Wiskunde B

4 VWO

Katern 3

ConTeXt College

Inhoud

Voorwoord 3

1 Veranderingen 5
1.1 In grafieken 6
1.2 Veranderingen per stap 13
1.3 Differentiequotiënt 22
1.4 Differentiaalquotiënt 30
1.5 Hellingsgrafiek 39
1.6 Totaalbeeld 49

2 Logaritmische functies 55
2.1 Logaritmen 56
2.2 Eigenschappen 63
2.3 Logaritmische schaal 71
2.4 Logaritmische functies 79
2.5 Logaritmische vergelijkingen 87
2.6 Totaalbeeld 95

Register 103

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Veranderingen

1.1 In grafieken 6
1.2 Veranderingen per stap 13
1.3 Differentiequotiënt 22
1.4 Differentiaalquotiënt 30
1.5 Hellingsgrafiek 39
1.6 Totaalbeeld 49

1.1 In grafieken

Inleiding

In de Delta Nederland verandert de waterstand voortdurend. De veranderingen worden beschreven met eb, laagwater, vloed en hoogwater. Tussen hoogwater en laagwater daalt het water. Maar stijging en daling zijn niet constant: vlak voor hoogwater neemt de stijging langzaam af en na hoogwater neemt de daling een paar uur lang toe.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen stijgend en dalend en constant gebruiken bij grafieken;
- toenemende, afnemende en constante stijging en daling herkennen;
- (lokale) maxima en minima van een grafiek bepalen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Zoek via **deze website van Rijkswaterstaat** een grafiek van de waterstand bijvoorbeeld bij Vlissingen. Klik op de huidige waterstand en kies ‘Meer info’.

a Herken je stijging en daling in de grafiek? Kun je soorten stijging en daling beschrijven?

b Wanneer stijgt het water het snelst?

c Hoe zit het met de stijging van het water bij ‘hoog water’?

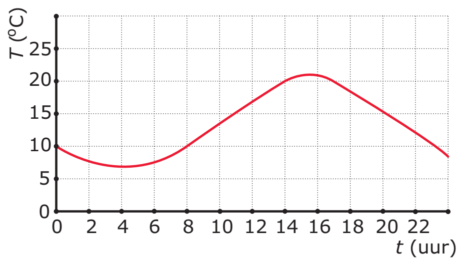
Uitleg

Deze grafiek geeft de temperatuur T (in °C) op een bepaalde plaats weer afhankelijk van het tijdstip t (in uren) op de dag.

De temperatuur stijgt vanaf $t = 4$ tot aan $t = 15{,}5$, want als t toeneemt vanaf 4 tot $15{,}5$, wordt ook T groter. Je zegt dan dat de grafiek stijgend is op het interval $\langle 4; 15{,}5 \rangle$.

De temperatuur daalt vanaf $t = 15{,}5$ tot aan $t = 24$, want als t toeneemt vanaf $15{,}5$ tot 24, wordt T juist kleiner. Je zegt dan dat de grafiek dalend is op het interval $\langle 15{,}5; 24 \rangle$.

De temperatuur is nergens constant, hoewel hij tussen 14 uur en 17 uur maar weinig verandert.



Figuur 1.2

Als je de stijging op het interval $\langle 4; 15{,}5\rangle$ nauwkeuriger bekijkt zie je dat hij op het interval $\langle 4{,}8\rangle$ steeds groter wordt; de grafiek wordt steiler. Er is op dat interval sprake van toenemende stijging. Op het interval $\langle 8{,}14\rangle$ daarentegen is er een constante stijging; de grafiek blijft daar voortdurend even steil. Op het interval $\langle 14; 15{,}5\rangle$ wordt de stijging steeds minder, het gaat nu om afnemende stijging. Ga zelf na dat de grafiek op het interval $\langle 0{,}4\rangle$ een afnemende daling vertoont. En op het interval $\langle 17{,}23\rangle$ is er een vrijwel constante daling.

De hoogste dagtemperatuur is 21 °C. Dit is het maximum van T en het wordt bereikt op $t = 15{,}5$. De laagste dagtemperatuur is 7 °C. Dit is het minimum van T en het wordt bereikt op $t = 4$.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de dagtemperatuur in de **Uitleg**.

a Als de grafiek stijgt, neemt T dan toe of juist af?

b Als de grafiek toenemend stijgt, wat gebeurt er dan met T?

c Wat betekent voor de grafiek het verschil tussen een toenemende daling en een afnemende daling? En wat betekent dit voor de temperatuur T?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een functie is:

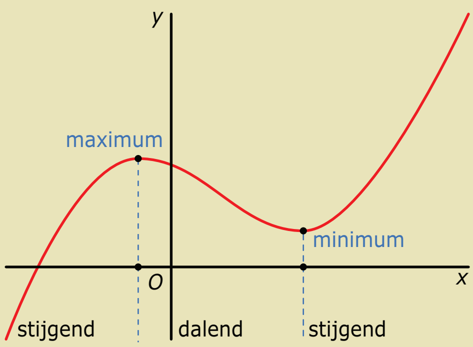
- **stijgend** als de y-waarden groter worden bij groter wordende x;
- **dalend** als de y-waarden kleiner worden bij groter wordende x.

Verder heeft de functie:

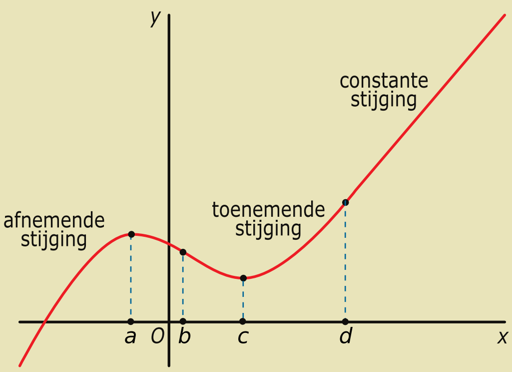
- een **maximum** als hij overgaat van stijgend in dalend in een aaneengesloten grafiek;
- een **minimum** als hij overgaat van dalend in stijgend in een aaneengesloten grafiek.

Deze waarden noem je de **extremen**, ook wel de **uiterste waarden** van de functie.

Om aan te geven voor welke waarden van x van een bepaalde soort stijging of daling sprake is, gebruik je **intervallen**.



Figuur 1.3



Figuur 1.4

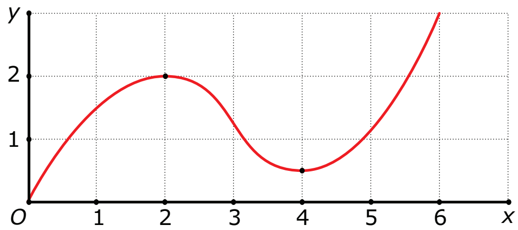
Deze grafiek heeft een:

- **afnemende stijging** op het interval $\langle \leftarrow, a \rangle$, omdat de stijging daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende daling** op het interval $\langle a,b \rangle$, omdat de daling daar steeds sterker wordt;
- **afnemende daling** op het interval $\langle b,c \rangle$, omdat de daling daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende stijging** op het interval $\langle c,d \rangle$, omdat de stijging daar steeds sterker wordt;
- **constante stijging** op het interval $\langle d, \rightarrow \rangle$, omdat de stijging daar steeds even sterk blijft, de grafiek is daar een rechte lijn.

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek van functie $y = f(x)$ op het interval $[0,6]$.

Beschrijf de veranderingen in deze grafiek.



Figuur 1.5

Antwoord

De veranderingen in deze grafiek kun je van links naar rechts als volgt beschrijven:

- de grafiek is afnemend stijgend op het interval $\langle 0,2 \rangle$.
- de grafiek is toenemend dalend op het interval $\langle 2,3 \rangle$.
- de grafiek is afnemend dalend op het interval $\langle 3,4 \rangle$.
- de grafiek is toenemend stijgend op het interval $\langle 4,6 \rangle$.

Verder heeft de functie:

- een maximum(waarde) van 2 voor $x = 2$: max. $f(2) = 2$;
- een minimum(waarde) van $0{,}6$ voor $x = 4$: min. $f(4) = 0{,}6$.

Dit zijn de extremen (uiterste waarden) van de functie.

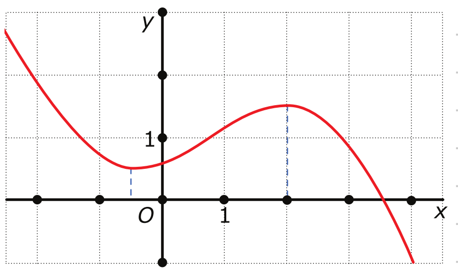
Opmerking: Dat er een minimum is bij $x = 4$, wil niet zeggen dat y niet lager kan zijn. Je ziet dat bijvoorbeeld bij $x = 0$ de y-waarde lager is. Het minimum is een lokaal (plaatselijk) minimum, net als het maximum.

Opgave 2

Bekijk de grafiek van f.

a Beschrijf met intervallen de verandering van de grafiek.

b Schrijf het maximum en het minimum van de functie op.



Figuur 1.6

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie f met functievoorschrift $f(x) = -5+36x-6x^2$.
Beschrijf het verloop van de grafiek.

Antwoord

Breng eerst de grafiek in beeld, bijvoorbeeld met de grafische rekenmachine.

Figuur 1.7

De grafiek heeft een maximum van 49 bij $x = 3$. De grafiek gaat dus over van stijgend naar dalend. Aan de grafiek zie je met wat voor soort stijging en daling je te maken hebt.

De grafiek is afnemend stijgend op het interval $\langle \leftarrow, 3\rangle$ en toenemend dalend op het interval $\langle 3, \rightarrow\rangle$.

Opgave 3

Gegeven is de kwadratische functie f met voorschrift $f(x) = -x^2 + 6x$. De grafiek van zo'n functie is een parabool.

a Met de grafische rekenmachine kun je de parabool bekijken. Op welk interval is de grafiek stijgend?

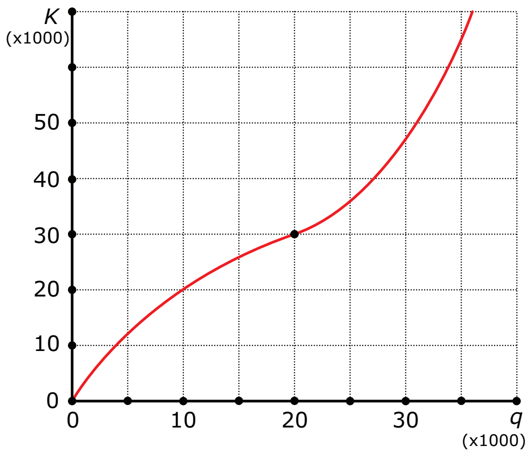
b Om welk soort stijging gaat het bij a?

c Is er in de grafiek sprake van toenemende of afnemende daling?

d Elke parabool heeft een top. Daarbij hoort een minimum of een maximum. Welke extreme waarde heeft deze functie?

Voorbeeld 3

Bij de productie van een bepaald artikel stijgen de kosten K met een toename van het geproduceerde aantal producten q. Die kostenstijging neemt echter af omdat de productielijn steeds efficiënter wordt ingezet. Wanneer er 20000 artikelen worden gemaakt, zijn de kosten € 30000,00. Om nog meer producten te kunnen maken, moet de productielijn worden aangepast en de kosten stijgen dan harder. Je ziet een schets van een bijpassende grafiek.



Figuur 1.8

Op de horizontale as komt het aantal producten q, op de verticale as de kosten K, omdat de kosten afhangen van het aantal geproduceerde artikelen. De grafiek begint in $(0,0)$ met sterke stijging die vrij snel afvlakt. Dat gaat zo door tot het punt met $q = 20000$ en $K = 30000$. Daarna stijgt de grafiek steeds sterker.

Opgave 4

Van een functie is gegeven dat:

- de grafiek constant stijgt tot $x = 2$;
- de grafiek constant is van $x = 2$ tot $x = 3$;
- de grafiek toenemend daalt van $x = 3$ tot $x = 4$ en dan afnemend daalt tot $x = 5$;
- de grafiek toenemend stijgt vanaf $x = 5$.

Maak een schets van de grafiek van deze functie en leg uit bij welke waarde van x de functie een extreme waarde moet hebben.

Opgave 5

Je gebruikt nu steeds een grafiek om de veranderingen en de extremen van een functie te bepalen. Waarom kun je op deze manier nooit zeker zijn of je wel alle veranderingen en extremen hebt gevonden?

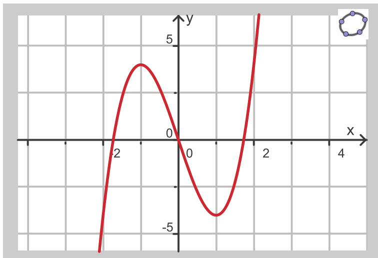
Verwerken

Opgave 6

Bekijk deze grafiek gemaakt met GeoGebra.

Geef voor deze functie aan:

- op welke intervallen de grafiek daalt dan wel stijgt en om welk soort stijging of daling het daarbij gaat;
- welke extremen er zijn;
- voor welke waarden van x de daling het sterkst is.



Figuur 1.9

Opgave 7

Gegeven is een functie met voorschrift $f(x) = x^3 - 3x$. Bekijk de grafiek van deze functie met de grafische rekenmachine.

a Beschrijf met intervallen het verloop van de grafiek van f.

b Wat zijn de extremen van f?

c Waarom kun je niet aangeven waar de snelheid van stijgen het grootst is?

Opgave 8

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 8$.

a Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van deze functie bekijken. Welke extremen heeft deze functie?

b Op hoeveel intervallen is bij de grafiek van f sprake van toenemende daling?

c Geef het bereik van f.

Opgave 9

Sofie rijdt met de auto naar de supermarkt. De eerste 7 seconden trekt ze eerst rustig maar daarna snel op, daarna rijdt ze 15 seconden met een constante snelheid om vervolgens 10 seconden lang geleidelijk af te remmen, totdat ze stil staat voor een stoplicht. Ze staat daar 30 seconden stil. Als het stoplicht op groen springt, trekt Sofie geleidelijk op en na 8 seconden rijdt ze weer met een constante snelheid, totdat ze na 2 minuten bij de supermarkt is aangekomen en in 12 seconden geleidelijk afremt totdat ze stil staat.
Beschrijf met intervallen de soorten stijging en daling van de snelheid die optreden gedurende de route die Sofie naar de supermarkt aflegt.

Opgave 10

Voor de temperatuur T in °C op een bepaalde dag geldt:

- om 6:00 uur 's morgens ($t = 6$) is de temperatuur $T = 2$ °C;
- de grafiek toenemend stijgt van $t = 6$ tot $t = 12$;
- de grafiek afnemend stijgt van 12:00 uur tot 14:30 uur en dan toenemend daalt tot $t = 20$;
- de grafiek afnemend daalt van $t = 20$ tot aan het eind van de dag.

Maak een schets van een mogelijke grafiek van deze functie en leg uit bij welke waarde van t de functie T een uiterste waarde moet hebben.

Toepassen

Opgave 11: Winstformule

Voor een klus maakt een bedrijf gebruik van de volgende winstformule $W = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2$, waarbij W de winst in honderden euro is en x het aantal werknemers dat het bedrijf voor de klus gebruikt.

a Bij welk aantal werknemers is er maximale winst?

Voor het bepalen van hoeveel werknemers het bedrijf moet inzetten, wordt er gekeken naar de extra winst per werknemer. Zo is de extra winst van de zesde werknemer $W(6) - W(5)$. De extra winst per werknemer wordt ook wel de marginale winst genoemd. Het bedrijf zorgt er voor dat er zoveel werknemers gebruikt worden dat de marginale winst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

b Hoeveel werknemers moet men dan voor de klus inzetten?

c Het antwoord van b wijkt af van dat van a. Toch kan het voor het bedrijf beter zijn, om naar de extra winst te kijken zoals bij b is gedaan. Waarom?

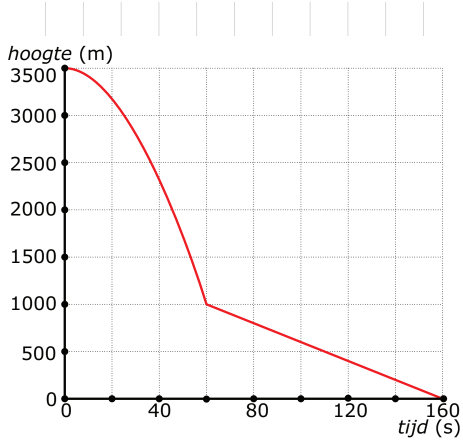
Opgave 12: Parachutist

Je ziet de grafiek die hoort bij een parachutesprong vanaf 3500 meter hoogte. Eerst maakt de parachutist een vrije val en daarna opent hij zijn parachute.

a Na hoeveel seconden heeft deze parachutist zijn valscherm geopend? Hoe zie je dat aan de grafiek?

b In de periode van vrije val is de grafiek toenemend dalend. Wat betekent dit voor de valsnelheid?

c Als de parachute uit is, is de valsnelheid constant. Hoe zie je dat aan de grafiek? Hoe groot is de valsnelheid als de parachute uitgevouwen is?



Figuur 1.10

Testen

Opgave 13

Bekijk de grafiek van de lengte van een man vanaf zijn veertiende levensjaar tot zijn huidige leeftijd.

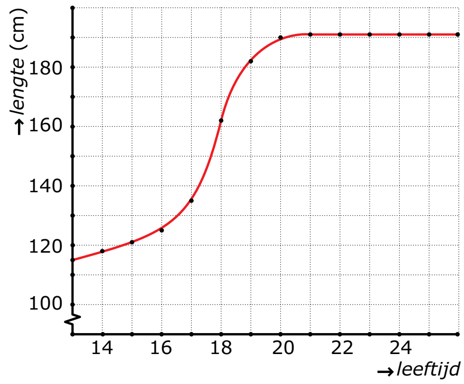
a Gedurende welk levensjaar groeit hij het snelst? Hoeveel centimeter groeit hij dat jaar?

b Gedurende welke periode is de grafiek stijgend?

c Gedurende welke periode is er sprake van een afnemende stijging?

d Gedurende welke periode is zijn lengte constant?

e Gedurende welke perioden is de groeisnelheid constant? Hoe zie je dat aan de grafiek?



Figuur 1.11

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = -0{,}5x^4 + 4x^2$ op het interval $[-4,4]$.

a Op welke intervallen daalt de grafiek?

b Op hoeveel intervallen is de grafiek afnemend stijgend?

c Geef alle extremen van deze functie.

1.2 Veranderingen per stap

Inleiding

Om veranderingen van grafieken nauwkeurig te beschrijven kijk je naar de toenames (of afnames) van de uitkomsten bij toename van de invoerwaarden met een vaste stapgrootte. Bijvoorbeeld bij een functie $y = f(x)$ bekijk je de toename van y bij een toename van x met een vaste stapgrootte. Je maakt van die toenames een toenamediagram.

Je leert in dit onderwerp

- een toenamediagram maken bij een gegeven grafiek of een gegeven functievoorschrift;
- de invloed van de stapgrootte op het toenamediagram bepalen;
- vanuit een gegeven toenamediagram (en 'beginwaarde') een mogelijke grafiek van de functie samenstellen of bepalen.

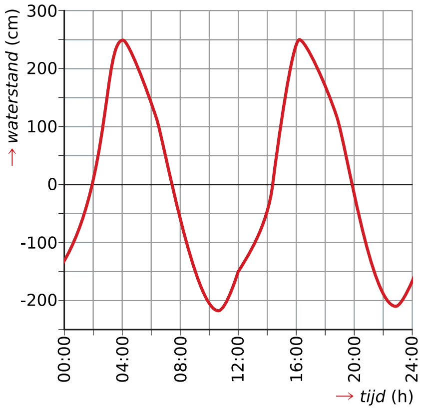
Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, afnemende of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet een grafiek met het verloop van het niveau van zeewater over een dag. De hoogte wordt gemeten in meter ten opzichte van een afgesproken hoogte in Amsterdam, het Normaal Amsterdams Peil of NAP.



Figuur 2.1

Om nauwkeuriger zicht te krijgen op de veranderingen van de waterstand, kun je ook een staafdiagram maken van de veranderingen per uur.

a Maak zo'n staafdiagram voor de periode van middernacht tot twee uur 's middags.

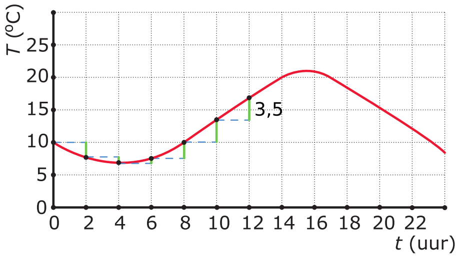
b Hoe kun je aan het staafdiagram zien of het water stijgt of daalt?

c Hoe kun je aan dat staafdiagram zien wanneer het water snel stijgt?

d In de Westerschelde moet je goed weten waar je wel en waar je niet kunt varen. Wat heb je dan aan het diagram met veranderingen van de waterstand?

Uitleg

De grafiek geeft de gemiddelde dagtemperatuur T op een bepaalde plaats weer (in °C) afhankelijk van het tijdstip t (in uren) op die dag.
De grafiek begint op $t = 0$ met een temperatuur van 10 °C. Na 2 uur is die temperatuur gezakt tot ongeveer 8 °C. De temperatuur neemt dus af met 2 °C. Er is sprake van een toename van -2 °C.
Weer twee uur later is de temperatuur nog een graad gezakt: bij $t = 4$ is er van een toename van -1 °C ten opzichte van de temperatuur bij $t = 2$.
En zo kun je doorgaan met het bepalen van de toenames (of afnames) in stappen van 2 uur. Je doorloopt de tijd met een stapgrootte van 2 uur en je maakt een tabel van de toenames:



Figuur 2.2

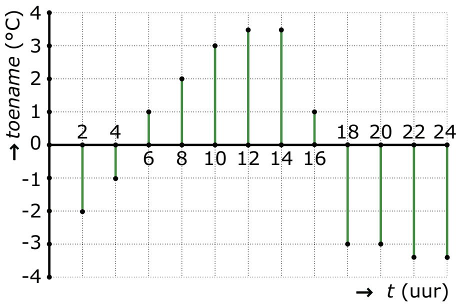
t (uur)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
ΔT		-2	-1	1	2	3	3,5	3,5	1	-3	-3	-3,5	-3,5

Tabel 2.1

Onder ΔT versta je de toename van de temperatuur T. Deze tabel kun je weergeven in een diagram. Als de toename negatief is, teken je een staafje naar beneden en als die positief is naar boven. Zo'n diagram noem je een toenamediagram.

In het toenamediagram zie je:

- waar de grafiek stijgend is, de toenamen positief zijn (echte toenamen);
- waar de grafiek dalend is, de toenamen negatief zijn (afnamen);
- waar de toenamen steeds groter worden, is de stijging toenemend, enzovoort.



Figuur 2.3

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de gemiddelde dagtemperatuur in de uitleg.

a Maak een tabel met toenames vanaf $t = 0$ met een stapgrootte van $\Delta t = 3$.

b Teken nu het bijbehorende toenamediagram van de temperatuurgrafiek met een stapgrootte van $\Delta t = 3$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

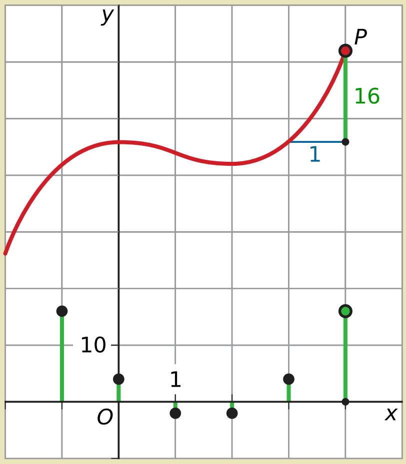
Bekijk de applet: toenamediagram

Bekijk deze grafiek op het interval: $[-2,4]$.

Als je de waarden van x met een vaste **stapgrootte** laat toenemen, kun je daarbij een tabel maken met de toenamen Δy van de functiewaarden.
Bij stapgrootte 1 ziet die tabel er zo uit:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	26	42	46	44	42	46	62
Δy		16	4	-2	-2	4	16

Tabel 2.2



Figuur 2.4

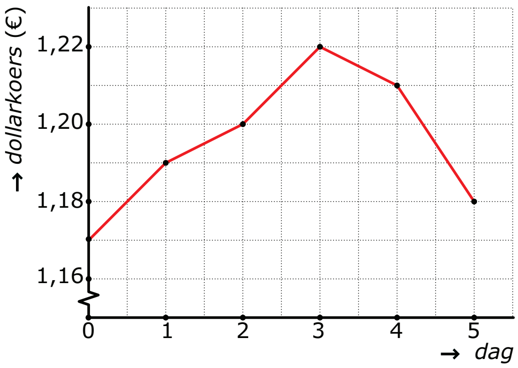
Je ziet het bijbehorende **toenamediagram** in groen in de figuur.

De hoogte van het staafje bij $x = 3$ is bijvoorbeeld $\Delta y = y(3) - y(2) = 46 - 42 = 4$. Dus het staafje bij $x = 3$ wordt 4 hoog. Bij een negatieve toename teken je het staafje naar beneden, bij $x = 1$ bijvoorbeeld teken je het staafje 2 naar beneden.

Als je het functievoorschrift weet, kun je de grafische rekenmachine gebruiken om een toenametabel te tekenen. Je voert dan $y_1 = f(x)$ en $y_2 = y_1(x) - y_1(x-1)$ in, waarin f de gegeven functie is. Als je nu met de grafische rekenmachine een tabel met stapgrootte 1 maakt, krijg je de toenametabel. Een toenamediagram kan de rekenmachine niet maken.

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek van het verloop van de koers van de dollar gedurende vijf dagen. Op dag 1 was een euro in dollars 1,19 waard.
Maak er een toenamediagram bij met stapgrootte 1 dag.



Figuur 2.5

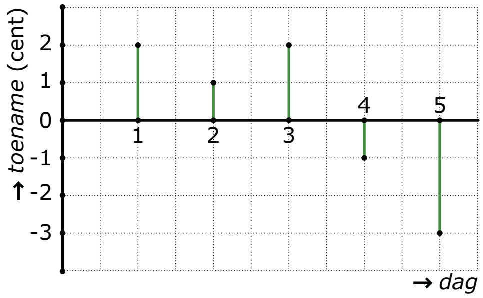
Antwoord

Maak eerst een tabel met de toenames:

dag	0	1	2	3	4	5
toename (cent)	-	2	1	2	-1	-3

Tabel 2.3

Zet vervolgens deze toenames verticaal in een diagram uit:



Figuur 2.6

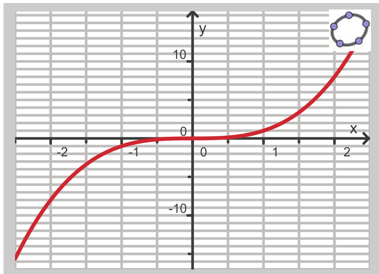
Opgave 2

Bekijk de grafiek gemaakt met GeoGebra.

