Wiskunde B

4 VWO

Katern 1

ConTeXt College

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

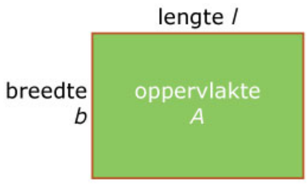
1

Werken met formules

1.1 Formules gebruiken

Inleiding

'De oppervlakte van een rechthoek kun je uitrekenen door de lengte en de breedte met elkaar te vermenigvuldigen.' Dat is een zin die je kunt inkorten tot $A = l \cdot b$, als je de oppervlakte van de rechthoek voorstelt door de letter A, de lengte door de letter l en de breedte door de letter b. Zo'n ingekorte zin heet een formule. Formules zijn overzichtelijker dan lange zinnen, maar je moet wel goed onthouden (of opschrijven) wat al die letters voorstellen. En bij toepassingen moet je ook om de eenheden denken: als lengte en breedte in meter zijn, dan is de oppervlakte in vierkante meter.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- verschillende soorten formules herkennen: formules die een verband weergeven tussen variabelen, formules in de vorm van een vergelijking die je kunt oplossen en formules als rekenregel;
- bij een formule die het verband tussen twee variabelen beschrijft de grafiek tekenen;
- onderscheid maken tussen grootheden en eenheden.

Voorkennis

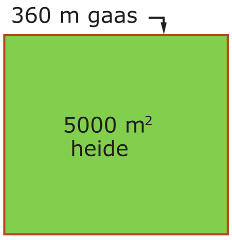
- werken met variabelen (die 'letters'als naam hebben);
- tabellen maken en grafieken tekenen.

Verkennen

Opgave V1

Iemand wil een stuk hei afgrenzen om er schapen te laten grazen met 360 meter gaas. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,5 hectare (dus 5000 m^2).

De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk hei.



Figuur 1.2

a Om welke variabele grootheden gaat het in dit probleem?

b Stel bij dit probleem passende formules op.

c Los het verder op, bijvoorbeeld met behulp van tabellen, grafieken of vergelijkingen.

Uitleg

‘De oppervlakte van een rechthoek kun je uitrekenen door de lengte en de breedte met elkaar te vermenigvuldigen.’ Deze zin kun je inkorten tot $A = l \cdot b$, als je de oppervlakte van de rechthoek voorstelt door de variabele A, de lengte door de variabele l en de breedte door de variabele b. Zo'n ingekorte zin heet een ‘formule’. Formules zijn overzichtelijker dan zinnen, maar je moet onthouden wat de variabelen voorstellen.

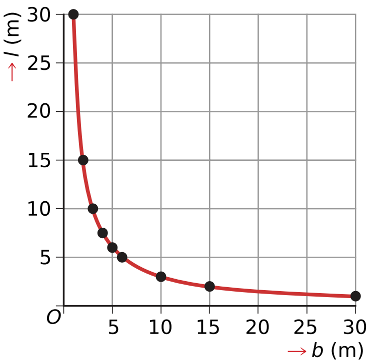
Lengte en breedte zijn grootheden waarbij een eenheid (bijvoorbeeld centimeter) hoort.

In formules schrijf je alleen variabelen, geen eenheden. Bij toepassingen moet je wel zorgen dat de eenheden kloppen: als lengte en breedte in meter zijn, dan is de oppervlakte in vierkante meter.
In veel formules komt een ‘isgelijkteken’ voor.

In de formule $A = l \cdot b$ komen drie variabelen voor. Je moet van twee daarvan de waarde weten om de derde te kunnen uitrekenen. Weet je bijvoorbeeld dat $A = 30$ m^2 dan krijg je $30 = l \cdot b$, ofwel $l = \frac{30}{b}$.
Bij dit verband tussen l en b kun je een tabel en een grafiek maken:

l	1	2	3	4	5	6	10	15	30
b	30	15	10	7,5	6	5	3	2	1

Tabel 1.1



Figuur 1.3

Neem je in dit verband voor $l = 15$ krijg je de vergelijking $\frac{30}{b} = 15$.
In de tabel zie je dat een oplossing voor deze vergelijking $b = 2$ is.

Opgave 1

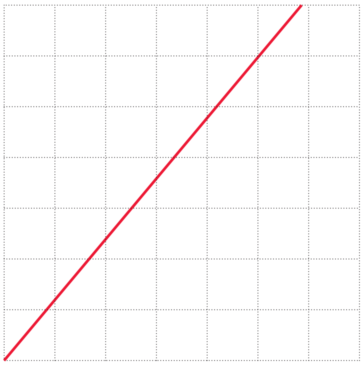
Gebruik de formule $A = l \cdot b$ uit de **Uitleg**.

a Stel dat gegeven is: $l = 6$ meter. Vul dit in de formule in. Geef de formule die hierdoor ontstaat.

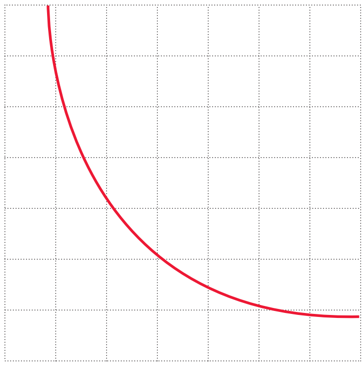
b Stel dat gegeven is: $A = 12$ m^2. Schrijf op wat de formule dan wordt.

c Van een rechthoek is bekend dat het een vierkant is. Schrijf de formule op die voor deze rechthoek het verband tussen oppervlakte en lengte beschrijft.

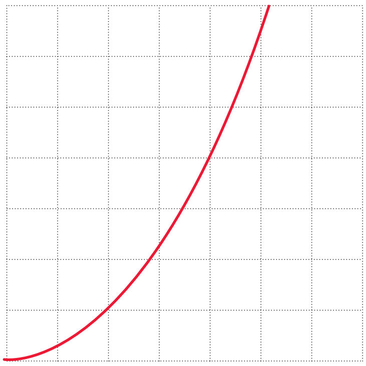
De grafieken horen bij de formules uit de vragen a, b of c.



grafiek I



grafiek II



grafiek III

Figuur 1.4

d Neem de grafieken over. Schrijf bij elke grafiek de juiste formule, zet de juiste variabelen bij de assen en maak er een goede schaalverdeling bij.

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je dat er verschillende soorten formules bestaan. Zo is $A = l \cdot b$ een verband tussen drie variabelen, $A = 6 \cdot b$ een verband tussen twee variabelen en $30 = 6 \cdot b$ een vergelijking met één variabele.

Ga in deze opgave uit van de situatie waarin de lengte l altijd 2 groter is dan de breedte b, dus $l = b + 2$.

a Welke formule geeft nu het verband tussen de oppervlakte A en de breedte b weer?

b Maak bij deze formule een tabel en een grafiek.

c Neem aan dat $A = 15$ m^2. Welke vergelijking krijg je dan?

d Welke oplossing heeft die vergelijking?

e Bekijk de formule $b(b+2) = b^2 + 2b$.
Is deze formule een vergelijking? En waarom?

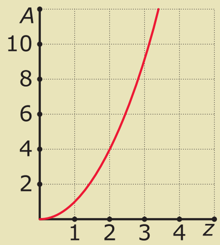
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **formule** is een zin waarin **variabelen** voorkomen. Vaak beschrijven formules een verband tussen die variabelen, maar niet altijd. Formules hebben meestal de vorm van een vergelijking, dus een zin met een **isgelijkteken**. Als een formule een verband beschrijft tussen twee variabelen, kun je er een grafiek bij tekenen. Je maakt dan eerst een tabel. Vervolgens zet je de gevonden punten in een assenstelsel.

In de praktijk beschrijven formules vaak het verband tussen **grootheden**. Die grootheden worden voorgesteld door een variabele waarin de letter past bij de gebruikte grootheid. Bij zo'n grootheid hoort weer een afgesproken **eenheid** waarin hij kan worden gemeten.

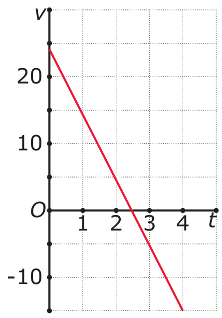
- De formule $A = z^2$ legt een **verband** tussen de variabelen z en A vast. Je kunt er een tabel en een grafiek bij maken.
- De formule $2t + 40 = 300$ geeft informatie over de onbekende t. Deze **vergelijking** heeft als oplossing $t = 130$, want $2 \cdot 130 + 40 = 300$.
- De formule $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ is een **rekenregel** en geldt dus voor elke waarde van x.



Figuur 1.5

Voorbeeld 1

Gooi je een steen recht omhoog met een beginsnelheid van $24{,}1$ meter per seconde, dan wordt de snelheid van de steen (zolang hij niet op de grond is gekomen) gegeven door: $v = 24{,}1 - 9{,}8t$.
t stelt de tijd in seconden voor en v de snelheid in m/s.
Bekijk de bijbehorende grafiek. Je wilt weten op welk tijdstip de steen op zijn hoogste punt is. Hoe lees je dat uit deze grafiek af?



Figuur 1.6

Antwoord

Zolang de steen omhoog gaat is v positief; zodra de steen daalt, is v negatief.
Je kunt uit de grafiek aflezen op welk tijdstip de snelheid van de steen 0 is. Op dat moment is de steen op zijn hoogste punt. Dat is ongeveer na $2{,}5$ seconden.

Opgave 3

Sophie staat op haar balkon, steekt haar arm uit over het hek en gooit een tennisbal recht omhoog met een beginsnelheid van 5 m/s. In het voorbeeld staat beschreven hoe bij een omhoog geworpen steen de snelheid van de tijd afhangt. De bal komt na 2 seconden op de begane grond.

a Pas de formule $v = 24{,}1 - 9{,}8t$ voor de snelheid van de steen aan voor de gegevens van de tennisbal. Welke formule krijg je nu?

b Teken een grafiek bij deze formule.

c In de grafiek is de snelheid soms positief, soms negatief. Hoe komt dat?

d Na hoeveel seconden is de bal op zijn hoogste punt? Geef je antwoord in duizendsten van een seconde nauwkeurig.

e Met welke snelheid komt de bal op de grond? Geef je antwoord in kilometer per uur.

Voorbeeld 2

Wat is het verschil tussen de volgende formules?

- $K = 2a - 4b$
- $K = 20 - 4b$
- $20 - 4b = 10$
- $2a - 4b = 2(a - 2b)$

Antwoord

- $K = 2a - 4b$ is een verband tussen drie variabelen: K, a en b.
- $K = 20 - 4b$ is een verband tussen twee variabelen: K en b. Je kunt er een grafiek bij maken.
- $20 - 4b = 10$ is een vergelijking die je kunt oplossen. De oplossing is: $b = 2{,}5$.
- $2a - 4b = 2(a - 2b)$ is een rekenregel. Dit wordt duidelijk als je de haakjes wegwerkt: $2(a - 2b) = 2 \cdot a - 2 \cdot 2b = 2a - 4b$.

Opgave 4

Geef van de formules aan wat ze beschrijven: een verband tussen variabelen, een rekenregel of een vergelijking die je kunt oplossen. Geef ook aan of je er een grafiek bij kunt maken.

a $V = 3r^2$

b $V = l \cdot b \cdot h$

c $4(a - b) = 4a - 4b$

d $l = 200 - b$

e $2p + 25 = 14 - 0{,}5p$

f $x \cdot y = 12$

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je de formule $K = 2a - 4b$.

a Neem $a = 10$ en teken de grafiek.

b Neem nu $b = -1$ en teken de grafiek.

c Los de vergelijking $20 - 4b = 10$ op.

Verwerken

Opgave 6

Geef van de formules aan wat ze beschrijven: een verband tussen variabelen, een rekenregel of een vergelijking die je kunt oplossen. Geef ook aan of je er een grafiek bij kunt maken.

a $3 \cdot (2x + y) = 6x + 3y$

b $2x - 4 = x + 5$

c $y = 2x^2 + 4$

d $R = p \cdot q$

Opgave 7

Een boot staat aan de top van een vlakke helling en wordt met een constante snelheid te water gelaten. De hoogte h (in centimeter) van de onderkant van de boot boven het water wordt gegeven door de formule $h = 1500 - 400t$, waarbij t de tijd in minuten is. Het laagste punt van de helling ligt onder water.

a Teken de grafiek bij de formule.

b Na hoeveel tijd (in seconden nauwkeurig) raakt de onderkant van de boot net het water?

c De boot ligt na $4{,}5$ minuten volledig in het water. Hoeveel centimeter ligt de onderkant van de boot dan onder water?

Opgave 8

Voor een telefoonabonnement wordt de formule $K = 0{,}08 + \frac{24}{a}$ gebruikt, waarbij a het aantal belminuten per maand is en K de totale kosten in euro per belminuut.

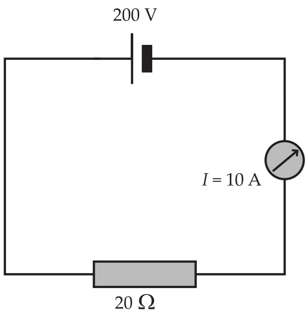
a Wat zijn de vaste kosten en wat zijn de kosten die je voor elke gebelde minuut moet betalen?

b Teken een grafiek bij de formule. Neem een maximum van 200 belminuten.

c Bij hoeveel belminuten betaal je 12 eurocent per minuut?

Opgave 9

Een elektrische weerstand wordt aangesloten op een spanning van 200 Volt. Met behulp van een ampèremeter kun je de stroomsterkte meten. Voor deze situatie geldt de wet van Ohm: $U = I \cdot R$ waarin U de spanning in V (Volt), I de stroomsterkte in A (Ampère) en R de weerstand in Ω (Ohm).



Figuur 1.7

a Bij een spanning van 200 Volt beschrijft de wet van Ohm het verband tussen I en R. Welke formule hoort daar bij? En welke eenheden horen bij deze formule?

b Teken de grafiek bij deze formule. Zet R op de horizontale as.

c Welke stroomsterkte wordt er gemeten als $R = 15$ Ω?

Opgave 10

Voor de inhoud I van een balk met hoogte 4 centimeter geldt de formule $I = 4 \cdot l \cdot b$, waarbij l de lengte en b de breedte van de balk is.

a In welke eenheid moet I worden uitgedrukt als de lengte en breedte in centimeters zijn?

b Welke grootheden komen er in de formule voor?

c Stel dat je zo'n balk hebt met een inhoud van 64 cm^3.
Welke formule hoort hier bij? Teken ook de grafiek bij de formule, waarbij l op de horizontale as komt.

d Teken in de grafiek die je bij c hebt getekend ook de lijn $b = l$. Deze lijn snijdt de grafiek van b, wat betekent dit snijpunt voor de balk?

Toepassen

Opgave 11: Cilindervormig blikje

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Hierin is V de inhoud (het volume), r de straal in centimeter en h de hoogte in centimeter.

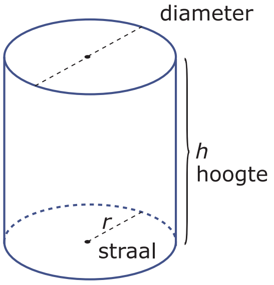
a In welke eenheid moet V worden uitgedrukt?

b Hoeveel bedraagt de inhoud van een blikje met een diameter van 80 millimeter en een hoogte van 16 centimeter?

c Schrijf een formule van de vorm $V = ...$ op die het verband tussen V en r voor blikjes met een hoogte van 16 centimeter aangeeft.

d Welke vorm heeft de grafiek bij de formule die je in c hebt gevonden?

e Van andere blikjes is de inhoud 1 liter. Welk verband is er nu tussen r en h? Teken er een grafiek van.



Figuur 1.8

Opgave 12: Oppervlakte driehoek

Gegeven zijn de formules $y_1 = 2x + 8$ en $y_2 = -2x + 8$.

a Teken de grafieken van y_1 en y_2 in één figuur.

Punt A is het snijpunt van de grafieken van y_1 en y_2.

Punt B is het snijpunt van de grafiek van y_2 met de x-as.

Punt C is het snijpunt van de verticale lijn door punt B met de grafiek van y_1.

b Bereken de oppervlakte van ΔABC.

De lijn $x = a$ snijdt de grafiek van y_1 in punt E en de grafiek van y_2 in punt D. De oppervlakte van ΔADE is 18.

c Bereken a.

Testen

Opgave 13

Welke van deze formules beschrijft een verband tussen twee variabelen? Teken bij deze formules een grafiek.

a $a + b = 8$

b $2p(q - 3) = 2pq - 6p$

c $4x^2 - 25 = 135$

d $R = 50p - 2p^2$

Opgave 14

De Quetelet-index (QI) is een maat voor een gezond gewicht. Je berekent de QI met de formule $QI = \frac{G}{l^2}$. Hierin is l je lengte in meters en G je gewicht in kilogram. Bij deze index wordt de eenheid niet vermeld. De waarde wordt in één decimaal nauwkeurig uitgerekend en gebruikt. Neem aan dat een QI van 20 tot 25 gezond is.

a Bereken de QI van iemand die 180 centimeter lang is en 78 kilogram weegt.

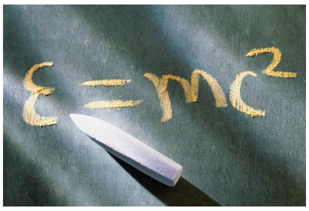
b Bij een QI van 20 kun je een grafiek maken van iemands gewicht afhankelijk van zijn lengte. Teken die grafiek.

c Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek $QI = 25$.

d Stel je een persoon voor van 180 centimeter lengte. Geef in je figuur aan welke gewichten voor deze persoon gezond zijn. Zet de ondergrens en de bovengrens er in de grafiek bij, in kilogram nauwkeurig.

1.2 Formules herschrijven

Inleiding



Figuur 2.1

Formules kun je vaak op verschillende manieren schrijven. Zo kun je de omtrek van een rechthoek uitleggen als 'Tel lengte en breedte en lengte en breedte bij elkaar op', maar ook als 'Neem 2 keer de lengte en 2 keer de breedte en tel dat bij elkaar op'. Dan zeg je verschillende dingen, maar die leveren toch altijd dezelfde omtrek op. Het zijn gelijkwaardige formules (in woorden). Soms is de éne versie van de formule handiger, soms werk je liever met een andere...

Je leert in dit onderwerp

- formules herleiden;
- haakjes uitwerken;
- ontbinden in factoren;
- werken met breuken.

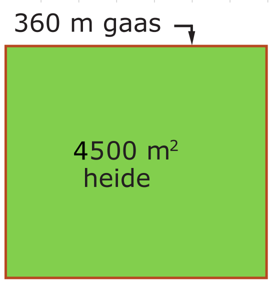
Voorkennis

- werken met variabelen (met 'letters');
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Iemand wil een stuk hei afgrenzen om er schapen te laten grazen met 360 meter gaas. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,45 hectare (dus 4500 m^2). De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk hei.



Figuur 2.2

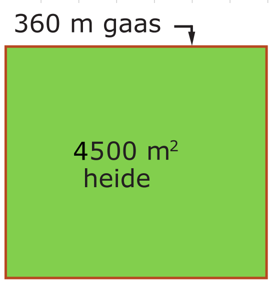
Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b.

a Stel bij dit probleem een formule op die past bij de gegeven omtrek en één die past bij de gegeven oppervlakte.

b Schrijf beide formules in de vorm $l = ...$

c Hoe kun je nu het probleem verder oplossen?

Uitleg



Figuur 2.3

Als een rechthoek met lengte l en breedte b een omtrek heeft van 360 m, dan geldt de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$.
Die formule kun je schrijven als $2l + 2b = 360$ en dan verder herleiden:

$$\begin{aligned} 2l + 2b &= 360 \\ &\quad \text{beide zijden /2} \\ l + b &= 180 \\ &\quad \text{beide zijden - } b \\ l &= 180 - b \end{aligned}$$

Nu heb je l uitgedrukt in b. Zoiets doe je om grafieken te maken, l komt op de verticale as.

Als deze rechthoek een oppervlakte van 4500 m^2 moet hebben, geldt ook $l \cdot b = 4500$.
En dit kun je herleiden:

$$\begin{aligned} l \cdot b &= 4500 && \text{beide zijden } /b \\ l &= \frac{4500}{b} \end{aligned}$$

Wil je nu weten voor welke b de rechthoek aan beide eisen voldoet, dan kun je met twee grafieken werken. Maar je kunt ook een vergelijking maken en die oplossen:

$$\begin{aligned} \frac{4500}{b} &= 180 - b && \text{beide zijden met } b \text{ vermenigvuldigen} \\ 4500 &= 180b - b^2 && \text{op 0 herleiden} \\ b^2 - 180b + 4500 &= 0 && \text{ontbinden in factoren} \\ (b-30)(b-150) &= 0 && \text{oplossingen opschrijven} \\ b &= 30 \vee b = 150 \end{aligned}$$

Je vindt dus twee mogelijke waarden voor de breedte van deze rechthoek.

Opgave 1

Je ziet in de **Uitleg** dat je de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$ eenvoudiger kunt schrijven als $l + b = 180$. Schrijf de volgende formules zo eenvoudig mogelijk.

a $2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot x - 6 \cdot y = 12$

b $2 \cdot x \cdot y + x \cdot y = 18$

c $y = 4x^2 + x + 3y - 7x + 2x^2$

d $2xy + xy - 3x = 18$

Opgave 2

Je ziet in de **Uitleg** dat je de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$ kunt schrijven in de vorm $l = 180 - b$. Herleid de volgende formules zodat y is uitgedrukt in x.

a $2x - 4y = 10$

b $\text{-}3x + 5 = 10 - 2y$

c $5x + 10xy = 20$

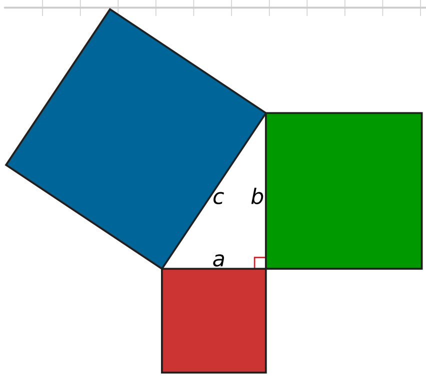
d $x \cdot (y + 2) = 6$

Opgave 3

In een rechthoekige driehoek geldt de stelling van Pythagoras. In formulevorm: $a^2 + b^2 = c^2$.

a Geef twee gelijkwaardige formules.

b Neem $a = 3x$ en $b = 4x$ en druk c uit in x.
Neem aan dat $x > 0$.



Figuur 2.4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Uitdrukkingen kun je **herleiden** (of **herschrijven**) met rekenregels. Zo is de uitdrukking $l + l + b + b$ te herleiden tot $2l + 2b$.
Als je in beide uitdrukkingen dezelfde waarden voor de variabelen b en l invult, geven ze een gelijke waarde als uitkomst. De uitdrukkingen zijn dus **gelijkwaardig**.

Formules kunnen ook gelijkwaardig zijn.
Zo zijn $2l+2b = 60$ en $b = 30-l$ gelijkwaardig, want als je dezelfde waarden voor b respectievelijk l invult, zijn beide formules tegelijk 'waar' of 'niet waar'. En daarom zijn dit **gelijkwaardige formules**.

Formules blijven gelijkwaardig als je de gewone rekenregels toepast, zoals haakjes wegwerken, ontbinden in factoren en rekenen met breuken. Ook mag je:

- aan beide zijden van een isgelijkteken hetzelfde optellen of aftrekken;
- aan beide zijden van een isgelijkteken met hetzelfde vermenigvuldigen of delen behalve vermenigvuldigen of delen met 0);
- de uitdrukkingen aan beide zijden van het isgelijkteken verwisselen.

Hier zie je nog een keer de rekenregels voor werken met haakjes en breuken:

- **haakjes wegwerken** (ook wel 'haakjes uitwerken'):
  $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
  $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
- **ontbinden in factoren**:
  $a \cdot x + a \cdot y = a \cdot (x + y)$
  $x^2 + p \cdot x + q = (x + a) \cdot (x + b)$ met $a + b = p$ en $a \cdot b = q$ (de productsommethode)
- **breuken optellen/aftrekken**:
  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$
- **breuken vermenigvuldigen** (ga ervan uit dat er nergens door 0 wordt gedeeld):
  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- **breuken delen**:
  $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \Big/ \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ of $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Voorbeeld 1

Voorbeelden van haakjes wegwerken zijn:

- $-2 \cdot (x - y) = -2 \cdot x - -2 \cdot y = -2x + 2y$
- $x \cdot (3 - x) = x \cdot 3 - x \cdot x = 3x - x^2$
- $2 - (x - 5) = 2 - x - -5 = 2 - x + 5 = 7 - x$
- $(x + 3)(x - 5) = (x + 3)(x + -5) = x \cdot x + x \cdot -5 + 3 \cdot x + 3 \cdot -5 = x^2 - 2x - 15$
- $(p - 5)^2 = (p - 5)(p - 5) = p^2 - 5p - 5p + 25 = p^2 - 10p + 25$
- $x(2x + 1)(2x - 1) = x\left(4x^2 - 2x + 2x - 1\right) = x\left(4x^2 - 1\right) = 4x^3 - x$

Let er wel op dat het wegwerken van haakjes geen blind automatisme wordt. Soms kun je met een formule juist veel eenvoudiger werken als je de haakjes gewoon laat staan. Als je bijvoorbeeld wilt weten voor welke p de uitdrukking $(p - 5)^2$ gelijk is aan 0, dan zie je nu meteen dat dat geldt voor $p = 5$. Bij de uitdrukking $p^2 - 10p + 25$ zie je dat een stuk minder snel. Denk ook steeds na of het wegwerken wel is toegestaan.

- Goed: $\frac{x+6}{2} = \frac{x}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2}x + 3$
- Fout: $\frac{6}{x+2} = \frac{6}{x} + \frac{6}{2} = \frac{6}{x} + 3$

Bij de eerste breuk moet je zowel x als 6 door 2 delen.
Met een getalvoorbeeld kun je zien dat de tweede breuk niet goed is weggewerkt. Kies je bijvoorbeeld $x = 1$, dan zou de uitkomst $\frac{6}{1+2} = 2$ moeten zijn en niet $\frac{6}{1} + 3 = 9$.

Opgave 4

Werk in de uitdrukkingen de haakjes weg.

a $3x \cdot (x - 2y)$

b $2a - (9a + 6)$

c $0{,}5p \cdot 100p - p \cdot (20p + 100)$

d $-5p^3\left(p^2 - 3p^3\right)$

e $\frac{2(x+2)+6}{2}$

f $\frac{3(x+2)+6}{x+2}$

Opgave 5

Werk in de uitdrukkingen de haakjes weg.

a $(x + 2) \cdot (x + 4)$

b $2(b + 4)(b - 2)$

c $(l + 3)\left(\frac{1}{l} + 6\right)$

d $(5c - 4)^2$

Voorbeeld 2

Voorbeelden van ontbinden in factoren zijn:

- $2x^2 + 6xy = 2x \cdot x + 2x \cdot 3y = 2x(x + 3y)$
- $-x^2 + 4x = -x \cdot x - -x \cdot 4 = -x(x - 4)$
- $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 2 \cdot 3 = (x + 2)(x + 3)$
- $x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$ (Zie figuur.)
- $x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x(x - 2)(x + 2)$
- $x^4 + 7x^2 + 12 = \left(x^2 + 3\right)\left(x^2 + 4\right)$

-12

1	-12	
2	-6	-4
3	-4	
-3	4	
-2	6	
-1	12	

Figuur 2.5

Opgave 6

Ontbind in factoren.

a $2x^2 + 10x$

b $3x^2 - 9x$

c $x^2 + 5x + 4$

d $b^2 - 9b + 8$

e $2k^2 - 34k + 32$

Opgave 7

Ontbind in factoren.

a $c^3 + 2c^2 + c$

b $p^3 - p^5$

c $2x^4 + 8x^{10}$

d $3y^4 - 6y^5 + 2y^2$

e $x^4 + x^2 - 12$

Voorbeeld 3

Als breuken gelijknamig zijn mag je ze bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken.

$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$

$\frac{5}{a} - \frac{2}{a} = \frac{3}{a}$

Als je breuken met verschillende noemers wilt optellen of aftrekken, moet je ze eerst gelijknamig maken.

$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}$

$\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{4y}{xy} + \frac{3x}{xy} = \frac{3x+4y}{xy}$

Breuken vereenvoudig je door teller en noemer door hetzelfde te delen.

Hier zie je nog een paar voorbeelden (ga ervan uit dat je nooit door 0 deelt):

- $\frac{2}{a} - \frac{5}{b} = \frac{2b}{ab} - \frac{5a}{ab} = \frac{2b-5a}{ab}$
- $\frac{2}{3a} + \frac{5}{a^2} = \frac{2a}{3a^2} + \frac{15}{3a^2} = \frac{2a+15}{3a^2}$
- $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{2(x+3)}{x(x+3)} - \frac{x}{x(x+3)} = \frac{x+6}{x(x+3)}$

Opgave 8

Schrijf als één breuk.

a $\frac{2}{a}+\frac{1}{a}$

b $\frac{2}{a}-\frac{1}{b}$

c $\frac{4a}{3}+\frac{-3}{5a^2}$

Opgave 9

Schrijf als één breuk.

a $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}$

b $\frac{2x}{x^2-x}+\frac{1}{x+1}$

c $\frac{5}{x^2-1}-\frac{14}{2x+2}$

d $\frac{5x+25}{x^2+3x-4}-\frac{5}{x^2+3x-4}$

Voorbeeld 4

Bij breuken vermenigvuldigen en delen gelden de regels:

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

$\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}\Big/\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ of $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\cdot\frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Bij delen door een breuk kun je de bovenstaande tussenstappen overslaan. Je mag dus in één keer zeggen: $\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Hier zie je een paar voorbeelden (ga ervan uit dat je nooit door 0 deelt).

