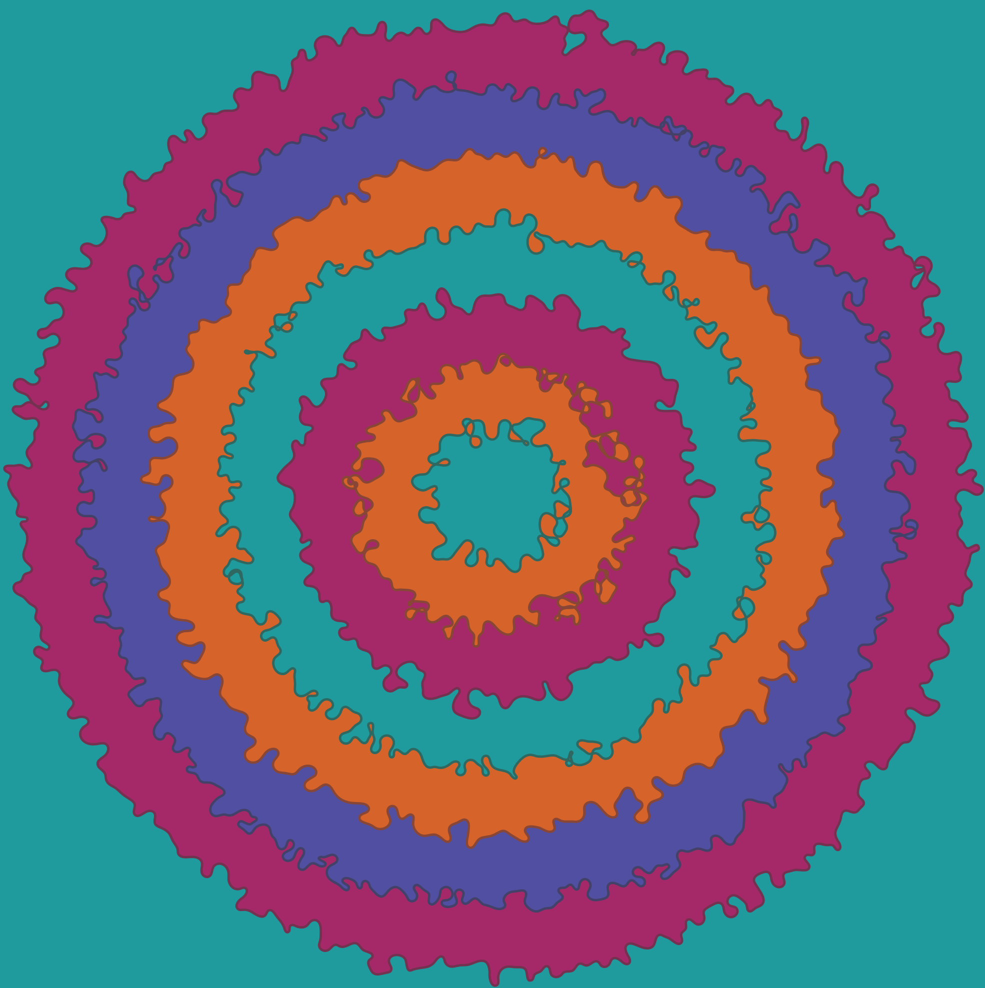
Wiskunde A / PGA

4 VWO

Veranderingen

ConTeXt College



Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je werkt dan onder begeleiding van je docent in kleine groepjes aan wiskundige problemen en samen bouw je de theorie op en maak je er een overzicht van.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee je kunt nagaan of je de stof beheerst. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding vind je terug in de marge.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die je alleen hoeft te maken als je er genoeg tijd voor hebt
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die je alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk voor je was

1

Veranderingen

1.1 In grafieken

Inleiding

In de Delta Nederland verandert de waterstand voortdurend. De veranderingen worden beschreven met eb, laagwater, vloed en hoogwater. Tussen hoogwater en laagwater daalt het water. Maar stijging en daling zijn niet constant: vlak voor hoogwater neemt de stijging langzaam af en na hoogwater neemt de daling een paar uur lang toe.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen stijgend en dalend en constant gebruiken bij grafieken;
- toenemende, afnemende en constante stijging en daling herkennen;
- (lokale) maxima en minima van een grafiek bepalen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het beschrijven van het verloop van een grafiek, de meeste gebruikte termen ken je vermoedelijk al. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - welke formuleringen en grafieken er voorbij komen.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

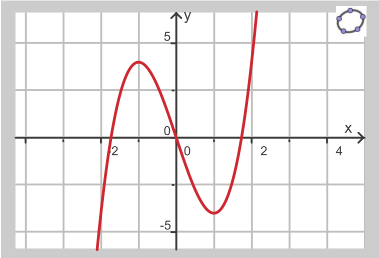
Verwerken

★ Opgave 1.1

Bekijk deze grafiek gemaakt met GeoGebra.

Geef voor deze functie aan:

- op welke intervallen de grafiek daalt dan wel stijgt en om welk soort stijging of daling het daarbij gaat;
- welke extremen er zijn;
- voor welke waarden van x de daling het sterkst is.



Figuur 1.2

★ Opgave 1.2

Gegeven is een functie met voorschrift $f(x) = x^3 - 3x$. Bekijk deze functie met de grafische rekenmachine.

a Beschrijf met intervallen het verloop van de grafiek van f.

b Wat zijn de extremen van f?

c Waarom kun je niet aangeven waar de snelheid van stijgen het grootst is?

★ Opgave 1.3

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 8$.

a Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van deze functie bekijken. Welke extremen heeft deze functie?

b Op hoeveel intervallen is bij de grafiek van f sprake van toenemende daling?

c Geef het bereik van f.

★ Opgave 1.4

Sofie rijdt met de auto naar de supermarkt. De eerste 7 seconden trekt ze eerst rustig maar daarna snel op, daarna rijdt ze 15 seconden met een constante snelheid om vervolgens 10 seconden lang geleidelijk af te remmen, totdat ze stil staat voor een stoplicht. Ze staat daar 30 seconden stil. Als het stoplicht op groen springt, trekt Sofie geleidelijk op en na 8 seconden rijdt ze weer met een constante snelheid, totdat ze na 2 minuten bij de supermarkt is aangekomen en in 12 seconden geleidelijk afremt totdat ze stil staat.
Beschrijf met intervallen de soorten stijging en daling van de snelheid die optreden gedurende de route die Sofie naar de supermarkt aflegt.

★ ★ Opgave 1.5

Voor de temperatuur T in °C op een bepaalde dag geldt:

- om 6:00 uur ’s morgens ($t = 6$) is de temperatuur $T = 2$ °C;
- de grafiek toenemend stijgt van $t = 6$ tot $t = 12$;
- de grafiek afnemend stijgt van 12:00 uur tot 14:30 uur en dan toenemend daalt tot $t = 20$;
- de grafiek afnemend daalt van $t = 20$ tot aan het eind van de dag.

Maak een schets van een mogelijke grafiek van deze functie en leg uit bij welke waarde van t de functie T een uiterste waarde moet hebben.

Toepassen

★ ★ Opgave 1.6: Winstformule

Voor een klus maakt een bedrijf gebruik van de volgende winstformule $W = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2$, waarbij W de winst in honderden euro's is en x het aantal werknemers dat het bedrijf voor de klus gebruikt.

a Bij welk aantal werknemers is er maximale winst?

Voor het bepalen van hoeveel werknemers het bedrijf moet inzetten, wordt er gekeken naar de extra winst per werknemer. Zo is de extra winst van de zesde werknemer $W(6) - W(5)$. De extra winst per werknemer wordt ook wel de marginale winst genoemd. Het bedrijf zorgt er voor dat er zoveel werknemers gebruikt worden dat de marginale winst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

b Hoeveel werknemers moet men dan voor de klus inzetten?

c Het antwoord van b wijkt af van dat van a. Toch kan het voor het bedrijf beter zijn, om naar de extra winst te kijken zoals bij b is gedaan. Waarom?

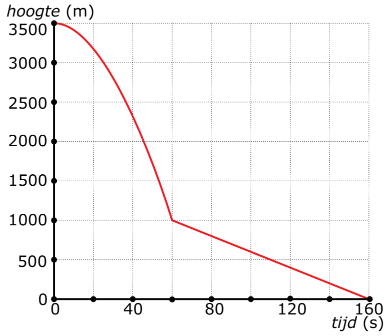
★ ★ Opgave 1.7: Parachutist

Je ziet de grafiek die hoort bij een parachutesprong vanaf 3500 meter hoogte. Eerst maakt de parachutist een vrije val en daarna opent hij zijn parachute.

a Na hoeveel seconden heeft deze parachutist zijn valscherm geopend? Hoe zie je dat aan de grafiek?

b In de periode van vrije val is de grafiek toenemend dalend. Wat betekent dit voor de valsnelheid?

c Als de parachute uit is, is de valsnelheid constant. Hoe zie je dat aan de grafiek? Hoe groot is de valsnelheid als de parachute uitgevouwen is?



Figuur 1.3

Antwoorden

1.1 $\langle\leftarrow, -1\rangle$: afnemende stijging; $\langle -1{,}0\rangle$: toenemende daling; $\langle 0{,}1\rangle$: afnemende daling; $\langle 1, \rightarrow\rangle$: toenemende stijging; maximum $f(-1) \approx 4{,}5$ en minimum $f(1) \approx -4{,}5$; sterkste daling voor $x = 0$.

1.2 a $\langle\leftarrow, -1\rangle$: afnemende stijging; $\langle -1{,}0\rangle$: toenemende daling; $\langle 0{,}1\rangle$: afnemende daling; $\langle 1, \rightarrow\rangle$: toenemende stijging.

b maximum: $f(-1) = 2$; minimum: $f(1) = -2$

c Bij hele kleine en grote waarden van x stijgt de grafiek steeds steiler. Dit gaat in theorie oneindig door, dus er is geen maximale stijging.

