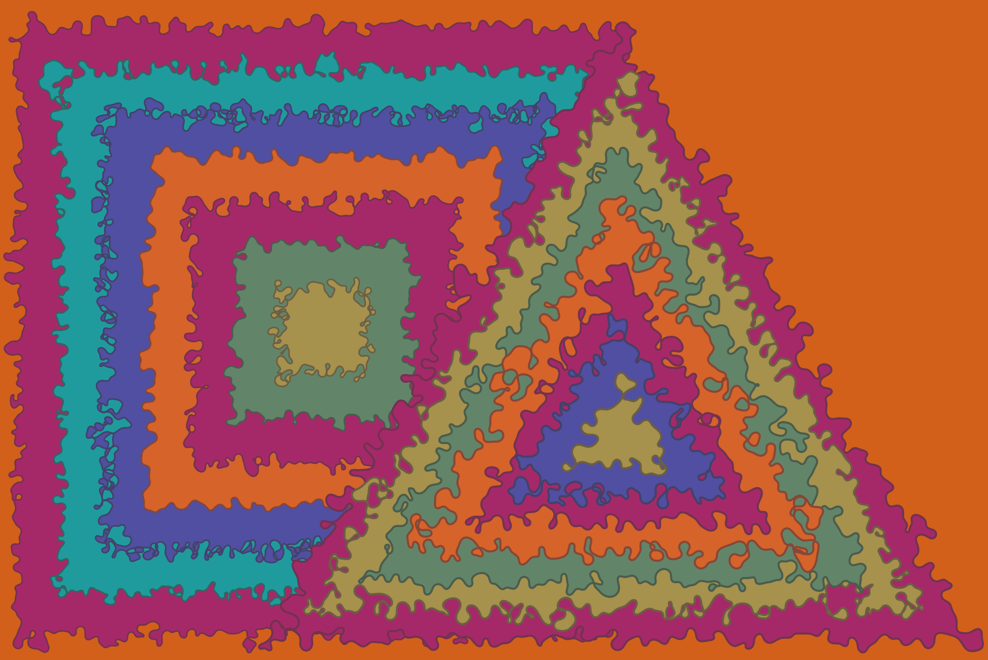
Wiskunde A / PGA

4 VWO

Afgeleide functies

ConTeXt College



Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je werkt dan onder begeleiding van je docent in kleine groepjes aan wiskundige problemen en samen bouw je de theorie op en maak je er een overzicht van.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee je kunt nagaan of je de stof beheerst. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding vind je terug in de marge.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die je alleen hoeft te maken als je er genoeg tijd voor hebt
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die je alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk voor je was

1

Afgeleide functies

1.1 Het begrip afgeleide

Inleiding

In de zeventiende eeuw vond Stevin de zeilwagen uit. Je kunt er snelheidsveranderingen mee bestuderen. Bij **Veranderingen** heb je leren werken met differentiequotiënten en differentiaalquotiënten. Daarmee geef je de veranderingssnelheid van de functiewaarden, de helling van een grafiek, weer. Je maakt nu kennis met de afgeleide functie van een functie f, het differentiaalquotiënt voor willekeurige x. Die afgeleide heeft als grafiek de hellingsgrafiek van de functie, waaruit je eigenschappen van f kunt afleiden.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip afgeleide functie;
- de hellingswaarden van een grafiek in een punt berekenen;
- de hellingsfunctie of afgeleide functie van een gegeven functie afleiden.

Voorkennis

- werken met differentiequotiënten van een functie op een interval;
- werken met differentiaalquotiënten van een functie bij een bepaalde invoerwaarde.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het bedenken van de formule van de afgeleide (de hellingsfunctie) van een gegeven functie, de meeste gebruikte termen zou je al moeten kennen. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - welke formuleringen en notaties er voorbij komen.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ Opgave 1.1

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 4x$.

a Bereken het hellingsgetal van de grafiek van f voor $x = 1$ met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[1,1+h]$. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

b Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van f.

c Bereken met behulp van $f'(x)$ nogmaals de hellingswaarde voor $x = 1$.
Ga na dat je dezelfde uitkomst krijgt als bij a.

d Voor welke waarde van x heeft de grafiek van f' een nulpunt?
Welke betekenis heeft dit punt voor de grafiek van f?

e Welke nulpunten heeft f?
Bereken de helling van de grafiek van f in haar nulpunten.

f De grafiek van f heeft precies één punt waarin de helling 2 is. Bereken de coördinaten van dit punt.

★ Opgave 1.2

Een constante functie heeft als voorschrift $f(x) = c$.

Toon aan dat de afgeleide van een constante functie altijd de waarde 0 heeft.

★ Opgave 1.3

Een autofabrikant maakt als enige een kleine stadsauto. Voor de totale opbrengst van de verkoop van die auto's geldt: $TO = 900q - 60q^2$ waarin TO wordt uitgedrukt in duizenden euro en q de geplande productieomvang in honderdtallen per jaar voorstelt. Er wordt van uitgegaan dat alle geproduceerde auto's ook worden verkocht.

a Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van deze opbrengstfunctie.

b Welke betekenis heeft $TO'(q)$ voor de opbrengstfunctie?

c Bereken $TO'(4)$.

★ Opgave 1.4

Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}1x^2 + 6x$ op het interval $[0,80]$.

a Stel een formule op voor de afgeleide f'.

b Stel een formule op voor de raaklijn aan de grafiek van f in het rechter nulpunt.

Toepassen

★ ★ Opgave 1.5: Vrije val

Voor een lichaam in vrije val (bijvoorbeeld een parachutespringer voordat hij zijn valscherm opent) geldt bij benadering $s(t) = 4{,}9t^2$, waarin s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconden is.

a Bereken de gemiddelde snelheid gedurende de eerste tien seconden vrije val.

b De snelheid na tien seconden vrije val is groter dan de gemiddelde snelheid over de eerste tien seconden. Laat dit door middel van een berekening zien.

c Stel een formule op voor de snelheid v als functie van t door het interval $[t,t+h]$ te gebruiken.

d Na hoeveel seconden vrije val beweegt het lichaam met een snelheid van 120 km/h?

★ ★ ★

Opgave 1.6: Afbraak van giftige stof in water

De hoeveelheid van een bepaalde giftige stof in het water van een meertje wordt minder: de stof breekt op natuurlijke wijze af. Voor die hoeveelheid geldt $H(t) = 20 \cdot 0{,}8^t$ waarin H de hoeveelheid in milligram per liter is en t de tijd in dagen, die is verstreken sinds de stof in het water terechtkwam.

a Hoeveel gram per liter is er gemiddeld in de eerste vier dagen verdwenen?

b De afbreeksnelheid van deze giftige stof is op $t = 0$ hoger dan op $t = 4$. Bepaal beide afbreeksnelheden met de grafische rekenmachine en leg uit waarom ze verschillen.

c Je zou de afbreeksnelheid ook moeten kunnen berekenen met behulp van een differentiequotiënt. Daarbij doet zich echter een probleem voor. Welk probleem?