Je laat de waarden van x oplopen met een stapgrootte 1. De bijbehorende verandering van de functiewaarden kun je in een tabel zetten.

a Maak een toenametabel die begint bij $x = -2$.

b Teken het bijpassende toenamediagram.



Figuur 2.7

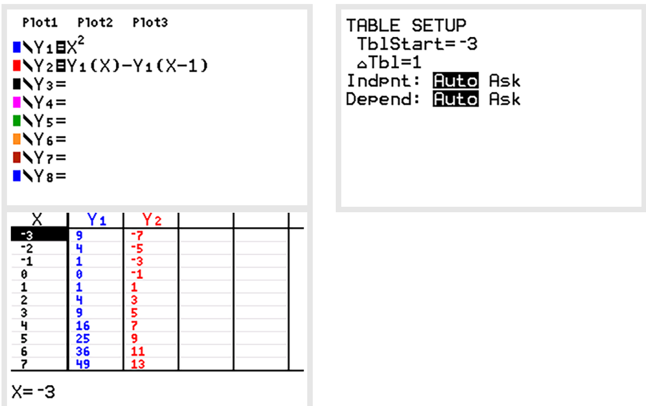
Voorbeeld 2

Bekijk de applet

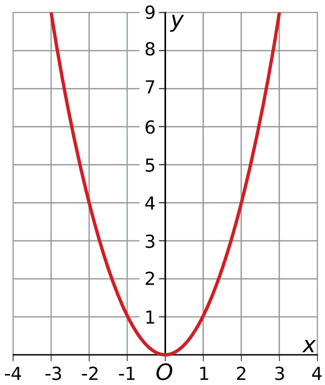
Gegeven is de functie met voorschrift $y = x^2$ op het interval $[-3,3]$. Maak een toenamediagram bij deze functie met stapgrootte 1.

Antwoord

Je kunt met de grafische rekenmachine een toenametabel maken bij een stapgrootte 1.



Figuur 2.9



Figuur 2.8

Opgave 3

Teken zelf het toenamediagram bij de functie uit **Voorbeeld 2**. Neem een stapgrootte van $\Delta x = 0{,}5$ en gebruik je grafische rekenmachine.

Opgave 4

Maak op de grafische rekenmachine de grafiek van de functie van f met voorschrift $f(x) = -x^3 + 6x$ op het interval $[-3,3]$.

a Maak een toenametabel met stapgrootte 1 die begint bij $x = -3$.

b Wat weet je op grond van alleen de toenametabel van het maximum van deze functie?

A. Het maximum ligt tussen $x = 0$ en $x = 1$, want bij die waarden horen dezelfde toenamen.

B. Het maximum ligt tussen $x = 0$ en $x = 1$, want bij die waarden horen de grootste toenamen.

C. Het maximum ligt bij $x = 1{,}5$, want precies daar gaan de toenamen over in afnamen.

D. Het maximum ligt tussen $x = 1$ en $x = 2$, daar gaan de toenamen over van positief in negatief.

c Teken het bijpassende toenamediagram.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Uit een toenamediagram kun je de grafiek van de functie weer samenstellen. Je moet daarvoor wel een punt van die grafiek weten, anders weet je niet waar je moet beginnen.

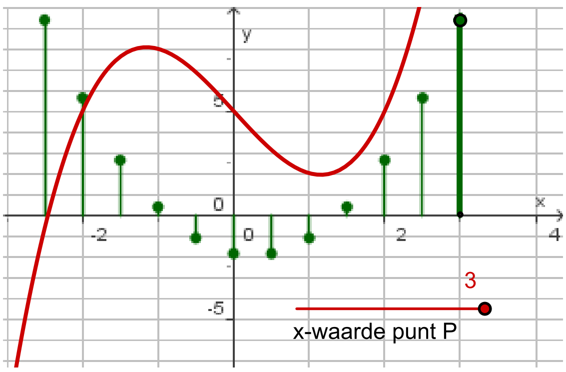
Bekijk het toenamediagram met stapgrootte $0{,}5$.
Stel dat de grafiek door het punt $P(0,10)$ gaat.

Je kunt ook vanuit het toenamediagram een tabel maken:

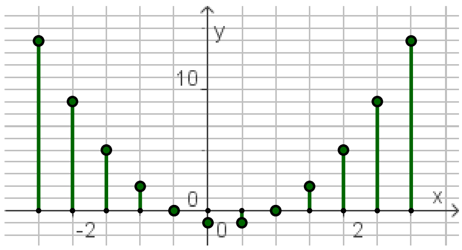
x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
Δy	5	2	0	-1	-1	0	2	5
y	9	11	11	10	9	9	11	16

Tabel 2.4

Daarmee kun je de grafiek tekenen. Kijk goed hoe je de y-waarden kunt vinden van punten die x-waarden links van 0 hebben.



Figuur 2.11



Figuur 2.10

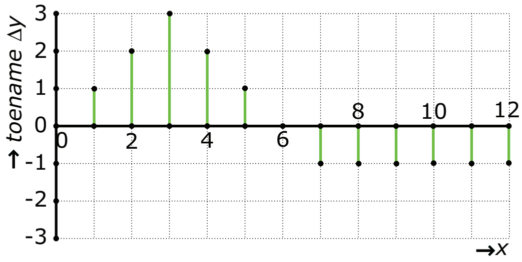
Opgave 5

Bekijk het toenamediagram van functie f in **Voorbeeld 3**.

Maak de tabel naar beide zijden af. Schets een mogelijke grafiek van f op het interval $[-3,3]$.

Opgave 6

Bekijk het toenamediagram van de grafiek van een functie f waarvoor geldt: $f(0) = 4$.



Figuur 2.12

a Maak een grafiek van de functie f.

b Je kunt dus een mogelijke grafiek van f tekenen. Waarom zijn er meerdere mogelijkheden voor de grafiek van de functie van f bij een toenamediagram? Kies uit:

A. Het toenamediagram is te onduidelijk om functiewaarden nauwkeurig uit af te lezen.

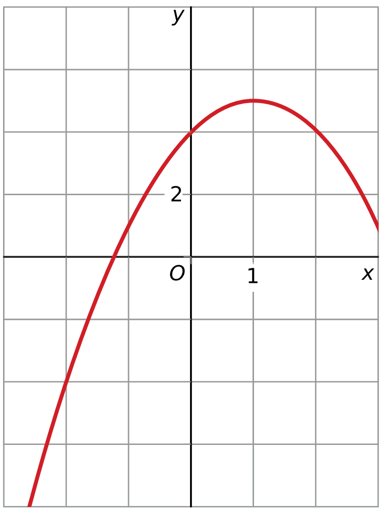
B. Omdat je niet weet hoe de functie verloopt tussen de waarden in de tabel.

C. Er zijn meerdere toenametabellen mogelijk bij dit toenamediagram.

Verwerken

Opgave 7

Teken bij de grafiek een toenamediagram met stapgrootte 1, te beginnen bij $x = -1$.



Figuur 2.13

Opgave 8

Gegeven is de functie f met voorschrift: $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 8$.

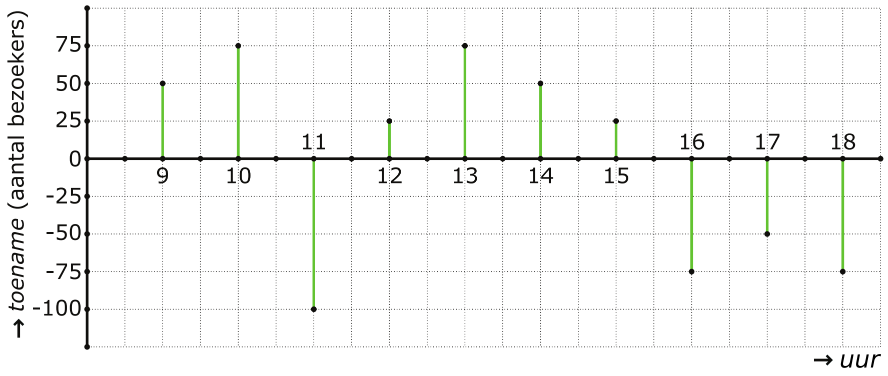
a Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van deze functie bekijken en een toenametabel maken. Teken een toenamediagram op het interval $[-3,3]$ met een stapgrootte van $0{,}5$.

b Hoe zie je aan het toenamediagram dat er precies één interval is waarop de grafiek toenemend daalt?

c Waarom kun je op grond van het toenamediagram concluderen dat er waarschijnlijk drie extremen zijn?

Opgave 9

In een museum is vanaf de opening om 8:00 uur 's morgens tot de sluitingstijd om 18:00 uur elk uur het aantal bezoekers geteld. Van deze gegevens is een toenamediagram gemaakt. Om 12:00 uur waren er 50 bezoekers.



Figuur 2.14

a Maak een grafiek van het totaal aantal bezoekers afhankelijk van het uur van deze dag, van 8:00 uur tot 18:00 uur.

b Rond welk tijdstip waren er waarschijnlijk de meeste bezoekers in het museum?

c Kun je vaststellen hoeveel bezoekers er maximaal in het museum waren op enig moment die dag? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Biologen houden het verloop van de aantallen van een bepaald soort vlinder bij in een afgesloten natuurgebied. De tabel geeft de verzamelde informatie weer:

Jaartal	2010	2011	2012	2013	2014
Aantal vlinders	2450	2050	1810	1665	1580
Verschil V t.o.v. vorig jaar		-400	-240	-145	-85

Tabel 2.5

Het lijkt erop dat het verschil V ten opzichte van het voorgaande jaar exponentieel verandert met de tijd t in jaren. Er lijkt te gelden: $V = -400 \cdot 0{,}6^{t-1}$ met $t = 0$ in het jaar 2010.

a Ga na of deze formule in overeenstemming is met de gevonden verschillen.

b Ga er vanuit dat deze formule geldig blijft in de jaren na 2014. Teken een toenamediagram van het aantal vlinders in dit natuurgebied met een stapgrootte van 1 jaar.

c Maak ook een grafiek van het aantal vlinders N in de loop van de jaren.

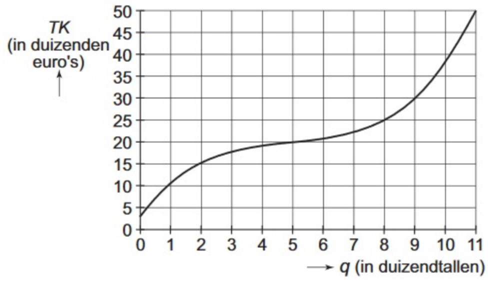
d Van wat voor soort daling is er sprake bij het aantal vlinders? Hoe kun je dat aan het toenamediagram zien?

e Het aantal vlinders van deze soort lijkt zich in dit natuurgebied te stabiliseren. Hoe kun je dat aan het toenamediagram zien? En wat betekent dit voor de grafiek van het aantal vlinders?

Toepassen

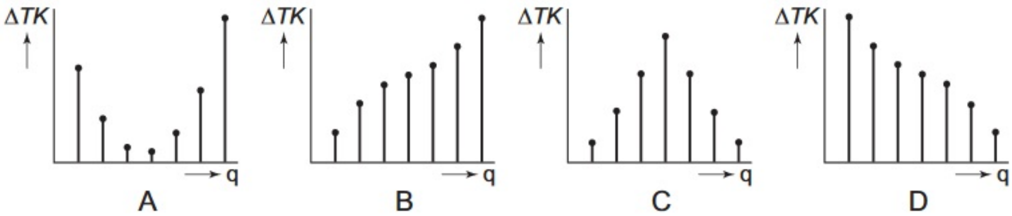
Opgave 11: Verpakkingen produceren

Een bedrijf maakt bijzondere verpakkingen. Het bedrijf heeft onderzocht hoe de kosten voor het maken van die verpakkingen samenhangen met het aantal verpakkingen. Het verband tussen de totale kosten TK (in duizenden euro's) en het aantal geproduceerde verpakkingen q (in duizendtallen) zie je in de figuur. Daaruit lees je bijvoorbeeld af dat bij een productie van 2000 verpakkingen de totale kosten € 15.000 zijn.



Figuur 2.15

In de diagrammen A, B, C en D, is de toename ΔTK van TK weergegeven. Eén van de vier diagrammen past bij de grafiek.



Figuur 2.16

a Welk toenamediagram past bij de grafiek? Licht je antwoord toe.

A. diagram A
B. diagram B
C. diagram C
D. diagram D

b Met hoeveel procent stijgen de totale kosten als de productie van 4000 naar 8000 verpakkingen gaat?

(naar: examen wiskunde A havo in 2006, eerste tijdvak)

Opgave 12: Model voor een chemische ramp

Onderzoekers hebben een model ontwikkeld voor een ramp met een chemische fabriek bij een middelgrote stad. In dit model wordt het aantal personen dat last heeft van ongemakken zoals buikloop, duizeligheid en hoofdpijn, voorgesteld door het functievoorschrift: $n(t) = -4(40-t)^3 + 150(40-t)^2 + 16000$.

Hierbij stelt t het aantal dagen na het plaatsvinden van de ramp voor en $n(t)$ het bijbehorend aantal slachtoffers.

a Plot de grafiek van n. Laat t lopen van 0 tot 40.

b Geef met intervallen aan welke soorten verandering je in de grafiek ziet.

c Na hoeveel dagen is er een maximaal aantal slachtoffers?

d De gevolgen van het ongeval zijn over het hoogtepunt heen als de toename van het aantal slachtoffers in vergelijking met twee dagen daarvoor kleiner is dan 1500. Na hoeveel dagen is dat het geval?

Testen

Opgave 13

Je ziet hier de grafiek van de lengte van een man vanaf zijn 12de levensjaar tot zijn huidige leeftijd.

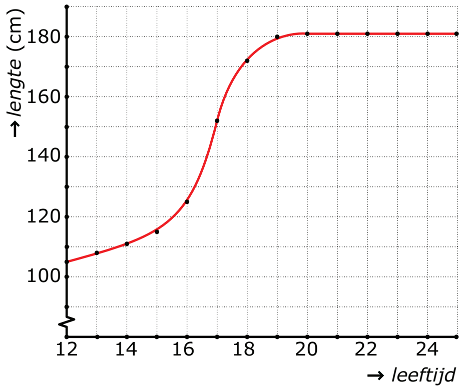
a Maak bij deze grafiek een toenamediagram met een stapgrootte van 1 jaar.

b Hoe kun je aan het toenamediagram zien dat de grafiek nooit daalt?

c Waarom mag je op grond van het toenamediagram alleen niet de conclusie trekken dat de grafiek nooit daalt?

d Gedurende welke periode is zijn lengte constant? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?

e Gedurende welke perioden is de groeisnelheid constant? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?



Figuur 2.17

Opgave 14

Bekijk met de grafische rekenmachine de grafiek van de functie $f(x) = -0{,}5x^4 + 4x^2$ op het interval $[-3,3]$.

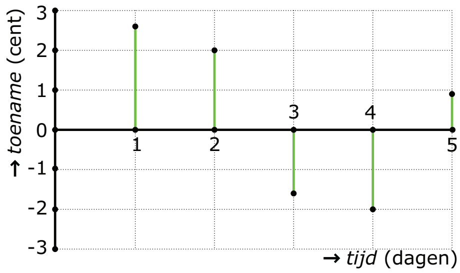
a Teken een toenamediagram met een stapgrootte van $0{,}5$.

b Hoe zie je aan het toenamediagram dat er precies één interval is waarop de grafiek van f afnemend daalt?

c Hoe kun je in het toenamediagram de plaats van de extremen van de functie terugvinden?

Opgave 15

De Amerikaanse dollar begon op dinsdag met een koers van 1,22 ten opzichte van de euro. Het toenamediagram heeft betrekking op die week van zondag tot en met vrijdag. In het diagram zie je de toename of afname van de koers per dag in tienden van centen nauwkeurig. Teken een grafiek waarin de koers van de dollar in de loop van die week zichtbaar is.



Figuur 2.18

1.3 Differentiequotiënt

Inleiding

Je hebt veranderingen in grafieken leren beschrijven in woorden en met toenamediagrammen. Bij toenamediagrammen moet je met een vaste stapgrootte werken. Maar als je wilt nagaan of een wielrenner de eerste 10 minuten gemiddeld net zoveel heeft afgelegd als de volgende 15 minuten, heb je met ongelijke intervallen te doen. In dat geval werk je met gemiddelde veranderingen.

Je leert in dit onderwerp

- de betekenis van het begrip differentiequotiënt kennen;
- tussen twee punten uit een tabel of een grafiek het differentiequotiënt bepalen;
- het differentiequotiënt van een functie op een gegeven interval berekenen;
- werken met toepassingen van het differentiequotiënt.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, afnemende of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- werken met toenamediagrammen.

Verkennen

Opgave V1

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel:

tijd (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 3.1

Figuur 3.1

a Is hij de eerste 8 km gemiddeld sneller of langzamer dan in de volgende 4 km? Waaraan zie je dat?

b Waarom is er bij deze situatie eigenlijk geen toenamediagram te maken?

Je maakt bij deze tabel een grafiek door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd, op de verticale as de afgelegde afstand. Niet alle lijnstukken zijn even steil.

c Hoe kun je de helling van zo'n lijnstuk in een getal uitdrukken?

d Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de periode van 12 kilometer tot en met 18 kilometer.

e Wat betekent het getal dat je zojuist hebt gevonden voor de wielrenner?

Uitleg

Als een zeilwagen start en de windkracht constant is, dan neemt zijn snelheid toe. Veronderstel dat voor de afgelegde afstand s (in meter) geldt: $s(t) = 1{,}2 \cdot t^2$. Hierin is t de tijd in seconden. Bekijk de grafiek.
Na 2 seconden is de afgelegde afstand $s(2) = 4{,}8$ m.
Na 6 seconden is de afgelegde afstand $s(6) = 43{,}2$ m.
In die 4 seconden is er $s(6) - s(2) = 43{,}2 - 4{,}8 = 38{,}4$ m afgelegd.

De gemiddelde snelheid is: $\frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.

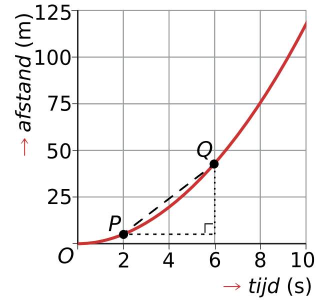
Je berekent de gemiddelde snelheid, ofwel de gemiddelde verandering van plaats, door het verschil in afstand te delen door het verschil in tijd:

gemiddelde snelheid $= \frac{\Delta \text{ afstand}}{\Delta \text{ tijd}}$.

Het teken Δ (een Griekse letter D) staat voor differentie, wat verschil betekent. Dit getal is de helling van het lijnstuk tussen de punten die horen bij $t = 1$ seconde en bij $t = 4$ seconden.

Op het interval $[2{,}6]$ verandert $s(t)$ gemiddeld met: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(6)-s(2)}{6-2} = \frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.

Dit heet een differentiequotiënt ('differentie' is 'verschil' en een quotiënt is de uitkomst van een deling).
De gemiddelde verandering van s op een gegeven interval van t is het differentiequotiënt over dat interval.
Het is ook de helling van het lijnstuk PQ.



Figuur 3.2

Opgave 1

Voor de afgelegde afstand s (in meter) van de zeilwagen in de **Uitleg** geldt dat $s = 1{,}2t^2$. Hierin is t de tijd in seconden.

a Bereken de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0{,}6]$.

b Bereken ook de gemiddelde snelheid op het interval $[6{,}10]$.

c Op welk van beide intervallen was de gemiddelde snelheid van de zeilwagen het hoogst?

Opgave 2

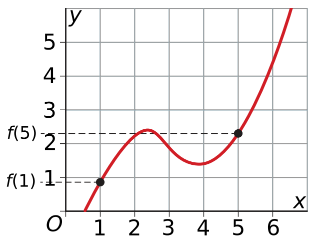
In het algemeen heb je te maken met een functie als $y = f(x)$.
Hier zie je een grafiek van een functie f.
Bekijk het interval $[1{,}5]$.

a Bereken de gemiddelde verandering van f op dit interval.
Lees functiewaarden af uit de grafiek.

b Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval $[2{,}4]$.

c Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de punten $(1, f(1))$ en $(6, f(6))$.

d Geef een interval waarop de gemiddelde verandering 2 m/s is.



Figuur 3.3

Theorie en voorbeelden

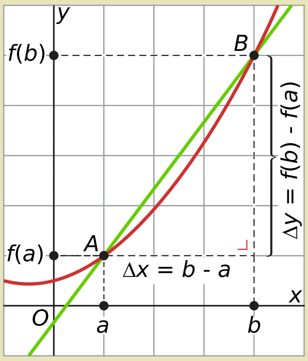
Om te onthouden

Bekijk de grafiek van de functie $y = f(x)$.

De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a,b]$ is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Deze verhouding tussen het verschil van de functiewaarden in de uiteinden van het interval en het verschil van beide x-waarden noem je het **differentiequotiënt** van de functie f op het interval $[a,b]$. Differentie betekent verschil en quotiënt is de uitkomst van een deling.

In de grafiek van f is dit differentiequotiënt gelijk aan het **hellingsgetal** of de **richtingscoëfficiënt** van de lijn door $A(a,f(a))$ en $B(b,f(b))$.



Figuur 3.4

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - x^2$.

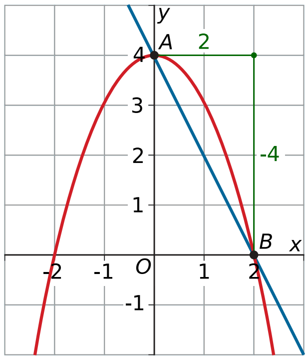
Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$ en beschrijf de betekenis van dit getal.

Antwoord

Het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{0-4}{2} = -2$.

Je ziet dat het differentiequotiënt gelijk is aan het hellingsgetal van het lijnstuk AB. Het is de gemiddelde verandering van de functiewaarden op het interval $[0,2]$. Het geeft dus de toename of de afname van $f(x)$ per eenheid van x weer.



Figuur 3.5

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-2,1]$.

b Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op het interval $[-1,1]$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

a Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval $[2,5]$.

b Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[-3,6]$.

c Geef een interval waarop de gemiddelde verandering van f gelijk is aan 0.

Voorbeeld 2

Een skater houdt zijn tussentijden bij.

tijd (min)	0	10	15	21
afstand (km)	0	3,5	5,5	8,0

Tabel 3.2

Gedurende de eerste 10 minuten skatet hij 3,5 km. Gedurende de volgende 5 minuten skatet hij 2 km.
Op welk van deze twee tijdsintervallen is hij het snelst?

Antwoord

Op het interval $[0,10]$ geldt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3{,}5-0}{10-0} = 0{,}35$.
De gemiddelde snelheid is 0,35 km/min.

Op het interval $[10,15]$ geldt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5{,}5-3{,}5}{15-10} = 0{,}40$.
De gemiddelde snelheid is 0,40 km/min.

Hoewel hij op het tweede tijdsinterval een kleinere afstand aflegt, is zijn gemiddelde snelheid daar hoger. Met behulp van differentiequotiënten kun je de prestaties eerlijk vergelijken.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a In welk van de tijdsintervallen bewoog de skater het snelst?

b De skater finisht zijn 10 km tocht na 25 minuten en 20 seconden. Hoe hard bewoog hij zich gemiddeld voort?

Opgave 6

Bij het begin van een weg naar een top van 250 m hoogte staat een waarschuwingsbord met daarop een helling van 15%. Deze grafiek geeft het hoogteverloop van die weg weer. Horizontaal is de afstand uitgezet die je hemelsbreed hebt afgelegd en verticaal de hoogte waarop je je dan bevindt.

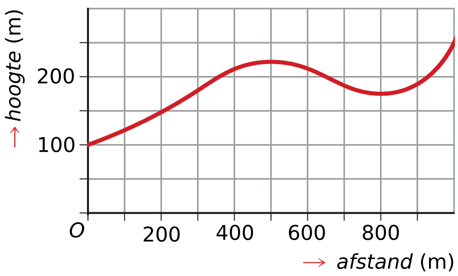
a Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering bij zo'n hellingspercentage?

b Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering gerekend over de gehele weg?

c Klopt het waarschuwingsbord?

d Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering op het interval $[400,500]$ ongeveer?

e Schat de steilste helling van deze weg.



Figuur 3.6

Voorbeeld 3

Gegeven is de kwadratische standaardfunctie $f(x) = x^2$. Druk het differentiequotiënt van f op het interval $[a,b]$ uit in a en b. Herleid zo ver mogelijk.

Antwoord

Het differentiequotiënt van f op het interval $[a,b]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{(b+a)(b-a)}{b-a} = a + b$, mits $a \neq b$.

Dus het differentiequotiënt van f op het interval $[a,b]$ is $a + b$.

Opgave 7

a Waarom is de gemiddelde helling van de grafiek van een constante functie gelijk aan 0?

b Waarom is het differentiequotiënt van de lineaire functie $f(x) = ax + b$ op elk interval gelijk aan a?

c Gegeven is de kwadratische functie $h(x) = x^2 + x$. Druk het differentiequotiënt op het interval $[a,b]$ uit in a en b. Herleid zo ver mogelijk.

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = -2x^2$. Toon aan dat het differentiequotiënt van f op elk interval $[a,a+1]$ gelijk is aan $-4a - 2$.

Verwerken

Opgave 9

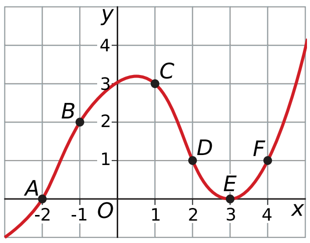
Je ziet een aantal punten op een grafiek.

a Bereken de helling van de lijn AB.

b Bereken de gemiddelde verandering van de y-waarden tussen C en F.

c Er zijn in de grafiek twee intervallen tussen getekende punten met een differentiequotiënt van 0. Welke intervallen zijn dat?

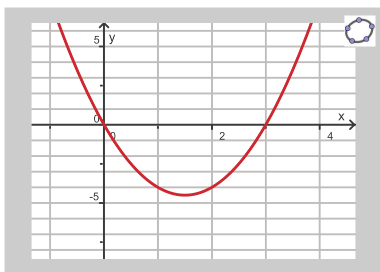
d Punt F heeft een lagere y-waarde dan punt C. Hoe kun je dat aan het differentiequotiënt op het interval $[1,4]$ zien?



Figuur 3.7

Opgave 10

Gegeven is deze grafiek gemaakt in GeoGebra.
Bereken het differentiequotiënt op het interval $[1,3]$.



Figuur 3.8

Opgave 11

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ op het domein $[-2,4]$.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$.

b Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-1,2]$.

c Wat valt je op bij b? Licht je antwoord toe.

d Het differentiequotiënt op het interval $[1,3]$ is 1. Waarom kun je nu niet zonder meer zeggen dat de grafiek op dat interval stijgend is? Welke conclusie kun je wel trekken?