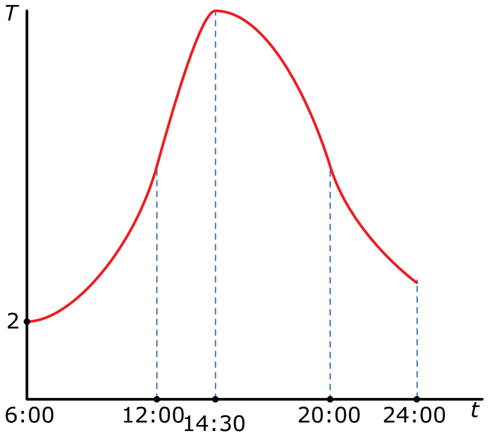
1.3 a maximum: $f(0) = 8$; minimum: $f(-2) = 0$; minimum: $f(2) = 0$

b Eén interval.

c $B_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$

1.4 $\langle 0{,}7\rangle$: toenemende stijging; $\langle 7{,}22\rangle$: geen stijging/daling; $\langle 22{,}32\rangle$: constante daling; $\langle 32{,}62\rangle$: geen stijging/daling; $\langle 62{,}70\rangle$: constante stijging; $\langle 70{,}190\rangle$: geen stijging/daling; $\langle 190{,}202\rangle$: constante daling.

1.5 Zie de figuur.



Maximumtemperatuur om 14:30 uur, de grafiek gaat daar over van stijgend in dalend.

1.6 a Het bedrijf moet acht werknemers inzetten.

b Het bedrijf moet dan vier of vijf werknemers inzetten.

c Van zeven naar acht werknemers gaan is kleinere winsttoename dan van drie naar vier werknemers gaan.

1.7 a Na 60 seconden, vanwege de knik in de grafiek.

b De grafiek daalt steeds steiler, de valsnelheid wordt dus steeds groter.

c De grafiek is een rechte lijn. De valsnelheid is dan 10 m/s.

1.2 Veranderingen per stap

Inleiding

Om veranderingen van grafieken nauwkeurig te beschrijven kijk je naar de toenames (of afnames) van de uitkomsten bij toename van de invoerwaarden met een vaste stapgrootte. Bijvoorbeeld bij een functie $y = f(x)$ bekijk je de toename van y bij een toename van x met een vaste stapgrootte. Je maakt van die toenames een toenamediagram.

Je leert in dit onderwerp

- een toenamediagram maken bij een gegeven grafiek of een gegeven functievoorschrift;
- de invloed van de stapgrootte op het toenamediagram bepalen;
- vanuit een gegeven toenamediagram (en 'beginwaarde') een mogelijke grafiek van de functie samenstellen of bepalen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, afnemende of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het beschrijven van het verloop van een grafiek met behulp van een toenamediagram, dus stap voor stap. Ook is het de bedoeling dat je leert hoe je vanuit een toenamediagram een mogelijke grafiek kunt opbouwen. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - wat er voorbij komt.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

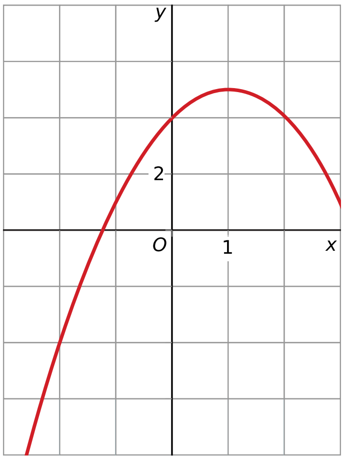
Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 2.1**



Figuur 2.1

Teken bij de grafiek een toenamediagram met stapgrootte 1, te beginnen bij $x = -1$.

★ **Opgave 2.2**

Gegeven is de functie f met voorschrift: $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 8$.

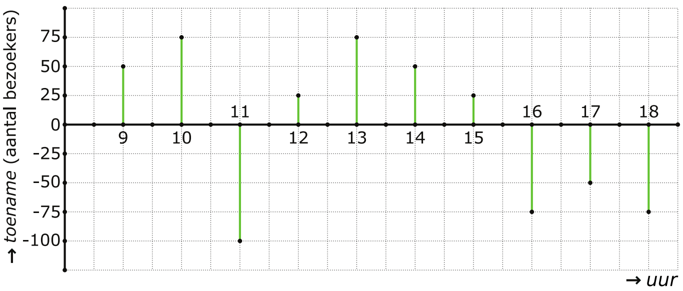
a Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van deze functie bekijken en een toenametabel maken. Teken een toenamediagram op het interval $[-3,3]$ met een stapgrootte van 0,5.

b Hoe zie je aan het toenamediagram dat er precies één interval is waarop de grafiek toenemend daalt?

c Waarom kun je op grond van het toenamediagram concluderen dat er waarschijnlijk drie extremen zijn?

★ ★ **Opgave 2.3**

In een museum is vanaf de opening om 8:00 uur ’s morgens tot de sluitingstijd om 18:00 uur elk uur het aantal bezoekers geteld. Van deze gegevens is een toenamediagram gemaakt. Om 12:00 uur waren er 50 bezoekers.



Figuur 2.2

a Maak een grafiek van het totaal aantal bezoekers afhankelijk van het uur van deze dag, van 8:00 uur tot 18:00 uur.

b Rond welk tijdstip waren er waarschijnlijk de meeste bezoekers in het museum?

c Kun je vaststellen hoeveel bezoekers er maximaal in het museum waren op enig moment die dag? Licht je antwoord toe.

★ ★

Opgave 2.4

Biologen houden het verloop van de aantallen van een bepaald soort vlinder bij in een afgesloten natuurgebied. De tabel geeft de verzamelde informatie weer:

Jaartal	2010	2011	2012	2013	2014
Aantal vlinders	2450	2050	1810	1665	1580
Verschil V t.o.v. vorig jaar		-400	-240	-145	-85

Tabel 2.1

Het lijkt erop dat het verschil V ten opzichte van het voorgaande jaar exponentieel verandert met de tijd t in jaren. Er lijkt te gelden: $V = -400 \cdot 0{,}6^{t-1}$ met $t = 0$ in het jaar 2010.

a Ga na of deze formule in overeenstemming is met de gevonden verschillen.

b Ga er vanuit dat deze formule geldig blijft in de jaren na 2014. Teken een toenamediagram van het aantal vlinders in dit natuurgebied met een stapgrootte van 1 jaar.

c Maak ook een grafiek van het aantal vlinders N in de loop van de jaren.

d Van wat voor soort daling is er sprake bij het aantal vlinders? Hoe kun je dat aan het toenamediagram zien?

e Het aantal vlinders van deze soort lijkt zich in dit natuurgebied te stabiliseren. Hoe kun je dat aan het toenamediagram zien? En wat betekent dit voor de grafiek van het aantal vlinders?

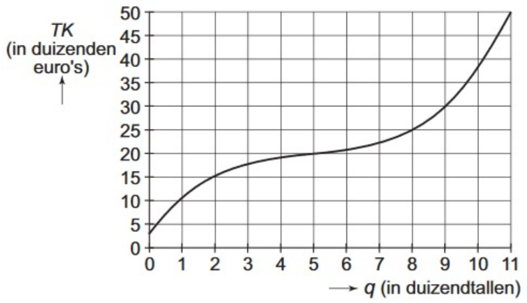
Toepassen

★

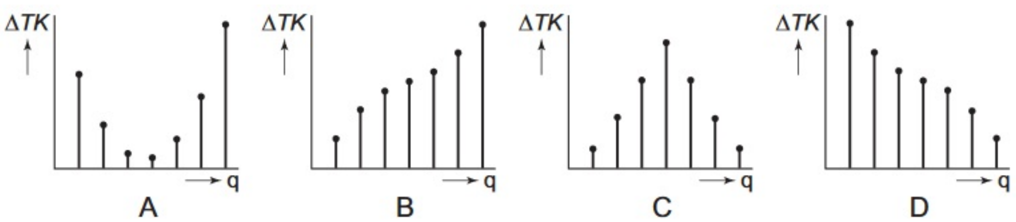
Opgave 2.5: Verpakkingen produceren

Een bedrijf maakt bijzondere verpakkingen. Het bedrijf heeft onderzocht hoe de kosten voor het maken van die verpakkingen samenhangen met het aantal verpakkingen. Het verband tussen de totale kosten TK (in duizenden euro's) en het aantal geproduceerde verpakkingen q (in duizendtallen) zie je in de figuur. Daaruit lees je bijvoorbeeld af dat bij een productie van 2000 verpakkingen de totale kosten € 15.000 zijn.

In de diagrammen A, B, C en D, is de toename ΔTK van TK weergegeven. Eén van de vier diagrammen past bij de grafiek.



Figuur 2.3



Figuur 2.4

a Welk toenamediagram past bij de grafiek? Licht je antwoord toe.

A. diagram A
B. diagram B
C. diagram C
D. diagram D

b Met hoeveel procent stijgen de totale kosten als de productie van 4000 naar 8000 verpakkingen gaat?

(naar: examen havo wiskunde A in 2006, eerste tijdvak)

★ ★ ★

Opgave 2.6: Model voor een chemische ramp

Onderzoekers hebben een model ontwikkeld voor een ramp met een chemische fabriek bij een middelgrote stad. In dit model wordt het aantal personen dat last heeft van ongemakken zoals buikloop, duizeligheid en hoofdpijn, voorgesteld door het functievoorschrift: $n(t) = -4(40-t)^3 + 150(40-t)^2 + 16000$.

Hierbij stelt t het aantal dagen na het plaatsvinden van de ramp voor en $n(t)$ het bijbehorend aantal slachtoffers.

a Plot de grafiek van n. Laat t lopen van 0 tot 40.

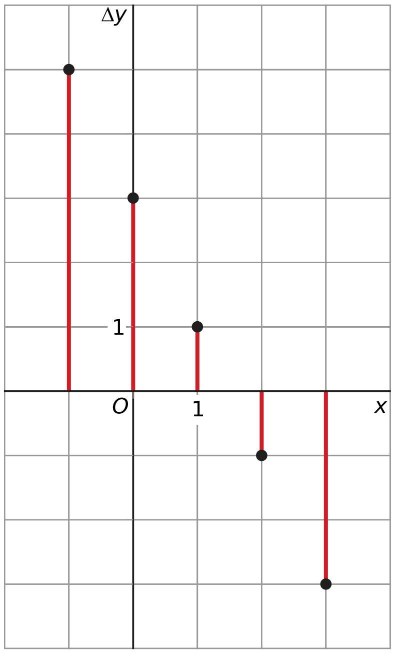
b Geef met intervallen aan welke soorten verandering je in de grafiek ziet.

c Na hoeveel dagen is er een maximaal aantal slachtoffers?

