herschrijven en dan in te vullen.

Opgave 10

Bereken het snijpunt van l en m ook met de balansmethode.

Opgave 11

Bereken het snijpunt van l en m.

a $l : 2x - 3y = 6$ en $m : x + 4y = 10$

b $l : 4y = -12$ en $m : 5x + 2y = 20$

c $l : 2x - 3y = 6$ en $m : y = 4 - \frac{2}{3}x$

Opgave 12

$l : 2x - y = 2$ en $m_p : x + py = 4$.

a Bereken voor welke p de lijnen l en m evenwijdig lopen.

b Gegeven zijn de lijnen $l : x + 5y = 12$ en $m_p : px - y = 4$. Voor welke waarde van p hebben deze lijnen geen snijpunt?

Voorbeeld 2

Bereken de snijpunten van de twee cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 25$ en $c_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$.

Antwoord

Het beste kun je nu in de vergelijking van c_2 de haakjes wegwerken:
$x^2 + y^2 - 4x - 6y = -4$

Vervolgens pas je de balansmethode toe op het stelsel:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y = -4 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Je ziet dat er door links en rechts van het isgelijkteken van elkaar af te trekken een lineaire uitdrukking overblijft: $-4x - 6y = -29$ ofwel: $x = -1{,}5y + 7{,}25$

Dit vul je in een van beide cirkelvergelijkingen in:
$(-1{,}5y + 7{,}25)^2 + y^2 = 25$

Hieruit bereken je de twee x-waarden van de snijpunten.
De twee y-waarden vind je dan weer met $x = -1{,}5y + 7{,}25$.

Opgave 13

Bereken de snijpunten van de twee cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 25$ en $c_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$. Rond af op één decimaal.

Opgave 14

Bereken de snijpunten van cirkel $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$

a met de x-as.

b met de y-as.

c met de lijn $k : x + y = 1$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 15

Gegeven zijn de cirkels $c_1 : x^2 + (y-2)^2 = 9$ en $c_2 : (x-2)^2 + y^2 = 9$. De lijn l gaat door de middelpunten van beide cirkels.

a Bereken de snijpunten van c_1 en c_2 in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de snijpunten van c_1 met de beide coördinaatassen.

c Bereken de snijpunten van c_1 en l in twee decimalen nauwkeurig.

d Lijn l heeft in totaal vier snijpunten met beide cirkels. Hoeveel bedraagt de grootste afstand tussen twee van die snijpunten in één decimaal nauwkeurig?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Gegeven zijn de cirkel $c : x^2 + y^2 = 4$ en de lijn $l_p : x + py = 4$.

Voor welke waarden van p raakt de lijn l_p de cirkel c?

Antwoord

Schrijf de vergelijking van de lijn als $x = 4 - py$. Substitueer dit voor de x in de cirkelvergelijking: $(4 - py)^2 + y^2 = 4$

Haakjes wegwerken: $\left(1 + p^2\right)y^2 - 8py + 12 = 0$

Een dergelijke vergelijking los je op met de abc-formule. Je vindt dan slechts één antwoord als de discriminant 0 is. Hier betekent dit, dat: $(8p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot \left(1 + p^2\right) = 0$. Ga na dat daaruit volgt: $p^2 = 3$. Je vindt dus twee waarden van p waarbij de lijn slechts één punt met de cirkel gemeen heeft en dus een raaklijn aan de cirkel is, namelijk: $p = \sqrt{3}$ en $p = -\sqrt{3}$.

Opgave 16

Gegeven is de cirkel $c : x^2 + y^2 = 4$ en de lijn $l_p : x + py = 4$.

a Voor welke waarde van p raakt de lijn l_p de cirkel c?

Lijnen door $(0,3)$ hebben als vergelijking $y = ax + 3$.

b Voor welke waarden van a raken deze lijnen de cirkel $c : x^2 + y^2 = 4$?

Opgave 17

Gegeven is de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$ en de lijn $m : y = 4x + p$.

Bereken voor welke waarden van p lijn m cirkel c raakt.

Verwerken

Opgave 18

Bereken de snijpunten. Rond af op twee decimalen.

a lijn $l : x + y = 6$ en cirkel $c_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$.

b lijn $m : 5x - 2y = 10$ en lijn $k : 2x = 12 - 3y$

c cirkel $c_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$ en cirkel $c_2 : x^2 + y^2 = 6$

Opgave 19

Voor welke waarde van a hebben de lijnen $ax + 4y = 10$ en $2x = y + 6$ geen snijpunt?