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het bepalen van een differentiaalquotiënt.

- **Veranderingen, differentiëren en de TI84**
- **Veranderingen, differentiëren en de TInspire**
- **Veranderingen, differentiëren en de Casio**
- **Veranderingen, differentiëren en de HPprime**
- **Veranderingen, differentiëren en de NumWorks**

Antwoorden

1.1 a Het hellingsgetal is 6.

b $f'(x) = 2x + 4$.

c $f'(1) = 6$

d $f'(-2) = 0$ en de grafiek heeft een minimum.

e $x = 0 \vee x = -4$; $f'(0) = 4$ en $f'(-4) = -4$.

f $(-1, -3)$

1.2 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c-c}{h} = 0$ voor elke $h \neq 0$.

1.3 a $TO'(q) = 900 - 120q$.

b $TO'(q)$ is de snelheid waarmee de opbrengst toeneemt (afneemt) bij toename van q.

c $TO'(4) = 420$

1.4 a $f'(x) = -0{,}2x + 6$

b $y = -6x + 360$

1.5 a 49 m/s.

b $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4{,}9(10+h)^2 - 4{,}9 \cdot 10^2}{h} = \frac{98h + 4{,}9h^2}{h} = 98 + 4{,}9h$ (mits $h \neq 0$).

Als h naar 0 nadert, krijg je de snelheid na 10 seconden.
Deze snelheid is 98 m/s en dat is groter dan de gemiddelde snelheid van 49 m/s.

c $s'(t) = v(t) = 9{,}8t$

d Na ongeveer 3,4 seconden.

1.6 a 2,952 mg/L per dag.

b GR: $H'(0) \approx -4{,}46$ en $H'(4) \approx -1{,}83$ mg/L per dag.
De afbreeksnelheid wordt steeds kleiner omdat de grafiek steeds minder sterk gaat dalen.

c De deling door h is niet uit te voeren.

1.2 Differentiëren

Inleiding

Je hebt gezien dat bij een functie vaak een afgeleide (functie) is op te stellen. Die afgeleide zegt iets over de veranderingen van de grafiek van de functie. En dus over de helling van die functie.
Het differentiëren is een handige techniek om afgeleiden te vinden.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van een functie bepalen met behulp van differentieerregels;
- de hellingwaarde bepalen met de afgeleide;
- bepalen waar de grafiek een bepaalde hellingwaarde heeft.

Voorkennis

- met behulp van een differentiequotiënt de afgeleide (of hellingsfunctie) van een functie bepalen;
- een hellingsfunctie gebruiken om de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek op te stellen.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het bedenken van de formule van de afgeleide (de hellingsfunctie) van een gegeven functie, met behulp van een techniek die 'differentiëren' heet. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - welke differentieerregels er voorbij komen.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 2.1**

Bepaal telkens de afgeleide van de gegeven functie. Bepaal ook het hellingsgetal van de grafiek voor $x = 1$ of $t = 1$ en controleer zo mogelijk je antwoord op de grafische rekenmachine.

a $f(x) = x^3 - 4x$

b $g(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 12x - 35$

c $s(t) = 60t - 4{,}9t^2$

d $H(t) = 2\left(t^2 - 4\right)$

e $V(x) = 5 - (x - 3)^2$

f $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

g $TW(q) = 0{,}5q^3 - 6q^2 - 25q + 112$

h $K(x) = \left(3x^2 - 2a\right)(ax - 1)$

★ **Opgave 2.2**

Bepaal van elk van de volgende functies de afgeleide. Bereken vervolgens de punten van de grafiek waar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn de waarde 0 heeft. Rond je antwoord indien nodig af op één decimaal. Controleer je antwoorden op de grafische rekenmachine.

a $f(x) = x^4 - 8x^2$

b $TW(q) = -q^3 + 3q^2 + 3q + 6$

c $v(t) = t(t - 1)^2$

d $TW(p) = 40p - 0{,}02p^2$

★ **Opgave 2.3**

y is een functie van x waarvoor geldt: $y = x^3 - 25{,}5x^2 + 180x + 120$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

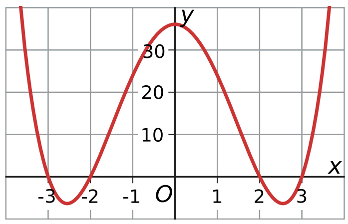
b Deze afgeleide heeft twee nulwaarden. Welke betekenis hebben die nulwaarden voor de functie?

c Bereken de nulwaarden van de afgeleide y'.

d Voor welke waarden van x is de functie dalend?
Wat betekent dit voor $y'(x)$?

★ **Opgave 2.4**

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 9\right)$.



Figuur 2.2

a Laat zien hoe je uit het functievoorschrift de nulpunten van de grafiek van f kunt afleiden.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken het snijpunt van de raaklijnen aan de grafiek van f voor $x = -2$ en voor $x = 2$.

d Los op: $f'(x) = 0$.

e Wat betekent het antwoord van d voor de grafiek van f?

Toepassen

★ ★ **Opgave 2.5: De baan van een kogel**

Een voorwerp wordt afgeschoten met een bepaalde beginsnelheid en onder een bepaalde hoek. Wanneer je de luchtweerstand verwaarloost, is zijn kogelbaan parabolisch. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de grafiek van de functie $h(x) = 1{,}5 - 0{,}01(x-10)^2$. Hierin is h de hoogte in meter van het afgeschoten voorwerp boven de grond en x de afstand in meter over de grond tot recht onder het afgeschoten voorwerp.

a Op welke hoogte werd het voorwerp afgeschoten?

b Bereken $h'(0)$.

c Wat betekent dit getal voor de kogelbaan?

d Bereken het punt van de kogelbaan waarin $h'(x) = 0$. Welke betekenis heeft dit punt?

e In het hoogste punt van de kogelbaan is de afgeleide nul. Toch beweegt de kogel daar met een zekere snelheid. Kun je dit verklaren?

