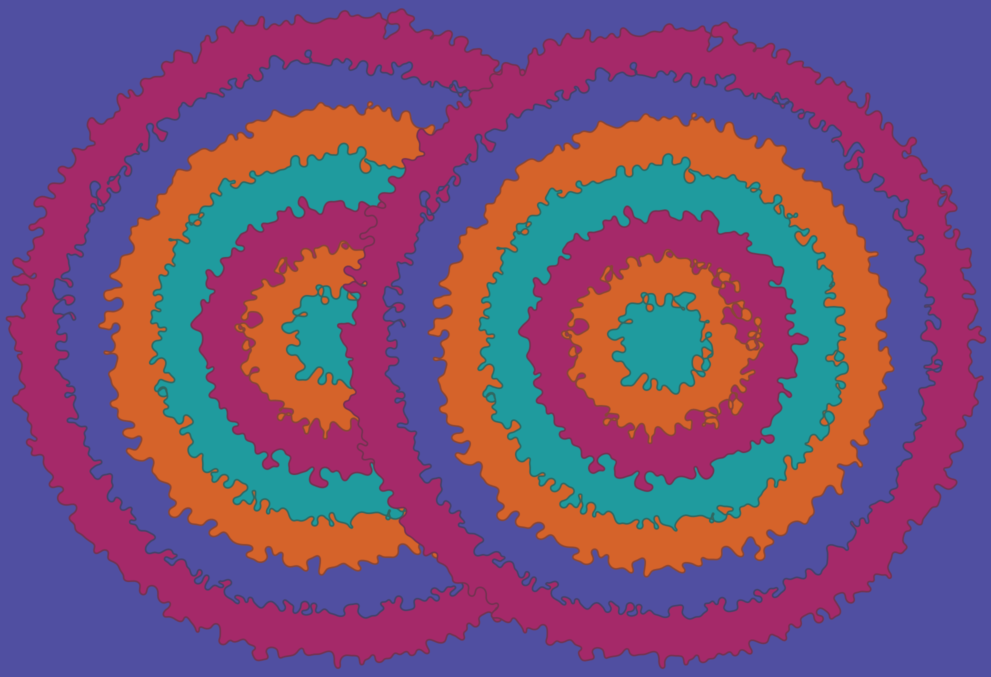
Wiskunde A

4 VWO

Katern 3



ConTeXt College

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Statistiek

1.1 Onderzoek

Inleiding

Statistiek houdt zich bezig houdt met het verzamelen, uitleggen en presenteren van betrouwbare gegevens over groepen (van bijvoorbeeld mensen). Meestal wordt daarbij maar een deel van de groep onderzocht.

Het woord 'statistiek' is afkomstig uit het Latijn: 'statisticum collegium'. Dit betekent: les over staatszaken. Je zou kunnen zeggen: de analyse van staatsgegevens.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen statistisch onderzoek, steekproef, populatie, aselect en representatief;
- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve variabelen en tussen discrete en continue kwantitatieve variabelen;
- een vragenlijst opstellen die betrouwbare gegevens oplevert die goed te verwerken zijn;
- toevalsgetallen genereren en er handig gebruik van maken;
- het verschil tussen beschrijvende en verklarende statistiek.

Voorkennis

- de basistechnieken van het werken met de grafische rekenmachine en/of met Excel.

Verkennen

Opgave V1

Files worden meestal ervaren als een probleem.

a Noem minimaal vier bedrijven of beroepsgroepen waarvoor de ontwikkeling van het fileprobleem van belang is.

b Waarom is statistisch onderzoek noodzakelijk om het ontstaan van files te onderzoeken?

c Noem vier (soorten) organisaties die in Nederland statistisch onderzoek doen.

Opgave V2

Bedenk een opzet voor een onderzoek naar het gebruik van de fiets onder de ouders en leerlingen van je school. De bedoeling is dat je na het onderzoek uitspraken kunt doen over het gebruik van de fiets van alle leerlingen van de school en hun ouders.

