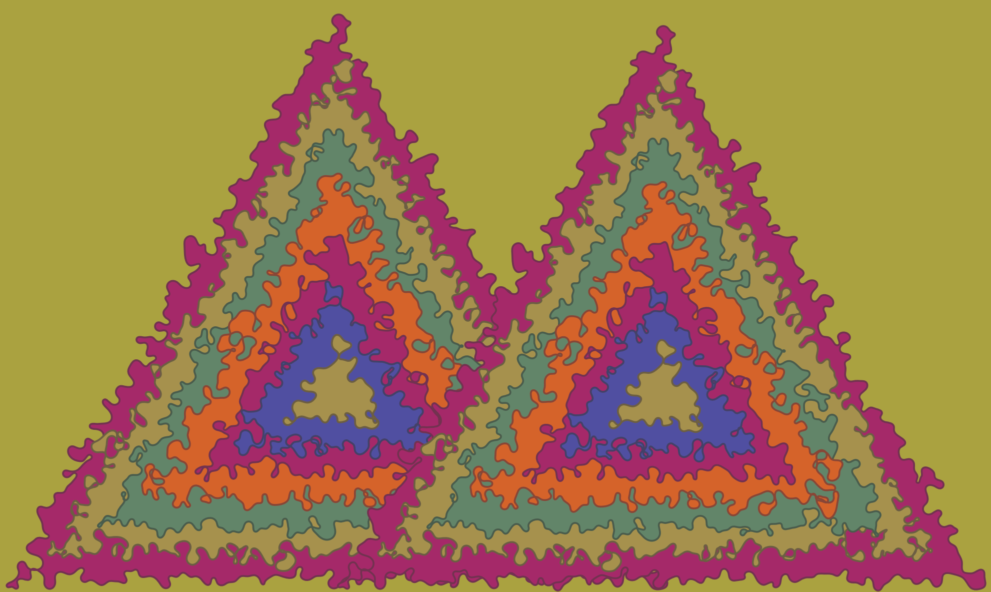
Wiskunde B

4 VWO

Katern 2

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

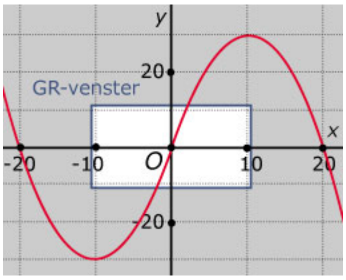
1

Asymptoten en limieten

1.1 Karakteristieken

Inleiding

Om functies te kunnen bestuderen is het vaak handig als je bijbehorende grafieken kunt bekijken. In veel gevallen, ook vaak in praktische situaties, zijn die grafieken niet eenvoudig goed in beeld te krijgen. Je wilt immers alle bijzonderheden kunnen zien! Pas dan kun je toppen bepalen en het bereik vaststellen. De kenmerkende eigenschappen van een grafiek (nulpunten, toppen, enz.) noem je 'karakteristieken'.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- wat karakteristieken van een functie zijn;
- op welke manier je de karakteristieken van een functie kunt bepalen;
- extremen berekenen met behulp van de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken en tabellen van functies maken (ook met de grafische rekenmachine);
- het domein en het bereik van een functie opschrijven;
- werken met transformaties van een functie.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is functie f met $f(x) = -0{,}01x^3 + 4x$.

a Breng de grafiek op de grafische rekenmachine in beeld met de standaardinstellingen van je venster.

b De grafiek lijkt een rechte lijn. Waardoor komt dat?

c Bekijk de grafiek van f opnieuw, maar neem nu als venster: $[-40{,}40] \times [-40{,}40]$. Hoeveel nulpunten heeft de functie?

d Hoe kun je zeker weten dat je alle nulpunten in beeld hebt?

e Hoe kun je er achter komen wat je voor de y-as moet instellen?

Uitleg

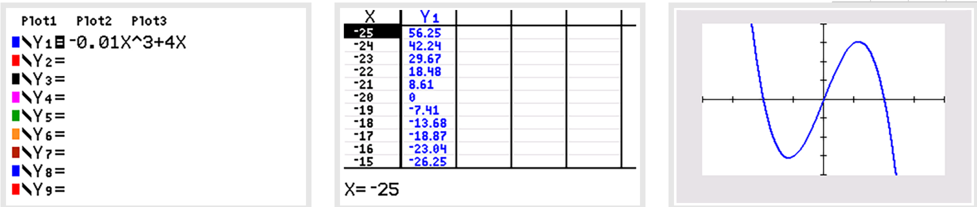
Het is niet altijd gemakkelijk om de grafiek van een functie goed in beeld te krijgen op de grafische rekenmachine. Je wilt in ieder geval alle snijpunten met de assen en alle toppen te zien krijgen (als ze er zijn). De snijpunten met de assen en de toppen noem je de karakteristieken van de grafiek van de functie.

Neem bijvoorbeeld de functie f met $f(x) = -0{,}01x^3 + 4x$. Met de standaardinstellingen van het venster krijg je de grafiek niet goed in beeld. Maar hoe weet je dat vooraf? Om dat te weten begin je met het berekenen van de nulpunten:

$$\begin{aligned} -0{,}01x^3 + 4x &= 0 \\ -0{,}01x\left(x^2 - 400\right) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = -20 \vee x = 20 \end{aligned}$$

Dit zijn drie nulpunten in totaal.

Bekijk je de tabel, dan zie je dat voor x-waarden vanaf -25 t/m 25 de bijbehorende y-waarden ongeveer tussen -50 en 50 liggen. Nu kun je het venster goed instellen.



Figuur 1.2

Opgave 1

In de **Uitleg** staat de functie $f(x) = -0{,}01x^3 + 4x$.

a Bereken zelf algebraïsch de nulpunten van de gegeven functie.

b Maak de grafiek van f op de grafische rekenmachine. Welke instellingen kies je om ervoor te zorgen dat alle toppen en nulpunten zichtbaar zijn?

c Bereken met behulp van de grafische rekenmachine de coördinaten van de toppen van f. Geef benaderingen op twee decimalen nauwkeurig.

d Schrijf het domein en het bereik van f op.

e Los nu op: $f(x) \leq x$. Geef benaderingen op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{1}{2}(x - 40)^4 + 100$.

a Maak de grafiek van f met de grafische rekenmachine. Gebruik de standaardinstellingen van het venster. Wat gaat er mis? Verklaar dit.

b Helpt het berekenen van nulpunten om de grafiek van f in beeld te krijgen?

De grafiek van f ontstaat door translatie uit de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^4$.

c Hoeveel nulpunten en hoeveel toppen heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^4$?

d Welk venster moet je instellen om de grafiek van f goed in beeld te krijgen?

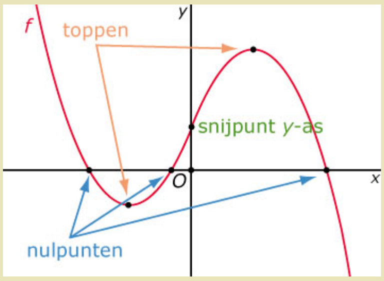
e Schrijf het domein en het bereik van f op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je de grafiek van een functie f goed in beeld hebt, zijn alle **karakteristieken** zichtbaar (op het gewenste domein). Karakteristieken zijn bijvoorbeeld:

- de **snijpunten met de assen**;
- de **toppen**; dat zijn de punten met (lokale) maxima en minima, de **extremen**.



Figuur 1.3

Om de grafiek van een functie f goed in beeld te brengen, begin je vaak met het berekenen van de nulpunten door $f(x) = 0$ op te lossen.

Vervolgens bekijk je op de grafische rekenmachine de tabel van de functie voor x-waarden die minstens lopen vanaf het kleinste nulpunt tot het grootste nulpunt. Probeer een idee te krijgen waar de grafiek stijgt en daalt. Waar functiewaarden van stijgen naar dalen gaan of omgekeerd overgaan, liggen toppen van de grafiek.

Soms kun je ook gebruikmaken van transformaties van een bijbehorende standaardfunctie, met name translaties ten opzichte van de assen.

Nu kun je een bruikbare **schets van de grafiek** maken, waarin je in ieder geval de karakteristieken aangeeft en je kunt het venster van je rekenmachine goed instellen.

Voorbeeld 1

Maak de grafiek van de functie f met $f(x) = 0{,}1x^4 - 20x^2$. Schrijf het domein en het bereik van f op.

Antwoord

Een goede schets van een grafiek laat alle karakteristieken ervan zien. Die probeer je daarom eerst te achterhalen.

De nulpunten van f vind je door $f(x) = 0{,}1x^4 - 20x^2 = 0$ op te lossen.

$$\begin{aligned} 0{,}1x^4 - 20x^2 &= 0 \\ x^4 - 200x &= 0 \\ x^2(x^2 - 200) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = \pm\sqrt{200} \\ x &= 0 \vee x = \text{-}10\sqrt{2} \vee x = 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

Nu is $10\sqrt{2} \approx 14{,}1$, dus je bekijkt de tabel van f bijvoorbeeld op het interval $[\text{-}20, 20]$. Je ziet dat de bijbehorende functiewaarden variëren tussen $\text{-}1000$ en ongeveer 8000. Het lijkt erop dat je de toppen van de grafiek uit de tabel kunt aflezen, maar daar kun je nog niet zeker van zijn.
Maak de grafiek op de grafische rekenmachine met geschikte vensterinstellingen en laat de grafische rekenmachine de coördinaten van de toppen berekenen. Je zult zien dat de coördinaten gehele getallen zijn.
Je vindt nu $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [\text{-}1000, \rightarrow\rangle$.

Opgave 3

Gebruik de functie f met $f(x) = 0{,}1x^4 - 20x^2$ uit **Voorbeeld 1**.

a Bereken zelf de nulpunten van de gegeven functie.

b Maak de grafiek van f op de grafische rekenmachine. Welke instellingen kies je om ervoor te zorgen dat alle toppen en nulpunten zichtbaar zijn?

c Laat de grafische rekenmachine de toppen berekenen.

d Schrijf het domein en het bereik van f op.

e Los op: $f(x) \leq 100x$. Rond af op gehele getallen.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 100x(x-10)(x-20)^2$.

a Welke nulpunten heeft de grafiek van f?

b Welke vensterinstellingen laten alle karakteristieken zien?

c Bepaal de extremen van deze functie in gehele getallen nauwkeurig.

d Welk bereik heeft deze functie?

Voorbeeld 2

Maak een schets van de grafiek van de functie g met $g(x) = 0{,}1x^4 - 20x^2 + 12000$. Geef het domein en bereik van g.

Antwoord

Ook nu probeer je eerst alle karakteristieken te achterhalen.

De nulpunten van f vind je door $f(x) = 0{,}1x^4 - 20x^2 + 12000 = 0$ op te lossen. Deze vergelijking heeft echter geen reële oplossingen.

Als je goed kijkt, zie je dat de grafiek van f bijna hetzelfde is als die van $g(x) = 0{,}1x^4 - 20x^2$, alleen moet je op de grafiek van g een translatie van 12000 ten opzichte van de x-as toepassen om die van f te krijgen. Je berekent daarom eerst de nulpunten en toppen van g. Vervolgens schets je met behulp daarvan de grafiek van f.

Je vindt nu $\text{D}_f = \mathbb{R}$ en $\text{B}_f = [11000, \rightarrow\rangle$.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0{,}1x^4 - 20x^2 + 12000$.

a Wat gaat er mis bij het berekenen van de nulpunten van de gegeven functie?

b Maak de grafiek van f op de grafische rekenmachine. Welke instellingen kies je om ervoor te zorgen dat alle toppen en nulpunten zichtbaar zijn?

c Laat de grafische rekenmachine de coördinaten van de toppen berekenen.

d Los op: $f(x) \leq 1000x$. Rond af op gehele getallen.

Opgave 6

Gegeven is de functie g met $g(x) = 600 - 0{,}01(x - 20)^3$.

a Bereken het nulpunt van g exact.

b Bereken het snijpunt van de grafiek van g met de y-as.

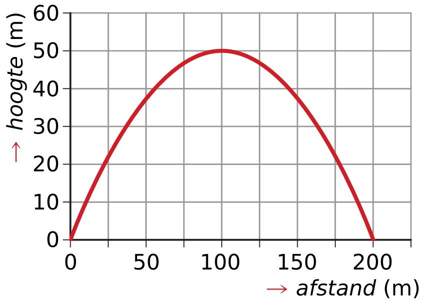
c Met welke vensterinstellingen krijg je de grafiek van g zo in beeld dat alle karakteristieken zichtbaar zijn?

d Heeft deze functie uiterste waarden? Waarom kun je dit met zekerheid zeggen?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Speelt de luchtweerstand geen rol, dan is de baan van een afgeschoten voorwerp P een zuivere parabool. Bijvoorbeeld $h(x) = -0{,}005x^2 + x$. Hierin is x de horizontale afstand die het voorwerp heeft afgelegd (in meter) en h de bijbehorende hoogte boven de grond (in meter). Bereken bij welke afstand de hoogte maximaal is en bereken hoe hoog het voorwerp maximaal komt.



Figuur 1.4

Antwoord

Bepaal eerst de nulpunten door $h(x) = 0$ op te lossen. Door ontbinding in factoren vind je $x(-0{,}005x + 1) = 0$ en dit geeft: $x = 0 \vee x = 200$. Omdat een parabool symmetrisch is, zit het maximum bij $x = 100$. De hoogte is dus maximaal bij 100 m. Omdat $h(100) = 50$ komt het voorwerp maximaal 50 meter hoog.

Opgave 7

Bekijk de parabolische baan met $h(x) = -0{,}005x^2 + x$ uit **Voorbeeld 3**.

a Als je de grafiek met de grafische rekenmachine wilt maken, zijn de standaardinstellingen van het venster niet geschikt. Waarom niet?

b Om het hoogste punt te kunnen bepalen met de grafische rekenmachine, moet je de grafiek goed in beeld hebben. Waarom bereken je nu eerst de nulpunten?

c Bij welke vensterinstellingen komt de hele baan in beeld? Plot de grafiek.

Verwerken

Opgave 8

Maak bij elk van de functies een grafiek (met alle karakteristieken zichtbaar) en schrijf het domein en het bereik op. Benader waar nodig in gehele getallen nauwkeurig.

a $f(x) = 80x - 0{,}01x^4$

b $g(x) = 40 - \sqrt{x + 20}$

c $h(x) = 0{,}2(x - 5)^4 + 120$

Opgave 9

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = (x^2 - 100)(x^2 - 500)$ en $g(x) = x^4$.

a Breng de grafieken van f en g op de grafische rekenmachine in beeld, zodat alle karakteristieken zichtbaar zijn. Welke vensterinstellingen kies je?

b Geef van beide functies het bereik.

c Los algebraïsch op: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 10

Er wordt vaak van uitgegaan dat de geluidssnelheid in lucht 340 meter per seconde is. Dat is niet helemaal waar. In werkelijkheid hangt de snelheid van het geluid af van de temperatuur. Bij windstil weer wordt het verband bij benadering weergegeven door de volgende formule:

$$v = 331\sqrt{1 + \frac{T}{273}}$$

Hierbij is v de snelheid van het geluid in meter per seconde bij een temperatuur van T in graden Celsius.

a Maak de grafiek van v.

b Welk deel van de grafiek zal in de praktijk bruikbaar zijn?

c Bij welke temperaturen ligt de geluidssnelheid bij windstil weer tussen de 320 en de 340 m/s? Geef je antwoord op één decimaal nauwkeurig.

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = -x^3 + 27x + 44$.

a Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y-as.

b Bereken de nulpunten van de grafiek van $g(x) = -x^3 + 27x$.

c Met behulp van de voorgaande berekeningen kun je bepalen hoe je het venster van de rekenmachine moet instellen om de grafiek van f met al zijn karakteristieken in beeld te krijgen. Licht dit toe.

d Bereken de extremen van f.

Opgave 12

De functie f is gegeven door $f(x) = (x + 1)(x^2 - 16)$. Van een van de twee toppen van de grafiek van f is de x-coördinaat positief.

a Teken de grafiek van f met de grafische rekenmachine zodat alle karakteristieken zichtbaar zijn en geef de coördinaten van deze top.

b Punt P is het snijpunt van de grafiek van f met de y-as. Punt Q is het snijpunt van de grafiek van f met de positieve x-as. Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op van de rechte k door P en Q.

(naar: examen havo wiskunde B in 2011, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 13: Rechthoek onder halve cirkel

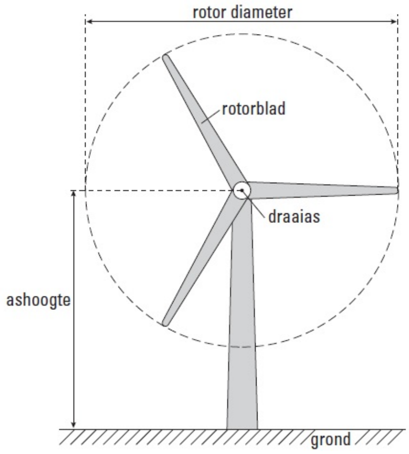
Gegeven is de functie f door $f(x) = \sqrt{400 - x^2}$. Van rechthoek $ABCD$ liggen de punten A en B op de x-as en de punten C en D op de grafiek van f. Neem aan dat $x_B = p > 0$.

a Bereken de coördinaten van C als rechthoek $ABCD$ een vierkant is.

b Bereken de coördinaten van C op twee decimalen nauwkeurig als rechthoek $ABCD$ een zo groot mogelijke oppervlakte heeft.

Opgave 14: Windturbines

De laatste jaren wordt een steeds grotere hoeveelheid stroom opgewekt door wind. Voor het omzetten van windenergie in elektriciteit gebruikt men windturbines. De energieproductie per tijdseenheid wordt het ‘vermogen’ genoemd. De eenheid van vermogen is watt. Je ziet een windturbine. Het vermogen van een windturbine hangt hoofdzakelijk af van de ashoogte, de windsnelheid en de rotordiameter. Voor een bepaald type windturbine met vaste ashoogte en vaste rotordiameter geldt:



Figuur 1.5

- de turbine treedt in werking bij windsnelheden vanaf 4 m/s;
- bij windsnelheden van 4 tot en met 15 m/s geldt voor het vermogen P (in kilowatt) $P = 0{,}195v^3$, waarbij v de windsnelheid is in m/s;
- bij windsnelheden van 15 tot 25 m/s laat men de draaisnelheid van de turbine om veiligheidsredenen niet verder toenemen: het geleverde vermogen blijft daardoor op een constant peil;
- bij windsnelheden vanaf 25 m/s wordt de turbine uitgeschakeld.

a Teken voor windsnelheden van 0 m/s tot 30 m/s de grafiek van het vermogen als functie van de windsnelheid v.

b Voor welke windsnelheden wordt er een vermogen van meer dan 500 kilowatt bereikt?

(naar: examen havo wiskunde B in 2001, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $f(x) = (40 + 2x)^2 \cdot (x - 10)$.

a Bereken de nulpunten van de grafiek van f.

b Bij welke vensterinstellingen krijg je de grafiek van f zo in beeld dat alle karakteristieken zichtbaar zijn?

c Los op op één decimaal nauwkeurig: $f(x) < -100x^2$.

Opgave 16

Bepaal de nulpunten en de top van $f(x) = -0{,}5(x + 20)^4 + 128$.

1.2 Asymptoten

Inleiding

Vooral als je in een functievoorschrift breuken aantreft waarbij de variabele (ook) in de noemer voorkomt, krijg je te maken met problemen rond het delen door 0 of met situaties waarin voor grote waarden de teller en de noemer wel heel groot worden, maar de breuk zelf niet. Dan krijg je te maken met zogenaamde ‘asymptoten’. Dat zijn lijnen die de grafiek van de functie steeds meer benaderen, maar waar die grafiek nooit mee samenvalt.

$$\frac{a}{0} = ?$$

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- wat asymptoten zijn;
- op welke manier je de asymptoten van een functie kunt bepalen.

Voorkennis

- werken met functies (ook met de grafische rekenmachine) en de bijbehorende notaties gebruiken;
- nulpunten en toppen als karakteristieken van een functie berekenen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

De huurprijs van een kopieerapparaat bedraagt € 250,00 per maand. Op school staat zo’n apparaat voor de leerlingen. Het maken van een kopie kost de school € 0,06. De school wil geen winst maken of verlies draaien op het kopieerapparaat en wil zo een prijs per kopie voor de leerlingen instellen.

a Geef een formule voor de prijs per kopie P voor de leerlingen als functie van het aantal kopieën a.

b Welke waarde benaderen de functiewaarden als a heel groot wordt?