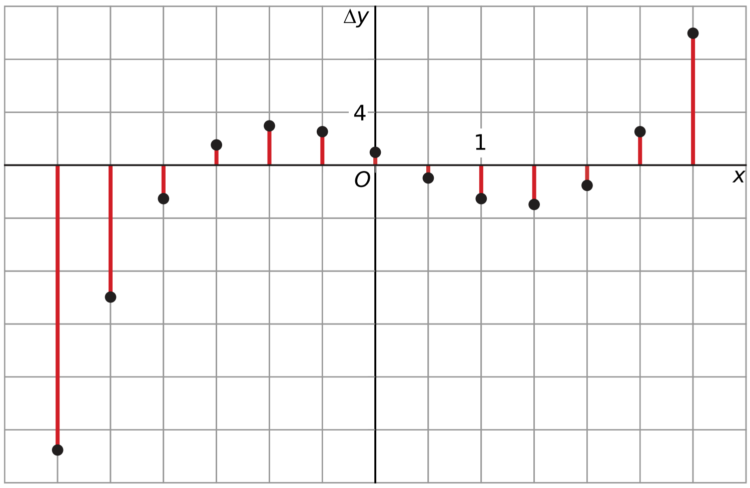
d De gevolgen van het ongeval zijn over het hoogtepunt heen als de toename van het aantal slachtoffers in vergelijking met twee dagen daarvoor kleiner is dan 1500. Na hoeveel dagen is dat het geval?

Antwoorden

2.1 Maak eerst een tabel.



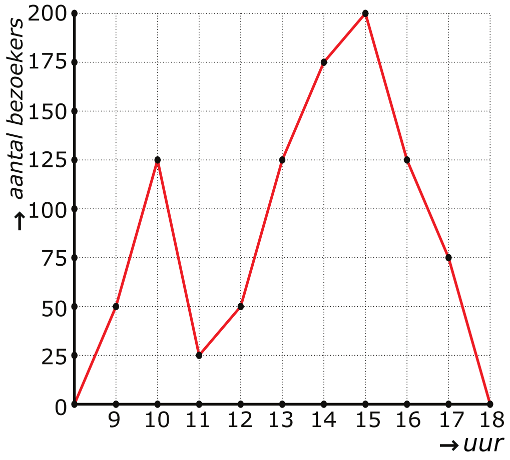
2.2 a Zie de figuur.



b De staafjes die omlaag gaan, gaan maar op één interval steeds verder omlaag.

c Drie keer wisselt de toename van positief naar negatief of omgekeerd.

2.3 a Zie de figuur.

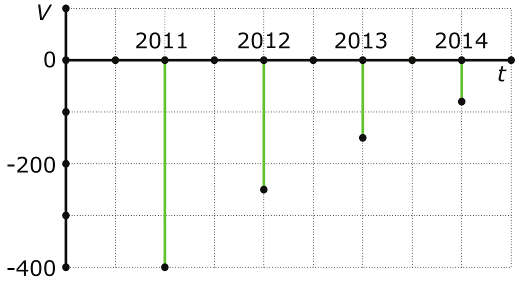


b Rond 15:00 uur.

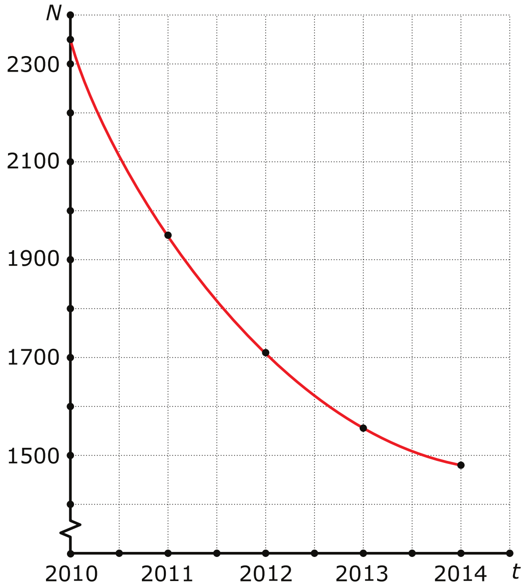
c Nee, niet precies. Er is niet elk moment, maar steeds na een uur gemeten.

2.4 a Maak een tabel van V ten opzichte van t in jaren.

b Zie de figuur.



c Zie de figuur.



d Afnemende daling, de afnames worden steeds kleiner.

e De afnames naderen naar 0. De grafiek van N heeft dan een horizontale asymptoot.

2.5 a A

b Ongeveer 32% meer.

2.6 a Voer in: Y1=-4*(40-X)^3+150*(40-X)^2+16000 met $0 \leq x \leq 40$ en $0 \leq y \leq 50000$.

b $\langle 0{,}15 \rangle$: afnemende stijging; $\langle 15; 27{,}5 \rangle$: toenemende daling; $\langle 27{,}5; 40 \rangle$: afnemende daling

c Na 15 dagen.

d Na 14 dagen.

1.3 Differentiequotiënt

Inleiding

Je hebt veranderingen in grafieken leren beschrijven in woorden en met toenamediagrammen. Bij toenamediagrammen moet je met een vaste stapgrootte werken. Maar als je wilt nagaan of een wielrenner de eerste 10 minuten gemiddeld net zoveel heeft afgelegd als de volgende 15 minuten, heb je met ongelijke intervallen te doen. In dat geval werk je met gemiddelde veranderingen.

Je leert in dit onderwerp

- de betekenis van het begrip differentiequotiënt kennen;
- tussen twee punten uit een tabel of een grafiek het differentiequotiënt bepalen;
- het differentiequotiënt van een functie op een gegeven interval berekenen;
- werken met toepassingen van het differentiequotiënt.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- werken met toenamediagrammen.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het vergelijken van de veranderingen in een grafiek over verschillende intervallen. De bijbehorende begrippen moet je onthouden, want die worden later weer gebruikt. Bekijk vooral welke verschillende begrippen eigenlijk hetzelfde betekenen. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - wat er voorbij komt.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

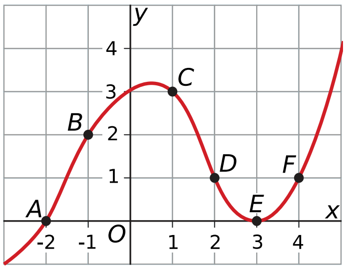
Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 3.1**

Je ziet een aantal punten op de grafiek.



Figuur 3.1

a Bereken de gemiddelde helling van het lijnstuk AB.

b Bereken de gemiddelde helling van het lijnstuk CF.

c Voor twee lijnstukken die horen bij twee van de getekende punten hoort een differentiequotiënt van 0. Welke twee lijnstukken zijn dat?

d Punt F heeft een kleinere y-waarde dan punt C. Hoe kun je dat aan het differentiequotiënt op het interval [1,4] zien?

★ **Opgave 3.2**

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval [0,2].

b Bereken het differentiequotiënt op het interval [-1,2].

c Wat valt je bij b op? Kun je dat verklaren?

★ **Opgave 3.3**

Tijdens een hardloopwedstrijd van 10 kilometer wordt op drie momenten de (tussen)tijd gemeten. De resultaten van Bram zie je in de tabel.

tijd (minuten)	0	12	27	39
afstand (kilometer)	0	3	7	10

Tabel 3.1

a Op welk tijdsinterval liep Bram gemiddeld het snelst?

b Cedric loopt de eerste 1,5 kilometer in 6 minuten. Stel dat hij de hele wedstrijd met hetzelfde tempo loopt. Finisht hij dan voor of na Bram?

★★ **Opgave 3.4**

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2$. Toon aan dat het differentiequotiënt op elk interval $[a, a+1]$ gelijk is aan $6 \cdot a + 3$.

★★★ **Opgave 3.5**

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2{,}5x^2 + 3x$.

a Bereken het differentiequotiënt van f op het interval [0,2] exact.

b Geef nog een interval met eenzelfde differentiequotiënt als bij a.

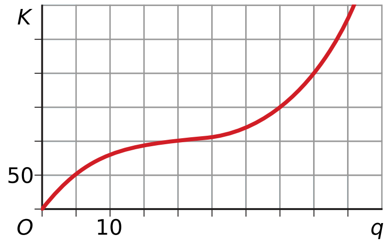
Toepassen

★ ★

Opgave 3.6: Koekjesproductie

Het bedrijf Fiesta produceert koekjes voor de horeca. Als verpakking gebruiken ze zakken van 3 kilogram. De kosten hangen af van het aantal zakken koekjes dat gemaakt wordt, q is het aantal geproduceerde zakken koekjes per uur.
Voor de kosten K (in euro) wordt het volgende functievoorschrift gebruikt:

$K(q) = 0{,}01q^3 - 0{,}6q^2 + 13q$



Figuur 3.2

a Bereken de totale kostenstijging bij een productietoename van 0 zakken per uur naar 20 zakken per uur.

b Bereken de gemiddelde kostenstijging bij een productietoename van 0 zakken per uur naar 20 zakken per uur.

c Plot zelf de grafiek op de grafische rekenmachine. Plot ook de lijn door de punten (0,0) en (20,100). De lijn snijdt de grafiek van K in een derde punt. Geef de coördinaten van dat punt.

d Kun je nu zonder berekening zeggen wat de gemiddelde kostenstijging is op het interval [20,40]? Licht je antwoord toe.

★ ★

Opgave 3.7: Afkoelende koffie

Het afkoelen van een kopje koffie hangt af van de temperatuur van de koffie bij het inschenken en van de kamertemperatuur. Ook de vorm en het materiaal waarvan het kopje is gemaakt, heeft invloed. De formule $T(t) = 20 + 70 \cdot 0{,}82^t$ geeft de temperatuur van de koffie.

a Hoe hoog is de temperatuur van de koffie bij het inschenken?

b Hoeveel graden daalt de temperatuur van de koffie gemiddeld in de eerste vijf minuten?

c Bereken ook in één decimaal nauwkeurig hoeveel de temperatuur gemiddeld daalt in de volgende vijf minuten.

d De temperatuur van de koffie daalt van $t = 0$ tot $t = 5$ sneller dan van $t = 5$ tot $t = 10$. Leg uit hoe je dit aan de differentiequotiënten bij b en c kunt zien. Geef ook een natuurkundige verklaring.

Antwoorden

3.1 a 2

b $\frac{-2}{3}$

c DF en AE.

d Het differentiequotient is negatief.

3.2 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

c Differentiequotiënt van 0, want de punten bevinden zich op dezelfde hoogte.

3.3 a Op het tijdsinterval [12,27].

b Hij finisht na Bram.