- $\frac{2}{a}\cdot\frac{5}{a}=\frac{10}{a^2}$
- $\frac{2}{a}\Big/\frac{5}{a}=\frac{2}{5}$
- $\frac{2}{a}\Big/\frac{5}{b}=\frac{2b}{ab}\Big/\frac{5a}{ab}=\frac{2b}{5a}$ of $\frac{2}{a}\Big/\frac{5}{b}=\frac{2}{a}\cdot\frac{b}{5}=\frac{2b}{5a}$
- $\frac{2a}{3}\cdot\frac{5}{a^2}=\frac{10a}{3a^2}=\frac{10}{3a}$
- $\frac{2a}{3}\Big/\frac{5}{a^2}=\frac{2a^3}{3a^2}\Big/\frac{15}{3a^2}=\frac{2a^3}{15}=\frac{2}{15}a^3$ of $\frac{2a}{3}\Big/\frac{5}{a^2}=\frac{2a}{3}\cdot\frac{a^2}{5}=\frac{2a^3}{15}=\frac{2}{15}a^3$
- $\frac{4}{x^2+7x+12}\Big/\frac{2}{x+4}=\frac{4(x+4)}{2(x^2+7x+12)}=\frac{2(x+4)}{(x+3)(x+4)}=\frac{2}{x+3}$, mits $x\neq -3$

Opgave 10

Schrijf als één breuk.

a $\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{9}$

b $\frac{2}{7}\Big/\frac{1}{3}$

c $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{b}$

d $\frac{2}{a} \Big/ \frac{6}{b}$

Opgave 11

Schrijf als één breuk.

a $\frac{3x}{y^2} \cdot \frac{5y}{2x} - \frac{6}{y}$

b $\frac{2}{x} \cdot \frac{2x}{3} - \frac{1}{2x}$

c $\frac{3}{5x} \Big/ \left(\frac{2x}{5} - \frac{3}{x}\right)$

d $\frac{5}{x^2+4x+4} \Big/ \frac{4}{x+2} + \frac{2x}{x-2}$

Verwerken

Opgave 12

Herleid.

a $4 \cdot x + 10 = 3 \cdot x - 2 \cdot y$

b $2 \cdot y + 2 \cdot x \cdot x + 4 \cdot x = 6 \cdot x^2$

c $4 \cdot x \cdot h + 2 \cdot x^2 = 100$

d $W = p \cdot (650 - 2 \cdot p) - 20 \cdot (650 - 2 \cdot p)$

Opgave 13

Druk in de formules y uit in x. Schrijf ze daarna zo eenvoudig mogelijk.

a $0{,}5x + 1{,}5y = 12$

b $(x + y)^3 = 8$

c $x^2 - y^2 = 25$

d $2x^2 + 4xy = 100$

Opgave 14

Werk de haakjes weg.

a $-2x\left(x^2 + 6x\right)$

b $-2x - \left(x^2 + 6x\right)$

c $(t + 20)(t - 5)$

d $\left(x^2 + 1\right)(3x - 2)$

e $(a - 3)(a + 3)$

f $(6x - 3)^2$

g $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2$

h $(x - 2)^3$

Opgave 15

Ontbind in factoren.

a $x^2 - 4x$

b $-2t^2 + 18t$

c $x^2 + 5x - 6$

d $12 - 4p - p^2$

e $4k^2 - 16$

f $2p^3 - 2p^2 - 24p$

g $16 - p^2$

h $x^2 - 10x + 9$

Opgave 16

Schrijf als één breuk.

a $\frac{2}{x} \cdot \frac{3}{y} + \frac{5}{x}$

b $\frac{3}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4}$

c $\frac{2}{x} \Big/ \frac{3}{y} + \frac{5}{x}$

d $2x - \frac{1}{2x}$

e $\frac{12}{-x^2} \Big/ -\frac{16}{x}$

f $\frac{6}{x^2+x-12} \Big/ \frac{3}{x+4}$

Toepassen

Opgave 17: Een boswal aanleggen

Een boer heeft een rechthoekig stuk land dat twee keer zo lang is als breed. Uit het oogpunt van landschapsbeheer haalt hij aan beide lange zijden een strook van 3 meter breed af en maakt daar een smalle boswal. Verder maakt hij een bredere boswal van 10 meter breed aan één van beide korte zijden. Zijn land wordt daarmee 2690 m^2 kleiner.

a Maak eerst een tekening van de situatie. Noem de oorspronkelijke breedte van het land x (in meter). Hoe groot is de oppervlakte van dit land, uitgedrukt in x?

b Hoe groot is de oppervlakte van het land na de aanleg van de boswal? Geef deze oppervlakte als formule met haakjes.

c Bereken door wegwerken van de haakjes hoe groot de breedte van het rechthoekige stuk land is.

Opgave 18: Windmolens

Windmolens kunnen elektriciteit opwekken. Voor een zekere windmolen wordt dat aangegeven door de formule: $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en D de rotordiameter in meter.

a Ga uit van een windmolen met een diameter van 24 meter. Bij welke windsnelheid in km/h wordt een vermogen van 26 kW opgewekt?

b Ga weer uit van een vermogen van 26 kW. Welke diameter de windmolen moet hebben, kun je dan berekenen als je de snelheid van de wind weet. Stel een formule op die D uitdrukt in v.

c In een bepaald gebied ligt de windsnelheid tussen de 7,2 en de 36 km/h. Als je een (gemiddeld) vermogen van 26 kW met een windmolen wilt kunnen opwekken, tussen welke waarden kies je dan de diameter van die molen?

Testen

Opgave 19

Schrijf deze formules zo, dat y is uitgedrukt in x.

a $x \cdot x + 4 \cdot y = 8 \cdot x^2 - 4 \cdot x$

b $2x \cdot y = 0{,}4x + 200$

c $x - 4y^2 = 2$

Opgave 20

Werk eerst de haakjes uit en ontbind daarna in factoren.

a $2(x-2)(x+3) - 12$

b $(x+3)(x-2) + 4x - 8$

Opgave 21

Goed of fout? Verbeter de foute uitwerkingen of ontbindingen. Laat bij de goede uitwerkingen zien waarom ze goed zijn.

a $(x+3)^2 = x^2 + 9$

b $-x^2 - 4x + 12 = -(x-6)(x+2)$

c $\frac{8x+100}{4x^2} = \frac{2}{x} + \frac{25}{x^2}$

d $\frac{8x}{x^2+3x} = \frac{5x}{x^2} = \frac{5}{x}$, mits $x \neq 0$.

Opgave 22

Schrijf als één breuk:

a $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

b $\frac{3}{4x} \Big/ \frac{5}{2x} - \frac{x}{x+1}$

c $\frac{2}{x+3} - \frac{4}{x+5}$

d $\frac{x+1}{x^2+x} + \frac{1}{2x}$

Practicum

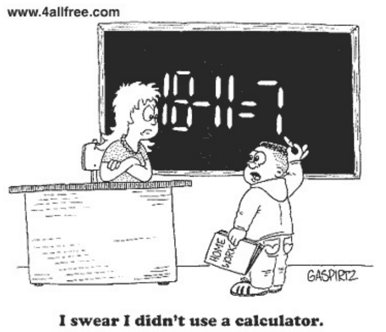
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met variabelen en het ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.3 Formules en de grafische rekenmachine

Inleiding

De grafische rekenmachine kan grafieken maken bij sommige verbanden tussen twee variabelen. Dat moet een verband zijn, waarbij duidelijk is voor welke variabele getallen worden ingevuld (de invoervariabele) en welke variabele dan moet worden uitgerekend. Bij elke waarde van de invoervariabele is dus hoogstens één waarde van de uitvoervariabele mogelijk.



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- verbanden herleiden tot ze de juiste vorm hebben voor de grafische rekenmachine;
- grafieken maken met de grafische rekenmachine;
- het begrip ‘functie’ kennen;
- formules combineren.

Voorkennis

- werken met variabelen (met ‘letters’);
- regels zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

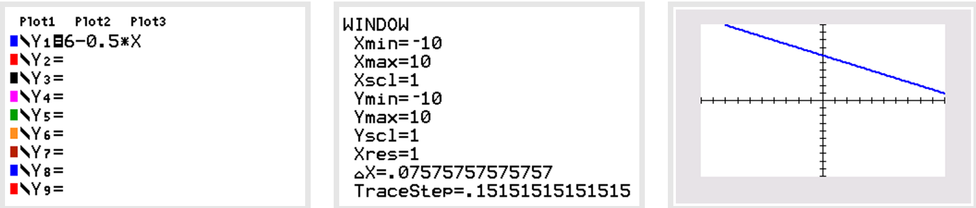
Als je nog nooit met een grafische rekenmachine hebt gewerkt, ga je nu eerst naar het **Practicum: Basistechnieken GR** en doe je het practicum dat bij jouw rekenmachine hoort.

Uitleg

De formule $x+2y=12$ beschrijft een verband tussen x en y. Je wilt bij deze formule met de grafische rekenmachine de bijpassende grafiek tekenen. Dan moet y worden uitgedrukt in x.

$$\begin{aligned} x+2y &= 12 \\ 2y &= 12-x \\ y &= 6-0{,}5x \end{aligned}$$

Je hebt de variabele y geschreven als functie van x. Nu kun je de formule in de grafische rekenmachine invoeren. In het **Practicum: Basistechnieken GR** leer je de eerste beginselen van het werken met de grafische rekenmachine.



Figuur 3.2

Opgave 1

Gegeven zijn de twee formules $2x + y = 6$ en $x^2 + 2y = 12$.

a Herleid beide formules tot y een functie is van x.

b Voer beide formules in de grafische rekenmachine in.

c Bepaal met de grafische rekenmachine de snijpunten van beide grafieken.

d Doe dit ook door de bijpassende vergelijking zonder hulp van de grafische rekenmachine op te lossen.

Opgave 2

Druk in de formules y uit in x.

a $9x - 3y = 12$

b $5 \cdot (x + y) = 12$

c $125x = 5y^2$

d $2y^3 + x = 22$

Theorie en voorbeelden

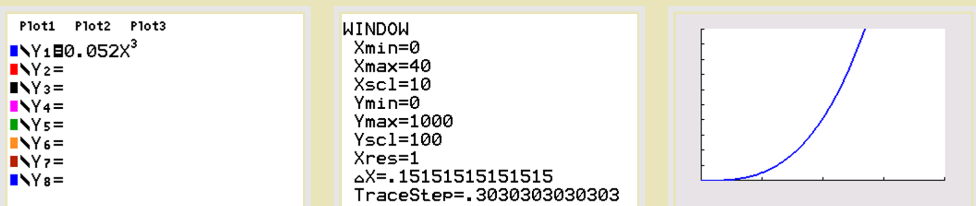
Om te onthouden

Bij een formule, die het verband tussen de variabelen x en y beschrijft, noem je y een **functie** van x, wanneer deze formule de vorm $y = ...$ heeft. In de bijbehorende grafiek komt y dan altijd op de verticale as.

- In de formule $y = x^2 + 4$ is y een functie van x.
- In de formule $P = 0{,}052v^3$ is P een functie van v.
- De formule $a + 2b = 6$ kun je op twee manieren schrijven:
  - $a = 6 - 2b$, met a als functie van b.
  - $b = 3 - 0{,}5a$, met b als functie van a.

Formules met twee variabelen van de vorm $y = ...$ kun je in de grafische rekenmachine invoeren. Hoe je dat doet vind je in het **Practicum**.

Hier zie je bijvoorbeeld de grafiek van de functie $y = 0{,}052x^3$. Het maken van de grafiek van een functie op de grafische rekenmachine wordt **plotten** genoemd.



Figuur 3.3

Voorbeeld 1

Als je 360 meter afrastering beschikbaar hebt voor een rechthoekig veld met een oppervlakte van 0,5 ha, dan geldt:

$l \cdot b = 5000$ en $2l + 2b = 360$

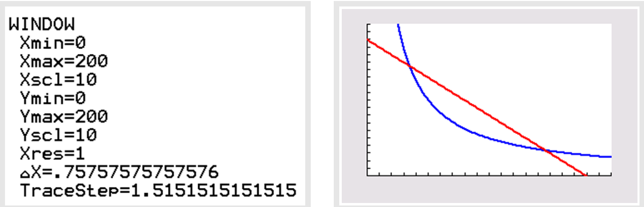
Hierin is l de lengte in meter en b de breedte in meter van de rechthoek. Zoek nu waarden voor l en b die aan beide formules voldoen.

Antwoord

Schrijf de formules als: $l = \frac{5000}{b}$ en $l = 180 - b$.

Voer ze in de grafische rekenmachine in als Y1=5000/X en Y2=180-X.

Om een goede grafiek te krijgen kies je verstandige grenzen van de waarden van x (de breedte) en y (de lengte).



Figuur 3.4

Je ziet dat de grafieken twee snijpunten hebben. Om die snijpunten gaat het. Je kunt ze bepalen door een tabel te maken met de grafische rekenmachine.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Leg uit hoe je aan de formules kunt zien dat de gekozen vensterinstellingen geschikt zijn. Bepaal zelf het andere snijpunt in gehele meter nauwkeurig.

b Bepaal met de grafische rekenmachine het snijpunt van de grafieken $x + y = 9$ en $y = x^3$ in één decimaal nauwkeurig. Schrijf een duidelijke uitwerking op.

Opgave 4

a Gegeven zijn de formules $R = 2p + 3q$ en $q = 3p - 2$. Druk R uit in p.

b Gegeven zijn de formules $K = -2t - 5v + 22$ en $t = -v - 3$. Druk K uit in v.

c Gegeven zijn de formules $2z = 3x - 4y$ en $z = 2x + 1$. Deze twee formules kun je combineren tot de vorm $y = ax + b$. Welke getallen zijn a en b?

d Gegeven is de formule $Z = \frac{12x+18}{3y}$. Neem $Z = 2$ en druk y uit in x.

Voorbeeld 2

Stel je voor dat iemand een rechthoekig stuk land van 200 m^2 wil omheinen. De kosten voor de omheining moeten zo laag mogelijk worden. Hij moet de lengte en de breedte dus zo kiezen dat de omtrek zo klein mogelijk wordt.
Hoeveel meter omheining is in dit geval nodig?

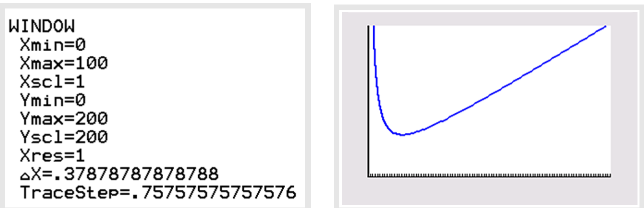
Antwoord

Er gelden voor zo'n rechthoek twee formules: $A = l \cdot b$ en $P = 2l + 2b$
Hierin is l de lengte (in meter), b de breedte (in meter), A de oppervlakte en P de omtrek.

Omdat $A = 200$, geldt: $l \cdot b = 200$ en dus $l = \frac{200}{b}$.

Die uitdrukking kun je invullen in de formule voor de omtrek: $P = \frac{400}{b} + 2b$.

Deze formule geeft een verband tussen P en b waarmee je een grafiek kunt maken. Je voert dan de formule in de grafische rekenmachine in en je kiest verstandige waarden voor de instelling van het grafiekenvenster. Aan de grafiek kun dan je zien, dat er een waarde van l is, waarbij de omtrek zo klein mogelijk is. Die waarde is ongeveer $14{,}1$ meter en de bijbehorende breedte is hetzelfde. Kennelijk is een vierkant landje het gunstigst.



Figuur 3.5

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**. Boer Voortman zet voor zijn paard een weilandje af. Hij heeft daarvoor nog 200 meter gaas. Het weiland wordt zuiver rechthoekig. Omdat het weiland tegen een brede rivier aan komt te liggen, hoeft hij alleen de twee breedtes en de lengte van gaas te voorzien.

a Druk de lengte l van het weiland uit in de breedte b.

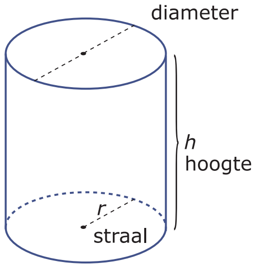
b Druk de oppervlakte A van het weiland uit in b.

c Breng met de grafische rekenmachine de grafiek bij de formule die je in b hebt gevonden in beeld. Bedenk van te voren de beste vensterinstellingen.

d Voor welke waarde van b is de oppervlakte van het weiland zo groot mogelijk?

Opgave 6

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Hierin is V de inhoud (het volume), r de straal in centimeter en h de hoogte in centimeter.



Figuur 3.6

a Neem een blikje waarvoor $h = 10$. Nu is V een functie van r. Breng de grafiek van deze functie zo in beeld dat je bij $V = 1000$ nog kunt aflezen hoe groot r is. Bepaal de waarde van r in twee decimalen nauwkeurig.

b Voor een blikje waarvan de diameter en de hoogte gelijk zijn, geldt: $h = 2r$. Schrijf een formule op voor V als functie van r. Bepaal de waarde van r van zo'n blikje als de inhoud $0{,}5$ liter is.

c Voor een blikje waarvan de inhoud 1 liter is, kun je een formule opstellen voor h afhankelijk van r. Breng de bijbehorende grafiek in beeld en bepaal de waarde van h waarvoor $r = 5$.

Verwerken

Opgave 7

Breng van de formules de grafieken in beeld op de grafische rekenmachine. Denk om het gebruik van haakjes en de instellingen van het venster.

a $s = 250t - 4{,}9t^2$

b $k = 0{,}04 + \frac{200}{a}$

c $4 \cdot x \cdot h + 2 \cdot x^2 = 100$

d $N = \frac{60}{30+0{,}5d^2}$

Opgave 8

Bepaal met de grafische rekenmachine de snijpunten van de grafieken van $y = x^4 - 5$ en $x - y = 2$ in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 9

Voor een kopieerapparaat bedraagt de maandelijkse huur € 200,00 waarbij nog een bedrag van 4 eurocent per kopie komt. K stelt de totale kosten voor en a is het aantal kopieën dat er maandelijks (gemiddeld) wordt gemaakt.

a Schrijf de formule op voor K als functie van a.

b Iemand die een kopie maakt betaalt 10 eurocent per kopie. Schrijf de formule op voor de inkomsten I als functie van a.

c Hoeveel kopieën moeten er per maand worden gemaakt als 10 eurocent per kopie kostendekkend moet zijn?

Opgave 10

Een boer heeft een rechthoekig stuk land van 1 hectare. Als je 20 meter bij de breedte optelt, dan is dat precies even lang als $\frac{2}{3}$ van de lengte.

Hoe groot zijn de afmetingen van het stuk land?

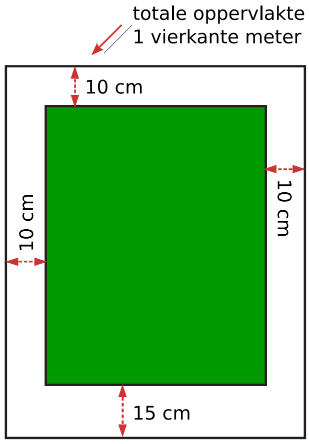
Opgave 11

Stel je voor dat een bedrijf affiches wil maken. Om op te vallen moet de oppervlakte van zo'n affiche 1 m^2 worden. Het affiche wordt zo bedrukt, dat er aan de beide zijkanten en de bovenkant een witte strook van 10 cm overblijft. Aan de onderkant is die strook 15 cm. De bedrijfsleiding vraagt zich af welke afmetingen het affiche nu nog kan hebben. Ze komen daarbij op de formule: $(l+25)(b+20)=10000$.

a Laat zien hoe de bedrijfsleiding aan deze formule komt. Wat betekenen l en b?

b Breng de grafiek bij deze formule in beeld.

c Bij nader inzien wil de bedrijfsleiding dat het bedrukte deel een vierkant wordt. Welke maat voor de affiches adviseer je nu?



Figuur 3.7

Toepassen

Opgave 12: Een rechte kegel

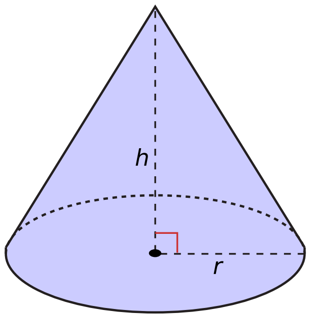
Voor de inhoud van een rechte kegel geldt: $V=\frac{1}{3}Gh$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte in centimeter is. Dit grondvlak is een cirkel met straal r in centimeter, dus $G=\pi r^2$.

a Welke formule beschrijft het verband tussen V, r en h?

Voor een kegel met een inhoud van 1 liter kun je uit de formules een verband afleiden tussen r en h.

b Druk r uit in h en plot de grafiek.

c Bepaal de waarde van r waarvoor geldt: $h=10$ cm. Benader het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.



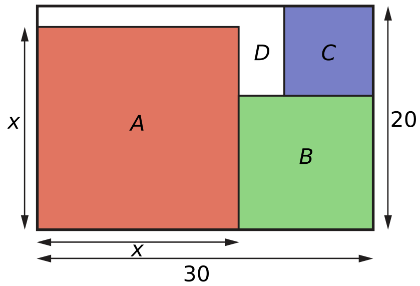
Figuur 3.8

Opgave 13: Drie vierkanten in een rechthoek

In een rechthoek van 20 bij 30 liggen drie vierkanten: A linksonder, B rechtsonder en C rechtsboven. Van elk vierkant valt een van de hoekpunten samen met een van de hoekpunten van de rechthoek. A en B liggen tegen elkaar aan, en B en C ook. Het deel van de rechthoek dat niet bedekt is door de vierkanten noemen we D.

Als de lengte van de zijde van vierkant A gekozen is, liggen de afmetingen van de delen B, C en D vast. De lengte van de zijde van vierkant A noemen we x. Er is een waarde van x waarvoor de oppervlakte van D maximaal is.
Bereken deze waarde van x. Je mag afronden op gehelen.

(naar: examen vwo wiskunde B in 2012, eerste tijdvak)



Figuur 3.9

Opgave 14: Koolmonoxide-uitstoot

Koolmonoxide (CO) is één van de stoffen die via de uitlaat van een auto de lucht inkomt. De hoeveelheid CO die uitgestoten wordt is afhankelijk van de temperatuur van de motor en van de rijsnelheid. Voor de CO-uitstoot bij de warme motor geldt: $u = 4{,}4 + \frac{196{,}0}{v}$. Bij een koude motor geldt: $u = 6{,}9 + \frac{298{,}5}{v}$. Hierin is u de uitstoot in gram per kilometer en v de snelheid in kilometer per uur.

a Hoe kun je aan de formules zien dat de uitstoot per kilometer afneemt als de snelheid toeneemt?

b De uitstoot u van een koude motor bedroeg 14 g/km. Hoe hard reed deze auto?

Iemand is geïnteresseerd in het verschil tussen de uitstoot bij een koude en bij een warme motor. Hij onderzoekt hoeveel procent de uitstoot bij een koude motor meer is dan bij een warme motor. Dat percentage hangt af van de snelheid.

c Hoe groot is dat percentage bij een snelheid van 30 kilometer per uur?

Er bestaan ook formules waarbij de CO-uitstoot gegeven wordt afhankelijk van de ritlengte en de rijtijd. Voor een warme benzinemotor geldt: $u_{\text{tot}} = 4{,}4L + 0{,}054t$. Hierin is u_{tot} de totale hoeveelheid CO in gram uitgestoten tijdens de rit, L de ritlengte in kilometers, t de rijtijd in seconden en $0{,}054$ is afgerond op drie decimalen.

d Laat zien hoe deze formule kan ontstaan uit de eerste formule voor de CO-uitstoot bij een warme motor.

Testen

Opgave 15

Druk in de volgende formules eerst y uit in x en teken met de grafische rekenmachine de bijbehorende grafiek.

a $2x + 4y = 10$

b $3y(2x + 5) = 6$

Opgave 16

Gegeven zijn de formules $y = 2x - \frac{10}{2z}$ en $z = 2x + 1$. Druk y uit in x en plot de bijbehorende grafiek.

Opgave 17

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die bij een bepaalde temperatuur nodig is om 50% van het zaad van een plant te laten ontkiemen. Proefondervindelijk werd dit verband tussen de tijd in dagen en de temperatuur in °C (graden Celsius) gevonden: $t = \frac{89}{T-2}$. Hierin is T de temperatuur in °C en t de tijd in dagen.

a Voor welke temperaturen heeft de formule betekenis?

b Breng de formule in beeld op de grafische rekenmachine. Schrijf de instellingen van het beeldscherm op.

c Bij welke temperatuur duurt het 5 dagen totdat 50% van het zaad is ontkiemd?

Practicum: Grafische rekenmachine

Met een grafische rekenmachine moet je echt leren werken, zo'n machine heeft veel mogelijkheden. Bij wiskunde B moet je er vrijwel alles van af weten uiteindelijk... Met de volgende practica leer je de basistechnieken.

- **Basistechnieken TI84**
- **Basistechnieken TInspire**
- **Basistechnieken Casio fx-CG50**
- **Basistechnieken HPprime**
- **Basistechnieken NumWorks**

Grafieken kun je ook goed maken met Excel. Dat rekenbladprogramma zit tegenwoordig op bijna elke PC. Met de volgende practica leer je enkele basistechnieken.

- **Grafieken bij tabellen**
- **Formules en grafieken**

1.4 Vergelijkingen

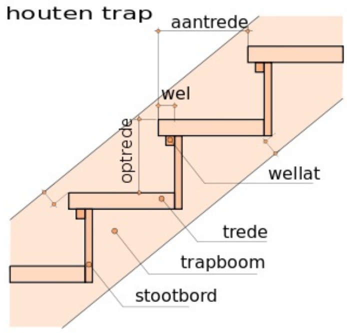
Inleiding

Een architect wil een goede trap ontwerpen. Hij gebruikt daarvoor de formule: $2 \cdot$ *optrede* + *aantrede* = *paslengte*. Hij gaat uit van een paslengte van 70 cm. Voor de optrede wil hij 16 cm nemen. Vult hij deze gegevens in de formule in, dan krijgt hij de vergelijking:

32 + *aantrede* = 70.

Hij kan dus als aantrede nemen: *aantrede* = $70 - 32 = 38$ cm.

Op deze manier heeft hij de vergelijking opgelost. Het getal 38 maakt de vergelijking kloppend: $32 + 38 = 70$.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- systematisch vergelijkingen met één variabele oplossen met al bekende oplossingsmethoden;
- vergelijkingen oplossen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- werken met variabelen (met 'letters');
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt in voorgaande jaren al vergelijkingen opgelost.

a Zet je kennis op een rijtje: welke soorten vergelijkingen ken je en welke oplossingsmethoden ken je?

Een zuiver rechthoekig doosje met een vierkante bodem en een hoogte van 12 cm heeft een buitenoppervlakte (inclusief bodem en deksel) van 512 cm^2.

b Welke afmetingen heeft dat doosje? Beantwoord deze vraag met behulp van een vergelijking.

Uitleg

De formule $\frac{1}{2}(x + 8) = \text{-}7 + x$ is een voorbeeld van een vergelijking.

Bij deze vergelijking kun je een getal voor x zoeken dat de vergelijking waar maakt: aan beide zijden van het isgelijkteken komt er hetzelfde uit. Dat kun je doen met de balansmethode.

Je kunt bijvoorbeeld zo te werk gaan:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(x+8) &= -7+x && \text{linker zijde haakjes wegwerken} \\ \tfrac{1}{2}x+4 &= -7+x && \text{beide zijden } -4 \\ \tfrac{1}{2}x &= -11+x && \text{beide zijden } -x \\ -\tfrac{1}{2}x &= -11 && \text{beide zijden} \times -2 \\ x &= 22 \end{aligned}$$

Je kunt dit antwoord nog controleren door aan beide zijden van de gegeven vergelijking voor x het getal 22 in te vullen.

Opgave 1

Los de vergelijkingen op met de balansmethode. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $3t - 400 = 700 - 2t$

b $2300 - 0{,}15 \cdot p = 1600 + 0{,}42 \cdot p$

c $\frac{x-3}{4} = \frac{1}{5}(10 - 2x)$

d $2 - 5(2x - 4) = -7 + 8(2 + x)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Formules zoals $y = 2x + 3$ of $a + 4b - c = 15$ of $6x + 10 = 2x - 8$ noem je **vergelijkingen**. Je kunt dan waarden (of combinaties van waarden) zoeken die de vergelijking kloppend maken, het **oplossen van een vergelijking**.

Vergelijkingen kun je systematisch oplossen door herleiden. Vooral bij vergelijkingen met één variabele doe je dat vaak. Je gebruikt dan algebraïsche methoden, zoals:

- de **balansmethode**, waarbij je aan beide zijden van het isgelijkteken
  - hetzelfde optelt of aftrekt;
  - met hetzelfde vermenigvuldigt of door hetzelfde deelt (maar niet delen door of vermenigvuldigen met 0).
- de **terugrekenmethode**, waarbij je bewerkingen ongedaan maakt door het tegenovergestelde te doen:
  - optellen maak je ongedaan door aftrekken (en omgekeerd);
  - vermenigvuldigen maak je ongedaan door delen (en omgekeerd);
  - machten maak je ongedaan door worteltrekken (en omgekeerd).
- **ontbinden in factoren**, waarbij je gebruik maakt van het feit dat een vergelijking van de vorm $a \cdot b = 0$ gelijkwaardig is met $a = 0 \vee b = 0$.