Opgave 20

Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(2,1)$ en straal 4 en lijn l die door de punten $(0,3)$ en $(5,0)$ gaat. Bereken de afstand tussen de snijpunten van l en c. Rond af op één decimaal.

Opgave 21

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$.

a Bepaal het middelpunt en de straal van de cirkel.

b Er zijn twee lijnen met vergelijkingen van de vorm $y = ax$ die c raken. Bereken a.

c Er zijn twee lijnen met vergelijkingen van de vorm $y = x + b$ die c raken. Bereken b.

Opgave 22

Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(7,4)$ die de lijn $l : x + y = 2$ raakt.

Opgave 23

Gegeven zijn een cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$ en een lijn $l : 4x + 3y = 0$.

Stel de vergelijking op van de twee raaklijnen aan c evenwijdig met l.

Toepassen

Opgave 24: Bereik hebben

Mobiele telefoons hebben soms ‘geen bereik’. Dat betekent dat er geen mast met antenne dicht genoeg in de buurt is om mee in verbinding te kunnen staan. Stel je voor dat zo’n antenne een bereik heeft van 30 km. Op 15 km van de snelweg A1 staat een mast met zo’n antenne. Gedurende hoeveel km op de A1 kun je via die antenne met je mobiele telefoon verbinding maken? Rond af op één decimaal.

Opgave 25: Gelijkbenige driehoek

Met een passer kun je gemakkelijk een gelijkzijdige driehoek construeren. Cirkel AB om vanuit punt A en daarna vanuit punt B en markeer een van de twee snijpunten van die cirkels als punt C. ΔABC is dan de gewenste gelijkzijdige driehoek. Neem een cartesisch Oxy-assenstelsel en $A(-a,0)$ en $B(a,0)$ met $a > 0$.

a Cirkel c_1 heeft middelpunt A en straal AB. Stel een vergelijking voor c_1 op.

b Cirkel c_2 heeft middelpunt B en straal AB. Stel een vergelijking voor c_2 op.

c Bereken de snijpunten van c_1 en c_2.

d Noem een van beide snijpunten C en laat met behulp van de coördinaten van A, B en C zien dat de afstanden tussen deze drie punten even groot zijn.

Testen

Opgave 26

Bereken algebraïsch de snijpunten van

a lijn $l: x + 4y = 12$ en lijn $m: 2x - 3y = -20$.

b lijn $l: x + 4y = 12$ en cirkel $c: (x-7)^2 + (y+3)^2 = 34$.

c de cirkel $c: (x-7)^2 + (y+3)^2 = 34$ en de cirkel $k: x^2 + (y+3)^2 = 13$.

Opgave 27

Voor welke waarde van p hebben de lijnen $2x + 7y = 28$ en $px - y = 15$ geen snijpunt?

Opgave 28

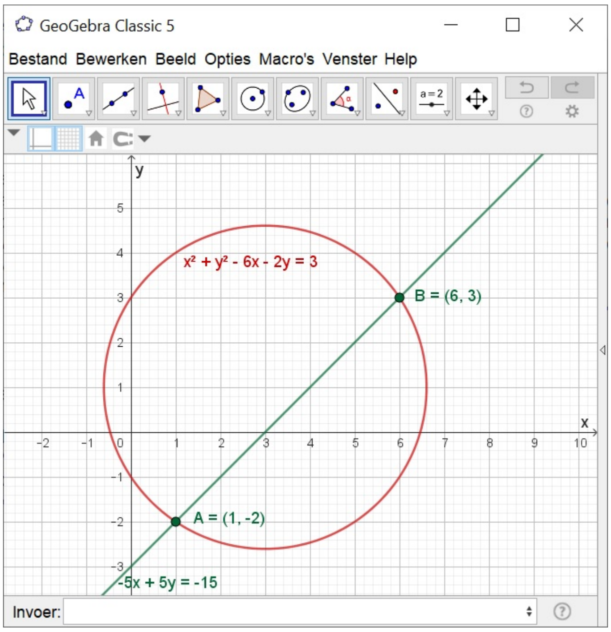
Gegeven cirkel c met middelpunt $M(2,1)$ en straal 4 en lijn l door de punten $(0,3)$ en $(5,0)$.

a Bereken de afstand tussen de snijpunten van l en c in één decimaal nauwkeurig.

b Er zijn twee lijnen door $(0,6)$ die cirkel c raken. Stel de vergelijkingen van die twee raaklijnen op.