3.4 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(a+1)^2 - 3a^2}{1} = 6a + 3$

3.5 a $-\frac{2}{3}$

b De intervallen [0,2], [2; 5,5] en [0; 5,5].

3.6 a 100 euro.

b 5 euro per zak.

c (40,200)

d Ja, ook € 5,00 per zak.

3.7 a $T(0) = 90$ °C.

b Daling van 8,8 °C/min.

c 3,3 °C/min.

d De differentiequotiënten worden steeds kleiner.

Natuurkundig gezien wordt het temperatuurverschil met de omgeving steeds kleiner.

1.4 Differentiaalquotiënt

Inleiding

Als je in de auto vanuit een buitenwijk naar het centrum van de stad rijdt, leg je ongeveer 4 kilometer af in 15 minuten. Dat is 16 km/h (kilometer per uur).
Toch kun je onderweg wel een bekeuring oplopen voor het rijden van meer dan 50 km/h binnen de bebouwde kom. Je gemiddelde snelheid zegt nog weinig over je snelheid op elk moment van de route.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de verandering op een bepaald moment (het differentiaalquotiënt) benaderen;
- het begrip ‘hellingsgetal in een punt’ van een grafiek;
- een raaklijn in een punt van een grafiek aan die grafiek van een formule voorzien;
- werken met toepassingen van de verandering op een bepaald moment.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- werken met differentiequotiënten.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het berekenen van de veranderingssnelheid van een grafiek in een bepaald punt op die grafiek. De bijbehorende begrippen moet je onthouden, want die worden later weer gebruikt. Bekijk vooral welke verschillende begrippen eigenlijk hetzelfde betekenen. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - wat er voorbij komt.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ Opgave 4.1

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 5x^2 - x^3$ op de grafische rekenmachine.

a Bereken het hellingsgetal van de raaklijn aan f voor $x = 2$ met behulp van een rij differentiequotiënten.

b Je kunt van tevoren aan de grafiek zien of het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 2$ positief of negatief is. Waaraan kun je dat zien?

c Stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 2$ aan de grafiek van f.

★ Opgave 4.2

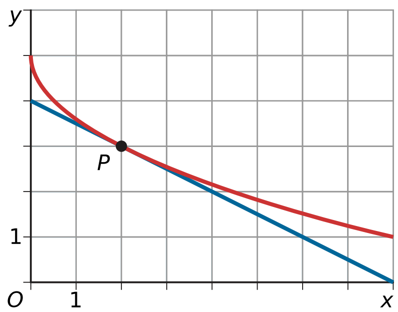
Je ziet een deel van een grafiek met een raaklijn aan de grafiek in het punt bij $x = 2$.

a Bepaal het differentiaalquotiënt voor $x = 2$ met behulp van de grafiek.

b Stel de vergelijking op van de getekende raaklijn.

De grafiek hoort bij de functie $f(x) = 5 - \sqrt{2x}$.

c Controleer je antwoord bij a door het differentiaalquotiënt door de grafische rekenmachine te laten bepalen.



Figuur 4.2

★ Opgave 4.3

Gegeven is de functie met voorschrift $g(x) = \frac{4}{x}$ op het interval [-5,5].

a Bereken de verandering van $g(x)$ voor $x = 1$.

b Er is een punt op de grafiek van g waar de helling dezelfde waarde heeft als die in het punt (1,4). Welk punt is dat? Licht je antwoord toe.

c Voor $x = 0$ heeft de functie g geen functiewaarde. Wat betekent dit voor de helling? En wat is er met de grafiek aan de hand?

★ Opgave 4.4

De concentratie C van een bepaalde stof die is opgelost in water, neemt met de tijd af volgens de formule $C(t) = 10 \cdot 0{,}9^t$. Hierin is C in gram per liter (g/L) en t in uren.

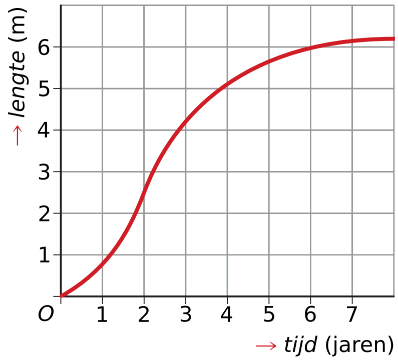
a Er verdwijnt niet elk uur een even grote hoeveelheid van deze stof uit het water. Hoe komt dat?

b Hoeveel gram van deze stof verdwijnt er gemiddeld in de eerste 5 uren? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c De vervalsnelheid van deze stof op $t = 5$ is niet gelijk aan de hoeveelheid die er tot dan toe gemiddeld per uur is verdwenen. Bereken deze vervalsnelheid in twee decimalen nauwkeurig.

★ **Opgave 4.5**

Bekijk de grafiek van de lengtegroei van een boom. Neem de grafiek over.



Figuur 4.3

a Hoeveel meter per jaar groeit deze boom gemiddeld, gerekend over de eerste vijf jaar?

b Wat is de groeisnelheid na precies vijf jaar? Geef een zo nauwkeurig mogelijke schatting.

c Op welk tijdstip is de groeisnelheid het grootst? Licht je antwoord toe.

d Welke waarde krijgt de groeisnelheid uiteindelijk als de boom gezond blijft?

★ ★ **Opgave 4.6**

De baan van een vuurpijl is bij benadering parabolisch tot hij uit elkaar spat. Bij deze baan past de formule $h(x) = -x^2 + 10x$, waarin zowel h als x in meters wordt uitgedrukt.

a Welke helling heeft de baan als de vuurpijl wordt afgeschoten?

b In welk punt van de baan is de helling 0?

c Als de pijl horizontaal 8 meter heeft afgelegd, spat hij uiteen. Hoe hoog is de pijl dan en welke helling heeft de baan op dat punt?

Toepassen

★ ★ **Opgave 4.7: Vallend voorwerp**

Een steen valt van een loodrechte rotswand 500 meter naar beneden. Voor de afgelegde weg y (in meter) geldt de formule $y(t) = 4{,}9t^2$, waarin t de tijd in seconden is, tenminste zolang de steen nog aan het vallen is en niet op de grond terecht is gekomen.

a Bereken de gemiddelde snelheid van de steen gedurende de eerste 5 seconden.

b Bereken de snelheid van de steen na precies 5 seconden. Gebruik een rij van differentiequotiënten en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

c Bereken de snelheid waarmee de steen op de grond terechtkomt.

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het bepalen van een differentiaalquotiënt.

- **Veranderingen, differentiëren en de TI84**
- **Veranderingen, differentiëren en de TInspire**
- **Veranderingen, differentiëren en de Casio**
- **Veranderingen, differentiëren en de HPprime**
- **Veranderingen, differentiëren en de NumWorks**

Antwoorden

4.1 a Het hellingsgetal voor $x = 2$ zal 8 zijn.

b De grafiek is stijgend voor $x = 2$.

c $y = 8x - 4$

4.2 a $-\frac{1}{2}$

b $y = -\frac{1}{2}x + 4$

c Voer in: Y1=5−√(2X) en gebruik de optie dy/dx.

4.3 a -4

b In $(-1, -4)$.

c Voor $x = 0$ heeft de grafiek geen hellingsgetal, maar een verticale asymptoot.

4.4 a De grafiek is afnemend dalend.

b 0,82 g/L.

c Ongeveer -0,62 g/L per uur.

4.5 a Gemiddelde groei is 1,12 m/jaar

b Ongeveer 0,53 m/jaar.

c Na 2 jaar.

d 0 m/jaar.

4.6 a Met de GR kun je berekenen dat de helling 10 is als $x = 0$.

b In (5,25).

c 16 meter hoog met hellingsgetal -6.

4.7 a 24,5 m/s.

b 49 m/s.

c 99 m/s.

1.5 Hellingsgrafiek

Inleiding

Je kunt bij veel functies in een punt van de grafiek de helling van die grafiek berekenen. Bij de meeste x-waarden hoort wel een hellingsgetal. En dus kun je een grafiek maken van het hellingsgetal afhankelijk van de waarde van x. Zo'n ‘hellingsgrafiek’ zegt dan weer het nodige over de grafiek van de functie zelf.

Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- bij een gegeven grafiek een hellingsgrafiek schetsen;
- bij een gegeven functievoorschrift een hellingsgrafiek tekenen en in eenvoudige gevallen het voorschrift van de hellingsfunctie bepalen;
- uit een gegeven hellingsgrafiek gegevens over de bijbehorende functie aflezen;
- werken met tekenschema's van de hellingen van een functie.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- met een differentiequotiënt de gemiddelde verandering op een interval uitrekenen;
- met een differentiaalquotiënt de verandering voor een bepaalde invoerwaarde berekenen.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het tekenen van de hellingsgrafiek, een grafiek van alle mogelijke hellingsgetallen, van een functie. De bijbehorende begrippen moet je onthouden, want die worden later weer gebruikt. Bekijk vooral welke verschillende begrippen eigenlijk hetzelfde betekenen. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - wat er voorbij komt.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

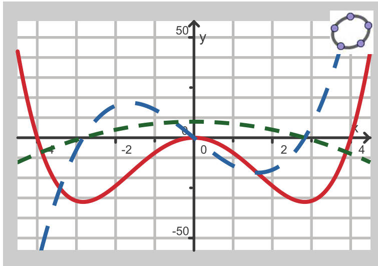
Om te onthouden

Verwerken

Opgave 5.1

Je ziet hier drie grafieken gemaakt met GeoGebra.

Welke van de twee gestippelde grafieken is de hellingsgrafiek van de rode grafiek?



Figuur 5.2

★

Opgave 5.2

Bekijk het tekenschema van de hellingsfunctie van een functie g.
Schets een mogelijke grafiek van g.

$- - - - - \; 0 \; - - - \; 0 \; + \; 0 \; - - - - \; 0 \; + + + + \quad g'(x)$

$-2 \qquad 0 \quad 1 \qquad 3 \qquad\qquad x$

Figuur 5.3

★

Opgave 5.3

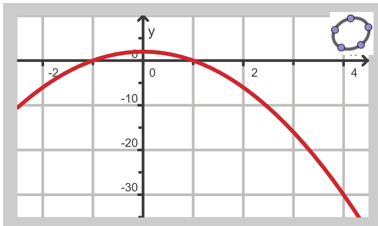
Bekijk de hellingsgrafiek van functie f, gemaakt met GeoGebra.

a Op welk interval stijgt de grafiek van f?

b Voor welke waarde(n) van x heeft de grafiek van f een maximum?

c Kun je uit de hellingsgrafiek aflezen hoe groot dit maximum is?

d Neem aan dat $f(0) = 2$. Schets de grafiek van f.