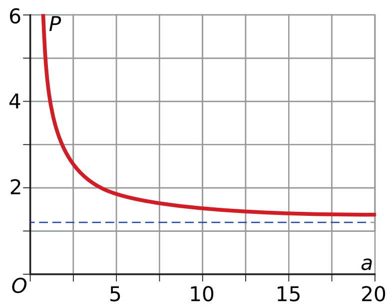
c En als a dicht bij 0 komt?

Uitleg

Voor een rit in een taxi betaal je:

- voorrijkosten van € 3,20
- € 1,20 per gereden kilometer.

De prijs P per gereden km hangt af van het aantal gereden kilometers a. Er geldt: $P = 1{,}20 + \frac{3{,}20}{a}$.



Figuur 2.2

De grafiek van deze functie heeft geen nulpunten of extremen, maar wel geldt:

- Als a heel groot wordt, benaderen de functiewaarden het getal $1{,}20$. Je ziet dat als je een tabel bij de functie maakt. Dit betekent dat de grafiek steeds dichter bij de lijn $P = 1{,}20$ komt te liggen. Deze lijn heet de horizontale asymptoot van de grafiek van P.
- Als a dicht bij 0 komt, worden de functiewaarden steeds groter: Het getal 0 mag je niet voor a invullen, want dan moet je delen door 0 en dat kan niet. Dit betekent dat de grafiek steeds dichter bij de lijn $a = 0$ (de verticale as) komt te liggen. Dit is de verticale asymptoot van de grafiek van P.

Als je de grafiek van de functie tekent, zorg je ervoor dat ook dit soort karakteristiek gedrag zichtbaar wordt, net als nulpunten en toppen.

Opgave 1

Van een bepaald type kopieerapparaat worden de kosten per kopie in een maand gegeven door $K(a) = \frac{200}{a} + 0{,}075$. Hierin is a het aantal kopieën per maand en K zijn de kosten in euro.

a Bereken de kosten per kopie als er 10000 kopieën per maand met deze machine worden gemaakt.

b Welke waarde benaderen de kosten per kopie als het aantal kopieën heel erg groot is?

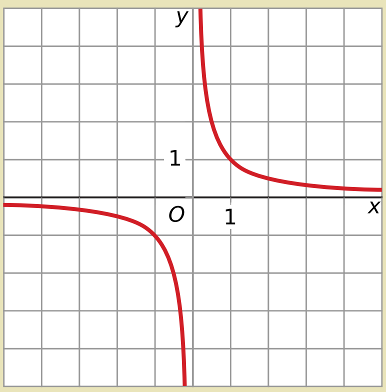
c Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van K?

d Als er in een bepaalde maand geen kopieën worden gemaakt, kun je niet spreken van de kosten per kopie. Het minimale aantal kopieën waarbij dit nog wel kan, is 1.
Hoeveel bedragen de kosten per kopie maximaal?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij functies komen regelmatig asymptoten voor. Dat zijn lijnen waar de grafiek steeds dichter in de buurt komt naarmate je verder van de oorsprong van het assenstelsel komt. Vooral een **verticale asymptoot** kun je vaak goed in het functievoorschrift herkennen: een invoerwaarde waarbij je door 0 moet delen, veroorzaakt vaak een asymptoot. Een **horizontale asymptoot** ontstaat als de functiewaarden een vast getal naderen naarmate de invoerwaarden heel groot of heel klein (erg negatief) worden.



Figuur 2.3

De functie f met voorschrift $f(x) = \frac{1}{x}$ (zie de grafiek) is de basisfunctie van een functie met asymptoten. Je ziet er hier de grafiek van. Deze grafiek heeft:

- als horizontale asymptoot de lijn $y = 0$, want voor grote en kleine (erg negatieve) waarden van x naderen de functiewaarden steeds dichter 0;

- als verticale asymptoot de lijn $x = 0$, want dit getal heeft geen functiewaarde (je kunt niet door 0 delen) en vlak in de buurt van 0 worden de functiewaarden heel groot of heel klein (erg negatief).

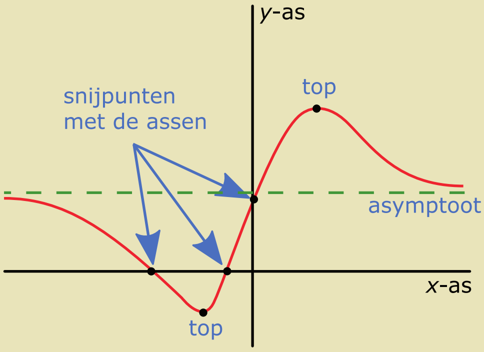
Het domein van f schrijf je als $D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Het bereik is $B_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.
Het teken $\cup$ betekent dat het gaat om alle getallen van de twee intervallen samen.

Als je de grafiek van een functie f goed in beeld hebt, zijn alle **karakteristieken** zichtbaar (op het gewenste domein). Dat kunnen zijn:

- de **snijpunten met de assen**;
- de **asymptoten**;
- de **toppen**, de punten met (lokale) maxima en minima.

Bij een gebroken functie van de vorm $y = \frac{a}{x}$ is er een **omgekeerd evenredig** verband tussen y en x. Deze formule kun je ook schrijven als $xy = a$; dit betekent dat het product van x en y altijd gelijk is aan a.

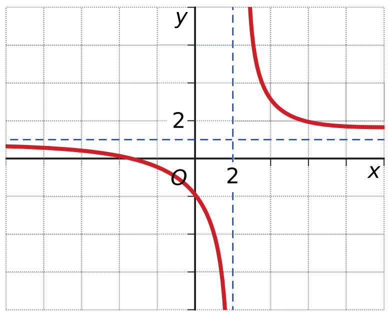


Figuur 2.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

De grafiek van $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ heeft twee asymptoten. Welke twee? Schrijf het domein en het bereik van f op.



Figuur 2.5

Antwoord

Aangezien je niet door 0 kunt delen, is er iets bijzonders als $x-2 = 0$ en dus als $x = 2$.
$f(2)$ bestaat niet, maar x-waarden vlak bij 2 kun je wel invullen:

$$f(2{,}001) = 6001$$
$$f(2{,}0001) = 60001$$

$$f(1{,}999) = -5999$$
$$f(1{,}9999) = -59999$$

De grafiek van f komt dicht langs de lijn $x = 2$ te lopen: $x = 2$ is de vergelijking van de verticale asymptoot.

Voor de horizontale asymptoot ga je anders te werk: kies x-waarden als 1000, 10000, 100000 enzovoort. Bereken de bijbehorende functiewaarden. Doe hetzelfde met -1000, -10000, -100000, enzovoort. Je ziet dan dat de functiewaarden in de buurt van $y = 1$ komen te liggen. Hoe verder je van 0 af zit, hoe beter die benadering. De lijn $y = 1$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van f.

Het domein van f is: $\langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$. Het bereik van f is: $\langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$.

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{4}{x} + 2$.

a Maak de grafiek van f met de grafische rekenmachine. Gebruik de standaardinstellingen van het venster.

b Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek? Hoe zie je dat aan de tabel van f?

c Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt?

d Welk getal naderen de functiewaarden als x oneindig negatief wordt?

e Welke vergelijking heeft de horizontale asymptoot?

f Schrijf het domein en het bereik van f op.

Opgave 3

Je ziet de grafiek van $f(x) = \frac{4}{x+2}$.

a Maak de grafiek van f met de grafische rekenmachine. Gebruik de standaardinstellingen van het venster. Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek?

b Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt?

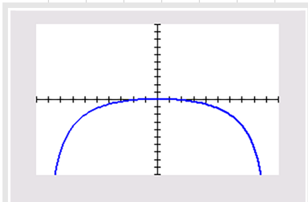
c Welk getal naderen de functiewaarden als x oneindig negatief wordt?

d Welke vergelijking heeft de horizontale asymptoot?

e Schrijf het domein en het bereik van f op.

Voorbeeld 2

Je ziet de grafiek van $f(x) = \frac{4x^2-16}{x^2-100}$ met de standaard vensterinstellingen van de grafische rekenmachine. Bepaal alle karakteristieken en het bereik van f.



Figuur 2.6

Antwoord

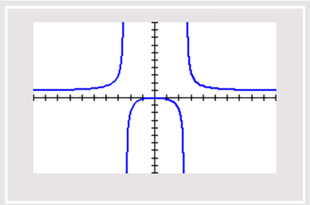
Op grond van dit plaatje zou je verkeerde conclusies kunnen trekken. Bijvoorbeeld dat het maximum $f(0) = 0$ is en dat de grafiek een soort afgeplatte bergparabool is. En dat is niet goed.

Kijk eerst of er nulpunten en asymptoten zijn:

- $f(x) = 0$ levert op: $\frac{4x^2-16}{x^2-100} = 0$ en dus: $4x^2 - 16 = 0$. Er zijn daarom precies twee nulpunten, namelijk $x = -2$ en $x = 2$.
- Je deelt door $x^2 - 100$ en dus ontstaan er problemen als $x^2 - 100 = 0$. Dit betekent dat $x = 10$ en $x = -10$ wellicht verticale asymptoten zijn. Door getallen in de buurt van 10 dan wel -10 in te vullen, merk je dat dit echt twee verticale asymptoten zijn.
- Door grote of kleine (dus negatieve) getallen in te vullen naderen de functiewaarden de 4. Dus $y = 4$ is de horizontale asymptoot.

Pas nu de vensterinstellingen aan en breng alle karakteristieken van de grafiek in beeld. Bij $x = 0$ blijkt een maximum te zitten: $f(0) = 0{,}16$. (Laat je rekenmachine een maximum zoeken tussen bijvoorbeeld de nulpunten.)

Het bereik van f lees je uit de grafiek af, rekening houdend met het maximum en de horizontale asymptoot: $B_f = \langle \leftarrow; 0{,}16] \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$.



Figuur 2.7

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x-10}{x^2-25}$.

a Welk nulpunt heeft de grafiek van f?

b Welke verticale asymptoten heeft de grafiek van f?

c Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van f?

Je kunt de x-waarden van het venster instellen. De karakteristieken (de nulpunten, de asymptoten en de toppen) moeten zichtbaar worden.

d Welke vensterinstellingen laten alle karakteristieken zien, dus ook de twee extremen?

e Bepaal de extremen van deze functie op drie decimalen nauwkeurig.

f Schrijf domein en bereik van deze functie op.

Opgave 5

Gegeven is $g(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

a Waarom heeft deze functie geen verticale asymptoot?

b Welk nulpunt heeft de grafiek van g?

c Onderzoek of $g(x)$ een horizontale asymptoot heeft.

d Geef het domein en het bereik van g.

Verwerken

Opgave 6

Geef de asymptoten, het domein en bereik van de volgende functies.

a $f(x) = 4 - \frac{4}{x}$

b $g(x) = \frac{4-x}{x}$

c $h(x) = \frac{x}{x^2-4}$

d $k(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{x} + 5$.

a Geef de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f.

b Welke translatie moet je op de grafiek van f toepassen, zodat je een omgekeerd evenredig verband krijg?

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10x}{(x-20)^2}$.

a Bereken het nulpunt van deze functie.

b Welke asymptoten heeft deze functie?

c Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van f goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?

d Bepaal het bereik van f.

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2}{x^4+10}$.

a Bereken het nulpunt van de grafiek van deze functie.

b Welke asymptoten heeft deze functie?

c Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van f goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?

d Bepaal het bereik van f. Benader op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Voor de totale kosten TK bij de productie van een bepaald artikel geldt: $TK = 100 + 0{,}1q^2$ waarin TK in euro is en q het aantal exemplaren voorstelt.

a Bereken de gemiddelde kosten per exemplaar bij een productie van 120 stuks op twee decimalen nauwkeurig.

b Leg uit waarom de gemiddelde kosten het hellingsgetal is van de lijn door $(0{,}0)$ en $(q{,}TK)$.

c Stel een voorschrift op voor de gemiddelde kosten per exemplaar (GK) als functie van q.

d Welke asymptoot heeft de functie GK? Schrijf het domein en het bereik van GK op. Rond af op twee decimalen.

Toepassen

Opgave 11: Lichaamstemperatuur

Als iemand in koud water met temperatuur T (in °C) terechtkomt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Als de lichaamstemperatuur is gedaald tot 30 °C ontstaat een levensbedreigende situatie. De tijd die verstrijkt tussen het te water raken en het bereiken van een lichaamstemperatuur van 30 °C wordt de overlevingstijd R (in minuten) genoemd.

Een persoon is te water geraakt in gewone kleding en een reddingsvest. In deze situatie geldt de volgende formule:

$R = 15 + \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034T}$ met $R > 0$ en $T \geq 0$.

a Bij een watertemperatuur van 20 °C is de overlevingstijd groter dan bij een watertemperatuur van 10 °C. Bereken hoeveel keer zo groot.

b Bereken algebraïsch de watertemperatuur waarbij de overlevingstijd vijf uur is. Rond daarna je antwoord af op een geheel aantal graden.

c Plot de grafiek R als functie van T. De grafiek heeft alleen betekenis links van de verticale asymptoot. Bereken de waarde van T die bij de verticale asymptoot hoort en leg uit wat de betekenis van de verticale asymptoot is voor de situatie van de te water geraakte persoon.

(naar: examen havo wiskunde B in 2011, eerste tijdvak))

Opgave 12: Toonhoogte

De hoogte van geluid wordt bepaald door de frequentie. Hoe hoger de frequentie, hoe kleiner de golflengte. De frequentie wordt uitgedrukt in Hertz (Hz) en geeft het aantal trillingen per seconde aan. Weet je de frequentie f, dan kun je de golflengte W berekenen: $W = \frac{330}{f}$.

W is in meters. Een geluidsinstallatie kan geluiden van 15 Hz tot 30000 Hz produceren.

a Is er een omgekeerd evenredig verband tussen W en f?

b Als je $[15,30000]$ als domein kiest, welk bereik heeft W dan?

c Vleermuizen kunnen hoogfrequente geluiden horen, soms wel geluiden met een frequentie van 120000 Hz. Is dit een hoog of juist laag geluid?

d Welke golflengte heeft het?

e Mensen kunnen geluiden onder de 20 Hz nauwelijks horen. Gaat het dan om bassen of hoge tonen? Welke golflengte heeft zo'n geluid?

f Welke waarde benadert W als f heel groot wordt?

Testen

Opgave 13

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{4+2x}{x-1}$.

a Bereken $f(100)$ en $f(\text{-}100)$ op vier decimalen nauwkeurig.

b Bereken de nulpunten van de grafiek van f.

c Breng de grafiek van f in beeld.

d Schrijf de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f op.

e Schrijf het domein en het bereik van f op.

Opgave 14

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die zaden nodig hebben om voor 50% te ontkiemen. Proefondervindelijk is een verband tussen temperatuur en kiemtijd gebleken. De kiemtijd K is geteld in dagen en de temperatuur T is gemeten in °C. Dit verband wordt gegeven door: $K = \frac{89}{T-2}$.

a Boven welke temperatuur is de helft van de zaden al binnen 10 dagen ontkiemd?

b Wat is een zinvol domein voor K als functie van T?

c Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?

d Welk bereik hoort bij het gekozen domein?

1.3 Limieten

Inleiding

Een limiet is een grenswaarde, een waarde die alleen wordt benaderd, maar nooit echt gehaald. Hoewel...

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- wat een limiet precies is en hoe je deze kunt berekenen;
- welke notaties er bij het berekenen van limieten worden gebruikt;
- op welke manier je limieten kunt gebruiken om de asymptoten van een functie te bepalen.

Voorkennis

- werken met functies (ook met de grafische rekenmachine) en de bijbehorende notaties gebruiken;
- nulpunten, toppen en asymptoten als karakteristieken van een functie berekenen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

De functie $f(x) = \frac{1}{x}$ heeft twee asymptoten.

a Welk getal benadert $f(x)$ als x hele grote waarden gaat aannemen? Wordt dit getal ooit bereikt?

b Welke waarde benaderen de functiewaarden als x groot negatief wordt?

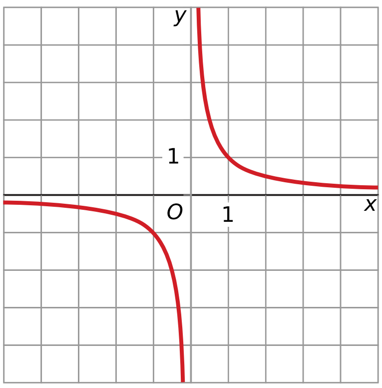
c Welke functiewaarden vind je als x dicht bij 0 komt, maar positief is?

d Welke functiewaarden vind je als x dicht bij 0 komt, maar negatief is?

Uitleg

Als je de functie f met $f(x) = \frac{1}{x}$ nader bekijkt, dan zie je dat:

- voor hele grote positieve waarden van x de functiewaarden 0 naderen;
- voor hele grote negatieve waarden van x de functiewaarden 0 naderen.



Figuur 3.2

Het getal 0 is een grenswaarde die weliswaar nooit wordt bereikt, maar waar de functiewaarden wel steeds dichterbij komen te liggen als x alsmaar groter wordt. Je noemt het getal 0 wel de limiet van deze functiewaarden als x naar oneindig gaat. Dit noteer je als $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Het symbool ∞ betekent ‘oneindig’.

Zo geldt ook: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Het gevolg van deze limieten is de horizontale asymptoot van de grafiek van f.

Verder is er ook iets bijzonders met deze functie als x het getal 0 nadert, namelijk:

- voor positieve waarden van x steeds dichter bij 0 worden de functiewaarden steeds grotere positieve getallen;
- voor negatieve waarden van x steeds dichter bij 0 worden de functiewaarden steeds grotere negatieve getallen.

In deze gevallen schrijf je $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ en $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Let op de pijltjes.

Het gevolg van deze limieten is de verticale asymptoot van de grafiek van f.

Opgave 1

Neem de functie $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

a Maak een schets van de grafiek van f. Welke karakteristieken heeft deze functie?

b Welke twee limieten horen er bij de horizontale asymptoot?

c Welke twee limieten horen er bij de verticale asymptoot?

Bekijk de functies $g(x) = \frac{1}{x^3}$ en $h(x) = \frac{1}{x^4}$.

d Beantwoord voor deze functies dezelfde vragen. Ontdek je een patroon?

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = 2 - \frac{1}{(x-1)^2}$.

a Maak de grafiek van f met de grafische rekenmachine. Gebruik de standaardinstellingen van het venster.

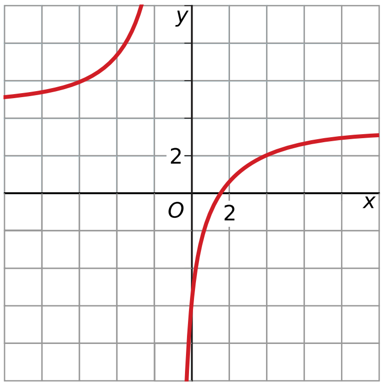
b Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek? Welke limieten horen daar bij?

c Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van f? Welke limieten horen daar bij?

d Schrijf het domein en het bereik van f op.

Opgave 3

Je ziet de grafiek van functie f met $f(x) = \frac{4x-6}{x+1}$.



Figuur 3.3

a Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek? Welke twee limieten horen er bij?

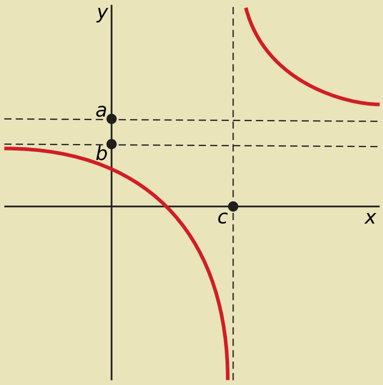
b Welke vergelijking heeft de horizontale asymptoot? Welke twee limieten horen er bij?

c Schrijf het domein en het bereik van f op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als de functiewaarden $f(x)$ van een functie f voor steeds grotere positieve waarden van x een getal a steeds dichter benaderen, dan heet a de **limiet** van f als x **oneindig** nadert. Je schrijft dit zo: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$.



Figuur 3.4

Als de functiewaarden $f(x)$ van een functie f voor steeds grotere negatieve waarden van x een getal b steeds dichter benaderen, dan schrijf je: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

In dit geval zijn de lijnen $y = a$ en $y = b$ horizontale asymptoten van de grafiek van f. Vaak zijn a en b gelijk, maar niet altijd. Ook kunnen deze limieten $\pm\infty$ naderen. Soms is er dan sprake van een **scheve asymptoot**. Dat is een rechte lijn $y = ax + b$ met $a \neq 0$ die de grafiek van f steeds dichter benadert naarmate x steeds groter of kleiner wordt. Bekijk de scheve asymptoot in **Voorbeeld 2**.

Als de functiewaarden $f(x)$ van een functie f steeds grotere positieve onbeperkte waarden aannemen (als x een getal c steeds dichter benadert) dan schrijf je:

$\lim\limits_{x \downarrow c} f(x) = \infty$ als $x > c$ en

$\lim\limits_{x \uparrow c} f(x) = -\infty$ als $x < c$.

