Wiskunde A / PGA

4 VWO / docentmateriaal

Kansrekenen

ConTeXt College

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je begeleidt dan als docent de leerlingen die in kleine groepjes aan wiskundige problemen werken en op die manier een eigen theoretisch kader opstellen. Dit gebeurt voornamelijk op de wijze die wordt beschreven in het boek *Building Thinking Classrooms in Mathematics* van Peter Liljedahl. Dit boek is ook in het Nederlands beschikbaar. Het is verstandig om dit boek vooraf door te werken, maar je kunt ook beginnen met deze **beknopte handleiding**.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee de leerling kan nagaan of de stof wordt beheersd. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding staat in de marge naast de opgave.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die de leerling alleen hoeft te maken als er genoeg tijd voor is
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die een leerling alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk was

In de bijlage staat een “**Leerdoelentabel**” waarin staat aangegeven door welke opgave het specifieke leerdoel wordt afgedekt en op welk niveau dit gebeurt. Als je deze tabel aan de leerlingen uitreikt, kunnen ze hun eigen vorderingen bijhouden.
Opgaven uit de samenvattende paragraaf *Totaalbeeld* worden voorafgegaan door een T.

1

Kansrekenen

1.1 Kansen 6
1.2 Kansbomen 14
1.3 Kansen optellen/aftrekken 20
1.4 Kansen vermenigvuldigen 27
1.5 Toevalsvariabelen 34
1.6 Binomiale kansen 41
1.7 Totaalbeeld 47

1.1 Kansen

Inleiding

Figuur 1.1

Elk vlakje van een zuivere dobbelsteen komt gemiddeld genomen ongeveer even vaak boven te liggen als je er vaak mee gooit. In de praktijk blijkt dat dit bij steeds meer herhalingen steeds beter gaat kloppen.
Omdat een dobbelsteen 6 vlakken kent, zeg je dat de kans dat één van die vlakken boven komt 1 op de 6 is. Het is gebruikelijk om dit als breuk te schrijven en te zeggen dat de kans op het gooien van bijvoorbeeld 4 ogen met een zuivere dobbelsteen $\frac{1}{6}$ is.

Je leert in dit onderwerp

- wat experimentele en theoretische kansen zijn, hoe je ze berekent en hoe je ze noteert;
- wat een kansexperiment en een gebeurtenis zijn;
- dat je en hoe je een kansexperiment kunt simuleren;
- de wet van de grote aantallen.

Voorkennis

- statistische kennis: frequentieverdelingen, relatieve en absolute frequenties, frequentiepolygonen, histogrammen;
- mogelijkheden tellen met permutaties en combinaties (combinatoriek);
- rekenen met percentages en breuken.

Voor de docent

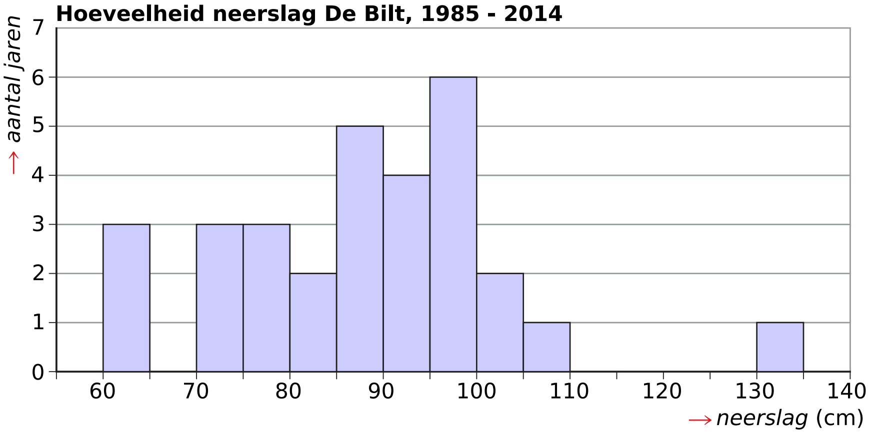
Bij het onderwerp ‘Kansen’ gaat het in eerste instantie om het begrip kans. Daarbij houd je vanaf het begin rekening met het verschil tussen de statistische kans en de theoretische kans. Die komen dan ook in de inleidende opdrachten aan bod. Verder moet bij met name het theoretisch kansbegrip al meteen de link met het systematisch tellen worden gelegd. Ook kan er met dobbelstenen worden geëxperimenteerd. Dat kan met fysieke dobbelstenen, maar ook door simulatie met de grafische rekenmachine. Nuttig is ook het invoeren van notaties zoals $P(X = 5)$ en P (rood-wit-wit), etc.

Gewenste materialen:

- Bij de eerste opdracht hoort een figuur, die kan vooraf worden gekopieerd van het werkblad.
- Voldoende dobbelstenen om mee te experimenteren.
- Grafische rekenmachine met het practicum ‘Simulaties’, zie de Math4all-site.

Opdracht 1.1

Jaarlijks wordt de hoeveelheid neerslag in De Bilt geregistreerd. Van de resultaten in de jaren 1985 t/m 2014 is een frequentieverdeling gemaakt: zie bijbehorend histogram.
Neem aan dat het neerslagpatroon sindsdien niet is gewijzigd.



Figuur 1.2

1. Hoe groot is de kans dat in het komend jaar meer dan 1 meter neerslag valt in De Bilt?
2. Hoe groot is de kans dat er tussen de 9 dm en 1 meter neerslag valt?
3. Hoe bereken je zo'n statistische kans? Kun je een algemene regel opstellen?

Toelichting

De figuur staat op dit **Werkblad**.

Leerlingen die geen idee hebben hoe ze dit moeten aanpakken, stel je vragen als: “Hoeveel metingen heb je? Wat betekent het dat het neerslagpatroon niet is gewijzigd in de loop der jaren?” en “Hoeveel keer is er meer dan 1 m neerslag gevallen?” en “Wat zou je onder de kans op neerslag verstaan? Hoe bereken je die vanuit de gegevens?”.

Nuttige vervolgvragen zijn: “Hoe zeker zijn je antwoorden?” en “Kun je manieren verzinnen om zo'n kans nauwkeuriger te bepalen?” en “Hoe zou je de kans berekenen dat de batterij van je smartphone 5 jaar meegaat?” (of iets dergelijks).

Uitwerking

In totaal zijn er 30 waarnemingen.

1. 4 waarnemingen zijn groter dan 100 cm, dus de gevraagde kans is $\frac{4}{30} \cdot 100\% = 13{,}3\%$.
2. $4 + 6 = 10$ waarnemingen liggen tussen de 90 cm en de 100 cm liggen. De gevraagde kans is daarom $\frac{10}{30} \cdot 100\% = 33{,}3\%$.
3. Iets als: De kans op een bepaalde gebeurtenis is het aantal bijpassende metingen gedeeld door het totaal aantal metingen.

Opdracht 1.2

Als je bijvoorbeeld de kans wilt uitrekenen dat bij het werpen met een dobbelsteen het vlakje met 5 ogen bovenkomt, kun je enkele honderden keren of meer met een dobbelsteen gooien en proefondervindelijk vaststellen welk vlakje bovenkomt. Je voert dan hetzelfde kansexperiment heel vaak uit. Dat kun je simuleren met je grafische rekenmachine

Ga na, hoe je met je grafische rekenmachine het werpen met een dobbelsteen kunt simuleren. Maak daarmee een goede schatting van de kans op 5 ogen en leg uit dat hij overeen komt met wat je zelf vooraf kunt bedenken.

Doe dit ook voor het werpen met twee dobbelstenen. Maak daarmee een goede schatting van de kans op 5 ogen en leg uit dat hij overeen komt met wat je zelf vooraf kunt bedenken.

Toelichting

Laat leerlingen even met het practicum stoeien. Belangrijk is dat ze dit kunnen koppelen aan beredeneerde kansen. Bij het werken met één dobbelsteen zal dit wel meteen gaan, bij het werken met twee dobbelstenen wellicht niet. Stel dan vragen als: “Welke mogelijkheden heb je bij twee dobbelstenen?” en “Zijn al die mogelijkheden even kansrijk?” en “Op hoeveel manieren kun je op 5 ogen uitkomen?”.

Nuttige vervolgvragen zijn: “Wat zou ‘de wet van de grote aantallen’ betekenen in de kansrekening?” en “Hoe kun je bij twee dobbelstenen de kansen op de verschillende aantallen ogen berekenen?” en “Hoeveel moeten die kansen samen altijd zijn?” en “In welke gevallen kun je kansen beredeneren? En hoe doe je dat dan?”.
Voor leerlingen die meer uitdaging nodig hebben, kun je het aantal dobbelstenen opschalen, of andere dobbelstenen gebruiken (viervlaks-, twaalfvlaksdobbelsteen). Ook kun je daar wat ‘hoogstens’ of ‘minstens’ vragen stellen, zoals de volgende opdracht.

Uitwerking

In het **Practicum** zitten links naar practica voor grafische rekenmachines.

Bij het werpen met één dobbelsteen doe je iets als RandInt(1,6,120) om het simuleren van 120 worpen in een lijst te zetten en daar dan een grafiek van te maken. Als het goed is komt er bij 5 ogen ongeveer $\frac{1}{6}$ uit.

Bij het werpen met twee dobbelstenen voer je RandInt(1,6,120) + RandInt(1,6,120) in de lijst in. Maak van die lijst een grafiek. Als het goed is komt er bij 5 ogen ongeveer $\frac{4}{36}$ uit.

Opdracht 1.3

Hoe groot is de kans dat je bij het werpen met drie dobbelstenen minstens 16 ogen gooit?
Het antwoord kun je opschrijven als $\text{P}(X \geq 16) = ...$ met de P van het Latijnse ‘probabilitas’.

Toelichting

Eventuele hulpvragen: “Welke mogelijkheden heb je bij drie dobbelstenen?” en “Hebben al die mogelijkheden dezelfde kans?” en “Wat betekent minstens ook alweer?” en “Op hoeveel manieren kun je op 16 ogen uitkomen?”. Verder lijkt het verstandig om hier vragenderwijs te sturen naar de "en"/"of" situaties en dat je bij "en" vermenigvuldigt en bij "of" optelt.

Voor snellere leerlingen de vraag aanpassen naar ‘hoogstens’ en/of andere aantallen.

Uitwerking

18 ogen alleen bij 6 en 6 en 6, dus $\text{P}(X = 18) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

17 ogen alleen bij 5 en 6 en 6, of 6 en 5 en 6, of 6 en 6 en 5, dus $\text{P}(X = 17) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{216}$.

16 ogen bij 5 en 5 en 6 (in 3 volgordes) of 4 en 6 en 6 (in 3 volgordes), $\text{P}(X = 16) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{216}$.

De kans is $\text{P}(X \geq 16) = \text{P}(X = 16 \text{ of } X = 17 \text{ of } X = 18) = \text{P}(X = 16) + \text{P}(X = 17) + \text{P}(X = 18) = \frac{10}{216}$.

Opdracht 1.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd. Neem ook de korte schrijfwijze voor kansen daarin op.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. **Ga als docent zelf in op de notatie** $\mathrm{P}(X \geq 16)$. Ieder schrijft voor zichzelf een overzicht.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht. Misschien zou je er nog iets aan kunnen toevoegen als vuistregel: bij "en" vermenigvuldigen en bij "of" optellen.

Theorie

Om te onthouden

Als je gooit met een eerlijke dobbelsteen zijn de (mogelijke) **uitkomsten** 1, 2, 3, 4, 5 en 6. Als je wilt weten hoe groot de kans is dat er 5 ogen boven komen, ga je **kansrekenen**.

De **kans** op een **gebeurtenis** zoals bijvoorbeeld ‘5 ogen gooien met een dobbelsteen’, kun je op drie manieren berekenen.

- Proberen: Vaak met een echte dobbelsteen gooien. Je voert dan een **kansexperiment** uit.
  De **experimentele kans** op een gebeurtenis is:
  $\frac{\text{aantal keren dat die gebeurtenis optreedt}}{\text{aantal herhalingen van het kansexperiment}}$
- Simuleren: Het kansexperiment simuleren (nabootsen) met de computer of de grafische rekenmachine.
- Redeneren: Als je te maken hebt met een situatie waarin alle uitkomsten een even grote kans hebben, kun je de **theoretische kans** beredeneren.
  De theoretische kans is: $\frac{\text{het aantal gunstige uitkomsten}}{\text{het totaal aantal uitkomsten}}$
  De theoretische kans op ‘5 ogen gooien met een dobbelsteen’ schrijf je als: $P(X = 5) = \frac{1}{6}$.

De experimentele kans en de theoretische kans zullen steeds minder van elkaar gaan verschillen naarmate het experiment vaker wordt uitgevoerd. Dit heet de **wet van de grote aantallen**.

Verwerken

★ Opgave 1.1

In welke van de volgende gevallen kun je de kans bepalen door een simulatie met de grafische rekenmachine? Licht ook steeds toe waarom.

a De kans op 'zes' bij het werpen met twee dobbelstenen.

b De kans op 'zes' bij het werpen met een dobbelsteen die aan één kant zwaarder is.

c De kans op 'zes' bij het werpen met een dobbelsteen waar op de zijvlakken 1, 1, 3, 4, 4 en 6 stippen voorkomen.

★ Opgave 1.2

Je hebt een ondoorzichtige doos met daarin tien gekleurde balletjes, zeven groene en drie gele. De groene balletjes zijn genummerd 1 tot en met 7, de gele 1 tot en met 3.
Je schudt die doos en haalt er zonder te kijken één balletje uit.

a Hoe groot is de kans dat het een geel balletje is?

b Hoe groot is de kans dat het een balletje met nummer 1 is?

c Hoe groot is de kans dat het balletje nummer 4 heeft?

d Hoe groot is de kans dat het een groen balletje met een nummer hoger dan 3 is?

★ Opgave 1.3

Je werpt met twee dobbelstenen en let op het aantal ogen dat boven komt.

a Hoe groot is de kans dat er 7 ogen boven komen te liggen?

b Hoe groot is de kans op hoogstens 7 ogen?

c Hoe groot is de kans op meer dan 11 ogen?

d Hoe groot is de kans op een even aantal ogen?

★ Opgave 1.4

Twee spelers A en B spelen een spel. Beiden hebben lucifers waarvan ze er (zonder dat aan elkaar te laten zien) 0, 1 of 2 in de hand nemen, die ze vervolgens dichtgeknepen voor zich op tafel leggen. Tegelijk laten ze elkaar zien hoeveel lucifers ze in de hand hebben. A wint als beide aantallen lucifers precies één verschillen, anders wint B. Ga ervan uit dat het aantal lucifers dat de spelers in de hand nemen uitsluitend van het toeval afhangt.

a Geef in een boomdiagram alle mogelijkheden van het spel weer. Geef ook aan wanneer A wint.

b Hoe zou je dit spel kunnen simuleren met toevalsgetallen?

c Denk je dat dit spel eerlijk is? Met andere woorden hebben A en B een gelijke kans om te winnen?

★ Opgave 1.5

Bij een voetbaltoernooi wordt aan het begin van elke wedstrijd getost met een munt om te bepalen welke ploeg mag aftrappen. Tijdens dit toernooi speelt Cambuur vier wedstrijden.

a Hoe groot is de kans dat Cambuur bij de eerste wedstrijd de toss wint en mag aftrappen?

b Hoe groot is de kans dat Cambuur alle vier de wedstrijden mag aftrappen?

c Hoe groot is de kans dat Cambuur minstens drie keer mag aftrappen?