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Druk het differentiequotiënt van f op het interval $[a, a+1]$ uit in a.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = 2 - 3\sqrt{2x+5}$.

a Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[-2,5; 2]$ exact.

b Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[-2,12]$ op drie decimalen nauwkeurig.

c Voor welke a geldt dat het differentiequotiënt op het interval $[0,a]$ gelijk is aan -1? Rond af op twee decimalen.

Toepassen

Opgave 14: Afkoelende koffie

Het afkoelen van een kopje koffie hangt af van de temperatuur van de koffie bij het inschenken en van de kamertemperatuur. Ook de vorm en het materiaal waarvan het kopje is gemaakt heeft invloed. Bij een bepaalde situatie geeft de formule $T(t) = 20 + 70 \cdot 0{,}82^t$ de temperatuur van een kopje koffie. Hierin is T de temperatuur in graden en t de tijd in minuten.

a Wat is de temperatuur van de koffie bij het inschenken?

b Hoeveel graden daalt de temperatuur van de koffie gemiddeld in de eerste vijf minuten?

c Bereken ook in één decimaal nauwkeurig hoeveel de temperatuur gemiddeld daalt in de volgende vijf minuten.

d De temperatuur van de koffie daalt van $t = 0$ tot $t = 5$ sneller dan van $t = 5$ tot $t = 10$. Leg uit hoe je dit aan de differentiequotiënten bij de deelvragen b en c kunt zien. Geef er ook een natuurkundige verklaring voor.

Opgave 15: Bolvormige vaas

Een vaas heeft de vorm van een aan twee kanten afgeknotte bol (zonder bloemen, maar wel met een laagje water van 3 cm). De vaas wordt buiten in de regen gezet. Door de regen stroomt de vaas langzaam vol.
$V(h)$ is het volume (in cm^3) van de vloeistof in de vaas als de hoogte van de vloeistofspiegel h cm is. Er geldt: $V(h) = 33\pi h + 4\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[3{,}5]$. Rond af op hele getallen.

b Wat betekent dit differentiequotiënt?

De regen valt met steeds wisselende kracht. Na 24 uur buiten in de regen staat de vloeistofspiegel van de vaas precies op 5 cm hoogte.

c Bereken $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ voor deze 24 uur, rond af op hele getallen. Wat betekent dit differentiequotiënt?

Testen

Opgave 16

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die tijden vind je in de tabel:

tijd t (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand a (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 3.3

a Bereken het differentiequotiënt op het tijdsinterval $[0{,}10]$.

b Welke betekenis heeft dit getal voor de wielrenner?

c Je kunt bij deze tabel een grafiek maken door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd t in minuten, op de verticale as de afgelegde afstand a in kilometer. Bereken het hellingsgetal van het lijnstuk dat hoort bij het interval $[44{,}60]$.

d Bereken voor het tijdsinterval $[18{,}44]$ de waarde $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ in twee decimalen nauwkeurig.

e Welke betekenis hebben de bij c en d gevonden getallen voor de grafiek? Geef alle goede antwoorden.

A. Ze geven de helling weer van het lijnstuk bij het begin- en het eindpunt bij het tijdsinterval.
B. Ze geven de totale toename van de afstand weer op het tijdsinterval.
C. Ze geven de gemiddelde toename van de afstand per minuut weer op het tijdsinterval.

Opgave 17

Gegeven de functie $f(x) = 0{,}5x^4$. Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0{,}2]$.

Opgave 18

Gegeven de functie $f(x) = 0{,}5x^2$. Bereken het differentiequotiënt op het interval $[p{,}2p]$ (met $p \neq 0$).

1.4 Differentiaalquotiënt

Inleiding

Als je in de auto vanuit een buitenwijk naar het centrum van de stad rijdt, leg je ongeveer 4 kilometer af in 15 minuten. Dat is 16 km/h (kilometer per uur).
Toch kun je onderweg wel een bekeuring oplopen voor het rijden van meer dan 50 km/h binnen de bebouwde kom. Je gemiddelde snelheid zegt nog weinig over je snelheid op elk moment van de route.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de verandering op een bepaald moment (het differentiaalquotiënt) benaderen;
- het begrip 'hellingsgetal in een punt' van een grafiek;
- een raaklijn in een punt van een grafiek aan die grafiek van een formule voorzien;
- werken met toepassingen van de verandering op een bepaald moment.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- werken met differentiequotiënten.

Verkennen

Opgave V1

Met een zeilwagen die Stevin in de zeventiende eeuw uitvond kun je veranderingen van de snelheid bestuderen.

In deze opgave wordt zo'n zeilwagen klaargemaakt, de zeilen worden gehesen. De zeilwagen gaat steeds sneller, er staat een flinke wind. Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s in meter de formule $s = 1{,}2t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden.

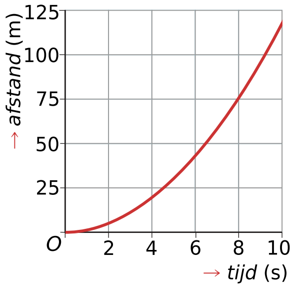

Figuur 4.2

a Hoeveel m heeft de zeilwagen na 5 s afgelegd en hoe snel rijdt hij dan?

b Kun je een formule opstellen voor de snelheid v in m/s van de zeilwagen als functie van t?

Uitleg

Bekijk de grafiek van de positie van een startende zeilwagen.



Figuur 4.3

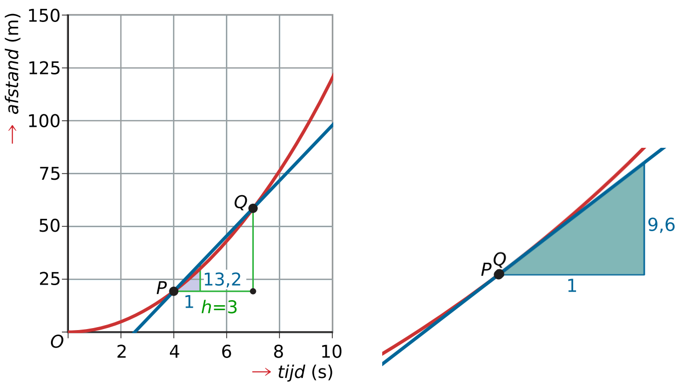
Je mag aannemen dat de snelheid constant toeneemt. De afgelegde afstand neemt dan kwadratisch toe. Voor de afgelegde afstand s (in meter) geldt bijvoorbeeld $s(t) = 1{,}2 \cdot t^2$, waarin t de tijd in seconden is.

De gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden bereken je met het differentiequotiënt: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot 4^2 - 1{,}2 \cdot 0^2}{4-0} = \frac{19{,}2}{4} = 4{,}8$.
Die gemiddelde snelheid voor de eerste 4 seconden is dus $4{,}8$ meter per seconde (m/s).

Omdat de zeilwagen versnelt (steeds sneller gaat rijden), is de snelheid op $t = 4$ hoger dan de gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden. Die snelheid op $t = 4$ kun je benaderen. Daarbij bereken je differentiequotiënten op steeds kleinere intervallen met $t = 4$ als beginwaarde.
Op het interval $[4; 4{,}1]$ is het differentiequotiënt:
$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot 4{,}1^2 - 1{,}2 \cdot 4^2}{4{,}1-4} = \frac{0{,}972}{0{,}1} = 9{,}72$.
Dit is een eerste benadering van de snelheid op $t = 4$.

Op het interval $[4; 4{,}01]$ is het differentiequotiënt:
$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot 4{,}01^2 - 1{,}2 \cdot 4^2}{4{,}01-4} = \frac{0{,}09612}{0{,}01} = 9{,}612$.
Dit is een tweede en betere benadering van de snelheid op $t = 4$.

Bekijk de applet.



Figuur 4.4

Je kunt de intervallen steeds kleiner maken en het differentiequotiënt uitrekenen om een nog betere benadering te krijgen van de snelheid op $t = 4$.

interval	differentiequotiënt
$[4; 4{,}1]$	$9{,}72$
$[4; 4{,}01]$	$9{,}612$
$[4; 4{,}001]$	$9{,}6012$
$[4; 4{,}0001]$	$9{,}60012$

Tabel 4.1

Het differentiequotiënt komt steeds dichter in de buurt van $9{,}6$, naarmate de rechtergrens van het interval dichter bij 4 komt. Je kunt nu zeggen dat bij $t = 4$ de snelheid $9{,}6$ m/s is. Die snelheid bepaal je dus door een serie differentiequotiënten te berekenen op intervallen $[4{,}4+h]$ waarin h steeds dichter bij 0 komt.

Het getal dat die serie differentiequotiënten benadert is de snelheid op $t = 4$ en de lijn PQ waarvan zo'n differentiequotiënt de richtingscoëfficiënt is, gaat over in een raaklijn aan de grafiek. Je

noemt de gevonden waarde het differentiaalquotiënt op dat tijdstip.
Dit differentiaalquotiënt is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor $t = 4$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe de snelheid van een zeilwagen op een bepaald tijdstip wordt gevonden met behulp van een rij van differentiequotiënten.

a Kies het juiste antwoord. De snelheid op $t = 4$ is:

A. hetzelfde als de gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden.
B. groter dan de gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden.
C. kleiner dan de gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden.

b Bereken zelf de differentiequotiënten op de intervallen in de tabel in de uitleg.

c Hoe groot is de snelheid op $t = 4$?

d Hoe is de snelheid op $t = 4$ zichtbaar in de grafiek? Kies het juiste antwoord.

A. Als richtingscoëfficiënt van het lijnstuk op het interval $[0,4]$.
B. Als richtingscoëfficiënt van het lijnstuk op het interval $[4; 4{,}0001]$.
C. Als richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het punt met $t = 4$.
D. Als uitkomst bij $t = 4$.

e Bereken met behulp van een rij met differentiequotiënten het differentiaalquotiënt op $t = 5$.

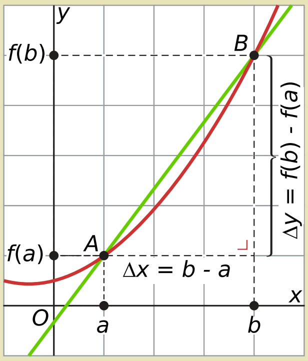
Het differentiaalquotiënt dat je bij e hebt berekend is de snelheid op $t = 5$ van de zeilwagen.
Maar het is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek als $t = 5$. Van die raaklijn weet je dus de helling.

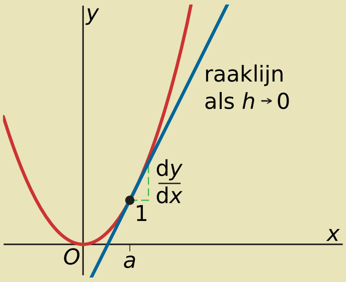
f Door welk punt gaat die raaklijn? Welke vergelijking past er dus bij?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: differentiaalquotiënt.





Figuur 4.5

Je ziet een deel van de grafiek van de functie $y = f(x)$.

De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a,b]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

De **verandering in een punt** met $x = a$ van de functie f vind je door een aantal keer het differentiequotiënt op $[a,a+h]$ te berekenen, waarbij je h steeds dichter bij 0 kiest: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Je krijgt dan een rij met differentiequotiënten die een bepaald getal benadert.

Dit getal heet het **differentiaalquotiënt** $\frac{dy}{dx}$ voor $x = a$.

In plaats van $\frac{dy}{dx}$ voor $x = a$, schrijf je ook wel $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$.

In de grafiek is het differentiaalquotiënt gelijk aan de **richtingscoëfficiënt** van de **raaklijn** in het punt van de grafiek met $x = a$.

- Als $\frac{dy}{dx} > 0$, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn positief en stijgt de grafiek dus.
- Als $\frac{dy}{dx} < 0$, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn negatief en daalt de grafiek dus.
- Als $\frac{dy}{dx} = 0$, dan is het hellingsgetal van de raaklijn 0. Er kan dan sprake zijn van een top, maar dat hoeft niet.
- Het hellingsgetal van de raaklijn in een top is altijd 0.

Op de grafische rekenmachine vind je het differentiaalquotiënt als dy/dx. Als je hier een x-waarde aan koppelt dan vind je direct het hellingsgetal van de raaklijn in dat punt aan de grafiek. Bekijk daarvoor het **Practicum: Veranderingen, differentiëren en de GR**.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met $f(x) = 4 - x^2$.
Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 1$ en beschrijf de betekenis van dit getal.

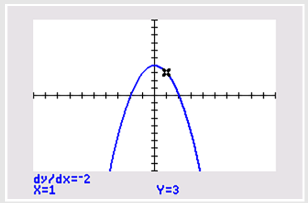
Antwoord

Maak een rij met differentiequotiënten door bij het interval $[1,1+h]$ voor h steeds kleinere waarden te kiezen. Bijvoorbeeld:

interval	differentiequotiënt
$[1;1,1]$	$-2,1$
$[1;1,01]$	$-2,01$
$[1;1,001]$	$-2,001$
$[1;1,0001]$	$-2,0001$

Tabel 4.2

Deze rij getallen lijkt te naderen naar -2. Dit is het differentiaalquotiënt van deze functie voor $x = 1$ en de veranderingssnelheid van de grafiek voor die waarde van x. Het is ook het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 1$. Je ziet in de figuur dat een grafische rekenmachine dit voor je kan berekenen, zie ook het **Practicum**.



Figuur 4.6

Opgave 2

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je bij een gegeven functie f het differentiaalquotiënt voor een bepaalde x-waarde kunt berekenen.

a Wat betekent dit getal voor de grafiek? Meerdere antwoorden kunnen goed zijn.

A. De richtingscoëfficiënt van de grafiek voor die x - waarde.
B. De richtingscoëfficiënt van het lijnstuk op het interval $[0,x]$.
C. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor die x-waarde.
D. De y-waarde bij die waarde van x.

b Welke betekenis heeft dit getal voor de functiewaarden?

A. De grootte van de functiewaarde bij die waarde van x.
B. De snelheid waarmee de functiewaarden veranderen voor die waarde van x.
C. De gemiddelde verandering van de functiewaarden.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je wilt het differentiaalquotiënt van f bepalen voor $x = 2$.

a Maak zelf de tabel met differentiequotiënten op het interval $[2,2+h]$ waarin h achtereenvolgens de waarden $0,1$; $0,01$; $0,001$ en $0,0001$ heeft.

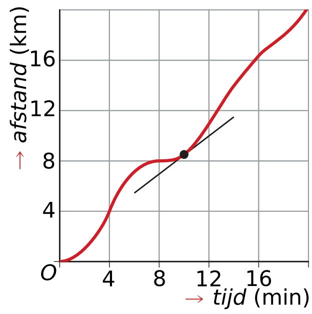
b Hoe groot is dus het differentiaalquotiënt voor $x = 2$?

c Welke vergelijking heeft de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$?

Voorbeeld 2

Bekijk de grafiek van de afgelegde afstand s van een auto op een binnenweg, uitgezet tegen de tijd t.

Je ziet dat de snelheid eerst langzaam toeneemt totdat hij na 4 minuten maximaal is. Dan neemt de snelheid weer af. Bij $t = 4$ gaat de grafiek van toenemend stijgend over in afnemend stijgend. Na 8 minuten staat de auto even stil om daarna weer langzaam op te trekken. Bepaal de snelheid van deze auto na precies 10 minuten.



Figuur 4.7

Antwoord

De snelheid na precies 10 minuten is het differentiaalquotiënt op $t = 10$. Omdat er geen functievoorschrift bij deze grafiek is, bepaal je de waarde van $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ voor $t = 10$ met behulp van de grafiek en de getekende raaklijn.

Je ziet dat die raaklijn behalve door het punt $(10; 8{,}5)$ ook (bij benadering) door het punt $(12; 10)$ gaat. De helling van de raaklijn is daarom (ongeveer): $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10{,}0-8{,}5}{12-10} = 0{,}75$.

De auto had na precies 10 minuten een snelheid van 0,75 km/minuut. Dat is ongeveer 45 km/uur.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je een tijd-afstand grafiek van een auto.

a Wanneer was de snelheid van de auto hoger, bij $t = 4$ of bij $t = 16$?

b Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn bij $t = 8$?

c Hoeveel minuten heeft de auto ongeveer met constante snelheid gereden?

d Bereken de snelheid van de auto bij $t = 4$.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 1$ zonder een rij met differentiequotiënten te maken.

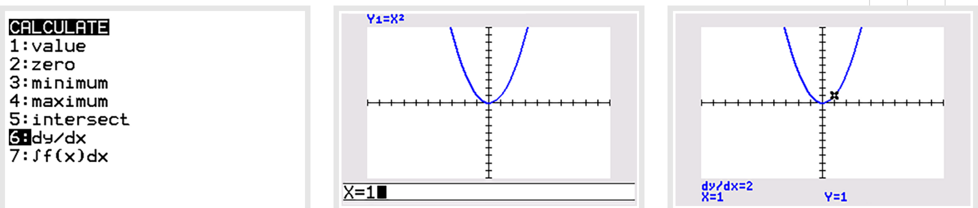
Antwoord

Het differentiequotiënt op het interval $[1, 1 + h]$ is:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2 + h$$

Dit differentiequotiënt heeft voor elke waarde van h (behalve $h = 0$) de waarde $2 + h$. Hoe dichter h bij 0 komt, hoe dichter $2 + h$ bij 2 komt. Dit betekent dat het differentiaalquotiënt voor $x = 1$ gelijk is aan 2.

Ook met de grafische rekenmachine kun je het differentiaalquotiënt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = 1$ meteen vinden:



Figuur 4.8

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** zie je de functie $f(x) = x^2$.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[2, 2 + h]$ en benader hiermee het differentiaalquotiënt voor $x = 2$.

b Controleer je antwoord bij a met de grafische rekenmachine.

c Stel een vergelijking op voor de raaklijn aan de grafiek voor $x = 2$.

d Er is een punt op de grafiek waarin de helling van de raaklijn precies het tegenovergestelde is van die bij a. Welk punt is dat? Licht je antwoord toe.

e In welk punt van de grafiek is de helling 0?

Verwerken

Opgave 6

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 5x^2 - x^3$ op de grafische rekenmachine.

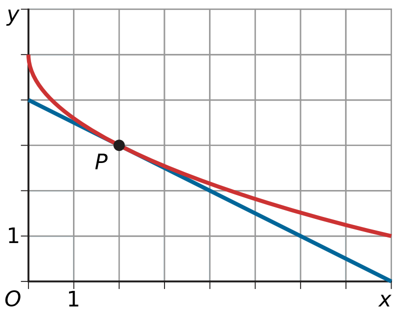
a Bereken het hellingsgetal van de raaklijn aan f voor $x = 2$ met behulp van een rij differentiequotiënten.

b Je kunt van tevoren aan de grafiek zien of het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 2$ positief of negatief is. Waaraan kun je dat zien?

c Stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 2$ aan de grafiek van f.

Opgave 7

Je ziet een deel van een grafiek met een raaklijn aan de grafiek in het punt bij $x = 2$.



Figuur 4.9

a Bepaal het differentiaalquotiënt voor $x = 2$ met behulp van de grafiek.

b Stel de vergelijking op van de getekende raaklijn.

De grafiek hoort bij de functie $f(x) = 5 - \sqrt{2x}$.

c Controleer je antwoord bij a door het differentiaalquotiënt door de grafische rekenmachine te laten bepalen.

Opgave 8

Gegeven is de functie met voorschrift $g(x) = \frac{4}{x}$ op het interval $[-5, 5]$.

a Bereken de verandering van $g(x)$ voor $x = 1$.

b Er is een punt op de grafiek van g waar de helling dezelfde waarde heeft als die in het punt $(1, 4)$. Welk punt is dat? Licht je antwoord toe.

c Voor $x = 0$ heeft de functie g geen functiewaarde. Wat betekent dit voor de helling? En wat is er met de grafiek aan de hand?

Opgave 9

De concentratie C van een bepaalde stof die is opgelost in water, neemt met de tijd af volgens de formule $C(t) = 10 \cdot 0{,}9^t$. Hierin is C in gram per liter (g/L) en t in uren.

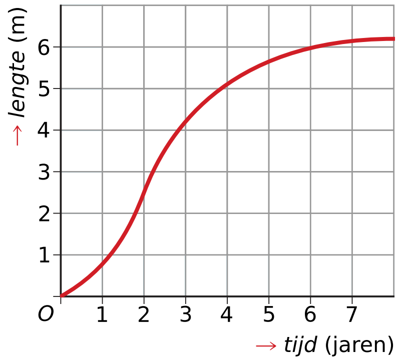
a Er verdwijnt niet elk uur een even grote hoeveelheid van deze stof uit het water. Hoe komt dat?

b Hoeveel gram van deze stof verdwijnt er gemiddeld in de eerste 5 uren? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c De vervalsnelheid van deze stof op $t = 5$ is niet gelijk aan de hoeveelheid die er tot dan toe gemiddeld per uur is verdwenen. Bereken deze vervalsnelheid in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Bekijk de grafiek van de lengtegroei van een boom. Neem de grafiek over.



Figuur 4.10

a Hoeveel meter per jaar groeit deze boom gemiddeld, gerekend over de eerste vijf jaar?

b Wat is de groeisnelheid na precies vijf jaar? Geef een zo nauwkeurig mogelijke schatting.

c Op welk tijdstip is de groeisnelheid het grootst? Licht je antwoord toe.

d Welke waarde krijgt de groeisnelheid uiteindelijk als de boom gezond blijft?

Opgave 11

De baan van een vuurpijl is bij benadering parabolisch tot hij uit elkaar spat. Bij deze baan past de formule $h(x) = -x^2 + 10x$, waarin zowel h als x in meters wordt uitgedrukt.

a Welke helling heeft de baan als de vuurpijl wordt afgeschoten?

b In welk punt van de baan is de helling 0?

c Als de pijl horizontaal 8 meter heeft afgelegd, spat hij uiteen. Hoe hoog is de pijl dan en welke helling heeft de baan op dat punt?

Toepassen

Als een voorwerp van niet al te grote hoogte naar beneden (richting aarde) valt, dan geldt voor de afgelegde weg s de formule:

$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$

Hierin is:

- s de afgelegde weg in m
- t de tijd in s
- $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de gravitatieconstante

De luchtweerstand wordt dan buiten beschouwing gelaten.

Opgave 12

Een steen valt van een loodrechte rotswand 500 meter naar beneden. Voor de afgelegde weg s (in meter) geldt de formule $s(t) = 4{,}9t^2$, waarin t de tijd in seconden is, tenminste zolang de steen nog aan het vallen is en niet op de grond terecht is gekomen.

a Bereken de gemiddelde snelheid van de steen gedurende de eerste vijf seconden.

b Bereken de snelheid van de steen na precies vijf seconden.

c Bereken de snelheid waarmee de steen op de grond terechtkomt.

Opgave 13

Het Empire State Building in New York is ongeveer 380 m hoog. Het verhaal gaat dat een muntje wat je van die hoogte laat vallen een mens kan doden.

Met welke snelheid komt zo'n muntje op de grond?

Testen

Opgave 14

Een hoeveelheid H (in kilogram) groeit exponentieel volgens de formule $H(t) = 2500 \cdot 1{,}2^t$ met t in dagen.

a Bereken de gemiddelde toename van deze hoeveelheid op het interval $[0,4]$.

b Bereken de toenamesnelheid van deze hoeveelheid op $t = 4$ met behulp van de grafische rekenmachine.

c Deze toenamesnelheid op $t = 4$ kun je in de grafiek aangeven. Leg uit hoe dat gaat.

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 4$.

a Bereken het differentiaalquotiënt van f voor $x = 3$ met behulp van een rij differentiequotiënten. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 3$ aan de grafiek van f.

c Noem een punt op de grafiek van f waarvan het hellingsgetal van de raaklijn aan f door dat punt 0 is.

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het bepalen van een differentiaalquotiënt.

- **Veranderingen, differentiëren en de TI84**
- **Veranderingen, differentiëren en de TInspire**
- **Veranderingen, differentiëren en de Casio**
- **Veranderingen, differentiëren en de HPprime**
- **Veranderingen, differentiëren en de NumWorks**

1.5 Hellingsgrafiek

Inleiding

Je kunt bij veel functies in een punt van de grafiek de helling van die grafiek berekenen. Bij de meeste x-waarden hoort wel een hellingsgetal. En dus kun je een grafiek maken van het hellingsgetal afhankelijk van de waarde van x. Zo'n 'hellingsgrafiek' zegt dan weer het nodige over de grafiek van de functie zelf.

Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- bij een gegeven grafiek een hellingsgrafiek schetsen;
- bij een gegeven functievoorschrift een hellingsgrafiek tekenen en in eenvoudige gevallen het voorschrift van de hellingsfunctie bepalen;
- uit een gegeven hellingsgrafiek gegevens over de bijbehorende functie aflezen;
- werken met tekenschema's van de hellingswaarden van een functie.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- met een differentiequotiënt de gemiddelde verandering op een interval uitrekenen;
- met een differentiaalquotiënt de verandering voor een bepaalde invoerwaarde berekenen.

Verkennen

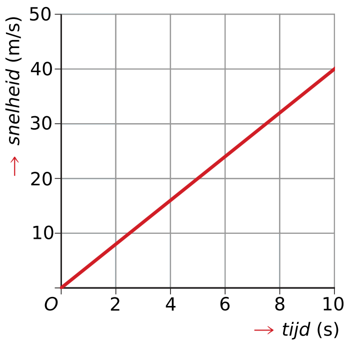
Opgave V1

Je zit op een stilstaande zeilwagen. Als je het zeil hijst, neemt je snelheid v door de windkracht toe. Bij een constante windkracht neemt de snelheid recht evenredig met die windkracht toe. Je ziet een snelheidsgrafiek bij een constante windkracht.

a Welke formule past bij deze grafiek?

b Schets de bijbehorende grafiek voor de afgelegde afstand.

c Kun je daar een formule bij verzinnen en zo berekenen welke afstand je na 20 seconden hebt afgelegd?



Figuur 5.2

Uitleg

Bekijk de applet.

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ met daarin de raaklijn aan de grafiek in het punt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. De richtingscoëfficiënt van die raaklijn bepaalt de helling van de grafiek bij $x = \frac{1}{2}$.

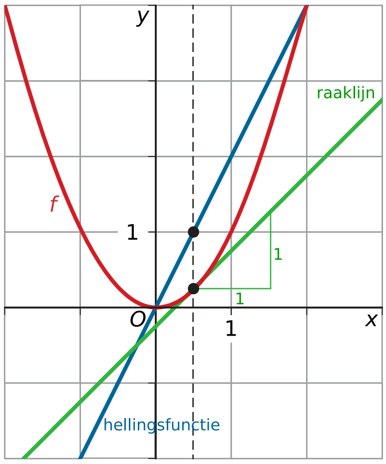
Als je de waarden van x verandert, veranderen ook de hellingsgetallen van de raaklijnen. Je kunt van die hellingsgetallen een afzonderlijke grafiek maken: de hellingsgrafiek. De bijbehorende functie wordt de hellingsfunctie $f'(x)$ genoemd. Die zie je ook getekend.