★ ★ ★ **Opgave 2.6: Gemiddelde totale kosten**

Voor de productiekosten van een bepaald artikel geldt: $TK = 1200 + 0{,}2q^2$. Hierin is q het aantal geproduceerde eenheden van dat artikel en stelt TK de totale kosten in euro voor. De productiekosten per eenheid worden gegeven door $GTK = \frac{TK}{q}$. Je noemt dit wel de gemiddelde totale kosten.

a Druk de gemiddelde totale kosten uit in q.

b Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van GTK bekijken. Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van GTK? Welke economische betekenis heeft deze asymptoot?

c Je kunt bij deze functie (nog) geen afgeleide bepalen. Maar je kunt er wel een (benadering van de) hellingsgrafiek bij tekenen met de grafische rekenmachine. Teken die hellingsgrafiek en bepaal met behulp daarvan bij welke productie de gemiddelde totale kosten zo laag mogelijk zijn.

d Welke waarde benadert de helling van de grafiek van GTK als de productie heel erg groot is? En welke betekenis heeft dat voor de productiekosten per eenheid?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de machtsregel en de somregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Antwoorden

2.1 a $f'(x) = 3x^2 - 4$ en $f'(1) = -1$.

b $g'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 10x + 12$ en $g'(1) = 12$.

c $s'(t) = 60 - 9{,}8t$ en $s'(1) = 50{,}2$.

d $H'(t) = 4t$ en $H'(1) = 4$.

e $V' = -2x + 6$ en $V'(1) = 4$.

f $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ en $P'(1) = 3a + 2b + c$.

g $TW'(q) = 1{,}5q^2 - 12q - 25$ en $TW'(1) = -35{,}5$.

h $K'(x) = 9ax^2 - 6x - 2a^2$ en $K'(1) = 9a - 6 - 2a^2$.

2.2 a $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$ als $x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$.
De gevraagde punten zijn $(0{,}0)$, $(-2, -16)$ en $(2, -16)$.

b $TW'(q) = -3q^2 + 6q + 3 = 0$ als $q = 1 - \sqrt{2} \vee q = 1 + \sqrt{2}$.
De gevraagde punten zijn $(2{,}4; 16{,}7)$ en $(-0{,}4; 5{,}3)$.

c $v'(t) = 3t^2 - 4t + 1 = 0$ als $t = \frac{1}{3} \vee t = 1$.

De gevraagde punten zijn $\left(\frac{1}{3}; 0{,}1\right)$ en $(1{,}0)$.

d $TW'(p) = 40 - 0{,}04p = 0$ als $p = 1000$.
Het gevraagde punt is (1000,20000).

2.3 a $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 51x + 180$

b Als de afgeleide 0 is heeft de grafiek een horizontale raaklijn.

c $x = 5 \vee x = 12$.

d Dalend als $5 < x < 12$ en dan is $y'(x) < 0$.

2.4 a $-2 \vee x = 2 \vee x = -3 \vee x = 3$

b $f'(x) = 4x^3 - 13 \cdot 2x^1 + 0 = 4x^3 - 26x$

c De raaklijn voor $x = -2$ is $y = 20x + 40$. De raaklijn voor $x = 2$ is $y = -20x + 40$.
Het snijpunt is $(0{,}40)$.

d $x = 0 \vee x = -\sqrt{6{,}5} \vee x = \sqrt{6{,}5}$

e Max. $f(0) = 36$, min. $f\left(-\sqrt{6{,}5}\right) = -6{,}25$ en min. $f\left(\sqrt{6{,}5}\right) = -6{,}25$.

2.5 a Op een hoogte van 0,5 meter.

b $h'(0) = 0{,}2$

c Het is de snelheid waarmee h verandert voor $x = 0$.

d In $(10; 1{,}5)$, de top van de kogelbaan.

e De snelheid waarmee de hoogte van de baan verandert, is op dat punt 0.
Maar er is ook een voorwaartse snelheidscomponent.

2.6 a $GTK(q) = \frac{1200 + 0{,}2q^2}{q} = \frac{1200}{q} + 0{,}2q$

b Verticale asymptoot $q = 0$, dan zijn er geen gemiddelde kosten.

c Bij een productie van 77 zijn de gemiddelde kosten zo laag mogelijk.

d $GTK \to 0{,}2$ als $q \to \infty$ (∞ is het symbool voor ‘oneindig groot’).
De productiekosten per eenheid veranderen op den duur met de (vaste) kosten van 0,2 euro per artikel.

1.3 Extremen berekenen

Inleiding

Als je een functievoorschrift hebt, kun je met de grafische rekenmachine een bijpassende grafiek tekenen. Je kunt dan de extreme waarden door de machine laten berekenen. Nadeel daarvan is dat je vaak niet zeker weet of je alle extremen in beeld hebt. Verder kan je rekenmachine ze alleen maar benaderen. Met behulp van de afgeleide van de functie kun je extremen echt berekenen: het zijn de punten van de grafiek waarin de afgeleide overgaat van positief in negatief of omgekeerd.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- extremen berekenen met behulp van de afgeleide van een functie;
- het berekenen van extremen toepassen in praktijksituaties.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van de grafische rekenmachine en met behulp van hellingsgrafieken.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het gebruiken van de techniek van differentiëren om extreme waarden van functies te berekenen en dit toe te passen in de praktijk. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - welke termen en notaties er voorbij komen.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

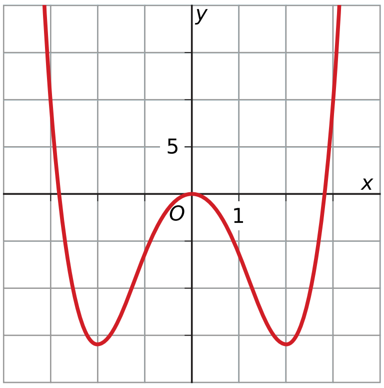
Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

Opgave 3.1



Figuur 3.2

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 8x^2$.

Bereken met behulp van differentiëren alle extremen van deze functie.

Opgave 3.2

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4000 - 10x^2$ en $g(x) = (x - 10)\left(x^2 - 400\right)$.

a Om de grafieken van beide functies op de grafische rekenmachine in beeld te krijgen moet je de instellingen aanpassen. Bereken algebraïsch eerst de nulpunten van beide functies.

b Nu weet je welke waarden voor x je het beste kunt instellen. Bereken de extremen van beide functies. Geef je antwoorden zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

c Je kunt nu de grafieken mooi in beeld krijgen. Los op: $f(x) \geq g(x)$

Opgave 3.3

Een fabrikant verkoopt zelfrijzend bakmeel voor € 2,25 per kilogram. Voor de kosten TK voor productie en opslag geldt:

q (honderd kg)	1	2	3	4	5	6
TK (euro)	75	100	125	200	400	800

Tabel 3.1

a Hoeveel stijgen de kosten gemiddeld per kilogram als de productie toeneemt van 400 naar 500 kg?

b Voor de kosten heeft de fabrikant de formule $TK = 10q^3 - 60q^2 + 130q$ laten opstellen. Ga na dat deze formule past bij de gegevens in de tabel.

c Stel een formule op voor de winst TW als functie van q.

d Bepaal met behulp van differentiëren de maximale winst.

Opgave 3.4

De winst W van een bedrijf wordt gegeven door de formule: $W = -0{,}25q^3 + 9q^2 - 33q - 50$.
Hierbij is q de productie in duizenden en W de winst in honderden euro.

