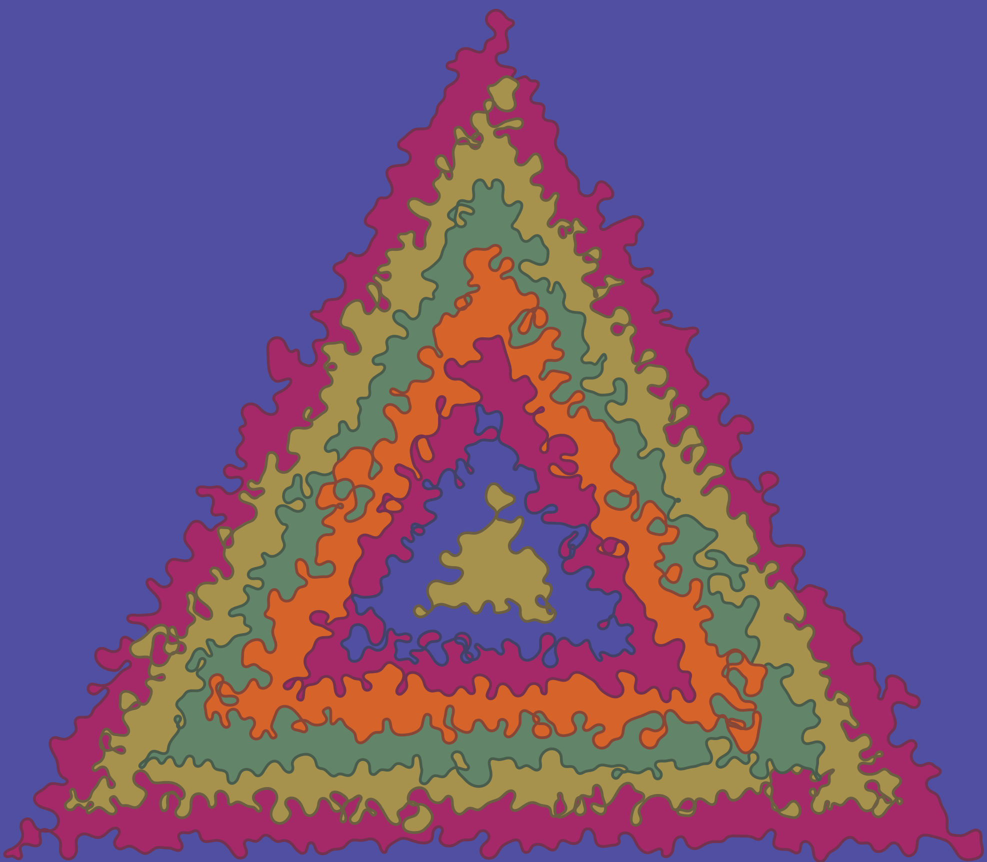
Wiskunde A / PGA

4 VWO

Tellen

ConTeXt College



Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je werkt dan onder begeleiding van je docent in kleine groepjes aan wiskundige problemen en samen bouw je de theorie op en maak je er een overzicht van.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee je kunt nagaan of je de stof beheerst. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding vind je terug in de marge.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die je alleen hoeft te maken als je er genoeg tijd voor hebt
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die je alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk voor je was

1

Tellen

1.1 Mogelijkheden

Inleiding

Misschien heb je je wel eens afgevraagd hoeveel verschillende postcodes, hoeveel nummerborden, hoeveel pincodes er zijn. Of hoeveel mogelijkheden er zijn om een dubbel-zes te gooien met twee dobbelstenen in verhouding tot het totaal aantal mogelijkheden. Maar dan moet je wel een idee hebben welke mogelijkheden er zijn. Om daar een goed overzicht over te krijgen kun je het best systematisch te werk gaan. Boomdiagrammen en tabellen helpen er bij.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het aantal mogelijkheden van een telprobleem systematisch weergeven;
- het aantal mogelijkheden van een telprobleem systematisch tellen/berekenen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen;
- werken met kansen.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om manieren om bij tellen de mogelijkheden overzichtelijk op een rijtje te krijgen. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - welke manieren er voorbij komen.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ Opgave 1.1

Een toets bestaat uit zes meerkeuzevragen. Bij elke meerkeuzevraag kun je uit vier antwoorden kiezen. Er is steeds één antwoord goed.

a Als je alle mogelijkheden in een wegendiagram weergeeft, hoeveel wegen zijn er dan?

b Hoeveel mogelijke verschillende antwoorden zijn er voor de hele toets?

c Je hebt de toets goed voorbereid en je weet vier antwoorden zeker. Hoeveel mogelijke antwoorden voor de hele toets zijn er nog?

d Hoeveel antwoorden voor de hele toets zijn er mogelijk, als je alleen let op ‘goed’ of ‘fout’?

★ Opgave 1.2

Om het cijferslot van een koffer open te krijgen, moet je een code van 3 cijfers onthouden.

a Je weet alleen het eerste cijfer nog. Hoeveel mogelijke codes zijn er dan nog?

b Je weet alle drie de cijfers nog, maar de volgorde niet meer. Hoeveel mogelijke codes zijn er maximaal mogelijk?

★ Opgave 1.3

Je gooit met drie dobbelstenen.

a Als je alle mogelijkheden in een wegendiagram weergeeft, hoeveel wegen zijn er dan?

b Waarom is een boomdiagram in dit geval niet zo geschikt?

c Bij hoeveel mogelijke uitkomsten heb je precies één zes?

d Bij hoeveel mogelijke uitkomsten heb je minstens twee zessen?

e Bij hoeveel mogelijke uitkomsten heb je hoogstens twee zessen?

f Hoeveel mogelijkheden zijn er om totaal zes ogen te gooien?

g Hoeveel mogelijkheden zijn er om minstens zestien ogen te gooien?

★ Opgave 1.4

Je bestelt een pizza. Je hebt keuze uit een kleine pizza, een gewone pizza en een extra grote pizza. Er zijn twee soorten pizzabodems, de Pizza Crossa en de Pizza Classica. Verder zijn er twaalf verschillende smaken. Je kunt de pizza zelf halen of je kunt hem laten bezorgen.

a Uit hoeveel verschillende pizza's kun je kiezen?

b Hoeveel keuzemogelijkheden heb je als je een pizza wilt eten?

c Je houdt niet van vis. Daarom vallen er vijf smaken af. Uit hoeveel verschillende pizza's kun je nu kiezen?

★ Opgave 1.5

Een fruitautomaat heeft drie vensters waarachter banden met plaatjes draaien. Op elke band staan twintig plaatjes. Je brengt ze in beweging door aan een hendel te trekken. Eén druk op de knop en de banden stoppen. Zie je drie dezelfde plaatjes, dan win je een bepaald bedrag. Je ziet het aantal plaatjes per band.
Bekijk de tabel goed en beantwoord de vragen.

plaatje	band 1	band 2	band 3
BAR	1	2	1
bel	8	1	7
pruim	2	7	3
sinaasappel	2	8	4
twee kersen	7	2	0
citroen	0	0	5

Tabel 1.1

a Hoeveel mogelijkheden zijn er om drie plaatjes op een rij te krijgen?

b Op hoeveel manieren krijg je drie keer bar?

c Op hoeveel manieren krijg je bel of sinaasappel?

d Op hoeveel manieren krijg je één keer kersen en twee keer pruim?