Uitleg 1

Het percentage mensen dat (vrijwel) nooit vlees eet is minder dan 5%, bij 17 miljoen Nederlanders dus 850.000 mensen. Dit aantal is wel stijgende en gebaseerd op onderzoeken van onder andere het RIVM, het Landbouw Economisch Instituut, Natuur en Milieu, het Voedingscentrum en Milieu Centraal.
Bron: Nederlandse vegetariërsbond, maart 2017

Belangrijke vragen bij zo'n bewering zijn:

- Waar komen deze gegevens vandaan?
- Hoe betrouwbaar is zo'n uitspraak?

Statistiek houdt zich bezig met het verzamelen, uitleggen en presenteren van betrouwbare gegevens over groepen (van bijvoorbeeld mensen), waarbij meestal maar een deel van de groep wordt onderzocht. Je noemt de groep ‘de populatie’ en het deel van de groep ‘een steekproef’. De gegevens die je verzamelt heten ‘data’.

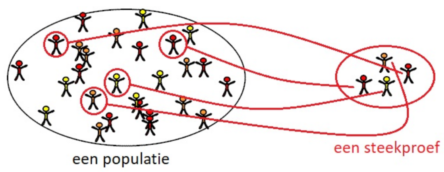
Het kiezen van de steekproefdeelnemers moet ‘aselect’ (willekeurig) plaatsvinden.

De steekproef moet ‘representatief’ zijn: alle soorten deelnemers moeten naar verhouding even vaak in de populatie voorkomen als in de steekproef.

Om te zorgen dat je een goede ‘steekproef’ hebt, moet je ook zorgen dat deze groot genoeg is.

Een statistisch onderzoek begon met de onderzoeksvraag: “Hoeveel procent van de Nederlanders is vegetariër?”

Deze vraag gaat over de variabele ‘aantal Nederlanders dat vegetariër is’. Deze variabele is kwantitatief (in getallen uit te drukken). Daartegenover staan kwalitatieve variabelen zoals ‘geslacht’ of ‘politieke voorkeur’.



Figuur 1.2

Opgave 1

Bestudeer **Uitleg 1**. Welke van de volgende steekproeven is/zijn representatief? Licht je antwoord toe.

a Om een onderzoek te doen naar het discotheekbezoek onder 14- tot 18-jarigen kies je de leerlingen van jouw eigen klas.

b Om de politieke voorkeur van Nederlanders te bepalen worden aselect uit het bevolkingsregister van Nederland 7500 inwoners getrokken die aan het onderzoek deelnemen.

c Om de kwaliteit van diepvrieskippen te bepalen, kopen de onderzoekers 190 diepvrieskippen; van 19 merken steeds 10 aselect getrokken stuks.

Opgave 2

In welke gevallen is sprake van een aselecte steekproef?

a Tien Deventernaren kiezen door de eerste tien achternamen met een H aan te strepen in het telefoonboek van Deventer.

b Een provincie in Nederland kiezen door deze geblinddoekt op een kaart van Nederland aan te wijzen.

c Vijf 4-havo leerlingen kiezen door uit een zak met gevouwen lootjes met alle achternamen van leerlingen uit 4-havo de eerste vijf te halen.

d Automobilisten om en om bij de toegangsweg van een dorp vanaf 20:00 tot 22:00 uur aanhouden en controleren.

Uitleg 2

In een dataset kunnen verschillende soorten variabelen zitten. Je kent het onderscheid tussen kwalitatieve en kwantitatieve variabelen. Met kwantitatieve variabelen kun je rekenen, met kwalitatieve variabelen niet. Met een hobby (kwalitatief) kun je niet rekenen, met een gemiddeld cijfer (kwantitatief) wel.

Kwantitatieve variabelen kun je weer onderverdelen in discrete variabelen en continue variabelen.