Bepaal met behulp van differentiëren bij welke productie de winst maximaal is.
Geef ook de maximale winst.

★ ★

Opgave 3.5

In een kaasmakerij ligt een voorraad van 600 kg kaas. De bedrijfsleider wil die voor een zo hoog mogelijke totale opbrengst verkopen. Er zijn twee mogelijkheden:

- de kaas ineens verkopen voor € 10,00 per kilo, de partij brengt dan € 6000,00 op;
- de kaas een tijdje laten indrogen; deze verliest dan aan gewicht, maar wint aan smaak, waardoor de prijs met € 0,25 per procent gewichtsvermindering toeneemt.

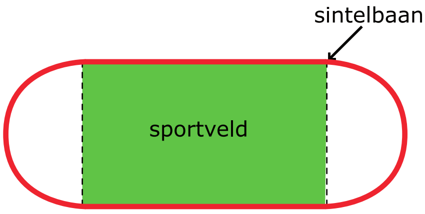
a Bereken de opbrengst van de partij kaas bij 5 procent indrogen.

b Noem het indrogingspercentage p. Stel een formule op voor de totale opbrengst van de partij kaas als functie van p.

c Bereken met behulp van differentiëren het gunstigste indrogingspercentage.

Toepassen

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. Het sportveld is net zo lang als de rechte stukken. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.



Figuur 3.3

Je kunt een formule opstellen voor de oppervlakte van dit sportveld als functie van de lengte of de breedte ervan of als functie van de straal van de cirkel. Als je dat doet kun je **differentiëren toepassen om extremen te bepalen**.

★

Opgave 3.6

Bekijk het probleem van de afmetingen bepalen van het zo groot mogelijke rechthoekige sportveld binnen een atletiekbaan.

a Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.

Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.

b Noem de oppervlakte van het sportveld A, de lengte ervan l en de straal van de cirkel r. Welke formules kun je nu opstellen?

c Stel een formule op voor $A(r)$.

d Voor welke waarde van r is $A(r)$ maximaal? Maak gebruik van differentiëren.
Geef ook de afmetingen van het sportveld. Rond je antwoorden af op één decimaal.

★ ★

Opgave 3.7

Een fabrikant verpakt zijn hagelslag al jaren in doosjes met een vierkante bodem van 8 bij 8 cm. Ze hebben de vorm van een balk met een hoogte van 21 cm.
De fabrikant vraag zich af of hij de inhoud van het doosje kan vergroten door de afmetingen anders te kiezen, zonder meer karton te gebruiken. Het gaat erom de inhoud zo groot mogelijk te maken bij een gelijkblijvende oppervlakte. Het grondvlak blijft vierkant. Welke afmetingen moet de fabrikant kiezen?

a Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.

Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.

b Noem de zijde (in cm) van het grondvlak x en de hoogte h.

Welke twee formules kun je opstellen?

c Hoeveel karton heeft de fabrikant nodig voor zijn huidige doosjes?

Verwerk het antwoord in de oppervlakteformule en isoleer h uit de verkregen vergelijking.

d Stel een formule op voor de inhoud van de doosjes als functie van de zijde x.

e Voor welke waarde van x is de inhoud maximaal? Maak gebruik van differentiëren. Rond je antwoord op drie decimalen.

f Bepaal de afmetingen van de doosjes met een maximale inhoud in millimeter nauwkeurig.

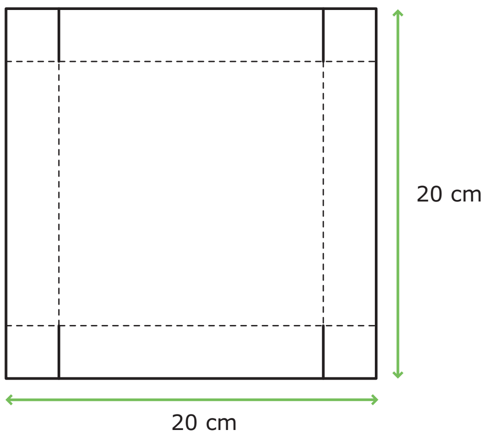
★ ★ Opgave 3.8

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

a Stel dat je de zijde van het ingeknipte vierkantje x noemt. Welke functie $I(x)$ kun je dan opstellen voor de inhoud van dit bakje?

b Welke waarden kan x allemaal aannemen?

c Bereken de maximale inhoud van het bakje.



Figuur 3.4

Antwoorden

3.1 Min. $f(-2) = -16$, max. $f(0) = 0$ en min. $f(2) = -16$.

3.2 a $f(x) = 0$ geeft $x = -20$ en $x = 20$.

$g(x) = 0$ geeft $x = -20$, $x = 10$ en $x = 20$.

b Max. $f(0) = 4000$; max. $g(-8{,}69) \approx 6064{,}60$ en min. $g(15{,}35) \approx -879{,}42$.

c $x \leq -20 \vee 0 \leq x \leq 20$

3.3 a Met € 2,00 per kg.

b Maak een tabel van $TK(q)$ met de grafische rekenmachine en vergelijk de waarden met de gegeven tabel. Niet elke waarde zal honderd procent hetzelfde zijn.

c $TW = -10q^3 + 60q^2 + 95q$

d De maximale winst is € 733,71.

3.4 Bij een productie van 22000 is er een maximale winst van € 91800.

3.5 a 6412,50 euro.

b $TO(p) = 6000 + 90p - 1{,}5p^2$

c 30% indroging is het gunstigst.

3.6 a Zie de antwoorden in het vervolg van deze opgave.

b Lengte sintelbaan: $2l + 2\pi r = 400$; oppervlakte sportveld: $A = l \cdot 2r$.

c $A = 400r - 2\pi r^2$.

d $r = \frac{100}{\pi} \approx 31{,}8$ m geeft $l = 100$ m en $b = \frac{200}{\pi} \approx 63{,}6$ m.

3.7 a Zie de antwoorden in het vervolg van deze opgave.

b Inhoud $I = x^2 \cdot h$ en oppervlakte $A = 2x^2 + 4xh$.

c $h = \frac{800-2x^2}{4x}$.

d $I = 200x - \frac{1}{2}x^3$.

e $\approx 11{,}547$ cm.

f Ongeveer 11,5 bij 11,5 bij 11,5 cm.

3.8 a $I(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$.

b $0 < x < 10$ cm.

c Max. $I\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{16000}{27} \approx 593$ cm^3.