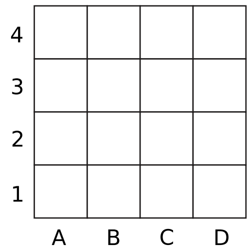
e Op hoeveel manieren kun je winnen?

★ ★

Opgave 1.6

Je hebt een veld van 4 × 4 vierkante hokjes. Van deze zestien hokjes wil je er precies vier zwart kleuren. Het moet zó gebeuren dat elke rij en elke kolom precies één zwart hokje krijgt. Bovendien mogen er geen twee zwarte hokjes diagonaal (met een hoekpunt) aan elkaar grenzen.

Op hoeveel manieren kun je de vier hokjes kiezen?



Figuur 1.2

Toepassen

★ ★ ★

Opgave 1.7: WK voetbal 2010

Aan het WK voetbal 2010 in Zuid-Afrika deden 32 landen mee. Ze speelden eerst een groepsfase. Hierin speelden de landen in acht poules van vier teams. In zo'n poule speelt elk team één wedstrijd tegen elk ander team. De twee hoogst eindigende teams per poule gingen door naar de knock-outfase. Deze overgebleven teams speelden allemaal één wedstrijd tegen een ander team en de verliezer moest naar huis. De winnaars gingen door en speelden weer één wedstrijd tot er uiteindelijk nog twee teams over waren. Die speelden de finale. Er was ook nog een wedstrijd om de derde plaats, de troostfinale.

In eerdere edities van het WK waren er minder deelnemende teams. Zo waren er in 1974 in West-Duitsland maar zestien teams. Die speelden volgens hetzelfde schema. Eerst in poules van vier teams en de twee hoogst eindigende teams naar de knock-outfase.
Er werden in 1974 natuurlijk veel minder wedstrijden gespeeld dan in 2010.

a Ga met een berekening na of de verdubbeling van het aantal deelnemende teams ook geleid heeft tot een verdubbeling van het totaal aantal wedstrijden.

Alle WK's kenden een groepsfase met poules van vier teams. Er kunnen ook meer teams in een poule zitten. Dat leidt dan tot een groter aantal poulewedstrijden.

$W(n)$ is het aantal wedstrijden in een poule met n teams. Er geldt dat $W(n+1) = W(n) + n$ waarbij $W(n+1)$ het aantal wedstrijden in een poule met $n+1$ teams is.

b Toon aan dat dit klopt.

(naar: pilotexamen 2013 - II)

Antwoorden

1.1 a 24 wegen.

b 4096

c 16

d 64

1.2 a 100

b 6

1.3 a 18

b Er zijn 216 verschillende takken. Dat tekent lastig.

c 75 mogelijke uitkomsten met precies één zes.

d 16 mogelijke uitkomsten met twee of drie zessen.

e 215 mogelijke uitkomsten met geen, één of twee zessen.

f 10 mogelijkheden om zes ogen te gooien.

g 10 mogelijkheden om minstens zestien ogen te gooien.

1.4 a 72

b 144

c 42

1.5 a 8000

b 2

c 990

d Het totaal aantal manieren is 159.

e Er zijn 164 mogelijkheden om te winnen.

1.6 A3 - B1 - C4 - D2 en A2 - B4 - C1 - D3, dus op twee manieren.

1.7 a Ja, van 32 naar 64 wedstrijden.

b Om $W(n+1)$ te bepalen wordt 1 team aan de poule toegevoegd, waarmee n wedstrijden moeten worden gespeeld.

1.2 Herhaling of niet

Inleiding

Bij het systematisch tellen heb je tot nu toe vooral gewerkt met diagrammen. Eigenlijk gaat dat alleen als het aantal mogelijkheden niet al te groot is. Want gooi je bijvoorbeeld met drie of meer dobbelstenen, dan wordt het aantal even waarschijnlijke uitkomsten al snel zo groot, dat een boomdiagram niet meer te maken is. Wegendiagrammen zijn dan nog wel te maken, maar daarin kun je niet gemakkelijk de afzonderlijke mogelijkheden zien. Vaak kun je ook aantallen mogelijkheden berekenen zonder diagrammen. Daarbij is als eerste belangrijk om onderscheid te maken tussen situaties met herhaling en situaties zonder herhaling.

Je leert in dit onderwerp

- werken met machten als je mogelijkheden telt in situaties waarin herhaling optreedt;
- werken met faculteit;
- werken met permutaties als je mogelijkheden telt in situaties waarin steeds een mogelijkheid wordt afgestreept.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen.

Voor de leerling

Je hebt nu manieren gevonden om bij tellen de mogelijkheden overzichtelijk op een rijtje te krijgen. Maar als het aantal mogelijkheden groot gaat worden, werkt dit niet meer zo goed. Je moet dan bepaalde situaties gaan herkennen en daar een puur rekenkundige oplossing voor vinden. Daar gaan de opdrachten over die je nu krijgt.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 2.1**

In Nederland bestaat de postcode uit vier cijfers, gevolgd door twee letters. Alle cijfers zijn op elk van de vier plaatsen mogelijk. Ook elke letter is op elk van de twee plaatsen mogelijk.
Hoeveel postcodes zijn er in Nederland totaal mogelijk?

★ **Opgave 2.2**

De tekens van een grafische rekenmachine bestaan uit puntjes. Elk klein teken past in een rechthoekje van 10 bij 12 puntjes. Een teken wordt gemaakt door deze puntjes aan of uit te zetten.
Hoeveel tekens zijn er in principe mogelijk?

★ **Opgave 2.3**

Aan de herenfinale op de steeple-chase doen bij de Olympische Spelen vijftien mannen mee. De nummers 1, 2 en 3 komen op het erepodium.
Op hoeveel manieren kunnen die ereplaatsen theoretisch worden verdeeld?

★ **Opgave 2.4**

Een groep van zeven vrienden (drie meisjes en vier jongens) komt tegelijk met de fiets aan op school. Zij zetten hun fietsen naast elkaar in de fietsenstalling.

a Hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk?

b Eén van de zeven vrienden wil per se zijn fiets aan de buitenkant van de groep fietsen zetten. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de fietsen nu neergezet worden?

c Twee personen willen per se hun fietsen naast elkaar zetten. Hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk?

d De drie meisjes willen hun fietsen naast elkaar zetten en de vier jongens ook. Hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk?

★★ **Opgave 2.5**

Een kaartspel bestaat uit de kaartsoorten harten, ruiten, schoppen en klaveren. De kaartsoorten harten en ruiten zijn rood gekleurd en de kaartsoorten schoppen en klaveren zijn zwart gekleurd. Van elke kaartsoort zitten er dertien kaarten in het spel. Dat zijn de kaarten 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer, aas. Iemand pakt uit een kaartspel één voor één vier kaarten.

a Op hoeveel manieren kan dat?

b Op hoeveel manieren kan hij vier kaarten van dezelfde soort pakken?

c Op hoeveel manieren kan hij vier kaarten van dezelfde kleur pakken?

d Op hoeveel manieren kan hij vier kaarten van verschillende soort pakken?