De eerste van deze twee limieten noem je wel de **rechter limiet** voor x nadert c. Dit wordt ook wel uitgedrukt als: x nadert c 'van boven'. De tweede limiet is dan de **linker limiet** voor x nadert c 'van onderen'. Is er sprake van steeds grotere negatieve onbeperkte functiewaarden, dan schrijf je $-\infty$ in plaats van ∞. Nu is de lijn $x = c$ een verticale asymptoot van functie f.

Bekijk de applet.

Bij functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{x^n}$ met $n = 1,2,3,4,...$ zijn de limieten bekend.

Onthoud:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$

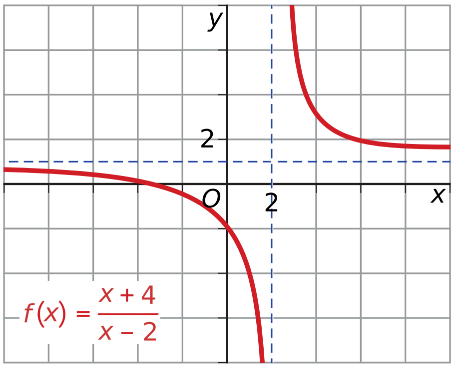
$\lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{1}{x^n} = \infty$ als n even is

$\lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$ als n oneven is

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

De grafiek van $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ heeft twee asymptoten, namelijk $y = 1$ en $x = 2$. Welke limieten horen bij deze functie en hoe kun je die vinden zonder naar de grafiek te kijken?



Figuur 3.5

Antwoord

Aangezien je niet door 0 kunt delen, is er iets bijzonders als $x-2=0$ en dus als $x=2$.
$f(2)$ bestaat niet, maar x-waarden vlak bij 2 kun je wel invullen:
$f(2{,}001) = 6001$ en $f(2{,}0001) = 60001$.

Dus de rechter limiet is $\lim\limits_{x\downarrow 2} \frac{x+4}{x-2} = \infty$.

Ook geldt:
$f(1{,}999) = -5999$ en $f(1{,}9999) = -59999$.

De linker limiet is $\lim\limits_{x\uparrow 2} \frac{x+4}{x-2} = -\infty$.

Voor de limieten bij de horizontale asymptoot ga je anders te werk:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Door zowel de teller als de noemer van de breuk te delen door x ontstaat een uitdrukking waarin naast getallen alleen vormen zoals $\frac{4}{x}$ en $\frac{2}{x}$ voorkomen. Dergelijke vormen zijn veelvouden van $\frac{1}{x}$ en daarom naderen ze 0 als x groter wordt.

De limiet voor $x \to -\infty$ bereken je op dezelfde manier.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{3x}{1-2x}$.

a Welke verticale asymptoot heeft deze functie?

b Welke limieten horen bij deze verticale asymptoot?

c Welk nulpunt heeft de grafiek van f?

d Onderzoek of de grafiek van f een horizontale asymptoot heeft.

e Laat zien hoe je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x}{1-2x}$ berekent.

f Hoeveel is $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x}{1-2x}$?

Opgave 5

Bereken de limieten.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4-x}{2x+1}$

b $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x+6}{5x-1}$

c $\lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{5x}{3x-6}$

d $\lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{x-2}{3x-6}$

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x}{x^2-100}$.

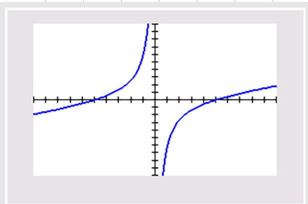
a Welke drie asymptoten heeft de grafiek van f?

Bij de horizontale asymptoot horen de limieten $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x}{x^2-100}$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x}{x^2-100}$.

b Laat zien hoe je deze limieten kunt berekenen door teller en noemer van het functievoorschrift te delen door x^2.

Voorbeeld 2

Dit is een grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2-100}{4x}$. Welke asymptoten heeft deze functie? Bepaal de bijbehorende limieten.


Figuur 3.6

Antwoord

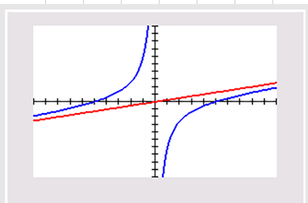
De verticale asymptoot vind je uit $4x = 0$. De bijbehorende limiet is daarom de lijn $x = 0$. Bepaal met behulp van tabellen de linker en de rechter limiet die hierbij horen.

Voor de horizontale asymptoot kun je de limieten $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-100}{4x}$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-100}{4x}$ bekijken.

Nu is $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-100}{4x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{4x} - \frac{100}{4x}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{4}x - \frac{25}{x}\right)$.

Deze limiet komt niet op een getal uit. Naarmate x blijft toenemen, wordt ook de uitkomst van de limiet groter. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{25}{x} = 0$, dus je kunt zeggen dat als $x \to \infty$, dan geldt $f(x) \to \frac{1}{4}x$.

Als je de lijn $y = \frac{1}{4}x$ bij de grafiek van f intekent, zie je dat de grafiek van f deze lijn steeds dichter benadert naarmate $x \to \infty$. Hetzelfde geldt voor $x \to -\infty$. De lijn $y = \frac{1}{4}x$ is de scheve asymptoot van de grafiek van f.


Figuur 3.7

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2-1}{x}$.

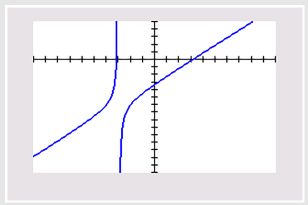
a Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van f?

Om een horizontale asymptoot te bepalen, moet je de limieten $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-1}{x}$ en $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2-1}{x}$ berekenen.

b Laat zien dat deze limieten niet op een getal uitkomen.

Opgave 8

Je ziet de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2-10}{x+3}$.



Figuur 3.8

a Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van f?

Om een horizontale asymptoot te bepalen, moet je de limieten $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-10}{x+3}$ en $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-10}{x+3}$ berekenen.

b Laat zien dat deze limieten niet op een getal uitkomen.

c Laat zien dat je het functievoorschrift kunt herleiden tot $f(x) = \frac{x^2-10}{x+3} = x - 3 - \frac{1}{x+3}$.

d Welke vergelijking heeft de scheve asymptoot van de grafiek van f?

Verwerken

Opgave 9

Bereken de limieten.

a $\lim_{x \to -\infty} \frac{x-2}{3x+4}$

b $\lim_{x \uparrow 2} \frac{x-3}{2x+4}$

c $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-3x}{x^3+9x}$

Opgave 10

Bepaal de horizontale en de verticale asymptoten van de functies en schrijf de bijbehorende limieten op.

a $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

b $g(x) = \frac{x}{x^2-x-2}$

Opgave 11

Bereken $\lim_{x \downarrow 3} \frac{x^3-3x^2}{x^3-9x}$.

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1+x^2}{2x}$.

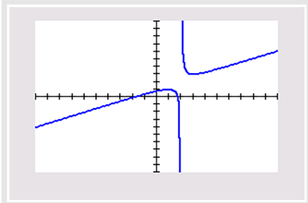
a Bepaal de verticale asymptoot van de grafiek van f met de bijbehorende limieten.

b Bepaal de andere karakteristieken van f en maak de grafiek.

Opgave 13

Je ziet de grafiek van $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$.

Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot van deze grafiek.



Figuur 3.9

Toepassen

Opgave 14: Parallelschakeling

In huis kun je meerdere elektrische apparaten tegelijk aansluiten. Dit is mogelijk doordat deze apparaten parallel zijn geschakeld. Bij een parallelschakeling lopen er vanuit de stroombron aftakkingen naar alle losse apparaten en weer terug.

Bij een parallelschakeling van twee weerstanden met grootte R_1 (in Ω) en R_2 (in Ω) is de substitutieweerstand (de totale weerstand) R_s te berekenen met de formule $\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

a Toon aan dat $R_s = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

b Bepaal $\lim\limits_{R_2 \to \infty} R_s$ en leg uit welke natuurkundige betekenis de uitkomst heeft.

c Bepaal $\lim\limits_{R_2 \downarrow 0} R_s$ en leg uit welke natuurkundige betekenis de uitkomst heeft.

Opgave 15: Limiet en Entierfunctie

Gegeven is de functie f met $f(x) = (-1)^{\text{int}(x)}$. Hierin komt de uitdrukking $\text{int}(x)$ voor. De integerfunctie $g(x) = \text{int}(x)$ rondt getallen naar beneden af naar het dichtsbijzijnde gehele getal. Zo is $\text{int}(3{,}14) = 3$ en $\text{int}(-3{,}14) = -4$.

a Teken de grafiek van f, zonder de grafische rekenmachine te gebruiken.

b Bestaat $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$? Verklaar waarom wel/niet.

Testen

Opgave 16

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{6+x}{2x-1}$.

a Bepaal de verticale asymptoot van deze functie en schrijf de bijbehorende limieten op.

b Bereken het nulpunt van de grafiek van f.

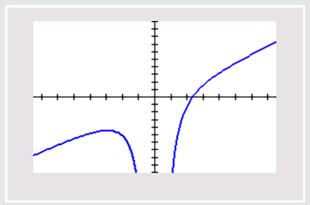
c Bereken met behulp van limieten de vergelijking van de horizontale asymptoot van de grafiek van f.

d Schrijf het domein en het bereik van f op.

Opgave 17

Hier zie je de grafiek van de functie g met $g(x) = \frac{3x^3-300}{2x^2}$. De grafiek lijkt een scheve asymptoot te hebben.

Stel een vergelijking van die scheve asymptoot op en schrijf de bijbehorende limieten op.



Figuur 3.10

1.4 Continuïteit

Inleiding

Als je in een functievoorschrift breuken aantreft waarbij de variabele (ook) in de noemer voorkomt, krijg je vaak te maken met problemen rond het delen door 0. Ook zijn er soms situaties waarin voor grote waarden de teller en de noemer wel heel groot worden, maar de breuk zelf niet. Vaak heb je dan met asymptoten te maken, maar niet altijd. Er is altijd wel wat bijzonders aan de hand...

$$\frac{a}{0} = ?$$

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- wat je onder een continue functie verstaat;
- in welke situaties (perforatie, verticale asymptoot, sprong in de grafiek) een functie niet continu is.

Voorkennis

- werken met functies (ook met de grafische rekenmachine) en de bijbehorende notaties gebruiken;
- nulpunten, toppen en asymptoten als karakteristieken van een functie berekenen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven;
- het begrip limiet en limieten bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Als je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ op de grafische rekenmachine bekijkt, krijg je een rechte lijn te zien. Gezien het functievoorschrift (dat er helemaal niet lineair uitziet) is dat nogal verrassend.

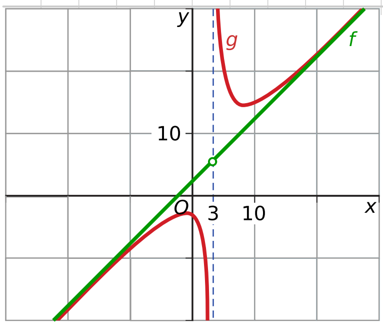
a Maak de grafiek van f op de grafische rekenmachine. Krijg je inderdaad een rechte lijn?

b Bij welke waarde van x hoort geen functiewaarde?

c Hoeveel bedraagt $\lim_{x \downarrow 3} f(x)$ en hoeveel bedraagt $\lim_{x \uparrow 3} f(x)$?

d Hoe kun je dit verklaren?

Uitleg



Figuur 4.2

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ ziet er op het eerste gezicht uit als een rechte lijn. Toch zie je aan het functievoorschrift dat $x = 3$ geen functiewaarde kan hebben omdat delen door 0 geen uitkomst heeft.

Dat de grafiek lijkt op een rechte lijn wordt duidelijk als je het functievoorschrift herleidt: $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$ als $x \neq 3$.

De grafiek van deze functie is voor elke $x \neq 3$ gelijk aan de lijn $y = x+3$. Alleen heeft de grafiek voor $x = 3$ een gaatje, een perforatie. Hierdoor is de functie niet continu op $\mathbb{R}$. De grafiek van een continue functie kun je namelijk als één vloeiende lijn tekenen en dat is nu niet het geval.

Bekijk je de grafiek van $g(x) = \frac{x^2+9}{x-3}$, dan zie je iets heel anders. Ook deze functie bestaat voor elke $x \neq 3$, maar de grafiek heeft voor $x = 3$ een verticale asymptoot. Ook deze functie is niet continu omdat je de grafiek niet als één vloeiende kromme lijn kunt tekenen.

Voor de functie f geldt $\lim_{x \uparrow 3} f(x) = \lim_{x \downarrow 3} f(x) = 6$. Als je nu afspreekt dat $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{voor} \quad x \neq 3 \\ 6 & \text{voor} \quad x = 3 \end{cases}$, dan heb je functie f continu gemaakt. Bij functie g is zoiets niet mogelijk.

Opgave 1

Lees in de **Uitleg** na wanneer een functie continu is en wat er verstaan wordt onder perforatie. In de figuur zie je de (groene) grafiek van functie $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$.

a Ga na dat er inderdaad geen functiewaarde $f(3)$ bestaat.

b Ga met behulp van een tabel na dat $\lim_{x \downarrow 3} f(x) = 6$ en $\lim_{x \uparrow 3} f(x) = 6$.

Hoe maak je deze functie continu?

Bekijk de grafiek van functie g.

c Waarom is er nu geen sprake van een perforatie, maar heeft de grafiek een verticale asymptoot? Gebruik limieten in je antwoord.

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$.

a Maak de grafiek van f met de grafische rekenmachine in de standaardinstellingen van het venster.

b Welke waarden van x hebben geen bijbehorende functiewaarde?

c Toch heeft de grafiek maar één verticale asymptoot. Welke limieten horen daar bij?

d Laat zien, door het functievoorschrift te herleiden, waarom de grafiek maar één verticale asymptoot heeft.

e Schrijf het domein en het bereik van f op.

f De grafiek van f heeft een perforatie. Door welke afspraak kun je deze functie voor $x = 3$ continu maken?

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = |x|$.

a Is deze functie continu voor $x = 0$?

Bekijk nu de functie $g(x) = \frac{|x|}{x}$.

b Is deze functie continu voor $x = 0$?

c Maak de grafiek van g op de grafische rekenmachine en licht toe waarom hij er zo uitziet.

d Heeft de grafiek van g een perforatie?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een functie is **continu** voor $x = a$ als $f(a)$ een waarde heeft en $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a)$.

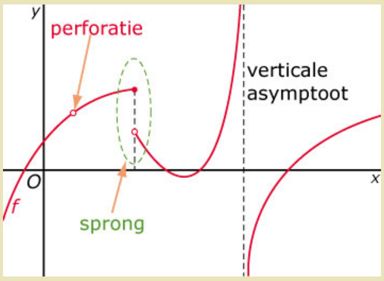
Dit betekent dat als je $x = a$ vanaf links benadert, je dezelfde functiewaarde benadert als wanneer je $x = a$ van rechts benadert en dat die functiewaarde gelijk is aan $f(a)$.

Als die functiewaarde (limietwaarde) *niet* gelijk is aan $f(a)$, dan heeft de grafiek een **perforatie**.

Als de linker limiet en de rechter limiet (beide voor x nadert a) van elkaar verschillen, dan zit er een **sprong** in de grafiek. Die sprong kan een verticale asymptoot zijn.

Als de linker limiet en de rechter limiet beide op ∞ of $-\infty$ uitkomen (x nadert a), is er sprake van een verticale asymptoot.
Omdat een functiewaarde 'niet $\pm\infty$ kan zijn', is de functie daar niet continu.

Bij de karakteristieken van een functie horen ook de perforaties en eventuele sprongen in de grafiek.



Figuur 4.3

Voorbeeld 1

De functie $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 2x}$ heeft twee x-waarden waar geen functiewaarde bij hoort. Welke limieten horen bij deze functie en wat betekent dit voor de grafiek van f?

Antwoord

Aangezien je niet door 0 kunt delen, is dit het geval als $x^2 + 2x = 0$ en dus als $x = -2 \vee x = 0$.

Voor $x = -2$ geldt $\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \lim_{x \downarrow -2} f(x) = 3$.

Voor $x = 0$ geldt $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -\infty$.

Bij $x = -2$ heeft de grafiek een perforatie. Bij $x = 0$ heeft de grafiek een verticale asymptoot.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 2x}$.

a Bereken zelf de bijbehorende limieten.

b Uit de limieten volgt dat bij $x = -2$ een perforatie in de grafiek zit. Hoe kun je de grafiek bij $x = -2$ continu maken?

c Schrijf het domein en het bereik van f op. Ga uit van het gegeven functievoorschrift.

Opgave 5

Bepaal alle karakteristieken van de functie f met

$f(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-9)}{x^2-2x}$.

Opgave 6

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x|}}$.

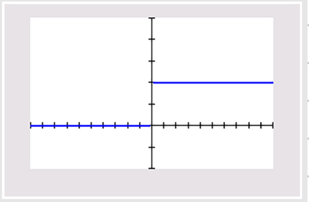
a Bereken $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$.

b Heeft deze functie een perforatie voor $x = 0$?

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq 3$.

Voorbeeld 2

Dit is een grafiek van de functie $f(x) = \frac{|x|+x}{x}$. Leg uit waarom de grafiek er zo uitziet en verklaar de sprong in de grafiek bij $x = 0$.



Figuur 4.4

Antwoord

Je kunt het functievoorschrift herleiden tot

$$f(x) = \frac{|x|+x}{x} = \begin{cases} \frac{x+x}{x} = 2 & \text{voor} \quad x > 0 \\ \frac{-x+x}{x} = 0 & \text{voor} \quad x < 0 \end{cases}$$

Rechts van $x = 0$ (dus voor positieve x-waarden) is de grafiek de lijn $y = 2$. Links van $x = 0$ (dus voor negatieve x-waarden) is de grafiek de lijn $y = 0$.

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{|x|+1}{x}$.

a Herleid dit functievoorschrift op dezelfde manier als in het voorbeeld.

b Heeft de grafiek van f een sprong?

c Welke twee horizontale asymptoten heeft de grafiek van f?

Opgave 8

De functie f is gegeven door: $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{voor} \quad x > 0 \\ x^2 + x & \text{voor} \quad x \leq 0 \end{cases}$.

a Bereken de linker limiet en de rechter limiet voor x nadert 0 van deze functie.

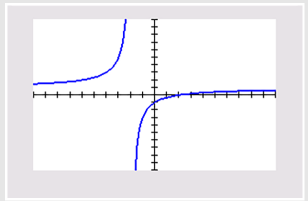
b Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

c Schrijf het domein en het bereik van f op.

Verwerken

Opgave 9

Je ziet de grafiek van de functie f met functievoorschrift $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$.



Figuur 4.5

a Schrijf het domein van f op.

b Hoe komt het dat je alleen bij $x = -2$ een verticale asymptoot ziet en bij $x = 2$ niet? Gebruik limieten in je antwoord.

c Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van deze functie? Geef de bijbehorende limieten.

d Welk bereik heeft deze functie?

Opgave 10

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{|2x|+3x}{x}$.

a Laat zien dat de grafiek van f een sprong maakt voor $x = 0$ door het functievoorschrift te herleiden.

b Deze functie snijdt van de lijn $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$ een lijnstuk AB af. Bereken de lengte van lijnstuk AB.

Opgave 11

De functie f heeft als voorschrift $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{voor} \quad x < -2 \\ \frac{1}{4}x & \text{voor} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x} & \text{voor} \quad x > 2 \end{cases}$.

a Licht toe dat deze functie voor elke waarde van x continu is. Gebruik daarbij limieten.

b Schrijf het domein en het bereik van f op.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 0{,}125$.

Opgave 12

De grafiek van $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ heeft een verticale asymptoot voor $x = 0$. Daarom wordt een nieuwe functie g gedefinieerd door:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{voor} \quad x \leq -1 \\ x^2 + px + q & \text{voor} \quad -1 < x < 1 \\ f(x) & \text{voor} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

De waarden van de onbekende p en q worden zo gekozen, dat de grafiek geen perforaties of sprongen heeft.

Welke waarden voor p en q moeten worden gekozen? Geef een uitgebreide toelichting.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2+10x-12}{x-a}$.

Voor welke waarden van a heeft de grafiek van f een perforatie?