1.4 Buigpunten

Inleiding

Zodra de helling van de grafiek overgaat van toenemende stijging (of daling) naar afnemende stijging (of daling), of omgekeerd, spreek je van een buigpunt. In zo'n buigpunt heeft de helling een (lokaal) maximum of minimum. Je vindt buigpunten dus door naar de extremen van de afgeleide te zoeken.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de extremen van een afgeleide bepalen met behulp van de tweede afgeleide;
- het berekenen van buigpunten toepassen in praktijksituaties.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van differentiëren.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het gebruiken van de techniek van differentiëren om buigpunten van functies te berekenen en dit toe te passen in de praktijk. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - welke termen en notaties er voorbij komen.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 4.1**

Bepaal met behulp van differentiëren van de volgende functies alle buigpunten met de hand. Rond je antwoorden niet af.

a $f(x) = 0{,}5x^3 + 6x^2 - 90$

b $f(x) = 4x^2 - 0{,}5x^4$

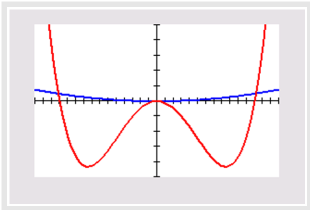
★ **Opgave 4.2**

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 0{,}25x^2(x^2 - 144)$.

a Bekijk hoe de grafieken van beide functies er op de grafische rekenmachine uit kunnen zien. Hoe moet je het venster dan instellen?

b Los op: $f(x) > g(x)$.

c Bereken de buigpunten van de grafiek van g. Rond je antwoorden niet af.



Figuur 4.2

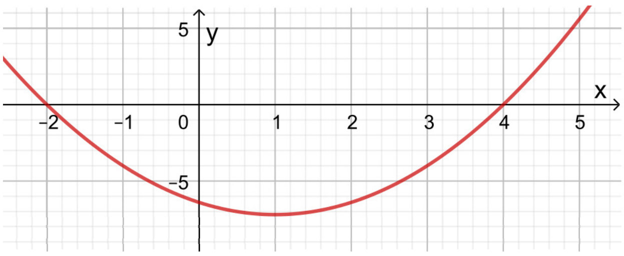
★ **Opgave 4.3**

Een ondernemer maakt een bepaald product waarop hij het monopolie heeft. Voor zijn productiekosten in honderden euro geldt de formule $TK = 0{,}5q^3 - 4q^2 + 11q + 4$ waarin q de geproduceerde hoeveelheid in honderden kilo's is.

a De snelheid waarmee de kosten stijgen is eerst afnemend, later toenemend. Er is een punt in de grafiek waarbij die snelheid van afnemend naar toenemend omslaat.
Bij welke productie zit het omslagpunt? Rond je antwoord af op gehele kilogrammen nauwkeurig.

b De hoeveelheid producten die hij aanbiedt aan zijn afnemers heeft invloed op de prijs. Er geldt: $p = 11 - q$ waarin p de prijs in honderden euro is. Ga ervan uit dat deze ondernemer zijn totale productie ook verkoopt. Bij welke productie is zijn winst maximaal? Licht het antwoord toe met behulp van differentiëren.

★ ★ **Opgave 4.4**



Figuur 4.3

Bekijk de grafiek van de afgeleide van een functie, gemaakt in GeoGebra.

a Bij welke waarden van x heeft deze functie extremen?

b Bij welke waarden van x heeft de grafiek van deze functie een buigpunt?

c Heeft de raaklijn in het buigpunt een positieve of een negatieve richtingscoëfficiënt?

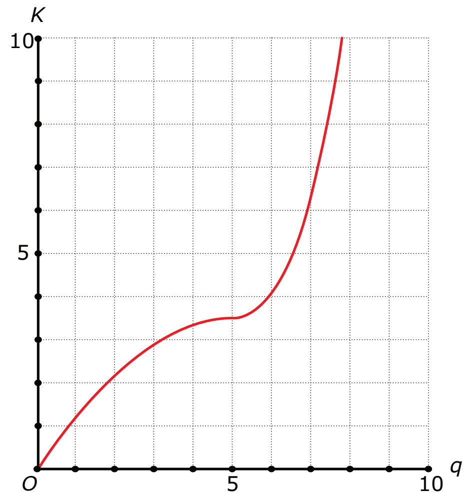
Toepassen

★★ Opgave 4.5: Kurkentrekkers

In een bedrijf worden kurkentrekkers gefabriceerd. De totale kosten bij de productie kun je aflezen in de grafiek. Een wiskundige van het bedrijf heeft hierbij de volgende formules bedacht:

- $K = -0{,}1q^2 + 1{,}2q$ als $0 \leq q < 5$
- $K = 0{,}1q^3 - 1{,}1q^2 + 3{,}7q$ als $q \geq 5$

Hierin is q de productie (in duizendtallen) en K de totale kosten (in duizenden euro). De toename van de totale kosten bij een toename van de productie met één kurkentrekker noem je de marginale kosten. Deze marginale kosten mogen benaderd worden door $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}q}$.



Figuur 4.4

a Toon door berekening aan dat de marginale kosten bij elke productie positief zijn. Hoe is dit ook uit de grafiek af te leiden?

b Toon door berekening aan dat de marginale kosten het kleinst zijn voor $q = 5$.
Hoe is dit ook uit de grafiek af te leiden? Is hier sprake van een buigpunt?

c Bereken de gemiddelde totale kosten per kurkentrekker bij een productie van 7000 stuks. Hoe kun je uit de grafiek afleiden bij welke andere productie de gemiddelde kosten per kurkentrekker even groot zijn als bij een productie van 7000 stuks? Leid deze andere productie uit de grafiek af en controleer het antwoord met de formules.

(bron: examen wiskunde A vwo 1989)

Antwoorden

4.1 a $(-4, -26)$

b $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \frac{40}{9}\right)$ en $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, \frac{40}{9}\right)$.

4.2 a Bijvoorbeeld: $-15 \leq x \leq 15$ en $-1500 \leq y \leq 1500$.

b $-\sqrt{148} < x < 0 \vee 0 < x < \sqrt{148}$.

c $\left(-\sqrt{24}, -720\right)$ en $\left(\sqrt{24}, -720\right)$.

4.3 a Bij ongeveer 267 kg.

b Er is maximale winst bij een verkoop van 400 kg.

4.4 a Bij $x = -2$ en $x = 4$.

b Als $x = 1$.

c De richtingscoëfficiënt is negatief, want $f'(1) < 0$.

4.5 a Als $0 \leq q < 5$ is $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}q} > 0$ en als $q \geq 5$ is $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}q} > 0$.

b Als $0 \leq q < 5$ is de laagste waarde $K'(5) = 0{,}2$ en als $q \geq 5$ is de laagste waarde $K'(5) = 0{,}2$.

c Bij 7000 stuks bedragen de gemiddelde kosten $\frac{K(7)}{7} = 0{,}9$ euro.

Bij 3000 stuks bedragen de gemiddelde kosten ook $\frac{K(3)}{3} = 0{,}9$ euro.