Practicum: GeoGebra IV

Je kunt GeoGebra heel goed gebruiken om rechten en krommen met een gegeven vergelijking in beeld te brengen. Je ziet dan meteen of er **snijpunten** zijn. En met GeoGebra kun je gemakkelijk snijpunten van twee (rechte of kromme) lijnen in de figuur aangeven. Door vervolgens met de rechter muisknop bij de eigenschappen van het snijpunt het label aan te zetten en te kiezen voor ‘Naam en waarde’, krijgt het snijpunt een naam en kun je de ervan coördinaten aflezen. Op deze manier kun je antwoorden controleren...

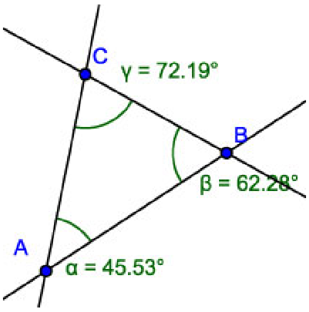


Figuur 4.4

2.5 Loodrechte stand

Inleiding

Bij het ontwerpen van een gebouw, brug of viaduct spelen hoeken, afstanden, lengtes, enzovoort een grote rol. Bij ontwerpen wordt gebruik gemaakt van technische teken- en berekensoftware. Voorbeelden daarvan zijn AutoCAD en Illustrator. Bedenk dat computers alles (dus ook tekst, muziek en tekeningen) verwerken in getallen. Dan begrijp je waarom coördinaten zo belangrijk zijn voor het tekenen op computers.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- bepalen wanneer twee lijnen loodrecht op elkaar staan;
- de vergelijking opstellen van een lijn loodrecht op een gegeven lijn en door een gegeven punt;
- de vergelijking opstellen van een raaklijn aan een cirkel in een gegeven punt op die cirkel;
- bewijzen leveren met behulp van analytische meetkunde.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen van (rechte en kromme) lijnen in het platte vlak;
- het hellingsgetal berekenen van een lijn door twee punten;
- snijpunten van rechte en/of kromme lijnen berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de lijn met vergelijking $2x + 4y = 9$.

a Hoe luidt de vergelijking van een lijn door $O(0,0)$ die er loodrecht op staat?

b Ontdek je een verband tussen beide vergelijkingen?

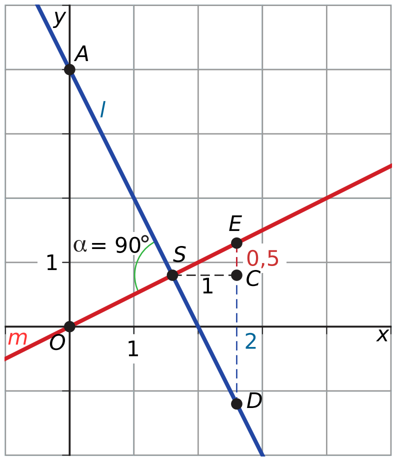
Uitleg 1

Bekijk de applet.

Bekijk de lijnen $l_p : y = px + 4$ en $m : y = 0{,}5x$. Ga na dat beide lijnen loodrecht op elkaar staan als $p = -2$.

De twee rechthoekige driehoeken DCS en SCE zijn dan gelijkvormig. Immers $\angle DSC$ en $\angle CSE$ zijn samen $90°$. Maar $\angle CSE$ en $\angle SEC$ zijn ook samen $90°$, dus $\angle SEC = \angle DSC$. Beide driehoeken hebben dezelfde hoeken en zijn daarom gelijkvormig. Hun zijden hebben dezelfde verhoudingen en dus is $\frac{|EC|}{1} = \frac{1}{|DC|}$. Omdat $|EC| = 0{,}5$ vind je $|DC| = 2$.

Uit de figuur blijkt dat een lijn die loodrecht staat op een lijn met een richtingscoëfficiënt van $0{,}5$ zelf een richtingscoëfficiënt van -2 moet hebben. Het product van deze twee hellingsgetallen is -1 en dat blijkt altijd het geval te zijn bij lijnen die elkaar loodrecht snijden (tenzij een van beide verticaal is).



Figuur 5.2

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** wat er met de richtingscoëfficiënten van twee loodrechte lijnen aan de hand is.

Toon aan dat de lijnen $p : y = 0{,}25x$ en $q : y = -4x + 3$ loodrecht op elkaar staan.

Opgave 2

Welke richtingscoëfficiënt heeft de lijn die loodrecht staat op $k : 2x - 5y = 10$?