★ **Opgave 2.6**

Je werpt met vier dobbelstenen.

a Op hoeveel manieren kun je 23 of meer ogen gooien?

b Op hoeveel manieren kun je met het product van de ogen 24 krijgen met verschillende ogen van de vier dobbelstenen?

Toepassen

★ ★ ★ **Opgave 2.7: Mobiel dataverkeer**

Het gebruik van apparatuur voor mobiel dataverkeer (zoals tablet en laptop) is in de loop der jaren toegenomen. In 2014 verscheen daarover een nieuwsbericht.

> Er komt een tekort aan 06-nummers aan. Steeds meer apparatuur maakt gebruik van mobiele datacommunicatie en communiceert door middel van een simkaart. Denk aan mobiel internet op tablet en laptop, maar ook aan liftinstallaties, snoep- en frisdrankautomaten, OV chipkaart systemen, mobiele reisinformatie in het openbaar vervoer, navigatiesystemen, enzovoort.
> Omdat de komende jaren een explosieve groei wordt verwacht in het aantal mobiele data-aansluitingen, heeft de overheid een nieuwe, twaalfcijferige nummerreeks in gebruik genomen. Deze nummerreeks begint met 097 en is alleen bedoeld voor mobiele datacommunicatie. In de toekomst moeten alle mobiele datatoepassingen gebruikmaken van een 097-nummer om zo de huidige 06 nummerreeks te ontlasten.

Mobiele telefoons behouden de bekende tiencijferige 06-nummers, overige apparatuur krijgt een twaalfcijferig 097-nummer. Nederland telt ongeveer 17 miljoen inwoners.

Met welk aantal neemt het maximale aantal apparaten voor mobiele datacommunicatie per Nederlander toe door de introductie van de 097-nummers?

★ ★ ★ **Opgave 2.8: Een stad van keramiek**

Je ziet een stad van keramiek, gemaakt door de kunstenares Elly van de Merwe. De huisjes zijn in drie rijen geplaatst. Er zijn dertien huisjes in het kunstwerk en er is nog een reservehuisje. De voorste rij heeft vier posities om huisjes te plaatsen, de middelste rij heeft vijf posities en de achterste rij weer vier posities.
De opstelling van de huisjes kun je veranderen. Je kunt daarbij de huisjes op de voorste rij en de huisjes op de middelste rij willekeurig verwisselen. De huisjes op de achterste rij kunnen alleen onderling verwisseld worden. Het reservehuisje past alleen op de voorste twee rijen.

Bereken hoeveel opstellingen er mogelijk zijn met de veertien verschillende huisjes.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2014, eerste tijdvak)

Figuur 2.1

Practicum

Met de volgende practica kun je leren hoe je met de grafische rekenmachine met faculteiten kunt werken. Verder wordt er beschreven hoe permutaties snel kunnen worden berekend.

- **Simulaties en tellen en de TI84**
- **Simulaties en tellen en de TInspire**
- **Simulaties en tellen en de Casio fx-CG50**
- **Simulaties en tellen en de HPprime**
- **Simulaties en tellen en de NumWorks**

Antwoorden

2.1 6760000 postcodes.

2.2 2^{120} = 1.329.227.995.784.915.872.903.807.060.280.344.576 tekens.

2.3 2730 manieren.

2.4 a 5040 volgordes.

b 1440 manieren.

c 1440 volgordes mogelijk.

d 288 volgordes.

2.5 a 6497400 manieren.

b 68640 manieren.

c 717600 manieren.

d 685464 manieren.

2.6 a 5 manieren.

b 24 manieren.

2.7 Gemiddeld een toename van ongeveer 59 apparaten per Nederlander.

2.8 In totaal zijn er 87091200 mogelijke opstellingen.

1.3 Combinaties

Inleiding

In dit onderdeel bekijken we situaties waarin je een keuze maakt van een aantal elementen uit een groep. Je leert onderscheid te maken tussen situaties waarin de volgorde waarin de elementen gekozen worden wel uitmaakt (permutaties) en niet uitmaakt (combinaties).

Je leert in dit onderwerp

- het verschil onderscheiden tussen permutaties en combinaties;
- het aantal combinaties van r uit n elementen berekenen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- machten en permutaties toepassen bij telproblemen met of zonder herhaling.

Voor de leerling

Nu ga je werken aan situaties waarin je een groepje uit een grotere groep haalt en verschil moet maken tussen de situatie waarin binnen het groepje de volgorde van belang is en wanneer dat niet zo is. En wat dit dan betekent voor de manier waarop je rekent.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 3.1**

Iemand moet 10 vragen met ‘ja’ of ‘nee’ beantwoorden.

a Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er mogelijk met precies drie keer ‘ja’?

b Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er mogelijk met precies 9 keer ‘ja’?

c Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er in totaal mogelijk?

★ **Opgave 3.2**

Je gooit met vijf verschillende geldstukken en je let op het aantal keren ‘kop’.

a Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er mogelijk?

b Hoeveel mogelijke uitkomsten met precies twee keer ‘kop’ zijn er?

c Je gooit nu met 50 geldstukken. Op hoeveel manieren kun je 20 keer ‘kop’ werpen?

★ **Opgave 3.3**

Voor een schaaktoernooi hebben zich 24 deelnemers gemeld. Ze spelen een halve competitie, dus iedere deelnemer speelt precies één maal tegen iedere andere deelnemer. Het aantal wedstrijden kun je berekenen met behulp van combinaties. Leg uit waarom je met combinaties rekent en bereken het aantal te spelen wedstrijden.

★ **Opgave 3.4**

Een groep muizen bestaat uit acht mannetjes en twaalf vrouwtjes. Er wordt willekeurig een groepje van vijf muizen gekozen.

a Het groepje bestaat uit uitsluitend vrouwtjes. Hoeveel verschillende groepjes zijn er mogelijk?

b Het groepje bestaat uit hoogstens twee mannetjes. Hoeveel verschillende groepjes zijn er mogelijk?

★ ★ **Opgave 3.5**

Op hoeveel manieren kun je acht verschillende boeken op een rij op een boekenplank plaatsen onder de volgende voorwaarden?

a Elke volgorde is toegestaan.

b De drie wiskundeboeken moeten bij elkaar staan.

c De twee woordenboeken aan het eind of aan het begin moeten naast elkaar staan.

d Er worden eerst drie boeken uitgekozen om hetzelfde te worden gekaft en worden dan aan het eind van de rij gezet.

★ **Opgave 3.6**

Je werpt met drie dobbelstenen.

a Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er? Let op! Er is één manier om drie te gooien, maar er zijn meerdere manieren om vier te gooien.

b Je kunt op verschillende manieren twaalf ogen gooien. Bijvoorbeeld door driemaal vier te gooien, maar ook door een zes en tweemaal drie te gooien.
Hoeveel mogelijkheden zijn er om twaalf ogen te gooien?

c Op hoeveel manieren kun je hoogstens zestien ogen gooien?