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- definitie afgeleide — limiet — vergelijking raaklijn
- differentieerregels — machtsregel voor gehele positieve n — somregel — constante-regel
- extremen — tekenschema afgeleide
- buigpunt — tweede afgeleide — buigraaklijn

Activiteitenlijst

- afgeleiden bepalen — vergelijking van een raaklijn opstellen
- afgeleiden bepalen m.b.v. differentieerregels
- extremen berekenen m.b.v. de afgeleide
- buigpunten berekenen m.b.v. de tweede afgeleide

Achtergronden

De differentiaalrekening is min of meer tegelijkertijd en zonder dat ze het van elkaar wisten door twee van de allergrootste geleerden van hun tijd uitgevonden:

- In Engeland bedacht **sir Isaac Newton (1642—1727)** zo rond 1665 zijn 'fluxierekening' toen hij zich in die periode bezig hield met beweging, snelheid en versnelling. Hij publiceerde zijn resultaten echter niet.
- In Duitsland schreef **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716)** in 1675 het manuscript waarin hij zijn theorie rond het berekenen van hellingen en van oppervlaktes onder krommen uiteen zette.

Lees ook op deze site: **Grafieken en verandering, differentiaalrekening**.

Testen

★ **Opgave 5.1**

Differentieer de functies.

a $f(x) = 4x^5 - 12x^2 + 60x + 100$

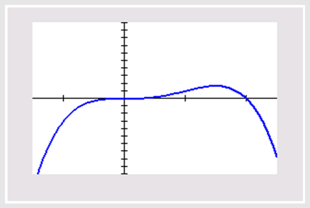
b $E(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}$

c $f(x) = (x+3)^2$

d $GTK(q) = \frac{0{,}5q^3+20q^2+60q}{q}$

★ **Opgave 5.2**

Bekijk de grafiek van $f(x) = 2x^3 - x^4$ op het interval [-1,5; 2,5].


Figuur 5.1

a De grafiek heeft twee punten waarin de raaklijn horizontaal loopt. Bereken met behulp van differentiëren de x-coördinaten van die twee punten en geef aan of het een maximum, een minimum of een buigpunt is.

b De grafiek van f heeft behalve (0,0) nog een buigpunt. Bereken de coördinaten van dat punt.

c Stel de raaklijn op aan de grafiek in het bij b bedoelde buigpunt.

★ **Opgave 5.3**

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0{,}5x^3 - 6x$.

a Bereken de extremen van deze functie met behulp van differentiëren.

b Laat zien dat (0,0) het buigpunt is van de grafiek van f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het buigpunt.

★ ★ **Opgave 5.4**

Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoersmiddel in grotere bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt zijn afzet q, in duizendtallen, uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0{,}1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1{,}5q^3 - 22{,}5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

a Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?

b Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q.

c Stel een formule op voor de winst TW als functie van de afzet q.

d Bepaal met behulp van differentiëren de prijs van één autoped bij maximale winst.

e Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q.

Bepaal met behulp van differentiëren bij welke afzet GTK minimaal is.

★ ★ **Opgave 5.5**

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \left(x^2 - 4\right)(2x + 1)$ en $g(x) = x^2 - 4$.

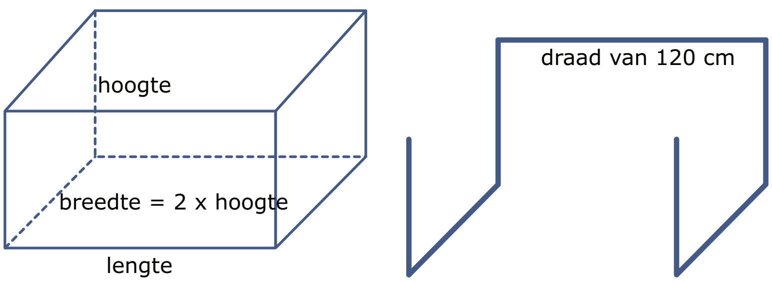
a Bepaal algebraïsch de nulpunten en de toppen van de grafiek van f.

b Los op: $f(x) > g(x)$.

Toepassen

★ ★ **Opgave 5.6: Maximaal bakje**

Een bedrijf maakt plastic bakjes: bodem en zijvlakken van deze bakjes zijn rechthoeken; de breedte van de bakjes is tweemaal zo groot als de hoogte. Om de bakjes te verstevigen wordt een gebogen metaaldraad met een lengte van 120 cm aangebracht zoals in de tekeningen is aangegeven.



Figuur 5.2

a Bereken de maximale inhoud die deze bakjes kunnen krijgen.

b Als het goed is blijkt bij a dat de lengte van het bakje viermaal zo groot is als de hoogte. Toon aan dat bij elke draadlengte een maximale inhoud ontstaat als de breedte tweemaal de hoogte en de lengte viermaal de hoogte is.

★★ Opgave 5.7: ChemoTech

Onder de **marginale kosten** (de meerkosten) wordt in de economie de extra kosten verstaan die de verkoop van één extra eenheid oplevert. Voor marginale opbrengst en - winst bestaan vergelijkbare definities. Deze marginale kosten zijn bij grote hoeveelheden goed te benaderen door middel van een afgeleide.

ChemoTech is een bedrijf dat o.a. een bepaald chemisch onkruidbestrijdingsmiddel produceert. Afhankelijk van het aantal werknemers dat het bedrijf voor de productie daarvan inzet wordt er meer of minder kilo van dit product per maand gemaakt. Bij de productie van een bepaald chemisch onkruidbestrijdingsmiddel heeft de bedrijfsleiding onderzocht hoeveel kilo bestrijdingsmiddel worden geproduceerd per maand afhankelijk van het aantal werknemers. Dit **Excelbestand bij product CT-216X3** laat dat zien.

Figuur 5.3

Een arbeidsplaats kost gemiddeld € 1500 per maand en de kosten voor de apparatuur en de gebouwen bedragen ongeveer € 30000,00 per maand. Je kunt op basis van deze gegevens een tabel opstellen waarin de totale kosten TK per maand (in duizenden euro) afhangen van de hoeveelheid bestrijdingsmiddel q die men maandelijks kan produceren.

Bij een productie van 3000 kg/mnd zijn de kosten € 63750.
Bij een productie van 3001 kg/mnd zijn de kosten ongeveer € 63756,75.
De marginale kosten bij $q = 3$ zijn derhalve $MK(3) \approx 6{,}75$ euro.

Ga zelf na, dat $TK'(3) = 6{,}75$ (precies).
Je ziet dat de marginale kosten bij $q = 3$ goed kunnen worden benaderd met behulp van de afgeleide van TK. Dit blijkt telkens op te gaan...

a Maak die tabel en ga na dat deze functie er bij past: $TK = 0{,}25q^3 - 3q^2 + 18q + 30$.

b Laat zien, dat de marginale kosten bij een productie van 4500 kg/mnd goed kunnen worden benaderd door de marginale kosten op $q = 4$. Welke economische betekenis hebben deze marginale kosten?

c Als je de grafiek van de totale kostenfunctie bekijkt, zie je dat ze eerst afnemend stijgen. Bereken tot welke productieomvang (in kilogram) dat het geval is.

d Het bedrijf gaat dit onkruidbestrijdingsmiddel op de markt brengen voor een prijs die door de harde concurrentie ongeveer vast ligt op € 18,00 per kilogram. Stel een formule op voor de totale winst TW in duizenden euro per maand.

e Bij welke geproduceerde hoeveelheid maakt het bedrijf winst?

f Bereken de maximale winst als het bedrijf de geproduceerde hoeveelheid bestrijdingsmiddel ook inderdaad verkoopt.

