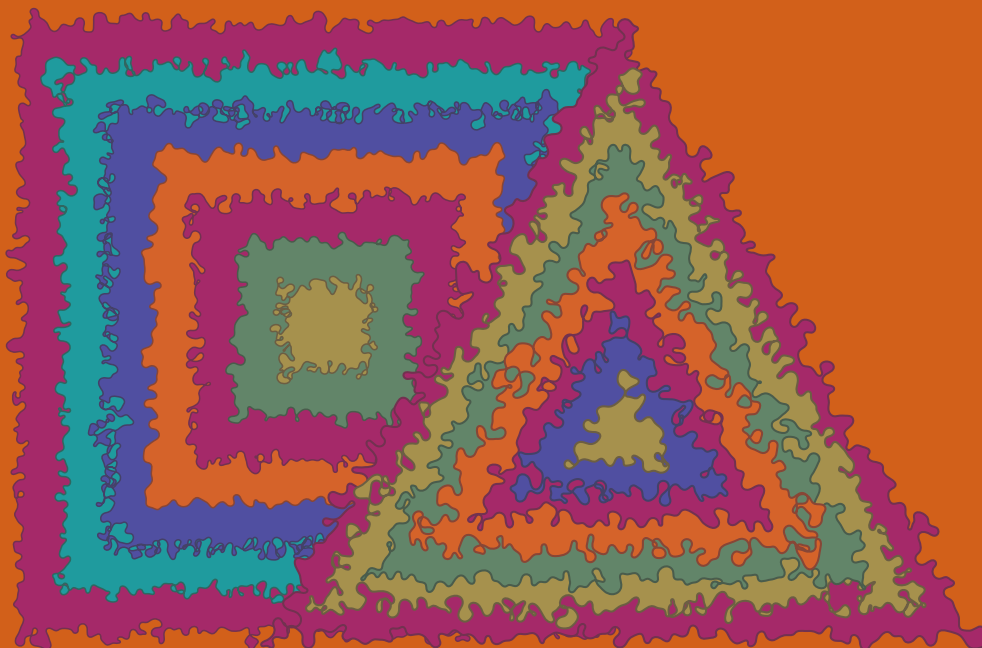


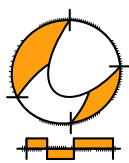
Wiskunde A / PGA

4 VWO / docentmateriaal

Afgeleide functies

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je begeleidt dan als docent de leerlingen die in kleine groepjes aan wiskundige problemen werken en op die manier een eigen theoretisch kader opstellen. Dit gebeurt voornamelijk op de wijze die wordt beschreven in het boek *Building Thinking Classrooms in Mathematics* van Peter Liljedahl. Dit boek is ook in het Nederlands beschikbaar. Het is verstandig om dit boek vooraf door te werken, maar je kunt ook beginnen met deze [beknopte handleiding](#).

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee de leerling kan nagaan of de stof wordt beheersd. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding staat in de marge naast de opgave.

- ★ het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
- ★ ★ een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die de leerling alleen hoeft te maken als er genoeg tijd voor is
- ★ ★ ★ een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die een leerling alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk was

In de bijlage staat een "[Leerdoelentabel](#)" waarin staat aangegeven door welke opgave het specifieke leerdoel wordt afgedekt en op welk niveau dit gebeurt. Als je deze tabel aan de leerlingen uitreikt, kunnen ze hun eigen vorderingen bijhouden.

Opgaven uit de samenvattende paragraaf *Totaalbeeld* worden voorafgegaan door een T.



Afgeleide functies

1.1	Het begrip afgeleide	6
1.2	Differentiëren	12
1.3	Extremen berekenen	19
1.4	Buigpunten	26
1.5	Totaalbeeld	32

1.1 Het begrip afgeleide

Inleiding

In de zeventiende eeuw vond Stevin de zeilwagen uit. Je kunt er snelheidsveranderingen mee bestuderen. Bij **Veranderingen** heb je leren werken met differentiequotiënten en differentiaalquotiënten. Daarmee geef je de veranderingssnelheid van de functiewaarden, de helling van een grafiek, weer. Je maakt nu kennis met de afgeleide functie van een functie f , het differentiaalquotiënt voor willekeurige x . Die afgeleide heeft als grafiek de hellingsgrafiek van de functie, waaruit je eigenschappen van f kunt afleiden.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip afgeleide functie;
- de hellingswaarden van een grafiek in een punt berekenen;
- de hellingsfunctie of afgeleide functie van een gegeven functie afleiden.

Voorkennis

- werken met differentiequotiënten van een functie op een interval;
- werken met differentiaalquotiënten van een functie bij een bepaalde invoerwaarde.

Voor de docent

Bij het onderwerp 'Het begrip afgeleide' gaat het om het opstellen van de formule van een afgeleide functie waarbij (om het rekenwerk nog enigszins binnen de perken te houden) het vooralsnog vooral om kwadratische functies gaat. De verschillende notaties verdienen de aandacht, evenals de procedure van het werken met een differentiequotiënt op $[x, x + h]$ met $h \rightarrow 0$. Om dat op gang te krijgen, krijgen de leerlingen opdrachten voorgeschoteld waarover ze zelf moeten nadenken en het begrip-penkader overzichtelijk opbouwen, de laatste opdracht is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Er zijn geen specifieke materialen nodig anders dan de verticale werkomgevingen.

Opdracht 1.1

Met een zeilwagen die Stevin in de zeventiende eeuw uitvond kun je veranderingen van de snelheid bestuderen.

In deze opgave wordt zo'n zeilwagen klaargemaakt, de zeilen worden gehesen. De zeilwagen gaat steeds sneller, er staat een flinke wind. Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s in meter de formule $s = 1,2t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden.

Hoeveel m heeft de zeilwagen na 5 s afgelegd en hoe snel rijdt hij dan?

Kun je een formule opstellen voor de snelheid v in m/s van de zeilwagen als functie van t ?



Figuur 1.2

**Toelichting**

Je geeft de opdracht mondeling in twee stappen. De eerste vraag is bedoeld om het begrip 'differentiaalquotiënt' weer op te roepen.

Stel om ze op dit spoor te brengen vragen als "Wat betekent 'snelheid' of liever 'veranderingssnelheid'?" en "Hoe bereken je ook al weer de veranderingssnelheid in een punt van de grafiek?".

De tweede vraag zou de begrippen 'hellingsgrafiek' en 'afgeleide (functie)' weer moeten activeren.

Stel om ze op dit spoor te brengen vragen als "Hoe geef je de snelheden in een punt weer in een grafiek?", "Hoe maak je ook al weer zo'n veranderingssnelheid? Heb je er misschien een andere naam voor?" en "Hoe ziet de hellingsgrafiek er in dit geval uit?".

Uitwerking

$$1,2 \cdot 5^2 = 30 \text{ m.}$$

De snelheid is het differentiaalquotiënt voor $t = 5$.

De snelheid bereken je met een tabel differentiequotienten op $[5, 5 + h]$ met $h \rightarrow 0$, of met je grafische rekenmachine.

Je vindt een snelheid van 12 m/s.

Bereken de snelheden voor $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ en maak de hellingsgrafiek.

t	0	1	2	3	4
$s'(t)$	0	2,4	4,8	7,2	9,6

Tabel 1.1

Bij deze tabel past de formule $v(t) = 2,4t$.

Je kunt ook een differentiequotiënt opstellen op $[t, t + h]$ en dan kijken wat er gebeurt als $h \rightarrow 0$:

$$v(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,2(t+h)^2 - 1,2t^2}{t+h-t} = \frac{2,4th + 1,2h^2}{h} = 2,4t + 1,2h$$

Als $h \rightarrow 0$ dan vind je $v(t) = 2,4t$.

Opdracht 1.2

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

Stel een voorschrift op voor de afgeleide van deze functie met behulp van het differentiequotiënt op $[x, x + h]$ met $h \rightarrow 0$.

Stel met behulp daarvan een formule op voor de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in één keer. Het is de bedoeling dat de kennis uit het onderwerp 'Veranderingen' nu naar het niveau van het bepalen van afgeleiden vanuit gegeven formules wordt getild. Mogelijke hulpvragen: "Kun je het differentiequotiënt makkelijk herleiden naar een eenvoudiger vorm?", "Welke afgeleide vind je?", "Wat betekent het als je in die afgeleide een gegeven x -waarde invult?" en "Hoe stel je nu de vergelijking van de raaklijn op?".

Besprek na afloop de verschillende uitwerkingen en laat ook bijbehorende notaties voorbijkomen als die nog niet zijn gebruikt.

Uitwerking

Het differentiequotiënt op $[x, x + h]$ voor willekeurige x is gelijk aan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{(x+h) - x} = \frac{(x^2 + h^2 + 2xh) - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

Als h naar 0 nadert, krijg je de afgeleide: $f'(x) = 2x$.

De gevonden afgeleide functie is het hellingsgetal van de grafiek van f voor willekeurige x , dus ook voor $x = 3$: $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$. Deze raaklijn is een rechte lijn en heeft daarom een vergelijking van de vorm: $y = 6x + b$.

b bepaal je door de coördinaten van een punt van de raaklijn in de vergelijking in te vullen: het raakpunt.

Omdat $f(3) = 3^2 = 9$, gaat deze raaklijn door $(3,9)$.

Vul dit in de vergelijking in: $9 = 6 \cdot 3 + b$ geeft $b = -9$.

De vergelijking van de raaklijn is $y = 6x - 9$.

Opdracht 1.3

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - 0,25x^2$.

Stel een voorschrift op voor de afgeleide van deze functie met behulp van het differentiequotient op $[x, x+h]$ met $h \rightarrow 0$.

Welke lijn raakt de grafiek van f voor $x = 4$?

— Toelichting —

Geef de opdracht mondeling en in één keer. Als de vorige opdracht goed is begrepen zou deze ook goed moeten lopen. Mogelijke hulpvragen zijn weer: "Kun je het differentiequotient makkelijk herleiden naar een eenvoudiger vorm?", "Welke afgeleide vind je?", "Wat betekent het als je in die afgeleide een gegeven x -waarde invult?" en "Hoe stel je nu de vergelijking van de raaklijn op?". Desgewenst kun je hier andere kwadratische functies geven, misschien per groepje nog verschillende?