Als je de grafiek van de functie f en die van zijn hellingsfunctie f' vergelijkt, dan valt op:

- als de grafiek stijgt, is de helling positief (en omgekeerd);
- als de grafiek daalt, is de helling negatief (en omgekeerd);
- in toppen van de grafiek (extremen van de functie) is de helling 0.

Verder zie je dat de grafiek van f van afnemende daling overgaat naar een toenemende stijging. Dit betekent dat de hellingen van de raaklijnen steeds groter worden; dit zie je ook terug in de hellingsgrafiek, de grafiek is namelijk een stijgende rechte lijn.

Deze eigenschappen kun je goed gebruiken om uit een hellingsgrafiek de karakteristieke eigenschappen van de grafiek van f af te leiden. Uit de hellingsgrafiek van een functie kun je bijvoorbeeld de (lokale) extremen aflezen.



Figuur 5.3

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $f(x) = x^2$ in de **Uitleg**. Als je de grafiek op de grafische rekenmachine maakt, kun je met $\frac{dy}{dx}$ in elk punt de helling bepalen.

a Vul de tabel in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							

Tabel 5.1

b Teken met behulp van de tabel in a zelf de hellingsgrafiek van deze functie.
Ga na dat die hellingsgrafiek een rechte lijn wordt.

c Wat betekent $f'(x) = 0$ voor de grafiek van f?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

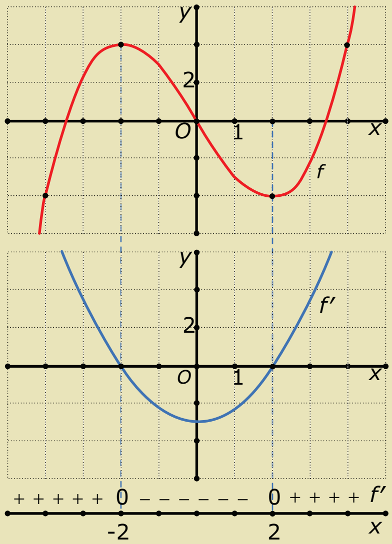
Bekijk de applet: Hellingsgrafiek

Een functie $y = f(x)$ heeft meestal in een punt van de grafiek een helling die wordt bepaald door het differentiaalquotiënt in dat punt.

Van die hellingsgetallen kun je ook weer een grafiek maken. Je ziet de grafiek van een functie (in rood) met de **hellingsgrafiek** (in blauw). De bijbehorende functie van de hellingsgrafiek wordt de **hellingsfunctie** of **afgeleide** van f genoemd en kun je korter schrijven als f' (spreek uit f accent). Je ziet:

- als de hellingsfunctie positieve waarden heeft, stijgt de bijbehorende functie;
- als de hellingsfunctie negatieve waarden heeft, daalt de bijbehorende functie;
- met wat voor soort stijging/daling je te maken hebt;
- waar de hellingsfunctie de waarde 0 heeft, heeft de grafiek van de bijbehorende functie een horizontale raaklijn; vaak gaat het daarbij om extremen van de functie.

Hieruit blijkt dat vooral het positief, negatief, of 0 zijn van de hellingsfunctie van belang is om het verloop van de grafiek van een functie te beschrijven. Dezelfde gegevens kun je ook terugvinden in een **tekenschema**, dat je onder de hellingsgrafiek ziet getekend. Een tekenschema is een getallenlijn waarop je aangeeft wanneer een functie positief, negatief of 0 is. Hoe steil de grafiek moet lopen kun je niet van een tekenschema aflezen. Wel waar toppen zitten.

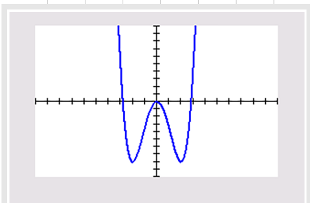


Figuur 5.4

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2$.

Teken de grafiek van de bijbehorende hellingsfunctie f'.



Figuur 5.5

Antwoord

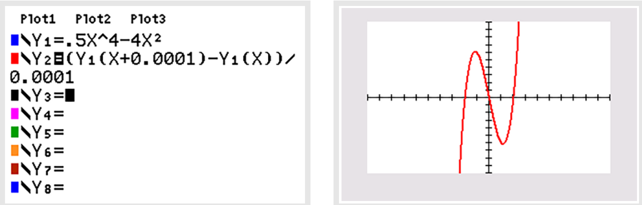
Maak eerst met behulp van de grafische rekenmachine een tabel met hellingsgetallen.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x) = \frac{dy}{dx}$	-30	0	6	0	-6	0	30

Tabel 5.2

Teken de bij deze tabel passende grafiek.

Je kunt ook direct de grafische rekenmachine een goede benadering van de hellingsgrafiek laten tekenen. Daartoe laat je hem voor willekeurige x het differentiaalquotiënt benaderen door een differentiequotiënt op het interval $[x; x + 0{,}001]$ en daarvan een grafiek maken. Bekijk dit in het **Practicum**.



Figuur 5.6

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0{,}5x^3 - 6x$.
In elk punt heeft de grafiek van f een bepaalde helling, die wordt bepaald door het differentiaalquotiënt $f'(x)$ in dat punt.

a Vul de tabel in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							

Tabel 5.3

b Met behulp van de tabel bij a kun je de hellingsgrafiek van de gegeven functie handmatig tekenen. Dat kan echter ook met de grafische rekenmachine. Maak die grafiek van f'.

c Welke waarde heeft $f'(x)$ in de toppen van de grafiek van f?

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

e Welke extreme waarde heeft $f'(x)$ en wat betekent dit voor de grafiek van f?

Opgave 3

Er is verband tussen de grafiek en de hellingsgrafiek van een functie. Kies telkens het juiste antwoord.

a Wat betekent het voor de grafiek van de functie als de hellingsgrafiek onder de x-as ligt?

A. De functiewaarden zijn negatief.
B. De grafiek is stijgend.
C. De grafiek is dalend.
D. De grafiek heeft een minimum.

b Soms is een grafiek toenemend stijgend. Hoe zie je dat aan de hellingsgrafiek?

A. De hellingsgrafiek ligt boven de x-as.
B. De hellingsgrafiek is stijgend.
C. De hellingsgrafiek ligt boven de x-as en is stijgend.
D. De hellingsgrafiek heeft een maximum.

c Hoe vind je de extremen van een functie uit de hellingsgrafiek?

A. Je bekijkt voor welke waarden van x de hellingsgrafiek een maximum of een minimum heeft.

B. Je bekijkt voor welke waarden van x de helling overgaat van positief in negatief of omgekeerd.

C. Je bekijkt voor welke waarden van x de helling de waarde 0 heeft.

D. Dat kun je niet uit de hellingsgrafiek aflezen.

Voorbeeld 2

De hellingsfunctie zegt veel over het verloop van een grafiek. Het gaat er dan vooral om waar de hellingen positief, negatief of 0 zijn. Daarvoor heb je geen hellingsgrafiek nodig, een tekenschema van de afgeleide is genoeg.

Je ziet hier een tekenschema van de hellingsfunctie van een onbekende functie f.

+ + + + + + 0 − − − − 0 + + + + + $f'(x)$

-1 2 x

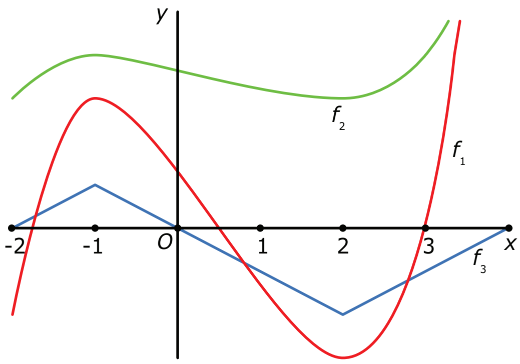
Figuur 5.7

Schets een mogelijke grafiek van f.

Antwoord

Als de hellingsfunctie positief is, is de grafiek van f stijgend, als de hellingsfunctie negatief is, is die grafiek dalend. Dit betekent dat:

- op het interval $\langle \leftarrow, -1\rangle$ de grafiek moet stijgen;
- op het interval $\langle -1, -2\rangle$ de grafiek moet dalen;
- op het interval $\langle 2, \rightarrow\rangle$ de grafiek moet stijgen.



Figuur 5.8

Welke waarden $f(x)$ precies aanneemt is niet bekend. Daarom kies je zelf een startpunt, bijvoorbeeld $(0,0)$. De helling is daar negatief, dus de grafiek dalend. Hoe steil, is onbekend. Verder heeft de grafiek een maximum bij $x = -1$, omdat daar de helling overgaat van positief in negatief. Een minimum treedt op bij $x = 2$, omdat dan de helling van negatief in positief verandert.

Je ziet drie mogelijke grafieken. Maar er zijn nog veel meer mogelijkheden. De grafieken hoeven niet door het punt $(0,0)$ te gaan.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = x^3$.

a Welke van deze tekenschema's is van de bijbehorende hellingsfunctie?

+ + + + + 0 − − − − − $f'(x)$

0 x

A

− − − − − 0 + + + + $f'(x)$

0 x

B

+ + + + + 0 + + + + $f'(x)$

0 x

C

− − − − − 0 − − − − $f'(x)$

0 x

D

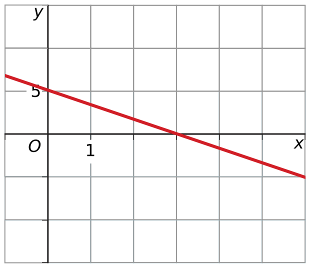
Figuur 5.9

b Voor $x = 0$ is de helling van de grafiek van f gelijk aan 0.
Waarom heeft de grafiek van f geen extreme waarde voor $x = 0$?
(Geef alle goede antwoorden aan.)

A. De grafiek is altijd stijgend, behalve bij $x = 0$.
B. Het tekenschema van de afgeleide wisselt bij $x = 0$ niet van teken.
C. De functie heeft geen horizontale raaklijn voor $x = 0$.
D. De functie heeft wel een horizontale raaklijn voor $x = 0$ maar gaat niet van stijgend naar dalend.

Opgave 5

Je ziet de hellingsgrafiek van functie f.

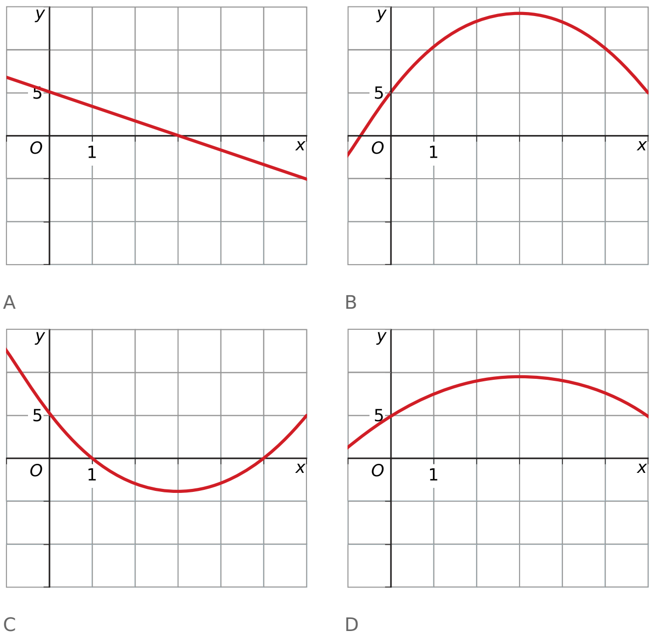


Figuur 5.10

a Kies uit de volgende antwoorden. De grafiek van f heeft:

A. precies één extreme waarde van 6 voor $x = 0$;
B. geen extremen want de hellingsgrafiek is dalend;
C. geen extremen want de grafiek van de functie zelf is ook dalend;
D. een maximum voor $x = 3$

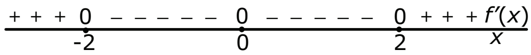
b Als $f(0) = 5$, welke van deze grafieken A, B, C of D is dan een mogelijke grafiek van f?



Figuur 5.11

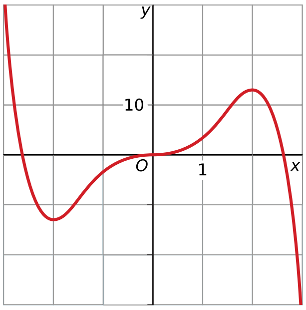
Opgave 6

Bekijk het tekenschema van de hellingsfunctie van f. De grafiek van f gaat door het punt $(0,0)$.

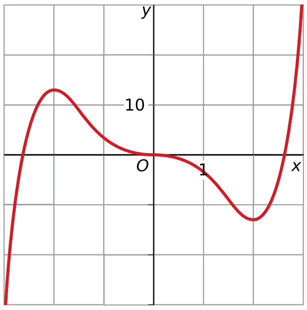


Figuur 5.12

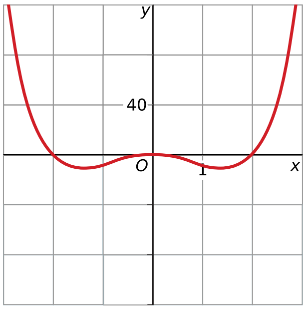
Welke van deze grafieken is een mogelijke grafiek van f?



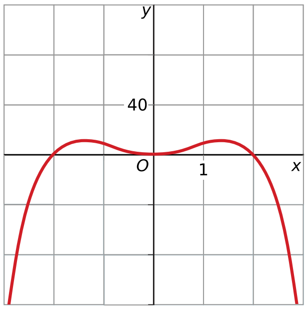
A



B



C



D

Figuur 5.13

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Stel een voorschrift op voor de hellingsfunctie $f'(x)$.

Antwoord

Je kunt dit doen door eerst met behulp van de grafische rekenmachine voor een aantal x waarden $\frac{dy}{dx}$ uit te rekenen en deze in een tabel te zetten.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

Tabel 5.4

In de tabel lijkt het er op dat er sprake is van een lineair verband. Je ziet dat $f'(x)$ steeds precies 2 keer de x-waarde is. Je kunt de tabel nog uitbreiden om te bekijken of deze regelmaat blijft opgaan. Als je dit doet, zul je zien dat dit inderdaad het geval is. Je kunt niet alle mogelijkheden uitproberen, maar je mag er nu vanuit gaan dat $f'(x) = 2x$.

Opgave 7

Gegeven is de kwadratische functie $f(x) = x^2 + 4$.

a Stel de formule van de hellingsfunctie op met behulp van een tabel van $f'(x)$.

b Je kunt deze formule ook vinden door het differentiequotiënt op $[x, x+h]$ te berekenen. Bereken dit differentiequotiënt en laat h steeds dichter naar 0 naderen.

c Vergelijk de formules van a en b met elkaar. Waarom is de werkwijze bij b beter als je een formule voor de hellingsfunctie zoekt?

Opgave 8

Voor een optrekkende zeilwagen geldt $a(t) = 1{,}2t^2$, waarin a de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconden is.

a De snelheid van de zeilwagen na 5 seconden is $a'(5)$. Bereken deze snelheid in meter per seconde (m/s) en in kilometer per uur (km/h).

b De snelheid v is een functie van t die hoort bij de hellingsgrafiek $a'(t)$.
Teken de grafiek van v en stel een formule op voor $v(t)$.

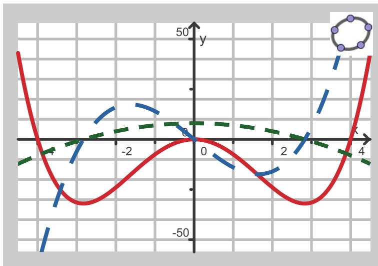
c Na hoeveel seconden beweegt de zeilwagen met een snelheid van 50 kilometer per uur (km/h)? Rond af op één decimaal.

Verwerken

Opgave 9

Je ziet hier drie grafieken gemaakt met GeoGebra.

Welke van de twee gestippelde grafieken is de hellingsgrafiek van de rode grafiek?



Figuur 5.14

Opgave 10

Bekijk het tekenschema van de hellingsfunctie van een functie g.
Schets een mogelijke grafiek van g.

x		-2		0		1		3	
$g'(x)$	− − − − −	0	− − −	0	+	0	− − − −	0	+ + + +

Figuur 5.15

Opgave 11

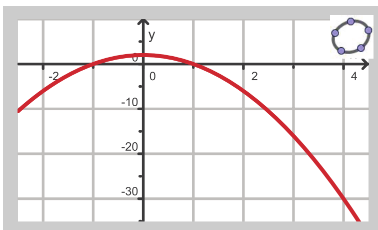
Bekijk de hellingsgrafiek van functie f, gemaakt met GeoGebra.

a Op welk interval stijgt de grafiek van f?

b Voor welke waarde(n) van x heeft de grafiek van f een maximum?

c Kun je uit de hellingsgrafiek aflezen hoe groot dit maximum is?

d Neem aan dat $f(0) = 2$. Schets de grafiek van f.



Figuur 5.16

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^2 + 3x$.
Stel de formule op van de hellingsgrafiek van f door eerst een tabel van differentiaalquotiënten te maken.

Opgave 13

Er zijn vier functies gegeven:

- $f(x) = -x^2 + 4$
- $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
- $h(x) = \frac{4}{x}$
- $k(x) = -x^4 + 4x$

a Bereken elk van deze functies het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 1$.

b Teken van elk van deze functies de grafiek van de hellingsfunctie.

c Bepaal met behulp van de hellingsgrafiek de extremen van de gekozen functie.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 8x$.

a Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van f zo in beeld brengen dat alle drie de nulpunten en de twee toppen zichtbaar zijn. Toon aan dat deze grafiek de x-as snijdt in het punt $(4,0)$.

b Bereken het hellingsgetal van de grafiek in dit punt.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 4$.

d Teken de grafiek van de afgeleide van f.

e Met behulp van de grafiek van die afgeleide kun je de extremen van f berekenen. Doe dat met behulp van de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 15: Elektrische auto

Een elektrische auto trekt op als het stoplicht op groen springt. Voor de afgelegde weg geldt: $s(t) = 1{,}6t^2$ waarin s de afgelegde weg in meters en t de tijd in seconden. (Een elektrische auto hoeft niet te schakelen.)

a De snelheid van deze auto wordt uitgedrukt in meter per seconde. Teken de grafiek van de snelheid v van deze auto als functie van de tijd t.

b Als het goed is, is je grafiek van de snelheid een rechte lijn. Stel een bijpassende formule op voor de snelheid $v(t)$.

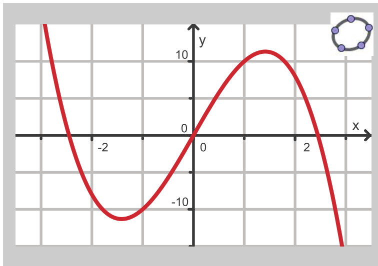
c Na hoeveel seconden is de snelheid meer dan 80 km/h? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Gegeven de functie $f(x) = x^2 - 4x$.
Teken de grafiek van de bijbehorende hellingsfunctie.

Opgave 17



Figuur 5.17

Je ziet de hellingsgrafiek van een functie g, getekend met GeoGebra.

De grafiek van deze functie gaat door het punt $(2,4)$.

Teken een mogelijke grafiek van g.

Opgave 18

Dit is een tekenschema van de hellingsfunctie van een functie f.

+ + +	0	− − −	0	+ + +	$f'(x)$
	0		3		x

Figuur 5.18

a Voor welke waarde van x heeft deze functie een maximum?

b Op welk interval is de grafiek van deze functie dalend?

c Maak een schets van een mogelijke grafiek van f die door $(0,1)$ gaat.

Opgave 19

Laat met het differentiequotiënt op $[x, x+h]$ zien dat $f'(x) = 8x$ de afgeleide is van $f(x) = 4x^2 + 1$.

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het maken van hellingsgrafieken.

- **Veranderingen, differentiëren en de TI84**
- **Veranderingen, differentiëren en de TInspire**
- **Veranderingen, differentiëren en de Casio**
- **Veranderingen, differentiëren en de HPprime**
- **Veranderingen, differentiëren en de NumWorks**

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Veranderingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- toenemende, afnemende of constante stijging of daling — extremen — toenametabel — vaste stapgrootte — toenamediagram
- gemiddelde verandering — differentiequotiënt — koorde
- veranderingssnelheid in een punt — differentiaalquotiënt — raaklijn
- hellingsgrafiek — hellingsfunctie — tekenschema

Activiteitenlijst

- bij een functie (of grafiek) aangeven waar hij (toenemend, afnemend) stijgt en daalt; — bij een functie (of grafiek) een toenamediagram tekenen en omgekeerd bij een toenamediagram mogelijke grafieken van een bijpassende functie tekenen;
- bij een functie (of grafiek) het differentiequotiënt op een gegeven interval berekenen en de betekenis daarvan omschrijven;
- bij een functie (of grafiek) het differentiaalquotiënt voor een gegeven invoerwaarde berekenen en de betekenis ervan omschrijven — het hellingsgetal van een raaklijn aan een grafiek berekenen;
- bij een functie (of grafiek) een hellingsgrafiek tekenen — uit een hellingsgrafiek (of tekenschema) eigenschappen van de functie (stijgen, dalen, extremen) aflezen — hellingsfuncties opstellen.

Achtergronden

Het wiskundig beschrijven van veranderingen is nog niet zo heel oud. Eigenlijk begon het allemaal met de Fransman **Nicole Oresme (1323—1382)** die de ‘grafiek’ bedacht om het bewegen van voorwerpen langs een rechte lijn te beschrijven.

Later gebruikte Galileo Galileï (1564—1642) de grafieken van Oresme om er de vrije val van een voorwerp in vacuüm mee weer te geven. En **Isaac Newton (1642—1727)** en **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716)** bedachten een goede techniek om veranderingen te berekenen: de ‘differentiaalrekening’.

Figuur 6.1 Galileo Galileï (Wikipedia)

Testen

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$, gemaakt met GeoGebra.

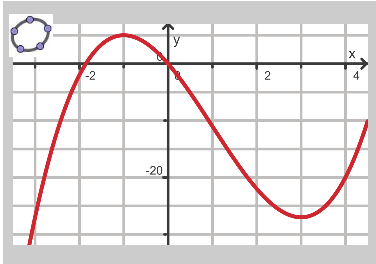
a Van welke soort daling is er sprake op het interval $[0,1]$?

b Bereken het differentiequotiënt op dit interval en beschrijf de betekenis van dit getal.

c Bereken de helling van de grafiek in het punt met $x = 1$ met een rij differentiequotiënten. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

d Stel de vergelijking op van de raaklijn aan f in het punt met $x = 1$.

e Neem de grafiek over en schets de hellingsgrafiek bij deze functie.



Figuur 6.2

Opgave 2

De hoogte van een vuurpijl die je van de grond afschiet, wordt gegeven door $h(t) = 60t - 5t^2$ met h de hoogte in meters en t de tijd in seconden na het afschieten.

a Na 10 seconden ontploft de vuurpijl. Op welke hoogte is dat?

b Teken een bijpassend toenamediagram van 0 tot 6 met stapgrootte 1.

c Uit het toenamediagram kun je aflezen op welk tijdstip de vuurpijl het hoogste punt in zijn baan bereikt. Leg uit hoe.

d Bereken de gemiddelde snelheid van de vuurpijl over de eerste zes seconden.

e Teken de grafiek van de snelheid $h'(t)$ van de vuurpijl. Maak eerst een tabel met hellingsgetallen.

f De grafiek van de snelheid die je bij e hebt getekend moet een rechte lijn zijn. Stel bij die rechte lijn een formule op en bereken met die formule de snelheid op het moment van ontploffen.

Opgave 3

Het migratiesaldo van R geeft het verschil tussen het aantal mensen dat in R komt wonen en het aantal mensen dat uit R vertrekt. Het geboorteoverschot is het verschil van het aantal geboorten en het aantal overledenen in R. In deze grafiek zie je beiden voor de jaren 2000 tot en met 2004.

a Met hoeveel mensen is het aantal inwoners in R in het jaar 2000 toegenomen?

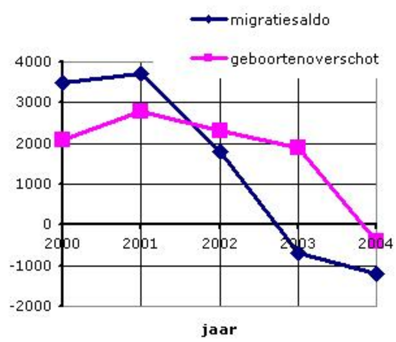
b In welk jaar is het aantal inwoners in deze stad afgenomen?

c Het aantal inwoners van R was aan het begin van het jaar 2000 ongeveer 72600 (op honderdtallen afgerond). Teken een grafiek van het aantal inwoners in R in de jaren 2000 tot en met 2004.

d Hoe groot was het aantal inwoners op 1 januari 2005?

Bevolking van R

jaar	migratiesaldo	geboortenoverschot
2000	3500	2100
2001	3700	2800
2002	1800	2300
2003	-700	1900
2004	-1200	-400



Figuur 6.3

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}25x^2 + x$.

a Bereken met het differentiequotiënt op het interval $[2, 2+h]$ exact het differentiaalquotiënt voor $x = 2$.

b Bepaal de formule van de hellingsfunctie met behulp van een differentiequotiënt.

Opgave 5

Gegeven is de functie f door $f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - 2x$.

a Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de x-as. Noem de snijpunten van links naar rechts A, B en C.

b Op de grafiek van f ligt een punt D met x_D precies midden tussen x_A en x_B.

Toon aan dat CD de raaklijn is in punt D.

Toepassen

Opgave 6: Daglengte

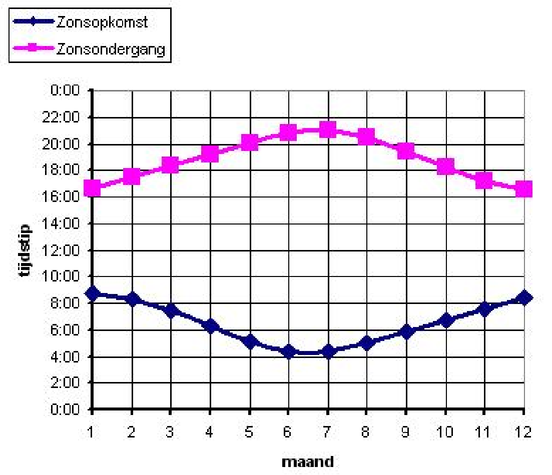
Door het KNMI worden de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang gedurende het jaar bijgehouden. Via internet kun je actuele informatie over dit onderwerp vinden. Hier zie je een tabel en een grafiek voor Amsterdam in een bepaald jaar gemaakt in MS-Excel. Je ziet dat de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang in de loop van het jaar veranderen. Bovendien is de snelheid waarmee die veranderingen plaatsvinden ook veranderlijk. In de tweede helft van de maand juni bijvoorbeeld verandert het tijdstip van zonsondergang maar weinig per dag. Maar in september is die verandering per dag juist behoorlijk groot. Ook de daglengte (verschil tussen zonsopkomst en zonsondergang) verandert in de loop van het jaar. En ook die verandering gaat soms sneller en soms minder snel... Een goede manier om de veranderingen nauwkeurig te bekijken is een toenamediagram bijvoorbeeld per maand.