Figuur 5.4

★

Opgave 5.4

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^2 + 3x$.
Stel de formule op van de hellingsgrafiek van f door eerst een tabel van differentiaalquotiënten te maken.

★ ★

Opgave 5.5

Er zijn vier functies gegeven:

- $f(x) = -x^2 + 4$
- $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
- $h(x) = \frac{4}{x}$
- $k(x) = -x^4 + 4x$

a Bereken elk van deze functies het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 1$.

b Teken van elk van deze functies de grafiek van de hellingsfunctie.

c Bepaal met behulp van de hellingsgrafiek de extremen van de gekozen functie.

★ ★

Opgave 5.6

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 8x$.

a Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van f zo in beeld brengen dat alle drie de nulpunten en de twee toppen zichtbaar zijn. Toon aan dat deze grafiek de x-as snijdt in het punt (4,0).

b Bereken het hellingsgetal van de grafiek in dit punt.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 4$.

d Teken de grafiek van de afgeleide van f.

e Met behulp van de grafiek van die afgeleide kun je de extremen van f berekenen. Doe dat met behulp van de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

★ ★ Opgave 5.7: Elektrische auto

Een elektrische auto trekt op als het stoplicht op groen springt. Voor de afgelegde weg geldt: $s(t) = 1{,}6t^2$ waarin s de afgelegde weg in meters en t de tijd in seconden is. (Een elektrische auto hoeft niet te schakelen.)

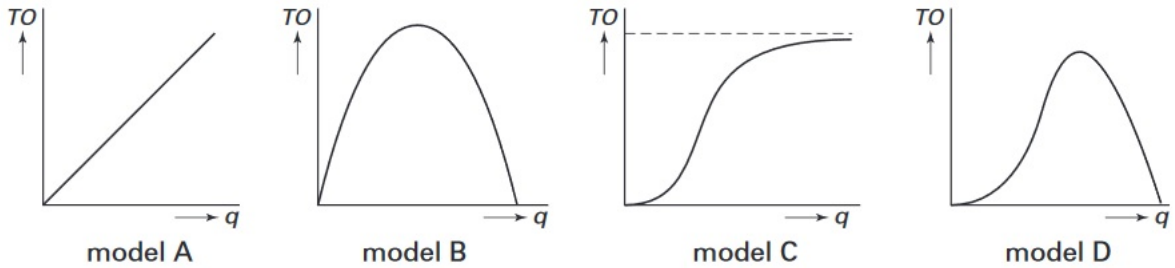
a De snelheid van deze auto wordt uitgedrukt in meter per seconde. Teken de grafiek van de snelheid v van deze auto als functie van de tijd t.

b Als het goed is, is je grafiek van de snelheid een rechte lijn. Stel een bijpassende formule op voor de snelheid $v(t)$.

c Na hoeveel seconden is de snelheid meer dan 80 km/h? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

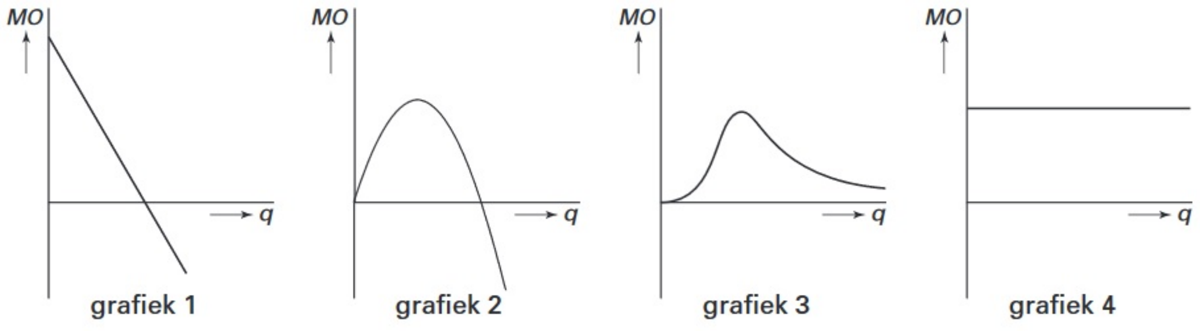
★ ★ ★ Opgave 5.8: Economische modellen

Een producent verkoopt q eenheden van een product. De totale opbrengst is TO. In de figuur staat voor vier economische modellen een schets van de grafiek van TO.



Figuur 5.5

Als je wilt weten hoe groot de totale opbrengst verandert bij een kleine toename van q, dan kijk je naar de marginale opbrengst MO. In de volgende figuur zie je bij elk van de modellen uit de figuur met economische modellen de grafiek van de marginale opbrengst, maar ze staan niet in de juiste volgorde.



Figuur 5.6

Geef voor elk van de grafieken 1, 2, 3 en 4 aan bij welk economisch model de grafiek hoort. Licht je antwoord toe.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2002, tweede tijdvak)

Practicum: Grafische rekenmachine

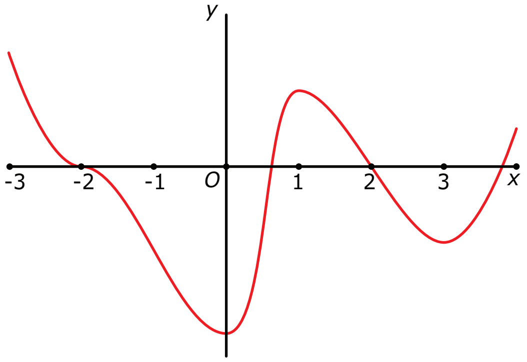
Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het maken van hellingsgrafieken.

- **Veranderingen, differentiëren en de TI84**
- **Veranderingen, differentiëren en de TInspire**
- **Veranderingen, differentiëren en de Casio**
- **Veranderingen, differentiëren en de HPprime**
- **Veranderingen, differentiëren en de NumWorks**

Antwoorden

5.1 De blauwe grafiek (met de langere streepjes).

5.2 Bijvoorbeeld zo. De ligging van de grafiek ten opzichte van de x-as kun je niet weten, net zo min als de mate van stijging of daling.



5.3 a Op het interval: $\langle -1,1 \rangle$.

b Voor $x = 1$.

c Nee, daarvoor moet je het functievoorschrift van f weten.

d Grafiek door (0,2) met maximum voor $x = 1$ en minimum voor $x = -1$.

5.4 $f'(x) = x + 3$

5.5 a $f'(1) = -2$; $g'(1) = 0{,}5$; $h'(1) = -4$; $k'(1) = 0$

b Vul elke functie als Y1 in de GR in en neem Y2 = (Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0.001).

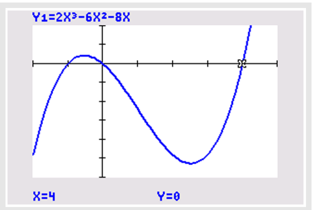
c $f(x)$: $x = 0$, max. $f(0) = -\left(0^2\right) + 4 = 4$;

$g(x)$: $x = 0$, max. $g(0) = \sqrt{0^2 + 3} = \sqrt{3}$;

$h(x)$: geen nulpunten, geen extremen;

$k(x)$: $x = 1$, max. $k(1) = -1^4 + 4 \cdot 1 = 3$.

5.6 a Zie de figuur.



b Het hellingsgetal bij dit punt is 40.

c $y = 40x - 160$

d Voer in: Y1=2X^3-6X^2-8X en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(x))/(0.001) met $-2 \leq x \leq 5$ en $-30 \leq y \leq 10$.

e Min. $f(2{,}53) \approx -26{,}26$ en max. $f(-0{,}53) \approx 2{,}26$.

5.7 a Voer in: Y1=1.6X^2 en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0.001) en je ziet (een benadering van) de hellingsgrafiek.

b $v(t) = 3{,}2t$.

c Na ongeveer 7 s.

5.8
- Grafiek 4 hoort bij model A want de helling is constant hetzelfde.
- Grafiek 1 hoort bij model B want de helling neemt voortdurend af.
- Grafiek 3 hoort bij model C want de helling neemt eerst toe en dan af maar blijft positief.
- Grafiek 2 hoort bij model D want de helling neemt eerst toe en dan af en wordt negatief.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- toenemende, afnemende of constante stijging of daling — extremen
- toenametabel — vaste stapgrootte — toenamediagram
- gemiddelde verandering — differentiequotiënt — koorde
- veranderingssnelheid in een punt — differentiaalquotiënt — raaklijn
- hellingsgrafiek — hellingsfunctie — tekenschema

Activiteitenlijst

- bij een functie (of grafiek) aangeven waar hij (toenemend, afnemend) stijgt en daalt;
- bij een functie (of grafiek) een toenamediagram tekenen en omgekeerd bij een toenamediagram mogelijke grafieken van een bijpassende functie tekenen;
- bij een functie (of grafiek) het differentiequotiënt op een gegeven interval berekenen en de betekenis daarvan omschrijven;
- bij een functie (of grafiek) het differentiaalquotiënt voor een gegeven invoerwaarde berekenen en de betekenis ervan omschrijven — het hellingsgetal van een raaklijn aan een grafiek berekenen;
- bij een functie (of grafiek) een hellingsgrafiek tekenen — uit een hellingsgrafiek eigenschappen van de functie (stijgen, dalen, extremen) aflezen.

Achtergronden

Het wiskundig beschrijven van veranderingen is nog niet zo heel oud. Eigenlijk begon het allemaal met de Fransman **Nicole Oresme (1323—1382)** die de 'grafiek' bedacht om het bewegen van voorwerpen langs een rechte lijn te beschrijven.

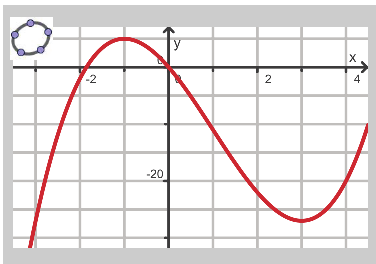
Later gebruikte **Galileo Galileï (1564—1642)** de grafieken van Oresme om er de vrije val van een voorwerp in vacuüm mee weer te geven. En **Isaac Newton (1642–1727)** en **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)** bedachten een goede techniek om veranderingen te berekenen: de 'differentiaalrekening'.