Als algebraïsche methoden niet werken, kun je nog denken aan **inklemmen**: je zoekt de oplossing door verschillende waarden te proberen op een steeds kleiner zoekgebied. De grafische rekenmachine heeft daar diverse routines voor ingebouwd, zie het **Practicum**.

Als er staat bereken **algebraïsch** of 'los algebraïsch op', dan moet je de opdracht stap voor stap met behulp van algebra oplossen. Inklemmen is dan bijvoorbeeld niet toegestaan.

Als er staat bereken **exact** of 'los exact op', dan moet je de opdracht ook stap voor stap oplossen en mag je niet afronden.

Voorbeeld 1

In de vergelijking $2(x-4)^2 = 32$ komt de onbekende x maar op één plek voor. Je kunt hem oplossen met terugrekenen.

Antwoord

Je zoekt eerst uit hoe je heen rekent vanuit x:

$$x \xrightarrow{\boxed{-\ 4}} \ldots \xrightarrow{\boxed{(\ldots)^2}} \ldots \xrightarrow{\boxed{\times\ 2}} 32$$

Figuur 4.2

Vervolgens ga je terugrekenen:

$$x \xleftarrow{\boxed{+\ 4}} \ldots \xleftarrow{\boxed{\pm\sqrt{\ldots}}} \ldots \xleftarrow{\boxed{/\,2}} 32$$

Figuur 4.3

Je vindt: $x = \pm\sqrt{\frac{32}{2}} + 4$ en dus $x = 0 \vee x = 8$.

Controleer door in te vullen.

Opgave 2

Los de vergelijkingen op door terugrekenen.

a $5t - 20 = 100$

b $(3 \cdot t - 20)^2 = 1600$

c $3 \cdot p^3 = 81$

d $2\sqrt{2x - 4} = 12$

e $3 \cdot \sqrt{0{,}5x - 4} - 2 = -3$

Voorbeeld 2

Los de vergelijkingen algebraïsch op:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- $x^3 = 4x$

Antwoord

De eerste vergelijking kun je met de productsommethode oplossen. Je zoekt twee getallen waarvan het product +6 is en de som -5. In de tabel zie je dat de getallen -2 en -3 voldoen.

+6		
1	6	
2	3	
-2	-3	← -5
-1	-6	

Figuur 4.4

De eerste vergelijking wordt dan:

$$\begin{aligned} x^2-5x+6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \\ x-2 &= 0 \vee x-3=0 \\ x &= 2 \vee x=3 \end{aligned}$$

De tweede vergelijking:

$$\begin{aligned} x^3 &= 4x \\ x^3-4x &= 0 \\ x\left(x^2-4\right) &= 0 \\ x &= 0 \vee x^2-4=0 \\ x &= 0 \vee x^2=4 \\ x &= 0 \vee x=-2 \vee x=2 \end{aligned}$$

Opgave 3

Los de vergelijkingen op door ontbinden in factoren.

a $0{,}5x^2=4x$

b $k^2+5k-6=0$

c $8p-p^2=0$

d $x(x-2)=3x-6$

e $x^2=x+12$

f $\frac{1}{2}x^3=2x$

Voorbeeld 3

Niet alle vergelijkingen kun je met de balansmethode, door terugrekenen of ontbinden in factoren systematisch oplossen. De oplossing vinden door inklemmen werkt daarentegen altijd wel. Je moet dan van tevoren een idee hebben van het gebied waarin de oplossing is te vinden.
De vergelijking $x+x^2=10$ kun je bijvoorbeeld oplossen met inklemmen.

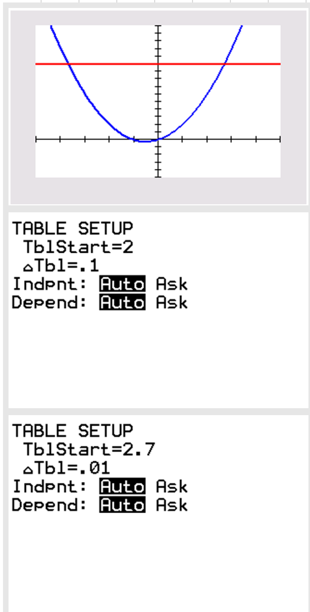
Antwoord

Eerst maak je de grafieken van Y1=X+X^2 en Y2=10 op de grafische rekenmachine. Breng ze zo in beeld dat alle snijpunten zichtbaar zijn. De grafieken snijden elkaar tweemaal. De vergelijking heeft twee oplossingen.

Voor de positieve oplossing moet je zoeken tussen 2 en 3.

Stel de tabel in op stappen (voor x) van 0,1. Je ziet dat je verder moet zoeken tussen 2,7 en 2,8. Het zoekgebied wordt kleiner, je klemt de oplossing in. Stel vervolgens een stapgrootte van 0,01 in en zoek tussen 2,70 en 2,80. Nu zie je dat de oplossing tussen 2,70 en 2,71 ligt, het dichtst bij 2,70. Zo vind je op twee decimalen nauwkeurig: $x \approx 2{,}70$. Als een nauwkeuriger oplossing wordt verlangd, moet je nog verder zoeken tussen 2,700 en 2,710.

Op dezelfde manier bepaal je de andere oplossing. Op twee decimalen nauwkeurig is de volledige oplossing: $x \approx 2{,}70 \vee x \approx -3{,}70$.



Figuur 4.5

Bekijk ook hoe je deze oplossingen door je grafische rekenmachine kunt laten berekenen. Zie het **Practicum**.

Opgave 4

Los de vergelijkingen op met de inklemmethode. Geef je oplossingen in drie decimalen nauwkeurig.

a $x^3 = 4 - x$

b $\frac{600}{a} = 18 + 0{,}04a$

Opgave 5

Los de vergelijkingen op met de grafische rekenmachine. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^3 + 2x = 16$

b $x + \sqrt{x} = 10$

c $l + \frac{10}{l} = 10$

d $\frac{300}{p+4} = 20$

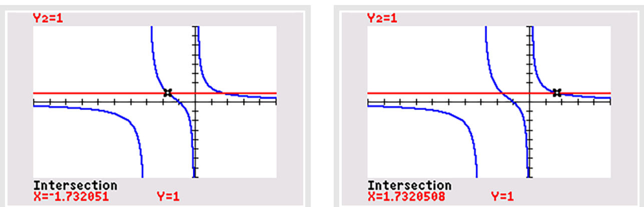
Voorbeeld 4

Los de vergelijking $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+3} = 1$ zowel algebraïsch als met de grafische rekenmachine op.

Antwoord

De oplossing met de grafische rekenmachine is betrekkelijk eenvoudig:

- Voer in: Y1=1/X+2/(X+3) en Y2=1.
- Bekijk de grafieken.
- Je kunt de twee *x*-waarden waar Y1 en Y2 gelijk zijn met de grafische rekenmachine vinden, maar exacte waarden krijg je niet.



Figuur 4.6

Voor de algebraïsche oplossing tel je bijvoorbeeld eerst de breuken bij elkaar op:

$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+3} = \frac{x+3}{x(x+3)} + \frac{2x}{x(x+3)} = \frac{3x+3}{x(x+3)}$

De vergelijking wordt: $\frac{3x+3}{x(x+3)} = 1$ en dus: $3x + 3 = x(x + 3)$.

Let op dat zowel $x \neq 0$ als $x + 3 \neq 0$ moet zijn!

Dit geeft: $x^2 = 3$ en dus $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$.

Je ziet hoe nuttig algebraïsche methoden zijn: je vindt meteen de exacte oplossingen, terwijl je je anders moet behelpen met benaderingen, die vaak nog lastig te vinden zijn ook.

Opgave 6

Los de vergelijkingen zowel algebraïsch als met de grafische rekenmachine op.

a $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

b $\frac{20}{p^2+5} = 2$

c $\frac{10}{2x} + 1 = \frac{x}{x+1}$

d $\frac{5x}{x^2+2x} - \frac{6}{x} = \frac{1}{x+2}$

Verwerken

Opgave 7

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $2x - 3(x+4) = 5x - 18$

b $\sqrt{x+4} = 20$

c $(2x-5)^3 = 125$

d $\sqrt{a^2+4} - 20 = 0$

e $2x^2 - 2 = 12x + 30$

f $(-x+2)(2x+3) = (3-4x)(2x+3)$

Opgave 8

Los de vergelijkingen op door inklemmen met behulp van de grafische rekenmachine. Zoek alle oplossingen.

a $\sqrt{x} = 6 - x$

b $x^4 = 2 + x$

Opgave 9

Bereken bij de formules de waarde van de ene variabele als de andere 0 is.

a $2p - 3q = 650$

b $W = -0{,}25q(0{,}5q - 100)$

c $k^2 + (l+2)^2 = 100$

d $a = \frac{1200}{600+0{,}2d^2} - 1$

e $(x^2-4)(y^2-9) = -36$

f $y^4 + 1 = \frac{4}{1+x^2}$

Opgave 10

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{12}{x+10} = 400$

b $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{3} = -\frac{7}{3}$

c $\frac{2a}{a-1} - \frac{3}{a} = 2$

d $\frac{2x^2-4x+2}{x^4+1} = 0$

e $\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x+2}{2x+2}$

Opgave 11

Los de vergelijking $\frac{2}{\sqrt{5x^2-3}} = \frac{1}{x}$ exact op.

Opgave 12

Stel je voor dat iemand van het Empire State Building een steentje laat vallen. Hij staat 381 m boven de grond. Onder invloed van de zwaartekracht valt een steen eenparig versneld (de luchtweerstand laat je buiten beschouwing). Natuurkundigen hebben daarvoor een rekenmodel bedacht. Daarin hangen de afgelegde weg s (in meter) en de snelheid v (in meter per seconde) af van de tijd t (in seconden) volgens de formules $s = 4{,}9t^2$ en $v = 9{,}8t$.

a Geef een formule voor de hoogte h van het steentje boven de grond als functie van t.

b Bereken het tijdstip waarop het steentje op de grond komt op een decimaal nauwkeurig.

c Bereken de snelheid waarmee het steentje op de grond komt. Geef je antwoord in km/h.

Toepassen

Opgave 13: Probleem met boswal

Een boer wordt door de gemeente gevraagd om een stuk land te voorzien van een boswal van 4 meter breed. Het stuk land is zuiver vierkant. Het grenst aan één kant al aan het bos, zodat er maar aan drie kanten een strook af hoeft voor de boswal. ‘Ik houd zo maar de helft van mijn land over,’ verzucht de boer. Als dat waar is, hoe groot is dan de oppervlakte van het land dat de boer overhoudt?

Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

Opgave 14: Kaarsen maken

Sommige kaarsen zijn bijna zuiver cilindervormig. Stel je voor dat je een kaars wilt maken met een lengte van 20 cm. Je neemt een lont met een diameter van 3 mm en dompelt die een aantal keren in een bad met vloeibaar kaarsvet. Bij elke onderdompeling wordt de diameter van de kaars 1 mm groter. De hoeveelheid kaarsvet V (in mm^3) in de kaars hangt af van het aantal onderdompelingen a.

a Geef een formule voor V als functie van a.

b Breng de grafiek van deze functie met de grafische rekenmachine in beeld.

c Na hoeveel onderdompelingen is de hoeveelheid kaarsvet in de kaars ongeveer 10^6 cm^3? Lees je antwoord eerst uit de grafiek af en bereken het daarna door de bijbehorende vergelijking algebraïsch op te lossen.

Testen

Opgave 15

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $1{,}25t + 5{,}50 = 1{,}85t$

b $0{,}15(p - 2)^2 = 1{,}35$

c $12 - \sqrt{4 + x^2} = 0$

d $\frac{3x-12}{x^2+1} = 0$

e $\frac{1}{x-4} + \frac{x}{5} = -\frac{2}{5}$

Opgave 16

Los op met behulp van de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig: $0{,}25x^4 = 5 - x$.

Practicum

Bekijk in de volgende practica hoe je **vergelijkingen kunt oplossen met je grafische rekenmachine**.

- **Basistechnieken TI84**
- **Basistechnieken TInspire**
- **Basistechnieken Casio fx-CG50**
- **Basistechnieken HPprime**
- **Basistechnieken NumWorks**

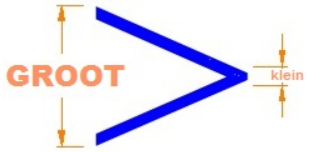
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode, terugrekenen, of ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.5 Ongelijkheden

Inleiding

Als je wilt weten bij welke windsnelheid een windmolen meer dan bijvoorbeeld 20 kW aan vermogen levert, dan moet je een ongelijkheid oplossen. Hetzelfde geldt als je wilt weten vanaf hoeveel gereden kilometer per jaar een auto op benzine duurder is dan één op diesel. Over het oplossen van ongelijkheden gaat dit onderdeel.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- ongelijkheden systematisch algebraïsch oplossen.
- ongelijkheden oplossen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- grafieken maken met de grafische rekenmachine bij formules die het verband tussen twee variabelen beschrijven;
- vergelijkingen systematisch oplossen, zowel algebraïsch als met de grafische rekenmachine.

Verkennen

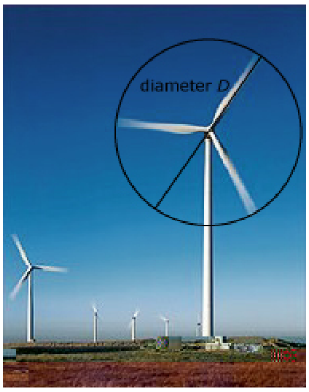
Opgave V1

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo’n molen levert, hangt af van de wieklengte (dat is de halve diameter van de rotor) en van de windsnelheid v.

Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0{,}052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en $0{,}052$ een getal dat afhangt van het type molen.

a Stel, je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Welke ongelijkheid hoort daar bij?

b Hoe ga je zo'n ongelijkheid oplossen?



Figuur 5.2

Uitleg

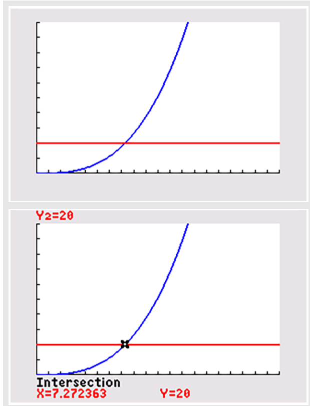
Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo'n molen levert hangt af van de wieklengte en van de windsnelheid v.

Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0{,}052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien is 20 meter. Stel je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Daarbij hoort de ongelijkheid $0{,}052v^3 > 20$.

Het oplossen van deze ongelijkheid gaat prima met de grafische rekenmachine:

- Je voert Y1=0.052X^3 en Y2=20 in en brengt ze goed in beeld.
- Je bepaalt het snijpunt van beide grafieken: $(7{,}27; 20)$. De grafische rekenmachine heeft er een speciale routine voor, bekijk de figuren.
- Je leest de oplossing van de ongelijkheid uit de figuur af: $v > 7{,}27$.

Belangrijk is nog het aantal decimalen waarop je moet afronden. Het gegeven antwoord is op twee decimalen nauwkeurig juist. Moet je echter op één decimaal nauwkeurig afronden, dan is het antwoord: $v > 7{,}3$. Je weet dan dat je antwoord ergens boven de $7{,}25$ ligt.



Figuur 5.3

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe de ongelijkheid $0{,}052v^3 > 20$ wordt opgelost. Daarbij wordt de grafische rekenmachine gebruikt.

Bij een algebraïsche aanpak bereken je eerst de oplossingen van de vergelijking $0{,}052v^3 = 20$ met behulp van terugrekenen.

a Laat zien dat je dan dezelfde oplossing vindt.

b Wat is het voordeel van een algebraïsche aanpak?

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $y_1 = 0{,}01x(x^2 - 400)$ en $y_2 = x$. Je wilt $y_1 < y_2$ oplossen.

a Hoe moet je het venster van de grafische rekenmachine instellen om goede grafieken bij deze ongelijkheid te krijgen?

b Hoe vaak snijden de grafieken elkaar?

c Los nu de ongelijkheid met de grafische rekenmachine op in twee decimalen nauwkeurig.

Om zeker te weten dat je alle snijpunten van de grafieken hebt gevonden, kun je de bijbehorende vergelijking beter algebraïsch oplossen. Wil je een ongelijkheid algebraïsch oplossen, dan los je de bijbehorende vergelijking algebraïsch op en lees je daarna de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.

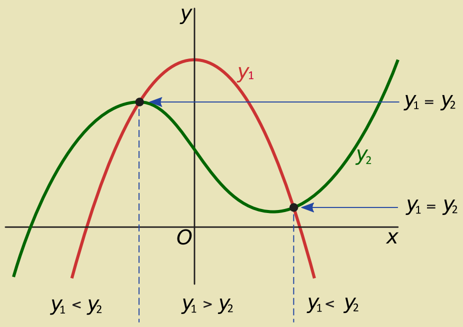
d Los de bij deze ongelijkheid horende vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een uitdrukking zoals $y_1 < y_2$ of $y_1 > y_2$, heet een **ongelijkheid** als zowel y_1 als y_2 functies zijn van dezelfde variabele, bijvoorbeeld x. Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.

- Eerst voer je beide functies in de grafische rekenmachine in.
- Vervolgens breng je ze goed in beeld. Alle snijpunten moeten zichtbaar zijn!
- Dan bepaal je de snijpunten. Dat kan met de grafische rekenmachine, zie het **Practicum: Basistechnieken GR**. Dat kan vaak ook door de vergelijking $y_1 = y_2$ **algebraïsch** op te lossen. Soms is dit veel handiger, of wordt het zo gevraagd.
- Vervolgens lees je de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af. Let daarbij goed op de gewenste nauwkeurigheid!



Figuur 5.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Los op: $60 - x^2 \geq 4x$.

Antwoord

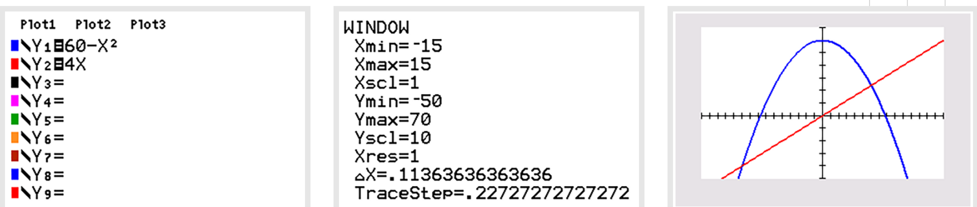
Je bekijkt eerst de grafieken van $y_1 = 60 - x^2$ en $y_2 = 4x$. Bij de meeste waarden van x zijn de functiewaarden verschillend. Alleen bij de snijpunten zijn de functiewaarden gelijk.

De coördinaten van de snijpunten vind je door op te lossen: $60 - x^2 = 4x$.

Je vindt: $x = -10 \vee x = 6$.

Ga ook na hoe je dit met je grafische rekenmachine doet.

Lees nu uit de figuur af dat de oplossing van de ongelijkheid is: $-10 \leq x \leq 6$.



Figuur 5.5

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je een ongelijkheid systematisch oplost. Je gaat nu zelf de ongelijkheid $60 - x^2 < 4x$ algebraïsch oplossen.

a Los de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ algebraïsch op.

b Schrijf de juiste oplossing van de ongelijkheid op. Hij bestaat uit twee delen.

Opgave 4

Je wilt de ongelijkheid $x^2(10 - x) > 2x^2$ oplossen.

a Met welke vensterinstellingen krijg je de grafieken van $y_1 = x^2(10 - x)$ en $y_2 = 2x^2$ goed in beeld? (Alle snijpunten moeten zichtbaar zijn.)

b Los de ongelijkheid op met behulp van de grafische rekenmachine.

Voorbeeld 2

Een verfhandelaar heeft een mengmachine van € 2000,00. De inkoopprijs van de verf en de kosten van het mengproces komt samen op € 5,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 7,25 per liter. Hij maakt winst als de opbrengst TO groter is dan de totale kosten TK. Met voorraadkosten wordt geen rekening gehouden. Bereken algebraïsch vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst gaat maken.

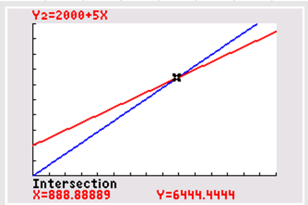
Antwoord

Er geldt: $TK = 2000 + 5q$ en $TO = 7{,}25q$. In de formule is q de verkochte hoeveelheid liter verf.

Er moet gelden: $TO > TK$, dus $7{,}25q > 2000+5q$. Met de grafische rekenmachine breng je de grafieken van TO en TK goed in beeld. Het snijpunt moet zichtbaar zijn.

Vervolgens bereken je dit snijpunt algebraïsch: $7{,}25q = 2000 + 5q$ geeft $2{,}25q = 2000$ en dus $q \approx 888{,}9$ liter.

In de grafiek lees je af dat de handelaar winst maakt als $q \geq 889$. Dus als hij 889 liter verf of meer verkoopt maakt hij winst.



Figuur 5.6

Opgave 5

Een concurrent van de verfhandelaar uit het voorbeeld koopt een mengmachine van € 3000,00. De inkoopprijs en de kosten van het mengproces samen is € 4,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 8,25 per liter.
Bereken algebraïsch vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst maakt.

Opgave 6

Stel je voor dat je al jaren in een auto op benzine rijdt. De benzineprijs blijft echter maar stijgen en je vraagt je af of je niet beter een gastank kunt laten inbouwen en op gas kunt gaan rijden. Nu zijn je kosten per kilometer ongeveer 12,5 eurocent aan benzine.

a Stel een formule op voor de benzinekosten per jaar (B in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers (a).

b Een gastank kost (inclusief inbouwen) € 1250,00. Je kosten per kilometer gaan omlaag, want gas kost 80 eurocent per liter en je rijdt 10 kilometer op 1 liter gas. Je wilt de gastank in één jaar terugverdienen. Stel een formule op voor de kosten in het eerste jaar dat je op gas rijdt (G) afhankelijk van het aantal kilometer (a).

c Je wilt weten hoeveel kilometer je in dat jaar moet rijden om de gastank er weer uit te hebben. Welke ongelijkheid hoort daar bij?

d Los deze ongelijkheid algebraïsch op met a in kilometer nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 7

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $x^3 > x$

b $x^3 \leq 80x - 2x^2$

c $\frac{8}{x^2} \geq x$

d $x^2 - 4x > -3$

Opgave 8

Gegeven is de functie $y = 100x^2(x - 20)^2$.

a Los op (in twee decimalen nauwkeurig): $y < 100000$.

b Los algebraïsch op: $y \leq 100x^2$.

Opgave 9

Een winkelier koopt maandelijks fietsen in voor € 300,00 per stuk. Deze slaat hij op in een magazijn. Voor het gebruiken van dit magazijn betaalt hij een huur van € 950,00 per maand. Daarnaast heeft hij personele kosten van € 5200,00 per maand. Hij verkoopt de fietsen voor € 425,00 per stuk.

a Hoeveel fietsen moet de winkelier in een maand verkopen wil hij die maand winst maken? Ga ervan uit dat hij alle fietsen die hij inkoopt dezelfde maand nog verkoopt.

b In een maand heeft de winkelier 200 fietsen gekocht. Hoeveel van die fietsen moet hij minstens verkopen om alle kosten van die maand te dekken?

Opgave 10

Twee auto's rijden op de A1, beide met een (ongeveer) constante snelheid. Bestuurder A houdt een snelheid van 110 km/h aan. Bestuurder B rijdt met 120 km/h. Als bestuurder B bij de IJsselbrug bij Deventer komt ligt hij 24 kilometer achter op bestuurder A. Het tijdstip waarop dat gebeurt is $t = 0$. De afstand (in kilometer) tot Deventer wordt voorgesteld door a.

a Stel bij beide auto's een functie voor a als functie van t op.

b Bereken na hoeveel minuten auto A door B wordt ingehaald.

c Bereken algebraïsch hoelang hun onderlinge afstand minder dan 4 kilometer is.

Opgave 11

Los de ongelijkheden zo mogelijk algebraïsch op. Geef benaderde antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

a $\sqrt{p} \geq -p + 6$

b $x\sqrt{x} > x(4x - 1)$

c $3(m-1)(m^2 - 4) \leq m^2 - 3m - 2$

d $(4a - 4)\frac{1}{a} < 2\left(a - \frac{1}{a}\right)$

Toepassen

Opgave 12: Smart ForTwo

Je rijdt al een Smart Fortwo voor € 4,00 per dag! Stel je hebt op 1 januari 2015 een Smart gekocht en betaalt hiervoor € 4,00 per dag. Daarnaast heb je onderhoudskosten: voor 2,5 eurocent per gereden kilometer kun je daarvoor een abonnement afsluiten waar vrijwel alle onderhoudskosten mee worden afgedekt. Je hebt dan dus alleen nog benzinekosten. Je kunt met 1 liter benzine 20 kilometer rijden en 1 liter benzine kost ongeveer € 1,60.

Figuur 5.7

a Hoeveel eurocent per kilometer ben je kwijt aan benzine en onderhoud samen?

b Hoeveel kost deze Smart je per jaar als je er 16000 kilometer per jaar mee rijdt?

c Stel een ongelijkheid op bij de vraag: Hoeveel kilometer per jaar mag je maximaal met deze Smart rijden als je minder dan € 5000,00 kwijt wilt zijn dat jaar? Los daarna die ongelijkheid algebraïsch op.

d Eigenlijk geldt het onderhoudsabonnement van 2,5 eurocent per gereden kilometer pas vanaf 20000 km/jaar. Rijd je minder, dan betaal je alsof je 20000 km/jaar rijdt. Stel de formule op voor de jaarlijkse kosten K als functie van het aantal gereden kilometers.

Opgave 13: Deterministisch modelleren

Deterministisch modelleren is een tak van wiskunde die onder andere veel gebruikt wordt in de transport. Een voorbeeld hiervan is het zogenaamde ‘knapzakprobleem’. Stel, Frits wil backpacken in de Vogezen. Hij wil zoveel mogelijk eten en drinken meenemen, maar hij kan niet meer dan 10 kg aan voedselvoorraden dragen. Ieder blik eten weegt 1,5 kg en iedere fles drinken weegt 0,5 kg. Hij wil minstens vijf flessen drinken meenemen, en minstens vier blikken eten. Het knapzakprobleem luidt hier: hoe kan Frits zijn tas optimaal inpakken?

a Stel de ongelijkheden op die dit knapzakprobleem beschrijven.

b Schrijf de ongelijkheden om naar vergelijkingen en teken deze als grafieken. Bepaal aan de hand van deze tekening op hoeveel manieren de voedselvoorraad van Frits samengesteld kan worden.

c Frits pakt het liefst zijn tas zo vol mogelijk in. Om minder dan 10 kg aan voorraden mee te nemen is zonde. Hoe kun je op de tekening makkelijk aflezen wat de samenstelling(en) zijn, gegeven het feit dat Frits zijn tas zo vol mogelijk inpakt? Geef deze samenstelling(en).

Testen

Opgave 14

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $12 - 2x < 2x^2$

b $\frac{1}{x} \geq 0{,}25x$

Opgave 15

De afstand Utrecht — Enschede is voor een fietser 144 kilometer. Fietser A gaat met 18 km/h van Utrecht naar Enschede. Fietser B gaat met 24 km/h van Enschede naar Utrecht. Beide fietsers starten tegelijkertijd. Hoelang is fietser A dichter bij Utrecht, dan fietser B. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van ongelijkheden**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.6 Stelsels

Inleiding

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden en die kun je op verschillende manieren oplossen. Over het oplossen van dergelijke stelsels vergelijkingen gaat dit onderdeel.

Figuur 6.1

Je leert in dit onderwerp

- systematisch een stelsel van vergelijkingen met twee variabelen oplossen;
- gebruik maken van substitutie;
- een stelsel van vergelijkingen met twee variabelen opstellen aan de hand van gegevens.

Voorkennis

- werken met variabelen (met 'letters');
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Noem het aantal kinderen x en het aantal volwassenen y.
Welke twee vergelijkingen krijg je? En hoe los je nu het probleem op?

Uitleg

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop.
Bereken hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Noem het aantal kinderen x en het aantal volwassenen y, dan geldt $x + y = 300$. De totale inkomsten zijn $2{,}5x + 4{,}5y$ en dat is samen 1110 euro: $2{,}5x + 4{,}5y = 1110$.

Je hebt nu twee vergelijkingen met twee onbekenden, een stelsel van vergelijkingen. Je schrijft dat zo:

$$\begin{cases} x + y & = & 300 \\ 2{,}5x + 4{,}5y & = & 1110 \end{cases}$$

Door deze vergelijkingen handig te combineren kun je een stelsel van vergelijkingen oplossen, dat wil zeggen: waarden voor x en y vinden die er samen voor zorgen dat beide vergelijkingen waar zijn.

De vergelijking $x+y=300$ kun je schrijven als $y=300-x$. Vervang nu in de andere vergelijking y door $300-x$. Dat heet substitutie. Je krijgt dan: $2{,}5x+4{,}5(300-x)=1110$.

Deze vergelijking heeft alleen x als onbekende. Hij is dus op te lossen: $x=120$. Er zaten daarom 120 kinderen in de zaal.