Toepassen

Opgave 14: Gas afbranden

In de jaren zeventig van de vorige eeuw werd in Nederland volop gas verstookt. In een gebied met veel tuinders werd vooral voor hen een gunstige prijs per m^3 gehanteerd (alle bedragen zijn omgerekend naar euro):

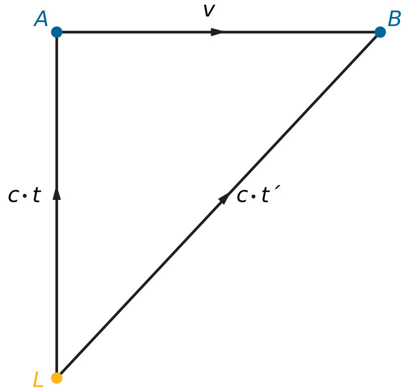
- Voor kleinverbruik (tot 600 m^3 per jaar) werd € 20,00 per jaar plus € 0,13 per m^3 gerekend.
- Voor grootverbruik (vanaf 600 m^3 per jaar) werd € 40,00 per jaar plus € 0,08 per m^3 gerekend.

a Was de bijbehorende grafiek van de gasprijs P (in euro) afhankelijk van het gasverbruik x (in m^3) continu?

b Vanaf welk verbruik was het voor een kleinverbruiker gunstiger om in het grootverbruikerstarief te vallen?

Opgave 15: Bewegende waarnemer

Gegeven zijn twee waarnemers A en B. Ze bevinden zich op dezelfde plaats. Op het tijdstip dat een lichtbron L licht uitzendt, begint B zich met een constante snelheid v, loodrecht op AL van A af te bewegen. Zie de figuur. Noem t de tijd die het licht nodig heeft om A te bereiken en t' de tijd om B te bereiken. Noem de lichtsnelheid c.



Figuur 4.6

a Toon aan dat $\frac{t'}{t} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Noem deze verhouding $f(v)$.

b Bepaal het domein van f.

c Welke waarde nadert $f(v)$ als v de lichtsnelheid nadert?

d Bereken $f(0)$ en geef aan wat dit voor de situatie betekent.

e Voor welke snelheid verloopt de tijd van A half zo snel als voor B?

Testen

Opgave 16

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x^2-2}$.

a Laat met behulp van limieten zien dat de grafiek van f precies één verticale asymptoot heeft.

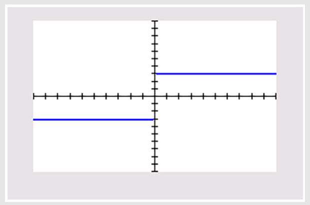
b Bepaal de horizontale asymptoot van de grafiek van f.

c Schrijf het domein en het bereik van f op.

d Los algebraïsch op: $f(x) \leq -x$.

Opgave 17

Je ziet de grafiek van de functie g met $g(x) = \frac{|3x|}{x}$. De grafiek heeft een sprong.



Figuur 4.7

a Laat zien waarom dit zo is door het functievoorschrift te herschrijven.

Om deze functie continu te maken wordt het functievoorschrift aangepast. Er wordt een nieuwe functie h gedefinieerd door:

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{voor} \quad x < -1 \\ px^2 + q & \text{voor} \quad -1 \leq x \leq 2 \\ g(x) & \text{voor} \quad x > 2 \end{cases}$$

De waarden voor de onbekende p en q worden zo gekozen dat h een continue functie is.

b Bereken p en q.

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Asymptoten en limieten**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- karakteristieken van een functie — toppen — nulpunten — snijpunt y-as
- asymptoot — horizontale asymptoot — verticale asymptoot
- limiet — oneindig — linker limiet en rechter limiet — scheve asymptoot
- continu — perforatie in de grafiek — sprong in de grafiek

Activiteitenlijst

- karakteristieken van een functie berekenen — schetsen van een grafiek
- horizontale en verticale asymptoten van een grafiek bepalen
- limieten berekenen — scheve asymptoten van een grafiek bepalen
- perforaties en sprongen van een grafiek bepalen — de continuïteit van een functie vaststellen

Achtergronden

Het begrip 'limiet' werd als vrij snel na de invoering van het functiebegrip breed gebruikt. Maar het begrip 'oneindig' dat er veel bij wordt gebruikt is nogal vaag. Een wiskundige zoals **Karl Weierstrass (1815—1897)** was dat een doorn in het oog (en hij was de enige niet). Hij gebruikte nauwkeuriger omschrijvingen zonder termen als oneindig te gebruiken.

Figuur 5.1

Neem aan dat f een reële functie is en c een reëel getal. Dan betekent

$\lim_{x \to c} f(x) = L$

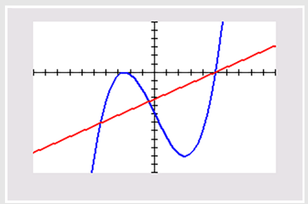
dat $f(x)$ zo dicht bij L uitkomt als je maar wilt, als je x maar voldoende dicht bij c brengt. Onder andere Karl Weierstrass herformuleerde dit in de 19de eeuw tot de zogenaamde ε,δ-definitie van limiet.
In deze definitie stelt ε een willekeurig klein positief getal voor, zo dat $f(x)$ komt willekeurig dicht bij L betekent dat $f(x)$ uiteindelijk in het interval $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$ ligt, wat je kunt schrijven als $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Dat dit gebeurt als x voldoende dicht bij c wordt gebracht, betekent dat de x-waarden minder van c afliggen dan een positief getal δ, dus dat de x-waarden binnen $\langle c - \delta, c \rangle$ of $\langle c, c + \delta \rangle$ liggen, dus $0 < |x - c| < \delta$.

En $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ betekent dat $f(x)$ zo dicht bij L uitkomt als je maar wilt, als je x maar groot genoeg maakt. Weierstrass zegt dan dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een N hoort, zodat $|f(x) - L| < \varepsilon$ als $x > N$. (Hierin wordt verondersteld dat N een groot getal is en ε juist heel klein.)

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = (x+5)^2(x-10)$ en $g(x) = 16x - 160$.



Figuur 5.2

a Bereken algebraïsch de nulpunten van f en breng de grafiek in beeld. Pas de vensterinstellingen zo aan, dat je hetzelfde beeld krijgt als in de gegeven grafiek. Zet nu ook de grafiek van g erbij.

b Bepaal de extremen van f.

c Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van f en g.

d Los op: $f(x) < g(x)$.

Opgave 2

Bepaal van de functies de asymptoten en schrijf het domein en het bereik ervan op.

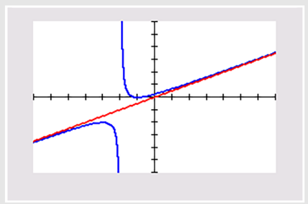
a $f(x) = \frac{4-x}{2x+4}$

b $g(x) = 4 - \frac{x}{x-1}$

c $h(x) = \frac{2x-5}{x^2+3}$

Opgave 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{(x+5)^2}{x+10}$ en $g(x) = x$.



Figuur 5.3

a Bereken het nulpunt en de verticale asymptoot van f en breng de grafiek in beeld. Pas de vensterinstellingen zo aan, dat je hetzelfde beeld krijgt als in de gegeven grafiek. Zet ook de grafiek van g erbij.

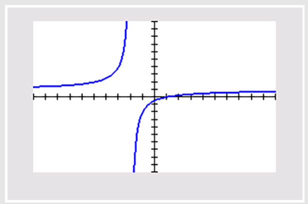
b Bepaal de extremen van f.

De grafiek van g lijkt een scheve asymptoot te zijn van de grafiek van f.

c Laat zien dat dit inderdaad het geval is door het functievoorschrift van f te herleiden en geef de vergelijking van de scheve asymptoot.

Opgave 4

Je ziet de grafiek van $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+x-2}$.



Figuur 5.4

a De grafiek lijkt een verticale asymptoot $x = -2$ te hebben. Toon aan met behulp van limieten dat dit inderdaad het geval is.

b Wat is het domein van deze functie?

c Welke perforatie kent de grafiek van f? Schrijf de bijbehorende limieten op.

d Welke horizontale asymptoot kent de grafiek van f? Schrijf de bijbehorende limieten op.

Opgave 5

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = \frac{|x^2-2x|}{x}$.

Verklaar de vorm van deze grafiek door de functie in delen op te splitsen.

Opgave 6

Gegeven is de functie f door:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2} & \text{voor} \quad x < -2 \vee x > 2 \\ ax^3 + bx & \text{voor} \quad -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

f is continu voor elke waarde van x en de grafiek gaat door het punt $(1,2)$.

a Bereken a en b.

b Bepaal het bereik van f.

c Los op: $f(x) \leq x$. Rond af op één decimaal.

Toepassen

Opgave 7: Zwaartekracht

In 1665 formuleerde Newton de algemene zwaartekrachtwet als volgt: ‘Twee massa's oefenen altijd wederzijds een aantrekkende kracht op elkaar uit: de gravitatiekracht. Voor twee puntmassa's geldt’

$$F = g \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

‘waarin m_1 en m_2 de massa's van die puntmassa's zijn (in kg) en r hun onderlinge afstand (in m) is, g de gravitatieconstante en F de wederzijdse zwaartekracht (in newton) is. Die kracht heeft de richting van hun verbindingslijn.’.

Bekend is dat $g \approx 6{,}7 \cdot 10^{-11}$. Neem verder aan dat $m_1 = 1 \cdot 10^5$ kg en $m_2 = 1 \cdot 10^6$.

a Beschrijf voor deze situatie de zwaartekracht met een formule.

b Bereken $\lim\limits_{r \to \infty} F(r)$. Welke natuurkundige betekenis heeft dit?

c Bereken $\lim\limits_{r \downarrow 0} F(r)$. Welke natuurkundige betekenis heeft dit?

Opgave 8: Massa volgens Einstein

Einstein's formule voor de massa van een bewegend deeltje luidt

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

waarin m_0 de rustmassa en c de lichtsnelheid constanten zijn. m is dus een functie van de snelheid v van het deeltje in m/s.

a Welke waarde heeft m als $v = 0$? Kun je de naam ‘rustmassa’ verklaren?

m neemt toe met de snelheid. Dat lijkt erg vreemd want je merkt er in de praktijk niets van. Dat komt omdat je normaal gesproken met snelheden te maken hebt die veel kleiner zijn dan de lichtsnelheid $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.

b Als $v = 3{\cdot}10^6$ m/s, met hoeveel procent is de massa van een deeltje dan toegenomen?

c Als $v = 3{\cdot}10^7$ m/s, met hoeveel procent is de massa van een deeltje dan toegenomen?

d Welke waarden kan v aannemen volgens deze formule?

e Hoe groot is $\lim\limits_{v \uparrow c} m(v)$? Welke natuurkundige betekenis heeft dit?

En waarom heeft $\lim\limits_{v \downarrow c} m(v)$ geen betekenis?

Examen

Opgave 9: Limiet van een hoek

Voor de grootte van $\angle M_1M_2M_3$ geldt $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{r+12}{2r+12}$.

Als r onbegrensd toeneemt, nadert de grootte van $\angle M_1M_2M_3$ tot een limiet.

Bereken exact deze limiet in graden.

(naar: pilotexamen wiskunde B vwo 2017, eerste tijdvak)

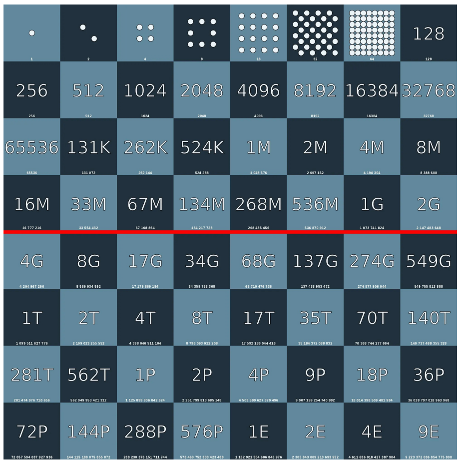
2

Exponentiële functies

2.1 Exponentiële groei

Inleiding

Groeiverschijnselen komen veel voor, denk aan het toenemen van geld dat je op de bank zet, het toenemen van de kosten als je meer km in de taxi zit, het groeien van de bevolking, enzovoorts. Soms is er sprake van toename met een vaste hoeveelheid per tijdseenheid, soms is er sprake van toename die afhankelijk is van de hoeveelheid zelf: hoe groter de hoeveelheid, hoe groter ook de toename per tijdseenheid. Bij exponentiële groei is de toename een vast percentage van de totale hoeveelheid.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei en afname, bijpassende formules opstellen;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden;
- enkele rekenregels voor het werken met machten.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Stel je voor dat je een heel groot vel papier hebt (A1-formaat). Het vel papier vouw je dubbel. Het dubbelgevouwen papier is dan twee lagen dik. Vouw je dit papier nogmaals dubbel, dan is het papier vier lagen dik. Een echt vel papier kun je natuurlijk steeds moeilijker dubbelvouwen. Wanneer je je het vel papier voorstelt als een onbegrensd vlak zonder dikte, kun je in principe blijven doorgaan met dubbelvouwen.

a Hoeveel lagen papier zijn er na 20 keer dubbelvouwen?

b Waarom zal dit met een A4-tje nooit lukken?

Stel dat het onbegrensde vel papier $0{,}15$ mm dik is.

c Hoe dik is het aantal lagen na 20 keer vouwen?

d Van een ander vel papier is na net zo vaak vouwen het aantal lagen maar 5 cm dik. Hoe dik is dat papier?

Uitleg

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Elke bacterie brengt twee nieuwe bacteriën voort door zich te delen. Bij een geschikte constante temperatuur kan de groei van het aantal bacteriën verlopen als in de tabel is te zien.

tijd (uren)	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	6	12	24	48	96	192	384

Tabel 1.1

De hoeveelheid bacteriën wordt elk uur twee keer zo groot. Dat zie je door opeenvolgende waarden in de tabel op elkaar te delen.

$\frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = \frac{192}{96} = 2$

Je moet dus steeds met factor 2 vermenigvuldigen om de volgende waarde te vinden:

- op tijdstip 0 heb je 6 bacteriën;
- na 1 uur heb je $6 \cdot 2$ bacteriën;
- na 2 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2$ bacteriën;
- na 3 uur is er $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2^3$ bacteriën; enzovoort.

De hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Voor de hoeveelheid bacteriën B na t uur geldt in dit geval de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$. Je ziet dat er machten worden gebruikt voor het herhaaldelijk vermenigvuldigen. In dit geval zijn het machten met grondtal 2, dit getal is de groeifactor per uur. Omdat de variabele t in de exponent zit, spreek je van exponentiële groei.

Met het voorbeeld van bacteriegroei en de functie $B(t)$ kun je een aantal rekenregels voor machten afleiden.

- Allereerst heb je op $t = 0$ volgens de formule $6 \cdot 2^0$ bacteriën. Omdat je weet dat dit precies 6 moet zijn is: $2^0 = 1$.
- Na 3 uur heb je $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 7 uur, dus $6 \cdot 2^7$. Conclusie: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Als je machten vermenigvuldigt tel je de exponenten op.
- Na 7 uur heb je $6 \cdot 2^7$ en 4 uur eerder $6 \cdot \frac{2^7}{2^4}$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 3 uur, dus $6 \cdot 2^3$. Conclusie: $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$. Als je machten deelt trek je de exponenten af.
- De groeifactor per uur is 2. Per drie uur is die groeifactor $2^3 = 8$. De hoeveelheid bacteriën na 12 uur kun je op twee manieren berekenen: $6 \cdot 2^{12}$ of $6 \cdot 8^4$. Dus moet $\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$. Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$

$\frac{2^7}{2^4} = 2^3$

$(2^3)^4 = 2^{12}$

$2^0 = 1$

Figuur 1.2

Opgave 1

Lees het verhaal van de bacteriegroei in de **Uitleg**.

a Wat versta je onder de 'groeifactor' per uur van de hoeveelheid bacteriën?

b Hoeveel procent bacteriën komt er elk uur bij?

c Hoeveel bacteriën heb je na 12 uur?

Opgave 2

Schrijf als één macht, gebruik de rekenregels.

a $2^5 \cdot 2^6$

b $\frac{5^9}{5^4}$

c $(6^3)^6$

d $5^0 \cdot 5^1$

Opgave 3

Enkele bijzondere gevallen.

a Kun je $2^5 + 2^5$ ook als een macht schrijven?

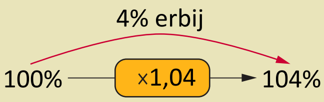
b Hoeveel is 0^4?

c En hoe zit het met 0^0? Welke moeilijkheid doet zich nu voor?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij **exponentiële groei** moet je per tijdseenheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is dan geldt: $g > 0$. Om vast te stellen of de groei exponentieel is, deel je opeenvolgende waarden van de hoeveelheid op elkaar. Komt daar steeds hetzelfde getal uit, dan is er sprake van exponentiële groei. De hoeveelheid op $t = 0$ noem je de beginwaarde.



Figuur 1.3

Als een hoeveelheid met steeds hetzelfde percentage groeit is er sprake van exponentiële groei. Bij een groei met p procent hoort de groeifactor:

$g = 1 + \frac{p}{100}$.

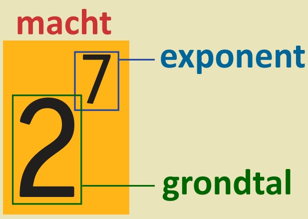
Voor $p > 0$ neemt de hoeveelheid toe en is $g > 1$: exponentiële toename.
Voor $p < 0$ neemt de hoeveelheid af en is $0 < g < 1$: exponentiële afname.

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je n keer hetzelfde getal g, dan schrijf je dat als g^n. Dit is een **macht**. De groeifactor g heet het **grondtal**, n heet de **exponent**, waarbij n (voorlopig) een positief geheel getal is. Voor $n = 0$ is de afspraak: $g^0 = 1$. In het algemeen gelden voor een willekeurig grondtal g en willekeurige positieve gehele getallen n en m de volgende **rekenregels voor machten**:

$g^n \cdot g^m = g^{n+m}$

$\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$

$(g^n)^m = g^{n \cdot m}$



Figuur 1.4

Bewijs 1

Bewijs van de eerste en de tweede rekenregel:

Per definitie is $g^n = g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met n getallen g).

Dus is:
$(g^n)^m = g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met n getallen g) × $g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met m getallen g) =
$= g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met $n + m$ getallen g) $= g^{n+m}$.

Omdat $\frac{g}{g} = 1$ (als $g \neq 0$) geldt ook als $g > 0$:
$g^n / g^m = g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met n getallen g) / $g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met m getallen g) =
$= g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met $n - m$ getallen g) $\cdot\ g/g \cdot g/\ g \cdot \ldots \cdot g/g =$
$= g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (met $n - m$ getallen g) $\cdot\ 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = g^{n-m}$

Deze rekenregel geldt ook als $n < m$. Daarover later meer...

En op vergelijkbare wijze kun je ook $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$ beredeneren.

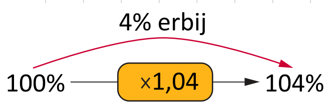
Merk op dat het noodzakelijk is dat n en m positieve gehele getallen zijn, maar dat g elk willekeurig getal ongelijk 0 kan zijn. Verder volgt $g^0 = 1$ nog uit de tweede rekenregel als $n = m$.

Voorbeeld 1

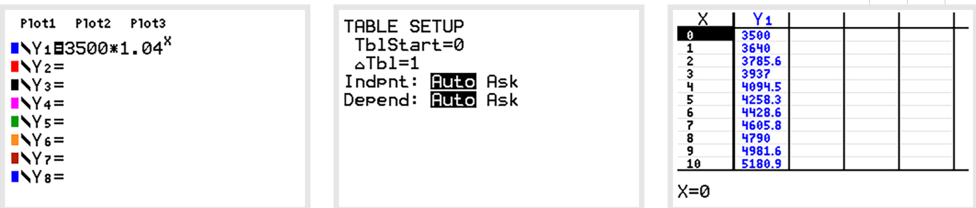
Op 1 januari 2010 stond een bedrag van € 3500,00 op een spaarrekening. De bank gaf (toen nog) op deze rekening een rente van 4% per jaar. Neem aan dat dit alles vanaf 1 januari 2010 niet verandert en stel een formule op voor het saldo S op deze rekening afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010. Maak ook een tabel die laat zien hoe het saldo zich ontwikkelde.

Antwoord

- Bij een toename van 4% per jaar hoort een groeifactor van $1{,}04$. Op $t = 0$ was het saldo € 3500,00. Een passende formule is daarom $S = 3500 \cdot 1{,}04^t$.
- Als je deze formule invoert op de rekenmachine heb je snel een tabel.
- Per drie jaar is de groeifactor: $1{,}04^3 \approx 1{,}12$ dus het groeipercentage is dan ongeveer 12. Per vijf jaar is de groeifactor: $1{,}04^5 \approx 1{,}22$ dus de groei is dan ongeveer 22%.