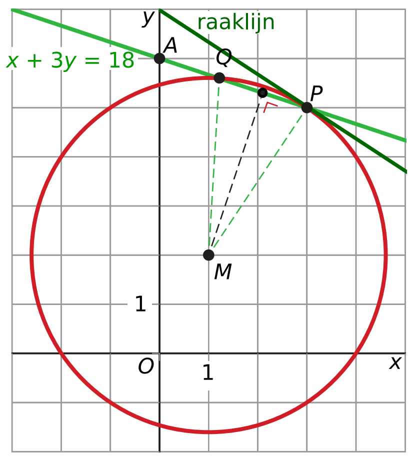
Uitleg 2

Bekijk de applet

Je ziet lijn l door A en $P(3,5)$. Punt P ligt op de cirkel $c : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$.
Als je punt A verplaatst, kun je ervoor zorgen dat l de cirkel $c : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$ raakt in P. De punten P en Q vallen dan samen.

Zolang P en Q verschillen, zie je een gelijkbenige driehoek MPQ met een hoogtelijn. Die hoogtelijn staat loodrecht op PQ. Zodra P en Q samenvallen, vallen de zijden MP, MQ en deze hoogtelijn samen. De lijn l is dan een raaklijn aan de cirkel. Je ziet dat zo'n raaklijn loodrecht moet staan op de straal MP (want die valt dan samen met de hoogtelijn van ΔMPQ).

En daarmee kun je de vergelijking van die raaklijn opstellen: hij staat loodrecht op lijn MP en gaat door $P(3,5)$. Omdat de richtingscoëfficiënt van MP gelijk is aan $1{,}5$, is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $-\frac{2}{3}$. De vergelijking van de raaklijn is dus $y = -\frac{2}{3}x + 7$.



Figuur 5.3

Opgave 3

De raaklijn in een punt P op een gegeven cirkel c staat loodrecht op de straal naar het raakpunt P.

a Geldt dit voor elke raaklijn aan cirkel c in een punt P op cirkel c?

b Laat zien dat $P(3,5)$ op cirkel $c: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$ ligt.

c Stel de vergelijking van de raaklijn in $P(3,5)$ aan cirkel c op.

Opgave 4

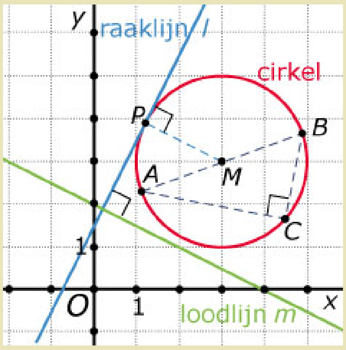
Stel een vergelijking op van de raaklijn door punt $A(0,0)$ aan de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Rechte hoeken spelen vaak een rol in de wiskunde. In de figuur zie je enkele toepassingen.

- Als voor twee lijnen l en m met richtingscoëfficiënten r_l en r_m geldt dat $r_l \cdot r_m = -1$, dan staan beide lijnen loodrecht op elkaar. Staan omgekeerd twee lijnen l en m met richtingscoëfficiënten r_l en r_m loodrecht op elkaar, dan geldt $r_l \cdot r_m = -1$. Je zegt dan wel dat l een **loodlijn** is van m en omgekeerd dat m een loodlijn is van l.
- De **raaklijn** aan cirkel c in een punt P dat ligt op cirkel c, staat loodrecht op de straal MP. Hierin is M het middelpunt van die cirkel. De afstand van M tot de raaklijn is gelijk aan de afstand tussen M en P.
- Als C een punt op een cirkel is en AB is een middellijn van die cirkel, dan heeft ΔABC een rechte hoek bij C. Dat heet de **stelling van Thales**. Ook het omgekeerde van deze stelling is waar.



Figuur 5.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Gegeven is de lijn $l: 2x + 3y = 6$ en punt $A(3,4)$.
Stel de vergelijking op van de lijn door A en loodrecht op l.

Antwoord

Teken eerst de situatie met l loodrecht op m.

Ga na dat lijn l een richtingscoëfficiënt heeft van $-\frac{2}{3}$.
Als een lijn die daar loodrecht op staat een richtingscoëfficiënt heeft van r, dan moet $-\frac{2}{3} \cdot r = -1$. De lijn door A en loodrecht op l heeft dus een richtingscoëfficiënt van $1{,}5$.

En daarom een vergelijking van de vorm $y = \frac{3}{2}x + b$.

De lijn moet door $A(3,4)$ en dus moet $4 = \frac{3}{2} \cdot 3 + b$. Dus $b = -\frac{1}{2}$. De vergelijking wordt $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.
Ga na dat dit in overeenstemming is met de figuur.

Opgave 5

Gegeven is de lijn $p : 3x - 4y = 12$. Stel een vergelijking op van de lijn q door $O(0,0)$ en loodrecht op p.