Opgave 1

Bekijk het stelsel van vergelijkingen in de **Uitleg**.

a Herleid de vergelijking $2{,}5x+4{,}5y=1110$ tot de vorm $y = ...$

b Los het stelsel van vergelijkingen op door de formule die je bij a hebt gevonden in de andere vergelijking te substitueren.

c Waarom is het handiger om te werken zoals in de uitleg is gedaan?

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** de oplossingsmethode van het stelsel van vergelijkingen. Gegeven is het stelsel:

$$\begin{cases} 2x + y & = & 6 \\ x - 3y & = & -4 \end{cases}$$

a Druk in de eerste vergelijking y uit in x.

b Vul de gevonden uitdrukking voor y in de tweede vergelijking in. Welke vergelijking in x ontstaat nu?

c Los de vergelijking die je bij b hebt gevonden op.

d Bepaal bij de gevonden waarde voor x de bijbehorende waarde voor y. Schrijf je oplossing nu volledig op en controleer je antwoord.

e Je kunt dit stelsel van vergelijkingen ook oplossen door x uit te drukken in y. Los ook op die manier het stelsel op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het oplossen van een **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** zoek je in feite naar de snijpunten van twee bijpassende grafieken. Die snijpunten kun je vaak vinden:

- door beide vergelijkingen met elkaar te **combineren** en er zo één vergelijking met één onbekende van te maken;
- door beide vergelijkingen zo te herschrijven dat je ze in de grafische rekenmachine kunt invoeren en dan de gevraagde snijpunten door de machine te laten berekenen.

Bij het combineren van beide vergelijkingen maak je gebruik van:

- **substitutie**: Je drukt bij één van beide vergelijkingen de ene variabele in de andere uit en je vervangt dan in de andere vergelijking die variabele door de gevonden uitdrukking;
- de **balansmethode**: Je telt dan de linkerzijden en de rechterzijden van beide vergelijkingen bij elkaar. Je zorgt er wel eerst voor dat dan één van beide variabelen wegvalt (door een slimme vermenigvuldiging toe te passen).

Voorbeeld 1

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Bereken hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Antwoord

Je kunt het stelsel van vergelijkingen dat hierbij hoort ook oplossen door combineren. Je schrijft:

$$\begin{cases} x+y &= 300 \\ 2{,}5x+4{,}5y &= 1110 \end{cases}$$

Vermenigvuldig je de bovenste vergelijking met $2{,}5$, dan krijg je:

$$\begin{cases} 2{,}5x+2{,}5y &= 750 \\ 2{,}5x+4{,}5y &= 1110 \end{cases}$$

Als je van de bovenste vergelijking links van het isgelijkteken de linkerzijde van de onderste vergelijking en rechts van het isgelijkteken de rechterzijde van de bovenste vergelijking aftrekt, dan krijg je: $2y=360$.

Deze vergelijking heeft alleen y als onbekende. Hij is dus op te lossen: $y=180$. Er zaten daarom $300-180=120$ kinderen in de zaal.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je een stelsel van vergelijkingen kunt oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken).

a Voer zelf de in het voorbeeld beschreven oplossingsmethode uit.

b Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door de bovenste vergelijking aan beide zijden met $4{,}5$ te vermenigvuldigen. Laat zien hoe dan de oplossing verloopt.

c Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door de bovenste vergelijking aan beide zijden met 5 te vermenigvuldigen en de onderste vergelijking aan beide zijden met -2. Laat zien hoe dan de oplossing verloopt.

Opgave 4

Los de stelsels vergelijkingen op de manier van **Voorbeeld 1** op.

a $\begin{cases} 2x + y &= 6 \\ x - 3y &= -4 \end{cases}$

b $\begin{cases} 5x - 4y &= 8 \\ 2x - 2y &= 3 \end{cases}$

Voorbeeld 2

Je kunt een stelsel ook oplossen met de grafische rekenmachine.

Los bijvoorbeeld dit stelsel zo op:

$$\begin{cases} x + y &= 300 \\ 2{,}5x + 4{,}5y &= 1110 \end{cases}$$

Antwoord

De vergelijking $x + y = 300$ kun je schrijven als $y = 300 - x$. En de vergelijking $2{,}5x + 4{,}5y = 1110$ kun je schrijven als $y = -\frac{5}{9}x + 246\frac{2}{3}$.

Voer je beide vergelijkingen in de grafische rekenmachine in, dan kun je de grafieken bekijken. Zowel x als y kunnen waarden aannemen vanaf 0 t/m 300, dus de vensterinstellingen liggen voor de hand. Met de grafische rekenmachine kun je het snijpunt in de tabel vinden: $x = 120$ en $y = 180$.

Figuur 6.2

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je een stelsel van vergelijkingen kunt oplossen met de grafische rekenmachine. Los het stelsel van vergelijkingen op die manier op.

$$\begin{cases} 2x + y &= 6 \\ x - 3y &= -4 \end{cases}$$

Opgave 6

Los de stelsels van vergelijkingen op met de grafische rekenmachine. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $\begin{cases} 12x + 5y &= -14 \\ 24x + 7y &= 44 \end{cases}$

b $\begin{cases} 0{,}56x - 2y &= 0{,}82 \\ -0{,}33x + 3y &= 9{,}12 \end{cases}$

Voorbeeld 3

Welke afmetingen heeft een rechthoekig grasveld met een oppervlakte van 120 m^2 en een omtrek van 46 meter?

Antwoord

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b. Een oppervlakte van 120 m^2 betekent $l \cdot b = 120$. Een omtrek van 46 meter betekent $2l + 2b = 46$.

Dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden is alleen algebraïsch op te lossen door middel van substitutie. Schrijf $2l + 2b = 46$ als $l = 23 - b$ en vervang in de andere vergelijking l door deze uitdrukking. Je krijgt:
$(23 - b) \cdot b = 120$.

De vergelijking $(23 - b) \cdot b = 120$ schrijf je als $b^2 - 23b + 120 = 0$. Door ontbinden in factoren vind je $b = 8 \vee b = 15$.

Het grasveld is 15 bij 8 meter.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Waarom kun je dit stelsel van vergelijkingen niet oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken)?

b Laat zien hoe je dit stelsel kunt oplossen met behulp van de grafische rekenmachine.

Opgave 8

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + 2y &= 6 \\ 2x + 4y &= 14 \end{cases}$$

a Probeer dit stelsel van vergelijkingen op te lossen.

b Welk probleem doet zich voor?

c Leg uit waarom dit stelsel van vergelijkingen geen oplossingen heeft.

Verwerken

Opgave 9

Los het stelsel van vergelijkingen op.

$$\begin{cases} 6x + 3y &= 20 \\ 2x + y &= 5 \end{cases}$$

Opgave 10

Los de stelsels van vergelijkingen op.

a $$\begin{cases} x + y &= 6 \\ 2x - 3y &= 0 \end{cases}$$

b $$\begin{cases} 2x + 4y &= 7 \\ 3x + 5y &= 8 \end{cases}$$

c $\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 6 \end{cases}$

d $\begin{cases} x \cdot y = 84 \\ 2x + y = 29 \end{cases}$

e $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ y - 2x = 5 \end{cases}$

Opgave 11

Van een rechthoek is de oppervlakte 300 cm^2 en de omtrek 80 cm. Noem de lengte l en de breedte b, beide in centimeter.

Stel twee vergelijkingen op waaraan l en b moeten voldoen. Bereken de oplossing van dit stelsel.

Opgave 12

Op een kaasboerderij wordt van 9,8 kilogram melk 1 kilogram volvette kaas gemaakt. 22,5 kilogram melk verwerken ze daar tot 1 kilogram boter. Er is 1000 kilogram melk in voorraad. Er wordt altijd twee keer zo veel boter als kaas gemaakt.

Hoeveel kilogram kaas en hoeveel kilogram boter kan er van de beschikbare hoeveelheid melk worden gemaakt? Los dit probleem op met behulp van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Opgave 13

Voor een heg koopt iemand jonge groenblijvende planten: 20 thuja's en 12 jeneverbessen. Dat kost hem € 267,00. Na het planten blijven er twee jeneverbessen over, maar zijn er vijf thuja's te kort. Bij het tuincentrum ruilen ze de twee jeneverbessen voor vijf thuja's, maar er moet € 18,00 worden bijbetaald.

Wat kost een thuja en wat kost een jeneverbes?

Toepassen

Opgave 14: Drie vergelijkingen met drie onbekenden

Los het stelsel van drie vergelijkingen op.

$$\begin{cases} 3x + 3y + z = 4 \\ 2x - y + z = 24 \\ -x + 3y + 2z = -47 \end{cases}$$

Opgave 15: Een restaurant beginnen

Een beginnend restaurant koopt tafelgerei in: borden, kommen, en bestek. De uiteindelijke bestelling voldoet aan een paar criteria.
Borden koop je in sets van vijf, en een set kost € 7,50. Kommen zijn te koop in sets van vier, voor € 4,80 per set. Bestek kost € 6,00. Afzonderlijke borden en kommen zijn $0{,}4$ kg per stuk, en een bestekset weegt 2 kg.
De manager wil dat er twee keer zoveel borden als kommen ingekocht worden. De eindbestelling weegt 500 kg, en het totale kostenplaatje is € 1560,00.

a Stel een stelsel van drie vergelijkingen op die aan het bovenstaande voldoet, en waarmee je kan uitrekenen hoeveel borden, kommen en bestek er besteld zijn.

b Los het stelsel van vergelijkingen op. Hoeveel sets borden, kommen en bestek zijn er besteld?

Testen

Opgave 16

Los de stelsels van vergelijkingen op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $\begin{cases} 3a + 4b = 10 \\ a - 2b = 4 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 5y = 15 \end{cases}$

c $\begin{cases} p \cdot q = 400 \\ q = 200 - 0 \quad 5p \end{cases}$

d $\begin{cases} -3x^2 + y^2 = -27 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

Opgave 17

In een klein theater zijn twee soorten plaatsen: ‘zaal’ en ‘balkon’. Voor een bepaalde voorstelling kost een zaalplaats € 12,50 en een balkonplaats € 15,00. Er worden die avond 82 kaarten verkocht met een totale opbrengst van € 1080,00.

Hoeveel mensen hadden een balkonplaats?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van stelsels vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Werken met formules**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- formule — variabele — grootheid — eenheid
- herschrijven — uitdrukken in — haakjes uitwerken — ontbinden in factoren
- functie
- vergelijking — vergelijking oplossen — balansmethode — terugrekenen — inklemmen
- ongelijkheid — oplossing van een ongelijkheid
- stelsel van vergelijkingen — oplossingen van een stelsel van vergelijkingen

Activiteitenlijst

- soorten formules herkennen — grafieken maken bij verbanden tussen twee variabelen
- formules herschrijven — de éne variabele uitdrukken in de andere — formules combineren
- formules invoeren in de grafische rekenmachine en grafieken erbij maken
- vergelijkingen oplossen met alle bekende methoden
- ongelijkheden oplossen met behulp van grafieken
- stelsels vergelijkingen oplossen met alle bekende methoden

Achtergronden

Het gebruik van formules is een betrekkelijk recente ‘uitvinding’. De Franse amateurwiskundige **François Viète (1540—1603)** was de eerste die een systematische symbolische notatie voor algebraïsche problemen bedacht. Hij gebruikte letters voor onbekenden: klinkers voor variabelen en medeklinkers voor constanten (die hij als eerste coëfficiënten noemde). Zijn bijdrage aan de theorie van het oplossen van vergelijkingen is mede daardoor heel groot, want voor die tijd moesten alle oplossingsmethoden in woorden worden omschreven...

Figuur 7.1

Al eerder had de theoloog **Nicole d'Oresme (1323—1382)** voor zijn natuurkundige onderzoekingen de grafiek uitgevonden. Maar pas nadat **René Descartes (1596—1650)** de beschrijving van rechte en kromme lijnen met behulp van formules bedacht, werd het gebruik van grafieken zoals wij die tegenwoordig kennen langzamerhand gemeengoed. Descartes gebruikte voor variabelen letters achterin het alfabet (vaak x, y en z) en voor constanten letters voor in het alfabet. Dat doen wiskundigen tegenwoordig nog steeds... Daarom weet je dat de formule $y = ax + b$ een (lineair) verband beschrijft tussen x en y, waarin a en b constanten zijn.

Testen

Opgave 1

Los deze vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen nauwkeurig.

a $-0{,}15(x+25)^2+15=0$

b $4\cdot(t-2)^3=16$

c $\frac{8x}{x-3}=x+3$

d $2k^2-2k=180$

e $\frac{1}{x}+x=5{,}2$

f $(2x-9)(5x+3)=(2x-4)(2x-9)$

Opgave 2

Los de vergelijking $x^2+\sqrt{2x}=20$ op met behulp van de grafische rekenmachine. Geef een benadering in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $4-x^2>3x$

b $20x(10+x)^2\leq 80x$

Opgave 4

Los de stelsels van vergelijkingen algebraïsch op.

a $\begin{cases}3x-4y=12\\4x+3y=12\end{cases}$

b $\begin{cases}K=40+0{,}16a\\K=36+0{,}18a\end{cases}$

c $\begin{cases}2x+2y=6\\2y^2-x^2=-2\end{cases}$

d $\begin{cases}2l-3b=6\\l\cdot b=12\end{cases}$

Opgave 5

Vanaf een toren wordt een vuurpijl afgeschoten. De hoogte h van de vuurpijl hangt af van de tijd t dat deze onderweg is. Er geldt: $h=100+40t-5t^2$. Hierin is h in meter en t in seconden gemeten.

a Breng de grafiek van h in beeld op de grafische rekenmachine.

b Op welke hoogte boven de begane grond werd de vuurpijl afgeschoten?

c Na hoeveel seconden was de vuurpijl weer op diezelfde hoogte?

d Na hoeveel seconden was de vuurpijl op het hoogste punt in zijn baan?

e Hoeveel meter boven de begane grond was hij op dat moment?

f Na hoeveel seconden kwam de vuurpijl op de grond terecht?

g Kun je met deze gegevens de baan van de vuurpijl in beeld brengen? Licht je antwoord toe.

Opgave 6

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in doosjes met een vierkante bodem. Voor een doosje gebruikt hij 800 cm^2 karton. Ga ervan uit dat een doosje precies de vorm van een balk heeft.

a De hoogte van zo'n doosje wordt aangegeven met h en de zijde van het grondvlak met x. Laat zien dat het verband tussen h en x beschreven wordt door de formule: $4xh + 2x^2 = 800$.

b De verpakkingsmachine laat een maximale hoogte van 12 centimeter toe. Bepaal de waarde van x bij $h = 12$ cm. Geef de benadering in mm nauwkeurig.

Opgave 7

Iemand investeert € 10000,00. Het bedrag wordt voor hem belegd in twee aandelenfondsen A en B. De aandelen in fonds A leveren minder winst op, maar er lijkt weinig risico te bestaan dat ze sterk in waarde dalen. Fonds B lijkt meer winst op te gaan leveren, maar het risico is groter. Fonds A blijkt na een jaar een winst van 10% te hebben opgeleverd, voor fonds B is dit 14% winst. In totaal wordt er € 1180,00 winst aan deze investeerder uitgekeerd.

Hoeveel geld is er voor hem in fonds A belegd?

Toepassen

Opgave 8: Windmolens

Windmolens kunnen elektriciteit opwekken. Voor een zekere windmolen wordt dat aangegeven door de formule: $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en D de rotordiameter in m.

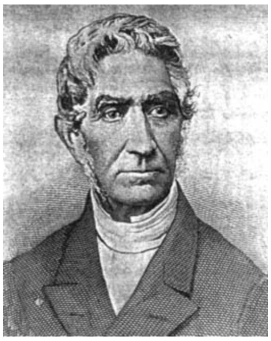
a Ga uit van een windmolen met een diameter van 24 m. Bij welke windsnelheid in km/h wordt een vermogen van 26 kW opgewekt?

b Ga weer uit van een vermogen van 26 kW. Welke diameter de windmolen moet hebben, kun je dan nog berekenen. Stel een formule op die D uitdrukt in v.

c In een bepaald gebied ligt de windsnelheid tussen de $7{,}2$ en de 36 km/h. Als je een (gemiddeld) vermogen van 26 kW met een windmolen wilt opwekken, tussen welke waarden kies je dan de diameter van die molen?

Opgave 9: Body Mass Index (BMI)

De BMI is hetzelfde als de zogenaamde ‘Quetelet Index’ die is bedacht door de Belgische statisticus **Adolphe Quetelet**. De BMI is een maat voor je gezondheid. Je berekent de BMI met de formule: $BMI = \frac{G}{l^2}$. Hierin is l je lengte in meters en G je gewicht in kilogram.



Figuur 7.2

Voor volwassenen is er een eenvoudige interpretatie van de BMI die in deze tabel worden aangegeven.

BMI kg/m ^{2}	interpretatie
minder dan 18,5	ondergewicht
van 18,5 tot 25	normaal gewicht
van 25 tot 27	licht overgewicht
van 27 tot 30	matig overgewicht
van 30 tot 40	ernstig overgewicht
meer dan 40	ziekelijk overgewicht

Tabel 7.1

Voor kinderen en jongeren tot 18 jaar bestaan andere tabellen. Zoek maar eens op internet.

a In de Wikipedia vind je een rekenvoorbeeld. In mei 2014 werd berekend dat de BMI van een persoon van 90 kg en een lengte van 173 cm ongeveer 30 is. Laat zien dat dit klopt.

Van een volwassene verandert zijn lengte niet veel meer. Neem bijvoorbeeld een volwassene die een lengte heeft van 1,73 m.

b Welke formule geldt dan voor de BMI afhankelijk van zijn gewicht G?

c Bereken welk gewicht (in gehele kg) voor zo'n volwassene een gezond gewicht is.

In veel artikelen over de BMI wordt de tabel hierboven vertaald naar grafieken waarin het gewicht G afhangt van de lengte l. Er worden dan in een figuur bijvoorbeeld grafieken getekend bij $BMI = 18{,}5$ en $BMI = 25$. Het gebied ertussen wordt ingekleurd als ‘normaal gewicht’.

d Druk G uit in l als geldt $BMI = 18{,}5$.

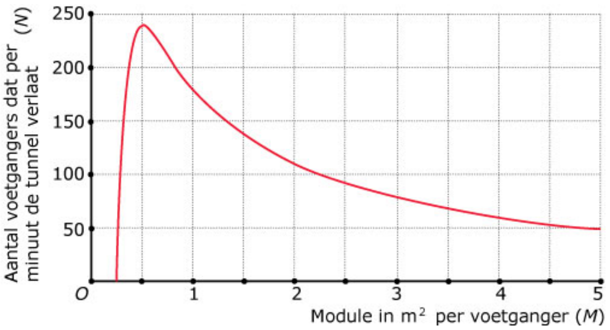
e Teken de grafieken van G als functie van l bij $BMI = 18{,}5$ en $BMI = 25$ en geef het gebied aan met normaal gewicht. Doe dit ook voor alle andere grenswaarden in de BMI-tabel en geef ook daarbij de tussenliggende gebieden met de juiste interpretatie aan. Neem voor l redelijke waarden.

f Wat is in de dagelijkse praktijk van voedingsdeskundigen het voordeel van dergelijke grafieken boven een formule?

Examen

Opgave 10: Drukte in voetgangerstunnels

Treinreizigers die op het station te U. uitstappen, kunnen de uitgang van het station alleen bereiken via een voetgangerstunnel. De tunnel is 30 meter lang en 3 meter breed. De snelheid van de voetgangersstroom in de tunnel is afhankelijk van de drukte. Een maat voor de drukte is de module, dat is het gemiddelde aantal vierkante meter per voetganger.



Figuur 7.3

a Op zeker moment bevinden zich 120 mensen in de tunnel, die allen in de richting van de uitgang lopen. Bereken voor deze situatie de module.

Het verband tussen de snelheid van de voetgangersstroom V en de module M wordt gegeven door de formule $V = 87 - \frac{26}{M+0{,}05}$ met V in meter per minuut en M in m^2 per voetganger.

b Bereken de module bij een snelheid van 50 m per minuut. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Wanneer een voetganger ongehinderd kan lopen, is zijn snelheid ongeveer 5 km/h. Onderzoek of dat in overeenstemming is met de formule.

Er bestaat een verband tussen de waarde van M en het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat (N). Het verband tussen M en N staat grafisch weergegeven in de figuur.

d Schat zo nauwkeurig mogelijk hoeveel mensen er per minuut de tunnel verlaten in het geval dat de snelheid van de voetgangersstroom 70 m per minuut is.

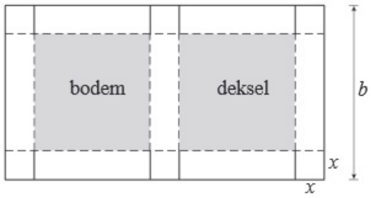
Een belangrijk gegeven bij het ontwerpen van een tunnel is het maximale aantal mensen dat in korte tijd kan worden verwerkt.

e Bij welke snelheid is het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat maximaal? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 1989, tweede tijdvak)

Opgave 11: Dozen

Deze opgave gaat over dozen die op een bepaalde manier uit een rechthoekig stuk karton worden gemaakt. Denk aan een pizzadoos. Zie de figuur. Neem een stuk karton met een breedte van b cm. Wil je een doos maken die x cm hoog wordt, dan moet je voor de lengte van het stuk karton $2b - x$ cm nemen. Op zes plaatsen worden vierkantjes van x bij x cm losgesneden en omgevouwen. De stippellijnen zijn vouwlijnen; de doorgetrokken lijnen zijn snijlijnen. Bodem en deksel zijn allebei vierkant.



Figuur 7.4

Voor de inhoud I van zo'n doos, in cm^3, geldt de formule: $I(x) = 4x^3 - 4bx^2 + b^2x$, met $0 < x < \frac{1}{2}b$.

a Toon de juistheid van deze formule aan.

Voor elke positieve waarde van b heeft de inhoud $I(x)$ een maximale waarde.

b Bepaal de maximale inhoud voor $b = 40$ en $b = 60$ cm.

(bron: examen VWO B1 2009, eerste tijdvak, aangepast)

2

Functies en grafieken

2.1 Het begrip functie

Inleiding

Je hebt al met formules gewerkt. Soms beschrijft een formule een verband tussen twee variabelen. Voer je voor de éne een getal in, kun je vaak de andere variabele uitrekenen. Komt er dan telkens precies één uitkomst (en niet meerdere), dan spreek je van een functie. In dit deel zal worden ingegaan op wat een functie nou precies is. En hoe je er een grafiek bij kunt (laten) maken.

Je leert in dit onderwerp

- wat een functie en een functievoorschrift zijn;
- grafieken van functies tekenen/plotten;
- nulpunten berekenen van functies;
- snijpunten van grafieken met de grafische rekenmachine berekenen.

Voorkennis

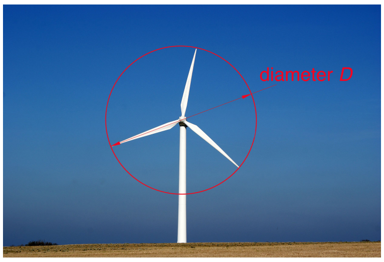
- met formules werken: erin invullen en ze herleiden;
- eenvoudige vergelijkingen oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet op veel plaatsen windmolens die elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D en van de windsnelheid v. Het vermogen van een bepaald type windmolen kun je weergeven met de formule $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$.

In deze formule is P het (gemiddelde) vermogen in kiloWatt (kW), v de (gemiddelde) windsnelheid in meter per seconde (m/s) en D de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien in meter (m).



Figuur 1.1

a Hoeveel bedraagt het opgewekte vermogen bij een diameter van 20 meter en een windsnelheid van 10 meter per seconde?

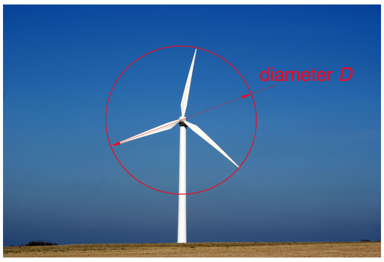
Ga uit van een windmolen met een diameter van 20 m.

b Hoe komt de formule voor het vermogen als functie van de windsnelheid er dan uit te zien?

c Bij welke instellingen van het venster krijg je de grafiek van P als functie van v goed in beeld? Houd daarbij rekening met in Nederland voorkomende windsnelheden.

Uitleg

Je ziet op veel plaatsen windmolens die elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D en van de windsnelheid v. Het vermogen van een bepaald type windmolen kun je weergeven met de formule $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$.

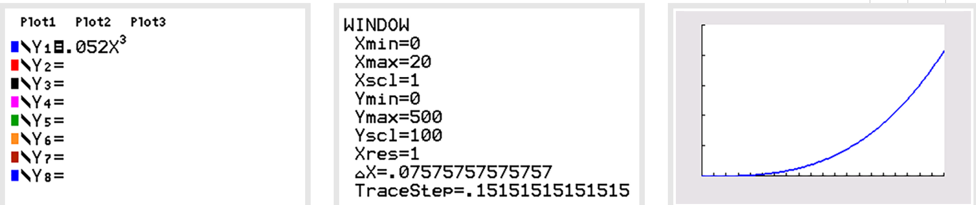


Figuur 1.2

In deze formule is P het (gemiddelde) vermogen in kiloWatt (kW), v de (gemiddelde) windsnelheid in meter per seconde (m/s) en D de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien in meter (m). Bij een diameter van 20 meter en een windsnelheid van 10 meter per seconde is het vermogen $P = 0{,}00013 \cdot 10^3 \cdot 20^2 \approx 52$ kiloWatt.

Je bekijkt een windmolen met wieken van 10 meter. Je wilt snel een tabel maken van het vermogen bij verschillende windsnelheden. Vul dan $D = 20$ in en schrijf de formule als $P = 0{,}052 \cdot v^3$. Om duidelijk te maken dat P afhangt van v schrijf je $P(v) = 0{,}052 \cdot v^3$. Dit heet een functievoorschrift en P is een functie van v. Bij elke waarde van v hoort precies één uitkomst: bij $v = 10$ hoort $P = 52$. Dit schrijf je korter als $P(10) = 52$. En in plaats van uitkomst noem je 52 een functiewaarde.

Met de grafische rekenmachine kun je bij de functie met voorschrift $P(v) = 0{,}052 \cdot v^3$ een tabel en een grafiek maken. Je voert de formule dan op de grafische rekenmachine in als Y1=0.052*X^3. Daarna stel je de afmetingen van het venster in en maak je de grafiek.



Figuur 1.3

Bestaan er ook verbanden die geen functie zijn?

Neem het verband $x^2 + y^2 = 100$. Kies je als invoerwaarde $x = 0$, dan krijg je de vergelijking $y^2 = 100$ en deze heeft als oplossing $y = 10 \vee y = -10$. En daarom is y geen functie van x.

Opgave 1

Voor de windmolen met wieken van 10 meter geldt $P(v) = 0{,}052v^3$. Daarin is P het vermogen in kiloWatt (kW) en v de windsnelheid in meter per seconde (m/s).

a Bereken $P(6)$ betekent hetzelfde als:

A. Bereken de functiewaarde bij invoerwaarde $v = 6$.
B. Bereken de invoerwaarde bij functiewaarde $v = 6$.
C. Bereken de functiewaarde als $P = 6$.
D. Bereken de invoerwaarde als $P = 6$.

b Bereken $P(6)$.

c Windsnelheden van 0 tot 15 m/s komen in de kustgebieden regelmatig voor. Breng het deel van de grafiek van P dat daarbij hoort in beeld op de grafische rekenmachine. Welke waarden voor P horen daarbij?

d Voor welke waarde van v geldt: $P(v) = 300$?

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg**. Neem nu een windmolen met een wieklengte van 20 meter.

a Welk voorschrift geldt voor P als functie van v?

b Bereken $P(10)$.

c Breng de grafiek in beeld voor windsnelheden vanaf 0 tot 20 meter per seconde. Welke vensterinstellingen heb je nodig om de complete grafiek in beeld te krijgen?

d Bij welke windsnelheid in kilometer per uur (km/h) is het vermogen 40 kiloWatt (kW)?

Opgave 3

In de **Uitleg** zie je dat de formule $x^2 + y^2 = 100$ geen functie is. Een getallenvoorbeeld maakt dit duidelijk.

a Geef nog een voorbeeld waaruit blijkt dat de formule $x^2 + y^2 = 100$ geen functievoorschrift is.

b Schrijf deze formule in de vorm $y =$

c Door welke twee functievoorschriften y_1 en y_2 kun je de formule vervangen?

d Breng de grafieken van deze functies in beeld. Welke vensterinstellingen gebruik je?

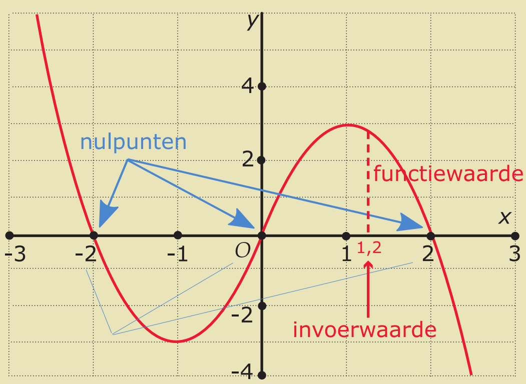
e Bereken exact $y_1(5)$ en $y_2(5)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een formule zoals $y = -x^3 + 4x$ vind je bij elke mogelijke waarde van x precies één waarde van y. In dat geval is y een **functie** van x met **functievoorschrift** $y(x) = -x^3 + 4x$.