Stel je voor dat dit bedrijf geen concurrentie zou hebben bij de verkoop van dit onkruidbestrijdingsmiddel. In dat geval is de vraagprijs afhankelijk van de hoeveelheid die men op de markt brengt: een lage prijs betekent een flinke verkoop, een hoge prijs een minder goede verkoop. Neem aan dat geldt: $p = 58{,}5 - 3q$.

g Hoe hoog is nu de maximaal bereikbare winst? Is die hoger of lager dan in de voorgaande situatie van een vaste prijs?

Examen

★★ Opgave 5.8: Toltunnel

Het aantal personenauto's (A) dat per dag van een nieuw aan te leggen toltunnel gebruik zal maken, is volgens een verkeersdeskundige te berekenen met de formule
$A = 400T^2 - 9150T + 46800$
Hierbij is T het toltarief in euro. Toltarieven hoger dan 7 euro blijven buiten beschouwing. Met het oog op een snelle doorstroming zal de betaling op elektronische wijze geschieden. Hierdoor is het mogelijk om een toltarief van bijvoorbeeld € 2,67 in rekening te brengen omdat dit niet op praktische bezwaren stuit.

a Bereken de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's bij een toltarief van € 2,00.

b Onderzoek bij welk toltarief de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's maximaal is. Geef je antwoord in centen nauwkeurig.

c Bereken met hoeveel procent het aantal personenauto's afneemt als bij een tarief van € 2,40 een tariefsverhoging van 5% wordt toegepast.

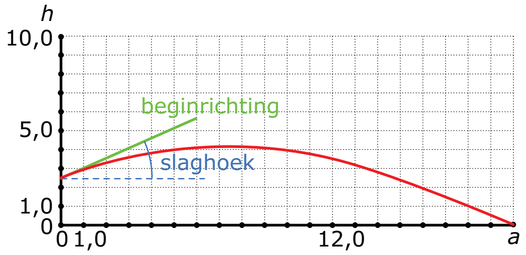
Bij een zeker toltarief leidt een tariefsverhoging van 6% er toe, dat het aantal personenauto's dat dagelijks de tunnel gebruikt met 2,8% afneemt.

d Bereken in gehelen nauwkeurig met hoeveel procent de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's door deze tariefsverhoging zal toenemen.

(bron: examen wiskunde A vwo 1992, aangepast)

★ ★ Opgave 5.9: Tennis

Bij sporten als volleybal en tennis is de service erg belangrijk, dat wil zeggen de manier waarop de bal in het spel gebracht wordt. We bekijken hier de service bij tennis. De speler staat bij het serveren 12 meter van het net. Het net is 1 meter hoog. We nemen aan dat de speler de bal raakt op een hoogte van 2,5 meter boven de grond en ter vereenvoudiging gaan we er van uit dat de speler de bal precies in de lengterichting van het veld slaat. In de eerste figuur zie je een mogelijke baan van de bal.



Figuur 5.4

De hoogte van de onderkant van de bal in meter ten opzichte van de grond noemen we h. De horizontale afstand in meter noemen we a. Het verband tussen h en a hangt af van de snelheid waarmee de bal geslagen wordt en van de beginrichting. Deze beginrichting wordt bepaald door de slaghoek. Dit is de hoek waaronder de bal geslagen wordt. Zie eerste figuur.

a Neem aan dat de bal onder een hoek van 15° geslagen wordt met een snelheid van v m/s. Bij deze hoek geldt bij benadering het volgende verband tussen a en h:

$$h = \frac{-5{,}36}{v^2}a^2 + 0{,}27a + 2{,}50$$

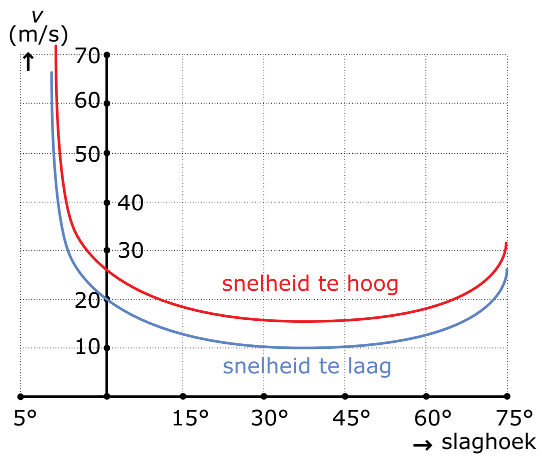
Een speler slaat de bal met een snelheid van 17 m/s. Bereken met behulp van differentiëren de grootste hoogte boven de grond die deze bal bereikt.

In deze vereenvoudigde situatie spreken we van een geldige service als:

- de speler die serveert 12 meter van het net staat;
- de bal precies in de lengterichting van het veld geslagen wordt;
- de bal over het net gaat zonder dit te raken;
- de bal neerkomt op een afstand van ten hoogste 7 meter voorbij het net.

In een artikel over dit onderwerp stond deze grafiek. Daarin is weergegeven bij welke combinaties van slaghoek en snelheid een geldige service verkregen wordt. Een speler die de bal slaat onder een hoek van 30° moet volgens deze grafiek de bal slaan met een snelheid van ongeveer 11 tot 13 m/s. Slaat hij te zacht dan komt de bal niet over het net. Slaat hij te hard dan komt de bal te ver voorbij het net op de grond. Een profspeler slaat bij een geldige service de bal met een snelheid van 150 km/h.

b Bepaal met behulp van de grafiek de beginrichting van een mogelijke baan van deze bal.



Figuur 5.5

Neem nu aan dat de bal onder een hoek van 10° geslagen wordt. Bij deze hoek geldt bij benadering de volgende formule voor het verband tussen a en h:

$$h = \frac{-5{,}16}{v^2}a^2 + 0{,}18a + 2{,}50$$

Voor een geldige service moet de bal over het net gaan zonder dit te raken. De snelheid is te laag als in bovenstaande formule bij afstand $a = 12$ de hoogte $h \leq 1$ is. Volgens de grafiek is een snelheid van 16 m/s of minder te laag voor een geldige service. Echter, met behulp van een berekening is na te gaan dat de figuur hier erg onnauwkeurig is getekend.

c Welke snelheden (in m/s) zijn volgens de formule te laag voor een geldige service? Geef je antwoord in ten minste één decimaal nauwkeurig.