Opgave 6

Toon aan dat lijn l door $O(0,0)$ en $P(2,5)$ loodrecht staat op lijn m door P en $Q(7,3)$.

Opgave 7

Gegeven zijn de punten $A(-2,5)$, $B(8,0)$ en $C(-2,1)$.

a Stel een vergelijking op van de lijn door C die loodrecht staat op lijn AB.

Zoals je weet, is de middelloodlijn van een lijnstuk een lijn die door het midden van dat lijnstuk gaat en er loodrecht op staat.

b Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van AB.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$ en punt $P(5,1)$. Stel de vergelijking op van de raaklijn in P aan de cirkel c.

Antwoord

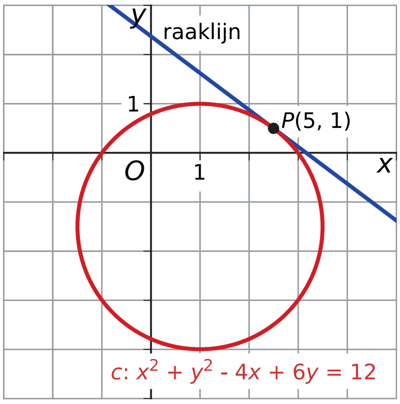
Als je zelf de situatie wilt tekenen, moet je eerst het middelpunt en de straal van c berekenen.
Daartoe herleid je de vergelijking van c tot $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$. Je ziet dan dat het middelpunt $M(2,-3)$ en de straal 5 is. Het punt $P(5,1)$ lijkt op de cirkel te liggen. Ga dit na door te kijken of de coördinaten van dit punt aan de cirkelvergelijking voldoen.

De raaklijn in P aan de cirkel staat loodrecht op de lijn MP.

Ga na dat lijn MP een richtingscoëfficiënt heeft van $\frac{4}{3}$. Voor de richtingscoëfficiënt r van de raaklijn geldt daarom $\frac{4}{3} \cdot r = -1$.

De raaklijn heeft dus een richtingscoëfficiënt van $-\frac{3}{4}$. En daarom een vergelijking van de vorm $y = -\frac{3}{4}x + b$.

De raaklijn gaat door $P(5,1)$ en dus wordt de vergelijking $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$. Ga na dat dit in overeenstemming is met de figuur.



Figuur 5.5

Opgave 8

Gegeven is de cirkel $c : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$.

a Stel de vergelijking op van de raaklijn aan de gegeven cirkel c in het punt $Q(6,-6)$.

b Je kunt in de applet in **Voorbeeld 2** zowel de cirkel als het punt op de cirkel verplaatsen. Oefen het opstellen van een raaklijn aan cirkel c in een punt op die cirkel.

Opgave 9

Gegeven zijn de drie punten $A(0,2)$, $B(4,4)$ en $C(6,0)$.

a Leg uit waarom het middelpunt M van de cirkel c door deze drie punten het snijpunt is van de middelloodlijnen van de lijnstukken AB en BC.

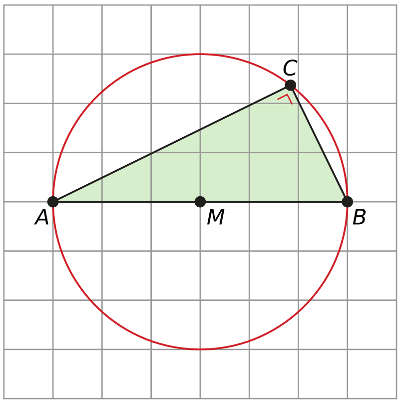
b Stel een vergelijking op van c.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan c in punt A.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: stelling van Thales

De stelling van Thales luidt: ‘Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is hoek ACB recht.’ Je kunt deze stelling met behulp van analytische meetkunde bewijzen. Ook kun je het omgekeerde van deze stelling bewijzen.



Figuur 5.6

Opgave 10

Als je in een cirkel twee lijnen trekt die allebei door het middelpunt M gaan, dan vormen de vier snijpunten van die lijnen met de cirkel een rechthoek. Deze stelling kun je met analytische meetkunde bewijzen.

a Kies een assenstelsel waarvan $M = O(0,0)$ het middelpunt van de cirkel is en het punt $B(1,0)$ een punt op de cirkel. Welke vergelijking heeft de cirkel dan?

b De ene lijn door het middelpunt van de cirkel is bijvoorbeeld de x-as, de andere is dan $y = ax$. Welke vier snijpunten met de cirkel vind je?

c Waarom vormen deze vier punten een rechthoek?

d Waarom heb je nu de stelling van Thales bewezen?

e Kun je ook een bewijs geven zonder analytische meetkunde?