★ ★ **Opgave 1.6**

levensduur	*aantal*	*levensduur*	*aantal*
950– < 1050	4	1550– < 1650	53
1050– < 1150	9	1650– < 1750	37
1150– < 1250	19	1750– < 1850	20
1250– < 1350	36	1850– < 1950	9
1350– < 1450	51	1950– < 2050	3
1450– < 1550	58	2050– < 2150	1

Tabel 1.1

Een fabrikant heeft steekproefsgewijs de levensduur van zijn lampen onderzocht. Je ziet de gegevens weergegeven in een tabel. Ga ervan uit dat de gegevens uit de steekproef maatgevend zijn voor alle lampen van deze fabrikant.

a Maak een histogram met de relatieve frequenties van de levensduur.

b Hoe groot schat je de kans dat een lamp niet meer dan 1250 uur brandt?

c Waarom zou deze kans met grotere zekerheid kunnen worden berekend als er niet 300 maar 30000 lampen in de steekproef hadden gezeten?

d Schat de kans dat de levensduur van een lamp meer dan 10% afwijkt van de gemiddelde levensduur van circa 1500 uur.

Toepassen

★ ★ **Opgave 1.7: Loterij**

Er wordt een loterij gehouden. De loten hebben nummers 000 tot en met 999. Alle loten zijn verkocht. Op volkomen aselecte wijze wordt een lotnummer getrokken. Daarop valt de tweede prijs.

a Jij hebt het nummer 113. Hoe groot is de kans dat je die prijs hebt?

b Je vriendin zegt dat ze een even lotnummer heeft. Hoe groot is de kans dat zij de tweede prijs heeft?

c Hoe groot is de kans dat er een even lotnummer wordt getrokken?

d Waarom zijn de kansen bij b en c verschillend?

De tweede prijs is gevallen op lotnummer 771. Hierna wordt de eerste prijs getrokken, nummer 771 doet niet meer mee.

e Hoe groot is nu jouw kans op de eerste prijs?

f Hoe groot is nu de kans dat er een even lotnummer wordt getrokken?

★ ★ ★ **Opgave 1.8: Schoolexamen en Centraal Examen**

	SE				
CE	4	5	6	7	8
5	10	11	8	3	0
6	5	5	14	13	4
7	0	2	7	12	6

Tabel 1.2

In deze tabel worden de resultaten van het schoolexamen (SE) en het centraal examen (CE) van een bepaalde school vergeleken. De getallen zijn percentages die zijn ontstaan uit gemiddelden over vele jaren.

a Leg uit waarom je de percentages in deze tabel kunt gebruiken als redelijk realistische kansen.

b Hoe groot is de kans dat iemand die op het SE een 5 scoort, op het CE een voldoende haalt?

c Hoe groot is de kans dat iemand op het CE beter scoort dan op het SE?

d Bedenk een methode om, met behulp van simulatie op de grafische rekenmachine, de uitslag van een eindexamenkandidaat voor SE en CE op basis van deze tabel voor komend jaar te voorspellen.

Beschrijf alle voorwaarden die nodig zijn en alle stappen die uitgevoerd moeten worden.

Practicum

Bekijk de applet.

Met de volgende practica kun je leren hoe je **simulaties met de grafische rekenmachine** kunt uitvoeren. Je vindt er ook informatie die je verderop bij dit onderwerp nodig hebt. Die kun je nu eerst even laten zitten.

- **Simulaties en de TI84**
- **Simulaties en de TInspire**
- **Simulaties en de Casio fx-CG50**
- **Simulaties en de HPprime**
- **Simulaties en de NumWorks**

Je kunt ook eenvoudig met Excel kansspelen simuleren. Gebruik dit Excel-bestand: **Simulatie van kansspelen**.

1.2 Kansbomen

Inleiding

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25 heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging. Maar hoe liggen zijn kansen als hij meerdere doelpogingen doet?

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen met behulp van een kansboom;
- het vaasmodel met of zonder teruglegging voor het berekenen van kansen.

Voorkennis

- werken met boom- en/of stroomdiagrammen;
- kansen berekenen door tellen van mogelijkheden, eventueel met behulp van diagrammen.

Voor de docent

Na de introductie van het kansbegrip komt nu het werken met **kansbomen** aan de orde. Dat zal voor veel leerlingen echt een denkstap zijn, dus wat daarop gerichte hulpvragen zullen vanaf het begin nodig zijn. Haak daarbij aan bij kennis van het gebruik van boomdiagrammen bij het tellen van mogelijkheden. En dan komt de stap van herhaling (vaasmodel: trekking met teruglegging) of geen herhaling (vaasmodel: trekking zonder teruglegging). Dat zou moeten gebeuren in de tweede en de derde opdracht. Ook hier zullen gerichte hulpvragen nodig zijn.

Gewenste materialen:

- Geen bijzonderheden.

Opdracht 2.1

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25 heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging. Maar hoe liggen zijn kansen als hij meerdere doelpogingen doet?

1. Hoe groot is de kans op twee scores als hij twee doelpogingen doet?
2. Hoe groot is de kans op minstens één score als hij twee doelpogingen doet?

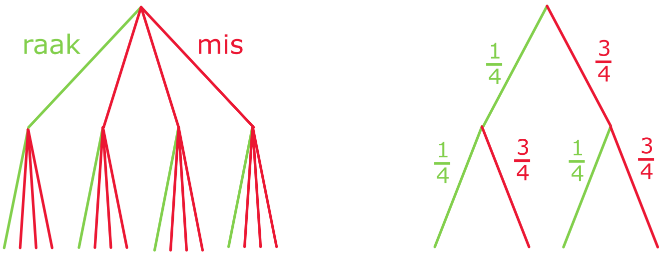
Toelichting

Leerlingen die geen idee hebben hoe ze dit moeten aanpakken, stel je vragen als: “Hoeveel treffers en hoeveel missers zijn er per doelpoging?” en “Hoe kun je twee doelpogingen in een boomdiagram weergeven?” en “Hoeveel mogelijkheden zijn er bij twee doelpogingen? En hoeveel keer is het beide keren raak?” en “Kun je hierbij ook een boomdiagram maken met kansen erin?”.

Nuttige vervolgvragen zijn: “Hoe breid je de gekozen aanpak uit naar drie doelpogingen?” en “Hoe liggen dan de kansen?” en “Hoe werk je met een boomdiagram voor kansen? Kun je regels opstellen?”.

Uitwerking

Bekijk de boom met mogelijkheden en daarnaast de kansboom bij twee doelpogingen.



Figuur 2.2

1. De kans wordt $\frac{1}{4}$ deel van $\frac{1}{4}$, dus $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.
2. De kans wordt $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$.

Opdracht 2.2

In een groep van vier mannen en vijf vrouwen worden door loten drie taken (wassen, afwassen en auto wassen) verdeeld.
Als één persoon meerdere van die drie taken mag doen, hoe groot is dan de kans dat er twee taken door een man en één door een vrouw worden uitgevoerd?

Toelichting

Leerlingen die geen idee hebben hoe ze dit moeten aanpakken, stel je vragen als: “Hoe ga je die loting in de praktijk uitvoeren?” (bijvoorbeeld: gebruik twee soorten gekleurde briefjes met namen in een dichte vaas) en “Hoe kun je dan de mogelijkheden in een boomdiagram weergeven?” (stop je de briefjes na elke trekking terug of niet?) en “Hoeveel mogelijkheden zijn er bij drie trekkingen? En hoeveel keer krijg je twee mannen en één vrouw?”.

Een nuttige vervolgvraag is: “Heb je je eigen regels voor het werken in een kansboom gebruikt? Zo niet, kun je die alsnog formuleren?” en dan meteen doorgaan met de volgende opdracht.

Uitwerking

Bijpassend vaasmodel:

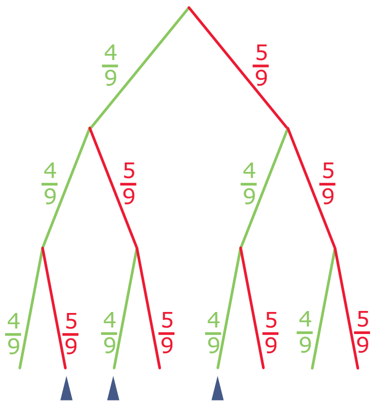
- vaas met negen balletjes, vier groen (mannen) en vijf rood (vrouwen);
- aselecte trekking van drie balletjes (aantal taken);
- met terugleggen (want elke persoon mag meerdere taken doen).

Daarbij hoort deze kansboom.

De routes waarbij twee taken door een man en één door een vrouw worden gedaan, zijn aangegeven.

De gevraagde kans is:

$P\,(\text{mmv of mvm of vmm}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{80}{243} \approx 0{,}3.$



Figuur 2.3

Opdracht 2.3

In een groep van vier mannen en vijf vrouwen worden door loten drie taken verdeeld.
Als elk van die drie taken door een andere persoon moet worden gedaan, hoe groot is dan de kans dat er twee taken door een man en één door een vrouw worden uitgevoerd? En wat is het verschil met de voorgaande opdracht?

Toelichting

Leerlingen die het verschil met de voorgaande opdracht niet door hebben, stel je vragen als: “Wat is het verschil met de voorgaande opdracht?” en “Stop je nu bij de loting de briefjes steeds weer terug in de vaas?” en “Hoeveel mogelijkheden zijn er nu bij drie trekkingen? En hoeveel keer krijg je twee vrouwen en één man?”.

Het is belangrijk dat ze bij het antwoord op de vraag “En wat is het verschil met de voorgaande opdracht?” zorgvuldig een antwoord formuleren. Hier is het verschil tussen trekking met en trekking zonder terugleggen aan de orde.

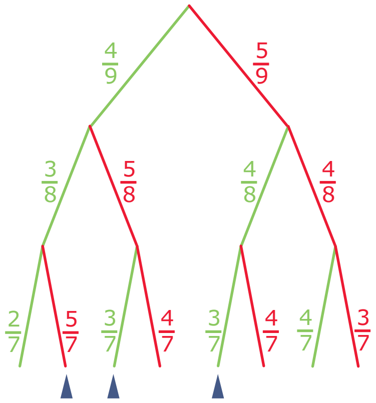
Een nuttige vervolgvraag is: “Heb je je eigen regels voor het werken in een kansboom nu uitgebreid? Zo niet, kun je dat dan alsnog doen?” en vervolgens het probleem opschalen (bijvoorbeeld naar een groep van drie kiezen uit de totale klas), of ‘minstens’ of ‘hoogstens’ vragen stellen.

Uitwerking

Bijpassend vaasmodel:

- vaas met negen balletjes, vier groen (mannen) en vijf rood (vrouwen);
- aselecte trekking van drie balletjes (aantal taken);
- zonder terugleggen (want elke persoon mag één taak doen en niet meer).

Daarbij hoort deze kansboom.



Figuur 2.4

De routes waarbij twee taken door een man en één door een vrouw worden gedaan, zijn aangegeven.

De gevraagde kans is:

$$P\,(\text{mmv of mvm of vmm}) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{5}{14}$$

Opdracht 2.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht. Kom je uitdrukkingen als ‘trekking met/zonder terugleggen’ tegen?
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie tot een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft voor zichzelf een overzicht.

Uitwerking

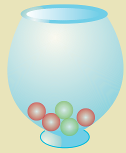
Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Veel situaties waarin kansen een rol spelen, kun je beschrijven door middel van aselecte trekking van balletjes uit een vaas. Dit noem je een **vaasmodel** voor de situatie.

Bij elk vaasmodel kun je een **kansboom** maken om kansen te berekenen. Daarbij moet je goed onderscheiden:



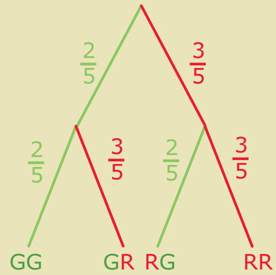
Figuur 2.5

Trekking met teruglegging
Na elke trekking van één balletje doe je dit terug in de vaas en je schudt het geheel. Dan pas trek je een volgend balletje. De kansboom bij een vaas met twee groene en drie rode balletjes zie je hiernaast.

P (2 groen) = P (GG) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$

P (eerst groen en daarna rood) = P (GR) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$

P (groen en rood) = P (GR of RG) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$



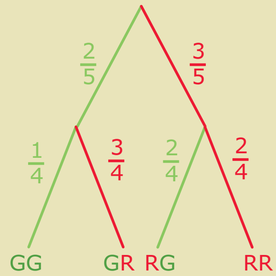
Figuur 2.6

Trekking zonder teruglegging
Na elke trekking van één balletje doe je dit niet terug in de vaas. Je trekt meteen het volgende bolletje. (Twee in één greep kan ook.) De kansboom zie je hiernaast.

P (2 groen) = P (GG) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$

P (eerst groen en daarna rood) = P (GR) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$

P (groen en rood) = P (GR of RG) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$



Figuur 2.7

In een kansboom vermenigvuldig je de kansen bij een bepaalde route steeds vanaf het beginpunt van de boom. Omdat hier twee balletjes worden getrokken, heeft de kansboom twee ‘lagen’. Het aantal lagen is gelijk aan het aantal getrokken balletjes.

Verwerken

★ **Opgave 2.1**

In een grabbelton zitten twee soorten (8 van soort A en 3 van soort B) cadeautjes die dezelfde vorm hebben en even zwaar aanvoelen. Jari en z'n zus Marieke mogen ieder een cadeautje uit deze grabbelton pakken. Marieke pakt als eerste een cadeau en Jari daarna.

a Maak een kansboom bij deze situatie.

b Hoe groot is de kans dat Jari en Marieke beiden een cadeau van dezelfde soort hebben gepakt?

c Hoe groot is de kans dat Marieke een cadeau van soort A en Jari een cadeau van soort B heeft gepakt?

d Hoe groot is de kans dat precies één van de twee een cadeau van soort A heeft gepakt?

★ **Opgave 2.2**

In een vaas zitten vijftien balletjes. Vier gele, vijf rode en zes blauwe. Er worden aselect drie balletjes na elkaar getrokken. Er wordt niet teruggelegd.

a Bereken de kans dat er drie rode balletjes worden getrokken.

b Bereken de kans dat er twee rode en één geel balletje worden getrokken.

c Bereken de kans dat alle balletjes een andere kleur hebben.

★ **Opgave 2.3**

Er zijn twee taken te doen. Uit een groep van drie mannen en vijf vrouwen moeten twee personen worden geloot die de taken moeten uitvoeren. In een vaas worden acht balletjes gestopt, gemerkt m1, m2, m3 en v1, v2, v3, v4, v5. De loting bestaat uit het aselect trekken van twee balletjes uit die vaas, zonder terugleggen.

a Hoe groot is de kans dat de eerste taak door een man wordt verricht?

b Iemand zegt: 'De kans dat de tweede taak door een man wordt verricht, is gelijk aan de kans dat de eerste taak door een man wordt verricht, want je kunt net zo goed eerst voor de tweede taak loten.' Heeft hij gelijk?

c De taken zijn koken en afwassen. Wat is de kans dat beide taken door een vrouw moeten worden gedaan?

Neem nu aan dat er wel wordt teruggelegd. Iemand zou dan misschien beide taken moeten doen.

d Hoe groot is de kans dat beide taken door dezelfde persoon moeten worden verricht?

e Hoe groot is de kans dat beide taken door één man moeten worden verricht?

f Hoe groot is de kans dat beide taken nu door een vrouw moeten worden gedaan?

★★ **Opgave 2.4**

In een vaas zitten tien balletjes, zes van hout en vier van plastic. Van de houten balletjes zijn er vier rood en twee blauw. Van de plastic balletjes zijn er drie rood en is er één blauw. Op gevoel zijn hout en plastic niet te onderscheiden. Je trekt twee balletjes uit de vaas. Het gaat om de kleur én het materiaal van de getrokken balletjes. Neem eerst aan dat het eerst getrokken balletje wordt teruggelegd.

a Bereken de kans dat je eerst een rood houten, dan een blauw plastic balletje trekt.

b Bereken de kans dat je een rood houten en een blauw plastic balletje trekt.

Neem nu aan dat het eerst getrokken balletje niet wordt teruggelegd.

c Bereken de kans dat je eerst een rood houten, dan een blauw plastic balletje trekt.

d Bereken de kans dat je een rood houten en een blauw plastic balletje trekt.