Figuur 6.1 Galileo Galileï (Wikipedia)

Testen

★ **Opgave 6.1**

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$, gemaakt met GeoGebra.



Figuur 6.2

a Bereken het differentiequotiënt op het interval [-3,1].

b Geef een interval waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 0.

c Stel de vergelijking op van de raaklijn aan f voor $x = 1$.

d Maak de hellingsgrafiek bij deze functie.

e Uit de hellingsgrafiek kun je de x-waarden van de extremen van de gegeven functie halen. Leg uit hoe en bereken de extremen van f.

★ Opgave 6.2

De hoogte van een vuurpijl die je van de grond afschiet, wordt gegeven door $h(t) = 60t - 5t^2$, waarin h de hoogte boven de begane grond in meter en t de tijd in seconden na het afschieten.

a Na tien seconden ontploft de vuurpijl. Op welke hoogte is dat?

b Teken een bijpassend toenamediagram van 0 tot 6 met stapgrootte 1.

c Bereken de gemiddelde snelheid van de vuurpijl over de eerste zes seconden.

d Bereken de snelheid van de vuurpijl op $t = 4$.

e Plot de grafiek van de snelheid $h'(t)$ van de vuurpijl. Maak eerst een tabel met hellingsgetallen.

f De grafiek van de snelheid die je bij e hebt getekend moet een rechte lijn zijn. Stel bij die rechte lijn een formule op en bereken met die formule de snelheid op het moment van ontploffen.

★ Opgave 6.3

Het migratiesaldo van R geeft het verschil tussen het aantal mensen dat in R komt wonen, en het aantal mensen dat uit R vertrekt. Het geboorteoverschot is het verschil tussen het aantal geboorten en het aantal overledenen in R. In deze grafiek zie je het migratiesaldo en het geboorteoverschot voor de jaren 2000 tot en met 2004.

a Met hoeveel mensen is het aantal inwoners in R in het jaar 2000 toegenomen?

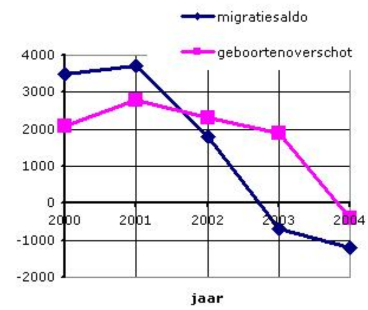
b In welk jaar is het aantal inwoners in deze stad afgenomen?

c Het aantal inwoners van R was aan het begin van het jaar 2000 ongeveer 72600 (op honderdtallen afgerond). Teken een grafiek van het aantal inwoners in R in de jaren 2000 tot en met 2004.

d Hoe groot was het aantal inwoners op 1 januari 2005?

Bevolking van R

jaar	migratiesaldo	geboorteoverschot
2000	3500	2100
2001	3700	2800
2002	1800	2300
2003	-700	1900
2004	-1200	-400



Figuur 6.3

★ Opgave 6.4

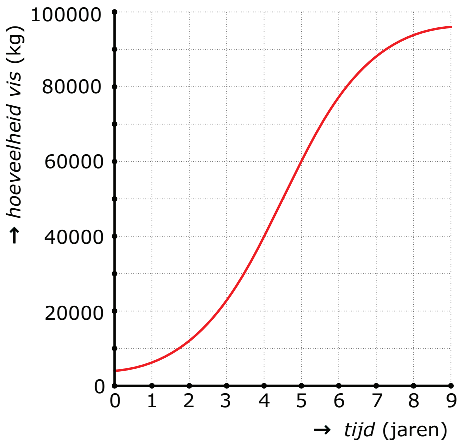
In een viskwekerij wordt vis uitgezet in een aantal nieuw aangelegde kweekvijvers. Als er geen vis wordt gevangen zal de visstand zich in de loop der jaren uitbreiden. De grafiek geeft een model van de groei van de visstand.

a Teken het toenamediagram met stapgrootte 1.

b De viskweker zal een aantal jaren afwachten alvorens te oogsten. Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens de grafiek.
Welk advies zou je de viskweker geven over:

- het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten.
- de grootte van de jaarlijkse vangst.

Geef bij dit advies een toelichting waarmee je de viskweker denkt te overtuigen.



Figuur 6.4

(bron: examen wiskunde A vwo in 1989, eerste tijdvak)

Toepassen

★ ★ **Opgave 6.5: Suikerbieten**

Een boer verbouwt suikerbieten op een bepaalde lap grond. Voor het onkruid wieden heeft hij personeel in dienst. De opbrengst bij de verkoop van de suikerbieten neemt toe als er beter wordt gewied, dus als hij meer werknemers in dienst neemt. Maar dat gaat niet onbeperkt: op zeker moment lopen de bietenwieders elkaar voor de voeten en wordt het wieden er niet beter van.
Een mogelijk verband tussen de opbrengst R (in honderden euro) en het aantal werknemers w wordt gegeven door de formule $R = -\frac{1}{3}w^3 + 6w^2$.

Voor de boer is het interessant om te weten hoeveel werknemers hij het beste kan inhuren. Daarbij kijkt hij naar de meeropbrengst van een werknemer. Zo is de meeropbrengst van de derde werknemer $R(3) - R(2)$. De meeropbrengst per werknemer heet in economentaal ook wel marginale opbrengst. De boer zorgt er voor dat hij zoveel werknemers in dienst neemt dat de marginale opbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

a Hoeveel bedraagt de marginale opbrengst (de meeropbrengst) van de derde werknemer?

b Je kunt met de grafische rekenmachine een tabel maken van de meeropbrengsten van elk van de eerste 10 werknemers. Maak die tabel en beslis op grond daarvan hoeveel werknemers de boer in dienst zal nemen voor het bieten wieden.

c De boer kiest voor zoveel werknemers, dat de meeropbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is. Waarom doet hij dat? Waarom kiest hij niet voor het aantal werknemers waarbij de opbrengst zo groot mogelijk is?

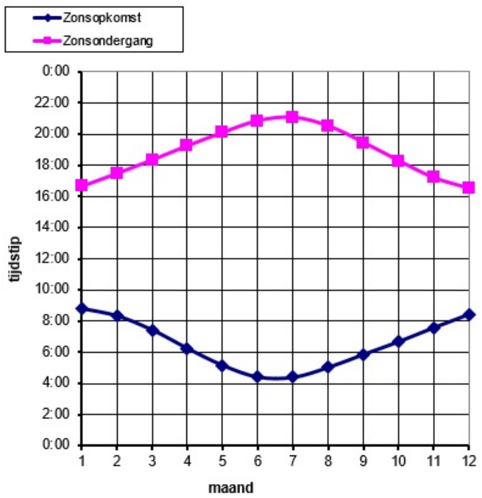
★ ★ **Opgave 6.6: Daglengte**

Door het KNMI worden de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang gedurende het jaar bijgehouden. Via internet kun je actuele informatie over dit onderwerp vinden. **Hier** zie je een tabel en een grafiek voor Amsterdam in een bepaald jaar gemaakt in MS-Excel.

Je ziet dat de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang in de loop van het jaar veranderen. Bovendien is de snelheid waarmee die veranderingen plaatsvinden ook veranderlijk. In de tweede helft van de maand juni bijvoorbeeld verandert het tijdstip van zonsondergang maar weinig per dag. Maar in september is die verandering per dag juist behoorlijk groot. Ook de daglengte (verschil tussen zonsopkomst en zonsondergang) verandert in de loop van het jaar. En ook die verandering gaat soms sneller en soms minder snel...
Een goede manier om de veranderingen nauwkeurig te bekijken is een toenamediagram bijvoorbeeld per maand.

Zonsopkomst en zonsondergang in Nederland
De tijdstippen gelden steeds voor de eerste dag van de maand
Alle tijden zijn in M.E.T. (geen zomertijd dus)

maand	opkomst	ondergang
1	8:48	16:39
2	8:20	17:28
3	7:26	18:20
4	6:15	19:14
5	5:10	20:05
6	4:25	20:50
7	4:24	21:03
8	5:02	20:30
9	5:52	19:27
10	6:41	18:17
11	7:35	17:12
12	8:26	16:32



Figuur 6.5

a Het tijdstip van zonsopkomst verandert per dag. In welke maanden verandert het tijdstip van zonsopkomst het snelst per dag? Hoe zie je dat aan de grafiek?

b Ook het tijdstip van zonsondergang verandert per dag. Verandert het tijdstip van zonsondergang het snelst per dag in dezelfde maanden als dat van zonsopkomst? Kun je dit verklaren?

c De daglengte-grafiek is af te leiden uit die van zonsopkomst en zonsondergang. Hoe?

d In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder?

e Teken zelf in Excel een grafiek en een toenamediagram van de daglengte in de loop van het jaar. Neem de gegevens over. Neem voor het toenamediagram een stapgrootte van 1 maand.

f De daglengte verandert dagelijks. In welke maanden verandert de daglengte het snelst? Hoe zie je dat aan de grafiek en hoe aan het toenamediagram?

g In bepaalde maanden lijkt de daglengte wel vrijwel constant. In welke maanden is dat het geval? En hoe zie je dat aan het toenamediagram?

h In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?

★ ★ ★ Opgave 6.7: Snelheid, versnelling

Voor de snelheid v in m/s van een bewegend voorwerp geldt: $v = 2{,}4t$ waarin t de tijd in seconden is.

a De grafiek van v is de hellingsgrafiek van de grafiek van de afgelegde weg $s(t)$ waarin s in meters is uitgedrukt. Neem aan, dat $s(0) = 0$. Maak een zo nauwkeurig mogelijke grafiek van $s(t)$.

b Bij de grafiek van $v(t)$ hoort ook een hellingsgrafiek. Teken die hellingsgrafiek.

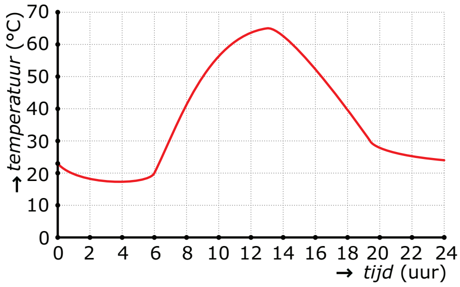
c Wat stelt de hellingsgrafiek van $v(t)$ voor?

d Voor de afgelegde weg geldt de formule $s(t) = 1{,}2t^2$.
Laat met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[t, t + h]$ zien, dat de gegeven functie v inderdaad de hellingfunctie van s is.