★ ★ **Opgave 3.7**

Op een scholengemeenschap bestaat de medezeggenschapsraad uit twaalf personen: zes personeelsleden, drie ouders en drie leerlingen. Deze medezeggenschapsraad kiest een dagelijks bestuur van drie personen.

a Op hoeveel manieren kun je een bestuur van drie personen kiezen als er verder geen eisen aan dat dagelijks bestuur worden gesteld?

b Op hoeveel manieren kun je een bestuur van drie personen kiezen als er een personeelslid, een ouder en een leerling in moeten zitten?

c Op hoeveel manieren kun je een bestuur van drie personen kiezen als eerst de voorzitter, vervolgens de vice-voorzitter en ten slotte de secretaris in functie worden gekozen?

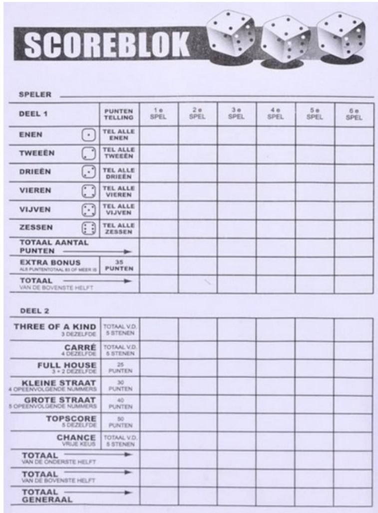
Toepassen

★ ★ Opgave 3.8: Yahtzee

Bij het dobbelspel Yahtzee gooi je met vijf dobbelstenen. Bij dit spel kun je afhankelijk van het aantal ogen op de dobbelstenen op een scoreformulier een puntentotaal noteren.

a Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er bij het gooien met vijf dobbelstenen?

b Eén van de worpen die punten oplevert, is Full House. Bij deze worp gooi je een aantal ogen driemaal en een ander aantal ogen tweemaal; bijvoorbeeld driemaal 5 en tweemaal 1. Hoeveel manieren zijn er om in één worp met vijf dobbelstenen Full House te gooien?

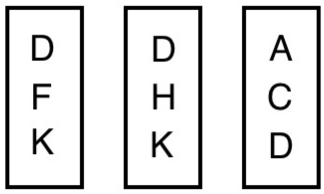


Figuur 3.1

★ ★ ★ Opgave 3.9: Straten vergelijken

Een planoloog wil weten op grond van welke eigenschappen de bewoners de straten van hun wijk beoordelen. Hij legt een aantal proefpersonen groepjes van drie straten voor. Hij vraagt hun bij elk groepje aan te wijzen welke twee van de drie straten het meest op elkaar lijken.

Het onderzoek heeft betrekking op tien straten, straat A, B, C, D, E, F, G, H, K en L genoemd. Hieruit worden alle mogelijke groepjes van drie gevormd en elk groepje wordt in alfabetische volgorde op een kaartje geschreven. Je ziet drie voorbeelden.



Figuur 3.2

a Hoeveel kaartjes zijn er nodig?

b Op hoeveel kaartjes komt straat A voor?

c Op hoeveel kaartjes komen straat A en B samen voor?

Een proefpersoon is bereid om bij alle kaartjes zijn keuze te maken.

d Onderzoek of het mogelijk is dat hij zeven keer voor de combinatie AB, zeven keer voor de combinatie AC en zeven keer voor de combinatie AD kiest.

(bron: examen havo wiskunde A in 1990, eerste tijdvak)

Practicum

Met de volgende practica kun je leren hoe je met de grafische rekenmachine met faculteiten kunt werken. Verder wordt er beschreven hoe permutaties en combinaties snel kunnen worden berekend.

- **Simulaties en tellen en de TI84**
- **Simulaties en tellen en de TInspire**
- **Simulaties en tellen en de Casio fx-CG50**
- **Simulaties en tellen en de HPprime**
- **Simulaties en tellen en de NumWorks**

Antwoorden

3.1 a 120 lijsten.

b 10 lijsten.

c 1024 lijsten.

3.2 a De uitkomst is 0, 1, 2, 3, 4 of 5 keer kop. Er zijn dus 6 mogelijkheden.

b 10 uitkomsten.

c $\approx 4{,}71 \cdot 10^{13}$ manieren.

3.3 276 wedstrijden.

3.4 a 792 groepjes.

b 10912 groepjes.

3.5 a 40320 manieren.

b 4320 manieren.

c 2880 manieren.

d 40320 manieren.

3.6 a 216 uitkomsten.

b 25 mogelijkheden.

c 216 mogelijkheden.

3.7 a 220 manieren.

b 54 manieren.

c 1320 manieren.

3.8 a 7776 mogelijke uitkomsten.

b 300 manieren.

3.9 a 120 kaartjes.

b 36 kaartjes.

c 8 kaartjes.

d Stel hij kiest zeven keer de combinatie AB (waarvan niet ABC, maar wel ABD) en zeven keer de combinatie AC (waarvan wel ABC, maar niet ACD). Er zijn dan nog zeven combinaties AD over (waarvan niet ABD, maar wel ACD).

1.4 Driehoek van Pascal

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- mogelijke routes zonder omwegen tellen in een rooster;
- mogelijke routes zonder omwegen berekenen met behulp van combinaties in een rooster;
- de driehoek van Pascal gebruiken.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- machten en permutaties toepassen bij telproblemen met of zonder herhaling;
- permutaties en combinaties toepassen bij het kiezen van r elementen uit n elementen.

Voor de leerling

Tenslotte ga je nu kijken hoe je het voorgaande toe kunt passen bij het werken in roosters. Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 4.1**

Een hockeyer neemt acht keer een strafbal en let op het aantal keren dat hij raak schiet.

a Op hoeveel manieren kan hij drie keer raak schieten?

b Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

c Op hoeveel manieren kan hij minstens zes keer raak schieten?

d Op hoeveel manieren kan hij hoogstens zes keer raak schieten?

★ **Opgave 4.2**

Een schaakclub telt zeven leden. Als de leden bij elkaar komen, dagen ze elkaar uit voor een partijtje schaak.

a Teken een rooster om alle mogelijkheden te tellen voor iemand die twee willekeurige personen uitdaagt.

b Hoeveel mogelijkheden heeft een schaker om twee personen uit te dagen?

c Hoeveel mogelijkheden zijn er totaal voor de schaker?

d De zeven leden kunnen maximaal drie partijen tegelijk spelen. Er is dan altijd een lid over. Op hoeveel manieren kan dat?

★ **Opgave 4.3**

Een hypotheekverstrekker moet voor volgende week achttien gesprekken inplannen. De klanten die hij moet inplannen kunnen iedere dag van de week. Hij besluit maandag vijf gesprekken te voeren.

a Op hoeveel manieren kan hij vijf van de achttien klanten kiezen?

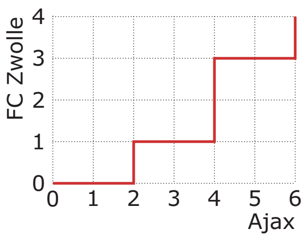
b Dinsdag plant hij maar drie gesprekken, want hij werkt die dag ook aan zijn administratie. Op hoeveel manieren kan hij die drie klanten nog kiezen?

c Op hoeveel manieren kan hij de overgebleven tien klanten nog over de resterende drie werkdagen verdelen?

d Op hoeveel manieren kan hij de overgebleven tien klanten nog over de drie resterende werkdagen verdelen als hij iedere dag minstens drie klanten wil bezoeken?