Als het alleen om de kleur van de twee getrokken balletjes gaat, kun je toe met een kleinere kansboom.

e Teken die kansboom voor de gevallen met en zonder terugleggen.

f Bereken in elk van de twee gevallen de kans op twee verschillend gekleurde balletjes.

g Die kans is het grootst als je niet teruglegt. Licht dat toe.

★ ★ Opgave 2.5

Er wordt met drie dobbelstenen geworpen. Een kansboom kan nu erg groot worden. Misschien heb je er maar een stukje van nodig, of kun je een vaas in gedachten nemen?

a Wat is de kans dat je 17 of 18 ogen gooit?

b Wat is de kans dat je 16 ogen gooit?

c Wat is de kans dat je minstens twee zessen gooit?

d Voor de vraag naar het aantal zessen kun je een vaasmodel maken. Hoeveel kleuren gebruik je? Hoeveel balletjes van elke kleur heb je nodig?

★ ★ Opgave 2.6

Anne heeft in principe elke woensdagmiddag bijles van de heer Nijdam. Maar Anne is nogal ziekelijk: gemiddeld moet ze 30% van de bijlessen afzeggen. De heer Nijdam is een drukbezet man; hij is gemiddeld 20% van de woensdagen verhinderd.

a Bereken de kans dat de heer Nijdam van drie opeenvolgende woensdagen er twee verhinderd is.

b Bereken de kans dat de bijles op een willekeurige woensdag niet doorgaat.

Geef twee mogelijke berekeningen van de gevraagde kans.

Toepassen

★ Opgave 2.7: Bookmaker

Er worden twee wedstrijden Arsenal tegen Juventus gespeeld, één bij Arsenal thuis en één bij Juventus thuis.

Een bookmaker heeft vastgesteld dat bij de thuiswedstrijd Arsenal 50% kans heeft om te winnen en dat Juventus $\frac{1}{3}$ kans heeft om te winnen. Bij de returnwedstrijd ligt dit anders, namelijk een derde kans op winst voor Arsenal en een derde kans op winst voor Juventus.

a Hoe zou een bookmaker tot deze kansen komen?

b Maak een kansboom voor beide wedstrijden, afgaande op de voorspelling van de bookmaker.

c Hoe groot is de kans dat elk van beide teams één van de wedstrijden wint (als we mogen afgaan op de mening van de bookmaker)?

1.3 Kansen optellen/aftrekken

Inleiding

Je hebt nu het vaasmodel en de bijbehorende kansboom leren kennen. Het lijkt een handig instrument om alle kansproblemen op te lossen, maar toch is het in de praktijk niet altijd even bruikbaar. Zodra het om grotere aantallen trekkingen gaat, wordt een kansboom onoverzichtelijk. Bij trekkingen uit een kaartspel bijvoorbeeld is dit al snel het geval. Dan is het handiger om terug te vallen op regels die beschrijven wanneer je kansen moet optellen en wanneer je ze juist moet vermenigvuldigen.
Daarom wordt nu de kansrekening iets exacter opgebouwd: de kansrekening is een stelsel van regels voor het rekenen met kansen.

Je leert in dit onderwerp

- kansen berekenen met behulp van regels zoals de somregel en de complementregel;
- de basisbegrippen en de basisregels van de kansrekening.

Voorkennis

- kansen bepalen met behulp van een kansboom;
- het vaasmodel met of zonder teruglegging voor het berekenen van kansen;
- telproblemen oplossen zoals bijvoorbeeld met een Venndiagram of een rooster;
- rekenen met relatieve frequenties.

Voor de docent

Nu komen de **regels voor kansrekenen** aan de orde. In de tweede opdracht is het de bedoeling dat leerlingen zelf de regels voor kansrekening formuleren. Dat wordt dan meteen hun theorieoverzicht. In de derde opdracht passen ze hun eigen regels toe.

Gewenste materialen:

- Een volledig kaartspel (zonder jokers) is wellicht handig.

Opdracht 3.1

Een volledig kaartspel kent 52 kaarten, van elke ‘kleur’ evenveel.
Je trekt aselect uit zo'n kaartspel één kaart. Bereken de kans op de volgende ‘gebeurtenissen’:

1. hartenaas.
2. hartentwaalf.
3. een hartenkaart.
4. geen aas.
5. een hartenkaart of een ruitenkaart.
6. een hartenkaart of een boer.
7. een hartenkaart of een plaatje.

Figuur 3.1

Toelichting

Leerlingen zullen dit waarschijnlijk geen moeilijke opdracht vinden. Daarom is de vraag “Kun je de antwoorden zo formuleren dat je er regels voor kansrekenen uit kunt halen?” en “Mag je kansen zomaar optellen?” en “Kun je de kans op geen aas en de kans op een aas met elkaar in verband brengen?”.
En ook “Kunnen gebeurtenissen elkaar uitsluiten? En wat betekent dit in de kansrekening?”.

Uitwerking

1. $P(\text{hartenaas}) = \frac{1}{52}$.
2. $P(\text{hartentwaalf}) = 0$.
3. $P(\text{hartenkaart}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
4. $P(\text{geen aas}) = 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$.
5. $P(\text{harten of ruiten}) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.
6. $P(\text{harten of boer}) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.
7. $P(\text{harten of plaatje}) = \frac{13}{52} + \frac{16}{52} - \frac{4}{52} = \frac{25}{52}$.

Opdracht 3.2

Bekijk de voorgaande opgave. Probeer daar regels af te leiden voor het rekenen met kansen. Denk daarbij aan: de kans op een altijd ware gebeurtenis, de kans op een onmogelijke gebeurtenis, de kans dat een gebeurtenis juist niet voorkomt, het optellen van kansen (wanneer kan dit en wanneer niet?).

Toelichting

Leerlingen zullen dit waarschijnlijk lastig vinden. Daarom is het nuttig om ze steeds via een vraag terug te laten kijken naar de vorige opgave, bijvoorbeeld “Waar kwam je die situatie bij de vorige opdracht tegen?”.
Voor leerlingen die dit snel kunnen is de vraag “Voor welke situatie(s) heb je nu nog geen regel bedacht?”.

Verder is het goed om af en toe termen als ‘complementaire gebeurtenis/kans’ en ‘elkaar wederzijds uitsluiten’ in omloop te brengen.

Uitwerking

Zie de **Theorie**.

Opdracht 3.3

Je trekt een lot uit een serie met de nummers 10, 11, 12, ..., 99.
Heb je een 2 of een 3 in het lotnummer, dan heb je een prijs.
Hoe groot is de kans hierop?

Toelichting

Geschikte hulpvragen zijn “Hoe bereken je een kans met ‘of’ erin? Heb je wat aan je kansregels?” en “Kun je dit misschien eerst per cijfer bekijken? En hoe gaat dit dan voor alleen het cijfer 2?”.

Probeer de leerlingen in ieder geval via de regels voor kansrekenen te helpen.
Ook leerlingen die snel tellen dat er 18 getallen met een 2 erin zijn, kun je proberen via de kansregels te laten werken. Anders kun je het probleem gemakkelijk opschalen naar loten met drie cijfers, of vier cijfers...

Uitwerking

Eerst het cijfer 2:

- de kans op rechts een 2 is $\frac{9}{90}$
- de kans op links een 2 is $\frac{10}{90}$
- de kans op 22 is $\frac{1}{90}$

Dus de kans op een 2 is: $\frac{9}{90} + \frac{10}{90} - \frac{1}{90} = \frac{18}{90}$.

De kans op een 3 in het lotnummer is op dezelfde manier: $\frac{18}{90}$.

De kans op een 2 of een 3 in het lotnummer is (denk aan 23 en 32): $\frac{18}{90} + \frac{18}{90} - \frac{2}{90} = \frac{34}{90}$.

Opdracht 3.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht. Kijk vooral naar alle formuleringen van de ‘kansregels’.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie tot een overzicht van de theorie moeten komen, benoem eventueel nog speciale notaties en speciale termen (zoals ‘complementair’, ‘wederzijds uitsluiten’). Ieder schrijft voor zichzelf een overzicht.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Bij een **kansexperiment** 'trekken van een kaart uit een kaartspel' bestaat een **uitkomstenverzameling** met 52 mogelijkheden. Een **gebeurtenis** zoals 'het trekken van een tien' is dan een deel van die uitkomstenverzameling.

Figuur 3.2

Afspraak: als G een gebeurtenis is, dan betekent $\mathrm{P}(G)$ de kans op die gebeurtenis en $0 \leq \mathrm{P}(G) \leq 1$.

Elke gebeurtenis heeft een **kans**. Hierbij gelden de volgende kansregels:

- De kans op een **onmogelijke gebeurtenis** (niets uit de uitkomstenverzameling) is 0.
- De kans op een **zekere gebeurtenis** (de complete uitkomstenverzameling) is 1.
- De **complementregel**:
  Is niet-G de ontkenning van gebeurtenis G dan is $\mathrm{P}(\text{niet-}G) = 1 - \mathrm{P}(G)$.
  Je noemt niet-G en G wel complementaire gebeurtenissen.
- De **somregel**:
  - Als de gebeurtenissen G_1 en G_2 elkaar **wederzijds uitsluiten**, dan is $\mathrm{P}(G_1 \text{ of } G_2) = \mathrm{P}(G_1) + \mathrm{P}(G_2)$.
  - Als de gebeurtenissen G_1 en G_2 elkaar niet wederzijds uitsluiten, dan is $\mathrm{P}(G_1 \text{ of } G_2) = \mathrm{P}(G_1) + \mathrm{P}(G_2) - \mathrm{P}(G_1 \text{ en } G_2)$.

Voor twee gebeurtenissen G_1 en G_2 die elkaar wederzijds uitsluiten, geldt:
$\mathrm{P}(G_1 \text{ en } G_2) = 0$

Verwerken

★ Opgave 3.1

Bij een bloemenkraampje zijn alleen nog rozen en tulpen te koop: 20 tulpen en 25 rozen.

Er zijn 10 witte, 5 gele en 5 paarse tulpen en er zijn 12 witte rozen en 13 gele rozen.

De verkoper heeft alle bloemen in één emmer verzameld, hij pakt zonder te kijken een bloem.

Welk(e) van de volgende gebeurtenissen sluiten elkaar uit?

A. tulp en roos
B. tulp en geel
C. geel en roos
D. paars en roos

★ Opgave 3.2

Bij een bloemenkraampje zijn alleen nog rozen en tulpen te koop: 20 tulpen en 25 rozen. Er zijn 10 witte, 5 gele en 5 paarse tulpen en er zijn 12 witte rozen en 13 gele rozen. De verkoper heeft alle bloemen in één emmer verzameld. De verkoper pakt zonder te kijken een bloem.

a Hoe groot is de kans dat hij een roos pakt?

b Hoe groot is de kans dat hij een paarse bloem pakt?

c Hoe groot is de kans dat hij géén paarse bloem pakt?

d Hoe groot is de kans dat hij een gele bloem pakt?

e Hoe groot is de kans dat hij een gele bloem of een tulp pakt?

★ Opgave 3.3

Voor de ontwikkeling van kinderen zijn doosjes in de handel gebracht met plastic rondjes, vierkantjes, rechthoekjes en driehoekjes. Van elke soort zijn er grote en kleine stukjes. Van elke soort en elke grootte zijn er twee rode stukjes, twee gele en twee blauwe. Totaal dus 48 stuks.
Bereken voor een aselect gekozen stukje de kans.

a Het stukje is geel of een vierkantje.

b Het stukje is rood of geen vierkantje.

c Het stukje is klein of geen vierkantje.

d Het stukje is blauw of geel of een driehoekje.

★ ★ Opgave 3.4

Bij een spel moet je eerst kop of munt gooien. Gooi je kop, dan moet je met één dobbelsteen gooien. Gooi je munt, dan mag je met twee dobbelstenen gooien. Bereken de volgende kansen.

a De kans dat je 12 ogen gooit.

b De kans dat je 7 ogen gooit.

c De kans dat je 7 of 12 ogen gooit.

d De kans dat je meer of minder dan 7 ogen gooit.

e De kans dat je 6 ogen gooit.

★ ★ **Opgave 3.5**

Van de leerlingen van een school is 52% meisje, 48% jongen. Eén van elke dertien meisjes draagt een hoofddoek, één van elke zestien jongens draagt een basketbalpet.

a Hoeveel procent van de leerlingen draagt een hoofddoek? Hoeveel procent een basketbalpet?

b Hoe groot is de kans dat een aselect aangewezen leerling een jongen zonder pet is?

c Hoe groot is de kans dat een aselect aangewezen leerling een meisje is of iets op het hoofd draagt?

d Hoe groot is de kans dat een aselect aangewezen leerling een jongen is of niets op het hoofd draagt?

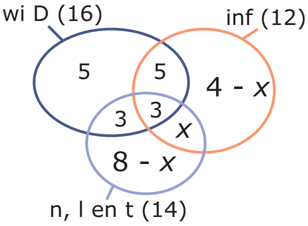
e Beschrijf de complementaire gebeurtenis van die bij d.

Toepassen

Op een school kiezen 26 leerlingen in 4 vwo het NT-profiel. In de vrije ruimte kunnen ze één, twee of drie vakken kiezen uit: wiskunde D, informatica en NLT (natuur, leven en technologie).
Zestien leerlingen kiezen wiskunde D, twaalf kiezen informatica en veertien kiezen NLT.
Er zijn dertien leerlingen die maar één van deze drie vakken kiezen.
Zes leerlingen kiezen wiskunde D en NLT, acht leerlingen kiezen wiskunde D en informatica, waarbij de drie leerlingen zitten die alle drie de vakken kiezen.
Hoeveel leerlingen kiezen alleen NLT en informatica?

Een diagram zoals dit kan helpen. Het heet een **venndiagram**. Het gevraagde aantal leerlingen dat alleen NLT en informatica kiest, stel je voor door x. Daarmee kun je het venndiagram invullen en x berekenen.

Ter controle kun je nog het hele diagram invullen.



Figuur 3.3

★ ★ **Opgave 3.6**

Bekijk het venndiagram in **Toepassen**.

a Leg uit hoe je nu x kunt berekenen.

Je komt in 4 vwo een voor jou onbekende leerling uit de groep van 26 leerlingen in het NT-profiel tegen.

b Hoe groot is de kans dat deze leerling wiskunde D heeft gekozen?

c Hoe groot is de kans dat deze leerling alleen maar informatica heeft gekozen?

d Hoe groot is de kans dat deze leerling alle drie de vakken heeft gekozen?

e Hoe groot is de kans dat deze leerling wiskunde D en NLT heeft gekozen?

f Hoe groot is de kans dat deze leerling wiskunde D of NLT (of beide) heeft gekozen?

★ ★ **Opgave 3.7**

De raad van commissarissen van een bouwonderneming heeft elf leden, onder wie vijf economen en vier juristen. Twee van de economen zijn ook jurist. De leden zijn om de beurt een maand voorzitter. De volgorde is door loten vastgesteld.

a Ga met behulp van een venndiagram na hoeveel leden econoom noch jurist zijn.

b Wat is de kans dat de voorzitter deze maand econoom en jurist is?

c Wat is de kans dat de voorzitter deze maand econoom of jurist is?

d Wat is de kans dat zowel deze maand als de volgende maand de voorzitter econoom of jurist is?