Examen

★ ★ Opgave 6.8: Woestijnhagedis

De woestijnhagedis (diposaurus dorsalis) leeft in de woestijnen van Californië (V.S.). In deze woestijn zijn er dagelijks grote temperatuurschommelingen. In de zomer kan de temperatuur op een dag variëren van ongeveer 20 °C tot ongeveer 65 °C. In de winter kan het er zelfs vriezen. Omdat de hagedis een koudbloedig dier is, is zijn gedragspatroon erg afhankelijk van de temperatuur. Je ziet in de figuur het temperatuurverloop voor een zomerdag (eind juli/begin augustus) in de Californische woestijn. Deze figuur is typerend voor alle dagen in de periode eind juli/begin augustus. Alleen als de temperatuur tussen de 36 °C en 42 °C ligt, is de hagedis voortdurend buiten zijn hol actief met het zoeken naar voedsel. Hij heeft dan geen beschutting nodig. Als de temperatuur tussen de 42 °C en de 50 °C is moet hij af en toe beschutting zoeken tegen de zon. Bij alle andere temperaturen bevindt de hagedis zich voortdurend in zijn hol.

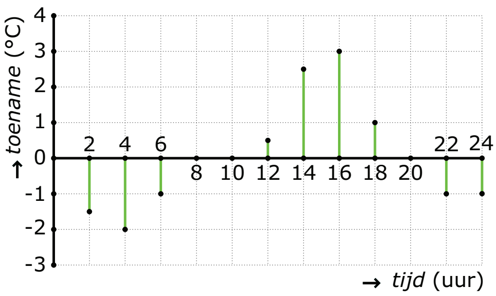


Figuur 6.6

a Hoeveel uur per dag is de hagedis in de periode eind juli/begin augustus voortdurend buiten zijn hol actief? Licht je antwoord toe.

b In de figuur is te zien, dat de temperatuur tussen 6:00 uur en 10:00 uur vrij snel stijgt. Hoeveel bedraagt in deze periode de gemiddelde temperatuurstijging per uur?

In dit diagram zie je de toename/afname van de temperatuur in het hol van de hagedis. Ook deze figuur is typerend voor de periode eind juli/begin augustus. Omdat het niet zo eenvoudig is om deze temperaturen te meten, kun je in het diagram slechts aflezen hoeveel de temperatuur per 2 uur is gestegen of gedaald. Om 8:00 uur 's morgens is de temperatuur in het hol ongeveer 38 °C.



Figuur 6.7

c Teken een grafiek van de temperatuur in het hol van de hagedis uitgaande van het toename-/afnamediagram.

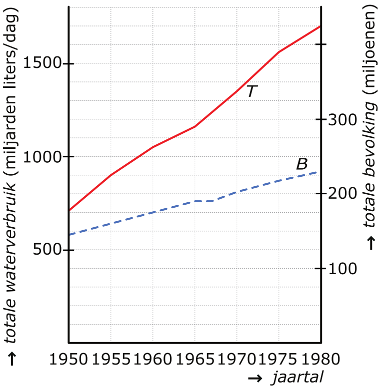
d Bepaal op welke momenten van de dag het temperatuurverschil tussen de binnenkant van het hol en de omgeving het grootst is.

(bron: examen wiskunde A havo 1996, tweede tijdvak, aangepast)

★★ Opgave 6.9: Schoon drinkwater

Overal op aarde is de behoefte aan schoon water groot. Niet alleen voor huishoudelijk gebruik (o.a. drinkwater), maar vooral voor niet-huishoudelijk gebruik (landbouw en industrie) is heel veel water nodig. Deze opgave gaat over het waterverbruik in de Verenigde Staten vanaf 1950.

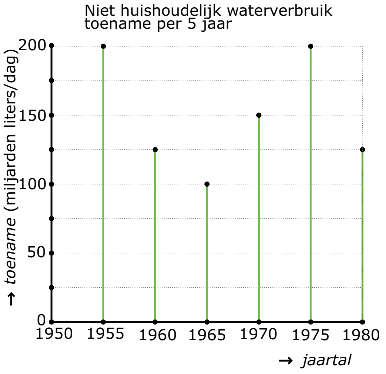
In de grafiek staan gegevens over het totale jaarverbruik (T) en de grootte van de bevolking (B) van de V.S. Je kunt er bijvoorbeeld uit aflezen dat in 1980 het totale waterverbruik ongeveer 1680 miljard liter per dag bedroeg, en dat de bevolking in dat jaar ongeveer 230 miljoen mensen telde.



Figuur 6.8

a Laat zien dat het totale verbruik per jaar in 1975 gemiddeld ongeveer 2,6 miljoen liter water per inwoner was.

Het aantal liters in opgave a is erg groot. Dat komt vooral door het niet-huishoudelijk waterverbruik. In 1950 was het totale waterverbruik (700 miljard liter per dag) opgebouwd uit 625 miljard liter water voor niet-huishoudelijk gebruik en 75 miljard liter per dag voor huishoudelijk verbruik.



Figuur 6.9

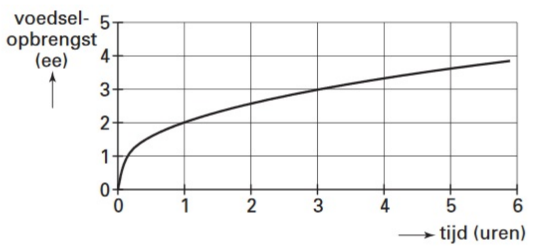
b Bekijk ook het toenamediagram van het waterverbruik per dag in de V.S. voor niet-huishoudelijk gebruik.
Onderzoek of het niet-huishoudelijk verbruik als percentage van het totale waterverbruik per dag in 1980 groter was dan in 1950.

c Bij een onderzoek schatte men dat de toename van het totale waterverbruik elke 5 jaar zou liggen tussen 110 en 200 miljard liter per dag. Tussen welke twee getallen ligt volgens deze veronderstelling het totale waterverbruik in de V.S. in 2010?

(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)

★★ Opgave 6.10: Roofdieren

De meeste roofdieren proberen iedere dag hun voedsel zo snel mogelijk te vangen. Naarmate meer voedsel is gevangen, wordt het vaak moeilijker om nog nieuw voedsel te vangen. Deze opgave gaat over het wiskundige model dat daarbij gemaakt kan worden. In dat model geeft de opbrengstfunctie het verband aan tussen de hoeveelheid voedsel (de voedselopbrengst) en de tijd die nodig is om die hoeveelheid voedsel te vangen. In de figuur is de grafiek getekend van de opbrengstfunctie voor roofdiersoort A. De voedselopbrengst is uitgedrukt in energie-eenheden (ee) en de benodigde tijd in uren.



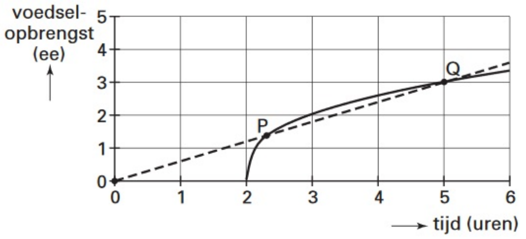
Figuur 6.10

We bekijken een roofdier van soort A. Na 0,5 uur heeft dit roofdier een bepaalde hoeveelheid energie aan voedsel gevangen. Om de dubbele hoeveelheid te vangen is meer dan het dubbele van 0,5 uur nodig.

a Bepaal met behulp van de grafiek hoeveel maal zo groot de daarvoor benodigde tijd is.

Sommige roofdieren leven niet in hetzelfde gebied als hun prooidieren. Zulke roofdieren moeten zich eerst verplaatsen naar hun voedselgebied voordat ze met de jacht kunnen beginnen. De tijd die nodig is om een bepaalde hoeveelheid voedsel te vangen wordt daardoor uitgebreid met de tijd die nodig is om naar het voedselgebied te gaan. Dit heeft gevolgen voor de gemiddelde opbrengst per uur. In de figuur is de grafiek van de opbrengstfunctie van roofdiersoort B getekend. Zoals je in de figuur kunt zien, is een roofdier van deze soort twee uur onderweg (1 uur heen en 1 uur terug).

Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich het punt Q met coördinaten (5,3). Dat wil zeggen dat, als een roofdier van roofdiersoort B vijf uur jaagt (inclusief verplaatsing), dan is zijn voedselopbrengst 3 ee. De gemiddelde voedselopbrengst is dan $\frac{3}{5} = 0{,}6$ ee/h. In de figuur is ook een stippellijn getekend die gaat door de oorsprong en punt Q. Deze stippellijn snijdt de grafiek van roofdiersoort B ook in punt P.



Figuur 6.11

b Leg uit, zonder berekening, dat de gemiddelde voedselopbrengst die hoort bij punt P ook gelijk is aan 0,6 ee/uur.

c Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich een punt waarbij de gemiddelde opbrengst per uur voor een roofdier van soort B maximaal is.

Bepaal met behulp van de figuur bij b, bij welke tijd de gemiddelde opbrengst per uur maximaal is. Licht je antwoord toe.

Een roofdier van soort C is in totaal 1 uur onderweg. Voor deze roofdieren is de opbrengstfunctie gegeven door de formule:

$r = 4\sqrt{t-1}$ als $t > 1$ (voor het eerste uur geldt: $r = 0$)

Hierin is t de tijd in uren en r de hoeveelheid gevonden voedsel in ee.

Deze opbrengstfunctie r heeft voor $t > 1$ de volgende twee eigenschappen:

- een langere tijd levert altijd een hogere opbrengst op;
- de toename van de opbrengst wordt steeds geringer naarmate t groter wordt.

Deze twee eigenschappen zijn zichtbaar in de grafiek van r, maar ze kunnen ook worden verklaard aan de hand van de grafiek van de afgeleide van r.

d Schets de grafiek van de afgeleide van r en verklaar de beide eigenschappen aan de hand van deze grafiek.

(bron: vwo wiskunde A examen 2006, eerste tijdvak)

Antwoorden

6.1 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$

b Bijvoorbeeld [-1,854; 0].

c $y = -12x + 1$

d Voer in Y1=X^3-3X^2-9X en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0.001) en je krijgt een goede benadering.

e Min.> $f(3) = -27$ en max.> $f(-1) = 5$.