Opgave 11

Ook het omgekeerde van de stelling van Thales is waar.

a Hoe luidt deze stelling?

Om dit te bewijzen kun je het beste werken met een cartesisch assenstelsel waarvan $O(0,0)$ samenvalt met punt C, punt A op de x-as en punt B op de y-as ligt.

b Wat moet je dan nog bewijzen?

c Maak nu zelf het bewijs af.

Verwerken

Opgave 12

Gegeven zijn de punten $P(120,31)$ en $Q(124,37)$ en de lijn l met vergelijking $25x - 40y = 167$.

a Stel een vergelijking op van de lijn door P die loodrecht staat op l.

De afstand van punt P tot lijn l is de lengte van PS als S het snijpunt van lijn l en de loodlijn door P op l is.

b Bereken die afstand in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van PQ.

Opgave 13

Gegeven is driehoek ABC door de hoekpunten $A(0,2)$, $B(5,4)$ en $C(2,5)$.

a Stel een vergelijking op van de lijn p door C loodrecht op AB.

b D is het snijpunt van lijn p met de lijn AB. Bereken de coördinaten van D.

c De lengte van de hoogtelijn CD is de hoogte van driehoek ABC als AB als basis wordt genomen. Bereken de oppervlakte van driehoek ABC met behulp van hoogte CD.

Opgave 14

Cirkel c heeft de vergelijking $x^2 + y^2 = 8x + 4y + 5$. Het punt $A(8,5)$ ligt op deze cirkel, het punt $B(-3,3)$ ligt buiten cirkel c.

a Laat door berekening zien dat A op de cirkel ligt en B erbuiten.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn in A aan cirkel c.

Door B gaan twee lijnen die cirkel c raken.

c Licht toe waarom deze lijnen vergelijkingen van de vorm $y = ax + 3 + 3a$ hebben.

d Stel de vergelijkingen van beide raaklijnen door B aan cirkel c op.

Opgave 15

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de zijde tegenover een hoekpunt. In elke driehoek gaan de zwaartelijnen door één punt. Deze stelling kun je met analytische meetkunde bewijzen.
Kies daartoe een assenstelsel met $A(-a,0)$, $B(a,0)$ en $C(b,c)$. Ga er voor het gemak vanuit dat a, b en c alle drie groter zijn dan 0.

a Welke vergelijking heeft de zwaartelijn door C?

b Welke vergelijking heeft de zwaartelijn door A?

c Welk snijpunt hebben beide zwaartelijnen?

d Hoe maak je het bewijs nu af?

Opgave 16

ΔOAB is gegeven door de hoekpunten $O(0,0)$, $A(5,0)$ en $B(2,6)$. In deze driehoek zijn OP en AQ twee hoogtelijnen.

- **a** Leg uit waarom de punten O, A, P en Q op dezelfde cirkel liggen.
- **b** Bereken de coördinaten van de punten P en Q.
- **c** Stel een vergelijking op van de cirkel c door O, A, P en Q.
- **d** Bereken het snijpunt van de raaklijnen in P en in Q aan cirkel c.

Toepassen

Opgave 17: Hoogtelijnenstelling

Bewijs met behulp van analytische meetkunde dat in elke driehoek de drie hoogtelijnen door één punt gaan.

Opgave 18: Omgeschreven cirkel

De 'omgeschreven cirkel' van een driehoek is de cirkel die door de drie hoekpunten van de driehoek gaat. Gegeven zijn de lijnen $l : y = \frac{3}{4}x + 2$, $m : y = -\frac{1}{2}x + 7$ en $n : y = 2x - 13$. Lijnen l en m snijden elkaar in punt A, m en n in B, en n en l in C. Geef de vergelijking van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.

Opgave 19: Middelloodlijnen in een driehoek

Een middelloodlijn in een driehoek is een lijn door het midden van en loodrecht op een zijde. In elke driehoek gaan de middelloodlijnen door één punt. Deze stelling kun je met analytische meetkunde bewijzen.

Kies daartoe een assenstelsel met $A(-a,0)$, $B(a,0)$ en $C(b,c)$. Ga er voor het gemak van uit dat a, b en c alle drie groter zijn dan 0.

- **a** Welke vergelijking heeft de middelloodlijn van AB?
- **b** Welke vergelijking heeft de middelloodlijn van BC?
- **c** Welk snijpunt hebben beide middelloodlijnen?
- **d** Hoe maak je het bewijs nu af?