Zonsopkomst en zonsondergang in Nederland

De tijdstippen gelden steeds voor de eerste dag van de maand

Alle tijden zijn in M.E.T. (geen zomertijd dus)

maand	opkomst	ondergang
1	8:48	16:39
2	8:20	17:28
3	7:26	18:20
4	6:15	19:14
5	5:10	20:05
6	4:25	20:50
7	4:24	21:03
8	5:02	20:30
9	5:52	19:27
10	6:41	18:17
11	7:35	17:12
12	8:26	16:32



Figuur 6.4

a Het tijdstip van zonsopkomst verandert per dag. In welke maanden verandert het tijdstip van zonsopkomst het snelst per dag? Hoe zie je dat aan de grafiek?

b Ook het tijdstip van zonsondergang verandert per dag. Verandert het tijdstip van zonsondergang het snelst per dag in dezelfde maanden als dat van zonsopkomst? Kun je dit verklaren?

c De daglengte-grafiek is af te leiden uit die van zonsopkomst en zonsondergang. Hoe?

d In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder?

e Teken zelf in Excel een grafiek en een toenamediagram van de daglengte in de loop van het jaar. Neem de gegevens over. Neem voor het toenamediagram een stapgrootte van 1 maand.

f De daglengte verandert dagelijks. In welke maanden verandert de daglengte het snelst? Hoe zie je dat aan de grafiek en hoe aan het toenamediagram?

g In bepaalde maanden lijkt de daglengte wel vrijwel constant. In welke maanden is dat het geval? En hoe zie je dat aan het toenamediagram?

h In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?

Opgave 7: Snelheid, versnelling

Voor de snelheid v in meter per seconde van een bewegend voorwerp geldt: $v = 2{,}4t$ met t de tijd in seconden.

a De grafiek van v is de hellingsgrafiek van de grafiek van de afgelegde weg $s(t)$ waarin s in meters is uitgedrukt. Neem aan, dat $s(0) = 0$. Maak een zo nauwkeurig mogelijke grafiek van $s(t)$.

b Bij de grafiek van $v(t)$ hoort ook een hellingsgrafiek. Teken die hellingsgrafiek.

c Wat stelt de hellingsgrafiek van $v(t)$ voor?

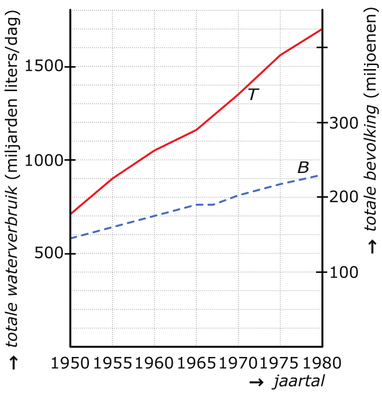
d Voor de afgelegde weg geldt de formule $s(t) = 1{,}2t^2$.
Laat met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[t, t+h]$ zien, dat de gegeven functie v inderdaad de hellingsfunctie van s is.

Examen

Opgave 8: Schoon drinkwater

Overal op aarde is de behoefte aan schoon water groot. Niet alleen voor huishoudelijk gebruik (o.a. drinkwater), maar vooral voor niet-huishoudelijk gebruik (landbouw en industrie) is heel veel water nodig. Deze opgave gaat over het waterverbruik in de Verenigde Staten vanaf 1950.

In de grafiek staan gegevens over het totale jaarverbruik (T) en de grootte van de bevolking (B) van de V.S. Je kunt er bijvoorbeeld uit aflezen dat in 1980 het totale waterverbruik ongeveer 1680 miljard liter per dag bedroeg, en dat de bevolking in dat jaar ongeveer 230 miljoen mensen telde.



Figuur 6.5

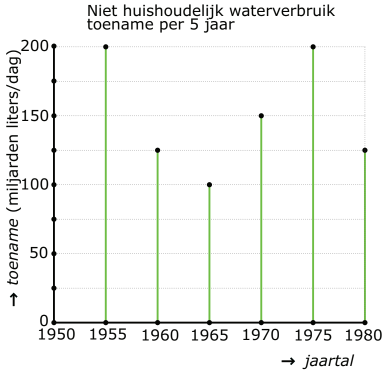
a Laat zien dat het totale verbruik per jaar in 1975 gemiddeld ongeveer 2,6 miljoen liter water per inwoner was.

Het aantal liters in opgave a is erg groot. Dat komt vooral door het niet-huishoudelijk waterverbruik. In 1950 was het totale waterverbruik (700 miljard liter per dag) opgebouwd uit 625 miljard liter water voor niet-huishoudelijk gebruik en 75 miljard liter per dag voor huishoudelijk verbruik.

b Bekijk ook het toenamediagram van het waterverbruik per dag in de V.S. voor niet-huishoudelijk gebruik.
Onderzoek of het niet-huishoudelijk verbruik als percentage van het totale waterverbruik per dag in 1980 groter was dan in 1950.

c Bij een onderzoek schatte men dat de toename van het totale waterverbruik elke 5 jaar zou liggen tussen 110 en 200 miljard liter per dag. Tussen welke twee getallen ligt volgens deze veronderstelling het totale waterverbruik in de V.S. in 2010?

(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)



Figuur 6.6

Opgave 9: Viskwekerij

In een viskwekerij wordt vis uitgezet in een aantal nieuw aangelegde kweekvijvers. Als er geen vis wordt gevangen zal de visstand zich in de loop der jaren uitbreiden. De grafiek geeft een model van de groei van de visstand.

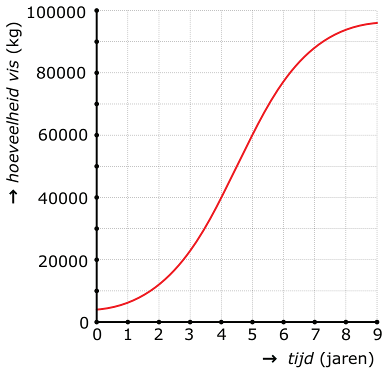
a Teken het toenamediagram voor intervallen van een jaar, te beginnen met het interval [1,2].

De viskweker zal een aantal jaren afwachten alvorens te oogsten. Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens de grafiek. Welk advies zou je de viskweker geven over:

- het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten;
- de grootte van de jaarlijkse vangst?

b Geef bij dit advies een toelichting waarmee je de viskweker denkt te overtuigen.

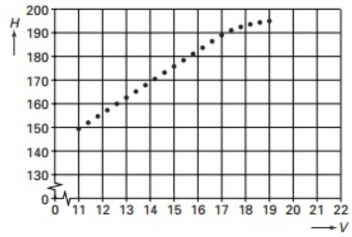
(bron: examen vwo wiskunde A in 1989, eerste tijdvak)



Figuur 6.7

Opgave 10: Hartfrequentie

Een hardloper doet een test op een loopband. Na elke 300 meter die de hardloper heeft afgelegd op de loopband wordt er overgeschakeld op een hogere snelheid. De eerste 300 meter loopt hij met een constante snelheid van 11 km per uur. Na elke 300 meter wordt deze snelheid met 0,4 km per uur verhoogd. Een hartslagmeter registreert na elke 300 meter de hartfrequentie van de hardloper. De hartfrequentie van een mens is het aantal slagen dat het hart per minuut maakt. In de figuur zijn de resultaten weergegeven.



Figuur 6.8

H is de hartfrequentie in slagen per minuut en V is de snelheid in km per uur. Voor snelheden tussen 11 en 17 km per uur is het verband tussen V en H bijna lineair. De hartfrequentie waarbij het lineaire verband verloren gaat, heet het omslagpunt. Voor de hardloper van de figuur ligt het omslagpunt bij een hartfrequentie van ongeveer 190 slagen per minuut. Bij een grotere inspanning is het hart minder goed in staat om voldoende slagen te maken.

Het verband tussen V en H wordt voor de hardloper bij benadering gegeven door de volgende twee formules:

$H = 76{,}8 + 6{,}6V$ voor $11 \leq V \leq 17$

$H = 200 - (0{,}0545V - 0{,}836)^{-1}$ voor $V \geq 17$

De grafiek van het verband tussen V en H bestaat voor de hardloper uit twee delen die in het omslagpunt op elkaar aansluiten: beide formules geven bij $V = 17$ bij benadering dezelfde waarde voor H.

Onderzoek of de beide formules bij $V = 17$ ook ongeveer dezelfde helling geven.

(bron: examen havo wiskunde B2 in 2003, tweede tijdvak)

2

Logaritmische functies

2.1 Logaritmen 56
2.2 Eigenschappen 63
2.3 Logaritmische schaal 71
2.4 Logaritmische functies 79
2.5 Logaritmische vergelijkingen 87
2.6 Totaalbeeld 95

2.1 Logaritmen

Inleiding

Bij exponentiële verbanden zoals die bij bijvoorbeeld bacteriegroei optreden moet je soms vragen beantwoorden als: 'Op welk tijdstip heb je 1000 bacteriën?'
Daarbij ontstaan vergelijkingen waarin exponentiële functies voorkomen. Die kun je nog niet algebraïsch oplossen. Je kunt alleen oplossingen zoeken (vaak benaderen) met de grafische rekenmachine. In dit onderwerp leer hoe je logaritmen kunt gebruiken om dergelijke vergelijkingen wel algebraïsch op te lossen.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip logaritme kennen;
- logaritmen uit het hoofd berekenen waar dat kan;
- logaritmen schatten;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, ook met de grafische rekenmachine;
- werken met de begrippen macht, grondtal en exponent.

Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van de hoeveelheid bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren.

Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 1000 bacteriën?

Figuur 1.2

Uitleg

Voor de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt $B = 6 \cdot 2^t$.
Na hoeveel tijd zijn er 120 bacteriën?

Om deze vraag te beantwoorden moet je de vergelijking $6 \cdot 2^t = 120$, ofwel $2^t = 20$, oplossen. Zo'n vergelijking kun je al oplossen met de grafische rekenmachine, je vindt dan $t \approx 4{,}322$.
De exacte oplossing schrijf je als $t = {}^{2}\log(20)$.
Dit heet de logaritme van 20 voor het grondtal 2.

Een oplossing van een exponentiële vergelijking schrijf je als een logaritme. Omdat exponentiële functies ofwel altijd stijgend (bij een grondtal groter dan 1) ofwel altijd dalend (bij een grondtal tussen 0 en 1) zijn, heeft een vergelijking als $g^x = a$ precies één oplossing: $x = {}^{g}\log(a)$ als $a > 0$.
Deze oplossing kun je vinden door $g^x = a$ met de grafische rekenmachine op te lossen.

Opgave 1

Neem de vergelijking $2^t = 30$.

a Geef de oplossing van deze vergelijking. Rond af op twee decimalen.

b Hoe schrijf je die oplossing als logaritme?

c Als de hoeveelheid bacteriën gegeven wordt door $h = 2^t$, met t in uren, na hoeveel uur heb je dan 100 bacteriën? Geef je oplossing als logaritme, maar ook afgerond op twee decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

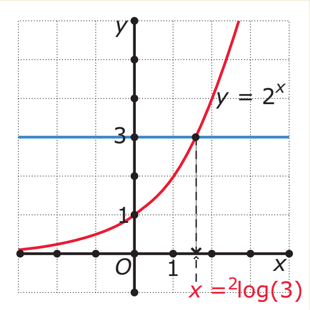
Bekijk de applet: Logaritme

De oplossing van de vergelijking $g^x = a$ heet de **logaritme** van a voor grondtal g. Notatie: $x = {}^g\log(a)$.
Omdat deze vergelijking alleen oplossingen heeft als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en als $a > 0$, bestaat ${}^g\log(a)$ alleen onder deze voorwaarden. Vooralsnog bepaal je $x = {}^g\log(a)$ meestal door de vergelijking $g^x = a$ met de grafische rekenmachine op te lossen.

In het algemeen wordt als definitie van logaritme gebruikt:

- uit $g^x = y$ volgt $x = {}^g\log(y)$;
- uit $x = {}^g\log(y)$ volgt $g^x = y$.

De uitdrukkingen $x = {}^g\log(y)$ en $g^x = y$ zijn volledig gelijkwaardig als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en als $y > 0$.
Je noemt de exponentiële functie en de logaritme met hetzelfde grondtal wel inverse (tegengestelde) bewerkingen, ze zijn elkaars terugrekenbewerkingen.



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

Luchtschepen zijn gevuld met gas dat regelmatig aangevuld moet worden om voldoende draagvermogen te houden. Een luchtschip met een inhoud van 3000 m^3 verliest elke tien dagen ongeveer 2% van zijn gas. Als er minder dan 2400 m^3 over is, kan het niet meer vliegen.
Hoeveel dagen nadat het geheel is gevuld, is dit het geval?

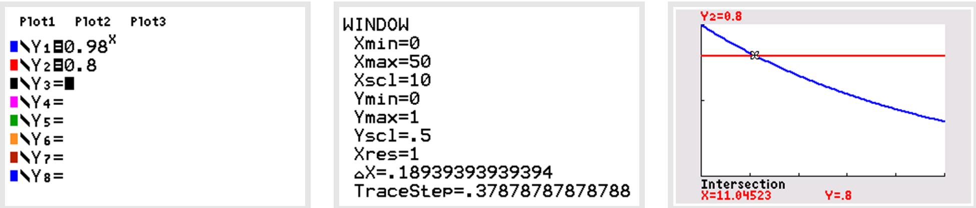
Figuur 1.4

Antwoord

De hoeveelheid gas in het luchtschip is $G(t) = 3000 \cdot 0{,}98^t$ met G in m^3 en t in eenheden van tien dagen.

De vraag kun je vertalen naar het oplossen van: $3000 \cdot 0{,}98^t < 2400$.

De bijbehorende vergelijking is: $3000 \cdot 0{,}98^t = 2400$.
Na delen door 3000 levert dit op: $0{,}98^t = 0{,}8$.
Met de intersect-functie van de grafische rekenmachine vind je: $t \approx 11{,}04$. De oplossing van de vergelijking is daarom: $t = {}^{0,98}\log(0{,}8) \approx 11{,}04$.



Figuur 1.5

Het luchtschip kan 110 dagen vliegen zonder bijvullen. Op de 111^e dag kan het niet meer vliegen.

Opgave 2

Na hoeveel dagen is de beginhoeveelheid gas van 3000 m^3 in het luchtschip verminderd tot 2800 m^3 als er elke tien dagen ongeveer 2% vervliegt?

a Welke vergelijking moet je oplossen?

b Je kunt de vergelijking eerst vereenvoudigen. Wat krijg je?

c Schrijf nu de oplossing van de vergelijking als logaritme.

d Geef het antwoord ook afgerond op twee decimalen.

Opgave 3

Geef de oplossingen van de vergelijkingen. Schrijf het antwoord als logaritme en bereken (zo nodig) in drie decimalen nauwkeurig.

a $2^x = 7$

b $3^x = 81$

c $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$

d $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 0{,}01$

Voorbeeld 2

Soms kun je van een logaritme zelf (zonder rekenmachine) de uitkomst bedenken:

- ${}^{2}\log(16)$ is de oplossing van $2^t = 16 = 2^4$. Dus ${}^{2}\log(16) = 4$.
- ${}^{3}\log\left(\frac{1}{9}\right)$ is de oplossing van $\left(\frac{1}{9}\right)^t = 3 = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2}$. Dus ${}^{3}\log\left(\frac{1}{9}\right) = -2$.
- ${}^{10}\log(10000) = 4$, want $10^4 = 10000$.
- ${}^{10}\log(0{,}001) = -3$, want $10^{-3} = 0{,}001$.
- ${}^{3}\log\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right) = -1\frac{1}{2}$, want $3^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$.
- ${}^{\frac{1}{2}}\log(8) = -3$, want $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$.

Opgave 4

Bereken de logaritmen exact.

a ${}^{5}\log(125)$

b ${}^{5}\log\left(\frac{1}{25}\right)$

c ${}^{4}\log(64)$

d ${}^{\frac{1}{4}}\log(64)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right)$

f ${}^{2}\log\left(\sqrt{2}\right)$

Voorbeeld 3

Je kunt de grootte van een logaritme schatten met behulp van machten van het grondtal:

- ${}^{2}\log(40)$ is een getal tussen 5 en 6, want $2^5 = 32$ en $2^6 = 64$.
- ${}^{10}\log(400)$ is een getal tussen 2 en 3, want $10^2 = 100$ en $10^3 = 1000$.
- ${}^{10}\log(0{,}05)$ is een getal tussen -2 en -1, want $10^{-2} = 0{,}01$ en $10^{-1} = 0{,}1$.
- ${}^{0{,}5}\log(20)$ is een getal tussen -5 en -4, want $0{,}5^{-5} = 32$ en $0{,}5^{-4} = 16$.

Opgave 5

Geef van de logaritmen aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen ze liggen.

a ${}^{5}\log(150)$

b ${}^{10}\log(758)$

c ${}^{2}\log(60)$

d ${}^{2}\log\left(\frac{1}{7}\right)$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(20)$

f ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{5}\right)$

Opgave 6

Bereken de logaritmen en rond af op één decimaal.

a ${}^{5}\log(150)$

b ${}^{10}\log(758)$

c ${}^{2}\log(60)$

d ${}^{2}\log\left(\frac{1}{7}\right)$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(20)$

f ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{5}\right)$

Opgave 7

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme maar ook afgerond op één decimaal.

a $5 \cdot 3^x = 3000$

b $1{,}7^t = 525$

c $572 \cdot 0{,}6^t = 30$

Opgave 8

Iemand zet op 1 januari 2014 een kapitaal van € 10000,00 op de bank tegen een vaste rente van 4% per jaar.

In welke maand van welk jaar is dit kapitaal uitgegroeid tot € 15000,00 als hij niets opneemt of bijstort? Gebruik bij de berekening een logaritme.

Verwerken

Opgave 9

Welke van de logaritmen zijn eenvoudig zonder rekenmachine te berekenen? Bereken deze logaritmen. Bereken ook de overige logaritmen en rond af op één decimaal.

a ${}^{4}\log(64)$

b ${}^{4}\log(400)$

c ${}^{\frac{1}{3}}\log(60)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(81)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right)$

f ${}^{0,1}\log(1000000)$

Opgave 10

Bereken en rond af op drie decimalen.

a ${}^{2,5}\log(100)$

b ${}^{0,7}\log(20)$

c ${}^{2,3}\log(0{,}05)$

d ${}^{15,2}\log(2{,}3)$

Opgave 11

Geef bij de logaritmen steeds aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen ze liggen.

a ${}^{6}\log(30)$

b ${}^{3}\log(70)$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(10)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(0{,}01)$

Opgave 12

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme, maar ook afgerond op één decimaal.

a $10 \cdot 10^{x} = 0{,}1$

b $0{,}5 \cdot 2^{x} = 30$

c $54 \cdot 0{,}8^{t} = 27$

Opgave 13

Schrijf de oplossingen van de vergelijkingen als logaritme, maar ook afgerond op twee decimalen.

a $15 \cdot 0{,}4^x + 7 = 52$

b $17 \cdot 4^x + 9 = 400$

c $15 \cdot 2^x - 3 = 0$

Opgave 14

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Bereken in minuten nauwkeurig hoelang het duurt voordat de kolonie zich heeft verdrievoudigd. Maak bij de berekening gebruik van een logaritme.

Toepassen

Opgave 15: Geldwaarde van huizen

Iemand koopt op 1 juli 2014 een huis van € 250000,00. In de krant heeft hij gelezen dat de afgelopen vijftig jaar de waarde van de huizen gemiddeld met 7% per jaar gestegen is.
Neem aan dat de waardestijging elk jaar hetzelfde was.

a Hoeveel bedroeg de waarde van het huis op 1 juli 1995?

b Hoeveel jaar geleden was het huis € 200000,00 waard? Schrijf je antwoord als een logaritme en benader het daarna in jaren nauwkeurig.

c Bereken ook hoeveel jaar geleden het huis nog € 50000,00 waard was. Schrijf het antwoord als een logaritme.

Testen

Opgave 16

Bereken de volgende logaritmen exact.

a ${}^{2}\log\left(\sqrt{32}\right)$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(27)$

Opgave 17

Geef bij de volgende logaritmen eerst aan tussen welke opeenvolgende gehele getallen ze liggen. Geef daarna een benadering in drie decimalen.

a ${}^{2}\log(513)$

b ${}^{0{,}4}\log(25)$

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing als logaritme en geef daarna een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $6 \cdot 4^x = 35$

b $1050 \cdot 1{,}08^t = 1800$

Opgave 19

In een tank zit 150 liter verontreinigde vloeistof. Deze vloeistof wordt verwijderd door spoelen met water. Hierdoor verdwijnt elke keer 15% van de vloeistof. Men wil stoppen met spoelen als er minder dan 10 liter verontreinigde vloeistof over is.

Bereken hoe vaak men moet spoelen. Schrijf het antwoord als logaritme en geef een benadering van deze logaritme.

2.2 Eigenschappen

Inleiding

Je hebt nu wel het begrip logaritme leren kennen als oplossing van een exponentiële vergelijking, maar nog geen methode gezien om willekeurige logaritmen rechtstreeks te bepalen (benaderen) met de rekenmachine.
Er zit wel een functie [LOG] op, maar daarmee kun je nog niet op alle rekenmachines voor elk willekeurig grondtal de logaritme van een getal vinden. Je hebt de eigenschappen van logaritmen nodig. Die ga je nu bekijken. Tegenwoordig hebben de meeste rekenmachines wel een mogelijkheid om de logaritme van een willekeurig grondtal meteen te vinden.

Je leert in dit onderwerp

- eigenschappen van logaritmen gebruiken;
- logaritmen berekenen met de grafische rekenmachine;
- exponentiële en logaritmische vergelijkingen algebraïsch oplossen.

Voorkennis

- werken met het begrip logaritme;
- logaritmen bepalen vanuit exponentiële vergelijkingen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet dat $g^x = y$ gelijkwaardig is met $x = {}^g\log(y)$. Dat levert eigenschappen van logaritmen op:

a Hoe volgt hier uit dat ${}^g\log(g^x) = x$?

b Welke andere eigenschap volgt hier rechtstreeks uit?

c Wat gebeurt er als je twee logaritmen optelt?
Is ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a+b)$?

Uitleg

Voor het saldo S op een spaarrekening t jaar na een eenmalige storting van € 4000,00 en een jaarlijkse rente van 5% geldt: $S(t) = 4000 \cdot 1{,}05^t$.
De tijd die nodig is om het saldo te verdubbelen vind je door $1{,}05^t = 2$ op te lossen. De verdubbelingstijd bij een groeifactor van $1{,}05$ is daarom ${}^{1{,}05}\log(2)$. Zo is de verdrievoudigingstijd te vinden uit $1{,}05^t = 3$. De verdrievoudigingstijd van het saldo is dus ${}^{1{,}05}\log(3)$.

De verzesvoudigingstijd van het saldo is ${}^{1{,}05}\log(6)$. Die verzesvoudigingstijd kun je ook vinden door de verdubbelingstijd en de verdrievoudigingstijd op te tellen.
Dit levert op: ${}^{1{,}05}\log(6) = {}^{1{,}05}\log(2) + {}^{1{,}05}\log(3)$
ofwel: ${}^{1{,}05}\log(2) + {}^{1{,}05}\log(3) = {}^{1{,}05}\log(2 \cdot 3)$

De verachtvoudigingstijd van het saldo is ${}^{1,05}\log(8)$. Die verachtvoudigingstijd kun je ook vinden door drie keer de verdubbelingstijd te nemen.
Dit levert op: ${}^{1,05}\log(8) = 3 \cdot {}^{1,05}\log(2)$
ofwel: $3 \cdot {}^{1,05}\log(2) = {}^{1,05}\log\left(2^3\right)$

Op deze wijze kun je enkele eigenschappen van logaritmen aannemelijk maken.

Opgave 1

Je hebt een saldo S op een spaarrekening met een jaarlijkse rente van 5%. Op $t = 0$ is het saldo € 4000,00.

a Hoelang duurt het voordat het saldo twee keer zo groot (dus € 8000,00) geworden is? Schrijf het antwoord als logaritme, maar ook afgerond op één decimaal.

b Hoelang duurt het voordat het saldo drie keer zo groot geworden is? Schrijf het antwoord als logaritme, maar ook afgerond op één decimaal.

c Hoelang duurt het voordat het saldo zes keer zo groot geworden is? Schrijf het antwoord als logaritme, maar ook afgerond op één decimaal.

d Het antwoord bij a kun je krijgen door het antwoord bij b van dat bij c af te trekken. Controleer dit en geef een verklaring.

e Bij d heb je een voorbeeld van een eigenschap van logaritmen. Om welke eigenschap gaat het hier?

Opgave 2

Bij exponentiële afname komt het begrip halveringstijd voor.

a Geef een omschrijving van het begrip halveringstijd. Maak hierbij gebruik van een logaritme.

b Bereken in maanden nauwkeurig de halveringstijd wanneer een hoeveelheid jaarlijks met 7% afneemt.

c De radioactieve stof strontium heeft een halveringstijd van 28 jaar. Bereken de groeifactor per jaar. Rond af op drie decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Definitie **logaritme**: $g^x = y$ is gelijkwaardig met $x = {}^{g}\log(y)$, als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en als $y > 0$.

Definitieformules: Uit de definitie van logaritme volgt: ${}^{g}\log\left(g^x\right) = x$ en $g^{{}^{g}\log(y)} = y$.

Eigenschappen van logaritmen: Als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en als $a > 0$ en $b > 0$ geldt:

- ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$
- ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log\left(a^p\right)$

Bewijs 1

De eigenschappen van logaritmen bewijs je vanuit de definitieformules (die volgen meteen uit de definitie van logaritme). Steeds geldt $0 < g < 1$ of $g > 1$ en ook $a > 0$ en $b > 0$.

Je gaat uit van de bekende eigenschappen van machten. Bijvoorbeeld: $g^r \cdot g^s = g^{r+s}$. Neem je hierin $r = {}^g\log(a)$ en $s = {}^g\log(b)$, dan vind je: $g^{{}^g\log(a) + {}^g\log(b)} = g^{{}^g\log(a)} \cdot g^{{}^g\log(b)} = a \cdot b$

Hierbij gebruik je de definitieformules. Neem ten slotte links en rechts van de vergelijking de g-logaritme en je vindt: ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$

Op vergelijkbare wijze bewijs je: $p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$. En de derde eigenschap volgt door de andere twee te combineren (met $p = -1$).