- Discrete variabelen zijn variabelen die geen tussenwaarden kunnen aannemen. Bijvoorbeeld het aantal kinderen in een gezin, een score op een toets van veertig meerkeuzevragen, leeftijd, schoenmaat, enzovoort.
- Continue variabelen zijn variabelen als lengte, gewicht, buitentemperatuur, tijd, enzovoort. Continue variabelen kunnen allerlei tussenwaarden aannemen.

Een continue variabele als ‘lengte’ kan door afronding op bijvoorbeeld hele cm wel discreet lijken. Toch moet je die als continu blijven opvatten.

Opgave 3

Iemand wil een onderzoek doen bij examenklassen havo met de volgende variabelen: geslacht, geboortejaar, geboortemaand, gewicht, lengte, cijfergemiddelde, cijfer voor wiskunde, huiswerk, wiskundegroep, profiel en plezier.
Geef voor elk van deze variabelen aan of deze kwalitatief of kwantitatief is, discreet of continu en welke waarden de variabelen kunnen aannemen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Statistiek houdt zich bezig met het verzamelen, uitleggen en presenteren van betrouwbare gegevens over groepen (van bijvoorbeeld mensen), de **populatie**. Meestal wordt maar een deel van de groep, de **steekproef**, onderzocht. De verzamelde gegevens heten **data**.

Als je verzamelde gegevens presenteert en gebruikt om daarin patronen te ontdekken, dan ben je bezig met **beschrijvende statistiek**. Je kunt op basis van de gegevens van een steekproef uitspraken doen over de populatie: je bent dan bezig met **verklarende statistiek**.

Het kiezen van de steekproefdeelnemers moet **aselect** plaatsvinden. Dat wil zeggen dat elk lid van de populatie even grote kans heeft om in de steekproef te komen. Daarbij wordt vaak gebruikgemaakt van **toeval**, bijvoorbeeld door loten of toevalsgetallen uit een computer of de grafische rekenmachine.

De steekproef moet **representatief** zijn. Alle soorten leden uit de populatie moeten naar verhouding even vaak in de populatie voorkomen als in de steekproef.

De **steekproefomvang** moet groot genoeg zijn. Bijvoorbeeld om te zorgen dat deze ook representatief is.

Voor het verzamelen van gegevens kan een **enquête** worden gebruikt die bestaat uit **onderzoeksvragen**.

Leeftijd, geslacht, lengte, gewicht, kleur ogen noem je **variabelen**.

Kwalitatieve variabelen zoals ‘geslacht’ en ‘kleur ogen’ geven een eigenschap (kwaliteit) weer.

Kwantitatieve variabelen hebben een getalswaarde, zoals ‘leeftijd’, en je kunt ermee rekenen.

Er zijn verschillende typen kwantitatieve variabelen:

- **discrete** kwantitatieve variabelen, zoals ‘schoenmaat’. Alleen bepaalde waarden (bijvoorbeeld 7 en 7,5) kunnen voorkomen, de andere tussenliggende waarden niet.
- **continue** kwantitatieve variabelen, zoals ‘lengte’ en ‘gewicht’. Elke tussenliggende waarde kan ook voorkomen.

‘Discreet’ betekent: ‘los van elkaar’; ‘continu’ staat voor ‘aaneengesloten’.

De **bivariate statistiek** en **multivariate statistiek** zijn de onderdelen van de statistiek die onderzoek doen naar het verschil tussen twee of meer populaties of naar de samenhang tussen twee of meer variabelen in dezelfde populatie.

Bekijk het **Practicum** om na te gaan hoe je **toevalsgetallen** kunt oproepen en om te leren werken met **Excel**.

Voorbeeld 1

Bekijk de volgende vier manieren om een steekproef samen te stellen. Welke van deze steekproeven is niet representatief en welke is niet aselect?