★ **Opgave 4.4**

Bij de voetbalwedstrijd Ajax - PEC Zwolle was de uitslag 6 - 4. Het scoreverloop is in de figuur weergegeven.



Figuur 4.1

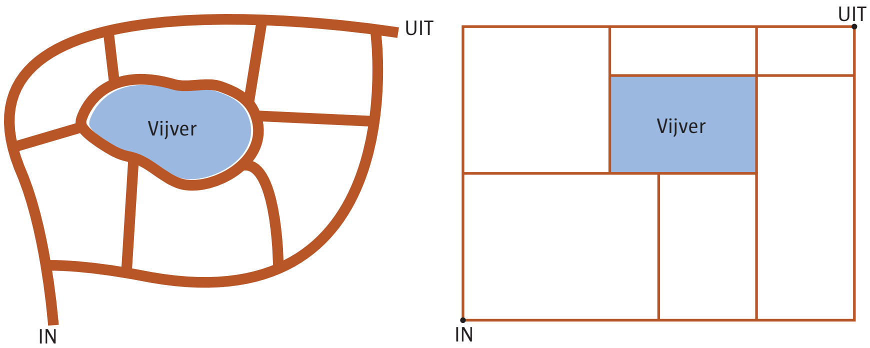
a Geef het scoreverloop door alle tussenstanden onder elkaar te zetten.

b Als je alleen de uitslag weet, hoeveel scoreverlopen zijn dan mogelijk?

c Hoeveel scoreverlopen zijn er voor deze wedstrijd waarbij de tussenstand 4-1 was?

★ **Opgave 4.5**

Je ziet een tuin met paden en een vijver. Deze plattegrond kun je schematisch weergeven in een rechthoekig rooster. Bereken met het rooster het aantal routes zonder omwegen dat je kunt lopen van de ingang naar de uitgang.



Figuur 4.2

★ ★ **Opgave 4.6**

Een docent Engels maakt een meerkeuzetoets met zestien vragen. Op elk van de vragen is het antwoord A, B, C of D mogelijk.

a Hoeveel series antwoorden zijn er mogelijk als de docent besluit om acht keer antwoord B en acht keer antwoord D te kiezen?

b Hoeveel series antwoorden zijn er mogelijk als de antwoorden A, B, C en D evenveel voorkomen?

c Hoeveel series antwoorden zijn er mogelijk als er bij de eerste zeven vragen geen C voorkomt en bij de laatste negen vragen precies vier keer een A en drie keer een B voorkomt?

Toepassen

★ ★ **Opgave 4.7: Morsecode**

Je ziet het morsealfabet. Elke letter bestaat uit maximaal vier signalen; elk cijfer bestaat uit precies vijf signalen. Een signaal kan kort zijn (aangegeven door ·) of lang zijn (aangegeven door –).

A	·–	M	––	Y	–·––	6	–····
B	–···	N	–·	Z	––··	7	––···
C	–·–·	O	–––	Ä	·–·–	8	–––··
D	–··	P	·––·	Ö	–––·	9	––––·
E	·	Q	––·–	Ü	··––	.	·–·–·–
F	··–·	R	·–·	Ch	––––	,	––··––
G	––·	S	···	0	–––––	?	··––··
H	····	T	–	1	·––––	!	··––·
I	··	U	··–	2	··–––	:	–––···
J	·–––	V	···–	3	···––	"	·–··–·
K	–·–	W	·––	4	····–	'	·––––·
L	·–··	X	–··–	5	·····	=	–···–

Figuur 4.3

a Hoeveel tekens zijn er mogelijk met vijf signalen?

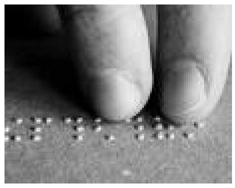
b Is het mogelijk om het alfabet weer te geven met maximaal vier signalen?

c Het is ook mogelijk om alle cijfers weer te geven met twee punten en drie strepen. Laat dat zien door alle mogelijkheden systematisch op te schrijven.

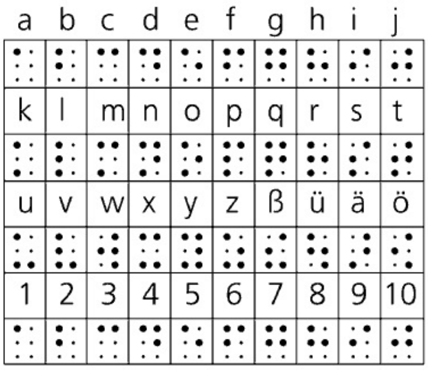
★ ★

Opgave 4.8: Braille

Speciaal voor blinden en slechtzienden bestaat het Brailleschrift. In het Brailleschrift ontstaat elk teken door van 6 punten een aantal in reliëf weer te geven. De blinde kan het aantal en de positie van de punten voelen en zo het teken herkennen. Jet ziet het alfabet en de cijfers in Braille.



Figuur 4.4



Figuur 4.5

a Op hoeveel manieren kun je een Brailleteken maken met 2 punten in reliëf?

b Op hoeveel manieren kun je een Brailleteken maken met 3 punten in reliëf?

c Hoeveel Brailletekens zijn er totaal mogelijk?

d Er zijn Brailletekens die op de kop hetzelfde zijn. Hoeveel Brailletekens met 2 punten niet in reliëf betreft dit?

Antwoorden

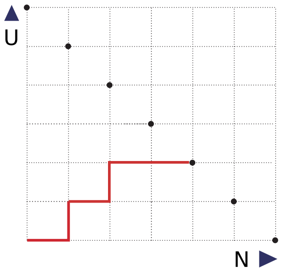
4.1 a 56 manieren.

b 256 mogelijkheden.

c 37 manieren.

d 247 manieren.

4.2 a Zie de figuur.



Iemand daagt zes andere personen wel uit (U) of niet uit (N). De getekende route geeft aan N - U - N - U - N - N.

In deze situatie daagt iemand de tweede en de vierde persoon uit. De manieren om twee mensen uit te dagen zijn alle routes naar het aangegeven punt.

b 15 mogelijkheden.

c 64 mogelijkheden.

d 105 manieren.

4.3 a 8568 manieren.

b 286 manieren.

c 59049 manieren.

d 12600 manieren.

4.4 a 1 - 0; 2 - 0; 2 - 1; 3 - 1; 4 - 1; 4 - 2; 4 - 3; 5 - 3; 6 - 3; 6 - 4

b 210 scoreverlopen.

c 50 scoreverlopen.

4.5 Zoek ze in de figuur. Er zijn 11 routes.

4.6 a 12870 series.

b 63063000 series.

c 11022480 series.

4.7 a 32 tekens.

b Er zijn 30 tekens mogelijk, dus ja.

c . . − − − | . − . − − | . − − . − | . − − − . | − . . − −
− . − . − | − . − − . | − − . . − | − − . − . | − − − . .

4.8 a 15 manieren.

b 20 manieren.

c 63 Brailletekens.

d Dit betreft 3 Brailletekens, de t, x en ü.