★ ★

Opgave 3.8

Een bestuur van 25 personen bestaat uit oprichters, oplichters en opzichters. Sommige leden hebben meer dan één van die kwaliteiten. Er zijn 10 oprichters, 11 oplichters en 15 opzichters. 1 persoon is zowel oprichter als oplichter en opzichter. 3 zijn oprichter en oplichter (en misschien ook opzichter) en 4 zijn oprichter en opzichter (en misschien oplichter).

a Maak op grond van deze gegevens een venndiagram.

b Hoe groot is de kans dat een willekeurig bestuurslid keurig is (geen oplichter)?

c Hoe groot is de kans dat een willekeurig bestuurslid oprichter is? Dat hij oplichter is? Dat hij beide is?

d Bepaal de kans dat een willekeurig bestuurslid oprichter of oplichter is.

e De kans dat een bestuurslid oprichter, oplichter of opzichter is, is natuurlijk 1. Iemand zegt: ‘Die kans moet de kans zijn dat hij oprichter of oplichter is, plus de kans dat hij opzichter is.’ Redeneren helpt niet, dus toon hem dat zijn resultaat niet goed kan zijn en vertel hem dan hoe het wel moet.

1.4 Kansen vermenigvuldigen

Inleiding

Je hebt kennis gemaakt met regels voor de kansrekening. Vooral als het gaat om grotere hoeveelheden en meerdere trekkingen zijn dergelijke regels nuttig.
Daarom leer je nu wanneer je kansen mag vermenigvuldigen. Hierbij is het vaasmodel weer erg handig.

Je leert in dit onderwerp

- de regels voor het vermenigvuldigen van kansen waaronder de productregel;
- werken met afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen;
- voorwaardelijke kansen berekenen.

Voorkennis

- kansen bepalen met behulp van een kansboom;
- kansen berekenen met behulp van de somregel en de complementregel;
- het vaasmodel met of zonder teruglegging voor het berekenen van kansen;
- statistische begrippen zoals steekproef, variabele en frequentie;
- combinatoriek (telproblematiek), bijvoorbeeld permutaties berekenen.

Voor de docent

Nu komen de **regels voor kansrekenen** aan de orde. In de tweede opdracht is het de bedoeling dat leerlingen zelf de vermenigvuldigregel voor kansrekening formuleren. Dat wordt dan het begin van hun theorieoverzicht. In de derde en de vierde opdracht passen ze hun eigen regels toe.
De vierde opdracht is een eerste kennismaking met de regel van Bayes. Waarschijnlijk alleen geschikt voor snellere leerlingen.

Gewenste materialen:

- Een volledig kaartspel (zonder jokers) is wellicht handig.

Opdracht 4.1

Een volledig kaartspel kent 52 kaarten, van elke 'kleur' evenveel. Je trekt aselect uit zo'n kaartspel twee kaarten tegelijk. Bereken de kans op twee azen.

Figuur 4.1

Toelichting

Mogelijke hulpvragen: "Kun je beschrijven hoe de kansboom bij dit probleem er uit ziet?" en "Is de kans op de tweede aas gelijk aan die op de eerste aas? En waarom?".
En ook "Kun je een regel formuleren voor het vermenigvuldigen van kansen?" en "Waarmee moet je dan rekening houden?".

Uitwerking

Dit is een situatie zonder terugleggen. Hier hoort een kansboom bij met twee lagen. Eerst zijn 4 van de 52 kaarten azen, daarna nog 3 van de 51.

$P(2\text{ azen}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}$.

Opdracht 4.2

Geef antwoord op de volgende opdrachten en vergelijk beide.

1. Uit een vaas met zes rode en vier blauwe knikkers worden met terugleggen twee knikkers getrokken.
   Hoe groot is de kans op een rode en een blauwe knikker?
2. Uit een vaas met zes rode en vier blauwe knikkers worden zonder terugleggen twee knikkers getrokken.
   Hoe groot is de kans op een rode en een blauwe knikker?

Toelichting

Mogelijke hulpvragen: “Kun je kansbomen bij deze opdrachten maken?” en “Wat is het verschil tussen beide kansbomen?” en “Welke kansregels heb je nodig?”.
Nu is het belangrijk om het begrip ‘voorwaardelijke kans’ te laten vallen. En de bijbehorende notatie te laten zien.
En ook “Kun je de regel voor het vermenigvuldigen van kansen nu opschrijven met deze notatie?”.

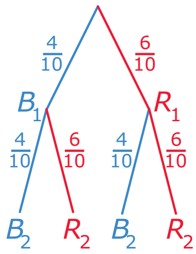
Uitwerking

Eerste opdracht:

Het maakt bij de tweede trekking niet uit of de eerst getrokken knikker rood of blauw was. Door het terugleggen is immers de oorspronkelijke situatie weer hersteld. De tweede trekking is daarom onafhankelijk van de eerste.

Je kunt dus de productregel voor onafhankelijke kansen gebruiken:

- De kans dat je eerst een rode en dan een blauwe knikker trekt, is:
  $P(R_1 \text{ en } B_2) = P(R_1) \cdot P(B_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$.
- De kans dat je eerst een blauwe en dan een rode knikker trekt, is:
  $P(B_1 \text{ en } R_2) = P(B_1) \cdot P(R_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$.



Figuur 4.2

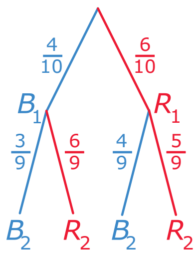
Beide gebeurtenissen sluiten elkaar uit: $P(R \text{ en } B) = \frac{24}{100} + \frac{24}{100} = \frac{12}{25}$.

Tweede opdracht:

Het maakt bij de tweede trekking verschil of de eerst getrokken knikker rood of blauw was. Door niet terug te leggen is immers de oorspronkelijke situatie gewijzigd. De tweede trekking is daarom afhankelijk van de eerste.

Je kunt dus de productregel voor afhankelijke kansen gebruiken:

- De kans dat je eerst een rode en dan een blauwe knikker trekt, is:
  $P(R_1 \text{ en } B_2) = P(R_1) \cdot P(B_2|R_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$.
- De kans dat je eerst een blauwe en dan een rode knikker trekt, is:
  $P(B_1 \text{ en } R_2) = P(B_1) \cdot P(R_2|B_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$.



Figuur 4.3

Beide gebeurtenissen sluiten elkaar uit, dus: $P(R \text{ en } B) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$.

Opdracht 4.3

Uit een vaas met zes rode en vier blauwe knikkers worden zonder terugleggen twee knikkers getrokken.

Hoe groot is de kans dat de tweede knikker rood is?

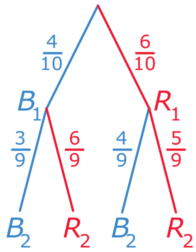
Toelichting

Mogelijke hulpvragen: “Kun je een kansboom bij deze opdracht maken?” en “Welke routes in de kansboom horen bij de vraag?” en “Welke kansregels heb je nodig?”.
Nu is het belangrijk om weer het begrip ‘voorwaardelijke kans’ te laten vallen.
En ook “Kun je de oplossing opschrijven met de notatie voor voorwaardelijke kansen en met de kansregels?”.

Uitwerking

Het maakt bij de tweede trekking verschil of de eerst getrokken knikker rood of blauw was. Door niet terug te leggen is immers de oorspronkelijke situatie gewijzigd. De tweede trekking is daarom afhankelijk van de eerste.

De gevraagde kans is $\mathrm{P}(R_2) = \mathrm{P}(R_1 \text{ en } R_2) + \mathrm{P}(B_1 \text{ en } R_2) =$
$= \mathrm{P}(R_1) \cdot \mathrm{P}(R_2|R_1) + \mathrm{P}(B_1) \cdot \mathrm{P}(R_2|B_1) =$
$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{54}{90} = \frac{3}{5}$



Figuur 4.4

Opdracht 4.4

Uit een vaas met zes rode en vier blauwe knikkers worden zonder terugleggen twee knikkers getrokken. Je krijgt alleen de tweede knikker te zien, die is blauw.
Hoe groot is de kans dat de eerste knikker rood is?

Toelichting

Dit lijkt een opdracht voor met name de snellere leerlingen. Hij houdt verband met de regel van Bayes.

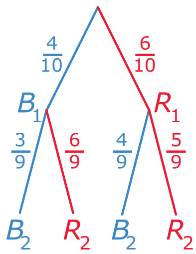
Mogelijke hulpvragen: “Kun je een kansboom bij deze opdracht maken?” en “Welke routes in de kansboom horen bij de vraag?” en “Welke kansregels heb je nodig?”.
En ook “Kun je de oplossing opschrijven met de notatie voor voorwaardelijke kansen en met de kansregels?”.

Uitwerking

Het maakt bij de tweede trekking verschil of de eerst getrokken knikker rood of blauw was. Door niet terug te leggen is immers de oorspronkelijke situatie gewijzigd. De tweede trekking is daarom afhankelijk van de eerste.

De gevraagde kans is $\mathrm{P}(R_1|B_2)$.

Omdat $\mathrm{P}(B_2) = \mathrm{P}(R_1 \text{ en } B_2) + \mathrm{P}(B_1 \text{ en } B_2) =$
$= \mathrm{P}(R_1) \cdot \mathrm{P}(B_2|R_1) + \mathrm{P}(B_1) \cdot \mathrm{P}(B_2|B_1) =$
$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{36}{90}$ is gemiddeld in 36 van de 90 trekkingen de tweede knikker blauw. In $4 \cdot 6 = 24$ van die trekkingen was de eerste knikker rood. De gevraagde kans is daarom $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.



Figuur 4.5

Merk op dat je deze kans kunt berekenen vanuit $\mathrm{P}(B_2)$ en $\mathrm{P}(R_1 \text{ en } B_2)$:

$$\mathrm{P}(R_1|B_2) = \frac{\mathrm{P}(R_1 \text{ en } B_2)}{\mathrm{P}(B_2)}$$

Ga na dat dit past bij de algemene productregel voor afhankelijke gebeurtenissen.

Opdracht 4.5

Bekijk wat iedereen heeft bedacht. Kijk vooral naar alle formuleringen van de ‘kansregel voor vermenigvuldigen’.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen, benoem eventueel nog speciale notaties en speciale termen (zoals ‘voorwaardelijke kans’, ‘met/zonder terugleggen’). Ieder schrijft voor zichzelf een overzicht.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Als G_1 een gebeurtenis is bij een kansexperiment en G_2 een gebeurtenis bij een tweede kansexperiment en als de kansen van het tweede experiment 'onafhankelijk' zijn van de uitkomst van het eerste, dan geldt:

$\text{P}(G_1 \text{ en } G_2) = \text{P}(G_1) \cdot \text{P}(G_2)$

In het vaasmodel is dit het geval als je 'met terugleggen' meerdere balletjes trekt.

Je schrijft voor de kans op G_2 onder de voorwaarde dat G_1 eerst heeft plaatsgevonden: $\text{P}(G_2|G_1)$. Je noemt dit **voorwaardelijke kans**.

Als G_1 een gebeurtenis is bij een kansexperiment en G_2 een gebeurtenis bij een tweede kansexperiment en als de kansen van het tweede experiment 'afhankelijk' zijn van de uitkomst van het eerste, dan geldt:

$\text{P}(G_1 \text{ en } G_2) = \text{P}(G_1) \cdot \text{P}(G_2|G_1)$

In het vaasmodel is dit het geval als je 'zonder terugleggen' meerdere balletjes trekt.

De regel $\text{P}(G_1 \text{ en } G_2) = \text{P}(G_1) \cdot \text{P}(G_2|G_1)$ heet wel de **algemene productregel voor kansen** omdat hij ook geldig is voor onafhankelijke gebeurtenissen.

Dan is namelijk $\text{P}(G_2|G_1) = \text{P}(G_2)$.

Voorwaardelijke kansen kom je ook tegen in de bivariate statistiek waarin je onderzoekt of en hoe de ene variabele de andere variabele beïnvloedt.

Verwerken

★ Opgave 4.1

Bij een wandeltocht over vochtig terrein zijn je sokken nat geworden. Onder in je rugzak heb je, los door elkaar, acht droge sokken van vier verschillende paren. Je trekt er één sok uit, en dan steeds weer een tot je de bijpassende sok hebt gekregen. Het is verstandig als je niet teruglegt.

a Hoe groot is de kans dat je precies bij de vierde sok die je pakt de sok pakt die bij de eerste past?

b Hoe groot is de kans dat de tweede of de derde sok bij de allereerste past?

★ Opgave 4.2

In West-Europa heeft 40% van de bevolking bloedgroep A, 10% bloedgroep B, 5% bloedgroep AB en 45% bloedgroep O. Voor de Rhesus-factor geldt: 85% is Rh-positief en 15% is Rh-negatief, ongeacht de bloedgroep waartoe men behoort.

a Bereken het percentage West-Europeanen dat bloedgroep A heeft en Rh-positief is.

b Bereken het percentage West-Europeanen dat bloedgroep O heeft en Rh-negatief is.

c Bereken het percentage West-Europeanen dat Rh-negatief is en niet bloedgroep O heeft.

d Welke van de acht combinaties van bloedgroep en Rh-factor is het zeldzaamst?

★ Opgave 4.3

Voor een onderzoek voor school heeft een groep leerlingen aan 116 voorbijgangers van boven de 18 jaar gevraagd of ze een tatoeage of piercing hebben.

In deze tabel zie je het resultaat. (Bij een piercing worden gaatjes in een oorlel niet meegerekend.)

	tatoeage	piercing	beide	geen van beide	totaal
vrouw	9	12	0	34	55
man	15	6	0	40	61
totaal	24	18	0	74	116

Tabel 4.1

a Hoeveel procent van de ondervraagden is vrouw?

b Hoeveel procent van de ondervraagden is vrouw en heeft een tatoeage?

c Voor de rest van de vragen geldt:

- deze steekproef blijkt representatief voor de gehele bevolking;
- V is een willekeurige ondervraagde voorbijganger.

Bepaal de kans dat V een piercing heeft.

d Bepaal de kans dat V een man is en een piercing heeft.

Ofwel: bepaal de kans $\text{P}(V$ is een man en V heeft een piercing$)$

e Bepaal de kans dat V een piercing heeft, onder voorwaarde dat V een man is.

Ofwel: bepaal de voorwaardelijke kans $\text{P}(V$ heeft een piercing $|V$ is een man$)$.

★ Opgave 4.4

De kans op ten minste één 6 bij vier keer gooien met een dobbelsteen is groter dan 50%.

a Laat zien dat dit inderdaad zo is.

Chevalier de Méré dacht daarom (in 1654) dat hij ook meer dan 50% kans had op dubbel zes als hij $6 \cdot 4 = 24$ keer met twee dobbelstenen gooide, maar hij kwam bedrogen uit. Zijn vriend Pascal moest hem uit de droom helpen.

b Bereken die kans op dubbel zes in procenten, in twee decimalen nauwkeurig.

c Hoe vaak moet je minstens met twee dobbelstenen gooien, opdat de kans op dubbel 6 groter is dan 50%?

★ **Opgave 4.5**

In een doos zitten tien kaarten, elk met een cijfer erop. Er is één kaart met een 1, er zijn twee kaarten met een 2, drie kaarten met een 3 en op vier kaarten staat een 4. Je trekt zonder terugleggen vier kaarten en legt die van links naar rechts naast elkaar. Je ziet dan een getal van vier cijfers.

a Hoe groot is de kans dat dit getal 1234 is?

b Hoe groot is de kans dat dit getal 4321 is?

c Hoe groot is de kans dat dit getal 3344 is?

d Bij a en b heb je dezelfde antwoorden gekregen. Licht toe waarom elk van de getallen die je met de cijfers 1, 2, 3 en 4 schrijft dezelfde kans heeft.

e Laat E het getal zijn dat door de eerste twee cijfers wordt voorgesteld, T het getal dat door de laatste twee cijfers wordt voorgesteld.

Bereken $\text{P}(T = 34 | E = 12)$ en $\text{P}(T = 12 | E = 34)$.

f Eén kaart is stiekem door iemand gemerkt. Hoe groot is de kans dat die kaart op uiterst links terechtkomt?

g Hoe groot is de kans dat de gemerkte kaart als derde in het rijtje komt te liggen?

h Test de productregel door na te gaan of je daarmee hetzelfde resultaat krijgt. Bereken dus de kans dat de eerste, tweede en vierde kaart ongemerkt zijn, en de derde gemerkt.

i Hoe groot is de kans dat het getal begint met een 3? Eindigt met een 3? Begint en eindigt met een 3?