1. Voor een onderzoek naar de mening van treinreizigers over de service van de NS in de treinen ga je enquêteren. Je bevraagt bij de ingang van een willekeurig gekozen station elk uur van de dag tien willekeurige reizigers.
2. Voor een onderzoek naar het rijgedrag van vrachtwagenchauffeurs ga je mensen enquêteren. Je kiest voor de uitgang/ingang van een treinstation en bevraagt vanaf 7:00 uur elk uur van de dag tien willekeurige reizigers.
3. Voor een onderzoek naar het rookgedrag van ouders van leerlingen van jullie school ondervraag je de eerste vijftig binnenkomende ouders op een ouderavond.
4. Voor een onderzoek naar het rookgedrag onder ouders van leerlingen van jullie school selecteer je door loting vijftig leerlingen van jullie school en ondervraag je weer na loting de vader of de moeder van elk van de vijftig leerlingen.

Antwoord

Steekproef 1 is niet aselect, want reizigers die het station niet aandoen, kunnen niet in de steekproef komen. Als er sprake is van regio's voor bijvoorbeeld de schoonmaak van treinen, is de steekproef ook niet representatief.

Bij steekproef 2 is de populatie al niet goed vastgelegd. Het is dus onzinnig om over aselect of representatief te spreken.

Steekproef 3 is niet aselect, want ouders die niet op de ouderavond komen, kunnen niet in de steekproef komen. Als er geen verband is tussen ouderavondbezoek en roken, zou deze steekproef wel representatief kunnen zijn.

Steekproef 4 is niet aselect. Alleenstaande ouders met één kind op school hebben een grotere kans om in de steekproef te komen dan getrouwde ouders met één kind op school. Of de steekproef representatief is, is twijfelachtig.

Opgave 4

Naar welke soort variabele verwijst de gestelde vraag?
Kies uit: kwalitatieve variabele, discrete kwantitatieve variabele of continue kwantitatieve variabele.

a Hoeveel vakken heb je?

A. kwalitatieve variabele
B. discrete kwantitatieve variabele
C. continue kwantitatieve variabele

b Hoe ver is het van school naar huis?

A. kwalitatieve variabele
B. discrete kwantitatieve variabele
C. continue kwantitatieve variabele

c Welk profiel heb je gekozen?

A. kwalitatieve variabele
B. discrete kwantitatieve variabele
C. continue kwantitatieve variabele

d Wat is je telefoonnummer?

A. kwalitatieve variabele
B. discrete kwantitatieve variabele
C. continue kwantitatieve variabele

e Hoelang zit je al op school?

A. kwalitatieve variabele
B. discrete kwantitatieve variabele
C. continue kwantitatieve variabele

f Hoelang duurt het nog tot het eindexamen?

A. kwalitatieve variabele
B. discrete kwantitatieve variabele
C. continue kwantitatieve variabele

g In hoeveel vakken doe je eindexamen?

A. kwalitatieve variabele
B. discrete kwantitatieve variabele
C. continue kwantitatieve variabele

Opgave 5

Je doet een onderzoek onder jongeren naar hun mening over smartphones.

Welke van de genoemde onderzoeksmiddelen zijn het meest geschikt? Licht je antwoord toe.

A. een telefonische enquête
B. een vragenlijst in een meidenblad
C. een vragenlijst via sociale media
D. een vragenlijst op straat vlak bij een winkelcentrum

Opgave 6

In de Nationale Wetenschapsquiz kwam de vraag voor: “Hoeveel schoolgaande kinderen zijn er gemiddeld per gezin?” Je neemt een grote steekproef onder schoolkinderen en vraagt hun hoeveel schoolgaande broertjes en zusjes zij hebben. Op basis daarvan bepaal je het gemiddelde aantal schoolgaande kinderen per gezin.

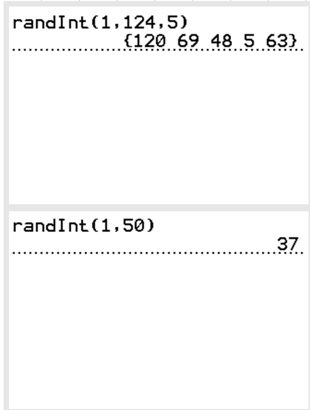
Is dit een goede aanpak? Welk antwoord is correct en waarom?