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

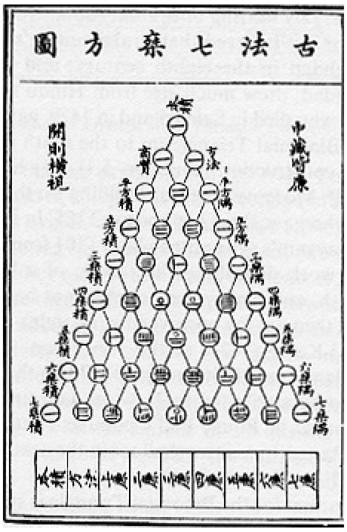
- wegendiagram — boomdiagram — uittellen
- macht — faculteit — permutaties
- combinaties
- driehoek van Pascal

Activiteitenlijst

- mogelijkheden tellen met behulp van diagrammen of uittellen
- machten gebruiken bij herhaling van mogelijkheden — faculteiten en permutaties gebruiken
- combinaties gebruiken — verschil tussen permutaties en combinaties herkennen
- combinaties toepassen bij routes in roosters — de driehoek van Pascal toepassen

Achtergronden

Hoewel de driehoek van Pascal is genoemd naar **Blaise Pascal (1623—1662)** was deze getallendriehoek al honderden jaren voor zijn geboorte bekend. Waarschijnlijk kende de Chinese geleerde Chia Hsien (omstreeks 1050) de driehoek van Pascal al en het is zeker dat de Perzische wetenschapper **Omar Khayyam (1048—1113)** er gebruik van maakte om wortels uit getallen te benaderen. Eén van de eerste weergaves van de driehoek van Pascal is van de Chinees **Yang Hui (1261—1275)**.
Pascal schreef er pas over in 1654 in zijn 'Traité du triangle arithmétique', waarin hij diverse eigenschappen van de getallen in deze driehoek liet zien.



Figuur 5.1

Testen

Opgave 5.1

In de Eredivisie spelen achttien voetbalclubs om het landskampioenschap van Nederland. Elk team speelt één keer thuis en één keer uit tegen elk ander team. Bij winst krijgt een team 3 punten, bij gelijkspel 1 punt en bij verlies 0 punten.

a Hoeveel wedstrijden worden er in totaal gespeeld?

b Hoeveel punten kan een team maximaal halen?

De Toto is een spel waarin je voetbaluitslagen voorspelt. Bij Toto13 voorspel je van dertien wedstrijden of de thuisclub wint, verliest of gelijkspeelt.

c Hoeveel verschillende Toto13-uitslagen zijn er mogelijk?

d Je weet dat er twee uitslagen fout zijn voorspeld. Hoeveel mogelijke rijtjes goede voorspellingen zijn er dan?

e Je weet dat er hoogstens twee uitslagen fout zijn voorspeld. Hoeveel mogelijke rijtjes goede voorspellingen zijn er dan?

★ Opgave 5.2

Bij het dagmenu in een restaurant van de hamburgerketen BurgerChief heb je voor het ‘Chiefmenu’ keuze uit:

- Vooraf: tomatensoep of groentesoep.
- Hoofdgerecht: frites met cheeseburger, frites met dubbele hamburger of frites met beefburger.
- Drinken: cola of sinas.
- Nagerecht: chocoladepudding, vanillepudding of citroenpudding.

a Hoeveel menu's zijn er dan mogelijk?

b Hoeveel menu's zijn er mogelijk als iemand beslist een cheeseburger wil en niet van pudding houdt?

★ Opgave 5.3

In een vaas zitten negen balletjes, waarvan twee blauwe, drie rode en vier witte balletjes. De balletjes zijn genummerd. Frits haalt zonder te kijken een balletje uit de vaas, bekijkt de kleur en het nummer, legt het weer terug en haalt (na schudden) opnieuw zonder te kijken een balletje uit de vaas.

a Hoeveel mogelijkheden zijn er om twee balletjes te trekken?

b Hoeveel mogelijkheden zijn er met een wit en een rood balletje?

c Hoeveel mogelijkheden zijn er met minstens één blauw balletje?

d Beantwoord a, b en c nog eens als het balletje niet wordt teruggelegd.

e Fleur pakt vijftien keer achter elkaar een balletje uit de vaas en legt het balletje steeds terug. Ze heeft precies acht keer een blauwe balletje gepakt en vier keer een rode. Op hoeveel manieren heeft ze die balletjes kunnen pakken?

★ Opgave 5.4

De cijfers die in het venster van een eenvoudige rekenmachine verschijnen, worden gemaakt door een aantal opgelichte staafjes. Voor elk cijfer zijn maximaal zeven staafjes beschikbaar.

Figuur 5.2

a Staafje ‘aan’ wordt weergegeven door een 1, staafje ‘uit’ door een 0. Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

b Hoeveel symbolen met drie oplichtende staafjes zijn er?

c Hoeveel symbolen zijn er in totaal te maken?

d Er gaan twee staafjes kapot. Hoeveel symbolen zijn er dan nog met drie oplichtende staafjes te maken?

★ Opgave 5.5

Bij tennis wordt vaak het best-of-five systeem gespeeld. Dit betekent dat er maximaal vijf sets worden gespeeld. Degene die het eerst drie sets wint, heeft de partij gewonnen. A speelt tegen B.

a Hoeveel mogelijke wedstrijdverlopen zijn er?

b Het staat 1-0 voor A. Op hoeveel manieren kan A de wedstrijd winnen?

c Het staat 1-0 voor A. Op hoeveel manieren kan B de wedstrijd winnen?

★ Opgave 5.6

De leerlingenraad bestaat uit 22 personen, verdeeld over diverse jaargroepen. Er zitten 8 leerlingen uit de bovenbouw en 14 leerlingen uit de onderbouw in de raad. Er wordt een dagelijks bestuur gekozen van 5 personen.

a Op hoeveel manieren kun je dit dagelijks bestuur kiezen?

b De leden van het bestuur krijgen allemaal andere taken. Op hoeveel manieren kun je nu het bestuur kiezen als je ook let op de verschillende taken?

c Je let weer op de verschillende taken die de bestuursleden hebben. Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als het moet bestaan uit 2 leerlingen uit de onderbouw en 3 uit de bovenbouw?

d Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als er minstens 3 onderbouwleerlingen deel van moeten uitmaken?

e Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als de voorzitter uit de bovenbouw moet komen?

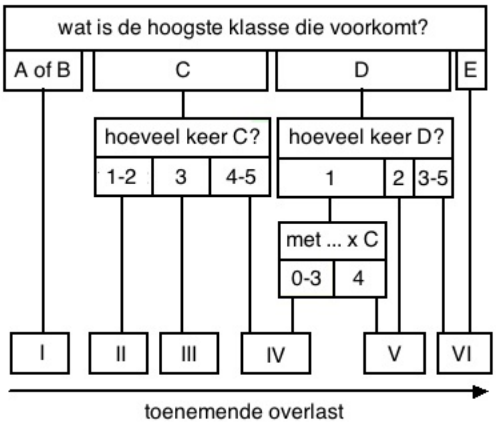
★ ★

Opgave 5.7

Om de leefbaarheid van een gebied te classificeren, wordt gekeken naar een aantal omgevingsfactoren die de leefbaarheid negatief kunnen beïnvloeden. Daarbij wordt gekeken naar vijf factoren die overlast kunnen veroorzaken. De factoren zijn lawaai, onveiligheid, geur, kankerverwekkende stoffen en giftige stoffen. De totale overlast wordt op de volgende manier vastgesteld.