Figuur 1.5



Figuur 1.6

Opgave 4

Iemand zet op 1 januari 2010 € 800,00 op een bankrekening tegen 6% rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

a Wat is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?

b Hoeveel staat er op de bankrekening op 1 januari 2015?

c Welke formule geldt voor het spaartegoed $S(t)$, waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2010 is?

d Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipercentage per vijf jaar.

e Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2030 kunt berekenen:

- $t = 20$ invullen in de formule;
- het tegoed op 1 januari 2010 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vier jaar;
- het tegoed op 1 januari 2010 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vijf jaar.

Opgave 5

Je wilt je spaargeld voor een jaar bij de bank op een spaarrekening zetten. Bij bank A kun je 3% rente per jaar krijgen en bij bank B kun je $0{,}25$% rente per maand krijgen. Bij welke bank krijg je de meeste rente?

Voorbeeld 2

Een krant zag in een reeks van jaren het aantal jaarabonnementen dalen.

jaartal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen (×	970	941	913	885	859	833

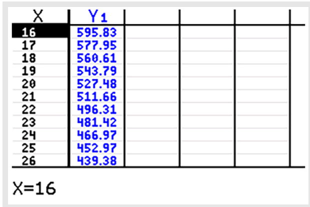
Tabel 1.2

Stel op grond van deze tabel een zo goed mogelijk passende formule op die het verloop van het aantal duizenden abonnementen A als functie van de tijd t in jaren beschrijft. Neem $t = 0$ voor 2010. Als het aantal jaarabonnementen onder de 500000 zakt raakt de krant in problemen. In welk jaar is dat het geval als dit verloop niet wijzigt?

Antwoord

De jaartallen nemen gelijkmatig toe. Deling van opeenvolgende aantallen abonnementen levert steeds (ongeveer) $0{,}97$ op, dus de daling is een vorm van exponentiële groei. De groeifactor $g \approx 0{,}97 < 1$, dus er is sprake van exponentiële afname. Het aantal abonnementen neemt jaarlijks met 3% af.
Een passende formule is daarom: $A(t) = 970 \cdot 0{,}97^t$.

Maak vervolgens een tabel van deze functie met de rekenmachine. Ga na dat op $t = 22$ de waarde van A minder dan 500 is. Op deze manier raakt de krant dus in 2032 in de problemen.



X	Y1
16	595.83
17	577.95
18	560.61
19	543.79
20	527.48
21	511.66
22	496.31
23	481.42
24	466.97
25	452.97
26	439.38

X=16

Figuur 1.7

Opgave 6

Bekijk de tabel in **Voorbeeld 2**. Daarin is sprake van exponentiële afname.

a Controleer dat de groeifactor per jaar inderdaad telkens ongeveer 0,97 is.

b Welke functie vind je voor het aantal abonnementen $A(t)$ als je $t = 0$ neemt in 2017?

c Laat zien dat de krant in 2032 inderdaad in de problemen raakt.

Opgave 7

Neem de tabel over en vul in:

procentuele toename per ja	13	-6	0,3				
groeifactor per jaar				1,15	0,98	3,95	0,01

Tabel 1.3

Voorbeeld 3

Bereken $\frac{256^{1000} \cdot 64^{200}}{1024^{919}}$.

Antwoord

Dit kun je met de rekenregels van machten bereken.

$256 = 2^8$, $64 = 2^6$ en $1024 = 2^{10}$

En dus staat hier: $\frac{(2^8)^{1000} \cdot (2^6)^{200}}{(2^{10})^{919}} = \frac{2^{8000} \cdot 2^{1200}}{2^{9190}} = \frac{2^{9200}}{2^{9190}} = 2^{10} = 1024$.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**. Gebruik de rekenregels voor machten om de uitdrukkingen als één macht te schrijven.

a $\frac{2^{214} \cdot 2^{80}}{(2^{12})^{24}}$

b $\frac{(4^3)^2 \cdot 64^4}{16^2}$

c $\frac{1296^2 \cdot 7776^3}{36}$

d $\frac{5^{112} \cdot 25^{224}}{125^{35} \cdot (5^{20})^3}$

Verwerken

Opgave 9

Schrijf als één macht.

a $2^4 \cdot 2^3$

b $2^4 \cdot \left(2^3\right)^4$

c $2^3 + 7 \cdot 2^3$

d $\left(2^3\right)^2 \cdot 2^4 + 2^3 \cdot 2^7$

Opgave 10

In een ondiep meer van 1000 km^2 begint riet te groeien. Op 1 januari 2014 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 2 km^2. Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. Op een gegeven moment constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar drie keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

a Geef het functievoorschrift van het met riet begroeide oppervlakte $R(t)$, waarbij t de tijd in jaren is en $t = 0$ op 1 januari 2014 .

b Maak een tabel bij deze functie voor de eerste vijf jaar.

c In welk jaar is het hele meer voor het eerst helemaal begroeid met riet?

Opgave 11

Schrijf als één macht.

a $\frac{3^{214}}{3^{211}} \cdot 81^{25}$

b $\frac{\left(49^8\right)^{10}}{7^{100} \cdot 343^{20}}$

c $\frac{2^{631} \cdot 8^{112}}{2^{622} \cdot 4^{32}}$

d $\frac{8^2 \cdot \left(64^3\right)^2}{32^4}$

Opgave 12

Elk jaar wordt het aantal herten in een natuurgebied geteld op 1 januari. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

a Stel een formule op voor de ‘groei’ van het aantal herten N als functie van de tijd t in jaren, waarbij $t = 0$ op 1 januari 2014.

b Bereken het aantal herten op 1 januari 2024.

c Bereken het groeipercentage per tien jaar.

d In welk jaar zal het aantal herten gehalveerd zijn?

Opgave 13

Op 1 januari 2012 had stad A 350000 inwoners. Het aantal inwoners groeit met $3{,}5$ procent per jaar. Op 1 januari 2010 was het aantal inwoners van stad B 400000. Het aantal inwoners groeit in deze stad met 8000 per jaar.

a Stel een formule op van het aantal inwoners N_A van stad A. Neem $t = 0$ op 1 januari 2012.

b Stel een formule op van het aantal inwoners N_B van stad B. Neem $t = 0$ op 1 januari 2012.

c Hoeveel procent inwoners had stad B op 1 januari 2014 meer dan stad A? Geef je antwoord in hele procenten.

d In welk jaar heeft stad A voor het eerst meer inwoners dan stad B?

Toepassen

Opgave 14: De laatste vier cijfers

Onderzoek wat de laatste vier cijfers van 5^{2013} zijn.

Opgave 15: Vervoerskosten

Een chauffeur moet met een vrachtwagen een traject van 100 kilometer lengte rijden. Zijn firma wil weten bij welke snelheid de totale vervoerskosten het laagst zijn. Een vrachtwagen verbruikt bij een snelheid van 60 kilometer per uur voor elke kilometer $0{,}5$ liter brandstof. Bij toename van de snelheid neemt het verbruik exponentieel toe: bij elke toename van de snelheid met 10 kilometer per uur stijgt het verbruik per kilometer met 10%.
Het arbeidsloon van de chauffeur is € 45,00 per uur.
De brandstofkosten zijn € 1,72 per liter.
De totale vervoerskosten bestaan uit brandstofkosten en het arbeidsloon van de chauffeur.

a Hoeveel bedragen de totale vervoerskosten over het traject bij een snelheid van 80 kilometer per uur?

b Bereken bij welke snelheid de totale vervoerskosten het laagst zijn. Rond je antwoord af op hele kilometers per uur.

(naar: examen vwo wiskunde B in 2001, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 16

De huurprijs van een woning is in 2014 € 850,00 per maand. Jaarlijks wordt dit bedrag met $3{,}2\%$ verhoogt.

a Stel een formule op waarmee je de huurprijs H (in euro's) na t jaar kunt berekenen. Neem $t = 0$ in 2014.

b Hoe groot is de groeifactor in twee decimalen van de maandelijkse huur per 4 jaar?

c Bereken het groeipercentage per 20 jaar.

d Na hoeveel jaar is de huur per maand voor het eerst meer dan verdubbeld?

Opgave 17

Schrijf als één macht.

a $\frac{17^{11} \cdot 17^{54}}{\left(17^4\right)^8}$

b $\frac{3^{115} \cdot 9^{25}}{3^{44} \cdot 27^{12}}$

c $\frac{\left(25^{10}\right)^4 \cdot 5^7}{625^9 \cdot 5^{22}}$

Opgave 18

Iemand koopt voor € 5000,00 aandelen. In de volgende jaren blijkt dat de aandelen elk jaar 12% in waarde dalen.

a Stel een functievoorschrift op voor de waarde van de aandelen $W(t)$, waarin t de tijd in jaren sinds de aankoop van de aandelen is.

b Na hoeveel jaar is de waarde van de aandelen minder dan € 1000,00 geworden?

c Bereken het groeipercentage per vijf jaar.

d Met welk getal moet je de waarde na vijf jaar vermenigvuldigen om de waarde na tien jaar te krijgen? Bereken de waarde na tien jaar.

e Bereken het groeipercentage per tien jaar.

2.2 Reële exponenten

Inleiding

Tot nu toe kun je bij exponentiële groei eigenlijk alleen wat zeggen op tijdstippen die gehele positieve waarden hebben. En dat is natuurlijk niet wenselijk, je wilt weten hoeveel bacteriën er zijn na $1{,}5$ uur, of $2{,}3$ uur voor het begintijdstip.
Je gaat nu kijken hoe het met gebroken en/of negatieve exponenten zit.
Dat levert weer een paar nieuwe rekenregels voor machten op...
In het algemeen zul je leren werken met alle mogelijke reële exponenten.

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken en/of negatieve exponenten;
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden;
- alle rekenregels voor het werken met machten;
- exponentiële vergelijking met de grafische rekenmachine oplossen.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

De hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B = 600 \cdot 2^t$. Het startmoment van meten, $t = 0$, is vandaag om 12:00 uur.

a Hoeveel bacteriën zullen er geweest zijn om 11:00 uur? En om 10:00 uur?

b Hoe bereken je de hoeveelheid bacteriën als je terug gaat in de tijd? Kan dat ook zonder formule alleen met de groeifactor?

c Kun je ook het aantal bacteriën bepalen om 14:15 uur?

Figuur 2.1

Uitleg 1

Voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt: $B = 600 \cdot 2^t$.
$t = 0$ komt overeen met 12:00 uur.
$t = -1$ komt overeen met een uur voor 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën. Als je aanneemt dat dit vóór 12:00 uur ook het geval was, dan zal er om 11:00 uur $600 \cdot \frac{1}{2} = 300$ bacteriën in het schaaltje hebben gezeten.

Het aantal bacteriën in voorgaande uren bereken je door telkens te delen door 2 (vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$).

tijd (uren)	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	150	300	600	1200	2400	4800	9600	19200	38400

Tabel 2.1

Met het functievoorschrift $B(t) = 600 \cdot 2^t$ kun je de hoeveelheid bacteriën t uur na 12:00 uur berekenen voor positieve gehele getallen t. Wil je met deze formule ook het aantal bacteriën 1 uur voor 12:00 uur kunnen berekenen, dan moet: $B(-1) = 600 \cdot 2^{-1} = 300$. Blijkbaar moet je afspreken dat $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Ook voor andere tijdstippen voor 12:00 uur wil je het functievoorschrift kunnen gebruiken. Dus moet gelden:

- op tijdstip $t = -1$ (11:00 uur): $600 \cdot 2^{-1} = 600 \cdot \frac{1}{2} = 300$;
- op tijdstip $t = -2$ (10:00 uur): $600 \cdot 2^{-2} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 150$;
- op tijdstip $t = -3$ (9:00 uur): $600 \cdot 2^{-3} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 75$, enzovoort.

Je moet dus ook afspreken dat $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ en $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$, enzovoort.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$. Daarmee kun je met negatieve exponenten rekenen. Let op: in dat geval mag g niet 0 zijn!

Opgave 1

Neem **Uitleg 1** door. Kijk goed wanneer er negatieve exponenten worden gebruikt.

a Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 8:00 uur te berekenen?

b Bereken het aantal bacteriën om 8:00 uur.

Uitleg 2

De hoeveelheid bacteriën B op een petrischaaltje na t uur, kan met de formule $B = 600 \cdot 2^t$ berekend worden. $t = 0$ komt overeen met tijdstip 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën, het groeit met groeifactor 2. Het aantal bacteriën groeit ook met een vaste groeifactor per half uur en bijvoorbeeld per kwartier.

Voor de groeifactor per half uur schrijf je $2^{\frac{1}{2}}$.

Voor de groeifactor per kwartier schrijf je $2^{\frac{1}{4}}$.

Voor de groeifactor per anderhalf uur schrijf je $2^{1\frac{1}{2}}$.

Welk getal stelt $2^{\frac{1}{2}}$ voor?
De groeifactor per uur kun je vinden door de groeifactor per half uur twee keer toe te passen: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$.

Je weet dat $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Dus: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Op dezelfde manier kun je beredeneren dat voor de groeifactor per kwartier geldt: $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$. En daarmee kun je met gebroken exponenten rekenen. Let op: nu moet g positief zijn om altijd een reële uitkomst op te leveren. Stel bijvoorbeeld dat $g = -1$, dan is $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ geen reëel getal.

Opgave 2

Neem **Uitleg 2** door. Kijk goed wanneer er gebroken exponenten worden gebruikt.

a Wat moet je in de formule $B = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 14:30 uur te berekenen?

b Bereken dit aantal op twee manieren, met het functievoorschrift en met behulp van de groeifactor per half uur. Rond je antwoorden af op gehelen.

Opgave 3

Bekijk de groei van de bacteriën in **Uitleg 2**.

a Hoe groot is de groeifactor per drie uur?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per half uur? Rond je antwoord af op twee decimalen.

c Hoe groot is de groeifactor per kwartier? Rond je antwoord af op twee decimalen.

d Gebruik de rekenmachine om het aantal bacteriën te berekenen na 5 uur, na $5{,}5$ uur en na $5{,}75$ uur. Rond je antwoorden af op gehelen.

e Laat zien dat je het aantal bacteriën na $5{,}75$ uur ook kunt berekenen door het aantal na vijf uur eerst te vermenigvuldigen met de groeifactor per half uur en daarna met de groeifactor per kwartier. Rond je antwoord af op gehelen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

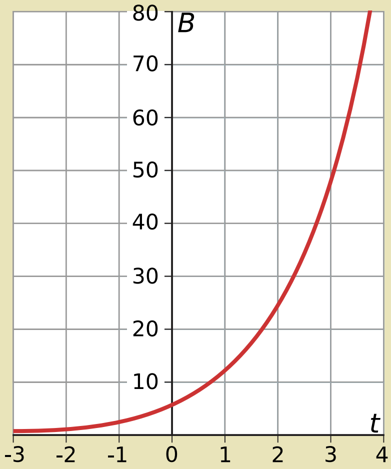
Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de groeifactor die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is dan geldt: $g > 0$. Om met negatieve exponenten en/of gebroken exponenten te kunnen werken, zijn de volgende afspraken nodig:

- **negatieve exponenten**: $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$
- **gebroken exponenten**: $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$

Deze afspraken gelden voor $g > 0$ en positieve gehele n.

Beide afspraken passen in de **rekenregels voor machten**, bijvoorbeeld: $g^{-n} = g^{0-n} = \frac{g^0}{g^n} = \frac{1}{g^n}$.

Je hebt nu gezien dat een macht g^a voor $g > 0$ betekenis heeft als de exponent a een positief getal, nul, een negatief getal of een gebroken getal is. In feite mag a elk reëel getal zijn. En daarom kunnen bij exponentiële groei grafieken worden getekend in de vorm van een vloeiende kromme lijn. Je ziet de grafiek van $B = 6 \cdot 2^t$.



Figuur 2.2

Voorbeeld 1

Thomas Robert Malthus leefde in het begin van de 19e eeuw. Hij dacht dat de groei van de wereldbevolking wel eens exponentieel zou kunnen zijn. In de tabel zie je het aantal mensen op aarde in de loop van de negentiende eeuw.

jaartal	1800	1820	1840	1860	1880	1900
aantal mensen (in miljoenen)	1000	1102	1216	1340	1477	1629

Tabel 2.2

Stel een passend functievoorschrift op voor de bevolking per jaar. Bereken vervolgens hoeveel mensen er in 1600 en in 2000 volgens dit model hadden moeten zijn.

Antwoord

Van 1800 tot 1820 wordt het aantal mensen vermenigvuldigd met: $\frac{1102}{1000} = 1{,}102$. Ga na dat dit voor elke volgende periode van 20 jaar ook ongeveer zo is. Vanaf 1800 tot 1900 groeide de wereldbevolking dus met een vrijwel constante groeifactor per 20 jaar van $1{,}102$. De groeifactor per jaar is dan $1{,}102^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}005$. Neem je de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1800 en het aantal miljoenen mensen N, dan is: $N(t) = 1000 \cdot 1{,}005^t$.
In 1600 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{-200} \approx 369$ miljoen mensen zijn

geweest.
In 2000 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{200} \approx 2712$ miljoen mensen zijn geweest.
In werkelijkheid waren dat er nog veel meer, namelijk meer dan 6000 miljoen!

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je de groei van de wereldbevolking in de negentiende eeuw.

a Bereken de aantallen mensen in 1600 en in 2000 met behulp van de groeifactor per twintig jaar. Ontstaan er verschillen met de antwoorden in het voorbeeld? Rond af op miljoenen nauwkeurig.

b Bereken met behulp van het groeimodel in het voorbeeld het aantal mensen in 2014.

c Wanneer zou volgens dit groeimodel het aantal mensen verdubbeld zijn ten opzichte van het aantal in 1900?

Voorbeeld 2

Een spaartegoed staat uit tegen 5% rente per jaar. De bank kan de rente per half jaar bijschrijven of zelfs maandelijks. Met welke rentepercentages moet men dan werken? Geef beide percentages in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De groeifactor van het spaartegoed per jaar is $1{,}05$. Als g de groeifactor per half jaar is, kun je die op twee manieren uitrekenen:

- uit $g \cdot g = g^2 = 1{,}05$ volgt $g = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}0247$;
- $g = 1{,}05^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}0247$.

Het rentepercentage per half jaar is dus $2{,}47\%$.

Op dezelfde manier is de groeifactor per maand $1{,}05^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}0041$ of $\sqrt[12]{1{,}05} \approx 1{,}0041$. Het rentepercentage per maand is dus $0{,}41\%$.

Opgave 5

Iemand zet op 1 juli 2014 een bedrag van € 7500,00 op de bank vast tegen een rente van $4{,}2\%$ per jaar. Hoeveel bedraagt zijn kapitaal op 1 januari 2016?

a Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per jaar.

b Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per half jaar.

c Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per maand.

Opgave 6

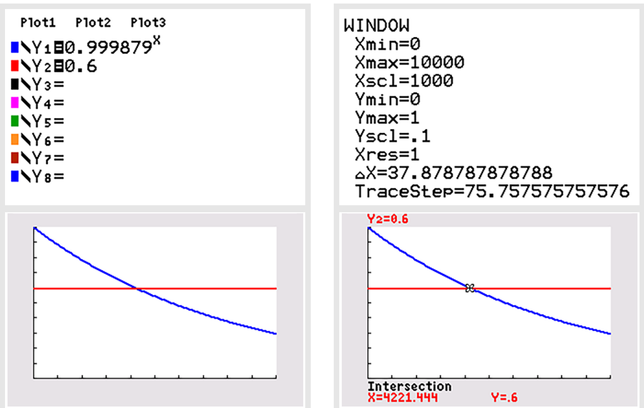
Leg uit waarom en wanneer het nodig kan zijn om het aantal decimalen van een groeifactor in (veel) meer dan drie decimalen te berekenen.

Voorbeeld 3

De ouderdom van hele oude voorwerpen wordt bepaald met de zogenaamde C14-methode. C14 is een bepaalde variant van koolstof, een stof die in levende wezens voorkomt en dus ook in mummies, oude houten en leren voorwerpen, en dergelijke. Deze variant neemt exponentieel af nadat een levend wezen is gestorven. Voor dat moment is de concentratie C14 gelijk aan die in onze atmosfeer, na die tijd wordt die concentratie kleiner. De halveringstijd van deze stof is nauwkeurig bekend, namelijk 5736 jaar.
Stel dat bij een bepaalde mummie de concentratie C14 is afgenomen met 40%. Er is dan dus nog 60% van de oorspronkelijke concentratie over. Hoe bereken je nu de leeftijd van die mummie?

Antwoord

De halveringstijd is 5736 jaar. Als g de groeifactor per jaar is geldt dus: $g^{5736} = 0{,}5$. Hieruit bereken je de groeifactor per jaar: $g = \sqrt[5736]{0{,}5} \approx 0{,}999879$. Als t de leeftijd van de mummie is moet $0{,}999879^t = 0{,}6$. Deze exponentiële vergelijking los je op met de grafische rekenmachine: $t \approx 4221$ jaar.
De mummie is dus ongeveer 4221 jaar.