Bij een functie kun je een tabel maken en een grafiek tekenen. De **invoerwaarden** komen op de horizontale as, de x-as. De uitkomsten heten **functiewaarden**. De functiewaarde bij $x = 1$ is bijvoorbeeld $y(1) = -1^3 + 4 \cdot 1 = 3$. Functiewaarden komen op de y-as.



Figuur 1.4

Voor $y(x)$ wordt ook wel $f(x)$ gebruikt. y is dan een functie van x die f heet. f is dus geen variabele, maar de 'naam' van een functie. In praktijksituaties gebruik je vaak letters die verwijzen naar de betekenis van de variabelen. Bijvoorbeeld t voor tijd, l voor lengte, I voor inhoud, v voor snelheid, P voor vermogen, enzovoort. De grafische rekenmachine werkt standaard met X voor invoerwaarden en Y voor functiewaarden.

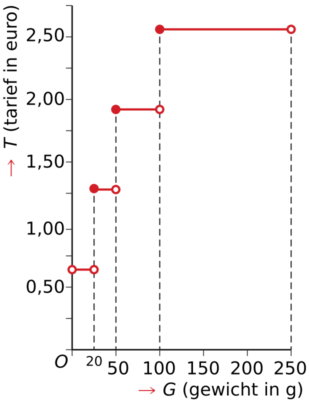
De **nulpunten** van een functie zijn de invoerwaarden waarbij de functiewaarde (de uitkomst dus) 0 is. Een nulpunt is dus een getal. Een nulpunt wordt ook wel **nulwaarde** genoemd. Bij de gegeven functie kun je de x-waarden van de nulpunten van deze functie vinden door $y(x) = -x^3 + 4x = 0$ uit te rekenen. De nulpunten van deze functie zijn $x = 0, x = -2$ en $x = 2$.

Voorbeeld 1

De Post NL-tarieven voor de brievenbuspost binnenland in 2014:

- tot 20 gram: € 0,64
- van 20 tot 50 gram: € 1,28
- van 50 tot 100 gram: € 1,92
- van 100 tot 250 gram: € 2,56

Is het tarief T een functie van het gewicht G? Of is het gewicht G een functie van het tarief T?



Figuur 1.5

Antwoord

Bij elke (toegestane) waarde voor het gewicht G vind je precies één tarief T. Dus T is een functie van G. Let op dat als je een brief van 20 gram hebt, je € 1,28 moet betalen en niet € 0,64. In de grafiek zie je een open rondje aan het einde van de lijnstukken. Dit betekent dat het einde van zo'n lijnstuk niet meedoet.
Omgekeerd is G geen functie van T.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** vind je de posttarieven van 2014.

a Bepaal $T(15)$.

b Als je weet hoe zwaar een brief is, weet je voor hoeveel euro aan postzegels je er op moet plakken. Klopt dat? Licht je antwoord toe.

c Als je ziet voor hoeveel euro aan postzegels er op een brief zit, weet je hoe zwaar hij is. Klopt dat? Licht je antwoord toe.

d Welke oplossingen heeft de vergelijking: $T(G) = 1{,}92$?

e Waarom is G geen functie van T?

Opgave 5

Bekijk de functie f met voorschrift $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x$.

a Bereken de nulpunten van f.

b Welke snijpunten heeft de grafiek van f met de x-as?

c Los op: $f(x) = 6$.

Voorbeeld 2

Je ziet twee formules bij verbanden tussen x en y.

- $y = \sqrt{x}$
- $y^2 = x$

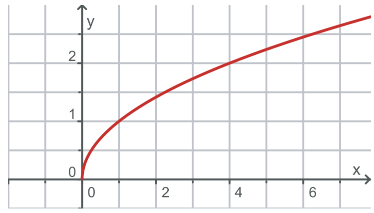
Verder zie je de grafieken bij deze verbanden, gemaakt in GeoGebra.
Is y een functie van x in de formule $y = \sqrt{x}$?
Is y een functie van x in de formule $y^2 = x$?

Antwoord

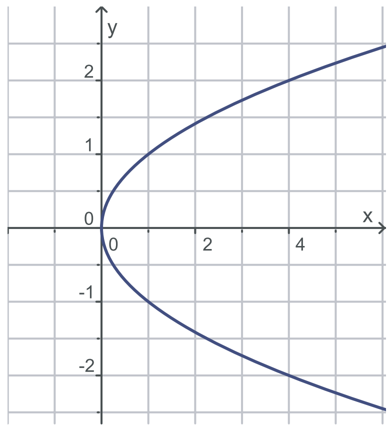
Kies bijvoorbeeld: $x = 4$.
Bij formule $y = \sqrt{x}$ vind je: $y = 2$.
Bij formule $y^2 = x$ vind je: $y = 2 \vee y = -2$.

Bij de formule $y = \sqrt{x}$ vind je bij elke waarde voor x precies één waarde van y. Als x negatief is vind je geen waarden van y. Dus bij de formule $y = \sqrt{x}$ is y een functie van x.

Bij de formule $y^2 = x$ vind je bij vrijwel alle x-waarden twee waarden van y. Alleen bij $x = 0$ vind je er maar één. Bij negatieve x-waarden vind je geen uitkomsten. Dus bij de formule $y^2 = x$ is y geen functie van x.



$y = \sqrt{x}$

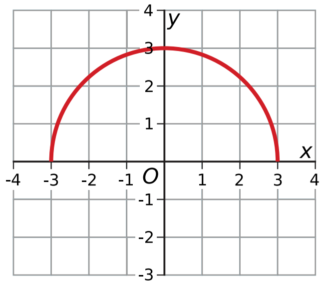


$y^2 = x$

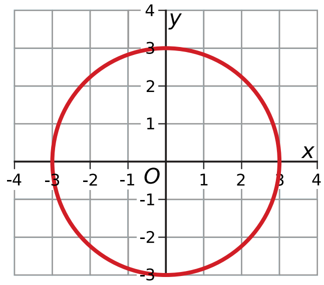
Figuur 1.6

Opgave 6

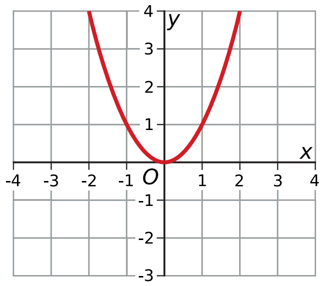
Je ziet vier grafieken. Bij welke van deze grafieken is y een functie van x?



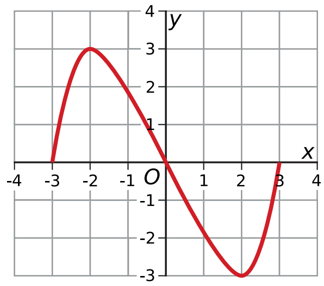
A



B



C



D

Figuur 1.7

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = 10x - 0{,}1x^3$ en $g(x) = x + 10$.
Los de ongelijkheid $f(x) \leq g(x)$ op één decimaal nauwkeurig op.

Antwoord

Om de snijpunten te achterhalen moet je de vergelijking $f(x) = g(x)$ oplossen. Om deze vergelijking met de grafische rekenmachine op te lossen, moet je eerst de grafieken van beide functies in beeld brengen. Daarvoor heb je goede vensterinstellingen nodig. Je kunt gewoonweg wat proberen, maar je kunt dit ook systematisch doen.

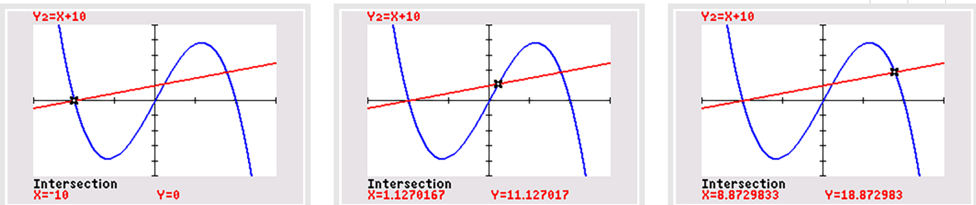
De grafiek van g is een rechte lijn die door de punten $(-10{,}0)$ en $(0{,}10)$ gaat. Als je de nulpunten van f algebraïsch uitrekent, dan vind je:

$$\begin{aligned} 10x - 0{,}1x^3 &= 0 \\ 100x - x^3 &= 0 \\ x\left(100 - x^2\right) &= 0 \\ x(10-x)(10+x) &= 0 \end{aligned}$$

De nulpunten zijn $x = -10$, $x = 0$ en $x = 10$.

Laat je rekenmachine nu een tabel bij de formules maken met stapgrootte 1 vanaf $x = -15$ tot en met $x = 15$. Je ziet dat de functiewaarden tussen -50 en 50 liggen. Als je als vensterinstelling $-15 \leq x \leq 15$ en $-50 \leq y \leq 50$ kiest, krijg je beide grafieken goed in beeld (het aantal schaalstreepjes op de as kun je ook nog instellen). De drie snijpunten zijn dan ook goed in beeld.

Met de grafische rekenmachine vind je voor de x-coördinaten van de snijpunten $x = -10 \vee x \approx 1{,}13 \vee x \approx 8{,}87$.
De oplossing van de ongelijkheid is $-10 \leq x \leq 1{,}1 \vee x \geq 8{,}9$.



Figuur 1.8

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3** waarom het berekenen van nulpunten belangrijk is voordat je de functie in beeld brengt op de grafische rekenmachine. Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 130$ en $g(x) = 3x$.

a Breng de grafieken van f en g in beeld met de standaard vensterinstellingen van de grafische rekenmachine. Krijg je veel te zien?

b Bereken exact de nulpunten van f.

c De grafiek van f is een dalparabool. Wat is de top van deze parabool?

d Pas je vensterinstellingen zo aan, dat deze punten in beeld komen. Schrijf de bijbehorende instellingen op.

e Breng nu ook de grafiek van g in beeld. Hoeveel snijpunten hebben beide grafieken?

f Bepaal met de grafische rekenmachine de snijpunten van beide grafieken. Bereken deze snijpunten ook algebraïsch.

Opgave 8

Gegeven zijn de functies $y_1 = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$ en $y_2 = -x^2 - x + 6$.

a Bereken van beide functies de nulpunten.

b Breng nu beide grafieken in beeld. Schrijf op welke vensterinstellingen je gebruikt om alle snijpunten met de assen en toppen in beeld te krijgen.

c Bepaal alle snijpunten van de grafieken van de functies. Rond indien nodig af op twee decimalen.

d Los op $y_1 < y_2$. Rond af op één decimaal.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 8 - 4x + x^3$.

a Bereken $f(3)$.

b Bereken de x-waarden waarvoor $f(x) = 8$.

c Bij welke vensterinstellingen krijg je de nulpunten en de toppen van de grafiek van f in beeld?

d Hoort bij elke waarde van x precies één waarde van y? Of kun je tegenvoorbeelden vinden?

e Hoort bij elke waarde van y precies één waarde van x? Of kun je tegenvoorbeelden vinden?

Opgave 10

Voor het gebruik van water betaal je jaarlijks € 35,00 en nog € 0,77 per verbruikte kubieke meter (m^3) water. De jaarlijkse kosten K (in euro's) hangen af van het aantal m^3 (a) dat je verbruikt.

a Waarom is K een functie van a?

b Bereken $K(100)$.

c Stel het functievoorschrift $K(a)$ op.

d De meeste gezinnen betalen minder dan € 500,00 per jaar voor hun waterverbruik. Hoeveel kubieke meter water gebruiken die gezinnen op zijn hoogst?

Opgave 11

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100 - x^2$ en $g(x) = x^2$.

a Bereken de nulpunten en de top van de grafiek van f.

b Breng de grafieken van f en g in beeld met de grafische rekenmachine. Schrijf op bij welke vensterinstellingen de nulpunten en toppen van beide functies goed zichtbaar zijn.

c Bereken algebraïsch in twee decimalen nauwkeurig de snijpunten van beide grafieken.

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f_1(x) = x^4 - 2x^2$ en $f_2(x) = -x^2 + 4x$.

a Bereken algebraïsch van beide functies de nulpunten.

b Breng nu beide grafieken in beeld. Schrijf op welke vensterinstellingen je gebruikt om alle nulpunten en toppen in beeld te krijgen.

c Bepaal de snijpunten van de grafieken van beide functies in één decimaal nauwkeurig.

d Los op: $f_1(x) < f_2(x)$.

Opgave 13

Je ziet vier functievoorschriften. Bereken telkens eerst algebraïsch de nulpunten van de functie. Schrijf vervolgens de vensterinstellingen op waarmee de grafiek goed in beeld komt.

a $f(x) = 100x - x^2$

b $g(x) = 10x(x - 50)$

c $h(x) = (x - 10)^2 - 1600$

d $l(x) = 2\sqrt{x+3} - 5$

Toepassen

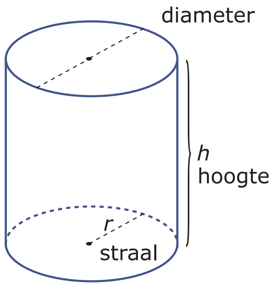
Opgave 14: Cilindrisch blikje

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Van een bepaalde serie blikjes is bekend dat de hoogte even groot is als de diameter.

a Voor deze serie blikjes is V een functie van r. Schrijf het bijpassende functievoorschrift op.

b Neem aan dat $0 < r < 20$. Breng nu de grafiek van de functie $V(r)$ in beeld. Schrijf de geschikte vensterinstellingen op.

c Bij welke r geldt: $V = 1000$ cm^3?



Figuur 1.9

Opgave 15: De baan van een afgeschoten kogel

De baan van een afgeschoten kogel wordt gegeven door $h(x) = -0{,}01x^2 + 40x$, waarin h de hoogte in meter van de kogel boven de begane grond en x de horizontale afstand in meter tot de plaats waar de kogel is afgeschoten.

a Bereken na hoeveel meter de kogel weer op de grond komt.

b Breng de baan van de kogel in beeld. Schrijf de daarbij behorende vensterinstellingen op.

c Hoe hoog komt de kogel maximaal?

d Voor welke x-waarden is de hoogte van de kogel hoger dan 10000 meter? Geef je antwoord in gehelen nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

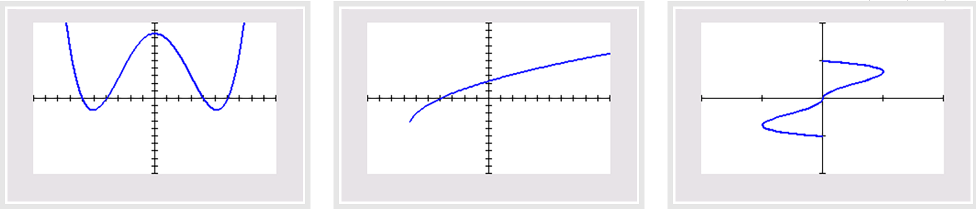
Gegeven zijn de functies $f(x) = (2x-3)(x^2-4)$ en $g(x) = 4x-7$

a Bereken $f(5) - g(2)$.

b Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

c Los op: $f(x) < g(x)$. Rond af op één decimaal.

Opgave 17



A B C

Figuur 1.10

Je ziet hier drie grafieken in het Oxy-assenstelsel van een grafische rekenmachine.

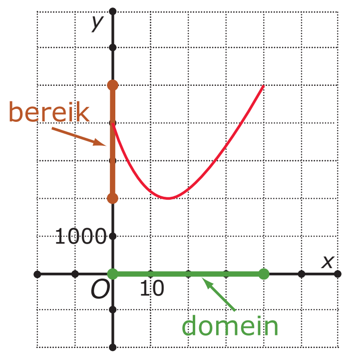
a Bij welke van deze grafieken is y een functie van x?

b Bij welke van deze grafieken is x een functie van y?

2.2 Domein en bereik

Inleiding

Bij veel functies kun je niet zomaar elk getal invoeren. Zeker niet als ze 'ergens over gaan'. Ook als uitkomst is vaak niet alles mogelijk, regelmatig vallen ze binnen bepaalde grenzen. Om die beperkingen aan te geven is een speciale notatie nodig.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de intervalnotatie gebruiken om te kunnen aangeven dat waarden beperkt zijn;
- het begrip domein van een functie;
- het begrip bereik van een functie.
- coördinaten van toppen van grafieken berekenen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken van functies goed in beeld brengen.

Verkennen

Opgave V1

Werk bij het **Practicum** van het gewenste practicum 'Functies en de GR' het onderdeel door dat gaat over het bepalen van de toppen van een grafiek.

Bij de toppen van een grafiek heeft de bijbehorende functie een maximum (grootste functiewaarde) of een minimum (kleinste functiewaarde).

a Liggen alle functiewaarden altijd tussen het minimum en het maximum? Bedenk eens een situatie.

b Zijn er situaties te bedenken dat je niet zomaar alle reële getallen in een functie kunt invoeren? Geef een voorbeeld.

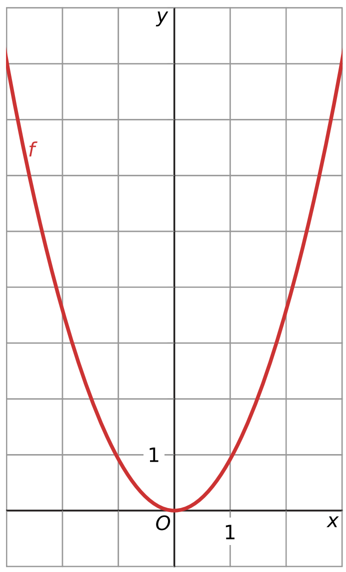
c Hoe zou je kunnen aangeven welke invoerwaarden en welke functiewaarden bij een functie voorkomen?

Uitleg

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^2$. Je weet dat deze grafiek een parabool is, een dalparabool.

Van elk reëel getal x kun je het kwadraat uitrekenen, dus er zijn geen beperkingen voor de invoerwaarden. De kleinste functiewaarde is $f(0) = 0$. In de wiskunde worden de woorden ‘domein’ en ‘bereik’ gebruikt:

- het domein is de verzameling van alle mogelijke invoerwaarden; bij functie f is het domein de verzameling van alle reële getallen;
- het bereik is de verzameling van alle mogelijke uitkomsten: bij functie f is het bereik alle reële getallen $\mathbb{R}$ groter dan of gelijk aan 0.



Figuur 2.2

Kort gezegd is:

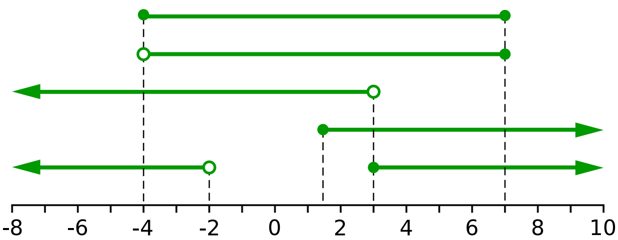
- het domein: $D_f = \mathbb{R}$;
- het bereik: $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.

De notatie $[0, \rightarrow\rangle$ staat voor alle reële getallen groter dan of gelijk aan 0 en is een voorbeeld van de notatie als interval.

Een interval is eigenlijk niets anders dan een aaneengesloten verzameling reële getallen, een stukje van een getallenlijn. De notatie ervan is op zich eenvoudig: je schrijft de grenswaarden (de kleinste en de grootste waarden, de kleinste eerst) van het interval op tussen twee haakjes. Er zijn twee afspraken die je moet onthouden:

- de vorm van de haakjes bepaalt of de grenswaarde nog wel bij het interval hoort of juist niet meer;
- voor intervallen die aan één kant geen grenswaarde hebben gebruik je een pijltje.

Je ziet voorbeelden van intervallen met het bijbehorend deel van de getallenlijn.



intervalnotatie	gewone notatie
$[-4, 7]$	$-4 \leqq x \leqq 7$
$\langle -4, 7]$	$-4 < x \leqq 7$
$\langle \leftarrow, 3\rangle$	$x < 3$
$[1{,}5; \rightarrow\rangle$	$x \geqq 1{,}5$
$\langle \leftarrow, -2\rangle \cup [3, \rightarrow\rangle$	$x < -2$ V $x \geqq 3$

Figuur 2.3

Je ziet in de figuur het teken $\cup$. Dit teken wordt gebruikt om aan te geven dat je alle getallen van twee (of meer) afzonderlijke intervallen samen bedoelt.

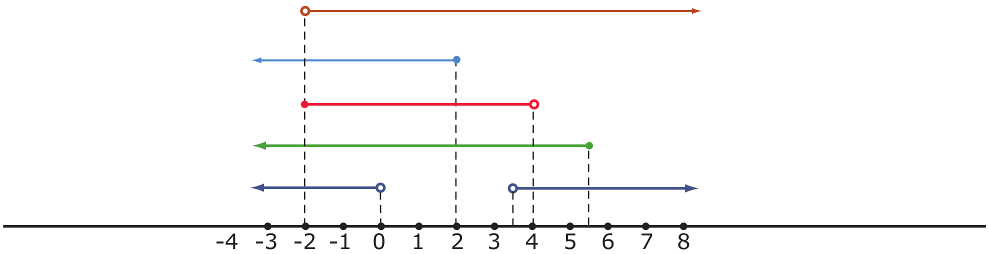
Opgave 1

Bekijk de **Uitleg** nog eens. Let goed op de open en gesloten rondjes en op de bijpassende vorm van de haakjes.

Teken de intervallen $\langle -2{,}4]$, $[2, \rightarrow\rangle$, $[1;3{,}5]$, $\langle \leftarrow ,0]$ en $\langle \leftarrow ,4\rangle \cup \langle 6, \rightarrow\rangle$.

Opgave 2

Je ziet een aantal intervallen getekend. Schrijf ze in intervalnotatie.



Figuur 2.4

Opgave 3

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - x^2$.

a Welke waarden kan x aannemen? Schrijf het domein van f op.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de assen.

c Bekijk de grafiek van deze functie. Schrijf het bereik op.

d Stel je neemt als domein van f het interval $[-1,3]$. Wat is dan het bijbehorende bereik?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Alle toegestane invoerwaarden samen vormen het **domein** van een functie. Het domein wordt bepaald door:

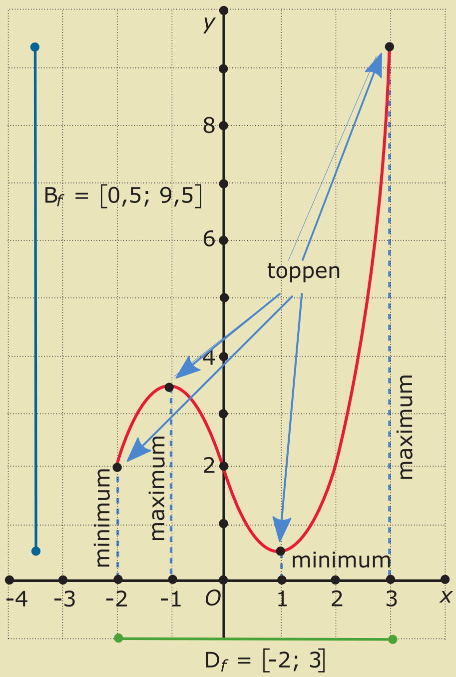
- beperkingen vanwege het functievoorschrift;
- beperkingen vanuit de situatie.

Het domein van functie f wordt weergegeven met D_f.

Alle mogelijke functiewaarden samen vormen het **bereik** van een functie. Om het bereik van een functie f te kunnen bepalen, heb je een goed beeld van de grafiek van f nodig. Daarbij zijn de toppen van een grafiek vaak van belang. In een top heeft de functie een **maximum** (grootste functiewaarde) of een **minimum** (kleinste functiewaarde). Hoe je deze uiterste waarden kunt bepalen met je rekenmachine, zie je in het **Practicum: Functies met de GR**. Het bereik van functie f wordt weergegeven met B_f.

Voor het domein en bereik van een functie wordt meestal de intervalnotatie gebruikt. Een **interval** is een aaneengesloten verzameling reële getallen, een stukje getallenlijn dus. In de uitleg zie je er een paar met het bijbehorende deel van de getallenlijn. Alle reële getallen noteer je als $\mathbb{R}$.

Bij het geven van de vensterinstelling wordt vanaf nu vaak de notatie $[-10,10] \times [-20,20]$ gebruikt als de vensterinstellingen $-10 \leq x \leq 10$ en $-20 \leq y \leq 20$ zijn.



Figuur 2.5

Voorbeeld 1

De Post NL-tarieven voor de brievenbuspost binnenland zijn in 2014:

- tot 20 gram: € 0,64
- van 20 tot 50 gram: € 1,28
- van 50 tot 100 gram: € 1,92
- van 100 tot 250 gram: € 2,56

Het tarief T is een functie van het gewicht G. Geef het domein en het bereik van die functie.

Antwoord

Het domein van $T(G)$ wordt bepaald door de situatie dat alleen gewichten van 0 tot 250 gram een tarief als brievenbuspost hebben. Dus $\text{D}_T = \langle 0{,}250 \rangle$.
Het bereik van $T(G)$ wordt ook door de situatie bepaald: alleen enkele losse getallen zijn als uitkomst mogelijk. Je zet die getallen dan tussen accolades: $\text{B}_T = \{0{,}64; 1{,}28; 1{,}92; 2{,}56\}$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. De tarieven voor brievenbuspost binnen Nederland waren in 2013:

- tot 20 gram: € 0,60
- van 20 tot 50 gram: € 1,20
- van 50 tot 100 gram: € 1,80
- van 100 tot 250 gram: € 2,40
- van 250 tot 500 gram: € 3,00
- van 500 tot 2000 gram: € 3,60

Het tarief T in euro is een functie van het gewicht G in gram.

a Teken een bijpassende grafiek.

b Schrijf het domein van deze functie op.

c Schrijf het bereik van deze functie op.

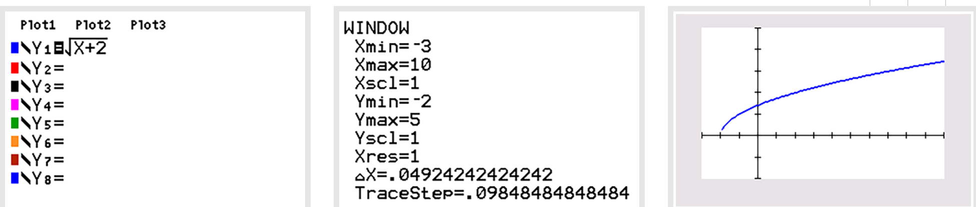
Voorbeeld 2

Breng met de grafische rekenmachine de grafiek van $f(x) = \sqrt{x+2}$ goed in beeld. Geef het domein en bereik van f.

Antwoord

Je kunt niet de wortel nemen van een negatief getal. Dus er moet gelden dat $x + 2 \geq 0$ en hieruit volgt dat $x \geq -2$. Het kleinste getal dat mogelijk is als invoerwaarde is $x = -2$. Je krijgt dan als functiewaarde $f(-2) = \sqrt{-2+2} = 0$. En verder worden de functiewaarden langzaam groter naarmate je een groter getal voor x kiest.

De gebruikte vensterinstelling is $[-3,10] \times [-2,5]$.



Figuur 2.6

Het wortelteken in het functievoorschrift bepaalt het domein en het bereik.

- De wortel uit een negatief getal is niet reëel, dus $D_f = [-2, \rightarrow\rangle$.
- De functiewaarden zijn 0 of groter, dus $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

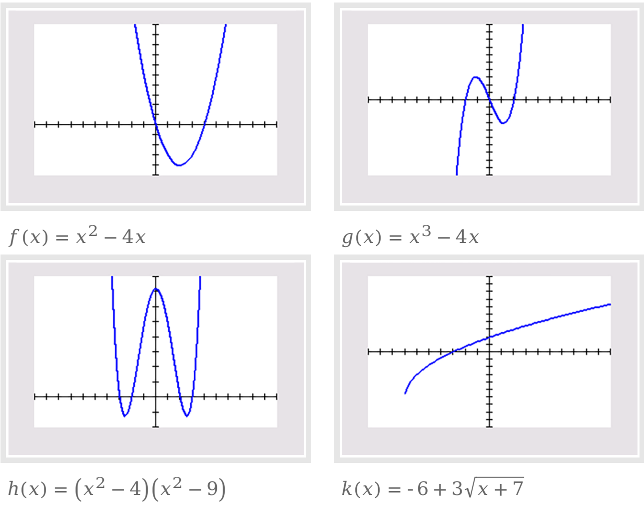
a Welke waarden kan x aannemen? Schrijf het domein van f op.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de assen.

c Bekijk de grafiek van f. Schrijf het bereik van f op.

Opgave 6

Je ziet vier grafieken van een functie. Alle toppen en nulpunten zijn in beeld.



Figuur 2.7

Schrijf het domein en bereik van deze functies op. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = 400 - (x - 10)^2$. Het domein van deze functie is $[0,40]$.

a Breng de grafiek met de grafische rekenmachine goed in beeld. Bekijk eventueel **Voorbeeld 2** of het practicum nog eens.

b Geef de coördinaten van de toppen van f.

c Bepaal het bereik van f. (Let op het gegeven domein!)

Voorbeeld 3

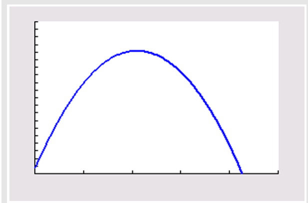
Een keeper schopt de bal in de lucht. Voor de hoogte van de bal h in meter na t seconden geldt $h(t) = -3{,}5t^2 + 14{,}7t + 0{,}8$.
Benader het domein en bereik van h in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De grafiek van h is een bergparabool en het domein en bereik daarvan worden bepaald door de situatie.