★ ★ **Opgave 4.6**

Bij een bepaalde ziekte kunnen twee verschillende medicijnen worden voorgeschreven: medicijn A of medicijn B. In principe wordt altijd (het beste) medicijn A voorgeschreven, maar 10% van de patiënten reageert daar allergisch op en krijgt dan medicijn B. Medicijn A zorgt in 95% van de gevallen voor genezing, medicijn B in 75% van de gevallen.
Iemand krijgt deze ziekte en geneest na medicatie. Hoe groot is de kans dat hij medicijn B heeft gekregen? Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

Toepassen

★ ★ **Opgave 4.7: Drie deuren probleem**

De winnaar van een quiz mag uit drie deuren er één kiezen. De deuren zien er hetzelfde uit, maar achter één ervan zit de hoofdprijs, achter de andere twee niets. Na de keuze wijst de spelleider een andere deur aan en zegt (naar waarheid) dat daar niets achter zit. De winnaar mag nu nog zijn keuze veranderen. Hoe zit het met de kansen om te winnen?

Dit probleem staat bekend als het **drie deuren probleem**

a Bereken de winkans in het geval dat hij niet wisselt.

b Bereken de winkans in het geval dat hij wisselt.

★ ★ ★ **Opgave 4.8: Nationale Wetenschapsquiz**

Bekijk een vraag uit één van de Nationale Wetenschapsquizzen.

> Met een steekproef testen we de deelnemers aan de tiende Nationale Wetenschapsquiz op een verboden pepmiddel. Stel dat tien procent van de deelnemers het pepmiddel gebruikt. De test is slechts voor negentig procent zuiver.

Een deelnemer blijkt pep-positief.
Hoe groot is de kans dat hij het pepmiddel daadwerkelijk heeft gebruikt?

Voor alle duidelijkheid: met de zinsnede ‘de test is slechts voor negentig procent zuiver’ wordt bedoeld dat de test in 10% van de gevallen een verkeerde uitslag geeft. Dus 10% van de gebruikers wordt pep-negatief getest en 10% van de niet-gebruikers wordt pep-positief getest.

1.5 Toevalsvariabelen

Inleiding

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25 heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging.
Maar hoe liggen zijn kansen als hij meerdere doelpogingen doet?

Je leert in dit onderwerp

- een kansverdeling maken voor een toevalsvariabele;
- kansen berekenen waarbij het gaat om minstens of hoogstens;
- het begrip verwachtingswaarde gebruiken;
- berekenen of twee toevalsvariabelen onafhankelijk zijn van elkaar.

Voorkennis

- kansen berekenen met behulp van het vaasmodel of een kansboom;
- de rekenregels voor kansen en met name de algemene productregel voor kansen;
- statistische begrippen zoals relatieve frequentie, centrummaten, spreidingsmaten en kwantitatieve variabelen.

Voor de docent

Het begrip kansvariabele met een bijbehorende kansverdeling is nieuw voor de leerlingen. En ook het begrip verwachtingswaarde wordt ingevoerd. En tenslotte wordt de (on)afhankelijkheid van kansvariabelen aan de orde gesteld (in opdracht 3). Elk van deze begrippen vergt een of meer duidelijke hints in de goede richting.

Gewenste materialen:

- De tabel bij de tweede opdracht kan worden uitgedeeld aan de groepjes, hij staat op een werkblad.
- De tabel bij de derde opdracht kan tijdens het geven van de toelichting op het bord worden getekend. Maar hij kan ook als werkblad worden uitgedeeld.

Opdracht 5.1

In een groep van vier mannen en vijf vrouwen worden door loten drie taken verdeeld.
Elk van die drie taken moet door een andere persoon moet worden gedaan.

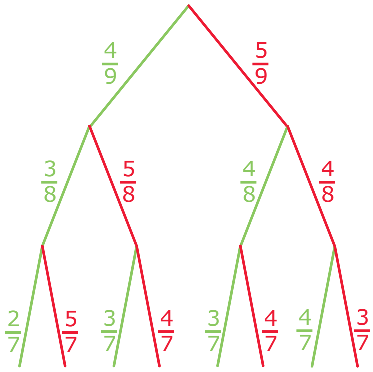
1. Hoe groot is de kans dat er minstens twee taken door een man worden uitgevoerd?
2. Hoeveel taken worden er naar verwachting gemiddeld door een man uitgevoerd als je dit vaak zou herhalen?

Toelichting

Leerlingen komen waarschijnlijk niet zonder meer op het idee om een kansverdeling te maken. Mogelijke hulpvragen: “Kun je een kansboom bij dit probleem maken?” en “Is sprake van trekking met of zonder terugleggen?” en “Is het handig om een overzicht van alle mogelijke kansen te maken?”.
Laat het begrip ‘kansverdeling’ vallen.
En ook “Hoe kan een kansverdeling je helpen om de verwachte gemiddelde uitkomst te berekenen?”.

Uitwerking

Je ziet een bijpassende kansboom. Groen betekent dat de taak door een man wordt gedaan, rood dat het een vrouw betreft. Met behulp van de kansboom maak je deze kansverdeling voor het aantal taken dat door een man wordt uitgevoerd.



Figuur 5.1

m	0	1	2	3
$\text{P}(M = m)$	$\frac{60}{504}$	$\frac{240}{504}$	$\frac{180}{504}$	$\frac{24}{504}$

Tabel 5.1

Gevraagd wordt de kans dat er twee of drie taken door een man worden uitgevoerd:

$$\text{P}(M = 2 \text{ of } M = 3) = \frac{180}{504} + \frac{24}{504} = \frac{204}{504} = \frac{17}{42}$$

Naar verwachting worden er $0 \cdot \frac{60}{504} + 1 \cdot \frac{240}{504} + 2 \cdot \frac{180}{504} + 3 \cdot \frac{24}{504} = 1\frac{1}{3}$ taken door een man gedaan.

Opdracht 5.2

Voor een bepaalde instaptoets worden alleen gehele cijfers van 1 tot en met 10 gegeven. Daarvan zijn jarenlang de resultaten bijgehouden.

cijfer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
relatieve frequentie (%)	0	0	4	12	20	26	18	11	7	2

Tabel 5.2

Ook dit jaar doet een aantal personen deze instaptoets.
Welk gemiddelde cijfer verwacht men?
Hoeveel procent zal een voldoende halen?

Toelichting

De tabel staat op dit **Werkblad**.

Dit zullen leerlingen waarschijnlijk niet al te moeilijk vinden. Het gaat er om dat ze ook zo'n resultaat van metingen als een kansverdeling herkennen. Mogelijke hulpvragen: “Wat is nu je kansverdeling?” en “Hoe bereken je het verwachte gemiddelde cijfer?” en “Wat moet je halen voor een voldoende? Hoe bereken je de kans daarop?”.

Uitwerking

De frequentietabel van een kwantitatieve variabele zoals deze is op te vatten als een kansverdeling.

De bijbehorende verwachtingswaarde is:
$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0{,}04 + 4 \cdot 0{,}12 + 5 \cdot 0{,}20 + 6 \cdot 0{,}26 + 7 \cdot 0{,}18 + 8 \cdot 0{,}11 + 9 \cdot 0{,}07 + 10 \cdot 0{,}02 = 6{,}13$
Dus men verwacht een gemiddeld cijfer van 6,1.

Voor het halen van een voldoende moet je minstens een 6 scoren.
De kans daarop is: $0{,}26 + 0{,}18 + 0{,}11 + 0{,}07 + 0{,}02 = 0{,}64$, dus waarschijnlijk zal 64% een voldoende halen.

Opdracht 5.3

In de kruistabel zie je toevalsvariabelen G (geslacht) en K (wel/niet kleurenblind). De onderste rij is de kansverdeling voor K en de rechter kolom is de kansverdeling voor G, voor een steekproef van 1000 personen. Je kunt ook zien dat bijvoorbeeld de gecombineerde kans is $\text{P}(G = M \text{ en } K = \text{wel}) = 0{,}041$.
Zijn de toevalsvariabelen G en K onafhankelijk van elkaar?

	K = niet	K = wel	
V	0,488	0,002	0,49
M	0,469	0,041	0,51
	0,957	0,043	

Tabel 5.3

Toelichting

De tabel staat op dit **Werkblad**.

Het begrip 'onafhankelijk' voor kansvariabelen kennen de leerlingen niet. Mogelijke hulpvragen: "Wat zou het betekenen als twee kansvariabelen onafhankelijk van elkaar zijn?" en "Wat heeft dat te maken met de kans die is gegeven? En met vermenigvuldigen van kansen in het algemeen?" en "Hoe zou je de gegeven kans ook kunnen berekenen? En komen dan de antwoorden overeen?".
Wellicht zijn meer sturende hints hier af en toe nodig.

Uitwerking

Als voor alle vier de gecombineerde kansen $\text{P}(G = g \text{ en } K = k)$ geldt dat ze gelijk zijn aan $\text{P}(G = g) \cdot \text{P}(K = k)$, dan zijn toevalsvariabelen G (geslacht) en K (wel/niet kleurenblind) onafhankelijk van elkaar.
Je weet al: $\text{P}(G = M \text{ en } K = \text{wel}) = 0{,}041$
Nu is $\text{P}(G = M) \cdot \text{P}(K = \text{wel}) = 0{,}51 \cdot 0{,}043 \approx 0{,}0219$
Dit is dus ongelijk aan $\text{P}(G = M \text{ en } K = \text{wel})$.
Dit betekent dat minstens één van de gecombineerde kansen ongelijk is aan het product van de afzonderlijke kansen: toevalsvariabelen G en K zijn afhankelijk van elkaar.
Anders gezegd: de mogelijkheid om kleurenblind te zijn, hangt samen met iemands geslacht.

Opdracht 5.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht. Kijk vooral naar de 'kansverdelingen' en wat er voorbij is gekomen bij het bepalen van de '(on)afhankelijkheid' van kansvariabelen.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen, benoem eventueel nog speciale notaties en speciale termen (zoals 'kansverdeling', 'verwachtingswaarde', '(on)afhankelijke kansvariabelen'). Ieder schrijft voor zichzelf een overzicht.

Uitwerking

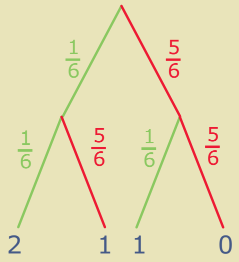
Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Als een bepaalde variabele X van het toeval afhangt, noem je X een **toevalsvariabele**, een **stochast**. Stochast komt van het Griekse ‘stochastikos’ dat gissend of mikkend betekent. Bij elke waarde die X kan aannemen, kun je de bijbehorende kans berekenen (vanuit een kansboom of frequentietabel of een histogram).

Zet je al die kansen op een rij, bijvoorbeeld in een tabel, dan is dat een kansverdeling van X. Noem je bij het werpen met twee dobbelstenen het aantal zessen X, dan is X een voorbeeld van zo'n toevalsvariabele. De bijbehorende kansverdeling haal je uit de kansboom.



Figuur 5.2

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabel 5.4

Ga na dat de som van alle kansen in zo'n kansverdeling 1 is.

Gemiddeld komt er per worp met twee dobbelstenen $0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ keer een zes voor.

Dat heet de **verwachtingswaarde** van het aantal zessen bij het werpen met twee dobbelstenen. Bij gemiddeld één op elke drie worpen (met twee dobbelstenen) komt een zes voor, als je maar vaak genoeg gooit.

Als je van twee toevalsvariabelen X en Y elk een kansverdeling hebt en bovendien alle gecombineerde kansen $P(X = x \text{ en } Y = y)$ via een steekproef verzameld hebt, dan is het mogelijk om te bepalen of X en Y **(on)afhankelijk** van elkaar zijn.

X en Y zijn onafhankelijk als voor alle gecombineerde kansen de algemene **productregel voor kansen** geldt: $P(X = x \text{ en } Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$.
Dit is onderdeel van de **bivariate statistiek** waarin je onderzoek doet naar mogelijke samenhang tussen twee toevalsvariabelen.

Verwerken

★ **Opgave 5.1**

Het aantal jongens in een gezin met vier kinderen is een toevalsvariabele J. Ga ervan uit dat de kans op de geboorte van een meisje hetzelfde is als de kans op de geboorte van een jongen.

a Maak een tabel met de kansverdeling van J.

b Hoe groot is de kans dat een gezin van vier kinderen uit minstens twee jongens bestaat?

Bereken deze kans op twee manieren en benoem de twee rekenmethodes.

c Wat vermoed je over het verwachte aantal jongens in zo'n gezin? Reken na of je vermoeden klopt.

d Als je 150 van die gezinnen bekijkt, hoeveel jongens komen daar naar verwachting dan in voor?

★ **Opgave 5.2**

Uit een vaas met dertig rode en drie groene balletjes wordt vier keer een balletje getrokken.

a X stelt het aantal getrokken groene balletjes voor als telkens wordt teruggelegd. Stel de kansverdeling van X op.

b Y stelt het aantal getrokken groene balletjes voor als niet wordt teruggelegd. Stel de kansverdeling van Y op.

★ **Opgave 5.3**

Uit een klas met zestien meisjes en twaalf jongens worden vier leerlingen gekozen. M is het aantal meisjes in die groep van vier.

a Welke waarden kan M aannemen?

b Stel een kansverdeling op voor M.

c Bepaal het verwachte aantal meisjes in de groep van vier.

★ **Opgave 5.4**

Je gooit met twee dobbelstenen en vermenigvuldigt het aantal ogen op de ene dobbelsteen met het aantal ogen op de andere. Dat is de waarde van de toevalsvariabele Z.

a Stel de kansverdeling van Z op.

b Je krijgt de waarde die Z aanneemt uitbetaald in euro's. Zou je voor dat spel € 12,00 willen inzetten? Hoe groot is dan de kans dat je met één spel iets wint?

★ ★ **Opgave 5.5**

In de finale herenenkel van het tennistoernooi van Wimbledon wordt gespeeld om 'best of five': wie het eerst drie sets heeft gewonnen, is kampioen. Na hoogstens vijf sets is er dus een winnaar; het kan al na drie sets. Neem je aan dat beide finalisten even sterk zijn en kans 50% hebben om een set te winnen, dan is het aantal in de finale gespeelde sets een toevalsvariabele S.

a Maak daarvan een kansverdeling en bereken het verwachte aantal sets.

b Neem aan dat het toernooi van Wimbledon al honderd keer is gespeeld. Hoeveel sets zijn er dan naar verwachting in totaal in de finales gespeeld?

De werkelijke gegevens leren toch anders, zie de tabel over 90 finales.

partijlengte	3 sets	4 sets	5 sets
aantal keer	44	22	24

Tabel 5.5

c Bepaal de experimentele kansverdeling en verwachtingswaarde van S.

d De oorspronkelijke aanname was dus niet zo goed. Stel je nu voor dat de kans om de eerste set te winnen 50% blijft, maar de kans om de set na een gewonnen set te winnen 70% is (de 'winning mood').

Maak nu opnieuw een kansverdeling (bekijk zorgvuldig alle gevallen).

e Bereken het verwachte aantal sets bij de nieuwe kansverdeling.

★ ★ ★

Opgave 5.6

De directie van een autoreparatiebedrijf vraagt zich af of de kwaliteit van het autospuitwerk afhankelijk is van de verfspuiter van dienst. Ze nemen een steekproef van 1000 gespoten auto's. De resultaten zie je in deze kruistabel.

$K \setminus V$	A	B	
goed	576	368	944
niet goed	24	32	56
	600	400	1000

Tabel 5.6

V stelt de verfspuiter voor en K stelt de kwaliteit van het spuitwerk voor.

Is de kwaliteit van het spuitwerk afhankelijk van de verfspuiter van dienst? Zo ja, welke verfspuiter levert de beste kwaliteit?