Figuur 2.3

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** wordt de C14-methode voor het dateren van oude voorwerpen besproken.

a Bereken de groeifactor per eeuw. Rond je antwoord af op drie decimalen.

b Bereken met behulp hiervan de leeftijd van een oud gebruiksvoorwerp waarvan de concentratie C14 nog maar 28% is.

Verwerken

Opgave 8

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1{,}1^t$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (in jaren) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

a Hoeveel inwoners heeft de groeikern op 1 januari 2025?

b Hoeveel inwoners heeft de groeikern op 1 augustus 2025?

c Hoe groot is de groeifactor per jaar?

d Wat is het groeipercentage per maand?

e Bereken de hoeveelheid inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

Opgave 9

Op 1 januari 2012 heeft iemand een kapitaal van € 7969,24 op zijn spaarrekening staan. Het kapitaal staat al jaren vast tegen een rente van 6%. De rente wordt ieder jaar bijgeschreven.

a Bereken de grootte van het kapitaal op 1 januari 2011, 1 januari 2010 en 1 januari 2009.

b In welk jaar had het kapitaal een grootte van € 5618,00?

c De spaarder heeft waarschijnlijk een rond bedrag ingelegd toen hij begon met sparen. Wanneer en met welk bedrag is hij waarschijnlijk begonnen?

Opgave 10

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel. In drie uur tijd is het aantal gegroeid van 1200 (om 10:00 uur) naar 3000.

a Wat is de groeifactor per drie uur?

b Bereken het groeipercentage per uur.

c Welke formule kun je opstellen voor de groei van deze kolonie als $H(t)$ de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren is? Neem $t = 0$ op het moment dat er 1200 bacteriën zijn.

d Op welk moment waren er nog 600 bacteriën? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Opgave 11

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in vijftienhonderd jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs $1{,}2$ miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot $2{,}4$ miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking $4{,}8$ miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

a Bereken voor de periodes 1500-1750, 1750-1800 en 1986-1997 het groeipercentage per jaar.

b In welke periodes is de wereldbevolking verdubbeld?

c Bereken voor deze periodes het groeipercentage per jaar.

Opgave 12

De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie. Doordat de fall-out op het gras komt, krijgt het hooi een te hoog jodium-131 gehalte. Melk van koeien die met dit hooi gevoerd worden, is niet meer voor consumptie geschikt. Na een ongeluk in een kerncentrale bevat hooi in de omtrek van de centrale zes keer het toegestane gehalte jodium-131. De halveringstijd van jodium-131 is acht dagen.

Hoeveel dagen moet het hooi bewaard blijven voordat het weer aan koeien gevoerd kan worden?

Toepassen

Opgave 13: Radioactiviteit

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in twee jaar 19% omgezet in radium-224. Een laboratorium had in het jaar 2001 nog 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, na t jaar met $t = 0$ op het moment dat er 1000 mg radium-228 aanwezig was.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 200 milligram omgezet is in radium-224.

c Bereken hoe lang het duurt voordat de helft van de aanwezige radium-228 omgezet is in radium-224.

d Schat met behulp van je antwoord op c hoelang het duurt tot 750 milligram radium-228 is omgezet in radium-224.

Opgave 14: Fukushima

Bij de kernramp van Fukushima in 2011 zijn er radioactieve stoffen vrijgekomen, waaronder Cesium-134. De halveringstijd van deze radioactieve stof is twee jaar.

a Hoeveel procent is er drie jaar later nog over van deze stof? Rond je antwoord af op één decimaal nauwkeurig.

b Na hoeveel jaar is er nog $0{,}1\%$ van de vrijgekomen Cesium-134 over?

Testen

Opgave 15

In een vijver is sterke algengroei. Op het tijdstip dat men begint met meten zit er in een liter water 10 gram algen. Deze concentratie algen blijkt per week met 15% toe te nemen.

a Geef een formule waarmee je de concentratie algen kunt berekenen. Neem t voor de tijd in weken, met $t = 0$ het tijdstip waarop men begon met meten.

b Neem aan dat ook voor de meting de concentratie algen groeide met 15% per week. Hoeveel bedroeg de concentratie drie weken voor het begin van de meting? Rond af op één decimaal.

c Hoeveel bedroeg de concentratie twee dagen voor het begin van de meting? Geef het antwoord weer in één decimaal nauwkeurig.

d Na hoeveel dagen is de hoeveelheid algen verdubbeld?

Opgave 16

Van een bepaalde soort vlinders daalt het aantal exponentieel. In een zeker jaar ($t = 0$) zijn er ongeveer 6000 van deze vlinders. Vijf jaar later zijn er nog maar ongeveer 4300.

a Bereken de groeifactor per jaar van deze soort vlinders.

b Stel een formule op voor het aantal vlinders van deze soort als functie van t (in jaren).

c Met hoeveel procent neemt het aantal vlinders per jaar af?

d Hoeveel bedraagt de halveringstijd voor het aantal vlinders van deze soort?

e Bereken na hoeveel jaar het aantal vlinders voor het eerst minder dan 1000 zal zijn.

2.3 Exponenten en machten

Inleiding

Je hebt in het kader van exponentiële groei allerlei rekenregels en eigenschappen van machten en hun exponenten opgebouwd. Deze eigenschappen van exponenten en machten zul je veel moeten toepassen. Daarom moet je die eigenschappen goed ‘in de vingers hebben’.
Hoog tijd voor algebraïsche vingeroefeningen...

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de rekenregels voor exponenten en machten;
- uitdrukkingen herschrijven zonder negatieve of gebroken exponenten;
- uitdrukkingen herschrijven als een macht van x;
- herleiden van formules tot de standaardvorm.

Voorkennis

- werken met negatieve en gebroken exponenten;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten.

Verkennen

Opgave V1

Bereken: $\dfrac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}}$.

Uitleg

Om $\dfrac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}}$ te kunnen berekenen, moet je de eigenschappen van machten goed beheersen. Je rekenmachine laat je namelijk (zeer waarschijnlijk) in de steek.

Ga na, dat: $\dfrac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}} = \dfrac{(19^{220})^{\frac{1}{4}}}{19^{54}} = \dfrac{19^{55}}{19^{54}} = 19$.

Bekijk stap voor stap welke eigenschappen er zijn gebruikt.

Opgave 1

Bekijk de berekening in de **Uitleg**.

a Welke eigenschap van machten is er in de eerste stap gebruikt voor het ‘wegwerken’ van de wortel?

b Welke eigenschap is er vervolgens gebruikt?

c En welke eigenschap als laatste?

Opgave 2

Bereken.

a $\dfrac{31^{25}\cdot\sqrt[3]{31^{30}}}{\left(31^{12}\right)^3}$

b $\dfrac{25^4\cdot\left(5^5\right)^9}{\sqrt[4]{5^{40}}\cdot 125^{14}}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor elk positief grondtal g en voor willekeurige reële getallen a en b gelden de volgende **eigenschappen van machten**:

- $g^0 = 1$
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$
- $g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g}$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{g^b} = \left(\sqrt[a]{g}\right)^b$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$
- $g^{a-b} = \frac{g^a}{g^b}$
- $\left(g^a\right)^b = g^{a\cdot b}$

Deze rekenregels gelden soms ook voor negatieve grondtallen g, maar hier moet je voorzichtig mee zijn. Kijk maar:

$(-1)^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = -1$

$(-1)^{\frac{2}{6}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{6}} = 1^{\frac{1}{6}} = 1$

$(-1)^{\frac{2}{6}} = \left((-1)^{\frac{1}{6}}\right)^2$ kan niet.

Voor één uitdrukking, drie verschillende uitkomsten!?

Om dit probleem op te lossen, zul je een extra voorwaarde moeten stellen en dat is dat de breuken in de macht niet verder vereenvoudigd kunnen worden.

Bij exponentiële functies mag je ervan uitgaan dat het grondtal g positief is.

Denk verder nog aan de eigenschap $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Voorbeeld 1

Je ziet enkele berekeningen met behulp van de eigenschappen van machten.

- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{3^1}\right)^{-4} = \left(3^{-1}\right)^{-4} = 3^4 = 81$
- $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$
- $16^{1,5} = 16^{1+\frac{1}{2}} = 16^1 \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 16 \cdot \sqrt{16} = 16 \cdot 4 = 64$
- $27^{-\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Opgave 3

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

a 3^{-2}

b $81^{\frac{1}{4}}$

c $8^{1\frac{2}{3}}$

d $2^{-3} \cdot 2^7$

e $\left(3^{-12}\right)^{\frac{1}{4}}$

f $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

Voorbeeld 2

Je ziet hoe je $2x^{-1\frac{1}{2}}$ kunt schrijven zonder negatieve en/of gebroken exponenten:

$$2x^{-1\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{2}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

Opgave 4

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a $2x^{2\frac{1}{3}}$

b $\frac{3x^{-1}}{2x}$

c $4x^{-\frac{3}{4}}$

d $2x^{\frac{1}{2}}$

Voorbeeld 3

Je kunt $3x\sqrt{x}$ schrijven in de vorm $a \cdot x^b$:

$3x\sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3x^{1\frac{1}{2}}$

Opgave 5

Schrijf in de vorm $a \cdot x^b$.

a $\frac{3}{2x}$

b $\frac{3}{2x\sqrt{x}}$

c $(4\sqrt[3]{x})^2$

d $2x\sqrt{x}$

e $\frac{2}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

f $3x^5 \cdot \left(2x^3\right)^2$

Voorbeeld 4

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5^{2x-1}$.
Schrijf deze functie in de standaardvorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Antwoord

Met de eigenschappen van machten vind je:

$f(x) = 0{,}5^{2x-1} = 0{,}5^{2x} \cdot 0{,}5^{-1} = \left(0{,}5^2\right)^x \cdot 2 = 2 \cdot 0{,}25^x$

Dit functievoorschrift is nu in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ en dit is een standaardvorm voor formules waarbij sprake is van exponentiële groei. Het begingetal is 2 en de groeifactor is 0,25.

Opgave 6

Gegeven is f door $f(x) = 12 \cdot 3^{-0{,}5x+1}$.

Laat zien dat dit een functie is van de vorm $y = b \cdot g^x$ en bereken b en g exact.

Verwerken

Opgave 7

Bereken zonder rekenmachine.

a $(2^3)^2$

b $2^3 \cdot 2^2$

c $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^8$

d $1000^{\frac{1}{3}}$

Opgave 8

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a $x^{-\frac{1}{2}}$

b $x^{\frac{3}{4}}$

c $3x^{-1,5}$

d $\frac{1}{2}x^{-2,75}$

Opgave 9

Schrijf in de vorm $a \cdot x^b$.

a $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

b $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[4]{x}}$

c $\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

d $(3x\sqrt{x})^3$

Opgave 10

Bereken.

a $\frac{17^{105}}{17^{22}} \cdot 17^{-85}$

b $\left(\frac{1}{2}\right)^{219} \cdot 8^{72}$

c $\left(\frac{3}{4}\right)^{231} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{230} \cdot 3^{233}$

d $\frac{7^{102}}{(49^{10})^5}$

e $\left(\frac{4}{9} \cdot \sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}}$

f $\frac{5^3 \cdot (3^5)^{15}}{25 \cdot \sqrt[3]{3^{225}}}$

Opgave 11

Schrijf in de vorm $a \cdot x^b$.

a $(2x^3)^4 \cdot -3x^5$

b $\frac{2x \cdot x^2}{x^4}$

c $\frac{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{9x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}}}$

d $\frac{\left(2x^{1\frac{1}{2}}\right)^3}{x\sqrt{x}}$

e $\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{x}$

f $\frac{12x^{1\frac{2}{5}}}{6x^{-\frac{3}{5}}} + 2x^2$

Opgave 12

Schrijf de volgende functievoorschriften in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

a $f(x) = 3 \cdot 2^{0,5x}$

b $f(x) = 0,5^{-x+2}$

c $f(x) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2x}$

d $f(x) = 7 \cdot 5^{2x+1} + 2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{4x}$

Toepassen

Opgave 13: Priemfactoren

Een getal is een priemgetal als het alleen deelbaar is door 1 en door zichzelf, maar niet door een ander getal.
De eerste priemgetallen zijn: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23...
Ieder geheel getal kun je schrijven als een product van priemgetallen. Dit noem je priemfactorontbinding.
Enkele voorbeelden: $14 = 2 \cdot 7$, $27 = 3^3$, $147 = 3 \cdot 7^2$ en $200 = 2^3 \cdot 5^2$.

a Ontbind de volgende getallen in priemfactoren: 26, 25, 144, 127, 202.

b Gebruik priemfactorontbinding en de eigenschappen van machten en exponenten om de volgende breuken te herleiden.

- $\frac{126^2 \cdot 3773}{\sqrt{81} \cdot 343 \cdot 693}$
- $\frac{5^{-2} \cdot 19600^{\frac{1}{2}}}{91}$
- $\frac{1080^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{5^{\frac{4}{3}}}}{1296^{\frac{1}{4}}}$

Testen

Opgave 14

Bereken.

a $3^{-5} \cdot 9^2$

b $2^{-10} \cdot \left(2^3\right)^5$

c $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

d $81^{-\frac{1}{4}}$

Opgave 15

Schrijf zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a $\dfrac{x^{\frac{1}{4}} \cdot x}{x^{1\frac{3}{4}}}$

b $\dfrac{x^{2} \cdot x^{-\frac{1}{5}}}{\sqrt{x}}$

Opgave 16

Schrijf in de vorm $b \cdot x^{a}$.

a $\dfrac{x^{2} \cdot 3x^{4}}{10x^{7}}$

b $\dfrac{2 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{6}}{8 \cdot \sqrt{x}}$

c $\dfrac{6x \cdot \sqrt[4]{x^{2}}}{4x^{3}}$

Opgave 17

Schrijf het functievoorschrift $f(x) = 12 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{2x+1}$ in de vorm $f(x) = b \cdot g^{x}$.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met machten met gebroken en/of negatieve exponenten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.4 Exponentiële functies

Inleiding

De formules die je typisch bij exponentiële groei tegenkomt zijn voorbeelden van exponentiële functies. Je gaat daarom nu dit type functies nader bestuderen. In plaats van 'groeifactor' zal nu vaak 'grondtal' worden gezegd, nog steeds is dit grondtal een positief getal.

Je leert in dit onderwerp

- wat een exponentiële functie is;
- de karakteristieken van exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen;
- opstellen van een exponentiële functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $f(x) = 6 \cdot 2^x$.

a Welke snijpunten heeft de grafiek van f met de assen?

b Heeft f extremen?

c Heeft de grafiek van f een asymptoot. Zo ja, geef de vergelijking van de asymptoot.

d Welke karakteristieken hebben functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$? En hoe hangen die af van de waarden van g?

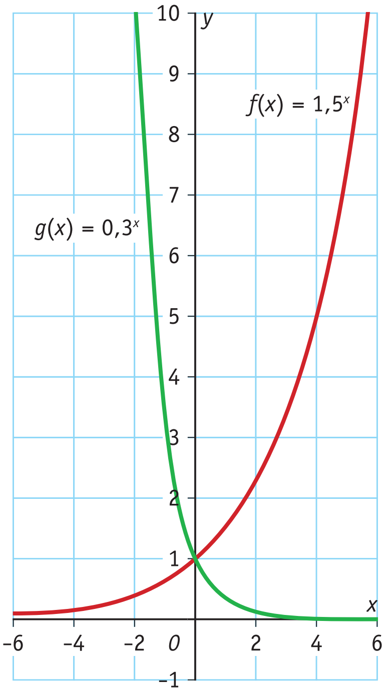
Uitleg

Bekijk de applet: Exponentiële functies

Functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ heten exponentiële functies. Je ziet dat voor positieve waarden van b geldt:

- als $g > 1$ is de grafiek voortdurend toenemend stijgend;
- als $g = 1$ is de grafiek constant;
- als $0 < g < 1$ is de grafiek voortdurend afnemend dalend;
- er zijn geen nulpunten, de x-as is een horizontale asymptoot;
- er zijn geen extremen.

Je moet dit natuurlijk zorgvuldiger beredeneren dan alleen op grond van een grafiek. Bedenk dat elk positief getal alleen maar groter kan worden als je vermenigvuldigt met een getal groter dan 1. Neemt x toe, dan wordt $f(x)$ dus groter. Neemt x af, dan wordt $f(x)$ kleiner, maar nooit negatief of 0. Vandaar dat er geen nulpunt is maar wel een asymptoot. Een vergelijkbare redenering geldt voor $0 < g < 1$. Bedenk zelf hoe dit zit voor negatieve b.



Figuur 4.1

Opgave 1

Gegeven is de exponentiële functie $f(x) = 0,5 \cdot 3^x$.

a Heeft f nulpunten?

b Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f?

c Wat voor soort stijging of daling heeft de grafiek van f?

Opgave 2

Welke eigenschappen heeft een functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ als $b < 0$? Maak ook nu weer verschil tussen $g > 1$, $g = 1$ en $0 < g < 1$.

Theorie en voorbeelden

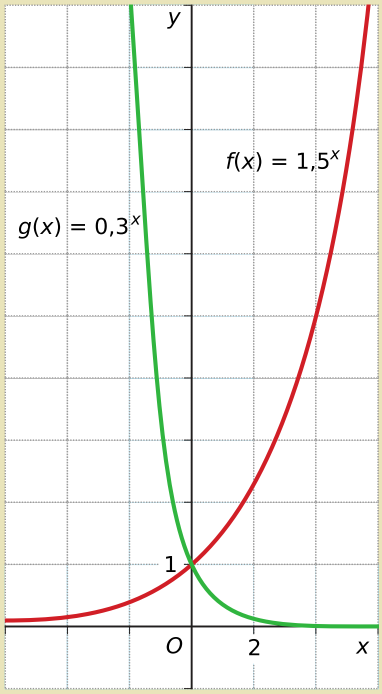
Om te onthouden

Bekijk de applet.

De grafiek van de **exponentiële functie** $f(x) = b \cdot g^x$ heeft de volgende karakteristieken:

- De grafiek snijdt de y-as in het punt $(0,b)$.
- Als $b > 0$ en $g > 1$, is de grafiek stijgend. Naar links (voor afnemende x) nadert de grafiek de x-as. Je kunt de functiewaarde zo dicht bij 0 krijgen als je wilt door x voldoende klein te nemen: $\lim_{x \to -\infty} b \cdot g^x = 0$.
  De x-as is de horizontale asymptoot.
- Als $b > 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek dalend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek de x-as: $\lim_{x \to \infty} b \cdot g^x = 0$.
  De x-as is de horizontale asymptoot.
- Als $b < 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek stijgend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek de x-as, de horizontale asymptoot.
- Als $b < 0$ en $g > 1$, is de grafiek dalend. Naar links (voor afnemende x) nadert de grafiek de x-as, de horizontale asymptoot.
- Als $g = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = b$.

Een **exponentiële vergelijking** zoals $b \cdot g^x = a$ los je op met de grafische rekenmachine. Bij **exponentiële ongelijkheden** gebruik je bovengenoemde eigenschappen.



Figuur 4.2

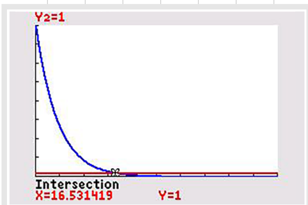
Voorbeeld 1

In het water van een meer is verontreiniging ontdekt; er wordt op een bepaald moment 40 mg/L van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Gelukkig wordt deze stof op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan worden gemeten met een nauwkeurigheid van gehele mg/L. Het blijkt dat de concentratie exponentieel vervalt met 20% per dag.
Na hoeveel dagen is deze stof uit het meer verdwenen?

Antwoord

De ‘groeifactor’ per dag is 0,80. Op $t = 0$ is er 40 mg/L gemeten. Voor de concentratie C (in mg/L) geldt dus: $C(t) = 40 \cdot 0{,}80^t$.

Omdat de groeifactor tussen 0 en 1 ligt is dit een dalende exponentiële functie. Echter, zo'n exponentiële functie komt nooit op 0 uit, hoe groot je t ook kiest. Er is sprake van een horizontale asymptoot met vergelijking $C = 0$. Zal de stof dan nooit verdwijnen? Theoretisch inderdaad niet, maar in de praktijk is de stof niet meer meetbaar als de concentratie onder de 1 mg/L zakt (dat volgt uit de nauwkeurigheid van meten). Om te bepalen na hoeveel dagen de stof is ‘verdwenen’, moet je daarom de ongelijkheid $40 \cdot 0{,}80^t < 1$ oplossen.
Dat doe je met de grafische rekenmachine. Je vindt: $t > 16{,}5$.