Een echte uitdaging is om dit te doen bij $f(x) = x^3$ of nog lastiger functies.

— Uitwerking —

Het differentiequotient op $[x, x+h]$ voor willekeurige x is gelijk aan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 0,25(x+h)^2 - (4 - 0,25x^2)}{x+h-x} = \frac{-0,5xh - 0,25h^2}{h} = -0,5x - 0,25h$$

Als h nadert naar 0, is de afgeleide $f'(x) = -0,5x$.

$f'(4) = -0,5 \cdot 4 = -2$ en dus heeft de vergelijking van de raaklijn de vorm: $y = -2x + b$.

b bepaal je door de coördinaten van een punt van de raaklijn in de vergelijking in te vullen: het raakpunt.

Omdat $f(4) = 0$, gaat deze raaklijn door $(4,0)$.

Vul dit in de vergelijking in: $0 = -2 \cdot 4 + b$ geeft $b = 8$.

De vergelijking van de raaklijn is $y = -2x + 8$.

Opdracht 1.4

Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd over het opstellen en gebruiken van een afgeleide functie. Hoewel het in dit onderdeel vrijwel uitsluitend om kwadratische functies gaat, is de manier van werken ook bruikbaar op andere functies, maar het bijbehorende rekenwerk wordt al snel behoorlijk lastig. Bekijk wat iedereen heeft bedacht en doe er je voordeel mee.

— Toelichting —

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Vooral de gebruikte notaties verdienen de aandacht. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

— Uitwerking —

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Bekijk de applet.

De gemiddelde verandering of het differentiequotiënt zegt iets over de helling van een grafiek.

Het differentiequotiënt is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

De hellingswaarde of **afgeleide waarde** van een grafiek in een punt benader je door het differentiequotiënt over een steeds kleiner interval uit te rekenen. Deze waarde wordt ook wel **differentiaalquotiënt** genoemd.

De afgeleide waarde van $f(x)$ voor $x = a$ schrijf je als: $f'(a)$. (Spreek uit als: 'f accent a'.)

Dit kun je ook schrijven als: $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$.

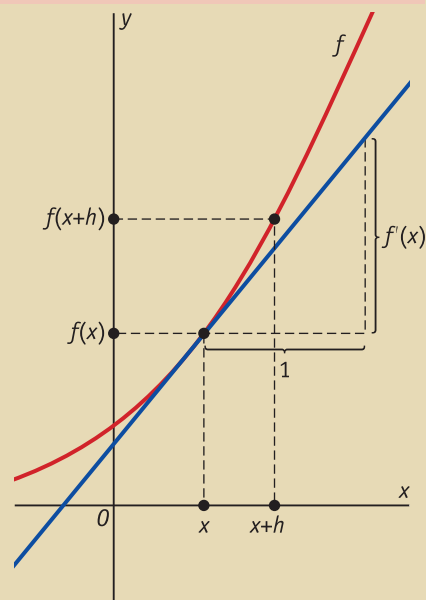
(Spreek uit als: 'dy dx als x is a'.)

Als je een formule opstelt voor de hellingswaarden voor alle mogelijke waarden van x , dan spreek je van de **afgeleide (functie)**.

Die afgeleide functie geeft bij elke waarde van x (uit het domein) de helling van de functie voor die waarde van x . Dit getal is ook het hellingsgetal van de raaklijn in het punt met die waarde van x .

Je schrijft die afgeleide als $f'(x)$ of $\frac{dy}{dx}$ of $\frac{df(x)}{dx}$ of $\frac{d}{dx}f(x)$.

De grafiek van $f'(x)$ is de **hellingsgrafiek** van f .



Figuur 1.3

Verwerken

★ Opgave 1.1

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 4x$.

- Bereken het hellingsgetal van de grafiek van f voor $x = 1$ met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[1, 1 + h]$. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.
- Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van f .
- Bereken met behulp van $f'(x)$ nogmaals de hellingswaarde voor $x = 1$.
Ga na dat je dezelfde uitkomst krijgt als bij a.
- Voor welke waarde van x heeft de grafiek van f' een nulpunt?
Welke betekenis heeft dit punt voor de grafiek van f ?
- Welke nulpunten heeft f ?
Bereken de helling van de grafiek van f in haar nulpunten.
- De grafiek van f heeft precies één punt waarin de helling 2 is. Bereken de coördinaten van dit punt.

★ Opgave 1.2

Een constante functie heeft als voorschrift $f(x) = c$.

Toon aan dat de afgeleide van een constante functie altijd de waarde 0 heeft.

★ Opgave 1.3

Een autofabrikant maakt als enige een kleine stadsauto. Voor de totale opbrengst van de verkoop van die auto's geldt: $TO = 900q - 60q^2$ waarin TO wordt uitgedrukt in duizenden euro en q de geplande productieomvang in honderdtallen per jaar voorstelt. Er wordt van uitgegaan dat alle geproduceerde auto's ook worden verkocht.

- Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van deze opbrengstfunctie.
- Welke betekenis heeft $TO'(q)$ voor de opbrengstfunctie?
- Bereken $TO'(4)$.

★ Opgave 1.4

Gegeven is de functie $f(x) = -0,1x^2 + 6x$ op het interval $[0, 80]$.

- Stel een formule op voor de afgeleide f' .
- Stel een formule op voor de raaklijn aan de grafiek van f in het rechter nulpunt.

Toepassen

★★ Opgave 1.5: Vrije val

Voor een lichaam in vrije val (bijvoorbeeld een parachutespringer voordat hij zijn valscherp opent) geldt bij benadering $s(t) = 4,9t^2$, waarin s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconden is.

- Bereken de gemiddelde snelheid gedurende de eerste tien seconden vrije val.
- De snelheid na tien seconden vrije val is groter dan de gemiddelde snelheid over de eerste tien seconden. Laat dit door middel van een berekening zien.
- Stel een formule op voor de snelheid v als functie van t door het interval $[t, t + h]$ te gebruiken.
- Na hoeveel seconden vrije val beweegt het lichaam met een snelheid van 120 km/h?



★ ★ ★

Opgave 1.6: Afbraak van giftige stof in water

De hoeveelheid van een bepaalde giftige stof in het water van een meertje wordt minder: de stof breekt op natuurlijke wijze af. Voor die hoeveelheid geldt $H(t) = 20 \cdot 0,8^t$ waarin H de hoeveelheid in milligram per liter is en t de tijd in dagen, die is verstreken sinds de stof in het water terecht kwam.

- a Hoeveel gram per liter is er gemiddeld in de eerste vier dagen verdwenen?
- b De afbreeksnelheid van deze giftige stof is op $t = 0$ hoger dan op $t = 4$. Bepaal beide afbreeksnelheden met de grafische rekenmachine en leg uit waarom ze verschillen.
- c Je zou de afbreeksnelheid ook moeten kunnen berekenen met behulp van een differentiequotiënt. Daarbij doet zich echter een probleem voor. Welk probleem?

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het bepalen van een differentiaalquotiënt.

- [Veranderingen, differentiëren en de TI84](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de TIInspire](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de Casio](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de HPprime](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de NumWorks](#)

1.2 Differentiëren

Inleiding

Je hebt gezien dat bij een functie vaak een afgeleide (functie) is op te stellen. Die afgeleide zegt iets over de veranderingen van de grafiek van de functie. En dus over de helling van die functie.

Het differentiëren is een handige techniek om afgeleiden te vinden.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van een functie bepalen met behulp van differentieerregels;
- de hellingwaarde bepalen met de afgeleide;
- bepalen waar de grafiek een bepaalde hellingwaarde heeft.

Voorkennis

- met behulp van een differentiequotient de afgeleide (of hellingsfunctie) van een functie bepalen;
- een hellingsfunctie gebruiken om de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek op te stellen.

Voor de docent

Bij het onderwerp 'Differentiëren' gaat het om het opstellen van de formule van een afgeleide functie waarbij je gebruikt maakt van differentiëren en de bijbehorende regels. Om dat op gang te krijgen, krijgen de leerlingen opdrachten voorgeschoteld waarover ze zelf moeten nadenken en het begrip-kader overzichtelijk opbouwen, de laatste opdracht is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Bij de eerste opdracht hoort een werkblad, dat kan worden uitgedeeld.

Opdracht 2.1

Gebruik je grafische rekenmachine en maak daarop de grafiek van f en die van zijn afgeleide f' . Stel telkens een formule op voor f' en probeer tot een algemene regel te komen voor de afgeleide van een functie van de vorm $f(x) = a \cdot x^n + b$.

1: $f(x) = x^2$ $f'(x) = \dots$	6: $f(x) = x^3$ $f'(x) = \dots$	11: $f(x) = x^4$ $f'(x) = \dots$
2: $f(x) = 3x^2$ $f'(x) = \dots$	7: $f(x) = 2x^3$ $f'(x) = \dots$	12: $f(x) = 3x^4$ $f'(x) = \dots$
3: $f(x) = x^2 + 5$ $f'(x) = \dots$	8: $f(x) = x^3 + 5$ $f'(x) = \dots$	13: $f(x) = x^4 + 5$ $f'(x) = \dots$
4: $f(x) = 3x^2 + 5$ $f'(x) = \dots$	9: $f(x) = 2x^3 + 5$ $f'(x) = \dots$	14: $f(x) = 3x^4 + 5$ $f'(x) = \dots$
5: $f(x) = a \cdot x^2 + b$ $f'(x) = \dots$	10: $f(x) = a \cdot x^3 + b$ $f'(x) = \dots$	15: $f(x) = a \cdot x^4 + b$ $f'(x) = \dots$

Tabel 2.1

Schrijf tot slot op wat de afgeleide zou moeten zijn van $f(x) = a \cdot x^n + b$.

Toelichting

Je geeft de opdracht mondeling in twee stappen. De in te vullen tabel staat op het [Werkblad](#).

Mogelijke hulpvragen bij de eerste vier: “Hoe maak je ook weer de grafiek van de afgeleide op je grafische rekenmachine?”, “In hoeverre lijkt de grafiek van de afgeleide op die van de vorige functie? Wat is er anders?”. En dan moeten ze bij de vijfde tot een conclusie komen.