Testen

Opgave 20

Gegeven zijn het punt $P(12,44)$ en de lijn l met vergelijking $x - 3y = 60$.

- **a** Stel een vergelijking op van de lijn door P die loodrecht staat op l.

De afstand van punt P tot lijn l is de lengte van PS als S het snijpunt van lijn l en de loodlijn door P op l is.

- **b** Bereken die afstand in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 21

Ten opzichte van een cartesisch assenstelsel heeft cirkel c de vergelijking $x^2+y^2=6x+6y-13$. Het punt $A(4,1)$ ligt op deze cirkel.

a Laat door berekening zien, dat A op de cirkel ligt.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn in A aan cirkel c.

Door O gaan twee lijnen die de cirkel c raken.

c Stel de vergelijkingen van beide raaklijnen door O aan cirkel c op. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het berekenen van de richtingscoëfficiënt van een lijn door twee punten en een lijn loodrecht daarop**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen.
Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het hoofdstuk **Analytische meetkunde** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit hoofdstuk horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- cartesisch coördinatenstelsel — midden van een lijnstuk — lengte van een lijnstuk
- vergelijking van een (rechte) lijn
- vergelijking van een cirkel met gegeven middelpunt en straal
- snijpunten — stelsel vergelijkingen — strijdig stelsel — raaklijn aan cirkel
- loodrechte stand van twee lijnen — raaklijn loodrecht straal — (omgekeerde) stelling van Thales

Activiteitenlijst

- een cartesisch assenstelsel invoeren — het midden en de lengte van een lijnstuk berekenen
- vergelijkingen van rechte lijnen opstellen
- vergelijkingen van cirkels opstellen — uit de vergelijking van een cirkel middelpunt en straal afleiden, ook door kwadraat afsplitsen
- snijpunten berekenen, vooral van lijnen en lijnen en cirkels — onderzoeken of gegeven lijnen raken aan een gegeven cirkel
- onderzoeken of twee lijnen loodrecht op elkaar staan — de vergelijking van een lijn loodrecht op een gegeven lijn opstellen — de vergelijking van een raaklijn aan een cirkel in een punt op die cirkel opstellen — bewijzen met behulp van analytische meetkunde

Achtergronden

René Descartes (1596—1650) maakte in 1618 kennis met de Nederlandse wiskundige Isaac Beeckman, die hem de wiskundige inzichten van die dagen, onder andere met het werk van François Viète en het gebruik van letters voor variabelen, leerde.

Uiteindelijk schreef Descartes 'Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences', met als aanhangsel 'La Géométrie'. Het werd in 1637 in Leiden gepubliceerd. Hierin nam Descartes afstand van de logica (van Aristoteles) die bijna 2000 jaar lang het wetenschappelijk denken had beheerst. Hij twijfelde aan alle bestaande kennis en vond dat alle wetenschap op wiskundige methoden moest worden gebaseerd. Zijn wereldbeeld was dat van een groot mechaniek bestaande uit allemaal delen die via wiskundige wetten op elkaar reageerden.

Figuur 6.1

Op het gebied van de wiskunde zelf zette hij een revolutionaire ontwikkeling in door het rechthoekig (cartesische) assenstelsel in te voeren. In één klap konden meetkundige objecten worden beschreven met getallen en vergelijkingen. Dit leidde tot het ontstaan van de analytische meetkunde...

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de lijn $l : 5x - 4y = 40$ en de punten $A(12,3)$ en $B(2,\text{-}2)$.

a Lijn m gaat door de punten A en B. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m.

b Stel een vergelijking op van de lijn p door het midden van lijnstuk AB loodrecht op lijn m.

c Bereken de exacte coördinaten van het snijpunt C van p en lijn l.

Opgave 2

Stel in de volgende gevallen een vergelijking op van de beschreven lijn of cirkel.

a Lijn l door de punten $A(\text{-}22,105)$ en $B(58,65)$.

b Lijn m door $C(24,0)$ en loodrecht op l.

c Cirkel c_1 door C met middelpunt $M(20,3)$.

d Lijn n door de snijpunten van de cirkels $c_1 : (x - 20)^2 + (y - 3)^2 = 25$ en $c_2 : (x - 24)^2 + y^2 = 2$.

Opgave 3

In een cartesisch Oxy-assenstelsel zijn er twee cirkels met straal $\sqrt{13}$ die door de punten O en $A(0,6)$ gaan. Stel de vergelijkingen van deze cirkels op.