Figuur 4.3

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Leg uit waarom de groeifactor per dag $0{,}80$ is.

b Breng de grafiek van $C(t)$ in beeld op de grafische rekenmachine.

c Bereken op twee decimalen nauwkeurig vanaf welk tijdstip de concentratie niet meer meetbaar is, dus $C(t) < 1$.

Voorbeeld 2

In een stedelijk gebied liggen twee middelgrote steden: A met 750000 inwoners en B met 620000 inwoners op 1 januari 2013. In A groeide het aantal inwoners de laatste jaren gemiddeld met 2,5% per jaar, in B was dat 3,1%.
Na hoeveel jaren is B groter dan A als deze ontwikkeling zo doorgaat?

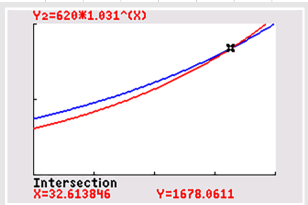
Antwoord

De groeifactor van het aantal inwoners van A is $1{,}025$, die van het aantal inwoners van B is $1{,}031$. Dat B harder groeit dan A is duidelijk. Als A het aantal inwoners van A en B dat van B voorstelt, beide in duizendtallen, en t is de tijd in jaren vanaf 1 januari 2013, dan zijn beide groeifuncties:

- $A(t) = 750 \cdot 1{,}025^t$
- $B(t) = 620 \cdot 1{,}031^t$

De bijbehorende grafieken maak je op de grafische rekenmachine en je bepaalt het snijpunt. Ga na dat je $t = 32{,}6138...$ vindt.

Conclusie: 33 jaar na 1 januari 2013 is B groter als je ervan uitgaat dat er steeds op 1 januari wordt geteld.



Figuur 4.4

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Waaraan zie je dat stad B harder groeit dan stad A?

b Ga na dat je voor het snijpunt van beide grafieken inderdaad $t = 32{,}6138...$ vindt.

c Een derde stad C is op 1 januari 2013 kleiner dan zowel A als B. Maar deze stad groeit met 8,3% per jaar. Op 1 januari 2021 heeft C evenveel inwoners als B. In welk jaar is C even groot als A?

Opgave 5

Los op met de grafische rekenmachine. Rond af op twee decimalen.

a $2 \cdot 8^x < 40$

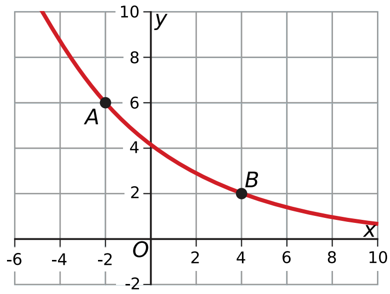
b $\frac{1}{3} \cdot 4^x \geq 124$

c $55 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 100$

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $A(-2{,}6)$ en $B(4{,}2)$. Stel het bijpassende functievoorschrift op. Rond b en g af op twee decimalen.



Figuur 4.5

Antwoord

Er zijn twee algebraïsche methoden om dit te doen:

Methode 1:
Eerst de groeifactor g bepalen.

Als x van -2 naar 4 gaat wordt $f(x)$ vermenigvuldigd met $\frac{1}{3}$.

Voor g geldt daarom $g^6 = \frac{1}{3}$ en dus $g = \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \approx 0{,}83$.

Nu kun je b berekenen. $f(4) = 2$.

$$\begin{aligned} b \cdot 0{,}83^4 &= 2 \\ b \cdot 0{,}4746 &= 2 \\ b &= \frac{2}{0{,}4746} \approx 4{,}21 \end{aligned}$$

Conclusie: $f(x) \approx 4{,}21 \cdot 0{,}83^x$.

Methode 2:
Uit $f(4) = 2$ volgt: $b \cdot g^4 = 2$. Uit $f(-2) = 6$ volgt: $b \cdot g^{-2} = 6$.

De onderste vergelijking geeft: $b = \frac{6}{g^{-2}} = 6g^2$.

En dus: $6 \cdot g^2 \cdot g^4 = 2$.
Hiermee bereken je g en dan ga je verder zoals bij de eerste methode.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** wordt uitgelegd hoe je het functievoorschrift opstelt van een exponentiële functie als twee punten van de grafiek zijn gegeven.

Stel het voorschrift op van de exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ waarvan de grafiek door de punten $(10{,}200)$ en $(14{,}350)$ gaat. Rond g af op twee decimalen en b op helen.

Verwerken

Opgave 7

Een saldo van € 4000,00 kan ontstaan zijn doordat ooit iemand € 1,00 op een spaarrekening zette tegen 5% rente.

a Hoeveel jaar eerder moet die € 1,00 dan op de spaarrekening gezet zijn? Een antwoord tot op een jaar nauwkeurig is voldoende.

b Kun je dit antwoord ook vinden door een geschikte grafiek van $S(t) = 4000 \cdot 1{,}05^t$ te tekenen?

c Stel je voor dat je de grafiek van S steeds verder naar links door trekt. Zal de grafiek ooit de horizontale as snijden? Licht je antwoord toe.

Opgave 8

Los de ongelijkheden op. Rond af op twee decimalen.

a $50 \cdot 1{,}5^x < 200$

b $25 \cdot 1{,}8^x > 250 \cdot 0{,}75^x$

Opgave 9

Op een afgelegen terrein werd op 6 januari 2014 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval er al tien jaar heeft gelegen. De straling blijkt 2000 Bq (becquerel) te zijn. Op 7 mei 2014 wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt nu ongeveer 1630 Bq te zijn. De straling neemt exponentieel af.

a Hoeveel Bq was de straling een jaar voor de vondst op 6 januari 2014? Rond af op gehelen.

b Hoe groot is de straling $2{,}5$ jaar na 6 januari 2014?

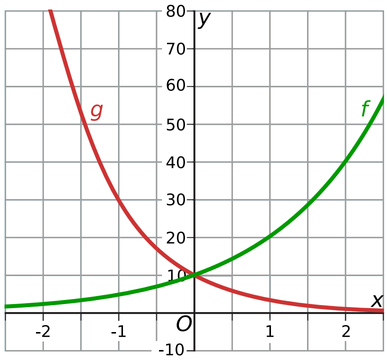
c Stel een functievoorschrift op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 6 januari 2014.

d Vanaf wanneer is de straling minder dan 1000 Bq?

Opgave 10

Bekijk de grafieken van twee exponentiële functies.

Geef van beide functies het functievoorschrift.



Figuur 4.6

Opgave 11

Een huurder betaalt een huur van € 650,00 en vindt de jaarlijkse huurverhoging van $5{,}5\%$ te veel. Hij herinnert zich nog dat exponentiële groei veel harder gaat dan lineaire groei. Hij stelt zijn verhuurder daarom voor om de huur elk jaar met € 50,00 te verhogen.

Na hoeveel jaar gaat dit de huurder voordeel opleveren?

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 12 \cdot 1{,}5^x$ en $g(x) = 25 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

a Welke lijn is de asymptoot van de grafiek f en welke van de grafiek g?

b Los $f(x) < g(x)$ op . Rond af op twee decimalen.

c De grafiek van g snijdt de y-as in punt A en punt B heeft de coördinaten $(3, f(3))$.

Bereken op één decimaal nauwkeurig de lengte van lijnstuk AB.

d De grafiek van $h(x) = b \cdot a^x$ snijdt de grafiek van f in de y-as en de x-coördinaat van het snijpunt met de grafiek van g is 2. Bereken a en b. Rond a af op drie decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 13: Waterverontreiniging

In het water van een meer is verontreiniging ontdekt. Er wordt op een bepaald moment 40 mg/L (milligram per liter) van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Gelukkig wordt deze stof op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan worden gemeten met een nauwkeurigheid van gehele mg/L. Het blijkt dat de concentratie exponentieel vervalt met 20% per dag.
Als de concentratie onder de 1 mg/L komt, mag je zeggen dat de stof verdwenen is. Wanneer is dat het geval? Rond af op uren nauwkeurig.

Opgave 14: De wet van Moore

Het Amerikaanse bedrijf Intel is een zeer grote producent van computerchips. Gordon Moore was in 1968 één van de oprichters van het bedrijf. Deze opgave gaat over het aantal transistoren in een computerchip. (Een transistor is een elektronisch onderdeel van een chip.) In 1965 deed Moore daar een voorspelling over: Het aantal transistoren in een computerchip zal tussen 1965 en 1975 exponentieel groeien. Moore heeft meer dan gelijk gekregen: de voorspelling is zelfs tot het jaar 2010 uitgekomen! Zijn voorspelling is men de Wet van Moore gaan noemen. In de tabel zie je hoeveel transistoren er in de chips van Intel zitten. Ook zie je in welk jaar die chips op de markt zijn gebracht.

introductiejaar	naam chip	aantal transistoren
1971	4004	2250
1982	286	120000
1993	Pentium I	3100000
2000	Pentium IV	42000000
2014	Ivy Bridge	4,31 miljard

Tabel 4.1

In de tabel zie je dat het aantal transistoren tussen 1971 en 1982 met 117750 toeneemt.

a Stel dat het aantal transistoren in de jaren daarna lineair toe zou nemen met 117750 per jaar. In welk jaar zou dan het aantal van 3100000 transistoren per chip zijn bereikt? Licht je antwoord toe.

b In werkelijkheid is de toename dus exponentieel. Zo is in de periode van 1971 tot 2000 het aantal transistoren per chip toegenomen van 2250 tot 42 miljoen.

Bereken hiermee de groeifactor per jaar in vier decimalen nauwkeurig.

De Wet van Moore in formulevorm is: $A = 2250 \cdot 1{,}404^t$. Hierin is A het aantal transistoren per chip en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1971. In de Ivy Bridge chip zitten volgens de tabel $4{,}31$ miljard transistoren. Dat aantal transistoren wijkt af van de voorspelling volgens de Wet van Moore.

c Bereken hoeveel procent dit aantal afwijkt van de voorspelling volgens de formule van de Wet van Moore.

d Met behulp van de formule kun je een berekening maken wanneer er 10 miljard transistoren in een computerchip zitten. Bereken in welk jaar dit volgens deze formule het geval is.

(bron: examen wiskunde A havo in 2005, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 15

Een bepaalde hoeveelheid H groeit vanaf $t = 0$ volgens $H(t) = 200 \cdot 1{,}03^t$.

a Hoe zie je aan het functievoorschrift dat er echt van toename sprake is?

b Vanaf welke waarde van t (in drie decimalen nauwkeurig) is de hoeveelheid 200% groter geworden dan op $t = 0$?

c Neem aan dat ook voor $t = 0$ deze hoeveelheid met 3% per tijdseenheid groeide. Voor welke waarden van t is de hoeveelheid kleiner dan $0{,}01$?

Opgave 16

Iemand betaalt op 1 januari 2010 een huur van € 850,00 per maand. Jaarlijks wordt in januari zijn huur met $5{,}5\%$ verhoogd.

a Stel het functievoorschrift op voor de huur per maand $H(t)$ afhankelijk van de tijd t in jaren na 2010.

b Vanaf welke datum is de huur hoger dan € 1000,00 per maand?

Opgave 17

De grafiek van een exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ gaat door de punten $(2{,}80)$ en $(8{,}200)$.

Stel een bijpassend functievoorschrift op.

2.5 Meer exponentiële functies

Inleiding

De basisfunctie van alle exponentiële functies is $f(x) = g^x$ met $g > 0$. Alle andere exponentiële functies kunnen uit f ontstaan door transformatie.
Ze hebben allemaal de vorm $y = b \cdot g^x + d$.
Je zult zien dat deze exponentiële functies wel degelijk nulpunten kunnen hebben...

Je leert in dit onderwerp

- werken met transformaties van de functie $f(x) = g^x$ met $g > 0$;
- de karakteristieken van deze exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met deze exponentiële functies oplossen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

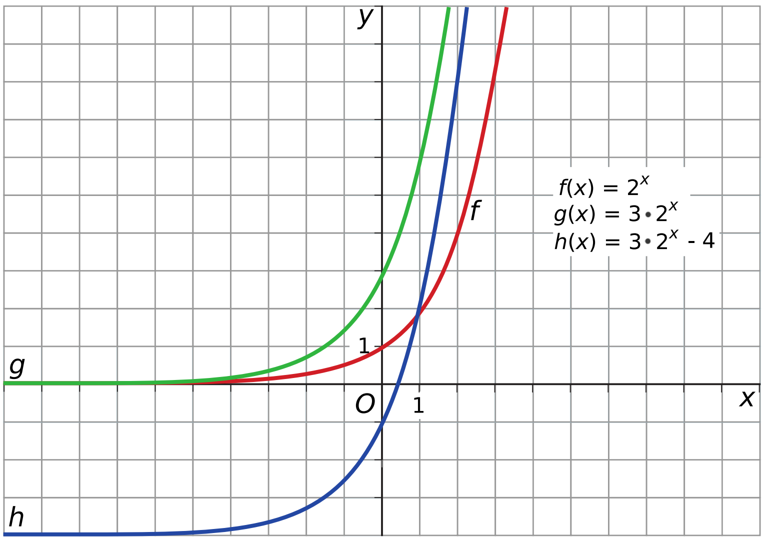
Laat zien dat de volgende functies kunnen worden geschreven in de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

a $y_1 = 1 - 3 \cdot 0{,}5^x$

b $y_2 = -3 \cdot 0{,}5^{2x} - 4$

Uitleg

Bekijk de applet: Exponentiële functies



Figuur 5.1

De standaardfunctie van alle exponentiële functies is $y = g^x$ met $g > 0$. Alle functies die hieruit door transformatie kunnen ontstaan hebben de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$:

- $f(x) = 3 \cdot 2^x$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = 0$ te kiezen. De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door ten opzichte van de x-as met 3 te vermenigvuldigen.
- $f(x) = 3 \cdot 2^x - 4$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = -4$ te kiezen. De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door ten opzichte van de x-as met 3 te vermenigvuldigen en vervolgens de grafiek -4 eenheden ten opzichte van de x-as te verschuiven (een translatie van -4 ten opzichte van de x-as dus).

Een functie als $f(x) = 3 \cdot 2^{2x-1} - 4$ herleid je tot $f(x) = 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-1} - 4 = 1{,}5 \cdot 2^{2x} - 4 = 1{,}5 \cdot \left(2^2\right)^x - 4 = 1{,}5 \cdot 4^x - 4$. De grafiek ontstaat door $b = 1{,}5$, $g = 4$ en $d = -4$ te kiezen. En dus door die van $y = 4^x$ ten opzichte van de x-as met $1{,}5$ te vermenigvuldigen en vervolgens een translatie ten opzichte van de x-as van -4 eenheden uit te voeren.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x + d$ in beeld kunt brengen.

a Neem $b = 3$, $g = 2$ en $d = 1$. Welk functievoorschrift $f_1(x)$ krijg je? Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f_1 uit die van $y = 2^x$?

b Neem $b = 3$, $g = \frac{1}{2}$ en $d = -1$. Welk functievoorschrift $f_2(x)$ krijg je? Uit welke basisfunctie kan de grafiek van f_2 door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?

c Neem $b = -10$, $g = 1{,}5$ en $d = 100$. Welk functievoorschrift $f_3(x)$ krijg je? Bij welke vensterinstellingen krijg je alle karakteristieken van de grafiek van f_3 goed in beeld?

Opgave 2

Bekijk de functie met voorschrift $f(x) = 6 \cdot 2^{-2x-1} - 12$.

a Herleid het functievoorschrift tot het de vorm $y = b \cdot g^x + d$ heeft.

b Uit de grafiek van welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformaties ontstaan?

c Welke transformaties moet je dan toepassen?

d Bereken met behulp van de grafische rekenmachine het nulpunt van de grafiek van f.

e Dit nulpunt had je ook algebraïsch kunnen vinden. Laat zien hoe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Exponentiële functies

Elke getransformeerde **exponentiële functie** heeft een functievoorschrift dat kan worden geschreven in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$. Hierbij moet je soms gebruikmaken van de rekenregels voor machten. De grafiek van f is te tekenen door op die van de standaardfunctie $y = g^x$ de volgende transformaties toe te passen:

- vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor b;
- translatie ten opzichte van de x-as met d eenheden.

De grafiek van f heeft daarom als **horizontale asymptoot** de lijn $y = d$. Het eventuele nulpunt vind je door $b \cdot g^x + d = 0$ op te lossen. Vaak heb je daarvoor de rekenmachine nodig.

Voorbeeld 1

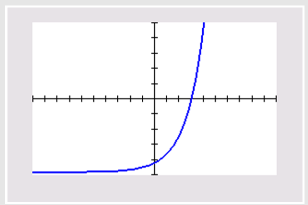
Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 60 \cdot 2^x - 480$.
Breng de grafiek in beeld met de grafische rekenmachine en bepaal de vergelijking van de asymptoot. Los ook op: $f(x) < 0$.

Antwoord

De grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = 2^x$ door:

- vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 60;
- translatie ten opzichte van de x-as met -480 eenheden.

De horizontale asymptoot is daarom $y = -480$.
Bij een venster van $[-10,10] \times [-500,500]$ komt de grafiek goed in beeld.



Figuur 5.2

$f(x) = 0$ als $60 \cdot 2^x - 480 = 0$, dus als $60 \cdot 2^x = 480$. Als je beide zijden van deze vergelijking door 60 deelt, vind je $2^x = 8$. Omdat $8 = 2^3$ is, kun je de oplossing zonder rekenmachine vinden: $x = 3$.

Uit de grafiek volgt nu de oplossing van de ongelijkheid: $x < 3$.

Opgave 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5$.

a Hoe kun je de grafiek van h krijgen door transformatie van de grafiek van f?

b Welke lijn is asymptoot van de grafiek van h?

c Geef D_h en B_h.

d Los op $h(x) < 0$.

e Vereenvoudig de vergelijking $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 50 = 1000$ en los op in drie decimalen nauwkeurig.

f Los op in drie decimalen nauwkeurig: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 50 > 1000$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie g met voorschrift $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$.
Laat zien hoe deze functie door transformatie kan ontstaan uit een basisfunctie van de vorm $y = g^x$. Los ook algebraïsch op: $g(x) > 0$.

Antwoord

Eerst herleiden:

$g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = -2 \cdot 2^{-x} \cdot 2^1 + 16 = -4 \cdot (2^{-1})^x + 16 = -4 \cdot 0{,}5^x + 16$

De grafiek van de functie $g(x) = -4 \cdot 0{,}5^x + 16$ kan ontstaan door transformatie van $y = 0{,}5^x$:

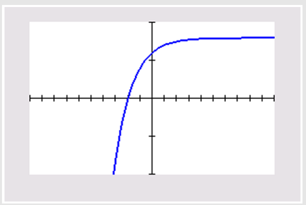
- vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met -4;
- verschuiving ten opzichte van de x-as van 16 eenheden.

Voor het oplossen van $g(x) = 0$ is het oorspronkelijke voorschrift handiger: $16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = 0$ geeft $16 = 2 \cdot 2^{-x+1}$.

Nu is $16 = 2^4$ en $2 = 2^1$, dus staat hier: $2^4 = 2^{-x+2}$.

Dit betekent dat: $4 = -x + 2$ zodat $x = -2$.

Uit de grafiek volgt de oplossing van de ongelijkheid: $x > -2$.



Figuur 5.3

Opgave 4

De grafiek van de functie $f(x) = 2 \cdot 2^{x+1} - 1$ kun je door transformatie uit de grafiek van de functie $g(x) = 2^x$ laten ontstaan.

a Je kunt dit doen door drie transformaties toe te passen. Welke drie? Schrijf ze in de juiste volgorde op.

b Herleid het functievoorschrift van f tot $f(x) = 4 \cdot 2^x - 1$.

c Beschrijf hoe je door twee transformaties de grafiek van f kunt laten ontstaan uit die van g.

d Het punt $(0,1)$ op de grafiek van g wordt na de transformaties een punt op de grafiek van f. Bereken de coördinaten van dit punt.

e Schrijf de horizontale asymptoot en het domein en het bereik van f op.

Opgave 5

Je hebt allerlei technieken geleerd om vergelijkingen algebraïsch op te lossen. In dit hoofdstuk moet je vaak ook werken met de rekenregels voor machten. Hier zie je daarvan een voorbeeld.

$$\begin{aligned}
4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-x} - 2\sqrt{2} &= 6\sqrt{2} \\
4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-x} &= 8\sqrt{2} \\
\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-x} &= 2\sqrt{2} \\
(2^{-1})^{1-x} &= 2^{1\frac{1}{2}} \\
2^{x-1} &= 2^{1\frac{1}{2}} \\
x - 1 &= 1\tfrac{1}{2} \\
x &= 2\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

a Leg stap voor stap uit wat er gebeurt.

b Los zelf de volgende vergelijking algebraïsch op: $4 \cdot 3^x + 6 = 330$.

c Los algebraïsch op: $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 27\sqrt{6}$.