Verandering van grondtal: Om met steeds hetzelfde grondtal te kunnen werken (de log-toets van je rekenmachine gebruikt altijd grondtal 10), moet je van grondtal kunnen veranderen. Uit de eigenschappen van logaritmen kun je afleiden: ${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$.
Dit geldt voor elk bruikbaar grondtal p, dus ook voor grondtal 10. Zo kun je logaritmen met je rekenmachine berekenen en/of als functie invoeren; het grondtal 10 laat je vaak weg: ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$.
Merk op dat nieuwere rekenmachines soms de mogelijkheid hebben om het grondtal van de logaritme zelf te kiezen. Vaak moet je dan de Amerikaanse notatie $\log_g(x)$ gebruiken. Je ziet dat daarin het grondtal een andere plaats krijgt.

Voorbeeld 1

De eigenschappen van logaritmen stellen je in staat om met logaritmen te rekenen. Bijvoorbeeld:

- ${}^6\log(24) + 2 \cdot {}^6\log(3) = {}^6\log(24) + {}^6\log\left(3^2\right) = {}^6\log(24 \cdot 9) = {}^6\log(216) = 3$
- ${}^2\log(12) + {}^{0,5}\log(12) = {}^2\log(12) + \frac{{}^2\log(12)}{{}^2\log(0,5)} = {}^2\log(12) - {}^2\log(12) = 0$
- ${}^2\log(7) \cdot {}^7\log(8) = \frac{\log(7)}{\log(2)} \cdot \frac{\log(8)}{\log(7)} = \frac{\log(8)}{\log(2)} = {}^2\log(8) = 3$
- $2^{{}^2\log(7)} = 7$ (volgens de definitieformules)

Opgave 3

Je kunt eigenschappen van logaritmen controleren door getallen in te vullen. Controleer.

a ${}^2\log(16) + {}^2\log(8) = {}^2\log(128)$

b ${}^2\log(16) - 3 \cdot {}^2\log(2) = {}^2\log(2)$

c ${}^3\log(3) + {}^3\log(9) = {}^3\log(27)$

Opgave 4

Pas de eigenschappen van logaritmen toe op de uitdrukkingen om ze te vereenvoudigen.

a ${}^{2}\log(72) - 2 \cdot {}^{2}\log(3)$

b ${}^{2}\log(80) + {}^{0,5}\log(5)$

De volgende uitdrukkingen kun je herleiden tot één logaritme. Laat zien hoe.

c ${}^{2}\log(7) + {}^{3}\log(81)$

d $0{,}5 \cdot {}^{2}\log(36) - 1$

Opgave 5

In de **Theorie** vind je het bewijs van een aantal genoemde logaritmische eigenschappen.

a Gebruik de bekende eigenschap van machten - $(g^r)^s = g^{r \cdot s}$ - om te bewijzen dat $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$.

b Bewijs nu de eigenschap ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$.

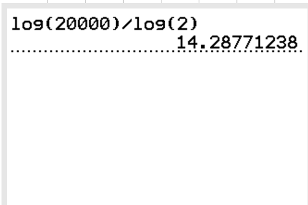
Voorbeeld 2

Los de vergelijking $2^t = 20000$ op met behulp van de log-toets van je rekenmachine.

Antwoord

De log-toets van veel rekenmachines werkt alleen met grondtal 10. Je schrijft daarom bij 10-logaritmen het grondtal niet meer op, $\log(2)$ betekent automatisch de 10-logaritme van 2. Om dan zo'n vergelijking te kunnen oplossen, moet je van grondtal 2 naar grondtal 10 wisselen. Dit kun je op twee manieren aanpakken:

- Ga uit van $2^t = 20000$ en neem aan beide zijden de 10-logaritme: $\log(2^t) = \log(20000)$. Met de eigenschappen van logaritmen wordt dit: $t \cdot \log(2) = \log(20000)$. Dus: $t = \frac{\log(20000)}{\log(2)} \approx 14{,}2877$
- De oplossing van $2^t = 20000$ is $t = {}^{2}\log(20000)$. Op sommige rekenmachines kun je dit meteen invoeren als $\log_2(20000) \approx 14{,}2877$. Anders moet je van grondtal wisselen: ${}^{2}\log(20000) = \frac{\log(20000)}{\log(2)} \approx 14{,}2877$



Figuur 2.1

Opgave 6

De vergelijking $g^x = a$ kun je op twee manieren met logaritmen oplossen. Los de vergelijkingen op beide manieren op. Rond af op vier decimalen.

a $3^x = 8100$

b $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 0{,}002$

Voorbeeld 3

Los de vergelijking ${}^{2}\log(x) = 3$ algebraïsch op.

Antwoord

Bij het oplossen van zo'n vergelijking gebruik je de definitieformules. Als je op beide zijden een exponentiële functie met grondtal 2 toepast, krijg je: $2^{{}^{2}\log(x)} = 2^3$ en dat betekent: $x = 2^3 = 8$.

Je kunt het ook zo zien:

$$\begin{aligned} {}^{2}\log(x) &= 3 \\ {}^{2}\log(x) &= {}^{2}\log\left(2^3\right) \\ x &= 2^3 = 8 \end{aligned}$$

Opgave 7

Los op.

a ${}^{5}\log(x) = 2$

b ${}^{4}\log(2x) = 0$

c ${}^{\frac{1}{4}}\log\left(x^2\right) = -4$

d ${}^{2}\log(\sqrt{x}) = 5$

Voorbeeld 4

Los de vergelijking $\log(x) + \log(2x) = 3$ algebraïsch op.

Antwoord

Bij het oplossen van dergelijke vergelijkingen gebruik je de eigenschappen van logaritmen:

$$\begin{aligned} \log(x) + \log(2x) &= 3 \\ \log(x \cdot 2x) &= 3 \\ \log\left(2x^2\right) &= 3 \\ 2x^2 &= 10^3 = 1000 \\ x &= \pm\sqrt{500} \end{aligned}$$

Omdat je geen logaritme uit een negatief getal kunt trekken, is er maar één oplossing mogelijk: $x = \sqrt{500}$.

Opgave 8

Los algebraïsch op.

a $\log(4x) + \log(x) = 1$

b $2 \cdot \log(x) - \log(2x) = 2$

Verwerken

Opgave 9

Gebruik de eigenschappen van logaritmen en bereken.

a ${}^{10}\log(5) + {}^{10}\log(20)$

b ${}^{5}\log(100) - {}^{5}\log(4)$

c $2 \cdot {}^{6}\log(3) + {}^{6}\log(4)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(45) - {}^{\frac{1}{3}}\log(5)$

Opgave 10

Ga na welke van de volgende logaritmen eenvoudig zonder rekenmachine te berekenen zijn. Geef van die opgaven het exacte antwoord. Bereken van de overige opgaven het antwoord in drie decimalen. Gebruik hierbij de log-toets van de rekenmachine.

a ${}^{2}\log(100)$

b ${}^{7}\log\left(\sqrt{7}\right)$

c ${}^{8}\log(8000)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(50)$

e $\log(40) + \log(25)$

f ${}^{\frac{1}{3}}\log(0{,}0003)$

Opgave 11

Een radioactieve stof vervalt volgens de formule $N(t) = N(0) \cdot 0{,}93^{t}$.

N is de hoeveelheid in milligram en t de tijd in jaren.

a Hoeveel bedraagt de halveringstijd? Rond af op twee decimalen.

b Een laboratorium heeft 400 gram van deze stof. Bereken met behulp van de halveringstijd hoelang het duurt totdat deze hoeveelheid minder is geworden dan 50 gram.

c Bereken tot op een maand nauwkeurig hoelang het duurt totdat 50 gram van deze stof minder is geworden dan 10 gram.

Opgave 12

Het radioactieve calcium-45 heeft een halveringstijd van 165 dagen.

a Na hoeveel tijd is er van een willekeurige beginhoeveelheid calcium-45 nog $\frac{1}{4}$ deel over?

b Na hoeveel tijd is er van een willekeurige beginhoeveelheid calcium-45 nog $\frac{1}{8}$ deel over?

c In een laboratorium is 100 gram calcium-45 aanwezig. Schat met behulp van de antwoorden bij a en b hoelang het duurt totdat deze hoeveelheid minder is geworden dan 15 gram.

d Bereken het antwoord van c op één dag nauwkeurig.

Opgave 13

Los de vergelijkingen algebraïsch op, maar ook afgerond op één decimaal.

a $10 \cdot 5^{x} = 0{,}16$

b ${}^{3}\log\left(x^{2}\right) = 3$

c $\log(2x) - 2 \cdot \log(x) = 1$

Opgave 14

Een hoeveelheid groeit exponentieel met een groeipercentage van p procent.

Toon aan dat de verdubbelingstijd T gegeven wordt door $T = \frac{\log(2)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$.

Toepassen

Opgave 15: Halfwaardetijd

Bij radioactieve stoffen wordt in plaats van het woord ‘halveringstijd’ vaak het woord ‘halfwaardetijd’ gebruikt. In een laboratorium bevindt zich 800 gram van het radioactieve natrium-24. Deze stof heeft een halfwaardetijd van 15 uur.

a Laat zien hoe lang het duurt tot er nog maar 100 gram van het natrium-24 over is.

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur? Rond af op vier decimalen.

c Bereken tot op een kwartier nauwkeurig hoe lang het duurt tot er van de 800 gram natrium-24 nog maar 160 gram over is.

Opgave 16: Napierlogaritmen

John Napier (1550—1617) was de uitvinder van de logaritme. Echter, zijn logaritme zat iets anders in elkaar dan de logaritmen die je tegenwoordig gebruikt. Napiers logaritme voor een getal x is ${}^{\text{Nap}}\log(x)$. Dan is ${}^{\text{Nap}}\log(x) = {}^{a}\log\left(10^7\right) - {}^{a}\log(x)$ met $a = \frac{10^7}{10^7-1}$.

Herleid Napiers logaritme naar logaritmen met grondtal 10.

Testen

Opgave 17

Iemand koopt een huis voor € 200.000 en verwacht dat de waarde van het huis per jaar 10% zal stijgen.

a Hoe lang duurt het voordat het huis € 300.000 waard is?
Schrijf het antwoord als logaritme en bereken dit logaritme tot op de maand nauwkeurig.

b Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis twee keer zo groot is geworden? Rond af op twee decimalen.

c Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis drie keer zo groot is geworden? Rond af op twee decimalen.

d Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis zes keer zo groot is geworden? Laat zien hoe je dit kunt berekenen met behulp van de antwoorden bij b en c.

e Hoe kun je het antwoord van d in één keer berekenen?

Opgave 18

Een suikerpatiënt moet zich een injectie met insuline toedienen op het moment dat er nog maar een derde deel van de vorige injectie insuline in zijn bloed zit. De hoeveelheid insuline in het bloed neemt per uur met 8% af.

Hoeveel tijd zit er tussen twee opeenvolgende injecties? Schrijf de oplossing als logaritme en geef een benadering in uren nauwkeurig.

Opgave 19

Los algebraïsch op.

a $600 \cdot 0{,}5^t = 20$

b ${}^{5}\log(1-x) = 2$

c ${}^{2}\log\left(3x^2\right) = 5$

Opgave 20

Omstreeks 1650 groeide de wereldbevolking met een percentage van 0,3% per jaar.

Schrijf de verdubbelingstijd als logaritme en geef een benadering in gehele jaren.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden of berekenen van uitdrukkingen met logaritmen**. De notatie $\log_{g(x)}$ wordt hierbij gebruikt.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Inleiding

Exponentiële groei is vaak ook nogal explosieve groei. Je hebt al snel te maken met veel grotere getallen dan waarmee je begon. Dat is lastig bij het maken van grafieken waaruit je met enige nauwkeurigheid wilt kunnen aflezen. Het lukt bijna niet om in één grafiek zowel de (kleine) beginwaarden als de (hele grote) waarden na verloop van tijd te laten zien.
Er is echter speciaal grafiekenpapier bedacht om dit probleem op te lossen. Het is zo gemaakt, dat een grafiek van een exponentiële functie er op dit papier als een rechte lijn uitziet.

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische schalen te werken;
- logaritmisch grafiekenpapier te gebruiken;
- het voorschrift van een exponentiële functie op te stellen vanaf enkellogaritmisch papier.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies;
- werken met logaritmen.

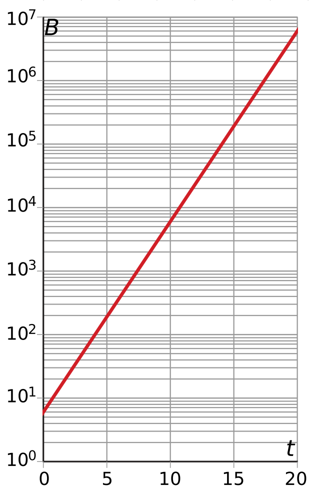
Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur. Hier zie je een grafiek van B als functie van t. Op de verticale as is een bijzondere schaalverdeling gebruikt.

a Wat is er voor bijzonders aan die schaalverdeling?

b Teken zelf eens zo'n schaalverdeling op de verticale as en maak de grafiek van B als functie van t.



Figuur 3.1

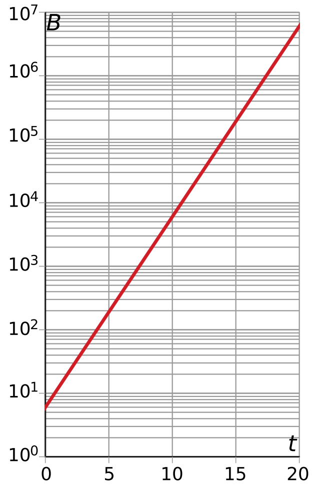
Uitleg

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur. Bekijk de grafiek van B als functie van t. Op de B-as is een zogenaamde logaritmische schaalverdeling gebruikt.

In plaats van een lineaire verdeling zoals 0, 1, 2, 3, 4, enzovoort, zet je dan de machten van 10 neer: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 enzovoort.

Om de uitkomsten voor B op de juiste plek te zetten, gebruik je een 10-logaritme. Bijvoorbeeld op $t = 12$ heb je $B = 6 \cdot 2^{12} = 24576$ bacteriën. Dat getal ligt tussen 10^4 en 10^5. De logaritme van dat getal is: $\log(24576) \approx 4{,}39$. Je zet het daarom op 4,39 eenheden boven de horizontale as, bij $10^{4{,}39}$ dus.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal.



Figuur 3.2

Opgave 1

Als je voor de grafiek van de exponentiële functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ op de B-as een speciale (logaritmische) schaalverdeling gebruikt, ziet de grafiek eruit als een rechte lijn, zie de **Uitleg**.

a Zijn op deze schaalverdeling de afstanden tussen twee maatstreepjes steeds even groot?

b Laat zien dat de punten die horen bij $B(5)$ en $B(10)$ goed zijn getekend.

In feite staat op de verticale as de waarde van B op de plek van $\log(B)$. Neem maar eens een gewoon stuk roosterpapier en maak een assenstelsel met $\log(B)$ uitgezet tegen t.

c Maak eerst een tabel van $\log(B)$ afhankelijk van t.

d Zet de bijbehorende punten in een assenstelsel. Als het goed is, krijg je een rechte lijn als grafiek.

e Met de eigenschappen van logaritmen kun je laten zien dat $\log(B)$ ook echt een lineaire functie van t is. Toon aan dat $B = 6 \cdot 2^t$ is te herleiden tot $\log(B) = \log(2) \cdot t + \log(6)$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

a Maak een grafiek van $\log(y)$ uitgezet tegen x. Neem x van 0 tot 15.

b Vervang de getallen op de verticale as door de bijbehorende y-waarden. Je krijgt dan weer een grafiek van y als functie van x, maar nu met een logaritmische schaal op de verticale as.

c Lees uit de laatste grafiek af hoe groot $f(10)$ is en controleer het antwoord met het gegeven functievoorschrift.

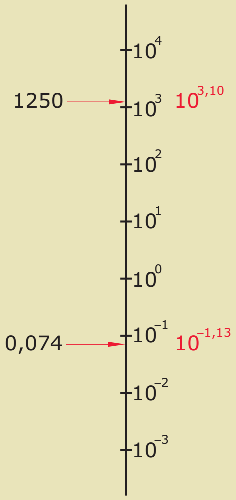
d Laat zien dat $\log(y)$ een lineaire functie van x is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een **logaritmische schaalverdeling** zet je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar uit. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen in dezelfde schaalverdeling plaatsen. Met behulp van de 10-**logaritme** ([LOG] op je rekenmachine) kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- $\log(1250) \approx 3{,}10$ dus $1250 \approx 10^{3{,}10}$
  Je plaatst 1250 dus op 3,10 eenheden boven 10^0, net boven 10^3.
- $\log(0{,}074) \approx -1{,}13$ dus $0{,}074 \approx 10^{-1{,}13}$
  Je plaatst 0,074 dus op 1,13 eenheden onder 10^0, net onder 10^{-1}.



Figuur 3.3

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal. Er bestaat ook speciaal **enkellogaritmisch papier**.

Omdat elke rechte lijn op enkellogaritmisch papier de grafiek is van een exponentiële functie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een exponentieel verband bestaat en om een bijpassende formule op te stellen.

Voorbeeld 1

Laat zien hoe je op een logaritmische schaal de getallen 7250 en 0,002 aan kunt geven. Laat ook zien, hoe je af kunt lezen welke waarden a en b hebben.

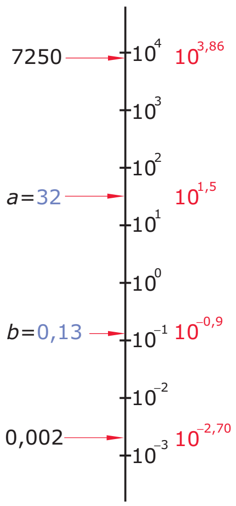
Antwoord

Eerst 7250 en 0,002 omrekenen:

- $\log(7250) \approx 3{,}86$ dus $7250 \approx 10^{3{,}86}$. Je plaatst 7250 dus op 3,86 eenheden boven 10^0, dat is tussen 10^3 en 10^4.
- $\log(0{,}002) \approx -2{,}70$ dus $0{,}002 \approx 10^{-2{,}70}$. Je plaatst 0,002 dus op 2,70 eenheden onder 10^0, dat is tussen 10^{-2} en 10^{-3}.

Nu aflezen:

- $a \approx 10^{1{,}5} \approx 32$
- $b \approx 10^{-0{,}9} \approx 0{,}13$



Figuur 3.4

Opgave 3

Je weet nu hoe je getallen kunt plaatsen op een logaritmische schaal en hoe je van zo'n schaal waarden kunt aflezen. Teken zelf zo'n logaritmische schaal.

a Geef de getallen 20, 20000 en 0,02 op deze schaal aan.

b Gebruik deze schaal om groottes te vergelijken. Begin met een mens van 1,80 m groot. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.

c De Mount Everest is ongeveer 8,884 km hoog. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.

d Een amoebe is een eencellig organisme met een afmeting van 0,003 tot 0,8 millimeter.
Geef deze getallen op je schaalverdeling aan.

e Op je schaalverdeling is a het getal dat midden tussen 10^3 en 10^4 in zit. Bereken a in gehelen nauwkeurig.

Opgave 4

Maak zelf een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling, of gebruik een blad enkellogaritmisch papier. Gegeven is de functie $N(t) = 12000 \cdot 0{,}8^t$.

a Teken de grafiek van $N(t)$ in jouw assenstelsel (of op het enkellogaritmische papier).

b Toon met behulp van de eigenschappen van logaritmen aan dat er tussen $\log(N)$ en t een lineair verband bestaat.

Opgave 5

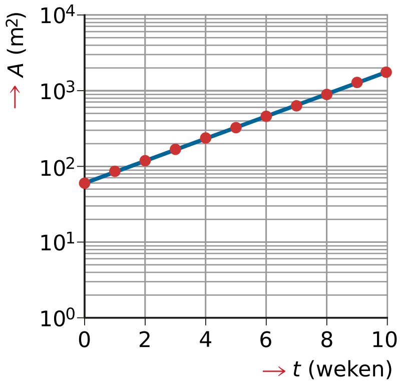
Elk verband van de vorm $y = b \cdot g^x$ kan worden geschreven als $\log(y) = \log(g) \cdot x + \log(b)$.

a Leg uit dat dit betekent dat elke exponentiële functie op enkellogaritmisch papier een rechte lijn als grafiek heeft.

b Het omgekeerde geldt ook: als $\log(y) = a \cdot x + b$, dan is y een exponentiële functie van x. Hoe bewijs je dat?

Voorbeeld 2

Bekijk de grafiek van de groei van waterplanten. De oppervlakte A (m^2) is een functie van de tijd t (weken). Stel een bijpassende formule op.



Figuur 3.5

Antwoord

De grafiek is een rechte lijn met alleen op de verticale as een logaritmische schaal. Er bestaat daarom een exponentieel verband tussen A en t, en wel: $A = b \cdot g^t$.

Uit de figuur lees je af:

- bij $t = 0$ hoort $A \approx 60$, dus $b \approx 60$;
- bij $t = 8$ hoort $A \approx 900$.

De groeifactor per acht weken is ongeveer $\frac{900}{60}$.

De groeifactor per week is ongeveer $\left(\frac{900}{60}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}40$.

Je vindt dus: $A(t) \approx 60 \cdot 1{,}40^t$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** staat een rechte lijn in een assenstelsel waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft. Daar kun je een functievoorschrift bij opstellen van de vorm $A = b \cdot g^t$.

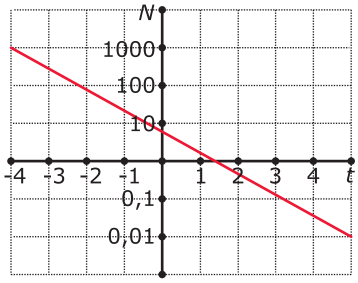
a Lees de waarden voor A bij $t = 2$ en $t = 10$ af.

b Stel met behulp van deze waarden $A(t)$ op.

c Waarom is het handiger om de waarde bij $t = 0$ te gebruiken?

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie $N(t)$.



Figuur 3.6

a Welke coördinaten heeft het snijpunt van de twee assen?

b Lees twee waarden voor $N(t)$ uit de grafiek af en stel een formule op voor $N(t)$.

c Bereken ter controle met die formule het snijpunt met de getekende t-as.

d Waarom heeft het geen zin om te vragen naar de oplossingen van $N(t) = 0$?

Voorbeeld 3

De effectieve geluidsdruk p (pascal, 1 Pa = 1 N/m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies. De waarden van p variëren echter nogal: de gehoordrempel ligt bij ongeveer 0,00002 Pa, de pijngrens bij 200 Pa. Daarom voerde Alexander Graham Bell een praktischer grootheid in, het geluidsdrukniveau L uitgedrukt in decibel (dB). Het verband tussen L en p wordt gegeven door $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$.

Hierin is $p_0 = 0{,}00002$ Pa.
Hoe groot is de effectieve geluidsdruk van een rijdende scooter (75 dB)? Hoeveel dB bedraagt het geluidsdrukniveau van twee van die scooters?

Antwoord

Voor de rijdende scooter geldt: $L = 75$ en dus $75 = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$.

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \frac{75}{20} &= \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right) \\ 10^{\frac{75}{20}} &= \frac{p}{0{,}00002} \\ p &= 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{75}{20}} \approx 0{,}1125 \end{aligned}$$

Heb je twee van die rijdende scooters, dan is hun totale effectieve geluidsdruk ongeveer $2 \cdot 0{,}1125 = 0{,}2250$ Pa. Daarbij hoort een geluidsdrukniveau van ongeveer $L = 20 \cdot \log\left(\frac{0{,}2250}{0{,}00002}\right) \approx 81$ dB.

Opgave 8

Bekijk de formule van het geluidsdrukniveau L (dB) afhankelijk van de effectieve geluidsdruk p (pascal, Pa) in **Voorbeeld 3**.

a Leg uit, waarom een decibelschaalverdeling eigenlijk een logaritmische schaal is.

b In een bibliotheek is het erg rustig met een geluidsdrukniveau van ongeveer 35 dB. Hoeveel bedraagt daar de effectieve geluidsdruk?

c Je loopt op de stoep, het autoverkeer levert een geluidsdrukniveau van ongeveer 55 dB. Iemand zet opeens een elektrische drilboor aan van 95 dB. Hoeveel bedraagt het totale geluidsdrukniveau op dat moment?

d Als het geluidsdrukniveau tijdens een concert toeneemt van 110 naar 130 dB, hoeveel keer zo groot wordt dan de effectieve geluidsdruk?

Verwerken

Opgave 9

De bevolking van een middelgrote stad groeit vanaf 1 januari 2010 met (ongeveer) 6% per jaar. Op 1 januari 2010 zijn er 80000 inwoners.

a Stel een formule op voor het aantal inwoners A afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010.

b Teken op enkellogaritmisch papier de grafiek van $A(t)$ en schat daarmee het aantal inwoners op 1 januari 2025. Controleer je antwoord door berekenen.

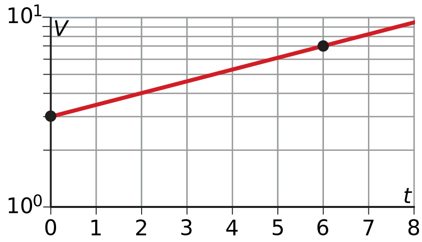
Opgave 10

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend van een toenemende hoeveelheid V als functie van de tijd t.

a Geef een formule voor $V(t)$.

b Bereken de waarde van t waarvoor $V(t) = 5$. Rond af op twee decimalen. Controleer je antwoord met de grafiek.

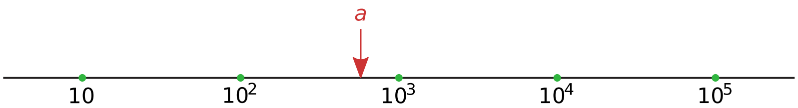
c Voor negatieve waarden van t heeft de grafiek een snijpunt met de t-as. Bereken de bijbehorende waarde van t. Rond af op twee decimalen.



Figuur 3.7

Opgave 11

Lees het getal a af op deze logaritmische schaal.



Figuur 3.8

Opgave 12

Bekijk de tabel met gegevens over een bacteriecultuur. t is gegeven in uren, en $N(t)$ in aantallen.

t (uur)	0	1	2	3	4	5	6
N	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 3.1

a Maak met behulp van deze tabel een tabel waarin $\log(N)$ wordt uitgezet tegen t. Rond af op twee decimalen.

b Teken de bijbehorende grafiek van $\log(N)$ als functie van t. Kun je deze grafiek benaderen door een rechte lijn?

c Is er sprake van exponentiële groei?

d Stel een formule op voor $\log(N)$ als functie van t.

e Stel met behulp van het antwoord uit c een formule op voor N als functie van t.

Opgave 13

De batterij van een laptop verliest bij gebruik ongeveer 6% per uur aan batterijduur. Als er nog maar voor 10% aan batterij is, geeft de laptop een waarschuwing dat de batterij opgeladen moet worden.

a Stel een formule op voor het resterende acculadingspercentage P van de accu na u uren gebruik, als je uitgaat van een volle batterij.

b Bereken hoelang je de laptop kunt gebruiken voordat je een melding krijgt dat de batterij opgeladen moet worden. Geef je antwoord in uren.