A. Ja, zo krijg je een juiste schatting.
B. Nee, zo krijg je een te lage schatting.
C. Nee, zo krijg je een te hoge schatting.

Voorbeeld 2

Om een steekproef samen te stellen uit een grote populatie, wordt vaak met toevalsgetallen gewerkt. Je ziet twee voorbeelden van het gebruik van toevalsgetallen. Bekijk het **Practicum** om na te gaan hoe je toevalsgetallen kunt oproepen met de grafische rekenmachine.

1. Bij een wielerwedstrijd moeten vijf renners naar de dopingcontrole. Ze hebben rugnummers vanaf 1 tot en met 124. Er worden vijf toevalsgetallen van 1 tot en met 124 gegenereerd.
   De renners met rugnummers die overeenkomen met de vijf toevalsgetallen, moeten naar de dopingcontrole.
2. Een op de vijftig passagiers wordt op Schiphol door de douane uitgebreid gefouilleerd en de handbagage wordt doorzocht.
   Er worden toevalsgetallen gegenereerd van 1 tot en met 50. Dit toevalsgetal is (per groep van vijftig) het nummer van de passagier die intensief wordt gecontroleerd.



Figuur 1.3

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**. Je ziet hoe je met behulp van toevalsgetallen een steekproef kunt samenstellen.

a Hoe kun je met behulp van toevalsgetallen uit de dagproductie van twaalfhonderd spaarlampen twintig testexemplaren kiezen?

b Hoe kun je met behulp van toevalsgetallen een steekproef van vijftienhonderd willekeurig gekozen Nederlanders samenstellen?

Soms wil je dat je steekproef aan bepaalde voorwaarden voldoet. Je wilt bijvoorbeeld dat bepaalde leeftijdsgroepen in de werkelijke verhouding in je steekproef voorkomen. Dat is een ‘gelaagde steekproef’.

c Stel je voor dat in een bepaalde stad met 60000 inwoners de percentages van de leeftijdsgroepen 0 — 20, 20 — 60 en 60 — ouder ook binnen de steekproef tot uiting komen.
Hoe kies je de personen uit die stad voor je steekproef?

Verwerken

Opgave 8

Stel je voor dat een onderzoeker voor een onderzoek naar de filedruk in Nederland naar waddeneiland Texel gaat en daar 's nachts het aantal auto’s op een van de wegen checkt. Hij noteert per voorbijrijdende auto het merk en de snelheid.

a Leg uit waarom dit geen aselect onderzoek is.

b Leg uit waarom dit geen representatief onderzoek is.

c Leg uit waarom de variabele *automerk* een kwalitatieve variabele is.

d Leg uit waarom de variabele *aantal auto's per uur* een discrete kwantitatieve variabele is.

e Leg uit waarom de variabele *snelheid* een continue kwantitatieve variabele is.

Opgave 9

Voor een nieuw onderzoek bedenkt men de volgende manier om een steekproef samen te stellen: een jaar lang wordt bij elk ziekenhuis iedere maandag iedereen die in het ziekenhuis aanwezig is of er arriveert, genummerd. Het maakt niet uit of iemand verplegend personeel is, of zieke of bezoeker of schoonmaker, enzovoort. Aan het einde van de dag worden bij elk ziekenhuis uit de groep toegekende nummers vijftien personen met behulp van toevalsgetallen gekozen om mee te doen aan het onderzoek. Stel dat bij een ziekenhuis op zo'n maandag 1250 nummers zijn uitgedeeld, startend met nummer 1. Genereer met de grafische rekenmachine een groep van vijftien nummers die die maandag worden geselecteerd voor het onderzoek.