Bij de tweede serie is het van belang dat ze bij nummer 6 even terugkijken naar de vorige serie. Het muntje moet vallen dat de grafieken van de afgeleiden bij derdemachtsfuncties er steeds uitzien als parabolen, dus als grafieken van kwadratische functies. En dan zou de regelmaat uit de vorige serie weer voorbij moeten komen.

Bij de derde serie is het van belang dat ze bij nummer 6 even terugkijken naar de tweede serie. Het muntje moet vallen dat de grafieken van de afgeleiden bij vierdemachtsfuncties er steeds uitzien als grafieken van derdegraads functies. En dan zou de regelmaat uit de vorige serie weer voorbij moeten komen.

Tenslotte is het de bedoeling dat de machtsregel voor differentiëren te voorschijn komt.

Dat is het moment om alle groepen naar elkaars werk te laten kijken en om de begrippen ‘differentiëren’, ‘differentieerregels’ en ‘machtsregel’ te benoemen.

Uitwerking

1: $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$	6: $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$	11: $f(x) = x^4$ $f'(x) = 4x^3$
2: $f(x) = 3x^2$ $f'(x) = 6x$	7: $f(x) = 2x^3$ $f'(x) = 6x^2$	12: $f(x) = 3x^4$ $f'(x) = 12x^3$
3: $f(x) = x^2 + 5$ $f'(x) = 2x$	8: $f(x) = x^3 + 5$ $f'(x) = 3x^2$	13: $f(x) = x^4 + 5$ $f'(x) = 4x^3$
4: $f(x) = 3x^2 + 5$ $f'(x) = 6x$	9: $f(x) = 2x^3 + 5$ $f'(x) = 6x^2$	14: $f(x) = 3x^4 + 5$ $f'(x) = 12x^3$
5: $f(x) = a \cdot x^2 + b$ $f'(x) = 2ax$	10: $f(x) = a \cdot x^3 + b$ $f'(x) = 3ax^2$	15: $f(x) = a \cdot x^4 + b$ $f'(x) = 4ax^3$

Tabel 2.2

$f(x) = a \cdot x^n + b$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$

Opdracht 2.2

Als je functies bij elkaar optelt of van elkaar aftrekt, bepaal je de afgeleide door de afgeleiden apart te bepalen en ze dan weer bij elkaar op te tellen. Dit heet de somregel van differentiëren. Bepaal van de volgende functies de afgeleide en stel een vergelijking op van de raaklijn aan hun grafiek voor $x = 1$.

- $f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x - 100$
- $y = 8x^3 - 50x + 70$
- $g(x) = 10 + 3x - 9x^2 - 12x^4$
- $p(x) = \frac{1}{3}x^6 - 5x^2$
- $K(x) = (x^2 - 4)(x - 4)$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in vijf stappen. Nu moet het differentiëren van som/verschil van machtsfuncties binnenkomen. Mogelijke hulpvragen bij met name de eerste functie: “Kun je de functie schrijven als som/verschil van machtsfuncties?”, “Hoe kun je nu de machtsregel en de som/verschilregel gebruiken?”, “Wat betekent het als je in die afgeleide een gegeven x-waarde invult?” en “Hoe stel je nu de vergelijking van de raaklijn op?”.

Bij de tweede functie kun je nog even de notaties $\frac{dy}{dx}$ en $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}$ naast $y'(x)$ en $y'(1)$ bespreken. Bij de tweede functie kun je hintten naar het uitwerken van de haakjes als ze er zelf niet opkomen.

Uitwerking

Schrijf eerst de functie als een som (verschil) van machtsfuncties en constante functies:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x^1 - 100$$

Pas nu de differentieerregels toe. De afgeleide is dan:

$$f'(x) = 3x^{3-1} + 4 \cdot 2x^{2-1} - 12 \cdot 1x^{1-1} - 0 = 3x^2 + 8x - 12$$

$$f'(1) = -1 \text{ en } f(1) = -107 \text{ geeft raaklijn: } y = -x - 108.$$

Verder:

$$\frac{dy}{dx} = 8 \cdot 3x^2 - 50 \cdot 1x^0 + 0 = 24x^2 - 50$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = -26 \text{ en } y(1) = 28 \text{ geeft raaklijn: } y = -26x + 54.$$

$$g'(x) = 0 + 3 \cdot 1x^0 - 9 \cdot 2x^1 - 12 \cdot 4x^3 = 3 - 18x - 48x^3$$

$$g'(1) = -63 \text{ en } g(1) = -8 \text{ geeft raaklijn: } y = -63x + 55.$$

$$p'(x) = \frac{1}{3} \cdot 6x^5 - 5 \cdot 2x^1 = 2x^5 - 10x$$

$$p'(1) = -8 \text{ en } p(1) = -4\frac{2}{3} \text{ geeft raaklijn: } y = -8x + 3\frac{1}{3}.$$

$$K(x) = (x^2 - 4)(x - 4) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16 \text{ geeft } K'(x) = 3x^2 - 8x - 4.$$

$$K'(1) = -9 \text{ en } K(1) = 9 \text{ geeft raaklijn: } y = -9x + 18.$$

Opdracht 2.3

De kosten K (euro) bij de productie van q eenheden (in hondertallen) van een bepaald product bedragen:

$$K(q) = 0,5q^3 - 4,5q^2 + 40q + 80$$

Er zijn twee waarden van q waarin de kosten stijgen met een snelheid van € 40,00 per stuk. Welke twee waarden van q zijn dat?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in één keer, schrijf de formules op je eigen bord. Mogelijke hulpvragen zijn weer: "Hoe vind je de snelheid waarmee de kosten stijgen per stuk?", "Waarom is de afgeleide een goede benadering?", "Wat betekent het als die afgeleide een bepaalde uitkomst heeft?" en "Welke vergelijking moet je oplossen?".

In een nabespreking is het wellicht nuttig om te benoemen waarom de afgeleide hier slechts een benadering is. Het begrip 'marginale kosten' uit de economie kan dan voorbij komen. Want eigenlijk gaat het om $\frac{K(q+0,01) - K(q)}{0,01}$ en dan wordt de zaak wat ingewikkelder, of juist niet (GR gebruiken).



Uitwerking

De snelheid waarmee de functiewaarden stijgen afhankelijk van q is ongeveer $K'(q)$.

Nu is: $K'(q) = 1,5q^2 - 9q + 40$.

Er geldt $K'(q) = 40$ als:

$$1,5q^2 - 9q + 40 = 40$$

$$1,5q^2 - 9q = 0$$

$$1,5q(q - 6) = 0$$

$$q = 0 \vee q = 6$$

De oplossingen van deze vergelijking zijn $q = 0$ en $q = 6$. Dus bij een productie van nul en zes eenheden stijgen de kosten met een snelheid van € 40,00 per eenheid.

Opdracht 2.4

Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd over het bepalen van een afgeleide functie met behulp van differentiëren. Je hebt nu de eerste differentieerregels voorbij zien komen, er komen er meer. Bekijk wat iedereen heeft bedacht en doe er je voordeel mee.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.



Theorie

Om te onthouden

De afgeleide van een functie $y = f(x)$ kun je bepalen door h naar 0 te laten naderen in het differentiequotiënt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Voor veel soorten functies zijn hieruit algemene regels af te leiden waarmee je de afgeleide op een eenvoudiger manier kunt vinden. Dergelijke regels heten **differentieerregels** en het toepassen ervan noem je **differentiëren**.

- **Machtsregel**

De afgeleide van de machtsfunctie $f(x) = cx^n$ is $f'(x) = ncx^{n-1}$ voor elke waarde van c en voor gehele positieve waarden van n .

- **Constanteregel**

De afgeleide van een constante (functie) is 0: als $f(x) = c$, dan is $f'(x) = 0$.

- **Somregel**

De afgeleide van de som van twee functies is de som van de afgeleiden van die functies: als $f(x) = u(x) + v(x)$ dan is $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. Deze regel geldt ook bij een verschil van twee functies.

Verwerken

★ Opgave 2.1

Bepaal telkens de afgeleide van de gegeven functie. Bepaal ook het hellingsgetal van de grafiek voor $x = 1$ of $t = 1$ en controleer zo mogelijk je antwoord op de grafische rekenmachine.

- a $f(x) = x^3 - 4x$
- b $g(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 12x - 35$
- c $s(t) = 60t - 4,9t^2$
- d $H(t) = 2(t^2 - 4)$
- e $V(x) = 5 - (x - 3)^2$
- f $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- g $TW(q) = 0,5q^3 - 6q^2 - 25q + 112$
- h $K(x) = (3x^2 - 2a)(ax - 1)$

★ Opgave 2.2

Bepaal van elk van de volgende functies de afgeleide. Bereken vervolgens de punten van de grafiek waar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn de waarde 0 heeft. Rond je antwoord indien nodig af op één decimaal. Controleer je antwoorden op de grafische rekenmachine.

- a $f(x) = x^4 - 8x^2$
- b $TW(q) = -q^3 + 3q^2 + 3q + 6$
- c $v(t) = t(t - 1)^2$
- d $TW(p) = 40p - 0,02p^2$

★ Opgave 2.3

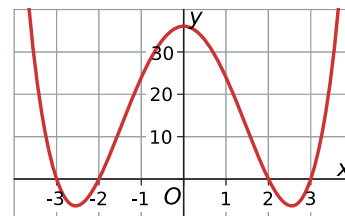
y is een functie van x waarvoor geldt: $y = x^3 - 25,5x^2 + 180x + 120$.

- a Bepaal de afgeleide van deze functie.
- b Deze afgeleide heeft twee nulwaarden. Welke betekenis hebben die nulwaarden voor de functie?
- c Bereken de nulwaarden van de afgeleide y' .
- d Voor welke waarden van x is de functie dalend?
Wat betekent dit voor $y'(x)$?

★ Opgave 2.4

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.

- a Laat zien hoe je uit het functievoorschrift de nulpunten van de grafiek van f kunt afleiden.
- b Bepaal de afgeleide van f .
- c Bereken het snijpunt van de raaklijnen aan de grafiek van f voor $x = -2$ en voor $x = 2$.
- d Los op: $f'(x) = 0$.
- e Wat betekent het antwoord van d voor de grafiek van f ?