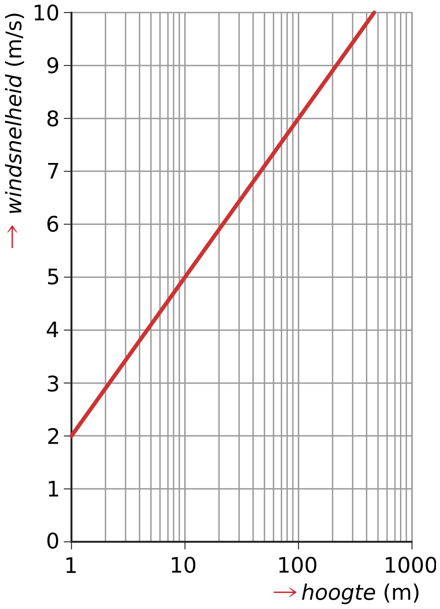
c Laat zien, dat de grafiek van P afhankelijk van u op enkellogaritmisch papier een rechte lijn is.

Toepassen

Opgave 14: Windsnelheid

De windsnelheid neemt toe met de hoogte. De windsterkte is onder meer afhankelijk van de ruwheid van het terrein en de stabiliteit van de atmosfeer. In de grafiek zijn de resultaten weergegeven van metingen op dagen met een neutrale atmosfeer.

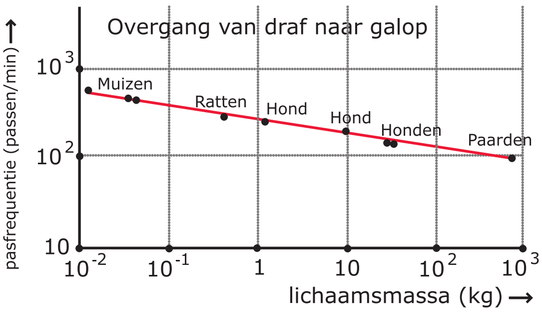
Het verband tussen de windsnelheid w en de hoogte h kan worden geschreven in de vorm $w = a \cdot \log(h) + b$. Toon met een berekening aan dat $a = 3$ en $b = 2$.



Figuur 3.9

Opgave 15: Pasfrequentie afhankelijk van lichaamsmassa

Bekijk de grafiek. Je ziet voorbeelden van zoogdieren die bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) overgaan van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt, hangt af van de lichaamsmassa (kg). Noem de lichaamsmassa m (kg) en de pasfrequentie P. De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden.



Figuur 3.10

a Omdat op beide assen een logaritmische schaal is gebruikt, is in feite $\log(P)$ uitgezet tegen $\log(m)$. Voor het punt dat hoort bij paarden geldt dan ongeveer $\log(m) = 2{,}9$ en $\log(P) = 2{,}0$. Bepaal zelf de bijpassende waarden van het punt dat bij een kleine hond hoort.

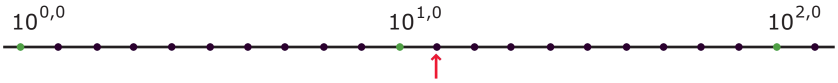
b Leid nu een formule af voor $\log(P)$ als functie van $\log(m)$.

c Met behulp van de eigenschappen van logaritmen kun je nu een formule afleiden voor P als functie van m. Laat zien hoe dat gaat.

Testen

Opgave 16

Teken een getallenlijn met een logaritmische schaalverdeling (neem deze figuur over).



Figuur 3.11

a Welk getal hoort bij het pijltje?

b Teken een pijltje dat hoort bij het getal 2.

c Geef aan waar 55 en waar $10^{0,5}$ moeten staan.

d Geef ook $3\frac{1}{4}$ en $10^{\frac{1}{4}}$ aan.

Opgave 17

Bij een biologisch experiment groeit in een vijver een waterplant. De waterplant bedekt een steeds groter deel van het wateroppervlak. Elke week meet men de oppervlakte die de waterplant bedekt. De meetwaarden staan in de tabel.

aantal weken	0	1	2	3	4	5	6
oppervlakte (dm^2)	40	57	89	134	200	305	447

Tabel 3.2

a Zet de punten $(0{,}40)$,$(1{,}57)$,...,$(6{,}447)$ uit op enkellogaritmisch papier.

b Trek door deze punten zo goed mogelijk een rechte lijn.

c Van welk type groei is hier sprake? Waar zie je dat aan?

d Stel een formule op voor de oppervlakte die de waterplant bedekt, afhankelijk van de tijd t in weken.

2.4 Logaritmische functies

Inleiding

Logaritmen ontstaan als inverse bewerking van exponentiële functies.
Ook met logaritmen kun je functievoorschriften maken.
Het prototype is de functie $f(x) = {}^{g}\log(x)$.
Alle functies die hieruit door de bekende transformaties kunnen ontstaan noem je logaritmische functies. En die ga je nu bekijken.

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische functies te werken;
- de karakteristieken van logaritmische functies te bepalen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies;
- transformaties van functies toepassen;
- werken met logaritmen.

Verkennen

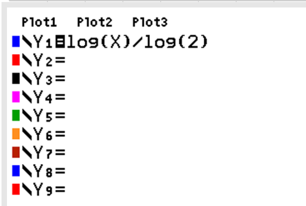
Opgave V1

Op je grafische rekenmachine kun je de grafiek van $f(x) = {}^{2}\log(x)$ in beeld brengen.
Je voert dan in: $y_1 = (\log(x))/(\log(2))$ of $y_1 = \log_2(x)$.

a Breng de grafiek in beeld. Welk domein en welk bereik heeft de functie?

b Welke asymptoot heeft de grafiek van f?

c Bekijk de tabel. Bij welke waarden van x krijg je gehele functiewaarden?



Figuur 4.1

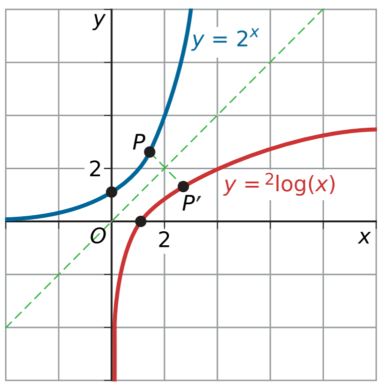
Uitleg

Bekijk de applet: Logaritme als inverse functie

Bekijk de grafiek van $y = 2^x$. Uit de definitie van de logaritme volgt dan voor elk punt op de grafiek dat $x = {}^{2}\log(y)$. Verwissel je hierin x en y, dan krijg je $y = {}^{2}\log(x)$. Deze logaritmische functie ontstaat dus door vanuit de exponentiële functie terug te rekenen (de inverse bewerking uit te voeren) en vervolgens x en y te verwisselen.

Verwissel je in een punt x en y, dan spiegel je dat punt in de lijn $y = x$. Bij elk punt P op de grafiek van $y = 2^x$ hoort een punt P', dat ontstaat door in P de x en y te verwisselen, op de grafiek van $y = {}^{2}\log(x)$. De grafiek van $y = {}^{2}\log(x)$ is dus het spiegelbeeld in de lijn $y = x$ van de grafiek van $y = 2^x$.

Dit werkt voor alle positieve grondtallen g, mits $g \neq 1$. De karakteristieken van een logaritmische functie zijn daarom af te leiden uit die van een exponentiële functie (met hetzelfde grondtal) door x en y te verwisselen. Beide functies zijn elkaars inverse functie.



Figuur 4.2

Opgave 1

Er bestaat een verband tussen de grafieken van bijvoorbeeld $y_1 = 2^x$ en $y_2 = {}^2\log(x)$.

a Maak beide grafieken op de grafische rekenmachine.

b Het punt $(4,2)$ ligt op de grafiek van y_2. Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

c Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1.

d Welk verband bestaat er tussen het bereik van y_1 en het domein van y_2?

Opgave 2

Er bestaat een verband tussen de grafieken van bijvoorbeeld $y_1 = 0{,}5^x$ en $y_2 = {}^{0{,}5}\log(x)$.

a Plot beide grafieken op de grafische rekenmachine.

b Het punt $\left(4,\frac{1}{16}\right)$ ligt op de grafiek van y_2. Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

c Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1.

d Welk verband bestaat er tussen het bereik van y_1 en het domein van y_2?

e Er geldt $\lim\limits_{x\to\infty} 0{,}5^x = 0$. Licht toe dat hieruit volgt $\lim\limits_{x\downarrow 0} {}^{0{,}5}\log(x) = \infty$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Logaritme als inverse functie

Een functie van de vorm $f(x) = {}^g\log(x)$ heet een **logaritmische functie**. Hierin is $g > 0$ en $g \neq 1$ een vast gekozen grondtal.

De grafieken van de functies $y = g^x$ en $y = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de lijn $y = x$. Beide functies zijn elkaars **inverse functie**.

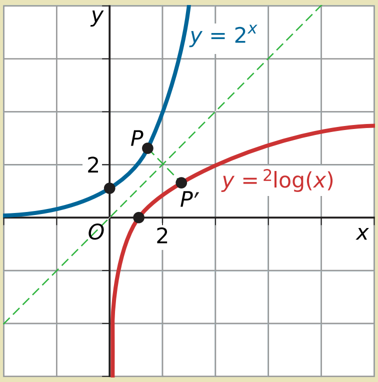
De **karakteristieken** van $y = {}^g\log(x)$ zijn daarom af te leiden uit die van $y = g^x$:

- het domein is $\langle 0, \rightarrow\rangle$
- het bereik is $\mathbb{R}$
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ is de grafiek dalend
- de y-as is de verticale asymptoot van de grafiek:

  $\lim\limits_{x\downarrow 0} {}^g\log(x) = -\infty$ als $g > 1$

  $\lim\limits_{x\downarrow 0} {}^g\log(x) = \infty$ als $0 < g < 1$

Alle functies die door transformatie uit $y = {}^g\log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.



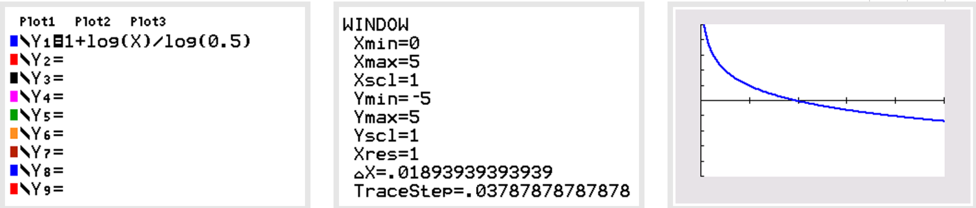
Figuur 4.3

Voorbeeld 1

Bepaal de karakteristieken van de logaritmische functie $f(x) = 1 + {}^{0,5}\log(x)$ en bereken het nulpunt van de grafiek. Leg uit waarom deze functie dezelfde grafiek heeft als $g(x) = 1 - {}^{2}\log(x)$.

Antwoord

De grafiek van f kan uit de grafiek van $y = {}^{0,5}\log(x)$ ontstaan door deze 1 eenheid in de y-richting te verschuiven. Omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt, is de grafiek dalend. Verder moet $x > 0$, dus $D_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$. De verticale asymptoot is $x = 0$, de grens van het domein.



Figuur 4.4

$f(x) = 0$ geeft ${}^{0,5}\log(x) = -1$.
Hieruit volgt: $x = 0{,}5^{-1} = 2$.
Het nulpunt is daarom $x = 2$.

Deze functie f heeft dezelfde grafiek als functie g omdat ${}^{0,5}\log(x) = \dfrac{{}^{2}\log(x)}{{}^{2}\log(0{,}5)} = -{}^{2}\log(x)$.

Opgave 3

Teken de grafieken van $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ op de grafische rekenmachine. De eigenschappen van y_2 kun je afleiden uit die van y_1.

a Schrijf het domein, het bereik en de asymptoot van de functie y_2 op.

b Voor welke waarde van x is $y_2 = 2$?

c Voor welke waarden van x geldt $y_2 > 2$?

Opgave 4

Maak de grafiek van de functie $f(x) = {}^{3}\log(x)$.

a Schrijf het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f op.

b Voor welke waarde van x is $f(x) = 2$?

c Voor welke waarden van x geldt $f(x) > 2$?

d Voor welke waarden van x geldt $f(x) < 2$?

Opgave 5

Maak de grafiek van de functie $f(x) = -1 + 2 \cdot {}^{0,3}\log(x - 1)$.

a Schrijf het domein en het bereik van f op.

b Schrijf de vergelijking van de verticale asymptoot op.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{0,3}\log(x)$?

d Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van f.

Voorbeeld 2

Bepaal de karakteristieken van de logaritmische functie $f(x) = 4 \cdot \log(100 - 2x) - 10$ en bereken het snijpunt van de grafiek met de x-as.

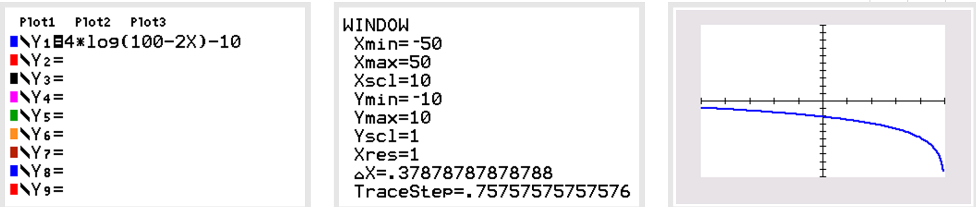
Antwoord

Door de nogal grote getallen is het verstandig om systematisch de karakteristieken te zoeken:

- $100 - 2x > 0$ geeft: $\text{D}_f = \langle \leftarrow, 50 \rangle$. Hiermee bepaal je de vensterinstellingen van de grafische rekenmachine voor de x-as.
- De verticale asymptoot is $x = 50$, de grens van het domein.
- Het bereik is $\text{B}_f = \mathbb{R}$ want deze functie kan ontstaan uit $y = \log(x)$, de standaard 10-logaritme.

Je kunt nu de grafiek plotten.

Je ziet dat $\lim\limits_{x \uparrow 50} (4 \cdot \log(100 - 2x) - 10) = -\infty$.



Figuur 4.5

Het nulpunt volgt uit: $f(x) = 4 \cdot \log(100 - 2x) - 10 = 0$.
Dit levert op: $\log(100 - 2x) = 2{,}5$ en dus $100 - 2x = 10^{2{,}5}$.
Ga na dat daaruit voor het nulpunt volgt: $x \approx -108{,}11$.
Het snijpunt van de grafiek met de x-as is ongeveer $(-108{,}11; 0)$.

Opgave 6

Maak de grafiek van de functie $f(x) = 2 + 3 \cdot {}^{2}\log(x + 4)$.

a Schrijf het domein en het bereik van f op.

b Schrijf de vergelijking van de verticale asymptoot op.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{2}\log(x)$?

d Bereken exact het nulpunt van de grafiek van f.

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = -1 + 4 \cdot {}^{0{,}5}\log(2 - x)$.

a Schrijf het domein en het bereik van g op.

b Schrijf de vergelijking van de verticale asymptoot en de bijbehorende limiet op.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van g uit die van $y = {}^{0{,}5}\log(x)$?

d Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van g.

Voorbeeld 3

Het verband tussen het geluidsdrukniveau L (in dB) en de effectieve geluidsdruk p (in Pa) is

$L = 20 \cdot \log \left(\frac{p}{p_0} \right)$

met $p_0 = 0{,}00002$ Pa, de gehoorgrens.

Laat zien dat p een exponentiële functie van L is.

Antwoord

Vul eerst $p_0 = 0{,}00002$ in. Herleid vervolgens de gegeven formule naar de vorm $p = ...$

$$\begin{aligned} L &= 20 \cdot \log \left(\frac{p}{0{,}00002} \right) \\ \frac{L}{20} &= \log \left(\frac{p}{0{,}00002} \right) \\ 10^{\frac{1}{20}L} &= \frac{p}{0{,}00002} \\ p &= 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{1}{20}L} \end{aligned}$$

Omdat $10^{\frac{1}{20}L} \approx 1{,}12^L$ kun je dit schrijven als: $p \approx 0{,}00002 \cdot 1{,}12^L$. p is een exponentiële functie van L.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt de gegeven formule van de effectieve geluidsdruk herleid tot een exponentiële functie van de vorm $p = a \cdot g^L$.

a Voer zelf de herleiding uit zonder naar het voorbeeld te kijken.

b Hoeveel bedraagt de effectieve geluidsdruk bij een geluidsdrukniveau van 20 dB?

c Hoeveel bedraagt het geluidsdrukniveau bij een effectieve geluidsdruk van 0,001 Pa?

Opgave 9

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats:

$h = -19 \log(p) + 57$

waarin:

- p de druk in hectopascal,
- h de hoogte in km boven zeeniveau is.

Je kunt deze formule herleiden naar de vorm $p = a \cdot g^h$.

a Laat zien, hoe dat gaat.

b Je kunt de formule ook de vorm $p = a \cdot 10^{k \cdot h}$ geven. Hoe ziet de formule er dan uit?

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = -2 + {}^{7}\log(x)$.

a Bepaal de karakteristieken van $f(x)$.

b Bereken algebraïsch het nulpunt van $f(x)$.

c Ga na of $f(x)$ de y-as snijdt en bereken in dat geval het snijpunt met de y-as.

Opgave 11

Plot de grafiek van de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x + 4)$.

a Schrijf het domein en het bereik van f op.

b Schrijf de vergelijking van de verticale asymptoot en de bijbehorende limiet op.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = \log(x)$?

d Bereken exact het nulpunt van de grafiek van f.

Opgave 12

De grafieken van de functies $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $g(x) = 2^x$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de y-as. De grafieken van de functies $h(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ en $k(x) = {}^{2}\log(x)$ moeten dan elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de x-as.

a Voor welke waarde van x is $h(x) = 3$?

b Voor welke waarde van x is $k(x) = -3$?

c Laat zien dat de punten die je bij a en b vond elkaars spiegelbeeld in de x-as zijn.

d Geef nog een punt op de grafiek van h en het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van k.

e Teken de grafieken van h en k in één figuur en los op: $h(x) = k(x)$.

f Toon nu aan dat $h(x) = -k(x)$ voor willekeurige $x > 0$. Gebruik de rekenregel om van grondtal te wisselen.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = {}^{4}\log\left(\frac{1}{2}x - 6\right) + 2$.

a Bepaal domein en bereik van f.

b Laat zien dat de functie $g(x) = 2 \cdot 4^{x-2} + 12$ de inverse functie is van f.

c Welk domein en welk bereik heeft deze inverse functie?

Opgave 14

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(2 - x)$.

a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van de functies f en g.

b De grafiek van de functie g ontstaat door transformatie uit die van f. Beschrijf de transformaties in de juiste volgorde.

c Teken de grafiek van de functies f en g en los op: $f(x) = g(x)$.

d In welke lijn zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld?

Opgave 15

De formule $k = 4 \cdot \log\left(\frac{D+10}{100}\right) + 5$ is zo te herleiden dat D een exponentiële functie is van k.

Toon dat aan.

Toepassen

Opgave 16: Lichtgevoeligheid

Lichtgevoeligheid van fotografisch opnamemateriaal wordt uitgedrukt in een gevoeligheidsgetal. Het meest gebruikte systeem hiervoor is het ASA-systeem (American Standards Association). Op filmrolletjes staat meestal ook een ander gevoeligheidsgetal vermeld, de DIN-waarde. Het verband tussen ASA en DIN wordt gegeven door de formule

Figuur 4.6

$y = 1 + a \cdot \log(x)$

Hierin geeft x de lichtgevoeligheid in ASA aan en y de lichtgevoeligheid in DIN. Een film van 100 ASA heeft een DIN-waarde 21.

a Bereken a.

b Maak de grafiek. De meeste films hebben een ASA-waarde tussen 50 en 1000.

c Hoeveel ASA heeft een film met een gevoeligheid van 31 DIN?

d Je kunt de gegeven formule ook herleiden naar de vorm $x = b \cdot 10^{k\,y}$.
Bereken b en k.

Opgave 17: Schaal van Richter

Een bekende maat voor de sterkte van een aardbeving is de magnitude op de schaal van Richter.
Daarvoor geldt bij benadering:

$m = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{2}\right) - 3$

Hierin is:

- m de magnitude op de schaal van Richter
- E de energie in Joule

a Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $E = a \cdot 10^{k \cdot m}$.

b Op 23 augustus 2018 werd Bali getroffen door een aardbeving met een magnitude van $5{,}2$ op de schaal van Richter.
Hoe groot bedroeg de hoeveelheid vrijgekomen energie?

Testen

Opgave 18

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$L = k \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$.

De constanten G_0 en k hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

a Mark (8 jaar) woont in Nederland en heeft een lengte van $1{,}30$ m en weegt $26{,}3$ kg. Bereken k in gehelen nauwkeurig. Neem aan dat Mark wat lengte en gewicht betreft een gemiddeld Nederlands kind is.

b Helen is $1{,}40$ m lang. Bereken haar gewicht in kg. Rond af op één decimaal.

c Schrijf de formule in de vorm $G = b \cdot g^L$, voor $k = 120$. Geef daarbij g in vier decimalen nauwkeurig.

Opgave 19

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(2x)$ en $g(x) = {}^{3}\log(3x - 6)$.

a Bepaal domein, bereik en de asymptoot van f met de bijbehorende limiet.

b Door middel van welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$?

c Bepaal domein, bereik en asymptoot van g en teken de grafiek van g.

d Door middel van welke transformaties kan de grafiek van g ontstaan uit die van $y = {}^{3}\log(x)$?

e Los op in drie decimalen nauwkeurig: $f(x) = g(x)$.

Practicum: Logaritmische functies

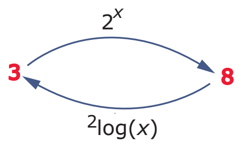
Met deze applet maak je logaritmische functies. Verzin zo'n functie, bedenk eerst hoe hij kan ontstaan uit $y = {}^{g}\log(x)$ en wat de karakteristieken zijn. Controleer dan je antwoord met de applet.

Bekijk de applet: Logaritmische functie

2.5 Logaritmische vergelijkingen

Inleiding

Onder andere bij het berekenen van nulpunten van functies ben je al vergelijkingen tegengekomen waarin logaritmen voorkomen. Uit de definitie volgt dat je vanuit een logaritme kunt terugrekenen door een exponentiële functie met hetzelfde grondtal te gebruiken. Hiermee kun je vergelijkingen met logaritmen oplossen. Soms gebruik je er ook de eigenschappen van logaritmen bij.
Bij ongelijkheden moet je ook nog rekening houden met het domein van de logaritme!



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- systematisch vergelijkingen met logaritmen op te lossen;
- ongelijkheden met logaritmische functies op te lossen.

Voorkennis

- werken met logaritmische functies;
- de eigenschappen van logaritmen gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

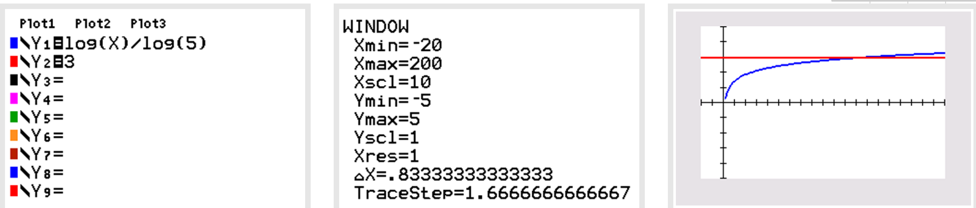
Los op: ${}^{5}\log(x) < 3$.

Uitleg

Los exact op: ${}^{5}\log(x) < 3$.

Zo'n ongelijkheid los je op met behulp van grafieken.

- Eerst los je de bijbehorende vergelijking ${}^{5}\log(x) = 3$ algebraïsch op door aan beide zijden een exponentiële functie met grondtal 5 toe te passen: $x = 5^3 = 125$.
- Vervolgens bekijk je de grafieken van $y_1 = {}^{5}\log(x)$ en $y_2 = 3$. Daarbij moet je vooral letten op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.
- De oplossing wordt: $0 < x < 125$.



Figuur 5.2

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot {}^{2}\log(x) + 16$.

a Plot de grafiek van f.

b Bepaal met de grafische rekenmachine voor welke waarde van x geldt: $f(x) = 38$.

c Bepaal nu ook algebraïsch voor welke waarde van x geldt: $f(x) = 38$.

d Iemand beweert dat het algebraïsch oplossen van de vergelijking twee voordelen heeft ten opzichte van het grafisch oplossen. Ten eerste kost het nogal wat tijd om het juiste venster in te stellen waaruit je de oplossing kunt aflezen. Ten tweede is de oplossing die je uit de grafiek afleest, geen exacte oplossing. Wat vind je van deze bewering?

Opgave 2

Gegeven is weer de functie $f(x) = 3 \cdot {}^{2}\log(x) + 16$. Nu moet de ongelijkheid $3 \cdot {}^{2}\log(x) + 16 \leq 38$ worden opgelost tot op één decimaal.

a Bepaal het domein en het bereik van f en de asymptoot van de grafiek van f.

b Lees de oplossing van de ongelijkheid af uit de grafiek van f.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

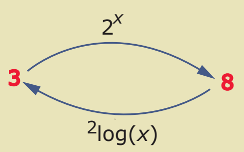
De **oplossing van de logaritmische vergelijking** ${}^{g}\log(x) = a$ vind je door aan beide zijden een exponentiële functie met grondtal g toe te passen.

Uit ${}^{g}\log(x) = a$ volgt dan $x = g^a$.
Hierbij moet $g > 0$ en $g \neq 1$ en $x > 0$.

De **logaritmische ongelijkheid** ${}^{g}\log(x) < a$ los je op met behulp van grafieken:

- Eerst los je de bijbehorende vergelijking ${}^{g}\log(x) = a$ op.
- Vervolgens bekijk je de grafieken van $y_1 = {}^{g}\log(x)$ en $y_2 = a$. Daarbij moet je vooral letten op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.
- De oplossing lees je uit de grafiek af.

Bij ingewikkelde vergelijkingen waarin meerdere logaritmen voorkomen, heb je vaak ook nog de eigenschappen van het optellen of aftrekken van logaritmen nodig. Soms moet je zelfs van grondtal wisselen.



Figuur 5.3

Voorbeeld 1

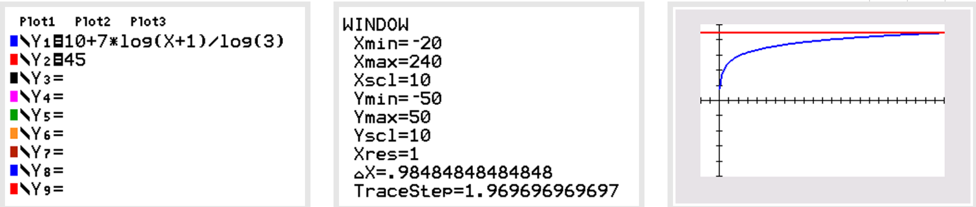
Los op: $10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1) \leq 45$.