Voor een geldige service moet de bal bovendien ten hoogste 7 meter voorbij het net de grond raken. Uit deze eis volgt ook een voorwaarde voor v.

d Welke getallen moet je in de bovenstaande formule invullen om deze voorwaarde te krijgen? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A vwo 2000, eerste tijdvak)

Antwoorden

5.1 a $f'(x) = 20x^4 - 24x + 60$

b $E'(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$

c $f'(x) = 2x + 6$.

d $GTK' = q - 20$.

5.2 a Maximum bij $x = 1{,}5$ en buigpunt bij $x = 0$.

b De coördinaten zijn $(1{,}1)$.

c $y = 2x - 1$

5.3 a Maximum is $f(-2) = 8$ en minimum is $f(2) = -8$.

b De grafiek van f' is een dalparabool met een minimum bij $x = 0$.

$f(0) = 0$, dus het buigpunt is $(0{,}0)$.

c $y = -6x$

5.4 a $0 \leq q \leq 12$ want p kan niet negatief zijn.

b $TO = pq = 120q - 10q^2$

c $TW = TO - TK = -1{,}5q^3 + 12{,}5q^2$

d De prijs is € 64,44.

e Bij een afzet van 7500 stuks.

5.5 a Max. $f\left(-1\frac{1}{3}\right) = 3\frac{19}{27}$ en min. $f(1) = -9$.

b $-2 < x < 0 \vee x > 2$

5.6 a 8000 cm^3.

b Gebruik nu met $l + 8h = p$. Dan is $b = 2h$ en $l = 4h$.

5.7 a Zie Excel-bestand. Maak een tabel voor TK op je grafische rekenmachine.

b $MK(4{,}5) \approx TK'(4{,}5)$ en $MK(4{,}5) = TK(4{,}501) - TK(4{,}5)$ zijn even groot.

c Tot 6000 kg/mnd.

d $TW = -0{,}25q^3 + 3q^2 - 30$

e Bij een verkoop vanaf 3833 t/m 11010 kg/mnd.

f De maximale winst bedraagt € 34000.

g Er is nu maximale winst bij een productie van 7348 kg/mnd van ongeveer € 168409.

5.8 a $A(2) = 30100$, dus de totale dagopbrengst is € 60200.

b $TO = A \cdot T = 400T^3 - 9150T^2 + 46800T$ moet maximaal zijn.
$TO'(T) = 1200T^2 - 18300T + 46800 = 0$ oplossen. De maximale opbrengst zit bij $T = 3{,}25$.

c $A(2{,}4) = 27144$ en $A(2{,}52) \approx 26282$. Er is dus een afname van ongeveer 3,18%.

d $T_{\text{nieuw}} = 1{,}06 \cdot T$ en $A_{\text{nieuw}} = 0{,}972 \cdot A$.
De nieuwe dagopbrengst wordt dan $T_{\text{nieuw}} \cdot A_{\text{nieuw}} = 1{,}06 \cdot 0{,}972 \cdot A \cdot T \approx 1{,}03 \cdot A \cdot T$.
De nieuwe dagopbrengst is dus ongeveer 3% meer.

5.9 a Als $v = 17$ dan $h = -0{,}0185a^2 + 0{,}27a + 2{,}50$.
$h'(a) = -0{,}037a + 0{,}27 = 0$ geeft $a \approx 7{,}3$.
Daarbij hoort een maximale hoogte van $h \approx 3{,}5$ m.

b 150 km/u komt overeen met 41,67 m/s.
Volgens de grafiek hoort daar een hoek bij van ongeveer $-5°$.

c Bij de netsituatie: als $a = 12$ dan $h = 1$.

Dit geeft: $\frac{-5{,}16}{v^2} \cdot 12^2 + 0{,}18 \cdot 12 + 2{,}50 = 1$ en dus $\frac{743{,}04}{v^2} = 3{,}66$ en $v \approx 14{,}25$. Conclusie: $v \leq 14{,}2$ (m/s) of $v < 14{,}3$ (m/s).

d 7 meter voorbij het net betekent $a = 19$ en de grond raken betekent $h = 0$.

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★ ★	★ ★ ★
1	**Het begrip afgeleide**	★	★ ★	★ ★ ★
	Het begrip afgeleide functie.	1.1 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ **T** 5.1 ☐	1.5 ☐	1.6 ☐
	De hellingswaarden van een grafiek in een punt berekenen.	1.1 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐	1.5 ☐	1.6 ☐
	De hellingsfunctie of afgeleide functie van een gegeven functie afleiden.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐	1.5 ☐	1.6 ☐
2	**Differentiëren**	★	★ ★	★ ★ ★
	De afgeleide van een functie bepalen met behulp van differentieerregels.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.4 ☐ **T** 5.1 ☐ **T** 5.2 ☐ **T** 5.3 ☐	2.5 ☐ **T** 5.4 ☐ **T** 5.5 ☐ **T** 5.6 ☐ **T** 5.7 ☐ **T** 5.8 ☐ **T** 5.9 ☐	2.6 ☐
	De hellingswaarde bepalen met de afgeleide.	2.1 ☐ **T** 5.2 ☐ **T** 5.3 ☐	2.5 ☐ **T** 5.4 ☐ **T** 5.5 ☐ **T** 5.6 ☐ **T** 5.7 ☐	2.6 ☐
	Bepalen waar de grafiek een bepaalde hellingswaarde heeft.	2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.4 ☐ **T** 5.2 ☐	2.5 ☐	
3	**Extremen berekenen**	★	★ ★	★ ★ ★
	Extremen berekenen met behulp van de afgeleide van een functie.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ **T** 5.2 ☐ **T** 5.3 ☐	3.5 ☐ 3.7 ☐ 3.8 ☐ **T** 5.4 ☐ **T** 5.5 ☐ **T** 5.6 ☐ **T** 5.7 ☐ **T** 5.8 ☐ **T** 5.9 ☐	
	Het berekenen van extremen toepassen in praktijksituaties.	3.3 ☐ 3.4 ☐	3.5 ☐ 3.7 ☐ 3.8 ☐ **T** 5.4 ☐ **T** 5.6 ☐ **T** 5.7 ☐ **T** 5.8 ☐ **T** 5.9 ☐	
4	**Buigpunten**	★	★ ★	★ ★ ★
	Buigpunten berekenen met behulp van de tweede afgeleide van een functie.	3.6 ☐ 4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ **T** 5.2 ☐ **T** 5.3 ☐	4.4 ☐ 4.5 ☐ **T** 5.7 ☐	
	Het berekenen van buigpunten toepassen in praktijksituaties.	3.6 ☐ 4.3 ☐	4.5 ☐ **T** 5.7 ☐	

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

www.math4all.nl