Je weet dat $t \geq 0$. Verder snijdt de grafiek de horizontale as bij $t \approx 4{,}25$. Dus het domein (afgerond op twee decimalen) is $[0; 4{,}25]$.

Voor het bereik moet je de top van de grafiek bepalen. Met de grafische rekenmachine vind je dat er een maximum is van $16{,}235$. Omdat de bal op de grond komt is de minimale waarde 0. Dus het bereik is $[0; 16{,}235]$.



Figuur 2.8

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Maak zelf de grafiek van de gegeven functie en laat je grafische rekenmachine de twee nulpunten berekenen.

b Bepaal ook het maximum van deze functie met behulp van de grafische rekenmachine.

c Bereken hoeveel seconden de bal meer dan 10 meter boven de grond is.
Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

d Schrijf nu ook het domein en het bereik op van de functie $f(x) = -3{,}5x^2 + 14{,}7x + 0{,}8$ zonder beperkingen voor x.

Opgave 9

Bekijk de baan van een kogel die door een kogelstoter zo ver mogelijk wordt gestoten. De kogel komt 14 meter ver. Het hoogste punt van de baan zit 4 meter boven de grond. De baan van de kogel kan worden beschreven met de formule $h(x) = -0{,}0625(x - 6)^2 + 4$ waarin h de hoogte van de kogel boven de grond is en x de afstand is die het punt op de grond recht onder de kogel heeft afgelegd vanaf het moment van loslaten.

Figuur 2.9

a Laat zien dat de kogel inderdaad 14 meter ver komt.

b Welke invoerwaarden zijn hier zinnig? Schrijf het domein van $h(t)$ op.

c Laat zien dat het hoogste punt van de baan inderdaad 4 meter boven de grond zit.

d Welke functiewaarden zijn hier zinnig? Schrijf het bereik van deze functie op.

Verwerken

Opgave 10

Bepaal van de volgende functies het domein en het bereik. Noteer ze als interval met eventuele benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $f(x) = x^2 - x - 6$

b $g(x) = x^2(x-2)(x-3)$

c $h(x) = x^3 - 6x$

d $k(x) = 1 + 2\sqrt{2x-3}$

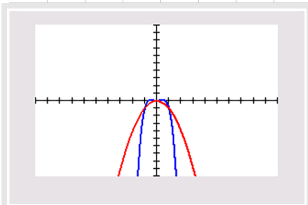
Opgave 11

Gegeven is de functie f met $f(x) = \text{-}2(x-10)^2 + 60$ met domein $[0,40]$.

Bepaal het bereik van f.

Opgave 12

Je ziet de grafieken van de functies f en g met $f(x) = x^2 - 2x^4$ en $g(x) = \text{-}x^2$ met de standaardinstellingen van het venster.



Figuur 2.10

a Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

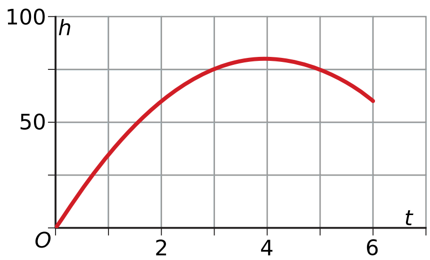
b De standaardinstellingen zijn niet erg gelukkig gekozen als je de toppen en de nulpunten van beide functies wilt zien. Kies betere instellingen en bepaal de toppen van de grafiek van f.

c Bepaal van beide functies het bereik.

d Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van f en g.

Opgave 13

Een vuurpijl wordt vanaf de grond afgeschoten. De hoogte boven de grond hangt af van de tijd tot hij uit elkaar spat. Er geldt: $h(t) = 40t - 5t^2$. Hierin is h de hoogte boven de grond in meter en t de tijd in seconden.



Figuur 2.11

a De vuurpijl spat na 6 seconden uit elkaar. Hoe hoog komt hij maximaal?

b Schrijf het domein en bereik van deze functie op, rekening houdend met de beschreven situatie.

c Op welke hoogte spat de vuurpijl uit elkaar?

d Hoeveel seconden is de vuurpijl hoger dan 40 meter hoogte?

e Waarom is de getekende grafiek niet de baan van de vuurpijl?

Opgave 14

Een handelaar heeft wekelijks 400 exemplaren van een bepaald product in de verkoop. Hij heeft geen concurrentie, dus de hoeveelheid q die hij verkoopt, hangt alleen af van de prijs p die hij per exemplaar vraagt.
Er geldt: $q = 400 - 0{,}5p$.

a Geef een formule voor de opbrengst R als functie van de prijs p.

b Welke waarden kan p aannemen?

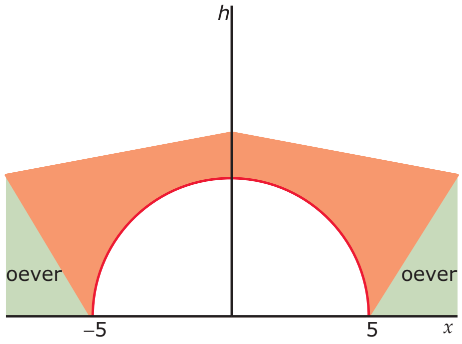
c Welke waarden kan R aannemen?

Opgave 15

De boog onder een brug heeft de vorm van de grafiek van $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (met x en h in meter).

a Welke waarden voor x kun je hier invullen?

b Wat zijn de maximale en de minimale waarden van h?



Figuur 2.12

Toepassen

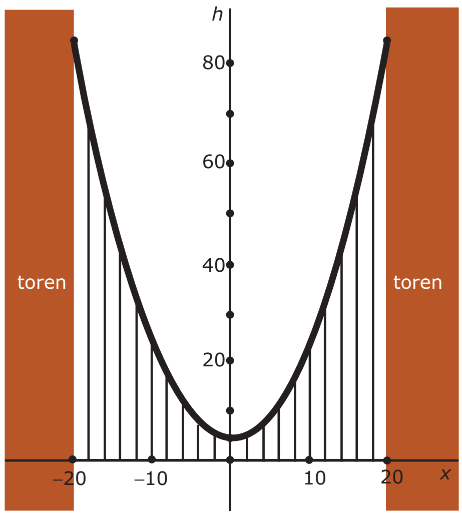
Opgave 16: Hangbrug

Hangbruggen zijn bruggen die zijn opgehangen aan zware spankabels. Die spankabels hangen op hun beurt aan stalen masten of stenen torens. Hier zie je een spankabel hangen tussen twee torens die 40 meter uit elkaar staan. Er geldt: $h(x) = \frac{9}{50} \cdot x^2 + 5$. Aan die spankabels hangen tuidraden waar de brug aan is opgehangen.

a Welke waarden voor x zijn in deze situatie zinnig?

b Hoe lang zijn de kortste en de langste tuidraden?

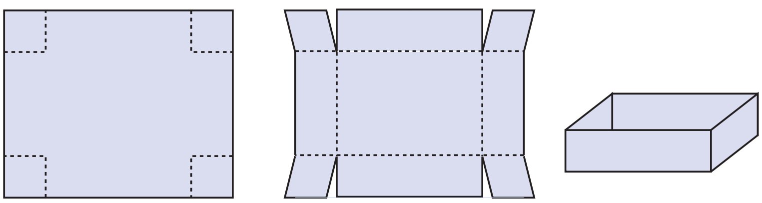
c Er zijn twee tuidraden met een lengte van $51{,}08$ meter. Hoe ver hangen deze twee tuidraden van elkaar?



Figuur 2.13

Opgave 17: Bakje van karton

Van een rechthoekig stuk karton van 12 cm bij 20 cm kun je een bakje maken. Daarvoor teken je in iedere hoek een vierkantje. Je knipt van elk vierkantje één zijde helemaal in en plakt het doosje in elkaar zoals je in de figuren kunt zien.


Figuur 2.14

Als je er op dezelfde wijze een deksel bij maakt, krijg je een doosje waarvan de inhoud I wordt bepaald door de afmetingen van het vierkantje.

a Noem de lengte en de breedte van het vierkantje x. Stel een formule op voor $I(x)$.

b Bepaal het domein en het bereik van $I(x)$. Rond af op twee decimalen.

c Hoe groot moet het vierkantje zijn om een maximale inhoud te krijgen?

Testen

Opgave 18

Breng de grafiek van deze functies in beeld met de standaardinstellingen van het venster. Schrijf het domein en bereik van deze functies op.

a $f(x) = 4 - (x-2)^2$

b $g(x) = 4$

c $h(x) = 2 + \sqrt{4 - x}$

Opgave 19

Gegeven is het functievoorschrift $y(x) = x^4 - 8x^2$.

a Bereken $y(3)$ en $y(-3)$.

b Bereken exact de nulpunten van $y(x)$.

c Bepaal met behulp van de grafische rekenmachine de toppen van de grafiek en schrijf het bereik van deze functie op.

Practicum: Grafische rekenmachine

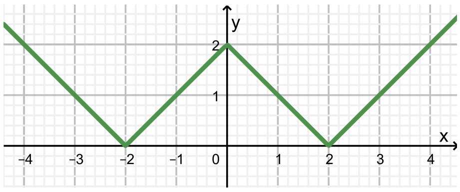
Als je met functies werkt, wil je alle karakteristieken (nulpunten, toppen en asymptoten) in beeld. In het volgende practicum kun je nalezen hoe dat gaat. Bekijk alleen het stukje ‘Functiewaarden, nulpunten en toppen’, de rest heb je pas later nodig.

- **Functies en de TI83/TI84**
- **Functies en de TInspire**
- **Functies en de Casio fx-CG50**
- **Functies en de HPprime**
- **Functies en de NumWorks**

2.3 Bijzondere functies

Inleiding

Je kent al diverse functies. Alleen sprak je tot nu toe vaak over verbanden en formules. Denk nog even terug aan de lineaire verbanden, de kwadratische verbanden en de hyperbolische verbanden. Het gaat daarbij eigenlijk steeds over functies.
In dit onderdeel komen enkele bijzondere functies voorbij.



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met lineaire functies;
- werken met absolute waarde en modulusfuncties;
- werken met gehele delen en de Entier-functie.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- het domein en het bereik van een functie vinden;
- de intervalnotatie gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Je staat op een viaduct over de snelweg A1. Je ziet een auto rijden met een snelheid van 90 kilometer per uur (km/h). Precies 6 minuten later zie je een tweede auto onder het viaduct uitkomen. Deze tweede auto rijdt 120 km/h en in dezelfde richting als de eerste auto.

a Teken bij elk van deze auto's de grafiek van de afstand tot het viaduct. Zet beide grafieken in één assenstelsel en kies geschikte eenheden.

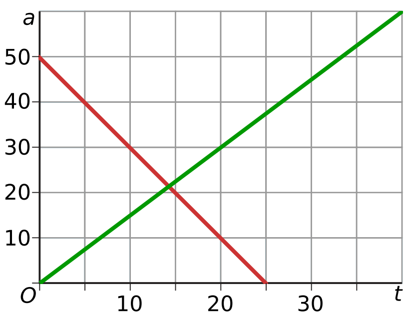
b Na hoeveel minuten heeft de tweede auto de eerste ingehaald?

c Je kunt ook kijken naar de onderlinge afstand van beide auto's. Teken de grafiek van die onderlinge afstand. Waarom heeft deze grafiek een knik?

Uitleg

Twee auto's rijden met een constante snelheid over dezelfde weg. Auto I gaat van A naar B met een constante snelheid van 90 kilometer per uur (km/h) en auto II van B naar A met een constante snelheid van 120 km/h. A en B liggen 50 kilometer van elkaar verwijderd. Beide auto's zijn op hetzelfde moment gestart. Als je wilt berekenen op welk tijdstip ze elkaar tegenkomen, stel je (bijvoorbeeld) de afstand tot A voor door de variabele a. Neem voor de tijd in minuten de variabele t.

Omdat auto I met 1,5 km per minuut rijdt, geldt: $a_{\text{I}} = 1{,}5t$.
Voor auto II geldt $a_{\text{II}}(0) = 50$ en dus: $a_{\text{II}}(t) = 50 - 2t$.



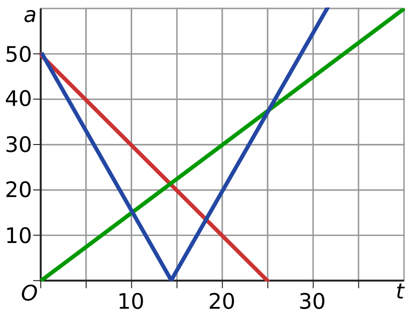
Figuur 3.2

Bij beide formules is er een lineair verband tussen a en t: a_{I} en a_{II} zijn lineaire functies. Je ziet beide grafieken, het zijn rechte lijnen.

De auto's komen elkaar tegen als $1{,}5t = 50 - 2t$.
Als je deze vergelijking oplost, vind je $t \approx 14{,}3$ minuten.

Je kunt de onderlinge afstand van beide auto's weergeven door de verschilgrafiek van a_{I} en a_{II}. Je ziet de verschilgrafiek in de figuur getekend. De verschilgrafiek vertoont een knik op het moment dat $a_{\text{I}} = a_{\text{II}}$, dus bij $t \approx 14{,}3$. Dat komt omdat een afstand altijd positief is.

- als $t \leq 14{,}3$ dan is het positieve verschil $a_{\text{II}} - a_{\text{I}}$
- als $t > 14{,}3$ dan is het positieve verschil $a_{\text{I}} - a_{\text{II}}$



Figuur 3.3

Bij de verschilgrafiek hoort een functie die eigenlijk twee voorschriften kent, een voor $t \leq 14{,}3$ en een voor $t > 14{,}3$. Als een uitdrukking met variabelen positief moet zijn (omdat het een afstand voorstelt bijvoorbeeld) zet je die uitdrukking tussen zogenaamde absoluutstrepen. Hier bijvoorbeeld is die afstand $|a_{\text{I}} - a_{\text{II}}|$. Dit is de absolute waarde van het verschil van a_{I} en a_{II}, de waarde zonder het (min)teken.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Twee auto's rijden met een constante snelheid over dezelfde weg. Auto I gaat van A naar B met een constante snelheid van 90 km/h en auto II van B naar A met een constante snelheid van 120 km/h.

a In de uitleg wordt de afstand van beide auto's tot A bekeken. Bekijk die afstand nu vanuit B. Schrijf de twee bijpassende formules op.

b Onderzoek door berekening of beide auto's elkaar nu op hetzelfde tijdstip tegenkomen.

c In de uitleg vind je een passende verschilgrafiek met afstanden ten opzichte van A. Maak nu zelf een grafiek van hun onderlinge afstand met de afstanden ten opzichte van B.

d Voor welke twee waarden van t bedraagt die onderlinge afstand 20 km?

Opgave 2

Twee fietsers fietsen recht op elkaar af en komen elkaar op $t = 0$ tegen. Beiden fietsen met een snelheid van 18 km/h. Hun onderlinge afstand a in meter hangt af van de tijd t in seconden.

a Welk voorschrift heeft a als functie van t?

b Bereken de tijdstippen waarop de onderlinge afstand 90 meter is.

Theorie en voorbeelden

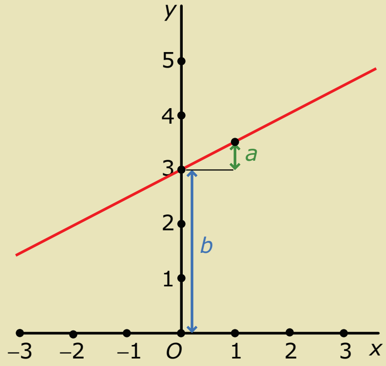
Om te onthouden

Bekijk de applet: lineaire functies

Er bestaan veel verschillende soorten functies.
Een **lineaire functie** heeft een functievoorschrift van de vorm $y = ax + b$, met:

- a het **hellingsgetal**;
- b het **begingetal**, de functiewaarde bij $x = 0$.

De grafiek van een lineaire functie is een rechte lijn door $(0,b)$ en $(1,b + a)$. Voor ‘hellingsgetal’ wordt wel het woord **richtingscoëfficiënt** gebruikt, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.



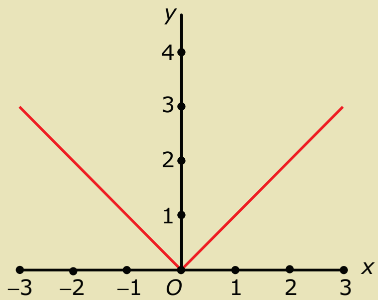
Figuur 3.4

Je noemt $f(x) = ax + b$ een familie van functies (in dit geval de familie van de lineaire functies). Het gaat daarbij om een verband tussen de variabelen x en $y = f(x)$. a en b noem je **parameters**. Zo heb je ook de familie van de kwadratische functies.

De **absolute waarde** $|x|$ van een getal x is de waarde ervan zonder (min)teken. Zo is: $|3| = 3$ en $|-3| = 3$. Dit komt omdat beide getallen dezelfde (positieve) afstand tot 0 hebben: ze zijn elkaars tegengestelde. Voor de wiskundige notatie van de absolute waarde van x gebruik je **absoluutstrepen**, de meeste rekenmachines gebruiken: abs(x). De meest eenvoudige absoluutfunctie is:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{als} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{als} \quad x < 0 \end{cases}.$$

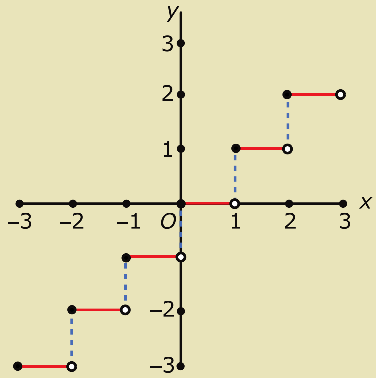
De grafiek heeft een knik bij 0.



Figuur 3.5

Het grootste gehele getal kleiner of gelijk aan x heet de entier (Frans voor ‘geheel’) van x. De entier van $2{,}913$ is hetzelfde als die van $2{,}5$ en die van $2{,}0$, namelijk 2.

Hierbij past de **entierfunctie** of **integerfunctie**. Deze functie rondt elke x-waarde naar beneden af op een gehele waarde. Je schrijft: $y = \text{int}(x)$. De grafiek vertoont sprongen, het is een trapgrafiek. Je ziet de grafiek getekend, let goed op de open en de gesloten rondjes. Het domein van de entierfunctie is $\mathbb{R}$. Het bereik is $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

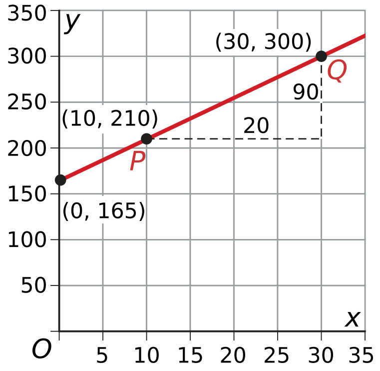


Figuur 3.6

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet de punten $P(10{,}210)$ en $Q(30{,}300)$. Stel een functievoorschrift op voor de functie waarvan de grafiek de rechte lijn door P en Q is.



Figuur 3.7

Antwoord

Er is sprake van een lineaire functie $f(x) = ax + b$.
Je zoekt daarom het hellingsgetal a en het begingetal b (de functiewaarde bij 0). Vergelijk de twee gegeven punten van de grafiek.

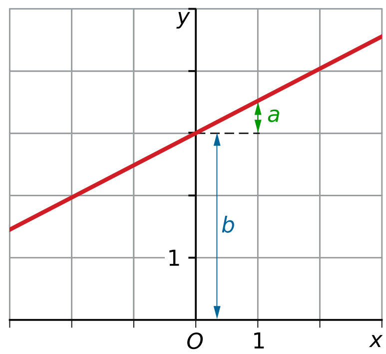
Bij een toename van x met $30 - 10 = 20$ hoort een toename van y met $300 - 210 = 90$. Dus bij een toename van x met 1 hoort een toename van y met $a = \frac{90}{20} = 4{,}5$. Daarom is het hellingsgetal $a = 4{,}5$.

De functiewaarde bij 0 is niet bekend.
De functie heeft als voorschrift $f(x) = 4{,}5x + b$.
Omdat $f(10) = 210$ geldt $210 = 4{,}5 \cdot 10 + b$. En dit geeft $b = 165$.

Dus het functievoorschrift is $f(x) = 4{,}5x + 165$.

Opgave 3

Elke lineaire functie f heeft een functievoorschrift van de vorm $f(x) = ax + b$.



Figuur 3.8

a Welke betekenis heeft a voor de grafiek van f? Welke waarde heeft a in de figuur?

b Welke betekenis heeft b voor de grafiek van f? Welke waarde heeft b in de figuur?

c Welke waarden voor a en b moet je nemen om als grafiek een rechte lijn te krijgen die door de punten $A(1{,}2)$ en $B(5{,}3)$ gaat?

Opgave 4

Voor een rit in een taxi betaal je voorrijkosten en een bedrag per gereden kilometer.

- voorrijkosten € 3,20
- per gereden kilometer € 1,20

De ritprijs (R) hangt af van het aantal gereden kilometer (a).

a Laat zien dat $R(10) = 15{,}2$.

b Stel een voorschrift op voor de functie $R(a)$.

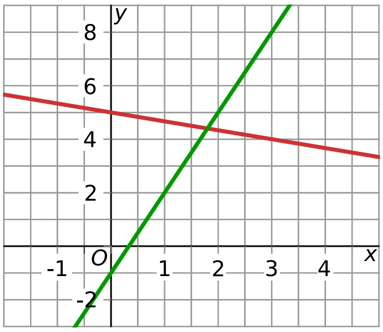
c Dit is een voorbeeld van een lineaire functie. Teken de grafiek van deze functie op de grafische rekenmachine.

d Waar vind je de twee getallen $3{,}20$ en $1{,}20$ in je grafiek terug?

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je het voorschrift opstelt van een lineaire functie als twee punten van de grafiek zijn gegeven. Je ziet hier twee grafieken van lineaire functies.

Stel voor elk van deze functies een passend voorschrift op en bereken algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.



Figuur 3.9

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Bekijk de grafieken van $y_1 = x^2$ en $y_2 = 6 - x$.

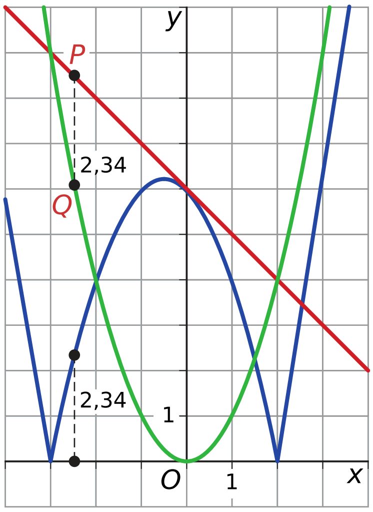
De 'afstand' tussen beide grafieken kun je definiëren als $a(x) = |y_2 - y_1|$. De afstand is de lengte van lijnstuk PQ.

Door punt P te bewegen over zijn grafiek, verandert a. De functiewaarden $a(x)$ doorlopen de blauwe grafiek. Je kunt deze grafiek maken met de grafische rekenmachine door het functievoorschrift in gesplitste vorm in te voeren:

$$a(x) = \begin{cases} 6 - x - x^2 & \text{als} \quad -3 \leq x \leq 2 \\ x^2 - (6 - x) & \text{als} \quad x < -3 \vee x > 2 \end{cases}$$

Je kunt ook de abs-functie gebruiken.

De grafiek heeft twee knikpunten die je vindt bij de x-waarden waarin $6 - x = x^2$. Die kun je dus algebraïsch berekenen.



Figuur 3.10

Opgave 6

Bekijk in de **Theorie** wat een absolute waarde is. De absoluutfunctie $f(x) = |x|$ is ook op de grafische rekenmachine te vinden.

a Breng de grafiek van $f(x) = |x|$ met de grafische rekenmachine in beeld.

b Welk knikpunt heeft de grafiek van f?

c Los op: $|x| = 6$.

d Waarom is de vergelijking $|x| = -2$ niet op te lossen?

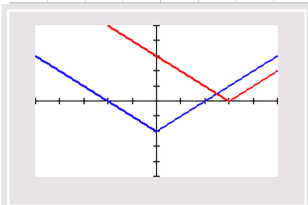
Opgave 7

Bekijk de grafieken van de functies $y_1 = |x| - 2$ en $y_2 = |x - 3|$.

a Schrijf bij elk van deze functies het voorschrift in gesplitste vorm, dus zonder absoluutstrepen.

b Bereken algebraïsch het snijpunt van beide grafieken.

c Los bij beide functies de vergelijking $y = 4$ op.



Figuur 3.11

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**. Het gaat daarin om de 'afstand' $a(x) = |y_1 - y_2|$ tussen de grafieken van $y_1 = x^2$ en $y_2 = 6 - x$.

a Teken de grafiek van $a(x)$ op de grafische rekenmachine.

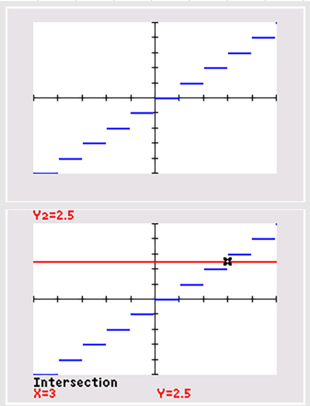
b Waarom staat afstand tussen aanhalingstekens?

c Voor welke x is de 'afstand' tussen beide grafieken gelijk aan 4? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Voorbeeld 3

Je ziet de grafiek van $y = \text{int}(x)$ op een grafische rekenmachine. Er is iets geks aan de hand. Je kunt met de grafische rekenmachine een oplossing vinden van de vergelijking $\text{int}(x) = 2{,}5$.

Waarom is dit onjuist?



Figuur 3.12

Antwoord

De functie $y = \text{int}(x)$ zorgt er voor dat elke waarde van x naar beneden op een geheel getal wordt afgerond. Bij alle x-waarden uit het interval $[2,3\rangle$ is de functiewaarde dus 2. Een uitkomst als $2{,}5$ kan nooit voorkomen, alle uitkomsten (functiewaarden) zijn gehele getallen.

Opgave 9

Bekijk in de **Theorie** wat de entierfunctie voorstelt en daarna **Voorbeeld 3**. De entierfunctie is ook op de grafische rekenmachine te vinden. Los op: $\text{int}(x) = 2$.

Opgave 10

Gegeven is de functie f met $f(x) = \text{int}(2x) - 1$.

a Bereken $f(2{,}43)$ en $f(-\pi)$.

b Geef het domein en het bereik van f.

c Los op: $f(x) = 4$.

Verwerken

Opgave 11

a Stel het functievoorschrift op van de lineaire functie f waarvan de grafiek door de punten $P(2{,}80)$ en $Q(8{,}140)$ gaat.

b Stel een voorschrift op van de lineaire functie g waarvan de grafiek door de punten $R(-5{,}15)$ en $S(10, -25)$ gaat.

c Gegeven is dat h een lineaire functie is en $h(3) = 8$ en $h(12) = -19$. Stel het functievoorschrift op van h.

Opgave 12

Los de vergelijking $\left|x^2 - 4\right| = 2$ exact op.

Opgave 13

Twee cilindervormige kaarsen worden tegelijkertijd aangestoken. Ze branden gelijkmatig op. Een uur na het aansteken heeft kaars I een lengte van 75 centimeter en is kaars II nog 71 centimeter lang. $3{,}5$ uur na het aansteken worden beide kaarsen opnieuw gemeten. Kaars I is dan $62{,}5$ centimeter en kaars II is dan nog 61 centimeter lang.

a Stel voor elk van deze kaarsen een formule op voor de lengte l in centimeter als functie van de brandtijd t in uren.

b Hoeveel uur na het aansteken zijn beide kaarsen even lang?

c Hoeveel uur na het aansteken verschillen ze 1 cm in lengte?

Opgave 14

Gegeven is de functie f met $f(x) = 4x|x-1|$.

a In welk punt heeft de grafiek van deze functie een knik?

b Schrijf het functievoorschrift in gesplitste vorm, zonder absoluutstrepen.

c Los op: $f(x) < 0{,}7$.

Opgave 15

De grafiek van de functie f met $f(x) = |ax+b|$ gaat door de punten $(0{,}3)$, $(1{,}1)$ en $(4{,}5)$.

Bepaal de waarden van de parameters a en b.

Toepassen

Opgave 16: Taxirit

Een echtpaar wil vanaf het station met de taxi naar huis. Ze kunnen kiezen tussen een treintaxi en een gewone taxi. De treintaxi kost € 3,00 per persoon. De gewone taxi rekent € 2,25 per rit en daarbovenop nog € 0,75 per minuut.

a Bij de gewone taxi is de ritprijs R afhankelijk van het aantal minuten a dat je er in zit. Stel het bijbehorende functievoorschrift $R(a)$ op.

b Bij welke reistijd met de gewone taxi is het voordeliger om een treintaxi te nemen?

c Taxi's rijden in de stad gemiddeld 30 kilometer per uur. Wat raad je dit echtpaar aan als ze 5 km van het station wonen?

Opgave 17: De letter W

Gegeven is het functievoorschrift $y(x) = ||x-2|-2|$.

a Verklaar waarom de grafiek van deze functie de vorm van de letter W heeft.

b Bereken algebraïsch de nulpunten van deze functie.

c Los op: $y = 1$.

d Verzin zelf een functievoorschrift waarmee je een letter M (een omgekeerde W) in beeld krijgt, die symmetrisch ligt ten opzichte van de y-as.