Antwoord

Maak de grafieken van $y_1 = 10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1)$ en $y_2 = 45$ op de grafische rekenmachine. Voor de logaritmische functie bedenk je vooraf dat het domein $\langle -1, \rightarrow\rangle$ is, met een verticale asymptoot $x = -1$. Hiermee en met $y_2 = 45$ bepaal je de vensterinstellingen.

- $10+7\cdot{}^{3}\log(x+1) = 45$ geeft ${}^{3}\log(x+1) = 5$ en dus $x+1 = 3^5$. Hiermee vind je: $x = 242$.
- Nu bekijk je de grafiek en lees je de oplossing af: $-1 < x \leq 242$.

Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.



Figuur 5.4

Opgave 3

Los op de manier van **Voorbeeld 1** op: $2 + 3 \cdot {}^{2}\log(x-4) \leq 11$.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^{0,5}\log(x+5)$.

a Los algebraïsch op: $f(x) = -3$.

b Bepaal het domein, het bereik en de vergelijking van de asymptoot van f en plot de grafiek.

c Los op: $f(x) \geq -3$.

Opgave 5

Teken met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(2-x)$.

a Bepaal van beide functies het domein.

b Schrijf van beide functies de vergelijking van de asymptoot op.

c Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

d Los op: $f(x) > g(x)$.

Voorbeeld 2

Bij het oplossen van sommige vergelijkingen heb je de eigenschappen van logaritmen nodig.
Los algebraïsch op: ${}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x+2) = 3$.

Antwoord

$$\begin{aligned} {}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x+2) &= 3 \\ {}^{2}\log(x(x+2)) &= 3 \\ 2^{{}^{2}\log(x(x+2))} &= 2^3 \\ x(x+2) &= 8 \\ x^2+2x-8 &= 0 \\ (x-2)(x+4) &= 0 \\ x &= \text{-}4 \vee x = 2 \end{aligned}$$

In plaats van het toepassen van een exponentiële functie met grondtal 2, kun je er ook voor kiezen om met behulp van de andere definitieformule 3 te schrijven als ${}^{2}\log\left(2^3\right)$, waarna je ook uitkomt op $x(x+2) = 2^3$.

Vanwege het domein van de logaritmes moet $x > 0$ en $x + 2 > 0$. Alleen $x = 2$ voldoet daaraan en dit is daarom de enige oplossing van de gegeven vergelijking.

Opgave 6

Los algebraïsch op: ${}^{6}\log(x) + {}^{6}\log(x-1) = 1$.

Opgave 7

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = 4$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) \leq 4$

c $\text{-}5 + 4 \cdot {}^{2}\log(x-2) = 11$

d $\text{-}5 + 4 \cdot {}^{2}\log(x-2) \leq 11$

e ${}^{3}\log(x-2) = 1 + 5 \cdot {}^{3}\log(2)$

f $\log(2x) - \log(x-1) = 2$

Voorbeeld 3

Sommige vergelijkingen met logaritmen los je op met behulp van de rekenregel voor het wisselen van grondtal.

Los algebraïsch op: ${}^{\frac{1}{2}}\log(2-x) \geq {}^{2}\log(x)$.

Antwoord

Maak eerst de grafieken van $y_1 = {}^{\frac{1}{2}}\log(2-x)$ en $y_2 = {}^{2}\log(x)$.

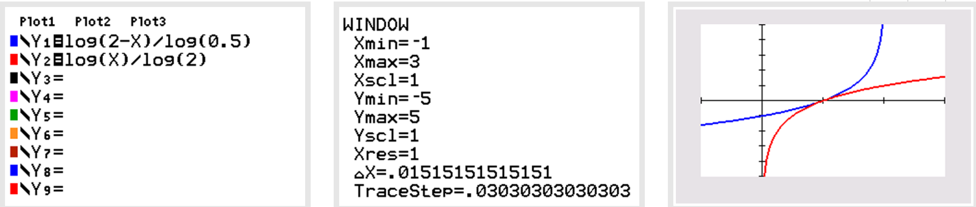
- ${}^{\frac{1}{2}}\log(2-x) = {}^{2}\log(x)$ los je op door van grondtal te wisselen, bijvoorbeeld y_1 naar grondtal 2 omzetten: ${}^{\frac{1}{2}}\log(2-x) = \dfrac{{}^{2}\log(2-x)}{{}^{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)} = \text{-}\,{}^{2}\log(2-x)$.

  De vergelijking wordt daarmee $\text{-}\,{}^{2}\log(2-x) = {}^{2}\log(x)$ en dus ${}^{2}\log(2-x) + {}^{2}\log(x) = 0$.

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} {}^{2}\log(x(2-x)) &= 0 \\ x(2-x) &= 2^{0} = 1 \\ x^{2} - 2x + 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

- Vervolgens gebruik je de grafieken van y_1 en y_2 om de oplossing af te lezen.



Figuur 5.5

Je vindt dat y_1 altijd groter of gelijk is aan y_2, tenminste binnen beide domeinen van deze functies. De oplossing is daarom: $0 < x < 2$.

Opgave 8

Gebruik in deze opgave de rekenregel voor het wisselen van grondtal.

a Los algebraïsch op: ${}^{2}\log(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

b Los op: ${}^{2}\log(x) < {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

Verwerken

Opgave 9

Maak de grafiek van de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x+4)$.

a Schrijf het domein, het bereik en de asymptoot van f op.

b Los algebraïsch op: $f(x) < 0$.

Opgave 10

Maak de grafiek van de functie $g(x) = -10 + 2 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(x-1)$.

a Schrijf het domein, het bereik en de asymptoot van g op.

b Los algebraïsch op: $g(x) \geq -14$.

Opgave 11

Los algebraïsch op.

a ${}^{3}\log(x) = 2 \cdot {}^{3}\log(5)$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2)$

c $5 - {}^{2}\log(x) = 0$

d ${}^{5}\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^{5}\log(3)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2-x)$

f ${}^{5}\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^{5}\log(x)$

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{\frac{1}{4}}\log(x)$ en $g(x) = \text{-}1 + {}^{4}\log(x+3)$.

a Bepaal van beide functies het domein, het bereik en de asymptoot.

b Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

c Los op: $f(x) \leq g(x)$.

d Los op: $f(x) > g(x)$.

Opgave 13

Druk q uit in p.

a $p = 15 - {}^{3}\log(5-q)$

b $p = 600 + 15 \cdot \log\left(\frac{q}{200}\right)$

Opgave 14

Gegeven is de functie $g(x) = {}^{2}\log(5-3x)$.

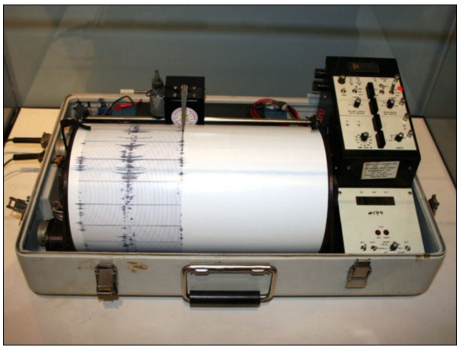
a Geef de vergelijking van de asymptoot van $g(x)$.

b Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de lijn $x = \text{-}2$.

c Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de lijn $y = \text{-}2$.

Toepassen

Aardbevingen worden geregistreerd met een seismograaf, die aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. Verspreid over de aarde staan veel seismografen opgesteld. De uitwijking van een seismograaf hangt af van de afstand van dit instrument tot de plaats aan de oppervlakte van de aarde waar de beving het eerst optreedt. Deze plaats noemt men het epicentrum van de aardbeving. Om aardbevingen met elkaar te kunnen vergelijken gebruikt men seismogrammen die op een afstand van 100 km van het epicentrum zijn gemaakt (standaard seismogrammen). De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Bij deze schaal wordt de logaritme (met grondtal 10) gebruikt van de grootste uitwijking in micrometer die in het seismogram voorkomt.



Figuur 5.6

Opgave 15

Bekijk het verhaal van de schaal van Richter in **Toepassen**.

a Leg uit, dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitwijking van de seismograaf 10 keer zo groot wordt.

De aardbeving in Nederland van 13 april 1992 had een kracht van 5,5 op de schaal van Richter. De kracht van de aardbeving op 27 februari 2010 in Chili was 8,8.

b Bereken de verhouding tussen deze twee grootste uitwijkingen.

Opgave 16

Als op een bepaald waarnemingsstation een seismogram gemaakt is en je weet de plaats van het epicentrum, dan kun je met de volgende formule de kracht van de aardbeving berekenen:

$R = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 1{,}66 \cdot \log(D) + 3{,}30$

Hierin is:

- R de kracht van de aardbeving uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter
- A de grootste uitwijking in het seismogram in μm (1 μm = 0,001 mm)
- T de tijd in seconden van de trilling met de grootste uitwijking
- D de grootte in graden van de hoek tussen de verbindingslijnstukken ME en MW, waarin M het middelpunt van de aarde, E het epicentrum van de aardbeving en W de plaats van het waarnemingsstation is

Uit de formule volgt inderdaad dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitslag van de seismograaf 10 keer zo groot wordt (bij dezelfde T en D).

a Toon dit aan.

Van de Chileense aardbeving van 2010 werd een seismogram opgenomen. De trillingen gaven daar een maximale uitslag van 1500 μm; de trillingstijd T bedroeg 20 s. Na invulling van D werd R = 8,8 gevonden. Neem aan dat de omtrek van de aarde 40000 km is.

b Bereken de afstand over de aardbol tussen de plaats waar het seismogram werd opgenomen en het epicentrum in Chili in honderden kilometers nauwkeurig.

Ook op diverse andere plaatsen werd in 2010 een seismogram van de Chileense aardbeving opgenomen. Op al die plaatsen berekende men dat de kracht van de aardbeving 8,8 was.

c Toon aan dat hieruit volgt dat tussen A, T en D een verband bestaat van de vorm: $D = p \cdot \left(\frac{T}{A}\right)^q$ en bereken p en q in twee decimalen nauwkeurig.

Testen

Opgave 17

Los algebraïsch op.

a ${}^{7}\log(x-5) = 0$

b $-{}^{0,25}\log(x) = {}^{0,25}\log(5)$

c ${}^{4}\log(x) = 0{,}5 - {}^{4}\log(3)$

d ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) + {}^{\frac{1}{2}}\log(2x) = 0$

Opgave 18

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(2x)$ en $g(x) = {}^{3}\log(3x - 6)$.

a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van beide functies.

b Bereken voor welke x geldt $f(x) = -2$.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 9$.

d Bereken voor welke x geldt $g(x) < 0$.

e Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

f Los algebraïsch op: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 19

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = 125 \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constanten G_0 en k hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

a Herleid de gegeven formule naar de vorm $G = a \cdot 10^{k \cdot L}$.

b Hoe zwaar is een gemiddelde westerse twaalfjarige als ze $1{,}30$ m lang is?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met logaritmen**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Logaritmische functies** doorgewerkt.
Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan.
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- logaritme — grondtal
- definitieformules — eigenschappen van logaritmen
- logaritmische schaal
- logaritmische functie
- logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden

Activiteitenlijst

- logaritmen gebruiken om exponentiële vergelijkingen op te lossen
- definitieformules en eigenschappen van logaritmen gebruiken — vergelijkingen met logaritmen oplossen
- werken met logaritmische schalen — functievoorschrift bepalen van exponentiële functie op enkellogaritmisch papier
- de karakteristieken van een logaritmische functie bepalen
- logaritmische vergelijkingen/ongelijkheden oplossen

Achtergronden

In 1614 verscheen ‘Mirifici logarithmorum canonis descriptio’ van **sir John Napier (1550—1617)**. Hierin staat de eerste beschrijving van logaritmen. In het voorwoord legt Napier uit dat zijn doel was het vinden van een eenvoudige manier om grote getallen te vermenigvuldigen, te delen, te kwadrateren en er wortels uit te trekken. Hij voerde een bepaalde handeling op die grote getallen uit waardoor hij er getallen van maakte waarmee hij door eenvoudig optellen en aftrekken hetzelfde resultaat verkreeg als andere door lastige vermenigvuldigingen en delingen. Die handeling (een functie zou je nu zeggen) noemde hij ‘logaritme nemen’ (‘logos arithmos’ is ‘verhouding van getallen’). Een voorbeeld:

Figuur 6.1

Stel je wilt $a \cdot b = 1296 \cdot 63508$ berekenen.
Je neemt van beide getallen de logaritme (grondtal 10): $\log(1296) = 3{,}112605\ldots$ en $\log(63508) = 4{,}8028284$.
Nu gebruik je de rekenregel: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$.
Dus is $\log(a \cdot b) = 3{,}112605 + 4{,}8028284 = 7{,}95433$.
Nu werk je die logaritme weer weg en je vind het antwoord 82306368.

Tabel 6.1

Je ziet hoe Napier van een vervelende vermenigvuldiging $1296 \cdot 63.508$ een gemakkelijke optelling maakte!
In de tijd dat er geen elektronische rekenmachines waren, was dit

een enorm belangrijke stap vooruit. Napiers logaritmen hadden trouwens nog niet het grondtal 10 (zoals in het voorbeeld), dat laatste is het werk van **Henry Briggs (1561—1630)**. Hij las in 1615 de Latijnse versie van Napiers geschrift en was er meteen van onder de indruk. Hij suggereerde Napier zijn logaritme zo aan te passen, dat $\log 1 = 0$ en het grondtal 10 is. Ze werden het eens en Briggs maakte een tabel voor logaritmen van getallen gebaseerd op grondtal 10.

Testen

Opgave 1

Los algebraïsch op.

a $^{\frac{1}{3}}\log(x+2) = -2$

b $^{2}\log(x) = 5 - {}^{2}\log(10)$

c $^{5}\log\left(4x^2\right) = 2 + {}^{5}\log(x)$

d $10 + 5 \cdot {}^{2}\log(x-5) \leq 100$

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x+10) + 4$ en $g(x) = \log(-x)$.

a Bepaal van beide functies het domein, het bereik en de vergelijking van de asymptoot en schrijf de bijbehorende limieten op.

b Bepaal van beide functies algebraïsch het nulpunt.

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq g(x)$.

d Gegeven is de functie $h(x) = f(x) + g(x)$.
Toon aan dat $h(x) = \log\left(-100000x - 10000x^2\right)$.

Opgave 3

Iemand verwacht dat de komende jaren aandelen 11% per jaar in waarde zullen stijgen.

a Hoelang duurt het dan totdat de waarde van de aandelen 1,5 keer zo groot is geworden?

b Iemand koopt voor € 2000,00 aandelen. Bereken na hoeveel jaar dit bedrag is verdubbeld. Bereken ook na hoeveel jaar het bedrag is verdrievoudigd en na hoeveel jaar het is verzesvoudigd. Laat zien hoe hiermee de eigenschap $^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$ toegelicht kan worden.

Opgave 4

Een doorzichtige kunststof absorbeert per cm 27% van het licht dat er doorheen valt.

Bereken in mm nauwkeurig hoe dik de kunststof moet zijn om 50% van het licht te absorberen.

Opgave 5

De luchtdruk p in millibar (mbar) hangt af van de hoogte h (km) boven het zeeniveau. Bij benadering geldt:

$h = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$

waarin p_0 de luchtdruk op zeeniveau voorstelt.

a Neem aan dat $p_0 = 1010$ mbar. Maak de grafiek van h als functie van p.

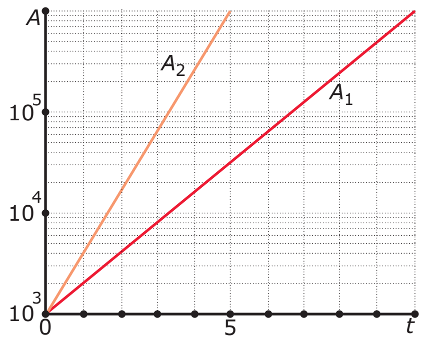
b In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 400 mbar gemeten. De luchtdruk op zeeniveau is op dat moment 1010 mbar. Hoe hoog vliegt dat vliegtuig?

c Verklaar waarom de grafiek van h met $p_0 = 930$ mbar ontstaat door de grafiek bij a in verticale richting te verschuiven.

d De bemanning van een vliegtuig gaat uit van 1000 mbar op zeeniveau en berekent dat ze op 3 km hoogte vliegen. De luchtdruk op zeeniveau is echter 1030 mbar. Hoe hoog vliegen ze in werkelijkheid? Geef je antwoord in meters nauwkeurig.

Opgave 6

In een laboratorium is onderzocht hoe de toename van het aantal bacteriën in 10 g salade afhankelijk is van de temperatuur. In de figuur staan de resultaten bij een temperatuur van 0 °C en bij een temperatuur van 4 °C.



Figuur 6.2

a Van hoeveel bacteriën is bij het onderzoek uitgegaan?

b Geef zowel voor A_1 als A_2 de formule van het aantal bacteriën A na t dagen. Rond hierbij af op twee decimalen.

c Vergelijk het aantal bacteriën na tien dagen bij 4 °C met het aantal na tien dagen bij 0 °C. Hoeveel keer zo veel bacteriën zijn er bij 4 °C?

d Hoeveel bedraagt de verdubbelingstijd bij 4 °C? Geef je antwoord in uren.

Volgens de onderzoekers is er bij de toename van het aantal bacteriën als functie van de temperatuur sprake van toenemende stijging. Voor temperaturen boven 0 °C geldt: wordt de temperatuur a keer zo groot, dan wordt de verdubbelingstijd a^2 keer zo klein.

e Geef de verdubbelingstijd van de bacteriecultuur bij 6 °C. Doe dat ook bij 10 °C.

Toepassen

Opgave 7: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip ‘zuurgraad’ gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $[H_3O^+]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $[H_3O^+] = 10^{-7}$ mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van 10^{-7}: pH = $-\log\left(10^{-7}\right) = 7$. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: pH = $-\log\left[H_3O^+\right]$.

a Bij geconcentreerd zwavelzuur is $\left[H_3O^+\right] = 18$ mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?

b Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van $11{,}5$. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie in mol/L?

c Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie van zure regen?

d Vanaf welke H_3O^+ concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?

e De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijk pH van de huid is ongeveer $5{,}5$. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie dan?

Opgave 8: De C-14 methode

In levende organismen komt behalve het radioactieve koolstof C-14 ook het niet-radioactieve C-12 voor. Gelukkig is de verhouding van de hoeveelheid C-14 ten opzichte van C-12 zeer klein. Deze verhouding is constant $1 : 10^{12}$. Wanneer een organisme sterft verandert de verhouding door radioactief verval van C-14. Door de verhouding te meten kan de ouderdom van resten organisch materiaal berekend worden. De halveringstijd van C-14 is 5730 jaar.

a Een archeoloog vindt een bot waarvan de verhouding C-14 : C-12 gelijk is aan $1 : 10^{13}$. Hoeveel jaar is dat bot ongeveer oud?

b Bij een Egyptische mummie blijkt de verhouding van C-14 en C-12 ongeveer $0{,}65$ keer de verhouding van C-14 en C-12 in levende organismen te zijn. Benader de ouderdom van deze mummie.

c In 1947 zijn aan de westzijde van de Dode Zee de Dode-Zeerollen (oudtestamentische handschriften) gevonden. De verhouding van C-14 en C-12 in de perkamenten rollen bleek tussen de 77% en de 81% van die bij levende organismen te zijn. Vanaf hoeveel jaar voor het begin van de jaartelling tot hoeveel jaar erna zijn de Dode-Zeerollen geschreven?

d Een 4500 jaar oude kist werd in een hunebed (grafkelder in de provincie Drenthe) aangetroffen. Hoe groot is de verhouding van de aangetroffen hoeveelheid C-14 en C-12 ongeveer in vergelijking met die van een houten kist uit onze tijd?

Opgave 9: De wet van Fechner-Weber

De wet van Fechner-Weber (naar de negentiende eeuwse Duitse fysiologen G.Th. Fechner en E.H. Weber) luidt: ‘Gevoelsindrukken die gelijke verhouding hebben, komen op onze zintuigen over alsof ze gelijke verschillen hebben.’
Onderzoek heeft aangetoond dat een persoon het verschil in geluidsdrukniveau tussen bijvoorbeeld 2 W/m^2 en 20 W/m^2 op dezelfde wijze ervaart als het verschil tussen 20 W/m^2 en 200 W/m^2. Toch is het verschil $20 - 2$ veel kleiner dan het verschil $200 - 20$.

Dat is de reden dat men bij het toekennen van getalswaarden aan het geluidsdrukniveau in dB de logaritme gebruikt.

Het verband tussen het geluidsdrukniveau L en de effectieve geluidsdruk p wordt gegeven door $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$.

Hierin is $p_0 = 0{,}00002$ Pa, de gehoorgrens.

a Toon aan dat daardoor het verschil in dB bij geluidsdrukniveau van 2 W/m^2 en van 20 W/m^2 gelijk is aan het verschil in dB bij geluidsdrukniveau van 20 W/m^2 en 200 W/m^2.

b Laat zien, dat de effectieve geluidsdruk p (in W/m^2) een exponentiële functie van het geluidsdrukniveau L (in dB) is.

Bij een normaal gesprek is het geluidsdrukniveau 50 dB. Het werken met een drilboor heeft een geluidsdrukniveau van 125 dB. Iemand zegt dat het geluid van een drilboor $2{,}5$ keer zo hard is als dat van een gewoon gesprek.

c Welk bezwaar kun je tegen deze bewering hebben?

Examen

Opgave 10: Touchscreens

Bij het ontwerpen van touchscreens (aanraakschermen) voor moderne media als tablets en mobiele telefoons besteedt men veel aandacht aan het gebruiksgemak. Gebruikers willen immers snel kunnen navigeren. Bekijk de afbeelding van een touchscreen met een menu dat bestaat uit dertien knoppen. De tijd die je nodig hebt om in een menu de juiste knop te vinden, hangt mede af van het aantal knoppen in het menu. Volgens de psycholoog Hick kun je deze benodigde tijd T berekenen met de formule:

$T = b \cdot {}^2\log(n+1)$

Hierbij is T de tijd in seconden, n het aantal knoppen in het menu en b een positieve constante die afhangt van de behendigheid van de gebruiker.

Figuur 6.3

a Om de juiste knop te vinden op het touchscreen van de foto heeft Irene 8 seconden nodig. Bereken met de formule van Hick haar waarde van b in één decimaal.

Pim is veel handiger met een touchscreen dan zijn vader. Hij kan in een menu met 16 knoppen even snel de juiste knop vinden als zijn vader in een menu met 4 knoppen. Dit betekent dat zijn b-waarde (b_p) kleiner is dan de b-waarde van zijn vader (b_v).

b Onderzoek of dit betekent dat de b-waarde van Pim precies half zo groot is als die van zijn vader.

Sommige gebruikers vinden een menu met veel knoppen onoverzichtelijk. Daarom deelt men een menu soms op in submenu's met minder knoppen. Als er bijvoorbeeld in totaal achttien knoppen zijn, kan de ontwerper ervoor kiezen om:

- methode I: één menu van achttien knoppen te maken
- methode II: een menu met drie knoppen te maken, waarbij na elk van de drie mogelijke keuzes weer een submenu met zes knoppen verschijnt.

De gebruiker wint hiermee overzichtelijkheid, want hij weet nu precies in welk submenu hij moet zoeken, maar hij verliest tijd doordat hij twee keer (in een menu) de juiste knop moet zien te vinden. Als $b = 0{,}9$ duurt het keuzeproces bij methode II minstens $0{,}5$ seconden langer dan bij methode I.

c Toon met behulp van de formule voor T aan dat dit juist is.

Uit de formule van Hick volgt dat één menu met alle knoppen altijd sneller werkt dan een opdeling in submenu's. Dus één menu met $p \cdot q$ knoppen is altijd sneller dan een hoofdmenu met p knoppen, gevolgd door p submenu's met elk q knoppen.

d Neem $b = 1$ en toon aan dat deze bewering klopt.

(naar: vwo wiskunde A examen 2014, tweede tijdvak)

Opgave 11: Windsnelheid

Op een bepaalde dag is in Vlaardingen op verschillende hoogtes de windsnelheid gemeten. Uit de meetresultaten blijkt dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de windsnelheid W in m/s en de hoogte h in meter voor hoogten tussen 10 en 80 meter (zie tabel). De formule $W = a \cdot h + b$ geeft dit lineaire verband.

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,9	4,3

Tabel 6.2

a Bereken a en b met behulp van de gegevens in de tabel. Rond a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

Onderzoek door weerkundigen naar windsnelheden op verschillende hoogtes en onder verschillende omstandigheden heeft opgeleverd dat het verband tussen windsnelheid en hoogte in het algemeen niet lineair is. Een betere formule is:

$$W = 5{,}76 \cdot m \cdot \log\left(\frac{h}{r}\right)$$

Hierin is:

- W de windsnelheid (in m/s);
- h de hoogte in meter waarop de windsnelheid wordt gemeten;
- m een constante die afhangt van de wrijving tussen de luchtlagen;
- r een constante die afhangt van de ruwheid van het terrein (hoge bomen beïnvloeden de windsnelheid anders dan grasland)

De formule is geldig tot hoogtes van ongeveer 100 meter.
In de praktijk wordt de windsnelheid op een hoogte van 10 meter gemeten. De waarde van r op de meetplek is bekend zodat het getal m met behulp van de formule berekend kan worden. Vervolgens kan met de gegeven formule de windsnelheid op andere hoogtes berekend worden.

b Boven open bouwland met $r = 0{,}12$ wordt de windsnelheid gemeten. Op 10 meter hoogte is deze windsnelheid $6{,}0$ m/s. Bereken in deze situatie de windsnelheid op een hoogte van 60 meter.

Boven een bepaald terrein en met $m = 0{,}45$ geldt het volgende: de windsnelheid is op 60 meter hoogte $1{,}3$ keer zo groot als op 20 meter hoogte.

c Bereken de waarde van r van dit terrein.

(bron: examen wiskunde B havo 2006, eerste tijdvak)

Register

a
afgeleide 41
afnemende daling 8
afnemende stijging 8

c
constante stijging 8

d
dalen 7
definitieformule 64
differentiaalquotiënt 33
differentiequotiënt 24

e
eigenschap van logaritmen 64
extremen 7

g
gemiddelde verandering 24, 33

h
hellingsfunctie 41
hellingsgetal 24
hellingsgrafiek 41

i
interval 7
inverse functie 80

k
karakteristieken 80

l
logaritme 57, 64, 73
logaritmische functie 80
logaritmische ongelijkheid 88
logaritmische schaalverdeling 73

m
maximum 7
minimum 7

o
oplossing van de logaritmische vergelijking 88

r
raaklijn 33
richtingscoëfficiënt 24, 33

s
stapgrootte 15
stijgen 7

t
tekenschema 41
toenamediagram 15
toenemende daling 8
toenemende stijging 8

u
uiterste waarde 7

v
verandering in een punt 33
verandering van grondtal 65

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

5. Veranderingen
6. Logaritmische functies

www.math4all.nl