Beargumenteer je antwoord met statistisch bewijs. Geef, beargumenteerd, aan of je hierbij ook de verwachtingswaarden voor V en/of voor K kunt gebruiken.

Toepassen

★ ★

Opgave 5.7: Vreemde dobbelstenen

De investeerder Warren Buffett houdt van dobbelspelletjes met ongebruikelijke dobbelstenen. Hij daagt Bill Gates, de oprichter van Microsoft, uit voor een spelletje waarbij ze allebei een dobbelsteen mogen werpen. Degene met het hoogste ogenaantal wint.
Ze gebruiken drie dobbelstenen: een blauwe, een groene en een rode. De ogenaantallen staan in deze tabel.

blauw	3	3	3	3	3	6
groen	2	2	2	5	5	5
rood	1	4	4	4	4	4

Tabel 5.7

Warren laat Bill als eerste een dobbelsteen kiezen, en nadat Bill de blauwe pakt, kiest Warren de rode dobbelsteen.

a Bereken de kans dat Warren wint.

Even later spelen Warren en Bill weer tegen elkaar, maar de spelregels zijn veranderd. Er zijn nu twee blauwe, twee groene en twee rode dobbelstenen. Warren kiest twee dobbelstenen van gelijke kleur, waarna Bill twee andere dobbelstenen van gelijke kleur moet kiezen. De winnaar is degene met de hoogste som van zijn ogenaantallen.

Warren begint. Hij kiest de twee rode dobbelstenen. De kansverdeling voor de som van zijn ogenaantallen staat in deze tabel.

som	2	5	8
kans	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

Tabel 5.8

Bill kiest de twee groene dobbelstenen.

b Bereken de kans dat Bill wint.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2014, tweede tijdvak)

★ ★ Opgave 5.8: Casino

In een casino wordt maximaal zes keer met een zuivere munt geworpen totdat ‘kruis’ boven komt. De speler krijgt 1, 2, 4, 8, 16 of 32 euro uitbetaald als bij worp nummer 1, 2, 3, 4, 5 respectievelijk 6 voor het eerst kruis wordt gegooid. Bij zes keer munt krijgt hij niets. Y is de uitbetaling in euro’s.

a Stel de kansverdeling van Y op.

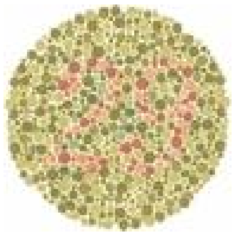
b Welke inzet moet het casino voor dit spel ten minste vragen om er op de lange duur geen geld bij in te schieten?

c Hoe groot is de kans dat je bij het spelen van dit spel minstens € 16,00 uitbetaald krijgt?

1.6 Binomiale kansen

Inleiding

Plaatjes zoals dit worden gebruikt om te onderzoeken of iemand kleurenblind is. Kleurenblindheid komt voor bij 8% van de westerse mannen en 0,4% van de westerse vrouwen. Via de website **www.kleurenblindheid.nl** kun je er meer over te weten komen. Of iemand kleurenblind is kun je niet aan zijn uiterlijk zien, dus je kunt je bijvoorbeeld afvragen hoe groot de kans is dat er kleurenblinden in jouw klas zitten. En hoeveel je er dan verwacht...



Figuur 6.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip Bernoulli-experiment;
- rekenen met binomiale kansen;
- binomiale toevalsvariabelen (stochasten) en de bijbehorende verwachtingswaarde berekenen.

Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij toevalsvariabelen (stochasten);
- verwachting bij een kansverdeling berekenen.

Voor de docent

Tot slot gaan de leerlingen kennismaken met de binomiale kansverdeling. Het werken ermee op de grafische rekenmachine is het belangrijkste doel van de tweede opdracht. En in de derde opdracht komt de cumulatieve binomiale verdeling aan bod. Elk van deze begrippen en met name het werken met de grafische rekenmachine vergt een of meer duidelijke hints in de goede richting.

Gewenste materialen:

- Het practicum 'Kansverdelingen met de GR', eventueel op papier. (Alleen het deel over de binomiale verdeling.)

Opdracht 6.1

Kleurenblindheid komt voor bij 8% van de westerse mannen en 0,4% van de westerse vrouwen. Of iemand kleurenblind is kun je niet aan zijn uiterlijk zien.
In een klas zitten 15 jongens. Bereken de kans dat daarvan 2 jongens kleurenblind zijn.

Toelichting

Mogelijke hulpvragen: "Welke kans heeft elke jongen om kleurenblind te zijn?" en "Is sprake van trekking met of zonder terugleggen?" (hier horen waarschijnlijk nog vragen bij als "Als de éne jongen een kans van 0,08 heeft, hoe zit het dan met een tweede jongen en een derde?".
Een nuttige vraag is ook "Welke twee kansen heeft elke jongen? En waarom geldt dit voor elke jongen?".
Laat dan het begrip 'binomiale kansverdeling' vallen.
Voor snelle leerlingen is opschalen eenvoudig: "Hoeveel kleurenblinden verwacht je op jouw school?".

Uitwerking

Het gaat hier om een binomiale kansverdeling van de kansvariabele K (aantal kleurenblinde jongens), met $p = 0{,}08$ en $n = 15$.

$$\mathrm{P}\,(K = 2 | n = 15 \text{ en } p = 0{,}08) = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^{13} \cdot \binom{15}{2} \approx 0{,}2273$$

Opdracht 6.2

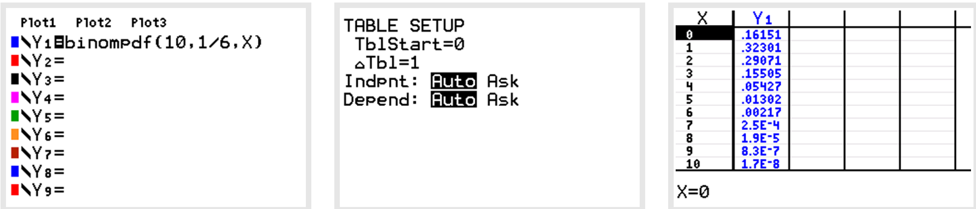
Je gooit met 10 dobbelstenen. Stochast (kansvariabele) X geeft het aantal zessen aan dat boven komt te liggen.
Stel een kansverdeling op voor X en bereken de verwachtingswaarde.

Toelichting

Hier gaat het om het inzetten van de grafische rekenmachine. Het practicum kan daarbij helpen, maar leerlingen kunnen wellicht ook zelf uitzoeken hoe je binomiale kansen berekent, als ze even worden gewezen op waar je deze verdeling kunt vinden op de rekenmachine. Nuttige hulpvragen: "Hoe kun je een kansverdeling maken op je GR?" en "Hoe kun je de verwachtingswaarde bij een binomiale verdeling snel berekenen?".

Uitwerking

X is een binomiale stochast met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$. Je moet nu de kansen bepalen voor $X = 0,1,2,3,...,10$. Het gaat om kansen van de vorm $\mathrm{P}\left(X = x | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right)$. Voer je dit in de grafische rekenmachine in als functie, dan maakt hij de bijbehorende tabel met uitkomsten.



Figuur 6.2

De verwachtingswaarde is $\mathrm{E}(X) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{6} = 2\frac{2}{3}$ zessen.

Opdracht 6.3

Uit onderzoek blijkt dat 8% van de westerse mannen kleurenblind is. Je vraagt 50 willekeurig gekozen westerse mannen of ze kleurenblind zijn. Hoeveel kleurenblinde mannen verwacht je in jouw steekproef aan te treffen? Hoe groot is de kans dat je meer dan vier kleurenblinde mannen in je steekproef aantreft?

Toelichting

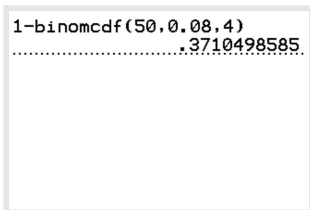
Nu gaat het erom de verschillende begrippen op een rijtje te krijgen en er 'meer/minder dan' en 'minstens/hoogstens' vragen mee te beantwoorden. Hulpvragen gaan vooral over de betekenis van deze begrippen en hints over hoe de grafische rekenmachine ermee omgaat.

Uitwerking

Stel stochast K is het aantal kleurenblinde mannen in de steekproef. K is binomiaal verdeeld met parameters $n = 50$ en $p = 0{,}08$.

De verwachtingswaarde is: $\mathrm{E}(K) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}08 = 4$ mannen.

De kans op $X > 4$ is: $\mathrm{P}(K > 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08)$.
Deze kans is gelijk aan: $1 - \mathrm{P}(K \leq 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08)$.



Figuur 6.3

Opdracht 6.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht. Kijk vooral naar de beschrijvingen van 'binomiale kansverdelingen'.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen, benoem eventueel nog speciale notaties en speciale termen (zoals 'binomiale kansverdeling', 'verwachtingswaarde snel berekenen'). Ga ook na of iedereen met de binomiale verdeling op de grafische rekenmachine uit de voeten kan. Ieder schrijft voor zichzelf een overzicht.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Een **Bernoulli-experiment** is een kansexperiment met precies twee uitkomsten: ‘succes’ of ‘mislukking’. Daarbij hoort een stochast B die de waarden 0 en 1 heeft en daarom zo'n kansverdeling:

b	0	1
$\text{P}(B = b)$	$1 - p$	p

Tabel 6.1

Als je een Bernoulli-experiment n keer herhaalt en stochast X stelt het aantal successen daarbij voor, dan heeft X een **binomiale kansverdeling**. Een binomiaal kansexperiment bestaat dus uit n gelijke onafhankelijke experimenten met elk precies twee uitkomsten. De kans op k successen is $\text{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$.

Ook nu is p de kans op succes en verder is $0 \leq k \leq n$. De variabelen n en p noem je de **parameters** van de binomiale verdeling.

Van een binomiaal verdeelde stochast met parameters n en p is de **verwachtingswaarde** $\text{E}(X) = n \cdot p$.
Hierin is de E (van ‘expectation’) het symbool voor de verwachtingswaarde.

Verwerken

★ **Opgave 6.1**

Een volledig kaartspel bestaat uit 52 kaarten, van elke kleur (ruiten, harten, klaveren en schoppen) evenveel. Uit zo'n kaartspel wordt zes keer een kaart getrokken: er wordt gekeken of het een hartenkaart is of niet. De kaart die je trekt wordt steeds in het spel terugstopt alvorens een nieuwe kaart te nemen. Het spel kaarten wordt voor iedere trekking geschud.

a Waarom is hier sprake van een binomiaal kansmodel?

b Hoe groot is dan de kans op hoogstens drie hartenkaarten?

c Hoe groot is de kans dat je meer dan drie hartenkaarten trekt?

d Waarom is er geen sprake van een binomiaal kansmodel als je de getrokken kaarten niet teruglegt?

★ **Opgave 6.2**

Iemand vult bij een meerkeuzetoets volkomen willekeurig 32 keer een van de vier antwoordmogelijkheden in. Er is telkens maar één van deze keuzemogelijkheden juist. De toets wordt met een voldoende beoordeeld als er meer dan 22 vragen juist zijn ingevuld.

a Bepaal het aantal verwachte correcte antwoorden van de gokker.

b Bepaal de kans dat de gokker toch een voldoende haalt.

★ **Opgave 6.3**

Neem aan dat stochast X binomiaal verdeeld is. Bepaal onderstaande kansen in vier decimalen nauwkeurig.

a $\text{P}(X \leq 6 | n = 20 \text{ en } p = 0{,}45)$

b $\text{P}(X > 8 | n = 15 \text{ en } p = 0{,}35)$

c $\text{P}(X \geq 46 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}55)$

d $\text{P}(X \leq 5 | n = 25 \text{ en } p = 0{,}25)$

e $\text{P}(X < 16 | n = 30 \text{ en } p = 0{,}45)$

★ ★ **Opgave 6.4**

In een doos bevindt zich een zeer groot aantal kralen. 40% van deze kralen is rood en de rest zwart. Je haalt hier aselect en met terugleggen 10 kralen uit. Stochast X is het aantal rode kralen.

a Waarom past bij X een binomiaal kansmodel?

b Leg uit hoe je de volgende kansen berekent:

- $\text{P}(X \leq 7)$
- $\text{P}(X = 7)$
- $\text{P}(X < 7)$
- $\text{P}(X > 7)$
- $\text{P}(4 \leq X \leq 7)$

★ **Opgave 6.5**

Je werpt met een geldstuk dat niet geheel eerlijk is. De kans op munt is 0,45. Je werpt 20 keer met dit geldstuk. Bereken de kans op:

a precies vijf keer kruis;

b niet meer dan vijf keer kruis;

c meer dan vijf keer kruis;

d minder dan vijf keer kruis;

e zeven of acht keer kruis.

★ **Opgave 6.6**

X is een binomiaal verdeelde toevalsvariabele. Voor welke waarde van x geldt:

a $\text{P}(X \leq x | n = 100 \text{ en } p = 0{,}35) = 0{,}1236$

b $\text{P}\left(X > x | n = 12 \text{ en } p = \frac{1}{3}\right) < 0{,}1777$

Toepassen

★ ★ **Opgave 6.7: Meerkeuzetoets**

Een meerkeuzetoets bestaat uit 50 vragen, elk met vier mogelijke antwoorden, waarvan er slechts één juist is.

De docente die deze toets heeft gemaakt wil de normering ervan vaststellen. De cijfers worden tot op één decimaal nauwkeurig berekend; het laagst mogelijke cijfer is 1,0 en het hoogst mogelijke 10,0. Zij wil bij het vaststellen van het cijfer het gokken van antwoorden zo min mogelijk belonen.

a Ze zou er daartoe voor kunnen kiezen om het aantal verwachte goede antwoorden bij zuiver gokken niet te belonen. Verder werkt ze met een vast aantal punten per vraag.

Welke normering zou ze dan het best kunnen hanteren?

b Zij kan ook besluiten dat bij willekeurig invullen de kans op het cijfer 4,0 of hoger bij benadering niet meer dan 3% mag zijn. Voor hoeveel goede antwoorden wordt dan het cijfer 4,0 gegeven?

c Is de tweede methode soepeler dan de eerste? Licht je antwoord toe.

d Stel je voor dat je op 30 vragen zonder meer het antwoord weet en de rest gokt. Bereken bij elk van deze normeringen het cijfer dat je dan mag verwachten.

Ga er nu van uit dat er een zuiver lineaire puntenverdeling wordt gehanteerd:

- bij 0 tot 5 vragen goed krijg je een 1,0;
- bij 6 vragen goed krijg je een 1,2;
- bij 7 vragen goed krijg je een 1,4;
- enzovoorts;
- bij 50 vragen goed een 10,0.

e Je weet op 30 vragen het goede antwoord en besluit de rest van de vragen op goed geluk in te vullen. Welk cijfer kun je verwachten?

f Bereken de kans dat je 7,6 of meer scoort.

g Bij n zeker goede antwoorden en de overige vragen willekeurig invullen is de kans op minstens 7,0 groter dan 90%. Bereken n.

Practicum

Met de volgende practica kun je **het werken met kansverdelingen op de grafische rekenmachine** doornemen. Vooralsnog heb je alleen de binomiale kansverdeling nodig, alleen de eerste drie onderdelen van het gewenste practicum.