Figuur 2.2

Toepassen

★ ★

Opgave 2.5: De baan van een kogel

Een voorwerp wordt afgeschoten met een bepaalde beginsnelheid en onder een bepaalde hoek. Wanneer je de luchtweerstand verwaarloost, is zijn kogelbaan parabolisch. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de grafiek van de functie $h(x) = 1,5 - 0,01(x - 10)^2$. Hierin is h de hoogte in meter van het afgeschoten voorwerp boven de grond en x de afstand in meter over de grond tot recht onder het afgeschoten voorwerp.

- Op welke hoogte werd het voorwerp afgeschoten?
- Bereken $h'(0)$.
- Wat betekent dit getal voor de kogelbaan?
- Bereken het punt van de kogelbaan waarin $h'(x) = 0$. Welke betekenis heeft dit punt?
- In het hoogste punt van de kogelbaan is de afgeleide nul. Toch beweegt de kogel daar met een zekere snelheid. Kun je dit verklaren?

★ ★ ★

Opgave 2.6: Gemiddelde totale kosten

Voor de productiekosten van een bepaald artikel geldt: $TK = 1200 + 0,2q^2$. Hierin is q het aantal geproduceerde eenheden van dat artikel en stelt TK de totale kosten in euro voor. De productiekosten per eenheid worden gegeven door $GTK = \frac{TK}{q}$. Je noemt dit wel de gemiddelde totale kosten.

- Druk de gemiddelde totale kosten uit in q .
- Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van GTK bekijken. Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van GTK ? Welke economische betekenis heeft deze asymptoot?
- Je kunt bij deze functie (nog) geen afgeleide bepalen. Maar je kunt er wel een (benadering van de) hellingsgrafiek bij tekenen met de grafische rekenmachine. Teken die hellingsgrafiek en bepaal met behulp daarvan bij welke productie de gemiddelde totale kosten zo laag mogelijk zijn.
- Welke waarde benadert de helling van de grafiek van GTK als de productie heel erg groot is? En welke betekenis heeft dat voor de productiekosten per eenheid?

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de machtsregel en de somregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

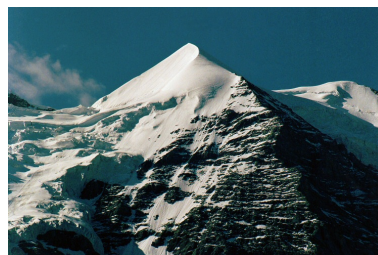
Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.3 Extremen berekenen

Inleiding

Als je een functievoorschrift hebt, kun je met de grafische rekenmachine een bijpassende grafiek tekenen. Je kunt dan de extreme waarden door de machine laten berekenen. Nadeel daarvan is dat je vaak niet zeker weet of je alle extremen in beeld hebt. Verder kan je rekenmachine ze alleen maar benaderen. Met behulp van de afgeleide van de functie kun je extremen echt berekenen: het zijn de punten van de grafiek waarin de afgeleide overgaat van positief in negatief of omgekeerd.



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- extremen berekenen met behulp van de afgeleide van een functie;
- het berekenen van extremen toepassen in praktijksituaties.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van de grafische rekenmachine en met behulp van hellingsgrafieken.

Voor de docent

Bij het onderwerp 'Extremen berekenen' gaat het om het toepassen van het differentiëren en de bijbehorende regels bij het berekenen van extremen van functies. Om dat op gang te krijgen, krijgen de leerlingen opdrachten voorgeschoteld waarover ze zelf moeten nadenken en het begrippenkader overzichtelijk opbouwen, de laatste opdracht is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Bij de derde opdracht kun je vooraf een schets maken met gegevens en die op je eigen bord plakken.

Opdracht 3.1

In een maximum van een grafiek gaat de grafiek over van stijgen naar dalen. De helling gaat op dat punt over van positief naar negatief. De grafiek van de afgeleide is de hellingsgrafiek en gaat op hetzelfde punt over van positief naar negatief.

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ op je grafische rekenmachine.

Bekijk ook de grafiek van de afgeleide f' , de hellingsgrafiek.

Laat zien, hoe je vanuit de afgeleide kunt bepalen welke extremen de grafiek van f heeft en bereken ze.

— Toelichting —

Je geeft de opdracht mondeling, eventueel schrijf je de functie op je eigen bord.

Mogelijke hulpvragen: “Wat valt je op aan de afgeleide als f een maximum of een minimum heeft?”, “Is dat altijd zo of moet je nog ergens op letten?”. En dan moeten ze ontdekken dat de afgeleide de waarde 0 heeft (bij de brave functies die bij wiskunde A voorbij komen) er vaak sprake is van een maximum of een minimum als de grafiek van de afgeleide ook echt de x -as snijdt.

Stel desgewenst als extra vraag of ze situaties kunnen bedenken waarin er geen extreme waarde is voor f , maar toch $f'(x) = 0$. En als echte uitdaging kun je de vraag stellen of er ook extremen kunnen voorkomen waarbij de afgeleide niet 0 is.

— Uitwerking —

Je ziet dat:

- de grafiek van f een minimum heeft als de afgeleide overgaat van negatief naar positief (voor $x = -1$ en voor $x = 1$);
- de grafiek van f een maximum heeft als de afgeleide overgaat van positief naar negatief (voor $x = 0$).

De extremen zijn:

minimum $f(-1) = 3$, maximum $f(0) = 4$ en minimum $f(1) = 3$.

Opdracht 3.2

Bereken de extremen van de functie: $f(x) = 25x^4 - 800000x - 12345$.

— Toelichting —

Geef de opdracht mondeling. De grafiek van deze functie komt niet heel gemakkelijk in beeld. Mogelijke hulpvragen: “Waarom heb je nu echt een berekening met de afgeleide nodig?”, “Kun je gemakkelijk vinden voor welke waarde van x de afgeleide 0 is?” en “Hoe bepaal je nu of er een extreme waarde is en of het een minimum of een maximum is?”.

— Uitwerking —

Dit is een functie die je niet zo makkelijk in beeld krijgt. Je werkt daarom met een tekenschema.

$$f'(x) = 100x^3 - 800000$$

$$f'(x) = 100x^3 - 800000 = 0 \text{ oplossen geeft: } x = \sqrt[3]{8000} = 20.$$

Maak een tekenschema van de afgeleide. Door zowel links als rechts van $x = 20$ een getal te kiezen en dit in de afgeleide in te vullen zie je of de afgeleide daar positief of negatief is.

Kies bijvoorbeeld $x = 0$ en $x = 25$.

$$f'(0) = -800000 \text{ en negatief en } f'(25) = 762500 \text{ en positief.}$$

-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	f'
dalend					20	stijgend					f
											x

Figuur 3.2

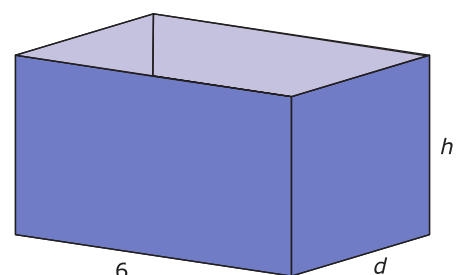
Aan het tekenschema is te zien dat er inderdaad een extreme waarde is voor $x = 20$.

In dit geval is het een minimum: $f(20) = -12012345$.

Opdracht 3.3

Alex bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte d en de hoogte h van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaal-kosten het laagst.)



Figuur 3.3

— Toelichting —

Dit is echt een opdracht waar aandacht kan zijn voor probleemoplossend denken, teken eventueel de figuur op je eigen bord met de gegevens erbij. Verder is het ook de bedoeling om te laten zien dat er nog beperkingen zijn in hun mogelijkheden om te differentiëren (of leerlingen moeten op het idee komen om de machtsregel ook toe te passen bij negatieve exponenten).

Mogelijke hulpvragen: “Welke afmetingen zijn variabel? Kun je daar letters voor kiezen?”, “Hoe bereken je hiermee de oppervlakte van de opbergbak?”, “Kun je de formule vereenvoudigen?”, “Hoe kun je nu een minimum bepalen?”.

Nuttig om na afloop de verschillende oplossingen gezamenlijk te vergelijken. Helemaal mooi als een groepje een oplossing met behulp van differentiëren heeft gevonden. Ga in ieder geval in op het feit dat de differentieerregels nog uitbreiding nodig hebben.

— Uitwerking —

Noem de diepte d en de hoogte h , beide in dm.

Vanwege de inhoud van $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$, geldt: $1000 = 6 \cdot d \cdot h$ en hieruit volgt $h = \frac{1000}{6d}$.

Voor de totale oppervlakte A in m^2 geldt: $A = 6d + 12h + 2dh$.

Als je nu de eerder gevonden uitdrukking invult in de oppervlakteformule, vind je

$$A = 6d + 12 \cdot \left(\frac{1000}{6d}\right) + 2d \cdot \left(\frac{1000}{6d}\right) = 6d + \frac{12000}{6d} + \frac{2000d}{6d} = 6d + \frac{2000}{d} + \frac{1000}{3}$$

Van deze functie van d moet je het minimum bepalen. Omdat je een functie van deze vorm nog niet kunt differentiëren, doe je dat met behulp van de grafische rekenmachine. Ga na dat je vindt: $d \approx 18,26$. De bijbehorende waarde voor de hoogte kun je dan ook berekenen.

Opdracht 3.4

Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd over het bepalen van de extremen van een functie met behulp van differentiëren. Dit ga je ook toepassen in praktijksituaties, bekijk de toepassingsopdrachten. Bekijk wat iedereen heeft bedacht en doe er je voordeel mee.

— Toelichting —

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

— Uitwerking —

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

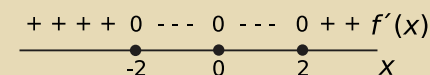
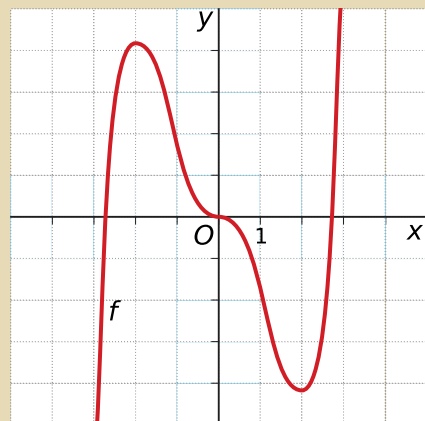
Om te onthouden

Bekijk de applet.