Opgave 4

In een cartesisch assenstelsel is de cirkel c gegeven door $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 8$. Punt $A(4,0)$ is een punt van cirkel c.

a Toon dit aan.

b Stel een vergelijking op van raaklijn l in A aan cirkel c.

Er is een lijn m en een lijn n die loodrecht staan op l en ook cirkel c raken.

c Stel een vergelijking op van m en n.

Opgave 5

Gegeven is de lijn $l : 4x - 15y = 61$ en punt $P(0,12)$.

a Stel een vergelijking op van lijn m door P en loodrecht op l.

b Bereken het snijpunt S van l en m.

c Bereken de afstand van P tot lijn l.

d Stel een vergelijking op van cirkel c met middelpunt P en door S.

e Waarom hebben cirkel c en lijn l precies één snijpunt?

Opgave 6

Een cirkel waarvan het middelpunt ligt op de lijn $l : y = x$ raakt de lijn $m : y = 2x + 5$ in het punt $P(2,9)$.

Stel een vergelijking op van deze cirkel.

Toepassen

Opgave 7: Scheve rechthoek

In een assentelsel snijdt lijn l de x-as in $A(a,0)$ en de y-as in $B(0,b)$. a en b zijn positief.

a Laat zien dat $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ een vergelijking van l is.

Punt O wordt gespiegeld in lijn l. Het spiegelbeeld van O is punt P. De oppervlakte van vierhoek $OAPB$ is gelijk aan ab. De oppervlakte van de rechthoek waarvan de zijden evenwijdig zijn met de diagonalen van vierhoek $OAPB$ is $2ab$.

b Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Opgave 8: Middelloodlijn

Een middelloodlijn van een lijnstuk AB is een lijn die door het midden van AB gaat en er loodrecht op staat. Een manier om zo'n middelloodlijn te construeren is door twee even grote cirkels om A en om B te tekenen en een lijn te trekken door beide snijpunten van die cirkels. Met analytische meetkunde kun je bewijzen dat je zo inderdaad een middelloodlijn krijgt.

a Kies een geschikt assenstelsel. Welke coördinaten geef je A en B?

b Stel vergelijkingen op van twee even grote cirkels om A en om B.

c Hoe maak je nu het bewijs af?

Opgave 9: Cirkel door drie punten

Hoe kun je het resultaat van de vorige opgave gebruiken om de vergelijking op te stellen van een cirkel door drie gegeven punten? Beschrijf de rekenprocedure die je dan moet volgen. Stel een vergelijking op van de cirkel door $(4,0)$, $(6,4)$ en $(0,4)$.

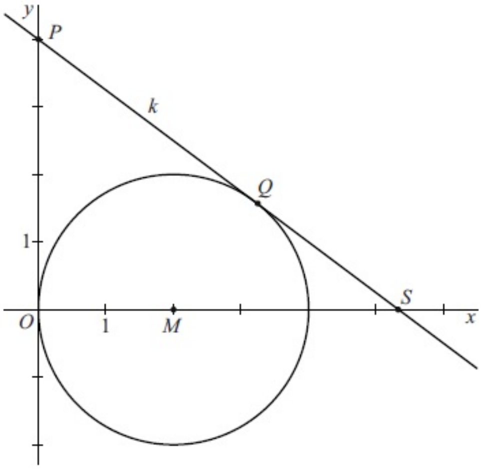
Opgave 10: Afstand punt tot lijn

Toon aan dat de afstand van $O(0,0)$ tot de lijn $l : ax + by = c$ gelijk is aan $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Examen

Opgave 11: Lijn en cirkel

Gegeven is de cirkel met middelpunt $M(2,0)$ en straal 2. De niet-verticale lijn k gaat door het punt $P(0,4)$, raakt de cirkel in het punt Q en snijdt de positieve x-as in het punt S. Zie de figuur.



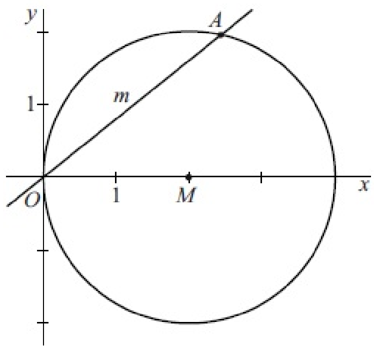
Figuur 6.2

a Bereken exact de x-coördinaat van S.

De lijn m met vergelijking $y = px$ met $p = ...$ snijdt de cirkel behalve in O in een punt A zo, dat $|OA| = 3$. Zie de figuur.

b Bereken exact de waarde van p.

(bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2012, eerste tijdvak)



Figuur 6.3

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 4

www.math4all.nl