- **Kansverdelingen met de TI84**
- **Kansverdelingen met de TInspire**
- **Kansverdelingen met de Casio fx-CG50**
- **Kansverdelingen met de HP-prime**
- **Kansverdelingen met de NumWorks**

1.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- experimentele kans — theoretische kans
- vaasmodel — kansboom — trekking met/zonder teruglegging
- kansexperiment — uitkomstenverzameling, gebeurtenis — elkaar wederzijds uitsluitende gebeurtenissen
- algemene productregel voor kansen — (on)afhankelijke gebeurtenissen — voorwaardelijke kans
- toevalsvariabele — kansverdeling — verwachtingswaarde — afhankelijkheid van toevalsvariabelen
- ja/nee-kansen, binomiale kansen — binomiale kansverdeling — de verwachtingswaarde van een binomiale kansverdeling

Activiteitenlijst

- kansen berekenen m.b.v. systematisch tellen en/of frequentietabellen — simulatie
- kansen berekenen m.b.v. kansbomen — het vaasmodel gebruiken
- kansen berekenen met de optelregel
- kansen berekenen de productregel
- een kansverdeling maken — de verwachtingswaarde berekenen — kansen berekenen waarin het gaat om minstens of hoogstens een bepaald aantal — afhankelijkheid van toevalsvariabelen door berekening vaststellen
- binomiale kansen berekenen en een binomiale kansverdeling opstellen — de verwachtingswaarde van een binomiale kansverdeling berekenen

Achtergronden

In het midden van de zeventiende eeuw is de kansrekening ontstaan in een briefwisseling van de twee grote Franse wiskundigen **Pierre de Fermat (1601—1665)** en **Blaise Pascal (1623—1662)**.

Halverwege de zeventiende eeuw kreeg Pascal het onderstaande kansprobleem voorgelegd door de Franse edelman (en verwoed gokker) Chevalier de Méré.

De Méré speelde in de Franse 'salons' vaak een dobbelspel waarbij de 'bank' won als een speler bij het werpen met één zuivere dobbelsteen bij 4 worpen tenminste één zes gooit. Hij bedacht daarop een variant waarbij de bank wint wanneer bij 24 worpen met twee zuivere dobbelstenen tenminste één keer dubbel-zes voorkwam. De Méré dacht dat er bij beide situaties voor de bank dezelfde kans op winst bestond: in het eerste geval 4/6 en in het tweede geval 24/36 (want bij twee dobbelstenen zijn er 36 mogelijkheden), en dat is beide hetzelfde. In de praktijk bleek dit echter niet op te gaan, de tweede situatie was voor de bank ongunstig. De vraag was hoe dat kwam.

Pascal stortte zich op deze problemen en in een briefwisseling met Pierre de Fermat (1601—1665) losten zij ze op. Daarbij ontwikkelden ze de **basisprincipes van de kansrekening**. In feite zijn Pascal en Fermat de grondleggers van de kansrekening zoals wij die tegenwoordig nog steeds beoefenen. Zij werkten echter met kansen in termen van verhoudingen als 1 : 6 en niet (zoals wij tegenwoordig doen) met breuken.

Het eerste echte leerboek over kansrekening is echter geschreven door de Nederlandse geleerde **Christiaan Huygens (1629—1695)**. In zijn 'Van Rekeningh in Spelen van Geluck' introduceerde Huygens het vaasmodel met zwarte en witte schijven, zoals bij het damspel. Allerlei vraagstukken uit de kansrekening herleidde hij tot dat vaasmodel.

Later schreef de Franse wiskundige **Abraham de Moivre (1667—1754)**, die sinds 1685 in Londen woonde en een goede vriend was van Isaac Newton, zijn beroemde 'The Doctrine of Chance', waarin hij de basisbegrippen van de kansrekening voortzette naar een theorie over kansverdelingen.

De moderne opbouw van de kansrekening is van betrekkelijk recente datum. De Russische wiskundige **Andrej Kolmogorov (1903—1987)** zorgde voor een precieze wiskundige theorie.

Figuur 7.1

Testen

★ Opgave 7.1

Vertaal de volgende situaties in een vaasmodel en bereken de kans.

a Bij de presidentsverkiezingen in de Verenigde Staten in 2000 ging de verkiezingsstrijd tussen de presidentskandidaten Al Gore en George Bush. Gore had op zeker moment ongeveer 40% van de kiezers achter zich en Bush ook. De overige kiesgerechtigde Amerikanen zouden niet gaan stemmen. Je komt vier toeristen uit de Verenigde Staten tegen. Hoe groot is de kans dat ze op dat moment alle vier op Gore zouden stemmen?

b Bij een gevaarlijke reddingsoperatie moeten drie vrijwilligers een brandend gebouw in. Er zijn twee brandweerkorpsen uitgerukt: korps A met tien leden en korps B met vijftien leden. Alle leden van de brandweerkorpsen melden zich als vrijwilliger. De drie vrijwilligers worden door het lot aangewezen. Hoe groot is de kans dat ze alle drie bij korps A horen?

c Je gooit met drie gewone dobbelstenen. Wat is de kans op een som van vijftien ogen?

d Je bent je pincode vergeten. Die pincode bestaat uit vier cijfers en alle mogelijkheden zijn toegestaan. Je wilt geld uit de geldautomaat halen. Je toetst zomaar een pincode in. Hoe groot is de kans dat het de juiste is?

★ Opgave 7.2

In een vaas zitten twintig balletjes, tien rode, vijf blauwe en vijf gele. Uit die vaas worden aselect drie balletjes tegelijk gehaald.

a Maak een kansboom bij deze situatie.

b Hoe groot is de kans dat er twee rode en één blauw balletje worden getrokken?

c Hoe groot is de kans op één balletje van elke kleur?

d Hoeveel rode balletjes verwacht je?

★ Opgave 7.3

Bij de entree van de overdekte kinderspeelplaats Chimpie Champ krijg je een kaart. Er zijn zes verschillende kaarten. Als je vier dezelfde hebt, mag je een keer gratis naar binnen.

Bas mag in de zomervakantie vijf keer naar Chimpie Champ en hij vraagt zich af of hij de vijfde keer gratis naar binnen kan.

Figuur 7.2

a Beschrijf de kans die je moet berekenen om Bas iets uitgebreider antwoord te kunnen geven dan alleen 'ja, er is een manier waarop dat kan'.

b Beschrijf een manier om het bijbehorende kansexperiment te simuleren.

Na correcte en veelvuldige simulatie van dit kansexperiment denkt Bas dat de kans dat hij de vijfde keer gratis naar binnen mag, gelijk is aan 2,5%.

c Bereken de daadwerkelijke kans dat Bas de vijfde keer gratis naar binnen kan.

d Leg uit hoe een correcte en veelvuldige simulatie toch zo'n afwijkende kans kan opleveren.

★ Opgave 7.4

Voor het uitvoeren van een bepaald experiment zijn vijf vrouwelijke en vijf mannelijke proefpersonen gevraagd. De helft van hen doet een bepaalde test met een zeker hulpmiddel en de andere helft (de controlegroep) doet diezelfde test zonder dat hulpmiddel. Door loting wordt vastgesteld wie terechtkomt in groep A die het hulpmiddel mag gebruiken. Het aantal mannen M in groep A hangt dus van het toeval af.

a Maak voor M een kansverdeling en bereken het te verwachten aantal mannen.

b Hoe groot is de kans dat er hoogstens drie mannen in groep A zitten?

★ ★ Opgave 7.5

In een zeker gebied in Afrika beschikt 60% van de bewoners over goed drinkwater. 8% van de bewoners heeft een bepaalde darmparasiet; van hen heeft slechts 1 op de 4 goed drinkwater.

a Hoe groot is de kans dat een willekeurige bewoner goed drinkwater en toch die darmparasiet heeft?

b Hoe groot is de kans dat een willekeurige bewoner goed drinkwater en niet die darmparasiet heeft?

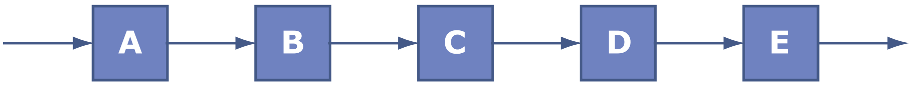
c Hoe groot is de kans dat een willekeurige bewoner goed drinkwater of niet die darmparasiet heeft?

d De kans dat een bewoner met goed drinkwater die parasiet heeft, zal kleiner zijn dan de kans dat een bewoner zonder goed drinkwater die parasiet heeft. Hoe groot zijn die kansen in procenten?

e Zijn de toevalsvariabelen K, de kwaliteit van drinkwater, en P, het wel of niet hebben van een darmparasiet, wel of niet afhankelijk van elkaar? Beantwoord deze vraag met een berekening.

★ ★ Opgave 7.6

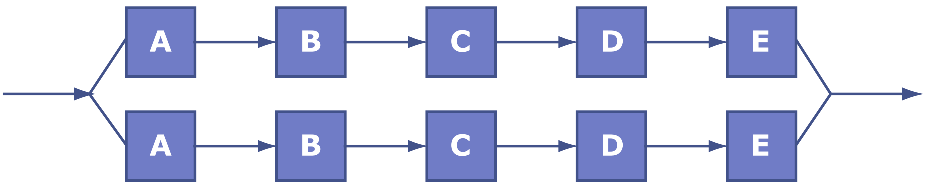
Bij een ingewikkeld apparaat is vaak een keten van onderdelen nodig om het geheel te laten functioneren. Daarbij is de betrouwbaarheid van een keten (zoals in de figuur) kleiner dan de betrouwbaarheid van de afzonderlijke delen. Dat komt doordat het uitvallen van één onderdeel het uitvallen van de gehele keten tot gevolg heeft. Bekijk een keten van vijf onderdelen (A, B, C, D, E), die elk een kans van 10% hebben om uit te vallen, ofwel elk een betrouwbaarheid hebben van 90%.



Figuur 7.3

a Laat zien dat de betrouwbaarheid van deze keten ongeveer 60% is.

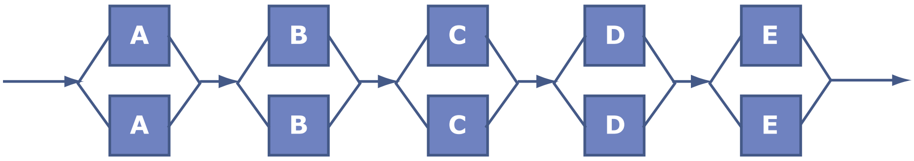
Men kan de betrouwbaarheid vergroten door naast de keten van deze figuur nog zo'n keten te schakelen (zie de volgende figuur). Dit heeft het voordeel dat als één keten uitvalt het systeem toch blijft functioneren.



Figuur 7.4

b Bereken de betrouwbaarheid van dit systeem.

Een nog beter systeem krijgt men door de 10 onderdelen zo te schakelen als de volgende figuur aangeeft. Elk van de tien onderdelen heeft weer een betrouwbaarheid van 90%.



Figuur 7.5

c Bereken de betrouwbaarheid van dit laatste systeem.

(bron: examen havo wiskunde A in 1991, eerste tijdvak)

★ ★

Opgave 7.7

Bij een gezondheidsenquête, uitgevoerd door het Centraal Bureau voor de Statistiek, waren vragen opgenomen over linkshandigheid. Van linkshandige meisjes en jongens in de leeftijd van 10-20 jaar is nagegaan hoe het zit met de links- of rechtshandigheid van de ouders. Het resultaat hiervan staat in de tabel.

CBS	één van de ouders of beide ouders linkshandig	beide ouders rechtshandig
aantal meisjes linkshandig	32	72
aantal jongens linkshandig	40	96

Tabel 7.1

Een linkshandige jongen en een linkshandig meisje (uit die leeftijdscategorie) beginnen een relatie. Na verloop van tijd maken de ouders van beide kinderen kennis met elkaar. Die ouders blijken alle vier rechtshandig te zijn.
Hoe groot is de kans daarop?

(bron: examen havo wiskunde A in 1991, eerste tijdvak)

★ ★ ★

Opgave 7.8

Het vak statistiek wordt op een bepaalde faculteit afgesloten met een tentamen en eventueel een hertentamen. Op basis van resultaten uit de afgelopen jaren is bekend dat 55% van de studenten uiteindelijk (na een eventueel hertentamen) een voldoende haalt voor dit vak. Van de studenten die gedurende de collegeperiode regelmatig opgaven geoefend hebben, haalt 80% uiteindelijk een voldoende voor dit vak. Het percentage studenten dat regelmatig oefent, wordt geschat op 35%.

Iemand beweert dat oefenen voor statistiek weinig zin heeft.

a Wordt de bewering door deze gegevens ondersteund?

b Hoeveel procent van de studenten die uiteindelijk een voldoende hebben voor statistiek, heeft regelmatig geoefend?

★

Opgave 7.9

In een vaas zitten 13 knikkers: 8 paarse en 5 gele.

Je pakt 6 keer een knikker uit de vaas, controleert de kleur en legt hem weer terug in de vaas.

a Hoe groot is de kans dat je minder dan 4 gele knikkers hebt gepakt?

b Hoe groot is de kans dat je minstens 4 paarse knikkers hebt gepakt?

c Hoeveel paarse knikkers verwacht je te pakken?

Toepassen

★ ★ **Opgave 7.10: Chuck-a-luck**

‘Chuck-a-luck’ is een kansspel waarbij wordt geworpen met drie dobbelstenen. Het wordt in veel casino's gespeeld. Een casino is vooral geïnteresseerd in de verwachtingswaarde, veel spelers denken alleen aan hun kansen (sukkels...).

Bij dit spel kies je een bepaalde uitkomst voor het aantal ogen op één dobbelsteen. Komt jouw aantal bij een worp met drie stenen één keer voor krijg je de inleg terug, komt het twee keer voor krijg je je inleg twee keer terug en komt het drie keer voor dan krijg je je inleg 10 keer terug.

Stel je voor dat W je winstbedrag is. Per ingelegde euro heeft W de waarden -1, 0, 1 en 9. Met behulp van een kansboom maak je daarbij een kansverdeling en bereken je de verwachtingswaarde. Vooral die verwachtingswaarde is interessant voor een casino: het is het gemiddelde bedrag dat ze per ingelegde euro moeten uitbetalen.

Figuur 7.6

a Stel een bij dit spel passende kansverdeling op.

b Bereken de bijbehorende verwachtingswaarde.

c Wat adviseer je een casino dat dit spel wil invoeren?

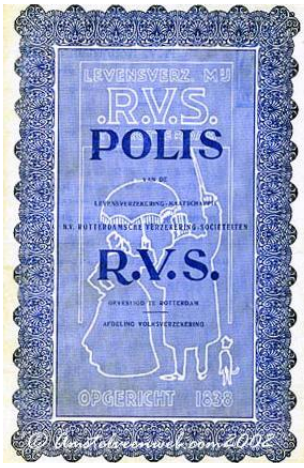
★ ★ **Opgave 7.11: Sterftetabellen**

Verzekeringsmaatschappijen gebruiken veel kansrekening. Bij het afsluiten van een levensverzekering willen verzekeraars weten wat de kans is dat de verzekerde binnen een bepaalde tijd overlijdt. Daarbij wordt gebruik gemaakt van tabellen zoals deze **sterftetabel**.

Deze tabellen zijn gebaseerd op statistisch onderzoek en worden van tijd tot tijd bijgesteld.

Je ziet in deze tabel bijvoorbeeld dat van elke 10.000.000 geboren mannen er na 35 jaar nog 9.804.341 in leven zijn. Na 50 jaar zijn dat er nog 9.545.529. De kans dat iemand van 35 jaar oud 50 jaar wordt is dan: $\frac{9.545.529}{9.804.341} \cdot 100\% \approx 97{,}4\%$.

Zo kun je ook zijn kans bepalen dat hij 70 jaar wordt, en 71 jaar, etc. En daarmee bereken je zijn levensverwachting en weet de verzekeringsmaatschappij hoeveel jaar er gemiddeld aan iemand van 35 jaar oud nog moet worden uitbetaald vanaf het moment dat zijn levensverzekering tot uitkering komt.



Figuur 7.7

a Hoeveel procent van de mensen die de leeftijd van 25 jaar hebben bereikt, sterven voor hun dertigste?

b Hoeveel procent van de mensen die 60 jaar worden, sterven voor hun zeventigste?

c Gebruik nog eens de gegeven sterftetabel. Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat iemand die 50 jaar wordt, ook nog zijn zeventigste verjaardag zal halen.

d Bereken ook de kans dat iemand die 50 jaar wordt, binnen 20 jaar zal sterven.

e Bereken de levensverwachting van een vijftigjarige man met behulp van deze tabel in Excel.