Extreme waarden berekenen gaat bij een functie, waarvan $f(x)$ het functievoorschrift is, als volgt:

- Bepaal met behulp van differentiëren de afgeleide en los $f'(x) = 0$ op. Houd rekening met het domein van de functie.
- Bekijk de grafiek van de afgeleide of maak een **tekenschema** van de afgeleide.
- Gaat $f'(x)$ voor $x = a$ over van negatief in positief (en hoort a tot het domein van de functie), dan heeft f een minimum van $f(a)$.
- Gaat $f'(x)$ voor $x = b$ over van positief in negatief (en hoort b tot het domein van de functie), dan heeft f een maximum van $f(b)$.

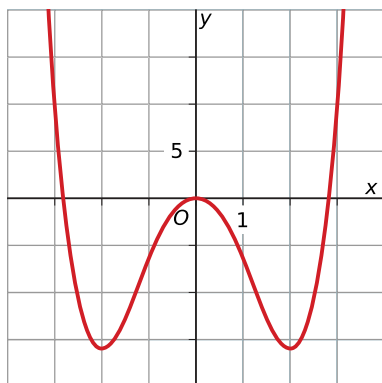
Als de afgeleide niet van teken wisselt, dan is er geen sprake van een extreme waarde.



Figuur 3.4

Verwerken

★ Opgave 3.1



Figuur 3.5

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 8x^2$.

Bereken met behulp van differentiëren alle extremen van deze functie.

★ Opgave 3.2

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4000 - 10x^2$ en $g(x) = (x - 10)(x^2 - 400)$.

- Om de grafieken van beide functies op de grafische rekenmachine in beeld te krijgen moet je de instellingen aanpassen. Bereken algebraïsch eerst de nulpunten van beide functies.
- Nu weet je welke waarden voor x je het beste kunt instellen. Bereken de extremen van beide functies. Geef je antwoorden zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.
- Je kunt nu de grafieken mooi in beeld krijgen. Los op: $f(x) \geq g(x)$

★ Opgave 3.3

Een fabrikant verkoopt zelfrijzend bakmeel voor € 2,25 per kilogram. Voor de kosten TK voor productie en opslag geldt:

q (honderd kg)	1	2	3	4	5	6
TK (euro)	75	100	125	200	400	800

Tabel 3.1

- Hoeveel stijgen de kosten gemiddeld per kilogram als de productie toeneemt van 400 naar 500 kg?
- Voor de kosten heeft de fabrikant de formule $TK = 10q^3 - 60q^2 + 130q$ laten opstellen. Ga na dat deze formule past bij de gegevens in de tabel.
- Stel een formule op voor de winst TW als functie van q .
- Bepaal met behulp van differentiëren de maximale winst.

★ Opgave 3.4

De winst W van een bedrijf wordt gegeven door de formule: $W = -0,25q^3 + 9q^2 - 33q - 50$.

Hierbij is q de productie in duizenden en W de winst in honderden euro.

Bepaal met behulp van differentiëren bij welke productie de winst maximaal is.

Geef ook de maximale winst.

★★ Opgave 3.5

In een kaasmakerij ligt een voorraad van 600 kg kaas. De bedrijfsleider wil die voor een zo hoog mogelijke totale opbrengst verkopen. Er zijn twee mogelijkheden:

- de kaas ineens verkopen voor € 10,00 per kilo, de partij brengt dan € 6000,00 op;
- de kaas een tijdje laten indrogen; deze verliest dan aan gewicht, maar wint aan smaak, waardoor de prijs met € 0,25 per procent gewichtsvermindering toeneemt.

- Bereken de opbrengst van de partij kaas bij 5 procent indrogen.
- Noem het indrogingspercentage p . Stel een formule op voor de totale opbrengst van de partij kaas als functie van p .
- Bereken met behulp van differentiëren het gunstigste indrogingspercentage.

Toepassen

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. Het sportveld is net zo lang als de rechte stukken. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.

Je kunt een formule opstellen voor de oppervlakte van dit sportveld als functie van de lengte of de breedte ervan of als functie van de straal van de cirkel. Als je dat doet kun je **differentiëren toepassen om extremen te bepalen**.



Figuur 3.6

★ Opgave 3.6

Bekijk het probleem van de afmetingen bepalen van het zo groot mogelijke rechthoekige sportveld binnen een atletiekbaan.

- Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.
Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.
- Noem de oppervlakte van het sportveld A , de lengte ervan l en de straal van de cirkel r . Welke formules kun je nu opstellen?
- Stel een formule op voor $A(r)$.
- Voor welke waarde van r is $A(r)$ maximaal? Maak gebruik van differentiëren. Geef ook de afmetingen van het sportveld. Rond je antwoorden af op één decimaal.

★★ Opgave 3.7

Een fabrikant verpakt zijn hagelslag al jaren in doosjes met een vierkante bodem van 8 bij 8 cm. Ze hebben de vorm van een balk met een hoogte van 21 cm.

De fabrikant vraagt zich af of hij de inhoud van het doosje kan vergroten door de afmetingen anders te kiezen, zonder meer karton te gebruiken. Het gaat erom de inhoud zo groot mogelijk te maken bij een gelijkblijvende oppervlakte. Het grondvlak blijft vierkant. Welke afmetingen moet de fabrikant kiezen?

- Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.
Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.
- Noem de zijde (in cm) van het grondvlak x en de hoogte h .
Welke twee formules kun je opstellen?
- Hoeveel karton heeft de fabrikant nodig voor zijn huidige doosjes?
Verwerk het antwoord in de oppervlakteformule en isoleer h uit de verkregen vergelijking.
- Stel een formule op voor de inhoud van de doosjes als functie van de zijde x .



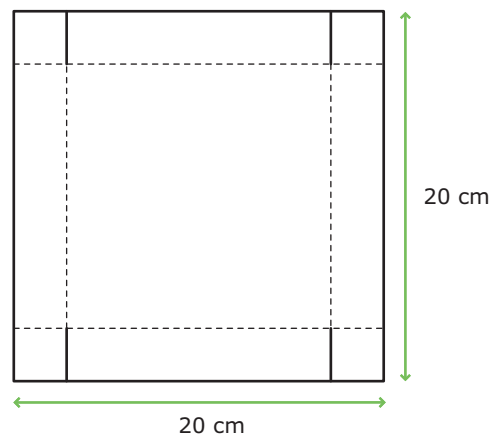
- e Voor welke waarde van x is de inhoud maximaal? Maak gebruik van differentiëren. Rond je antwoord op drie decimalen.
- f Bepaal de afmetingen van de doosjes met een maximale inhoud in millimeter nauwkeurig.

★ ★

Opgave 3.8

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

- a Stel dat je de zijde van het ingeknipte vierkantje x noemt. Welke functie $I(x)$ kun je dan opstellen voor de inhoud van dit bakje?
- b Welke waarden kan x allemaal aannemen?
- c Bereken de maximale inhoud van het bakje.

**Figuur 3.7**

1.4 Buigpunten

Inleiding

Zodra de helling van de grafiek overgaat van toenemende stijging (of daling) naar afnemende stijging (of daling), of omgekeerd, spreek je van een buigpunt. In zo'n buigpunt heeft de helling een (lokaal) maximum of minimum. Je vindt buigpunten dus door naar de extremen van de afgeleide te zoeken.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de extremen van een afgeleide bepalen met behulp van de tweede afgeleide;
- het berekenen van buigpunten toepassen in praktijksituaties.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van differentiëren.

Voor de docent

Bij het onderwerp 'Buigpunten' gaat het om het toepassen van het differentiëren en de bijbehorende regels bij het berekenen van buigpunten van functies. Om dat op gang te krijgen, krijgen de leerlingen opdrachten voorgeschoteld waarover ze zelf moeten nadenken en het begrippenkader overzichtelijk opbouwen, de laatste opdracht is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Bij de eerste opdracht zit een werkblad met daarop de grafiek van de gegeven functie. Dit kan worden uitgedeeld.

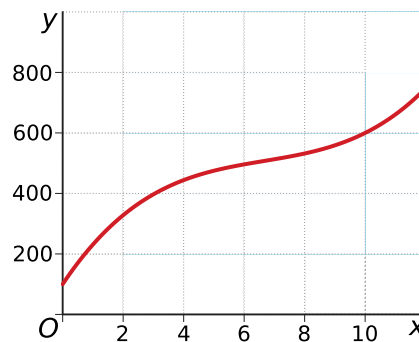
Opdracht 4.1

Hier zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 20x^2 + 150x + 100$.

De functiewaarden stijgen voortdurend:

- ongeveer tot $x = 7$ is er afnemende stijging;
- ongeveer vanaf $x = 7$ is er toenemende stijging.

Het punt waarin de helling overgaat van toenemend naar afnemend (of omgekeerd) heet een 'buigpunt' van de grafiek.



Figuur 4.2



Om dit buigpunt te schatten, kijk je naar het verloop van de helling van de grafiek. Die helling neemt eerst af en daarna weer toe. Zij heeft een minimale waarde bij het buigpunt. Om het buigpunt exact te berekenen zoek je een minimum van de afgeleide. Daarvoor kun je die afgeleide zelf weer differentiëren, je krijgt dan de 'tweede afgeleide'.

Bereken (dus geen grafische rekenmachine gebruiken) het buigpunt van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.

Toelichting

Je geeft de opdracht mondeling, de grafiek staat op het **Werkblad**. Bekijk zelf welke informatie je precies meegeeft. Misschien kun je al stoppen als je hebt benoemd dat in dit buigpunt de helling van de grafiek minimaal is en ze zelf laten bedenken dat je dan naar de afgeleide van de afgeleide moet kijken. Benadruk wel dat je een berekening wilt zien, geen benadering met de grafische rekenmachine. In ieder geval wel na afloop van deze opdracht de essentiële termen en notaties benoemen.