Elk van de vijf factoren wordt gemeten en vervolgens ingedeeld in vijf beoordelingsklassen, van de laagste klasse A (nauwelijks overlast) tot en met de hoogste klasse E (grote overlast).

Met behulp van dit schema is de hindercode I, II, III, IV, V of VI te bepalen. Deze hindercode is een maat voor de totale overlast in een gebied.
Als de metingen van de vijf factoren het rijtje A-C-C-B-A opleveren (voor lawaai-onveiligheid-geur-kankerverwekkende stoffen-giftige stoffen), is de bijbehorende hindercode II.



Figuur 5.3

a Hoeveel verschillende rijtjes zijn er mogelijk met hindercode III? Licht je antwoord toe.

b Hoeveel verschillende rijtjes zijn er mogelijk met hindercode I? Licht je antwoord toe.

c Als één van de factoren één klasse hoger wordt, stijgt de hindercode. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de hindercode ook meer dan één niveau kan stijgen.

Toepassen

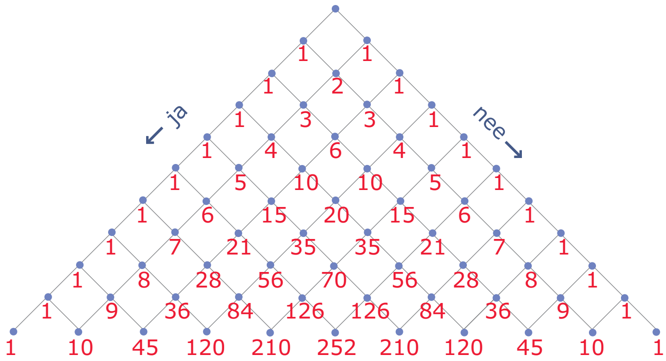
★★ Opgave 5.8: Driehoek van Pascal

De **driehoek van Pascal** is een telsysteem met vele toepassingen.

Hier zie je het telsysteem weergegeven in een rooster. De naam 'driehoek' wordt door de figuur duidelijk opgeroepen. Het aantal routes naar één van de punten op de tiende rij is het aantal combinaties van r uit 10: $\binom{10}{r}$. Ga dit zelf na!

Om naar een punt op de tiende rij te komen, moet je 10 keer een 'ja/nee'-keuze maken. Het aantal mogelijkheden om naar een punt op de tiende rij te komen is daarom in totaal 2^{10}.

Dus: $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 2^{10}$.



Figuur 5.4

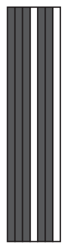
a Laat zien hoe je met behulp van combinaties de getallen op de tiende rij van de driehoek van Pascal kunt vinden.

b Laat zien hoe je vanuit de getallen op de tiende rij de getallen op de elfde rij van de driehoek van Pascal kunt vinden.

★★ Opgave 5.9: BARcode

Bij het werken met allerlei codes zijn telproblemen voortdurend van belang. Zijn er voldoende pincodes voor iedereen? Zijn er voldoende postcodes voor iedereen? Kun je een goed systeem vinden voor het identificeren van artikelen in de winkel?

Bij het ontwerpen van een bepaald soort barcode (streepjescode) is men uitgegaan van een rechthoek die verdeeld is in 7 stroken.
Iedere strook is 'zwart' of 'wit'. Hiernaast zie je de code voor het cijfer 7.



7

Figuur 5.5

a Hoeveel codes zijn er in totaal mogelijk voor zo'n rechthoek?

b Hoeveel codes zijn er mogelijk met precies 3 zwarte stroken?

Hier zie je een voorbeeld van een streepjescode.

8 710398 010148

Figuur 5.6

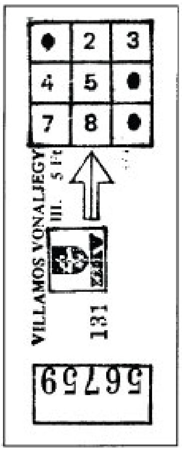
c Uit hoeveel rechthoekjes bestaat dit type barcode?

d Hoeveel verschillende barcodes zijn er van dit type mogelijk als ze uitsluitend uit cijfers bestaan?

Examen

★ ★ Opgave 5.10: Metro in Boedapest

Als je in Boedapest met de metro wilt reizen, moet je eerst een kaartje kopen. Zo'n kaartje is voorzien van 9 vakjes met daarin de cijfers 1 tot en met 9 (zie figuur). Zodra je bent ingestapt, moet je je kaartje in een ponsapparaatje steken (volgens de pijlrichting en met de bedrukte zijde boven). Eén of meer (maximaal 9) cijfers worden dan in één keer weggeponst. Daarmee is aan het kaartje te zien in welke trein je reis is begonnen. Hier zie je een afbeelding van een gebruikt kaartje, waarbij de vakjes 1, 6 en 9 zijn voorzien van een gaatje.



Figuur 5.7

a Bereken op hoeveel verschillende manieren er in een kaartje 3 gaatjes kunnen worden geponst.

b In een kaartje worden 2 gaatjes geponst, die niet in dezelfde rij of kolom zitten. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er? Licht je antwoord toe.

Het aantal cijfers dat wordt weggeponst, mag variëren van 1 tot en met 9. Op een dag rijden er op het metronet 400 treinen.

c Is het mogelijk dat in elke trein op een verschillende wijze gaatjes in een kaartje worden geponst? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 1992, tweede tijdvak)

★ ★ Opgave 5.11: KIX

De KIX (KlantIndeX) is een streepjescode die gebruikt wordt om post machinaal te sorteren. Steeds meer bedrijven drukken op poststukken onder het adres de KIX af. Deze bedrijven krijgen daarvoor een korting op de verzendkosten.

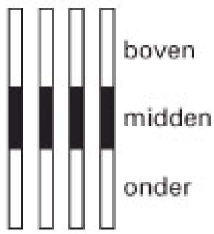
Een adres wordt in Nederland volledig bepaald door de postcode en het huisnummer. De KIX bestaat daarom uit 4 cijfers en 2 letters voor de postcode en daarachter het aantal cijfers dat nodig is voor het huisnummer. In de figuur zie je twee voorbeelden van een KIX. Je ziet als voorbeeld de KIX van postcode 3224 BC met huisnummer 6 en van postcode 3224 BC met huisnummer 108. In de KIX heeft elk cijfer en elke letter een eigen symbool. Er wordt daarbij geen onderscheid gemaakt tussen hoofdletters en kleine letters. De letters B en b krijgen dus hetzelfde symbool.
Elk symbool bestaat uit 4 verticale strepen. Zie de laatste figuur.