Stel je een levensverzekering voor waarbij je het verzekerde bedrag in één keer krijgt uitbetaald wanneer je op de afgesproken datum nog in leven bent. Je betaalt de premie in één keer op het moment dat je de levensverzekering afsluit. Stel je voor dat je op 30-jarige leeftijd zo’n levensverzekering afsluit met als verzekerd bedrag € 100.000,00. Dit bedrag wordt uitgekeerd op het moment dat je 65 jaar wordt en nog in leven bent. De premie kan echter lager zijn dan € 100.000,00. Anders kun je immers beter zelf het geld op de bank zetten!

f Waarom is dat zo?

g Hoe hoog zou die premie moeten zijn op grond van de gegeven tabel? Licht je antwoord toe, houd rekening met overlevingskansen en rentestand.

Examen

★ ★ **Opgave 7.12: Wijn proeven**

Bij het examen voor vinoloog (wijnkenner) moeten de kandidaten wijnen herkennen door te proeven. Uit een artikel komt de volgende tekst.

> De examenkandidaten hebben zich een jaar lang op deze proeverij voorbereid. Het zijn bijna allemaal vaklui: restauranteigenaren, wijnproevers, slijters. De opdracht lijkt simpel: combineer de 12 op papier genoemde wijnen met het juiste glas. Om te slagen wordt genoegen genomen met 9 juiste combinaties. Dat dit in de praktijk een hels karwei is, blijkt wel uit het geringe aantal kandidaten dat succesvol is: gemiddeld zo'n 30 procent.

In deze opgave kijken we naar de kans dat iemand die helemaal geen verstand van wijnen heeft het examen haalt. Omdat hij uitsluitend gokt, noemen we hem een gokker.
Er staan, volgens bovenstaande tekst, 12 glazen met wijn op tafel. Iedere deelnemer krijgt 12 kaartjes met de namen van die wijnen. De opdracht is: leg bij elk glas het goede kaartje. De gokker legt zijn kaartjes dus in willekeurige volgorde bij de verschillende glazen.

a Op hoeveel verschillende manieren kan de gokker de kaartjes neerleggen?

Om het iets gemakkelijker te maken, heeft de examencommissie de 12 wijnen in 4 groepjes van 3 verdeeld. Bij elk groepje liggen 3 kaartjes met de namen van die 3 wijnen. De opdracht van de kandidaat is om bij elk groepje de kaartjes bij het juiste glas te leggen.

b Stel een kansverdeling op van het aantal door de gokker goed neergelegde kaartjes per groepje van 3.

In deze tabel zie je een mogelijk verloop van het examen. De 'route' 3 – 1 – 0 – 3 levert in totaal 7 goed geraden wijnen.

	eerste drietal	tweede drietal	derde drietal	vierde drietal
aantal goed neergelegde kaartjes	0	0	0	0
	1	1	1	1
	3	3	3	3

Tabel 7.2

Om te slagen moeten er minstens 9 wijnen goed geraden worden.

c Bereken de kans dat een gokker slaagt.

(bron: voorbeeldexamen wiskunde A1,2 vwo 2001)

★ ★ **Opgave 7.13: Vierkeuzevragen**

Bij vierkeuzevragen staan bij elke vraag vier mogelijke antwoorden: A, B, C en D. Slechts één daarvan is juist. Een kandidaat kan één van de vier antwoorden kiezen of de vraag onbeantwoord laten. Bij keuze van het juiste antwoord wordt 1 punt toegekend, in alle andere gevallen 0 punten. Als een kandidaat absoluut niet weet welk antwoord juist is en welke antwoorden onjuist zijn, doet hij er daarom verstandig aan om toch een antwoord te kiezen. Dit leidt tot gokgedrag.
Daarom is ook wel eens geopperd om bij een onjuist antwoord strafpunten te geven. Een kandidaat heeft dan twee keuzes: niets invullen levert 0 punten op; wel iets invullen levert 1 punt op bij een juist antwoord en -0,5 punt (0,5 strafpunt) bij een onjuist antwoord.

a Bereken de verwachtingswaarde van de score per vraag bij dit strafpuntensysteem als een kandidaat gokt.

We kijken nu naar een andere manier van toetsen met vierkeuzevragen. Hierbij hoeft de kandidaat niet meer één antwoord te kiezen. In plaats daarvan vraagt men de kandidaat achter elk van de vier mogelijke antwoorden A, B, C en D de subjectieve kans op te schrijven.
Een kandidaat die bijvoorbeeld noteert $p_A = 0{,}2$; $p_B = 0{,}8$; $p_C = 0$; $p_D = 0$ geeft daarmee aan dat hij er vrij zeker van is dat B juist is, maar dat A ook nog zou kunnen, en dat C en D volgens hem zeker fout zijn. De opgeschreven getallen p_A, p_B, p_C en p_D mogen natuurlijk niet negatief zijn en moeten bij elkaar opgeteld 1 zijn.
Bij iedere vraag wordt een score berekend die aangeeft 'hoe dicht je bij het juiste antwoord zit'.
Als bijvoorbeeld C het juiste antwoord is, dan wordt de score berekend met de volgende formule:

$$\text{score} = 1 - \left(p_A^2 + p_B^2 + \left(1 - p_C\right)^2 + p_D^2\right).$$

Voor de gevallen waarbij A, B of D het juiste antwoord is, gelden soortgelijke formules. De maximale score is 1 en de minimale score is -1.
Bij een bepaalde vraag is het juiste antwoord B. Een kandidaat die niet helemaal zeker van zijn zaak is, noteert bij deze vraag als subjectieve kansen: $p_A = 0{,}2$; $p_B = 0{,}7$; $p_C = 0$; $p_D = 0{,}1$.

b Bereken de score voor deze kandidaat bij deze vraag.

Stel dat bij een andere vraag C het juiste antwoord is. Een kandidaat haalt bij deze vraag de minimale score.

c Welke subjectieve kansen kan de kandidaat opgeschreven hebben achter de antwoorden A, B, C en D? Vermeld alle mogelijkheden.

Een kandidaat moet een vraag beantwoorden maar heeft geen idee welk antwoord juist is en welke antwoorden onjuist zijn. Er zijn heel veel mogelijkheden voor de kandidaat om die vraag te beantwoorden:

- Mogelijkheid I:
  De kandidaat zou kunnen gokken op een antwoord door daar 1 achter te schrijven (en dus 0 achter de andere antwoorden). Het antwoord waarbij de kandidaat 1 heeft gezet, kan goed zijn. Dan is de score 1. Als het niet goed is, is de score -1. De verwachte score is dan: $\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot -1 = -0{,}5$.
- Mogelijkheid II:
  Hij kan ook op twee antwoorden gokken door achter ieder van die twee antwoorden $\frac{1}{2}$ te schrijven.
- Mogelijkheid III:
  Hij kan ook op drie antwoorden gokken door achter ieder van die drie antwoorden $\frac{1}{3}$ te schrijven.
- Mogelijkheid IV:
  En tenslotte kan hij ook op alle vier de antwoorden gokken door achter alle antwoorden $\frac{1}{4}$ te schrijven. Deze laatste mogelijkheid levert hem een score van 0,25 op.

Er zijn nog veel meer mogelijkheden om de vraag te beantwoorden. We kijken echter alleen naar de bovengenoemde vier mogelijkheden. De score bij mogelijkheid IV is hoger dan de verwachte score bij mogelijkheid I. Mogelijkheid IV is daarmee een 'verstandiger' strategie dan mogelijkheid I.

d Onderzoek welk van de mogelijkheden II, III en IV de meest verstandige strategie is.

We vergelijken de antwoorden van twee personen op een vierkeuzevraag. Tim snapt niets van de vraag en besluit bij ieder antwoord 0,25 in te vullen. Tom weet zeker dat de antwoorden B en D onjuist zijn. Zijn antwoord op deze vraag zal de vorm hebben die je in de tabel ziet. Hierbij is a een getal tussen 0 en 1 (eventueel 0 of 1).

antwoord	subjectieve kans
A	a
B	0
C	$1 - a$
D	0

Tabel 7.3

Stel dat antwoord C juist is. Of Tom bij deze vraag een hogere score haalt dan Tim hangt af van de gekozen waarde van a.

e Bereken voor welke waarden van a geldt dat Tom bij deze vraag een hogere score haalt dan Tim.

(bron: examen wiskunde A1,2 vwo 2004, eerste tijdvak)

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★★	★★★
1	**Kansen**	★	★★	★★★
	Wat experimentele en theoretische kansen zijn, hoe je ze berekent en hoe je ze noteert.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.5 ☐ T7.1 ☐ T7.2 ☐ T7.3 ☐ T7.4 ☐	1.6 ☐ 1.7 ☐ T7.5 ☐ T7.6 ☐ T7.7 ☐ T7.10 ☐ T7.11 ☐ T7.12 ☐	1.8 ☐
	Wat een kansexperiment en een gebeurtenis zijn.	1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ 1.5 ☐	1.6 ☐ 1.7 ☐ T7.6 ☐	1.8 ☐ T7.8 ☐
	Dat je en hoe je een kansexperiment kunt simuleren.	1.1 ☐ 1.4 ☐ T7.2 ☐	T7.7 ☐ T7.10 ☐ T7.11 ☐	1.8 ☐ T7.8 ☐
	De werking van de wet van de grote aantallen.		1.6 ☐	1.8 ☐
2	**Kansbomen**	★	★★	★★★
	Kansen bepalen met behulp van een kansboom.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.7 ☐ T7.3 ☐	2.4 ☐ 2.5 ☐ 2.6 ☐ T7.12 ☐ T7.13 ☐	
	Het vaasmodel met of zonder teruglegging voor het berekenen van kansen.	2.2 ☐ 2.3 ☐ T7.1 ☐ T7.2 ☐ T7.4 ☐	2.4 ☐ 2.5 ☐ 2.6 ☐ T7.7 ☐ T7.10 ☐ T7.11 ☐ T7.12 ☐ T7.13 ☐	
3	**Kansen optellen/aftrekken**	★	★★	★★★
	Kansen berekenen met behulp van de somregel en de complementregel.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ T7.2 ☐	3.4 ☐ 3.5 ☐ 3.6 ☐ 3.7 ☐ 3.8 ☐ T7.6 ☐ T7.13 ☐	
	De basisregels van de kansrekening gebruiken.	3.3 ☐ T7.1 ☐ T7.2 ☐ T7.3 ☐ T7.4 ☐	3.4 ☐ 3.5 ☐ 3.6 ☐ 3.7 ☐ 3.8 ☐ T7.5 ☐ T7.6 ☐ T7.13 ☐	
4	**Kansen vermenigvuldigen**	★	★★	★★★
	De regels voor het vermenigvuldigen van kansen waaronder de productregel.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐ T7.2 ☐	4.6 ☐ 4.7 ☐ T7.12 ☐ T7.13 ☐	4.8 ☐ T7.8 ☐
	Werken met afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐ T7.2 ☐ T7.3 ☐	4.6 ☐ 4.7 ☐ T7.7 ☐ T7.10 ☐ T7.11 ☐ T7.12 ☐	4.8 ☐ T7.8 ☐
	Voorwaardelijke kansen berekenen.	4.3 ☐ 4.5 ☐	4.6 ☐ T7.5 ☐ T7.7 ☐ T7.10 ☐ T7.11 ☐ T7.12 ☐	4.8 ☐
5	**Toevalsvariabelen**	★	★★	★★★
	Een kansverdeling maken voor een toevalsvariabele.	5.1 ☐ 5.2 ☐ 5.3 ☐ 5.4 ☐	5.5 ☐ 5.7 ☐ 5.8 ☐ T7.12 ☐	5.6 ☐ T7.8 ☐
	Kansen berekenen waarbij het gaat om minstens of hoogstens.	5.1 ☐ 5.4 ☐ T7.4 ☐	5.8 ☐	
	Het begrip verwachtingswaarde gebruiken.	5.1 ☐ 5.3 ☐ 5.4 ☐ T7.2 ☐ T7.4 ☐	5.5 ☐ 5.8 ☐	5.6 ☐
	Berekenen of twee toevalsvariabelen onafhankelijk zijn van elkaar.		T7.5 ☐	5.6 ☐ T7.8 ☐

6 Binomiale kansen	★	★ ★	★ ★ ★
Het begrip Bernoulli-experiment.	6.1 ☐ T 7.9 ☐	6.4 ☐ 6.7 ☐	
Rekenen met binomiale kansen.	6.1 ☐ 6.2 ☐ 6.5 ☐ T 7.9 ☐	6.7 ☐	
Binomiale stochasten en de bijbehorende kansverdelingen opstellen en de verwachting berekenen.	6.2 ☐ 6.3 ☐ 6.5 ☐ 6.6 ☐ T 7.9 ☐	6.4 ☐ 6.7 ☐	

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

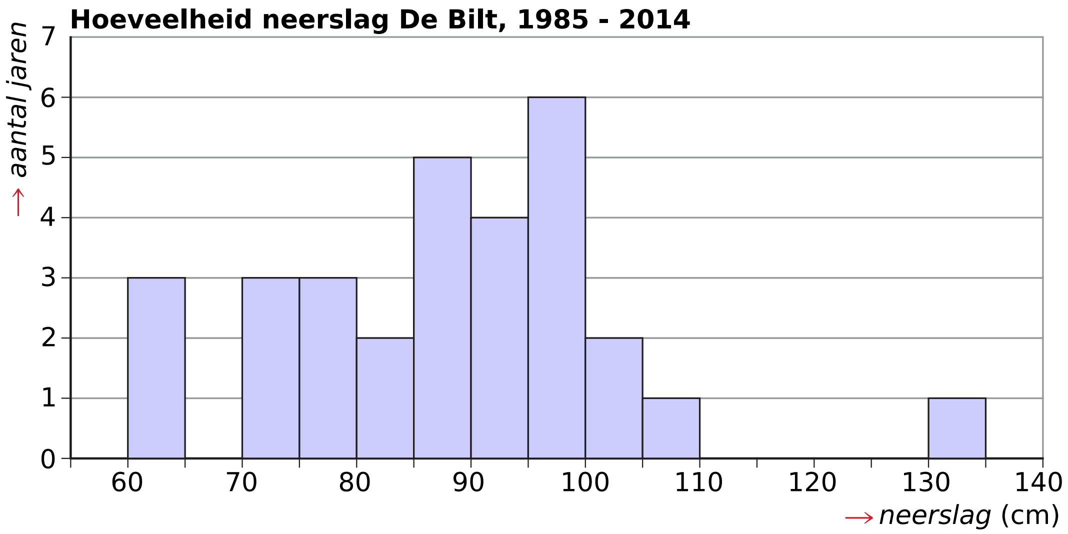
De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

www.math4all.nl

Werkblad bij Opdracht 1.1

Jaarlijks wordt de hoeveelheid neerslag in De Bilt geregistreerd. Van de resultaten in de jaren 1985 t/m 2014 is een frequentieverdeling gemaakt: zie bijbehorend histogram.
Neem aan dat het neerslagpatroon sindsdien niet is gewijzigd.



Werkblad bij Opdracht 5.2

Voor een bepaalde instaptoets worden alleen gehele cijfers van 1 tot en met 10 gegeven. Daarvan zijn jarenlang de resultaten bijgehouden.

cijfer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
relatieve frequentie (%)	0	0	4	12	20	26	18	11	7	2

Werkblad bij Opdracht 5.3

In de kruistabel zie je toevalsvariabelen G (geslacht) en K (wel/niet kleurenblind). De onderste rij is de kansverdeling voor K en de rechter kolom is de kansverdeling voor G, voor een steekproef van 1000 personen.

	K = niet	K = wel	
V	$0{,}488$	$0{,}002$	$0{,}49$
M	$0{,}469$	$0{,}041$	$0{,}51$
	$0{,}957$	$0{,}043$	