Mogelijke hulpvragen: "Welke functie beschrijft de hellingen van deze grafiek?", "Hoe krijg je van die functie een minimum?". Sommige leerlingen zullen wellicht zien dat de afgeleide een paraboolvorm heeft en het minimum met behulp daarvan berekenen. Vraag dan of dit ook met behulp van differentiëren kan.

Bekijk na afloop gezamenlijk alle uitwerkingen en benoem de termen 'buigpunt' en 'tweede afgeleide'.

Uitwerking

De afgeleide is: $f'(x) = 3x^2 - 40x + 150$.

Een minimum van deze functie vind je door differentiëren. Bepaal de afgeleide van f' , de afgeleide van de afgeleide dus. Je spreekt dan van de tweede afgeleide die je aangeeft met f'' .

Hier is $f''(x) = 6x - 40$.

Los eerst op: $f''(x) = 6x - 40 = 0$.

Dit geeft $x = \frac{40}{6} \approx 6,67$.

Maak eventueel een tekenschema van de tweede afgeleide.

De tweede afgeleide wisselt bij $x \approx 6,67$ van teken, er is een buigpunt met $f(6,67) \approx 507,41$.

Het buigpunt is $(6,67; 507,41)$.

Opdracht 4.2

Bereken met behulp van differentiëren de extremen en de buigpunten van de functie:

$$f(x) = x^3(x^2 - 100).$$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. Hij zou vrijwel moeiteloos moeten gaan als de leerlingen de vorige opdracht hebben begrepen en alle terminologie en notaties hebben onthouden. Daarop kan na afloop nog heel goed aandacht voor zijn. Verder is het een goed idee om dan ook even te bespreken wat je van de leerlingen verwacht in deze situaties: moeten er tekenschema's worden gemaakt, of schetsen van de grafiek van de functie en de afgeleide?

Uitwerking

$$f'(x) = 5x^4 - 300x^2 = 5x^2(x^2 - 60) = 0 \text{ geeft } x = 0 \vee x = \pm\sqrt{60}.$$

$$\text{Maximum } f(-\sqrt{60}) = 2400\sqrt{60} \text{ en minimum } f(\sqrt{60}) = -2400\sqrt{60}.$$

$$f''(x) = 20x^3 - 600x = 20x(x^2 - 30) = 0 \text{ geeft } x = 0 \vee x = \pm\sqrt{30}.$$

$$\text{De buigpunten zijn } (-\sqrt{30}, 2100\sqrt{30}), (0, 0) \text{ en } (\sqrt{30}, -2100\sqrt{30}).$$

Opdracht 4.3

Bij de productie van grote aantallen van een artikel hangen de kosten af van de productieomvang q . Bij een toenemende productieomvang stijgen soms in het begin de kosten steeds langzamer, terwijl ze bij grotere waarden van q weer sneller gaan stijgen (bijvoorbeeld omdat er vanaf een zekere productieomvang duurdere apparatuur en/of duurdere arbeidskrachten nodig zijn).

De kostenfunctie $TK = 0,1q^3 - q^2 + 4q$ beschrijft zo'n situatie.

De afgeleide van deze functie wordt in de economie de marginale kostenfunctie MK genoemd. Hoe kun je uit MK het beschreven verloop van TK afleiden? En wat betekent dit voor een ondernemer die met deze situatie te maken krijgt?

Toelichting

Dit is een toepassing van differentiëren binnen de economie. Schrijf eventueel de kostenfunctie op je eigen bord.

Mogelijke hulpvragen: "Welke functie beschrijft de marginale kosten?", "Hoe bereken je hiermee het omslagpunt waarna de kosten weer sneller gaan stijgen?".

Uitwerking

$$MK = 0,3q^2 - 2q + 4$$

MK stelt de hellingsfunctie van TK voor. Als je daarvan de grafiek bekijkt, zie je dat $MK > 0$ en dat MK in het begin afneemt en later weer toeneemt.

Het minimum van MK bereken je door $MK' = TK'' = 0$ op te lossen. Je vindt $q = 3\frac{1}{3}$.

Tot $q = 3\frac{1}{3}$ is $MK > 0$ en MK dalend. Voor TK betekent dit een afnemende stijging.

Voorbij $q = 3\frac{1}{3}$ is $MK > 0$ en MK stijgend. Voor TK betekent dit een toenemende stijging.

Voor een ondernemer die hiermee te maken krijgt, betekent dit dat zijn productieomvang het beste in de buurt van $q = 3\frac{1}{3}$ kan zitten, want dat zijn de productiekosten in verhouding met de productieomvang relatief laag.

Opdracht 4.4

Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd over het bepalen van de buigpunten van een functie met behulp van differentiëren. Dit ga je ook toepassen in praktijksituaties, bekijk de toepassingsopdracht. Bekijk wat iedereen heeft bedacht en doe er je voordeel mee.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Bij toenemende stijging (daling) of afnemende stijging (daling) kijk je naar de veranderingen van de helling:

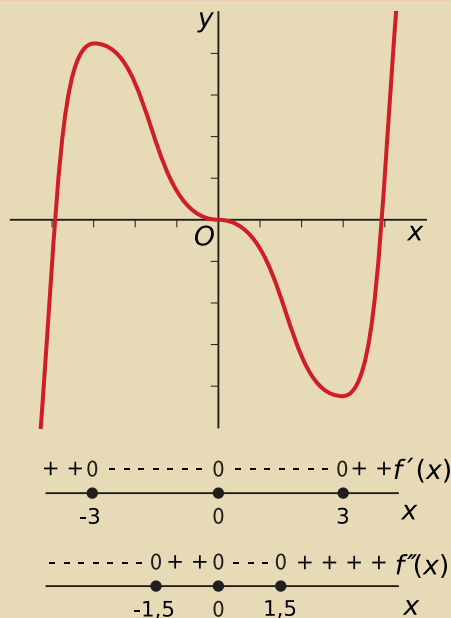
- Bij toenemende stijging wordt de helling steeds groter: f' stijgt. De afgeleide van f' is dan positief.
- Bij toenemende daling wordt de helling steeds kleiner: f' daalt. De afgeleide van f' is dan negatief.
- Bij afnemende stijging wordt de helling steeds kleiner: f' daalt. De afgeleide van f' is dan negatief.
- Bij afnemende daling wordt de helling steeds groter: f' stijgt. De afgeleide van f' is dan positief.

De afgeleide van f' heet de **tweede afgeleide** van f .

De tweede afgeleide noteer je als: f'' of $\frac{d^2 y}{dx^2}$ (spreek uit: 'd twee y d x-kwadraat').

Het punt waarin de helling overgaat van toenemend naar afnemend (of omgekeerd) heet een **buigpunt** van de grafiek.

Je vindt die buigpunten door naar de extremen van de afgeleide te zoeken. Dat doe je met behulp van de tweede afgeleide.



Figuur 4.3

Verwerken

★ Opgave 4.1

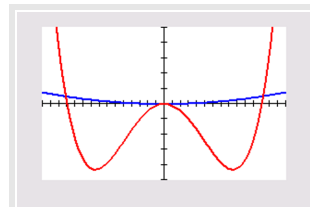
Bepaal met behulp van differentiëren van de volgende functies alle buigpunten met de hand. Rond je antwoorden niet af.

- a $f(x) = 0,5x^3 + 6x^2 - 90$
- b $f(x) = 4x^2 - 0,5x^4$

★ Opgave 4.2

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 0,25x^2(x^2 - 144)$.

- a Bekijk hoe de grafieken van beide functies er op de grafische rekenmachine uit kunnen zien. Hoe moet je het venster dan instellen?
- b Los op: $f(x) > g(x)$.
- c Bereken de buigpunten van de grafiek van g . Rond je antwoorden niet af.



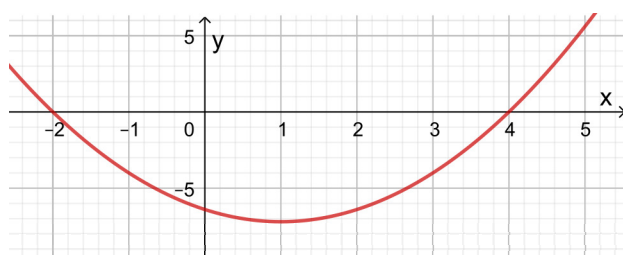
Figuur 4.4

★ Opgave 4.3

Een ondernemer maakt een bepaald product waarop hij het monopolie heeft. Voor zijn productiekosten in honderden euro geldt de formule $TK = 0,5q^3 - 4q^2 + 11q + 4$ waarin q de geproduceerde hoeveelheid in honderden kilo's is.

- a De snelheid waarmee de kosten stijgen is eerst afnemend, later toenemend. Er is een punt in de grafiek waarbij die snelheid van afnemend naar toenemend omslaat. Bij welke productie zit het omslagpunt? Rond je antwoord af op gehele kilogrammen nauwkeurig.
- b De hoeveelheid producten die hij aanbiedt aan zijn afnemers heeft invloed op de prijs. Er geldt: $p = 11 - q$ waarin p de prijs in honderden euro is. Ga ervan uit dat deze ondernemer zijn totale productie ook verkoopt. Bij welke productie is zijn winst maximaal? Licht het antwoord toe met behulp van differentiëren.

★★ Opgave 4.4



Figuur 4.5

Bekijk de grafiek van de afgeleide van een functie, gemaakt in GeoGebra.

- a Bij welke waarden van x heeft deze functie extremen?
- b Bij welke waarden van x heeft de grafiek van deze functie een buigpunt?
- c Heeft de raaklijn in het buigpunt een positieve of een negatieve richtingscoëfficiënt?