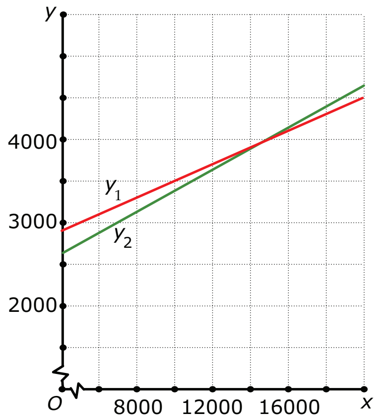
Testen

Opgave 18

Je ziet de grafieken van de jaarlijkse kosten van twee verschillende auto's. Auto A was duurder in de aanschaf dan auto B en heeft mede daarom hogere vaste kosten per jaar, maar is per gereden kilometer iets goedkoper.

a Stel voor beide auto's een passende formule op voor de jaarlijkse kosten als functie van het aantal gereden kilometers.

b Bereken algebraïsch vanaf welk aantal gereden kilometers per jaar het voordeliger is om auto A aan te schaffen. Geef je antwoord in honderdtallen nauwkeurig.



Figuur 3.13

Opgave 19

De grafiek van een lineaire functie gaat door de punten $A(-24,42)$ en $B(30,16)$.

Stel een passend functievoorschrift op.

Opgave 20

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0{,}5x + |x - 1| + |1 + 2x|$.

a Waarom kent de grafiek van f twee knikpunten?

b Schrijf het functievoorschrift zonder absoluutstrepen in gesplitste vorm.

c Wat is het bereik van deze functie?

d Los op: $f(x) \geq 4$.

2.4 Samengestelde functies

Inleiding

Soms zitten functievoorschriften zo in elkaar dat je op een bepaalde invoerwaarde alleen een ketting van na elkaar uitgevoerde bewerkingen toepast. Je hoeft dan de invoerwaarde slechts één keer te geven, daarna voer je elke schakel (rekenstap) van deze ketting bewerkingen na elkaar uit. Het is handig als je kunt herkennen wanneer dit het geval is, want dan kun je gemakkelijk stapsgewijs terugrekenen. Daarbij gebruik je dan de terugrekenbewerkingen, de inverse bewerkingen.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- herkennen uit welke schakels (rekenstappen) het functievoorschrift van een samengestelde functie bestaat;
- het bij een functie behorende rekenschema en terugrekenschema opstellen;
- het begrip inverse functie.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken en tabellen van functies maken (ook met de grafische rekenmachine);
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

Een vuistregel voor het berekenen van de remweg van een auto die met een gegeven snelheid rijdt, luidt: “Neem de snelheid in kilometer per uur (km/h) en deel dit door 10. Kwadrateer de uitkomst en vermenigvuldig daarna wat je hebt gevonden met 3/4. Je krijgt dan de lengte van de remweg in meter.”

Figuur 4.2

a Bereken de lengte van de remweg bij een snelheid van 60 kilometer per uur. Volg de rekenstappen van de vuistregel.

b Stel een formule op voor de remweg R (in meter) als functie van de snelheid v in kilometer per uur (km/h).

Bij een ongeval waarbij een auto voluit moest remmen en zonder botsen tot stilstand is gekomen, meet de politie een remspoor van 90 meter. Daaruit wil men kunnen berekenen hoe hoog de snelheid was waarmee de auto heeft gereden.

c Hoe doe je dit met de gegeven vuistregel? Bereken die snelheid in kilometer per uur (km/h).

d Stel een formule op voor de snelheid v (in km/h) als functie van de remweg R in meter.

Uitleg

Een vuistregel voor het berekenen van de remweg van een auto die met een gegeven snelheid rijdt, luidt: “Neem de snelheid in km/h en deel dit getal door 10. Kwadrateer de uitkomst en vermenigvuldig daarna wat je hebt gevonden met 3/4. Je krijgt dan de lengte van de remweg in meter.”

Om die remweg te berekenen werk je bij deze vuistregel met meerdere rekenstappen. Neem voor de remweg R (in m) en voor de snelheid v (in km/h). Bekijk het rekenschema.

$$v \xrightarrow{\boxed{/10}} \frac{v}{10} \xrightarrow{\boxed{(\ldots)^2}} \left(\frac{v}{10}\right)^2 \xrightarrow{\boxed{\times\frac{3}{4}}} R = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{v}{10}\right)^2$$

Figuur 4.3

De functie met voorschrift $R = f(v)$ is een samengestelde functie die bestaat uit drie rekenstappen, drie schakels.

Wil je omgekeerd de snelheid berekenen als je de remweg weet, dan kun je beter een functie maken van de vorm $v = g(R)$. Door elke afzonderlijke schakel terug te rekenen, maak je een terugrekenschema.

$$v = 10\cdot\sqrt{\frac{4}{3}R} \xleftarrow{\boxed{\times 10}} \sqrt{\frac{4}{3}R} \xleftarrow{\boxed{\sqrt{\ldots}}} \frac{4}{3}R \xleftarrow{\boxed{/\frac{3}{4}}} R$$

Figuur 4.4

Zo'n terugrekenfunctie noem je wel de inverse functie: $g = f^{\text{inv}}$. Bij beide functies horen dezelfde combinaties van twee waarden, maar in omgekeerde volgorde. Bij $R = f(v)$ horen punten van de vorm (v,R), en bij $v = f^{\text{inv}}(R)$ horen punten van de vorm (R,v). Omdat de invoerwaarden op de horizontale as moeten komen, wissel je bij de inverse functie de assen om.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt gesproken over een samengestelde functie $R = f(v) = \frac{3}{4}\left(\frac{v}{10}\right)^2$.

Het gaat om het berekenen van de remweg van een auto die met een bepaalde snelheid rijdt.

a Maak de grafiek van $R = f(v)$.

b Neem aan dat v alleen de waarden van 0 tot kleiner of gelijk aan 140 aanneemt.
Bepaal het domein en het bereik van deze functie.

Als je vanuit een gemeten remweg de snelheid wilt berekenen, dan is de inverse functie handiger. Die vind je met behulp van een terugrekenschema.

c Hoe maak je zo'n terugrekenschema?

d Maak de grafiek van de inverse functie $v = f^{\text{inv}}(R)$.

e Bepaal het domein en het bereik van de inverse functie. Neem weer aan dat $0 \leq v \leq 140$.

Opgave 2

Gegeven zijn twee functies f en g met $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = x + 5$.
h is de functie die ontstaat door eerst functie f toe te passen (als eerste schakel) en dan functie g: $h(x) = g(f(x))$.

a Geef dit weer in een rekenschema. Bereken $h(4)$.

b Geef het functievoorschrift van h.

c Maak een terugrekenschema bij h en schrijf het functievoorschrift van h^{inv} op.

k is de functie die ontstaat door eerst functie g toe te passen (als eerste schakel) en dan functie f: $k(x) = f(g(x))$.

d Geef dit weer in een rekenschema en bereken $k(4)$.

e Schrijf het functievoorschrift van k op.

f Maak een terugrekenschema bij k en geef het functievoorschrift van k^{inv}.

Opgave 3

Bij het bepalen van een inverse functie moet je er goed op letten dat het terugrekenen telkens precies één waarde oplevert. Neem bijvoorbeeld de functie $f(x) = x^2$.

a Welke twee waarden vind je bij terugrekenen vanuit de functiewaarde 9?

De terugrekenfunctie van $f(x) = x^2$ is $f^{\text{inv}}(x) = \sqrt{x}$.

b Bereken nu $f^{\text{inv}}(9)$. Welk probleem ontstaat er als je dit vergelijkt met het antwoord bij a?

c Bekijk ook de grafieken van f en f^{inv} op de grafische rekenmachine. Welk gedeelte van de grafiek van f is het spiegelbeeld van die van f^{inv}?

d Waaraan moet een functie voldoen om er een inverse functie bij te kunnen maken?

e Leg uit waarom $f^{\text{inv}}(f(x)) = x$.

f Is ook $f\left(f^{\text{inv}}(x)\right) = x$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je functies na elkaar uitvoert, krijg je een **samengestelde functie**. Zo kun je bijvoorbeeld twee functies g en h schakelen tot een samengestelde functie $f(x) = h(g(x))$.

$$x \longrightarrow \boxed{g(x)} \longrightarrow u \longrightarrow \boxed{h(u)} \longrightarrow y$$

Figuur 4.5

Bij veel samengestelde functies kun je dit **rekenschema** gebruiken om terug te rekenen door alle afzonderlijke schakels terug te rekenen. Je gebruikt dan de inverse functies van g en h om de **inverse functie** van f te krijgen.

$$x \longleftarrow \boxed{g^{\text{inv}}(u)} \longleftarrow u \longleftarrow \boxed{h^{\text{inv}}(x)} \longleftarrow y$$

Figuur 4.6

Zo heb je door terugrekenen $y = f(x)$ herleid tot $x = f^{\text{inv}}(y)$. Bij de inverse functie zijn de y-waarden de invoervariabelen. Omdat het in de wiskunde gebruikelijk is om de letter x te gebruiken voor de invoervariabele, schrijf je dit laatste meestal als $y = f^{\text{inv}}(x)$. De grafieken van f en f^{inv} zijn daardoor elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.

Bij het bepalen van de inverse functie moet je er wel voor zorgen dat het terugrekenen eenduidig is. Bij elke y-waarde van f moet bij terugrekenen ook precies één waarde voor x horen.
Is dit niet het geval, dan verklein je het domein van f tot dit wel het geval is.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de functies $a(x) = x^2$, $b(x) = x + 9$ en $c(x) = \sqrt{x}$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$.
Schrijf het functievoorschrift op van de samengestelde functie $f(x) = c(b(a(x)))$ en zijn inverse.

Antwoord

De samengestelde functie f ontstaat zo:

$$x \xrightarrow{\boxed{(\ldots)^2}} x^2 \xrightarrow{\boxed{+9}} x^2+9 \xrightarrow{\boxed{\sqrt{\ldots}}} y = \sqrt{x^2+9}$$

Figuur 4.7

Het voorschrift ervan is dus $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

De inverse functie vind je zo:

$$x = \sqrt{y^2-9} \xleftarrow{\boxed{\sqrt{\ldots}}} y^2-9 \xleftarrow{\boxed{-9}} y^2 \xleftarrow{\boxed{(\ldots)^2}} y$$

Figuur 4.8

Het voorschrift van de inverse functie is $f^{\text{inv}}(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

Bij de laatste terugrekenstap moet je terugrekenen vanuit een kwadraat. En dat levert meestal twee uitkomsten op. Omdat het domein van a beperkt is tot $[0, \rightarrow\rangle$, neem je alleen de positieve uitkomst.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** worden drie functies geschakeld tot een samengestelde functie f. De volgorde waarin je de schakels zet, is daarbij van belang. Bekijk in het voorbeeld hoe je de functievoorschriften van f en zijn inverse opstelt.

a Stel het functievoorschrift op van $g(x) = a(b(c(x)))$.

b Stel een functievoorschrift op voor de inverse van g. Laat met een terugrekenschema zien hoe je dit doet.

c Maak vervolgens beide grafieken met de grafische rekenmachine en ga na dat ze elkaars spiegelbeeld lijken te zijn bij spiegeling in de lijn $y = 81$.

Opgave 5

Om een inverse functie te kunnen opstellen, moet je kunnen terugrekenen. En daarvoor moet je de terugrekenstappen (inverse functies) van allerlei basisbewerkingen kennen.

a Bij $f(x) = \frac{1}{2}x$ wordt één basisbewerking uitgevoerd, namelijk vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$. Wat is dan de terugrekenbewerking?

b Welk voorschrift heeft f^{inv}?

c Welke bewerking hoort bij $f(x) = \frac{1}{x}$?

d Welke inverse functie past daar bij?

e De inverse bewerking van kwadrateren is worteltrekken (en omgekeerd). Waar moet je in dit geval voor oppassen?

Opgave 6

Gegeven zijn de functies f en g door $f(x) = 3x - 1$ en $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

a Bereken $f(g(6))$ en $g(f(6))$.

b Laat zien dat voor elke x geldt $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

c Maak beide grafieken in één assenstelsel. Zijn de functies f en g elkaars inverse?

Voorbeeld 2

Voor een toets kun je maximaal 30 punten krijgen. Het cijfer c wordt berekend met de formule $c = \frac{p}{30} \cdot 9 + 1$. Hierin is p het behaalde aantal punten. Je ziet dat c een lineaire functie is van p.
Uit welke basisbewerkingen bestaat $c(p)$? Stel een formule op voor p als functie van c.

Antwoord

De basisbewerkingen zijn achtereenvolgens:

- delen door 30;
- vermenigvuldigen met 9;
- 1 optellen.

Om p als functie van c te kunnen schrijven, ga je terugrekenen (denk om de omgekeerde volgorde):

- 1 aftrekken;
- delen door 9;
- vermenigvuldigen met 30.

Je krijgt $p = \frac{c-1}{9} \cdot 30$.

Opgave 7

Bestudeer **Voorbeeld 2**. Een andere docent hanteert voor dezelfde toets de formule $c = 1 + \frac{3p}{10}$.

a Geef bij deze formule de rekenstappen.

b Stel een bijpassende formule op voor p als functie van c.

c Laat zien dat deze formule voor c hetzelfde resultaat oplevert als die in het voorbeeld.

Als je van de functie $c(p)$ een grafiek maakt met de grafische rekenmachine, vervang je p door X en c door Y.

d Hoe zit dat als je in dezelfde figuur de grafiek van $p(c)$ maakt?

Opgave 8

Een winkelier rekent over al zijn producten 21% btw die hij zelf weer afdraagt aan de overheid. Dat betekent dat van elk artikel de winkelprijs w wordt berekend door de kostprijs k met $1{,}21$ te vermenigvuldigen.

a Stel een formule op voor w als functie van k.

b Een klant ziet alleen de winkelprijs. De kostprijs kan hij dan berekenen met een formule van de vorm $k = c \cdot w$. Bereken de waarde van de constante c in drie decimalen nauwkeurig.

c Hoeveel procent van de winkelprijs is de kostprijs van elk artikel?

Verwerken

Opgave 9

Gegeven zijn de functies f, g en h met $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ en $h(x) = \frac{1}{2}x$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$

a Bereken $f(g(4))$, $g(h(4))$ en $h(f(4))$.

b Geef de functievoorschriften van $f(g(x))$, $g(h(x))$ en $h(f(x))$.

c Geef het functievoorschrift van $k(x) = f(h(g(x)))$.

d Bepaal het functievoorschrift van k^{inv}.

e Controleer je antwoorden bij c en d door na te gaan dat $k^{\text{inv}}(k(x)) = x$ voor alle $x \geq 0$.

Opgave 10

Maak bij elk van de volgende functies een rekenschema (als dat mogelijk is) en een terugrekenschema. Schrijf het functievoorschrift en het domein van de inverse functie op.

a $f_1(x) = \sqrt{x - 4}$

b $f_2(x) = \sqrt{x} - 4$

c $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$ met $x \geq 0$

d $f_4(x) = \frac{1}{2}(x + 5)^2$ met $x \geq -5$

e $f_5(x) = x + \sqrt{x}$

Opgave 11

Welke van de functies zijn elkaars inverse functie?

- $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ met domein $\mathbb{R}$
- $g(x) = x^2$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$
- $h(x) = 2x + \frac{1}{2}$ met domein $\mathbb{R}$
- $k(x) = 2x - 4$ met domein $\mathbb{R}$
- $l(x) = \sqrt{x}$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x + 8$ en $g(x) = 0{,}5x + b$.
Voor welke b geldt $f(g(x)) = g(f(x))$?

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = 3x + b$. De grafiek van f snijdt de grafiek van f^{inv} bij $x = 7$.
Bereken b.

Opgave 14

Bepaal bij de genoemde functies zo mogelijk de inverse functie. Als de inverse functie niet bestaat, beredeneer dan waarom niet.

a $f(x) = \frac{3-x}{x}$

b $g(x) = |x|$

c $h(x) = |x - 4| + 2$ met $D_h = \langle \leftarrow, 4\rangle$

Toepassen

Opgave 15: Omhoog werpen

Een voorwerp wordt met een beginsnelheid van 20 meter per seconde (m/s) omhoog geworpen. Met verwaarlozing van de luchtweerstand is de snelheid v (in m/s) een functie van de tijd t (in seconde):
$v(t) = 20 - 9{,}81t$

a Bereken op twee decimalen nauwkeurig op welk tijdstip het voorwerp voor het eerst zal vallen.

b Schrijf t als functie van v.

c Bereken met de formule uit b op twee decimalen nauwkeurig op welk tijdstip het voorwerp voor het eerst zal vallen.

Opgave 16: Slingertijd

Als je een massa aan een dunne kabel ophangt en je brengt die massa in beweging, gaat die massa heen en weer slingeren met een slingertijd van

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}81}}$$

Hierin is t de slingertijd in seconden en l de lengte van het touw in meter (9,81 is de zwaartekrachtsconstante).

a Welke slingertijd hoort er bij een massa die slingert aan een kabel met een lengte van 2 meter? Geef je antwoord in honderdsten van seconden nauwkeurig.

Iemand wil de lengte van de kabel berekenen door de slingertijd te meten. (De lengte van de kabel is de afstand van het ophangpunt tot het massamiddelpunt van het slingerende voorwerp.) Hij schrijft de formule in de vorm $l = ...$

b Schrijf l als functie van t.

c Bereken nu met de formule uit b in twee decimalen nauwkeurig de lengte van de kabel als de slingertijd $3{,}2$ seconden is.

Testen

Opgave 17

Gegeven zijn de functies f, g en h met $f(x) = x + 4$, $g(x) = x^2$ en $h(x) = 2x$.

a Bereken $f(g(4))$, $g(f(4))$ en $h(f(4))$.

b Geef de functievoorschriften van $f(g(x))$, $g(f(x))$ en $h(f(x))$.

c Geef het functievoorschrift van $k(x) = f(g(h(x)))$.

d Waarom heeft de functie k alleen een inverse functie als je het domein beperkt tot $[0, \rightarrow\rangle$?

e Bepaal het functievoorschrift van k^{inv}.

Opgave 18

Wanneer een voorwerp vanaf een hoogte van 100 meter op aarde valt uit het luchtledige, geldt voor de hoogte boven de grond van het voorwerp $h(t) = 100 - 4{,}9t^2$ met h de hoogte in meter en t de tijd in seconden.

a Schrijf t als functie van h.

b Bereken in één decimaal nauwkeurig hoeveel seconden het voorwerp over de val vanaf een hoogte van 100 meter doet.

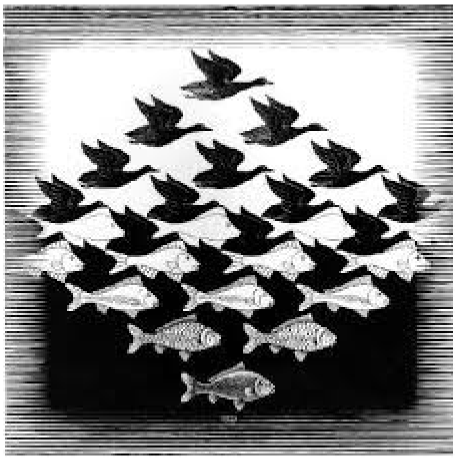
c Op een andere planeet geldt voor de hoogte van een voorwerp die op 100 meter los gelaten wordt $g(t) = h(2t)$. Bepaal het functievoorschrift van g.

2.5 Transformaties

Inleiding

Veel functies ontstaan vanuit een eenvoudige standaardfunctie door in het voorschrift een getal op te tellen en/of met een getal te vermenigvuldigen. De grafieken van dergelijke functies lijken dan sterk op die van de gegeven functie. En de eigenschappen van die grafieken zijn uit die van de standaardfunctie af te leiden. Zo zijn alle functies van de vorm $y = ax + b$ af te leiden uit de standaardfunctie $y = x$. En dus hebben ze dezelfde grafiek, namelijk een rechte lijn.

Bij dit onderdeel heb je bij enkele opgaven een computer nodig!



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met transformaties (verschuivingen en/of vermenigvuldigingen) van grafieken;
- in een functievoorschrift herkennen of de functie is ontstaan uit een standaardfunctie door optellen of vermenigvuldigen met een getal.

Voorkennis

- de grafiek van een functie goed in beeld krijgen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

a Maak de grafiek van $g_1(x) = (x - 4)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f.

b Maak de grafiek van $g_2(x) = x^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_2 ontstaat uit die van f.

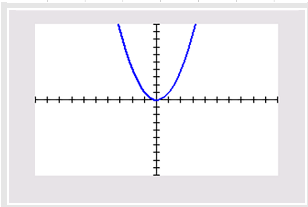
c Maak de grafiek van $g_3(x) = 1{,}5 \cdot x^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_3 ontstaat uit die van f.

d Maak de grafiek van $g_4(x) = (3 \cdot x)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_4 ontstaat uit die van f.

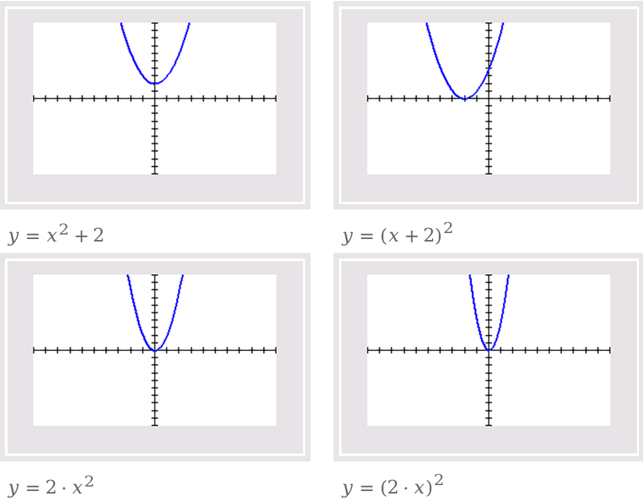
e Maak de grafiek van $g_5(x) = 1{,}5(x - 4)^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_5 ontstaat uit die van f.

Uitleg

Bekijk de grafiek van de standaard kwadratische functie $f(x) = x^2$ op de grafische rekenmachine met de standaardinstellingen. Door in het functievoorschrift met een getal een vermenigvuldiging uit te voeren of een optelling te doen, verander je de grafiek van deze standaardfunctie. Je transformeert de grafiek. Transformeren is vervormen.



Figuur 5.2



Figuur 5.3

Je moet vier transformaties kunnen herkennen.

- De grafiek van $y = x^2 + 2$ ontstaat door alle y-waarden met 2 te verhogen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden hoger van de x-as af te liggen. Dit heet 2 eenheden verschuiven ten opzichte van de x-as.
- De grafiek van $y = (x + 2)^2$ ontstaat door alle x-waarden met 2 te verlagen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden verder naar links van de y-as af te liggen. Dit is hetzelfde als -2 eenheden verschuiven ten opzichte van de y-as.
- De grafiek van $y_2 = 2 \cdot x^2$ ontstaat door alle y-waarden 2 keer zo groot te maken. De punten van de grafiek komen daarom 2 keer zover van de x-as af te liggen. Dit heet met 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as.
- De grafiek van $y = (2 \cdot x)^2$ ontstaat door alle x-waarden met 2 te vermenigvuldigen. De punten van de grafiek komen daarom $\frac{1}{2}$ keer zover van de y-as af te liggen. Dit is hetzelfde als met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as.

Opgave 1

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^2$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door transformatie van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn.

a $y_2 = 0{,}5 \cdot x^2$

b $y_3 = (x - 4)^2 + 2$

c $y_4 = 2 - x^2$

d $y_5 = (3x)^2 + 2$

Opgave 2

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^3$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door transformatie van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn. Gebruik de grafische rekenmachine.

a $y_2 = 3 \cdot x^3$

b $y_3 = (x + 4)^3 + 2$

c $y_4 = 5 - 2x^3$

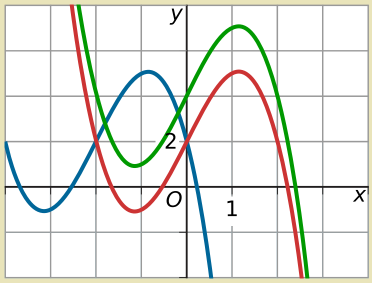
d $y_5 = (0{,}5x)^3 + 1$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Ga uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

- De groene grafiek $y = f(x) + 2$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x-as 2 eenheden te verschuiven;
- De blauwe grafiek $y = f(x + 2)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as -2 eenheden te verschuiven.

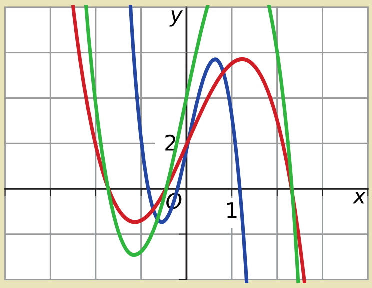


Figuur 5.4

Dit zijn twee **transformaties van een grafiek**. Door het optellen van een getal in het functievoorschrift verschuift de grafiek. In plaats van **verschuiving** spreek je ook wel van **translatie**. De karakteristieken van de getransformeerde functie kun je afleiden uit die van de gegeven functie.

Ga weer uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

- De groene grafiek $y = 2 \cdot f(x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x-as met factor 2 te vermenigvuldigen;
- De blauwe grafiek $y = f(2 \cdot x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.



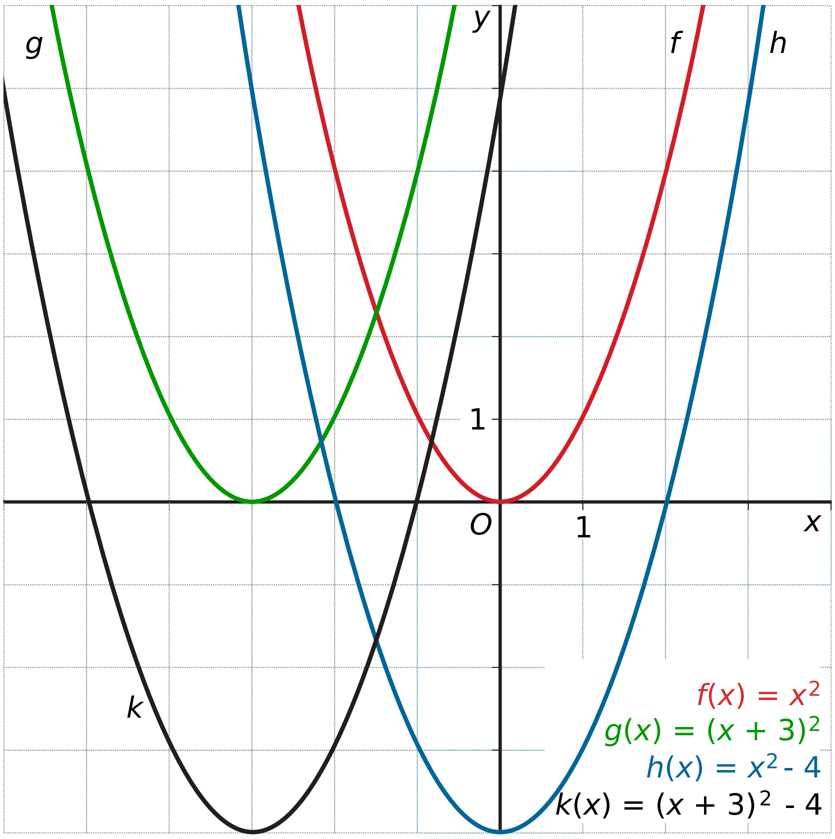
Figuur 5.5

Ook dit zijn twee transformaties van een grafiek. Door het vermenigvuldigen van een getal in het functievoorschrift wordt de grafiek vermenigvuldigd vanuit een as. Dit noem je **vermenigvuldiging ten opzichte van een as**. De eigenschappen van de getransformeerde functie kun je afleiden uit die van de **standaardfunctie**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Grafieken verschuiven

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$, met als top $(0{,}0)$.



Figuur 5.6

De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door translatie van -3 ten opzichte van de y-as. Het functievoorschrift van g wordt $g(x) = (x+3)^2$. De top verschuift 3 mee naar links en wordt $(-3{,}0)$.

De grafiek van h ontstaat door op de grafiek van f een translatie van -4 ten opzichte van de x-as toe te passen. Het functievoorschrift wordt $h(x) = x^2 - 4$. De top verschuift weer mee en wordt $(0, -4)$.

De grafiek van k ontstaat door op de grafiek van f eerst een translatie van -3 ten opzichte van de y-as en daarna een translatie van -4 ten opzichte van de x-as toe te passen. Het functievoorschrift wordt $k(x) = (x+3)^2 - 4$. De top verschuift weer mee en komt te liggen op $(-3, -4)$.

Let op: stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is $g(x) = f(x+3) = (x+3)^2 - 2(x+3)$. Je vervangt dus elke x in de formule door $x+3$. Denk daarbij om de haakjes.

Opgave 3

Werk met de applet in **Voorbeeld 1**. Gegeven is de grafiek van functie f met een onbekend voorschrift $f(x)$.

a Maak de grafiek van $g_1(x) = f(x+2)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f?

b Maak de grafiek van $g_2(x) = f(x) + 2$. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f?

Neem aan dat $f(x) = x^3 - 4x$.

c Schrijf het voorschrift van g_1 op.

d Schrijf het voorschrift van g_2 op.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

a Plot de grafiek van f.

b Schrijf het functievoorschrift van $g_1(x) = f(x+2)$ op. Plot de grafiek van g_1. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f?

c Schrijf het functievoorschrift van $g_2(x) = f(x) - 2$ op. Plot de grafiek van g_2. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f?