3 2 2 4 B C 6

3 2 2 4 B C 1 0 8

Figuur 5.8

Het middelste stuk van elke streep is altijd zwart. Boven zijn er 4 stukken en onder zijn er 4 stukken. Elk van die 8 stukken kan wit of zwart zijn. Zo zijn er veel verschillende symbolen te maken waarbij het niet uitmaakt hoeveel van de 4 bovenste en de 4 onderste stukken zwart zijn gemaakt.



Figuur 5.9

a Bereken het aantal verschillende symbolen dat op die manier is te maken.

Bij een KIX-symbool zijn er van de 4 bovenste stukken precies 2 zwart. Ook van de 4 onderste stukken zijn er precies 2 zwart.
Bijvoorbeeld: de 3 heeft symbool , de B (of b) heeft symbool . Zoals je bij de laatste streep van de 3 ziet, mag een streep ook helemaal zwart zijn, als er maar in totaal twee stukken boven en twee stukken onder zwart zijn.

b Hoeveel verschillende KIX-symbolen zijn er op deze manier te maken? Licht je antwoord toe.

Bij elk adres hoort een huisnummer. Huisnummers beginnen nooit met een 0. Bij sommige adressen komt er na het huisnummer een toevoeging, zoals bij het huisnummer 6A. Soms staat er zelfs een heel woord bij: 73 boven. Bij zo'n toevoeging wordt de KIX na het huisnummer aangevuld met eerst de letter X en daarna de letter(s) en/of cijfer(s) die nodig zijn voor de toevoeging.
De KIX is door het huisnummer (zie figuur) en door een eventuele toevoeging niet altijd even lang. We vatten dit samen in deze tabel.

altijd		soms	
postcode	huisnummer	scheidingsteken	toevoeging
4 cijfers en 2 letters	maximaal 5 cijfers	X	maximaal 6 tekens (letters en/of cijfers)
vaste lengte	variabele lengte	vaste lengte	variabele lengte

Tabel 5.1

Hier vind je twee voorbeelden van een KIX met 9 symbolen:

bij het adres:	Dorsvlegel 108, 3224 BC HELLEVOETSLUIS
hoort KIX:	3224BC108
in symbolen:	

bij het adres:	Wethouder Hekkingstraat 9A, 1234 HV JUINEN
hoort KIX:	1234HV9XA
in symbolen:	

Tabel 5.2

De postcode 6801 MG vormt het begin van een KIX van 9 symbolen. Er zijn aan de 6 symbolen van de postcode dus nog 3 symbolen toegevoegd.

c Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om bij postcode 6801 MG een correcte KIX van 9 symbolen te maken? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 2004, tweede tijdvak)

Antwoorden

5.1 a 306 wedstrijden.

b Maximaal 102 punten.

c 1.594.323 uitslagen.

d 78 rijtjes.

e 92 rijtjes.

5.2 a 36 menu's.

b 4 menu's.

5.3 a 81 mogelijkheden.

b 24 mogelijkheden.

c 32 mogelijkheden.

d Je vindt dan 72, 24 en 30 mogelijkheden.

e 225225 manieren.

5.4 a 128 mogelijkheden.

b 35 symbolen.

c 127 symbolen.

d 10 symbolen.

5.5 a 20 wedstrijdverlopen.

b 6 manieren.

c 4 manieren.

5.6 a 26334 manieren.

b 3160080 manieren.

c 611520 manieren.

d 20202 manieren.

e 74880 manieren.

5.7 a 40 rijtjes.

b 32 rijtjes.

c A-C-C-C-D heeft hindercode IV. Als de D met één verhoogd wordt tot de E, krijg je hindercode VI.

5.8 a Die getallen zijn $\binom{10}{0} = 1$, $\binom{10}{1} = 10$, $\binom{10}{2} = 45$, etc.

b Door steeds twee naast elkaar gelegen getallen op de tiende rij op te tellen.

5.9 a 128 codes.

b 35 codes.

c Dit type bestaat uit 8 rechthoekjes.

d Er zijn 100.000.000 mogelijkheden.

5.10 a Dat zijn $\binom{9}{3} = 84$ manieren.

b Dat zijn $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 18$ verschillende mogelijkheden.

c Het totaal aantal mogelijkheden is $2^9 - 1 = 511$. Dus het kan.

5.11 a Voor elke streep zijn er 4 mogelijkheden. Met vier strepen zijn er $4^4 = 256$ mogelijkheden.

b $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 36$

c De laatste 3 symbolen kunnen een getal vormen, een huisnummer van 3 cijfers. Er zijn daarvoor 900 getallen mogelijk, namelijk 100 tot en met 999. Het kan ook cijfer + X + toevoeging zijn. Daarvoor zijn $9 \times 1 \times 36 = 324$ mogelijkheden. In totaal zijn er $900 + 324 = 1224$ mogelijkheden.

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★ ★	★ ★ ★
1	**Mogelijkheden**	★	★ ★	★ ★ ★
	Het aantal mogelijkheden van een telprobleem systematisch weergeven.	1.1 ☐ 1.3 ☐ T 5.2 ☐		
	Het aantal mogelijkheden van een telprobleem systematisch tellen/ berekenen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ 1.5 ☐ T 5.1 ☐ T 5.2 ☐ T 5.3 ☐ T 5.4 ☐ T 5.5 ☐	1.6 ☐ T 5.7 ☐	1.7 ☐
2	**Herhaling of niet**	★	★ ★	★ ★ ★
	Werken met machten als je mogelijkheden telt in situaties waarin herhaling optreedt.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.6 ☐ T 5.1 ☐ T 5.3 ☐	T 5.9 ☐ T 5.10 ☐ T 5.11 ☐	2.7 ☐
	Het begrip faculteit.	2.3 ☐ 2.4 ☐ 2.6 ☐ T 5.1 ☐ T 5.3 ☐ T 5.6 ☐	2.5 ☐ T 5.9 ☐ T 5.10 ☐ T 5.11 ☐	2.8 ☐
	Werken met permutaties als je mogelijkheden telt in situaties waarin geen herhaling optreedt.	2.4 ☐ 2.6 ☐ T 5.6 ☐	2.5 ☐ T 5.10 ☐ T 5.11 ☐	2.8 ☐
3	**Combinaties**	★	★ ★	★ ★ ★
	Het verschil tussen permutaties en combinaties herkennen.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ 3.6 ☐ T 5.1 ☐ T 5.4 ☐ T 5.6 ☐	3.5 ☐ 3.7 ☐ 3.8 ☐ T 5.7 ☐ T 5.9 ☐ T 5.10 ☐ T 5.11 ☐	3.9 ☐
	Het aantal combinaties van r uit n elementen berekenen.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ 3.6 ☐ T 5.1 ☐ T 5.4 ☐ T 5.6 ☐	3.5 ☐ 3.7 ☐ 3.8 ☐ T 5.9 ☐ T 5.10 ☐ T 5.11 ☐	3.9 ☐
4	**Driehoek van Pascal**	★	★ ★	★ ★ ★
	Het aantal mogelijke routes zonder omwegen tellen in een rooster.	4.2 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐		
	Het aantal mogelijke routes zonder omwegen/rijtjes berekenen met behulp van combinaties.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐	4.6 ☐ 4.7 ☐ 4.8 ☐	
	Werken met de driehoek van Pascal.	4.5 ☐	T 5.8 ☐	

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

www.math4all.nl