Toepassen

★ ★

Opgave 4.5: Kurkentrekkers

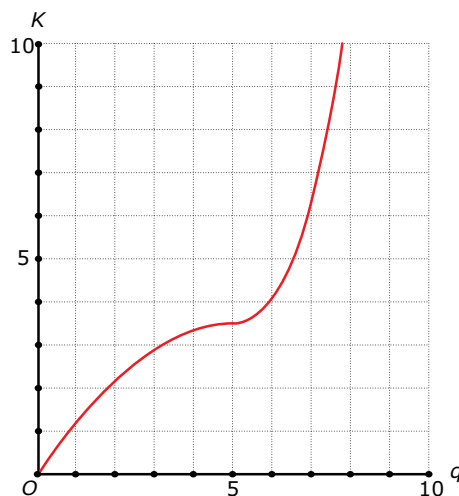
In een bedrijf worden kurkentrekkers gefabriceerd. De totale kosten bij de productie kun je aflezen in de grafiek. Een wiskundige van het bedrijf heeft hierbij de volgende formules bedacht:

- $K = -0,1q^2 + 1,2q$ als $0 \leq q < 5$
- $K = 0,1q^3 - 1,1q^2 + 3,7q$ als $q \geq 5$

Hierin is q de productie (in duizendtallen) en K de totale kosten (in duizenden euro). De toename van de totale kosten bij een toename van de productie met één kurkentrekker noem je de marginale kosten. Deze marginale kosten mogen benaderd worden door $\frac{dK}{dq}$.

- Toon door berekening aan dat de marginale kosten bij elke productie positief zijn. Hoe is dit ook uit de grafiek af te leiden?
- Toon door berekening aan dat de marginale kosten het kleinst zijn voor $q = 5$.
Hoe is dit ook uit de grafiek af te leiden? Is hier sprake van een buigpunt?
- Bereken de gemiddelde totale kosten per kurkentrekker bij een productie van 7000 stuks. Hoe kun je uit de grafiek afleiden bij welke andere productie de gemiddelde kosten per kurkentrekker even groot zijn als bij een productie van 7000 stuks? Leid deze andere productie uit de grafiek af en controleer het antwoord met de formules.

(bron: examen wiskunde A vwo 1989)



Figuur 4.6

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- definitie afgeleide — limiet — vergelijking raaklijn
- differentieerregels — machtsregel voor gehele positieve n — somregel — constante-regel
- extremen — tekenschema afgeleide
- buigpunt — tweede afgeleide — buigraaklijn

Activiteitenlijst

- afgeleiden bepalen — vergelijking van een raaklijn opstellen
- afgeleiden bepalen m.b.v. differentieerregels
- extremen berekenen m.b.v. de afgeleide
- buigpunten berekenen m.b.v. de tweede afgeleide

Achtergronden

De differentiaalrekening is min of meer tegelijkertijd en zonder dat ze het van elkaar wisten door twee van de allergrootste geleerden van hun tijd uitgevonden:

- In Engeland bedacht **sir Isaac Newton (1642–1727)** zo rond 1665 zijn 'fluxierekening' toen hij zich in die periode bezig hield met beweging, snelheid en versnelling. Hij publiceerde zijn resultaten echter niet.
- In Duitsland schreef **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)** in 1675 het manuscript waarin hij zijn theorie rond het berekenen van hellingen en van oppervlaktes onder krommen uiteenzette.

Lees ook op deze site: [Grafieken en verandering, differentiaalrekening](#).

Testen

★ Opgave 5.1

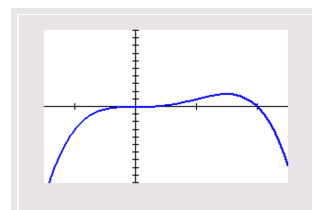
Differentieer de functies.

- a $f(x) = 4x^5 - 12x^2 + 60x + 100$
- b $E(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}$
- c $f(x) = (x + 3)^2$
- d $GTK(q) = \frac{0,5q^3 + 20q^2 + 60q}{q}$

★ Opgave 5.2

Bekijk de grafiek van $f(x) = 2x^3 - x^4$ op het interval $[-1,5; 2,5]$.

- a De grafiek heeft twee punten waarin de raaklijn horizontaal loopt. Bereken met behulp van differentiëren de x -coördinaten van die twee punten en geef aan of het een maximum, een minimum of een buigpunt is.
- b De grafiek van f heeft behalve $(0,0)$ nog een buigpunt. Bereken de coördinaten van dat punt.
- c Stel de raaklijn op aan de grafiek in het bij b bedoelde buigpunt.



Figuur 5.1

★ Opgave 5.3

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0,5x^3 - 6x$.

- Bereken de extremen van deze functie met behulp van differentiëren.
- Laat zien dat $(0,0)$ het buigpunt is van de grafiek van f .
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het buigpunt.

★★ Opgave 5.4

Een fabriek produceert opvouwbare autopedes voor volwassenen als vervoersmiddel in grotere bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt zijn afzet q , in duizendtallen, uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0,1p$. De kosten voor de productie van deze autopedes zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1,5q^3 - 22,5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

- Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?
- Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q .
- Stel een formule op voor de winst TW als functie van de afzet q .
- Bepaal met behulp van differentiëren de prijs van één autoped bij maximale winst.
- Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q .
Bepaal met behulp van differentiëren bij welke afzet GTK minimaal is.

★★ Opgave 5.5

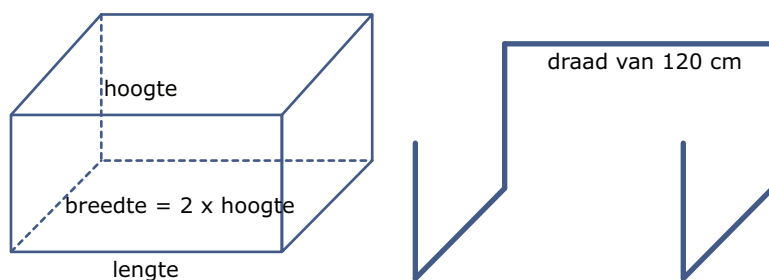
Gegeven zijn de functies: $f(x) = (x^2 - 4)(2x + 1)$ en $g(x) = x^2 - 4$.

- Bepaal algebraïsch de nulpunten en de toppen van de grafiek van f .
- Los op: $f(x) > g(x)$.

Toepassen

★★ Opgave 5.6: Maximaal bakje

Een bedrijf maakt plastic bakjes: bodem en zijvlakken van deze bakjes zijn rechthoeken; de breedte van de bakjes is tweemaal zo groot als de hoogte. Om de bakjes te verstevigen wordt een gebogen metaaldraad met een lengte van 120 cm aangebracht zoals in de tekeningen is aangegeven.



Figuur 5.2

- Bereken de maximale inhoud die deze bakjes kunnen krijgen.
- Als het goed is blijkt bij a dat de lengte van het bakje viermaal zo groot is als de hoogte. Toon aan dat bij elke draadlengte een maximale inhoud ontstaat als de breedte tweemaal de hoogte en de lengte viermaal de hoogte is.

★ ★

Opgave 5.7: ChemoTech

Onder de **marginale kosten** (de meerkosten) wordt in de economie de extra kosten verstaan die de verkoop van één extra eenheid oplevert. Voor marginale opbrengst en - winst bestaan vergelijkbare definities. Deze marginale kosten zijn bij grote hoeveelheden goed te benaderen door middel van een afgeleide.

ChemoTech is een bedrijf dat o.a. een bepaald chemisch onkruidbestrijdingsmiddel produceert. Afhankelijk van het aantal werknemers dat het bedrijf voor de productie daarvan inzet wordt er meer of minder kilo van dit product per maand gemaakt. Bij de productie van een bepaald chemisch onkruidbestrijdingsmiddel heeft de bedrijfsleiding onderzocht hoeveel kilo bestrijdingsmiddel worden geproduceerd per maand afhankelijk van het aantal werknemers. Dit **Excelbestand bij product CT-216X3** laat dat zien. Een arbeidsplaats kost gemiddeld € 1500 per maand en de kosten voor de apparatuur en de gebouwen bedragen ongeveer € 30000,00 per maand. Je kunt op basis van deze gegevens een tabel opstellen waarin de totale kosten TK per maand (in duizenden euro) afhangen van de hoeveelheid bestrijdingsmiddel q die men maandelijks kan produceren.



Figuur 5.3

Bij een productie van 3000 kg/mnd zijn de kosten € 63750.

Bij een productie van 3001 kg/mnd zijn de kosten ongeveer € 63756,75.

De marginale kosten bij $q = 3$ zijn derhalve $MK(3) \approx 6,75$ euro.

Ga zelf na, dat $TK'(3) = 6,75$ (precies).

Je ziet dat de marginale kosten bij $q = 3$ goed kunnen worden benaderd met behulp van de afgeleide van TK . Dit blijkt telkens op te gaan...

- Maak die tabel en ga na dat deze functie er bij past: $TK = 0,25q^3 - 3q^2 + 18q + 30$.
- Laat zien, dat de marginale kosten bij een productie van 4500 kg/mnd goed kunnen worden benaderd door de marginale kosten op $q = 4$. Welke economische betekenis hebben deze marginale kosten?
- Als je de grafiek van de totale kostenfunctie bekijkt, zie je dat ze eerst afnemend stijgen. Bereken tot welke productieomvang (in kilogram) dat het geval is.
- Het bedrijf gaat dit onkruidbestrijdingsmiddel op de markt brengen voor een prijs die door de harde concurrentie ongeveer vast ligt op € 18,00 per kilogram. Stel een formule op voor de totale winst TW in duizenden euro per maand.
- Bij welke geproduceerde hoeveelheid maakt het bedrijf winst?
- Bereken de maximale winst als het bedrijf de geproduceerde hoeveelheid bestrijdingsmiddel ook inderdaad verkoopt.

Stel je voor dat dit bedrijf geen concurrentie zou hebben bij de verkoop van dit onkruidbestrijdingsmiddel. In dat geval is de vraagprijs afhankelijk van de hoeveelheid die men op de markt brengt: een lage prijs betekent een flinke verkoop, een hoge prijs een minder goede verkoop. Neem aan dat geldt: $p = 58,5 - 3q$.

- Hoe hoog is nu de maximaal bereikbare winst? Is die hoger of lager dan in de voorgaande situatie van een vaste prijs?

Examen

★ ★

Opgave 5.8: Toltunnel

Het aantal personenauto's (A) dat per dag van een nieuw aan te leggen toltunnel gebruik zal maken, is volgens een verkeersdeskundige te berekenen met de formule

$$A = 400T^2 - 9150T + 46800$$

Hierbij is T het toltarief in euro. Toltarieven hoger dan 7 euro blijven buiten beschouwing. Met het oog op een snelle doorstroming zal de betaling op elektronische wijze geschieden. Hierdoor is het mogelijk om een toltarief van bijvoorbeeld € 2,67 in rekening te brengen omdat dit niet op praktische bezwaren stuit.