Voorbeeld 2

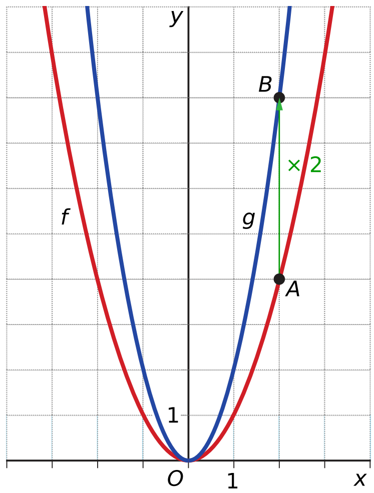
Bekijk de applet: Grafieken vermenigvuldigen

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$.

De grafiek van $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2x^2$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 2.

Je ziet in de grafiek bijvoorbeeld dat de y-coördinaat van punt B 8 is en dat is twee keer zo groot als de y-coördinaat van punt A.

Let op: Stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2(x^2 - 2x)$. Je vermenigvuldigt dus de hele formule met 2.



Figuur 5.7

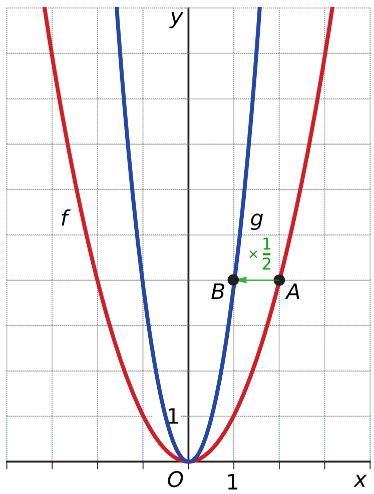
In het algemeen geldt dat de grafiek van $g(x) = c \cdot f(x)$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met c.

De grafiek van $g(x) = f(2x) = (2x)^2$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$.

Je ziet in de grafiek bijvoorbeeld dat de x-coördinaat van punt B 1 is en dat is een $\frac{1}{2}$ keer zo groot als de x-coördinaat van punt A.

Stel bijvoorbeeld dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is $g(x) = f(2x) = (2x)^2 - 2 \cdot (2x)$. Je vervangt dus elke x in de formule door $2x$.

In het algemeen geldt dat de grafiek van $g(x) = f(c \cdot x)$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met de factor $\frac{1}{c}$.



Figuur 5.8

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe de grafieken van $g_1(x) = f(c_1 \cdot x)$ en $g_2(x) = c_2 \cdot f(x)$ kunnen ontstaan door die van $y = f(x)$ te vermenigvuldigen in horizontale of verticale richting.

Werk met de applet. Gegeven is de grafiek van functie f met een onbekend voorschrift $f(x)$.

a Maak de grafiek van $g_1(x) = f(2 \cdot x)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f?

b Maak de grafiek van $g_2(x) = 2 \cdot f(x)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f?

Neem nu aan dat $f(x) = x^3 - 4x$.

c Schrijf het voorschrift van g_1 op.

d Geef het functievoorschrift van g_2.

e Oefen dit met andere functies g_1 en g_2.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

a Plot de grafiek van f.

b Schrijf het functievoorschrift van $g_1(x) = f(2x)$ op. Plot de grafiek van g_1. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f?

c Schrijf het functievoorschrift van $g_2(x) = 2 \cdot f(x)$ op. Plot de grafiek van g_2. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f?

Voorbeeld 3

De rode grafiek is die van functie f met voorschrift $f(x)$.

Bekijk de applet: Transformaties

De grafiek van $g(x) = a \cdot f(b \cdot (x + c)) + d$ ontstaat uit die van f door de vier transformaties toe te passen. Bekijk nog eens goed (m.b.v. de schuifbalkjes) welke transformaties je in welke volgorde toepast.

Opgave 7

In de applet in **Voorbeeld 3** kun je alle vier de transformaties toepassen op functie f. Geef bij elk van de volgende functies aan welke transformaties je moet toepassen om de nieuwe grafiek uit die van f te laten ontstaan. (Let op de volgorde!)

a $g(x) = 2 \cdot f(x) + 3$

b $h(x) = f(x - 4) + 2$

c $k(x) = 2 - f(x)$

d $l(x) = f(3x) + 2$

e $m(x) = 2 \cdot f(3(x - 1)) + 4$

Opgave 8

Schrijf het functievoorschrift op van g als de grafiek uit die van f ontstaat door de genoemde transformaties.

- **a** Ten opzichte van de x-as met -2 vermenigvuldigen en dan translatie van 1 ten opzichte van de x-as toepassen.
- **b** Ten opzichte van de y-as met 2 vermenigvuldigen en dan een translatie van -3 ten opzichte van de x-as toepassen.
- **c** Ten opzichte van de y-as een translatie van 4 en dan ten opzichte van de x-as een translatie van -2 uitvoeren.
- **d** Ten opzichte van de y-as met $0{,}5$ vermenigvuldigen, gevolgd door een translatie van 4 ten opzichte van de y-as.
- **e** Ten opzichte van de y-as een translatie van 4, dan ten opzichte van de y-as een vermenigvuldiging met $0{,}5$ en tenslotte een translatie ten opzichte van de x-as van -2 toepassen.

Voorbeeld 4

Als je een grafiek op de grafische rekenmachine wilt maken, dan moet je geschikte vensterinstellingen geven. Dan kan het nuttig zijn om te zien dat een bepaalde functie door transformatie kan ontstaan uit een veel eenvoudiger standaardfunctie. Zeker als je van die standaardfunctie alle karakteristieken weet.

Hoe breng je de grafiek van $f(x) = 200 - 5(x-30)^2$ goed in beeld?

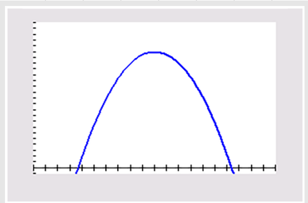
Antwoord

Je herkent dan de functie als $f(x) = -5(x-30)^2 + 200$ met als bijbehorende standaardfunctie $y = x^2$. Die standaardfunctie heeft als grafiek een dalparabool met top $(0,0)$. De grafiek van f ontstaat uit die van $y = x^2$ door:

- een verschuiving van 30 ten opzichte van de y-as;
- een vermenigvuldiging van -5 ten opzichte van de x-as;
- een verschuiving van 200 ten opzichte van de x-as.

De top van de grafiek van f is daarom $(30,200)$ en de grafiek is een bergparabool.

De grafiek van $y = x^2$ is goed in beeld met venster $[-10,10] \times [-10,10]$. Op dit venster kun je ook de beschreven transformaties toepassen. De grafiek van f is daarom goed in beeld op $[20,40] \times [-10,250]$.



Figuur 5.9

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}25(x-5)^4 - 10$. De grafiek van deze functie kan door transformaties ontstaan uit die van de bijbehorende standaardfunctie.

- **a** Welke standaardfunctie is dat?
- **b** Welke transformaties moeten er achtereenvolgens op de standaardfunctie worden toegepast?
- **c** Bepaal het minimum van de grafiek van de gegeven functie. Voor welke waarde van x treedt dit minimum op?

Opgave 10

Werk met de grafische rekenmachine. Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^2$.

a Breng de grafiek van y_1 in beeld met de standaardinstellingen van het venster.

b Breng ook de grafieken van de volgende vier functies in beeld.

- $y_2 = x^2 + 2$
- $y_3 = (x + 2)^2$
- $y_4 = 2 \cdot x^2$
- $y_5 = (2 \cdot x)^2$

Onderzoek bij elk van die grafieken welke transformatie er moet worden toegepast op de grafiek van y_1 om de nieuwe grafiek te krijgen.

c De grafiek van $y_6 = 0{,}5(x - 3)^2 + 4$ ontstaat door transformatie van de grafiek van y_1. Welke transformaties moeten er achtereenvolgens worden toegepast?

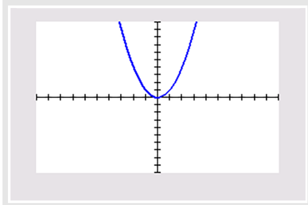
d Door welke transformaties ontstaat de grafiek $y_7 = -x^2$ uit die van y_1?

e Welke algemene vorm heeft het voorschrift van een functie die door transformaties ontstaat uit $y_1 = x^2$?

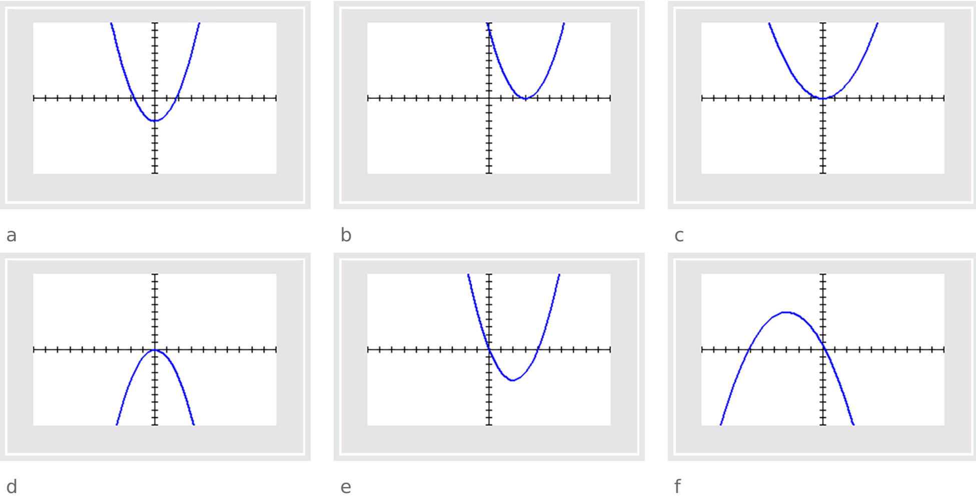
f Hoe kun je door gebruik te maken van transformaties de top van de parabool $y = -2(x - 12)^2 + 315$ bepalen?

Opgave 11

Je ziet hier de grafiek $y_1 = x^2$ in de standaardinstellingen van het venster van je rekenmachine. Bekijk de zes grafieken in de standaardinstellingen van het venster van de grafische rekenmachine. Ze zijn allemaal ontstaan uit transformatie van de grafiek y_1.



Figuur 5.10



Figuur 5.11

Geef bij elke grafiek aan welke transformatie er is toegepast en geef het functievoorschrift.

Verwerken

Opgave 12

Ga uit van de standaardfunctie $f(x) = 2x^2 - 3x$. De grafieken van de functies kun je door transformatie van deze standaardfunctie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn en geef de bijbehorende formules.

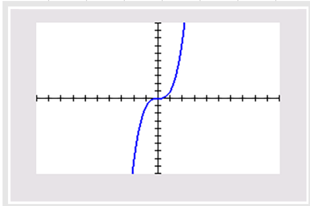
a $y_2 = 0{,}5 \cdot f(x)$

b $y_3 = f(x - 4) + 2$

c $y_4 = 2 - f(x)$

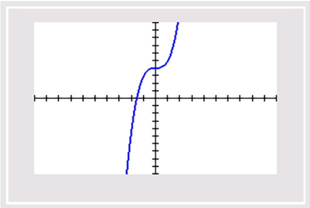
d $y_5 = f(3x) - 4$

Opgave 13

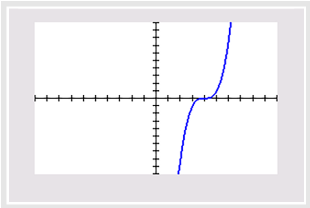


Figuur 5.12

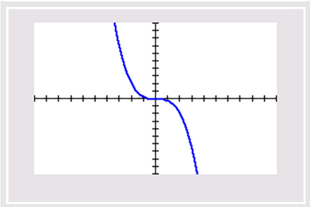
Je ziet vijf keer het venster van de grafische rekenmachine met de basisinstellingen. De standaardfunctie is $y_1 = x^3$. De overige grafieken zijn door transformatie van die grafiek ontstaan.



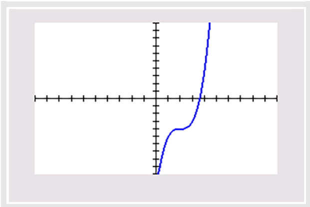
a



b



c

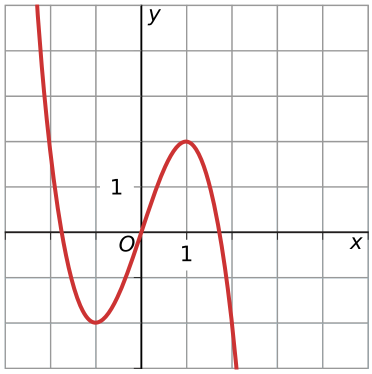


d

Figuur 5.13

Geef bij elke grafiek het juiste functievoorschrift.

Opgave 14



Figuur 5.14

Hier en op het **werkblad** zie je de grafiek van $y_1 = f(x)$.
Teken de grafieken van de volgende functies. Schrijf erbij welke transformaties je toepast.

a $y_2 = f(x-2)$

b $y_3 = \text{-}2 \cdot f(x)$

c $y_4 = f(x) - 2$

d $y_5 = f(2x) - 1$

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.

a De grafiek van y_1 ontstaat door op de grafiek van f een translatie van 2 ten opzichte van de x-as en een translatie van 5 ten opzichte van de y-as toe te passen. Geef het functievoorschrift en het domein en bereik van y_1.

b De grafiek van y_2 ontstaat door de grafiek van f eerst te spiegelen in de x-as, vervolgens een translatie van 3 ten opzichte van de y-as toe te passen en tot slot nog een translatie van $\text{-}4$ ten opzichte van de x-as door te voeren. Geef het functievoorschrift en het domein en bereik van y_2.

c De grafiek van y_3 ontstaat door de grafiek van f eerst te vermenigvuldigen met $\text{-}\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y-as, vervolgens een translatie van 2 ten opzichte van de y-as toe te passen en tot slot nog een translatie van 4 ten opzichte van de x-as door te voeren. Geef het functievoorschrift en het domein en bereik van y_3.

Opgave 16

Gegeven is de functie $f(x) = -2 + (3x - 3)^2$.

a Toon aan dat de functie f te schrijven is als $f(x) = -2 + 9(x - 1)^2$.

b Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $y = x^2$? Zijn er meerdere mogelijkheden?

Opgave 17

De grafiek van $g(x) = ax^2 + bx + c$ gaat door het punt $(2,10)$ en heeft als top de coördinaten $(-2,4)$. Bereken a, b en c.

Toepassen

Opgave 18: Kogelslingeren

Een weggeslingerde kogel beschrijft in een Oxy-assenstelsel de baan $y = -0{,}02(x - 10)^2 + 4$. Het moment van loslaten ligt op $y = 2$. Dit is bij $x = 0$. y en x zijn beiden in meter uitgedrukt.

a Geef geschikte vensterinstellingen zodat je de volledige baan van de kogel op de grafische rekenmachine in beeld kunt krijgen.

b Bereken hoe ver deze kogelstoter met zijn kogel komt. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.

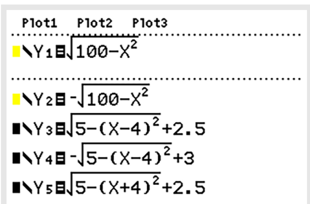
c Na hoeveel meter is de kogel weer even hoog als op het moment van loslaten?

Opgave 19: Smiley maken

Door gebruik te maken van de juiste functies (en vervormingen en verschuivingen) kun je smiley's maken op je grafische rekenmachine. Dat is best een aardige sport en nog leerzaam ook... De smiley hieronder bestaat uit een aantal (soms vervormde en verschoven) halve cirkels. Omdat voor elk punt (x,y) op een cirkel om de oorsprong $O(0,0)$ met straal 10 geldt: $x^2 + y^2 = 100$, noem je dit wel de vergelijking van deze cirkel. Om de grafische rekenmachine te kunnen gebruiken zet je de vergelijking om in een functievoorschrift, eigenlijk in twee functievoorschriften. Ga na, dat: $y = \pm\sqrt{100 - x^2}$.

Deze formules zijn gebruikt om de buitenste cirkel (twee halve cirkels) van de smiley te maken, zoals je ziet. De andere halve cirkels krijg je door transformaties toe te passen. In de figuur is het assenstelsel uitgezet.

Maak zelf een smiley en laat een medeleerling bedenken welke formules je hebt gebruikt (voordat je het assenstelsel uitzet). Doe daarna het omgekeerde.

Figuur 5.15

Testen

Opgave 20

Gegeven is een functie $y_1 = f(x)$. Welke transformaties moet je toepassen om de grafiek te krijgen van de volgende functies?

a $y_2 = f(x-3)+5$

b $y_3 = 0{,}5 \cdot f(x)+1$

c $y_4 = f(3x)$

Opgave 21

Om de grafiek van $f(x) = 10\sqrt{x}+50$ goed in beeld te krijgen op de grafische rekenmachine, moet je weten hoe deze ontstaat uit transformatie van de bijbehorende standaardfunctie.

a Welke standaardfunctie is dat?

b Welke transformaties moet je op de grafiek van de standaardfunctie toepassen?

c Schrijf op bij welke vensterinstelling de grafiek van f goed in beeld komt.

Opgave 22

Je ziet de grafiek van een functie g die door transformatie is ontstaan uit de grafiek van $f(x) = x^3$. De grafiek van g gaat door het punt $(7,6)$.

Schrijf het bijpassende functievoorschrift op.

Figuur 5.16

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Functies en grafieken**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- functie — invoerwaarde — functiewaarde — functievoorschrift
- domein — bereik — nulwaarden/nulpunten — extremen/toppen
- lineaire functie — absoluutfunctie — integerfunctie (entierfunctie) — familie van functies
- samengestelde functie en rekenschema — terugrekenschema en inverse functie
- transformaties — verschuiven (translatie) — lijnvermenigvuldiging

Activiteitenlijst

- functies herkennen — de notaties bij het functiebegrip gebruiken
- het domein en het bereik van een functie bepalen — de intervalnotatie gebruiken
- werken met lineaire functies, de absoluutfunctie en de integerfunctie
- samengestelde functies herkennen en er een rekenschema bij maken — de inverse van een functie opstellen
- transformaties herkennen en uitvoeren

Achtergronden

René Descartes (1596—1650) – een Franse geleerde die een groot deel van zijn leven in De Nederlanden woonde – bedacht dat je lijnen en krommen kunt beschrijven met formules in x en y als je een assenstelsel invoert. Maar in die tijd werden deze lijnen en krommen als statische meetkundige objecten beschouwd, waaraan je, door ze in algebraïsche taal om te vormen, gemakkelijk kunt rekenen.

Pas nadat **Isaac Newton (1642—1727)** de natuurkundige bewegingswetten in wiskunde omzette, werden formules gebruikt om verbanden tussen variabelen te beschrijven. Daarmee ontstond langzamerhand het functiebegrip: bij een bepaald tijdstip hoorde een bepaalde afgelegde afstand, die afstand was een functie van de tijd.

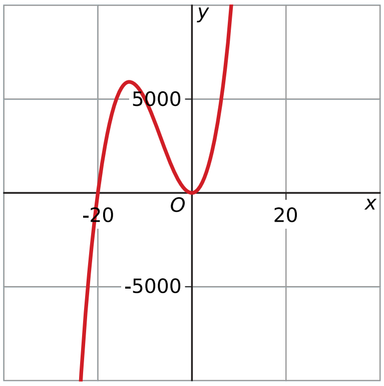
De wiskundige **Leonhard Euler (1707—1783)** voerde de notatie $f(x)$ in. In 1748 schreef Euler het boek 'Introductio in analysin infinitorum', waarin de fundamenten van de analyse van functies systematisch uiteen werden gezet. Daarmee is hij de grondlegger van de functietheorie.

Figuur 6.1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = 5x^2(x + 20)$ en $g(x) = 50x^2$. Je ziet de grafiek van f.



Figuur 6.2

a Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f en g met de x-as.

b Kies een vensterinstelling waarmee je hetzelfde beeld krijgt als de gegeven grafiek. Bereken de snijpunten van de grafieken van f en g.

c Los op: $f(x) < g(x)$.

Opgave 2

Bereken bij de functies eerst de nulpunten. Bepaal vervolgens het domein en bereik.

a $f(x) = x^2\left(x^2 - 400\right)$

b $g(x) = \sqrt{20 - x} - 40$

Opgave 3

Los de vergelijkingen op.

a $|4x - 5| = 20$

b $\left|x^2 - 5x\right| = 6$

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{4x - 12}$.

a Maak een rekenschema bij deze samengestelde functie. Laat twee mogelijkheden zien.

b Geef het domein en bereik van f.

c De grafiek van deze functie kan door transformatie ontstaan uit die van $g(x) = \sqrt{x}$. Welke transformaties moet je dan toepassen?

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0{,}25(x - 10)^4 - 16$.

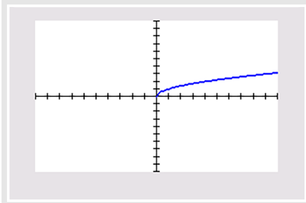
a Door welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^4$?

b Bepaal de top en de snijpunten van de grafiek van f met de x-as.

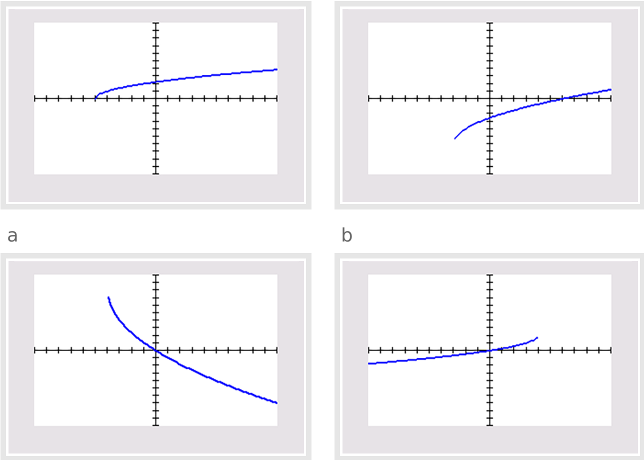
c Los algebraïsch op: $f(x) < 10$.

Opgave 6

Je ziet vier grafieken die zijn ontstaan door op de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ een of meer transformaties toe te passen. Steeds zijn de standaardinstellingen van het GR-venster gebruikt. Ga er van uit dat alle randpunten gehele coördinaten hebben.



Figuur 6.3



a b c d

Figuur 6.4

Schrijf bij elke grafiek het juiste functievoorschrift op.

Opgave 7

Gegeven is dat de grafiek van de lineaire functie f door de punten $A(-2{,}8)$ en $B(6{,}80)$ gaat.

a Stel het functievoorschrift op van f.

b Voor welke lineaire functie g geldt dat $f(g(x)) = 2x + 4$?

c Geef het functievoorschrift van $f^{\text{inv}}(x)$.

Opgave 8

Gegeven is de functie $y(x) = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

a Maak een rekenschema bij deze samengestelde functie.

b Geef het domein en bereik van f.

c Heeft deze functie een inverse functie? Zo ja, stel het functievoorschrift op.

Toepassen

Opgave 9: Airco kaduuk

Door een technische storing in de airconditioning van een groot gebouw neemt het zuurstofgehalte in de lucht tijdelijk af. De technische staf heeft het verloop van het zuurstofgehalte beschreven met de formule:

$$Z(t) = 200\left(1 - \frac{10}{t+10} + \frac{100}{(t+10)^2}\right)$$

Hierin is t de tijd in minuten gerekend vanaf het moment dat de storing begon. Verder is Z het aantal cm^3 zuurstof per liter lucht op het tijdstip t. Op $t = 0$ is het zuurstofgehalte normaal.

a Bereken $Z(0)$. Plot de grafiek van $Z(t)$ voor $0 \leq t \leq 100$.

b Op welk tijdstip is het zuurstofgehalte minimaal?

c Schrijf het domein en het bereik van deze functie op.

d De medische staf vindt een zuurstofgehalte van 80% van het normale niveau, nog juist toelaatbaar. Bereken gedurende hoeveel minuten het zuurstofgehalte ontoelaatbaar laag is.

Examen

Opgave 10: Wortelfunctie met punt op grafiek

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{1-2x}$. T en S zijn de snijpunten van de grafiek van f met de x-as en de y-as.

a Bereken de coördinaten van T en S.

b Schrijf domein en bereik van f op.

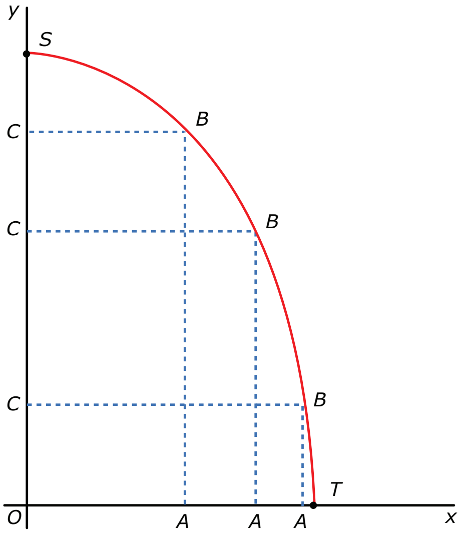
In de figuur zie je hoe punt B de grafiek van f doorloopt tussen T en S. De punten A en C zijn steeds de projecties van B op respectievelijk de x-as en de y-as. Als B niet samenvalt met T of C is $OABC$ een rechthoek. Die rechthoek verandert voortdurend van vorm. Er is één plaats van B waarbij $OABC$ een vierkant is.

c Bereken de coördinaten van deze plaats.

Als B van T naar S beweegt over de grafiek van f, neemt de oppervlakte van $OABC$ eerst toe en later weer af. Iemand heeft het vermoeden dat de oppervlakte van $OABC$ maximaal is wanneer $OABC$ een vierkant is.

d Onderzoek of dit vermoeden juist is.

(bron: examen wiskunde B havo 1991, tweede tijdvak)



Figuur 6.5

Opgave 11: Verschoven functie

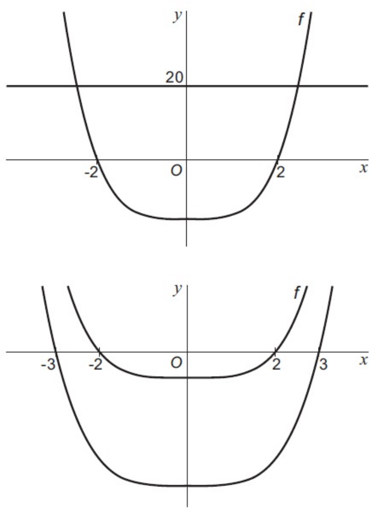
Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 16$. De grafiek van f snijdt de x-as in de punten $(-2,0)$ en $(2,0)$. In de bovenste figuur zijn de grafiek van f en de lijn $y = 20$ getekend.

a Bereken exact voor welke waarden van x de grafiek van f tussen de x-as en de lijn $y = 20$ ligt.

Door de grafiek van f omlaag te schuiven, veranderen de snijpunten met de x-as in de punten $(-3,0)$ en $(3,0)$. In de figuur zijn de grafiek van f en de verschoven grafiek getekend.

b Bereken hoeveel de grafiek van f omlaag is geschoven.

(bron: examen havo wiskunde B 2006 - II)



Figuur 6.6

Opgave 12: Verbindingslijnstukken

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ met $x > 0$.

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt $(1,1)$. Bekijk voor $a > 1$ bij $x = a$ het verticale verbindingslijnstuk tussen de grafieken van f en g. Zie de eerste figuur.

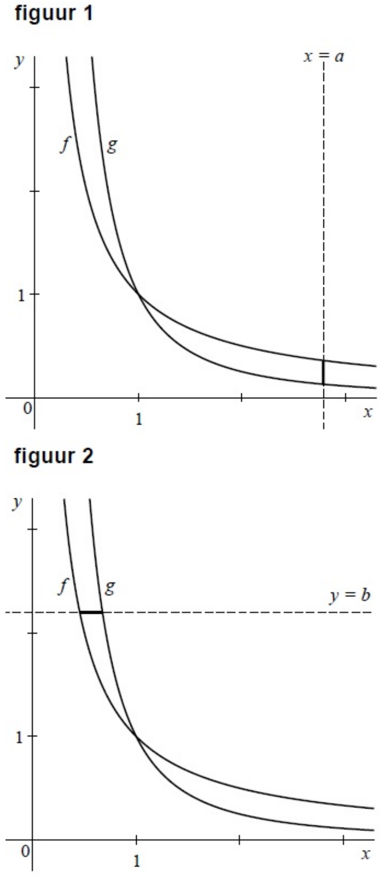
a Bereken algebraïsch de exacte waarden van a waarvoor de lengte van het verticale verbindingslijnstuk $\frac{1}{4}$ is.

Bekijk voor $b < 1$ bij $y = b$ het horizontale verbindingslijnstuk tussen de grafieken van f en g. Zie de tweede figuur. De x-coördinaten van de eindpunten van dit verbindingslijnstuk zijn respectievelijk $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Voor een zekere waarde van b is de lengte van dit lijnstuk maximaal.

b Bepaal de maximale lengte van het horizontale verbindingslijnstuk.

(naar: examen vwo wiskunde B in 2011, tweede tijdvak)



Figuur 6.7

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

www.math4all.nl

Werkblad bij Opgave 14 op pagina 105