6.2 a Op 100 meter hoogte.

b GR: Y1=60X-5X^2 en Y2=Y1(X+1)-Y1(X) en bekijk de tabel met toenames.

c $\frac{180}{6} = 30$ m/s.

d 20 m/s.

e GR: Y1=60X-5X^2 en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/0.001 en bekijk de tabel met (benaderde) hellingsgetallen.
Plot de grafiek van Y2.

f $v = 60 - 10t$ en de snelheid op het moment van ontploffen is -40 m/s.

6.3 a Met 5600 mensen.

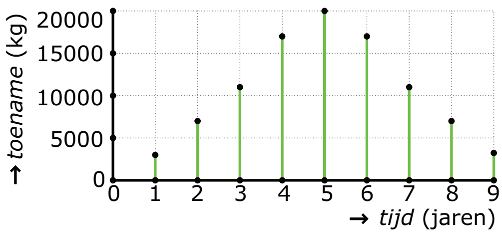
b In 2004.

c Teken een grafiek bij deze tabel.

jaartal	migratiesaldo	geboorteoverschot	toename totaal	aantal inwoners
2000	3500	2100	5600	72600
2001	3700	2800	6500	78200
2002	1800	2300	4100	84700
2003	-700	1900	1200	88800
2004	-1200	-400	-1600	90000
2005				88400

d 88400 inwoners

6.4 a Zie de figuur.



b In het vijfde jaar is de toename van het aantal kilogram vis het grootst (20000 kg).
Als de viskweker vijf jaar wacht is er 60000 kg vis en hij kan dan jaarlijks 20000 kg vis vangen, precies de toename in dat vijfde jaar. Zo houdt hij steeds tussen de 40000 en de 60000 kg vis.

6.5 a $23\frac{2}{3} \cdot 100$ euro.

b 7 bietenwieders.

c De 6e en de 7e bietenwieder hebben de hoogste meeropbrengst en brengen dus het meeste binnen tegen dezelfde loonkosten.

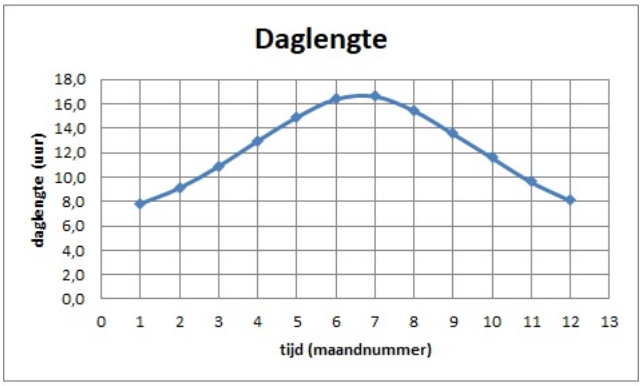
6.6 a September/oktober en maart/april; de grafiek is daar het steilst.

b Ja, vanwege de plaats van Nederland op Aarde en dat de Aardas niet loodrecht staat op het vlak waarin de Aarde om de Zon draait.

c Je neemt het verschil van het tijdstip van zonsopkomst en zonsondergang.

d In juli, augustus en een deel van september.

e Zie de figuur.



f In dezelfde maanden als zonsopkomst en zonsondergang.

g In juni/juli en in december/januari. Toenames vrijwel 0.

h In augustus/september. Grote afnames (negatieve toenames).

6.7 a Het wordt de grafiek van $s(t) = 1{,}2t^2$ als je uitgaat van een afgelegde weg van 0 op $t = 0$.

b $v'(t) = 2{,}4$ want de grafiek van v is een rechte lijn met vaste helling van 2,4.

c De versnelling.

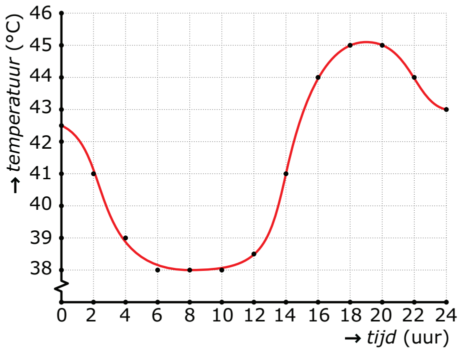
d $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot (t+h)^2 - 1{,}2 \cdot t^2}{h} = \frac{2{,}4 \cdot th + 1{,}2 \cdot h^2}{h} = 2{,}4t + 1{,}2h$

Als $h \to 0$ dan wordt dit: $s'(t) = 2{,}4t$.

6.8 a Lees uit de grafiek af dat de hagedis actief is tussen ongeveer 7:30 uur en 8:00 uur 's morgens en tussen 18:00 uur en 18:30 uur 's avonds. Dus in totaal ongeveer 1 uur.

b Ongeveer $\frac{40}{5} = 8$ °C/uur.

c Zie de figuur.



d Rond 12:00 uur.

6.9 a In 1975: $T \approx 1540$ mld liter per dag en $B \approx 215$ miljoen.

Per inwoner gemiddeld ongeveer 7163 liter per dag, dus per jaar $365 \cdot 7163 \approx 2600000$ liter per inwoner.

b In 1950: $\frac{625}{700} \cdot 100 \approx 89{,}3\%$.

In 1980: $\frac{1525}{1680} \cdot 100 \approx 90{,}8\%$ (het getal 1525 vind je door bij de hoeveelheid in 1950 alle toenames op te tellen).

c Tussen $1525 + 6 \cdot 110 = 2185$ en $1525 + 6 \cdot 200 = 2725$ mld liter per dag.

6.10 a Je kunt in de grafiek aflezen dat het roofdier na 0,5 uur 1,5 ee heeft gevangen. De dubbele hoeveelheid van 3 ee kun je aflezen bij 3 uur.

De tweede portie van 1,5 ee heeft het roofdier dus 2,5 uur gekost, 5 maal zoveel tijd als de eerste portie.

b De stippellijn gaat door de oorsprong en punt Q. Omdat punt P op deze stippellijn ligt, is de gemiddelde voedselopbrengst bij punt P hetzelfde als bij punt Q en dus 0,6 ee/uur.

c De lijn vanuit (0,0) met de steilste helling die nog raakt aan de grafiek geeft het punt met de hoogste gemiddelde opbrengst.

Na het tekenen van deze lijn vind je $t \approx 3$ uur.

d Voer in: Y1=4/(sqrt(X-1)) en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0.001).

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 6$ en $0 \leq y \leq 5$.

- De hellingsfunctie is overal positief (voor $t > 1$) dus de grafiek van de voedselopbrengst stijgt naarmate t groter wordt.
- De hellingsfunctie daalt dus de toename van de voedselopbrengst neemt af naarmate t groter wordt.

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		⋆	⋆ ⋆	⋆ ⋆ ⋆
1	**In grafieken**	⋆	⋆ ⋆	⋆ ⋆ ⋆
	De begrippen stijgend, dalend en constant gebruiken bij grafieken.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.4 ☐ T 6.3 ☐	1.5 ☐ 1.7 ☐ T 6.6 ☐	
	Toenemende, afnemende en constante stijging en daling herkennen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ T 6.1 ☐ T 6.2 ☐	1.5 ☐ 1.6 ☐ 1.7 ☐ T 6.6 ☐	
	(lokale) maxima en minima van een grafiek bepalen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ T 6.2 ☐	1.5 ☐ 1.6 ☐ T 6.6 ☐	
2	**Veranderingen per stap**	⋆	⋆ ⋆	⋆ ⋆ ⋆
	Een toenamediagram maken bij een gegeven grafiek of een gegeven functievoorschrift.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.5 ☐ T 6.2 ☐ T 6.4 ☐	2.4 ☐ T 6.5 ☐ T 6.6 ☐ T 6.8 ☐ T 6.9 ☐	2.6 ☐
	De invloed van de stapgrootte op het toenamediagram bepalen.		T 6.5 ☐ T 6.6 ☐ T 6.8 ☐ T 6.9 ☐	2.6 ☐
	Vanuit een gegeven toenamediagram (en "beginwaarde") een mogelijke grafiek tekenen.	T 6.3 ☐	2.3 ☐ 2.4 ☐ T 6.8 ☐	
3	**Differentiequotiënt**	⋆	⋆ ⋆	⋆ ⋆ ⋆
	De betekenis van het begrip differentiequotiënt kennen.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ T 6.1 ☐ T 6.2 ☐	3.4 ☐ 3.6 ☐ 3.7 ☐	
	Tussen twee punten uit een tabel of een grafiek het differentiequotiënt bepalen.	T 6.1 ☐ T 6.2 ☐		
	Het differentiequotiënt van een functie op een gegeven interval berekenen.	3.2 ☐	3.4 ☐ 3.6 ☐ 3.7 ☐	3.5 ☐
	Werken met toepassingen van het differentiequotiënt.	3.3 ☐	3.6 ☐ 3.7 ☐	
4	**Differentiaalquotiënt**	⋆	⋆ ⋆	⋆ ⋆ ⋆
	De verandering op een bepaald moment (het differentiaalquotiënt) benaderen.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐ T 6.1 ☐	4.6 ☐ 4.7 ☐	
	het begrip ‘hellingsgetal in een punt’ van een grafiek; .	4.1 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐ T 6.1 ☐	4.6 ☐ 4.7 ☐ T 6.10 ☐	T 6.7 ☐
	De formule van een raaklijn aan een grafiek opstellen.	4.2 ☐ 4.5 ☐ T 6.1 ☐	T 6.10 ☐	T 6.7 ☐
	Werken met toepassingen van het differentiaalquotiënt.	4.4 ☐ 4.5 ☐	4.6 ☐ 4.7 ☐ T 6.10 ☐	

5	Hellingsgrafiek	★	★ ★	★ ★ ★
	Bij een gegeven grafiek een hellingsgrafiek schetsen.	**T** 6.1 ☐ **T** 6.2 ☐	**T** 6.10 ☐	5.8 ☐ **T** 6.7 ☐
	Bij een gegeven functievoorschrift een hellingsgrafiek tekenen en in eenvoudige gevallen het voorschrift van de hellingsfunctie bepalen.	5.4 ☐ **T** 6.2 ☐	5.5 ☐ 5.6 ☐ 5.7 ☐ **T** 6.10 ☐	5.8 ☐ **T** 6.7 ☐
	Uit een gegeven hellingsgrafiek gegevens over de bijbehorende functie aflezen.	5.3 ☐ 5.4 ☐	5.5 ☐ 5.6 ☐	5.8 ☐
	Werken met tekenschema's.	5.2 ☐		

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Math4all
www.math4all.nl