- Bereken de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's bij een toltarief van € 2,00.
- Onderzoek bij welk toltarief de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's maximaal is. Geef je antwoord in centen nauwkeurig.



- c Bereken met hoeveel procent het aantal personenauto's afneemt als bij een tarief van € 2,40 een tariefsverhoging van 5% wordt toegepast.

Bij een zeker toltarief leidt een tariefsverhoging van 6% er toe, dat het aantal personenauto's dat dagelijks de tunnel gebruikt met 2,8% afneemt.

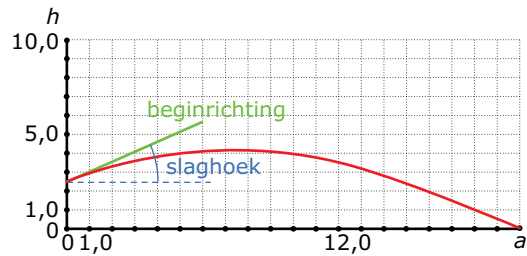
- d Bereken in gehelen nauwkeurig met hoeveel procent de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's door deze tariefsverhoging zal toenemen.

(bron: examen wiskunde A vwo 1992, aangepast)

★ ★

Opgave 5.9: Tennis

Bij sporten als volleybal en tennis is de service erg belangrijk, dat wil zeggen de manier waarop de bal in het spel gebracht wordt. We bekijken hier de service bij tennis. De speler staat bij het serveren 12 meter van het net. Het net is 1 meter hoog. We nemen aan dat de speler de bal raakt op een hoogte van 2,5 meter boven de grond en ter vereenvoudiging gaan we er van uit dat de speler de bal precies in de lengterichting van het veld slaat. In de eerste figuur zie je een mogelijke baan van de bal.



Figuur 5.4

De hoogte van de onderkant van de bal in meter ten opzichte van de grond noemen we h . De horizontale afstand in meter noemen we a . Het verband tussen h en a hangt af van de snelheid waarmee de bal geslagen wordt en van de beginrichting. Deze beginrichting wordt bepaald door de slaghoek. Dit is de hoek waaronder de bal geslagen wordt. Zie eerste figuur.

- a Neem aan dat de bal onder een hoek van 15° geslagen wordt met een snelheid van v m/s. Bij deze hoek geldt bij benadering het volgende verband tussen a en h :

$$h = -\frac{5,36}{v^2}a^2 + 0,27a + 2,50$$

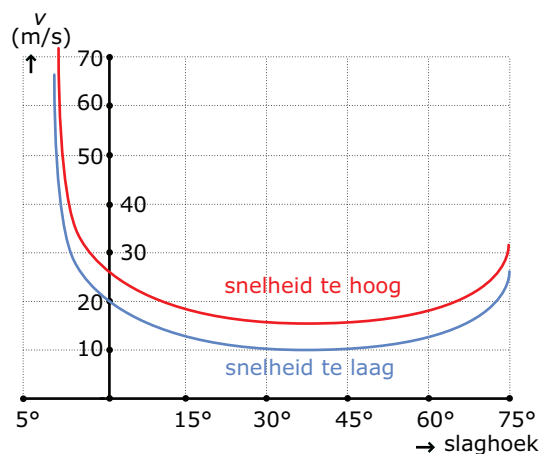
Een speler slaat de bal met een snelheid van 17 m/s. Bereken met behulp van differentiëren de grootste hoogte boven de grond die deze bal bereikt.

In deze vereenvoudigde situatie spreken we van een geldige service als:

- de speler die serveert 12 meter van het net staat;
- de bal precies in de lengterichting van het veld geslagen wordt;
- de bal over het net gaat zonder dit te raken;
- de bal neerkomt op een afstand van ten hoogste 7 meter voorbij het net.

In een artikel over dit onderwerp stond deze grafiek. Daarin is weergegeven bij welke combinaties van slaghoek en snelheid een geldige service verkregen wordt. Een speler die de bal slaat onder een hoek van 30° moet volgens deze grafiek de bal slaan met een snelheid van ongeveer 11 tot 13 m/s. Slaat hij te zacht dan komt de bal niet over het net. Slaat hij te hard dan komt de bal te ver voorbij het net op de grond. Een profspeer slaat bij een geldige service de bal met een snelheid van 150 km/h.

- b Bepaal met behulp van de grafiek de beginrichting van een mogelijke baan van deze bal.



Figuur 5.5



Neem nu aan dat de bal onder een hoek van 10° geslagen wordt. Bij deze hoek geldt bij benadering de volgende formule voor het verband tussen a en h :

$$h = \frac{-5,16}{v^2}a^2 + 0,18a + 2,50$$

Voor een geldige service moet de bal over het net gaan zonder dit te raken. De snelheid is te laag als in bovenstaande formule bij afstand $a = 12$ de hoogte $h \leq 1$ is. Volgens de grafiek is een snelheid van 16 m/s of minder te laag voor een geldige service. Echter, met behulp van een berekening is na te gaan dat de figuur hier erg onnauwkeurig is getekend.

- c** Welke snelheden (in m/s) zijn volgens de formule te laag voor een geldige service? Geef je antwoord in ten minste één decimaal nauwkeurig.

Voor een geldige service moet de bal bovendien ten hoogste 7 meter voorbij het net de grond raken. Uit deze eis volgt ook een voorwaarde voor v .

- d** Welke getallen moet je in de bovenstaande formule invullen om deze voorwaarde te krijgen? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A vwo 2000, eerste tijdvak)



Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:

✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

1	Het begrip afgeleide	★	★★	★★★
	Het begrip afgeleide functie.	1.1 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ T5.1 ☐	1.5 ☐	1.6 ☐
	De hellingswaarden van een grafiek in een punt berekenen.	1.1 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐	1.5 ☐	1.6 ☐
	De hellingsfunctie of afgeleide functie van een gegeven functie afleiden.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐	1.5 ☐	1.6 ☐
2	Differentiëren	★	★★	★★★
	De afgeleide van een functie bepalen met behulp van differentieerregels.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.4 ☐ T5.1 ☐ T5.2 ☐ T5.3 ☐	2.5 ☐ T5.4 ☐ T5.5 ☐ T5.6 ☐ T5.7 ☐ T5.8 ☐ T5.9 ☐	2.6 ☐
	De hellingswaarde bepalen met de afgeleide.	2.1 ☐ T5.2 ☐ T5.3 ☐	2.5 ☐ T5.4 ☐ T5.5 ☐ T5.6 ☐ T5.7 ☐	2.6 ☐
	Bepalen waar de grafiek een bepaalde hellingswaarde heeft.	2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.4 ☐ T5.2 ☐	2.5 ☐	
3	Extremen berekenen	★	★★	★★★
	Extremen berekenen met behulp van de afgeleide van een functie.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ T5.2 ☐ T5.3 ☐	3.5 ☐ 3.7 ☐ 3.8 ☐ T5.4 ☐ T5.5 ☐ T5.6 ☐ T5.7 ☐ T5.8 ☐ T5.9 ☐	
	Het berekenen van extremen toepassen in praktijksituaties.	3.3 ☐ 3.4 ☐	3.5 ☐ 3.7 ☐ 3.8 ☐ T5.4 ☐ T5.6 ☐ T5.7 ☐ T5.8 ☐ T5.9 ☐	
4	Buigpunten	★	★★	★★★
	Buigpunten berekenen met behulp van de tweede afgeleide van een functie.	3.6 ☐ 4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ T5.2 ☐ T5.3 ☐	4.4 ☐ 4.5 ☐ T5.7 ☐	
	Het berekenen van buigpunten toepassen in praktijksituaties.	3.6 ☐ 4.3 ☐	4.5 ☐ T5.7 ☐	

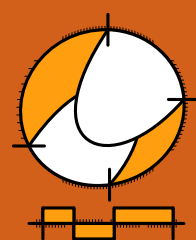
Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

**De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst.
De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.**

Stichting Math4All



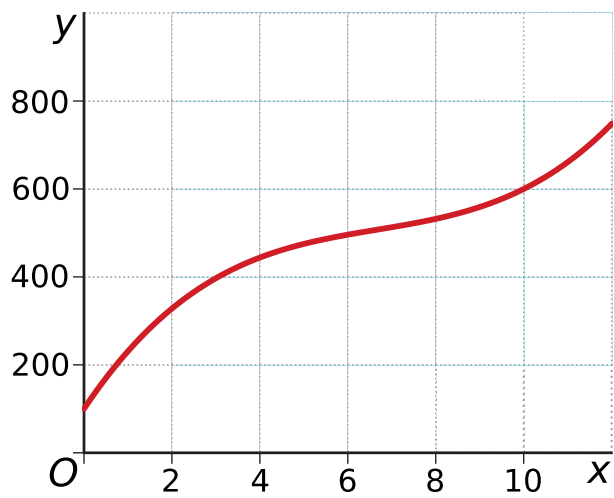
www.math4all.nl



Werkblad bij Opdracht 2.1

1: $f(x) = x^2$ $f'(x) = \dots$	6: $f(x) = x^3$ $f'(x) = \dots$	11: $f(x) = x^4$ $f'(x) = \dots$
2: $f(x) = 3x^2$ $f'(x) = \dots$	7: $f(x) = 2x^3$ $f'(x) = \dots$	12: $f(x) = 3x^4$ $f'(x) = \dots$
3: $f(x) = x^2 + 5$ $f'(x) = \dots$	8: $f(x) = x^3 + 5$ $f'(x) = \dots$	13: $f(x) = x^4 + 5$ $f'(x) = \dots$
4: $f(x) = 3x^2 + 5$ $f'(x) = \dots$	9: $f(x) = 2x^3 + 5$ $f'(x) = \dots$	14: $f(x) = 3x^4 + 5$ $f'(x) = \dots$
5: $f(x) = a \cdot x^2 + b$ $f'(x) = \dots$	10: $f(x) = a \cdot x^3 + b$ $f'(x) = \dots$	15: $f(x) = a \cdot x^4 + b$ $f'(x) = \dots$

Werkblad bij Opdracht 4.1



Hier zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 20x^2 + 150x + 100$.