Opgave 6

Los de ongelijkheid $40 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 100 > 110$ op in drie decimalen nauwkeurig. Vereenvoudig de vergelijking eerst zover mogelijk en gebruik pas daarna als dat nodig is de grafische rekenmachine.

Voorbeeld 3

Een kop koffie komt uit een automaat. De koffie koelt af tot kamertemperatuur. De afkoeling gaat in het begin snel. Naarmate het temperatuurverschil tussen koffie en omgeving kleiner wordt, gaat de afkoeling trager. De temperatuur hangt af van de tijd waarin de koffie afkoelt.

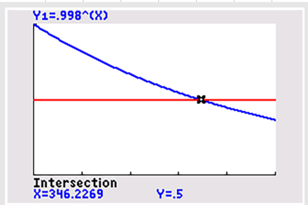
De functie $K(t) = 60 \cdot 0{,}998^t + 20$ beschrijft de temperatuur van de koffie in een omgeving van 20 °C. Hierin is t de tijd in seconden nadat de koffie uit de automaat komt.
De meeste mensen vinden koffie niet lekker als de temperatuur is gedaald tot beneden de 50 °C. Na hoeveel seconden is dat het geval?

Antwoord

Op $t = 0$ is de $K(0) = 80$ °C. De temperatuur daalt langzaam richting 20 °C.

De vergelijking $60 \cdot 0{,}998^t + 20 = 50$ kun je met de grafische rekenmachine oplossen; je kunt er ook eerst $0{,}998^t = 0{,}5$ van maken. Ga na dat je vindt: $t \approx 346$.

Conclusie: na ongeveer 346 seconden (5 minuten en 46 seconden) is de koffie voor de meeste mensen niet meer lekker.



Figuur 5.4

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je de functie $K(t) = 60 \cdot 0{,}998^t + 20$, waarin t de tijd in seconden is nadat de koffie uit de automaat komt en K de temperatuur in °C .

a Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de temperatuur daalt?

b Wat is de horizontale asymptoot van de grafiek van K en wat betekent dat?

c Na hoeveel seconden heeft de koffie een temperatuur van 70 °C?

Opgave 8

Een thermoskan wordt 's morgens om 8:00 uur gevuld met koffie van ongeveer 80 °C. De koffie in de thermoskan koelt af volgens de formule: $T(t) = 21 + 60 \cdot 0{,}83^t$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t het aantal uren na 8:00 uur.

a Ga ervan uit dat de koffie niet meer lekker is als de temperatuur beneden de 50 °C komt. Tot hoe laat is de koffie te drinken? Bereken dit tot op de minuut nauwkeurig.

b Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de koffie bij het vullen van de thermoskan een temperatuur had van 81 °C?

c Hoe kun je de grafiek van T uit die van $T = 0{,}83^t$ laten ontstaan door transformatie?

d Hoelang duurt het voor de koffie een temperatuur bereikt van 22 °C?

e Welke lijn is asymptoot van de grafiek van $T(t)$?

f De koffie staat in een woonkamer. Kun je aan het functievoorschrift van $T(t)$ zien wat de temperatuur is van de woonkamer?

Verwerken

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden op. Vereenvoudig eerst zover mogelijk en geef daarna de oplossing in twee decimalen nauwkeurig.

a $5^x = 10$

b $5^x \leq 10$

c $3 \cdot 5^x + 5 = 10$

d $3 \cdot 5^x + 5 > 10$

Opgave 10

Los algebraïsch op.

a $2^x = 2\sqrt{2}$

b $4^x = 8^{x+2}$

c $9^{2x} = \sqrt{3}$

d $2^{2x-1} = 32$

e $2^{\frac{1}{2}x+1} = 4\sqrt{2}$

Opgave 11

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $2 \cdot 10^x = 2000$

b $3 \cdot 2^x - 2 = 46$

c $6 \cdot (5^x + 5) = 180$

d $162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > 2$

e $7 + 16 \cdot 1{,}5^x \leq 43$

f $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 160$

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x-2} - 3$ en $g(x) = 4 \cdot 0{,}5^{x-3} - 1$.

a Herleid beide functievoorschriften tot de vorm $y = b \cdot g^t + d$. Hoe ontstaan de grafieken van f en g door transformatie uit grafieken van bijpassende standaardfuncties?

b Los algebraïsch op: $f(x) = -2\frac{7}{8}$. Gebruik je omgeschreven formule uit a.

c Los op: $g(x) > 1{,}5$. Rond het antwoord af op twee decimalen.

d Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $x \leq 4$?

e De lijn $y = p$ heeft wel een snijpunt met de grafiek van f, maar niet met de grafiek van g. Bereken p.

f De lijn $x = -1$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. Bereken de exacte lengte van lijnstuk AB.

g De lijn $y = 5$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D. Bereken de lengte van lijnstuk CD in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 13

Los algebraïsch op als dat mogelijk is. Geef anders een benadering met twee cijfers achter de komma.

a $4 \cdot 0{,}5^x - 1 < 0$

b $2 \cdot 2^{-x+1} - 1 > 0$

c $6 \cdot 0{,}25^x - 4 \geq 0{,}75$

d $3 \cdot 0{,}5^{2x-1} - 4 < -3{,}25$

e $3{,}5^{x+50} - 0{,}5 > 3$

f $-2^x + 1 \geq -7$

Opgave 14

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend. De formule $A(t) = 540 - 540 \cdot 0{,}95^t$ geeft de hoeveelheid $A(t)$ in mg van het medicijn die na t minuten in het bloed aanwezig is.

a Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van $A(t)$ stijgend is?

b Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $A(t)$.

c Na hoeveel minuten (in gehelen) is 75% van de maximale hoeveelheid medicijn in het bloed opgenomen?

Toepassen

Sommige vergelijkingen moet je op een bijzondere manier oplossen.

Stel je wilt de vergelijking $3^x + 3^{x+1} = 36$ oplossen.

Dan ga je eerst $3^x + 3^{x+1}$ in de vorm $a \cdot 3^x$ schrijven:

$3^x + 3^{x+1} = 3^x + 3 \cdot 3^x = 4 \cdot 3^x$

De vergelijking wordt daarmee $4 \cdot 3^x = 36$.

En nu is hij eenvoudig op te lossen. Ga na dat $x = 2$ de oplossing is.

Opgave 15

Los algebraïsch op.

a $2 \cdot 4^{x-1} + 4^x = 96$

b $5^{x-4} = 25^{3x-6}$

c $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2} = 4^{x-1}$

d $3^{x+2} - 9^{\frac{1}{2}x-1} = 2\frac{26}{27}$

Opgave 16

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $-4^{2(x+1)} - 2 \leq 2^{4x+4} - 10$

b $\frac{4}{9^{-2x}} = 324 \cdot 27^{\frac{1}{3}x^2}$

c $\frac{60}{12} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 5 \geq 5^{-x} + 25$

Testen

Opgave 17

Bekijk de volgende functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 3 \cdot 2^x - 7$.

a Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren om de grafiek van g te krijgen uit de grafiek van f.

b Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van g. Geef ook het domein en bereik.

c Los op: $g(x) \geq 100$.

Opgave 18

Gegeven is functie f met $f(x) = -1{,}5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 5$.

a Welke twee transformaties moet je uitvoeren om de grafiek van de f te krijgen uit de grafiek van $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

b Hoe kun je aan het functievoorschrift van f zien dat de grafiek stijgt?

c Welke lijn is asymptoot van de grafiek van f? Wat is het bereik van f?

d Bereken het snijpunt van de grafiek van f met de x-as. Rond af op twee decimalen.

e Los op: $f(x) \leq 0$. Geef je antwoord in twee decimalen.

Opgave 19

Los algebraïsch op.

a $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{18}$

b $5^{x-2} < \frac{1}{5}\sqrt{5}$

Opgave 20

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x - 2$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.

a Geef het bereik van de functies f en g.

b Los op: $g(x) \leq 5$. Rond het antwoord af op twee decimalen.

c Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ geen oplossingen?

d De lijn $x = -3$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. Bereken de lengte van lijnstuk AB.

e De lijn $y = 7$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D. Bereken de lengte van lijnstuk CD in twee decimalen nauwkeurig.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Exponentiële functies**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- exponentiële groei en groeifactor — macht, grondtal, exponent
- negatieve exponenten — gebroken exponenten
- eigenschappen van machten
- exponentiële functie — exponentiële vergelijking/ongelijkheid
- transformaties — horizontale asymptoot van een exponentiële functie

Activiteitenlijst

- bij exponentiële groei de groeifactor bepalen en een formule maken — rekenregels voor machten gebruiken
- eigenschappen van machten met negatieve en/of gebroken exponenten gebruiken — grafieken maken bij exponentiële groei
- werken met de eigenschappen en rekenregels van machten
- de karakteristieken van een exponentiële functie bepalen — exponentiële vergelijkingen/ongelijkheden oplossen
- werken met de algemene gedaante van elke exponentiële functie

Achtergronden

Figuur 6.1

Thomas Robert Malthus (1766—1834) was een Brits geestelijke die zich veel bezighield met demografische en economische vraagstukken. In 1798 publiceerde hij ‘An Essay on the Principle of Population’, waarin hij aannam dat de totale bevolking exponentieel groeit, terwijl de middelen van bestaan lineair toenemen. Dit leidt tot de beschikbaarheid van steeds minder grond (voedsel/energie) per mens en dus een daling in welvaart, de ‘Malthusiaanse catastrofe’. Op grond hiervan meende hij dat de totale bevolking een maximale omvang zou hebben, het ‘Malthusiaans plafond’. Hij veronderstelde dat de mensheid deze maximale omvang binnen afzienbare tijd zou bereiken en dat alleen middels hongersnood, epidemieën en oorlogen het aantal mensen binnen de grenzen van het Malthusiaans plafond zou kunnen blijven. Malthus geldt als één der eerste economen.

In de tweede helft van de negentiende eeuw werd deze opinie fel bestreden, onder andere door Karl Marx en Friedrich Engels die in Malthus' catastrofe slechts een gevolg van de kapitalistische samenleving zagen. Ook economen als John Maynard Smith en Ronald Fisher trokken Malthus' pessimistische kijk in twijfel. In de twintigste eeuw heeft niets van een Malthusiaanse catastrofe plaatsgevonden. Wel verscheen in 1972 het ‘De grenzen aan de groei'. Dit is een geschrift van de **Club van Rome** die als doelstelling heeft de wereld bekend te maken met problemen als bevolkingsgroei, voedselproductie, industrialisatie, uitputting natuurlijke hulpbronnen, vervuiling. Ook zij maakten veel gebruik van exponentiële groeimodellen.

Testen

Opgave 1

Los algebraïsch op als dat mogelijk is. Gebruik anders de grafische rekenmachine. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $-35 + 5 \cdot 3^{x-5} = 100$

b $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 50 < 25$

c $500 \cdot 1{,}5^{x} > 300 \cdot 2^{x}$

d $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} \leq 4^{-x-2} \cdot 2^{4}$

Opgave 2

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruik maakt van een vliegveld groeit enkele jaren met 2% per jaar. In 2018 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?

b Geef een formule voor het aantal passagiers p op tijdstip t in jaren na 2018.

c Als de groei zo doorgaat, hoelang duurt het dan voor het huidige aantal passagiers verdubbeld is?

d Hoeveel passagiers waren er in 2015?

e Hoe groot is de groeifactor per tien jaar? Geef je antwoord in vier decimalen.

f Hoe groot is de groeifactor per kwartaal? Geef je antwoord in vijf decimalen.

Opgave 3

Een doorzichtige kunststof absorbeert een deel van het licht dat er doorheen valt. Elke laag van 1 cm absorbeert 19,8% van het licht.

a Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per cm kunststof?

b Hoeveel procent van het licht wordt geabsorbeerd door een laag van 2,5 cm dikte?

c Hoe dik moet de laag kunststof zijn om 90% van het licht te absorberen?

d Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per mm kunststof? Rond af op drie decimalen.

Opgave 4

Iemand haalt een fles melk uit de koelkast en zet er een fles cola voor in de plaats. De temperatuur van de fles melk neemt hierdoor langzaam toe tot kamertemperatuur, de temperatuur van de fles cola neemt juist af tot koelkasttemperatuur. De formules voor de temperaturen T_1 en T_2 (in graden Celsius) in de flessen, afhankelijk van de tijd t (in minuten), zijn: $T_1 = 19 - 13 \cdot 0{,}78^t$ en $T_2 = 6 + 13 \cdot 0{,}78^t$.

a Plot de grafieken van beide formules. Laat t hierbij lopen van 0 tot 25.

b Welke van de formules hoort bij de fles melk en welke bij de fles cola? Licht je antwoord toe.

c Welke asymptoot heeft de grafiek van de temperatuur van de fles cola?

d Welke asymptoot heeft de grafiek van de temperatuur van de fles melk?

e Hoeveel bedraagt de kamertemperatuur?

f Na hoeveel minuten is de cola kouder dan de melk? Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = -128 \cdot 4^{2x-3} + 12$.

a Schrijf de functie in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

b Uit de grafiek van welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?

c Geef het domein, bereik en de asymptoot van f.

d De grafiek van exponentiële functie $h(x) = b \cdot g^x$ snijdt de grafiek van f in $A(-1, y)$ en gaat door het punt $(2{,}5)$. Stel de formule op van h. Rond g af op drie decimalen en b op één decimaal nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 6: Radioactief verval

Een natuurkundige toepassing van exponentiële functies vind je bij radioactiviteit.

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven. Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4{,}468 \cdot 10^9$ jaar. Het verval van U-238 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t. Begin je met 1 kg U-238, dan heb je na $4{,}468$ miljard jaar nog $0,5$ kg over (plus $0,5$ kg Th-234). Je kunt dus het beste de tijd in miljarden jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer $0,8563$. En $A = 1000 \cdot 0,8563^t$ gram.

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2001 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.

c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.

d Als je de halveringstijd weet kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot 750 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

Opgave 7: Wereldbevolking

Omstreeks 1970 bedroeg de wereldbevolking ongeveer $3,6$ miljard en zij groeide per jaar met $2,1\%$.

a Hoe groot was toen de groeifactor?

b Als je ervan uitgaat dat die groeifactor door de jaren heen gelijk is gebleven, hoeveel mensen leefden er dan in 1971, 1988, 1900 en het jaar 0?

c B is de bevolking na t jaren, gerekend vanaf 1970 ($t = 0$). Geef B als functie van t door een formule.

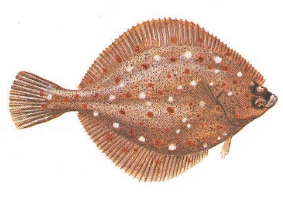
d Je hebt nu een model van de bevolkingsgroei gemaakt, gebaseerd op gegevens uit 1970. Volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 is in 2050 het aantal mensen op aarde nog geen 9 miljard. Klopt dat met de formule die je bij b hebt gevonden?

e Waaraan kun je zien dat de bevolkingsgroei dan niet meer exponentieel loopt? Kun je daar redenen voor geven?

Opgave 8: Vissen in het Grevelingenmeer

De afsluiting van de Grevelingen had voor de visstand grote gevolgen. Om die gevolgen in kaart te brengen werden wiskundige modellen ontwikkeld. Onder andere voor de ontwikkeling van de scholpopulatie. Hiervoor werd o.a. het volgende model opgesteld:

- jaarlijks komen er 5 miljoen larven het Grevelingenmeer binnen;
- jaarlijks komen 200.000 volwassen schollen (één jaar of ouder) het Grevelingenmeer binnen;
- 90% van die larven sterven als jonge vissen (dus voordat ze 1 jaar zijn);
- 33% van de volwassen vissen sterven jaarlijks.



Figuur 6.2

Op grond hiervan kun je een tabel maken van het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer:

tijd t in jaar	0	1	2	3	4	5
aantal volwassen schollen N	200.000	833.333	1.255.556	1.537.037	1.724.691	1.849.794

Tabel 6.1

Zet je deze tabel voort, dan zul je zien dat het aantal volwassen schollen in dit model naar 2100000 nadert. Bij de tabel past de formule: $N(t) = 2100000 - 1900000 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$. Dat kun je zelf afleiden...

a Laat zien hoe uit het model de gegeven tabel kan worden afgeleid.

b Zet die tabel voort en laat zien dat het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer volgens dit model de $2.100.000$ gaat benaderen.

c Leid nu zelf de gegeven groeifunctie af.

d Waarom wordt in dit geval wel gesproken van geremde groei?

Examen

Opgave 9: Ureumgehalte

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 gram toeneemt. Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo ververst worden dat de wettelijke norm van 2 gram ureum per m^3 water niet overschreden wordt. In een model gaan we er van uit dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken. Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 m^3 ververst wordt (dus 3% van het totaal). We beginnen de eerste dag met 0 gram ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 gram ureum in het water. Na verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 gram ureum over.

a Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 gram ureum in het water zit.

b In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

c Stel U is de hoeveelheid ureum aan het begin van een zekere dag. Toon aan dat de hoeveelheid ureum aan het begin van de daaropvolgende dag gelijk is aan $0{,}8U + 400$.

We starten in het model weer met 0 gram ureum aan het begin van de eerste dag. De hoeveelheid ureum in gram (U_n) aan het begin van de n-de dag kan rechtstreeks berekend worden met de formule: $U_n = 2000 - 2500 \cdot 0{,}8^n$.

d Leg uit met behulp van deze formule dat aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm voldaan wordt.

e In de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden. Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(bron: examen wiskunde A havo 1991, eerste tijdvak)

Opgave 10: Sparen, sparen en sparen

Nederland is een echt spaarland. Jaarlijks worden er miljarden euro's gestort op spaarrekeningen. Er zijn verschillende soorten spaarrekeningen. In deze opgave bekijken we er drie: de groeirekening, de depositorekening en de renteklimrekening. We storten op elk van de drie spaarrekeningen een bedrag van € 10000 dat voor een periode van 10 jaar op de spaarrekening blijft staan.

Groeirekening De groeirekening is de bekendste soort. Het rentepercentage op deze rekening is $3{,}5$% per jaar. Het is een 'rente op rente'-rekening: na een jaar wordt de rente bijgeschreven op de rekening, zodat het volgende jaar rente wordt berekend over een hoger bedrag G. Na elk jaar wordt het bedrag op de rekening dus hoger. Het bedrag G dat na t jaar op de groeirekening staat kun je berekenen met de formule: $G = 10000 \cdot 1{,}035^t$. Het bedrag op de groeirekening is na 10 jaar nog niet verdubbeld. Maar als je de rekening nog langer laat doorlopen, komt er een jaar dat het bedrag op de rekening voor het eerst twee keer zo hoog is. Het bedrag is zelfs nog hoger dan € 20000.

a Bereken na hoeveel jaar dat is.

Depositorekening De depositorekening is een spaarrekening met een rentepercentage van $4{,}0$% per jaar. De rente over elk jaar is € 400. Dat bedrag wordt steeds bijgeschreven op een aparte betaalrekening. Op de betaalrekening krijg je geen rente, zodat het bedrag op de betaalrekening lineair toeneemt. De rente van $4{,}0$% lijkt gunstiger dan een rente van $3{,}5$%. Toch heb je na tien jaar bij de depositorekening in totaal minder rente gekregen dan bij de groeirekening. Een bank introduceert een nieuwe depositorekening die in tien jaar evenveel rente oplevert als de groeirekening.

b Bereken het rentepercentage per jaar van die nieuwe depositorekening. Geef je antwoord in één decimaal.

Renteklimrekening De renteklimrekening is een soort depositorekening. Ook hier wordt jaarlijks de rente bijgeschreven op een aparte betaalrekening die geen rente oplevert. Bij de renteklimrekening wordt het rentepercentage elk jaar hoger. In deze tabel kun je aflezen welke bedragen er na t jaar sparen op de renteklimrekening R en op de betaalrekening B staan.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
B	0	300	615	950	1310	1700	2130	2615	3165	3775	4475

Tabel 6.2

In de volgende tabel staan de rentepercentages voor het t-de jaar.

t-de jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rentepercentage	3,00	3,15	3,35	3,60	3,90	4,30				

Tabel 6.3

c Bereken het rentepercentage voor het zevende jaar. Geef je antwoord in twee decimalen.

d De renteklimrekening geeft in tien jaar € 4475 rente. Wat dit betreft is het de beste van de drie spaarrekeningen. De groeirekening is de op één na beste. Bereken het rentepercentage per jaar dat een groeirekening moet hebben om in 10 jaar € 4475 rente te geven. Geef je antwoord in twee decimalen.

(bron: examen wiskunde A havo 2004, tweede tijdvak)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

www.math4all.nl