Opgave 10

In een straat staan precies honderd woningen. Het zijn twintig blokken van vijf woningen. Aan iedere kant van de weg staan tien blokken. Je hebt een even kant met de huisnummers 2 tot en met 100, met een tuin op het zuiden. Je hebt een oneven kant met de huisnummers 1 tot en met 99, met een tuin op het noorden.

a Een energiebedrijf wil het gasverbruik in deze straat onderzoeken. Het bedrijf neemt een steekproef van tien huizen: de huisnummers 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 en 91. Is deze steekproef aselect getrokken?

b Het gemiddelde gasverbruik dat de onderzoeker bij de tien huizen vindt, blijkt veel hoger te zijn dan dat het gemiddelde in de straat in werkelijkheid blijkt te zijn. Hoe kan dat?

c Bedenk een manier om aselect tien huizen uit de straat voor het onderzoek te selecteren, zodat het gemiddelde gasverbruik van de tien huizen representatief is voor de hele straat.

Opgave 11

> ‘Belgen praten beduidend langzamer dan Nederlanders. In de Randstad haalt men 5,42 lettergrepen per seconde, in Oost Vlaanderen slechts 4,43. Sommige mensen gingen het meteen controleren. De spreeksnelheid van 21 miljoen Nederlandssprekenden werd bepaald door maar liefst 160 leraren en leraressen een stukje te laten opzeggen. Er waren acht groepen, dus twintig sprekers per groep. Ook werd nog gerapporteerd over het verschil tussen jong en oud, man en vrouw.’
> *bron: tijdschrift Onze Taal, 2004, Hans van Maanen*

a Wat vind je van deze opzet?

b Wat vind je van de steekproef?

c Wat vind je van de conclusie dat Belgen beduidend langzamer praten dan Nederlanders?

d De journalist rangschikt dit onderzoek in de top 10 van wetenschappelijke blunders van 2004. Waarom denk je?

Opgave 12

In de jaren 1982-1988 werd onder 22000 mannelijke Amerikaanse artsen onderzoek gedaan naar de invloed van aspirine op hart- en vaatziekten op de gemiddelde Amerikaanse man. De helft gebruikte om de dag 300 milligram aspirine, wat ongeveer gelijk staat aan een 'gewoon' aspirientje. De andere helft slikte een placebo ('fopmiddel'). Van de aspirineslikkers kregen 104 personen een hartinfarct, van de placeboslikkers waren dat er 189. De conclusie van het onderzoek was dat het risico op een hartinfarct met ongeveer 45% wordt verlaagd door het slikken van aspirine. Dat dit grote verschil aan toeval was te wijten, vond men uitgesloten vanwege het grote aantal mensen dat aan de studie meewerkte.

a Waarom is hier geen sprake van een representatieve steekproef? Hoe had deze steekproef moeten worden samengesteld?

b Waarom werd er van placebo's gebruikgemaakt?

c Hoeveel procent van de 11000 aspirineslikkers heeft baat gehad bij het slikken van aspirine?

d Volgens de tekst wordt de kans op een hartinfarct met 45% verlaagd. Klopt dat?

Opgave 13

Veel onderzoek gebeurt door mensen een vragenlijst te laten beantwoorden. Het opstellen van de juiste vragen is erg belangrijk. Op slechte vragen krijg je slechte antwoorden. Stel je bent nieuwsgierig wat de leerlingen uit je klas bij het ontbijt eten.

a Je bedenkt als vraag: 'Wat vind je lekkerder op de boterham, hagelslag of kaas?' Leg uit waarom deze vraag hier niet goed is.

b Je bedenkt ook de vraag: 'Wat is gezonder: een witte boterham of een bruine boterham?' Leg uit waarom ook deze vraag hier niet goed is.

c Je zou ook aan elke leerling kunnen vragen: 'Schrijf op wat je vanmorgen hebt gegeten als ontbijt.' Wat is een nadeel van deze vraag?

d Je zou kunnen vragen: 'Geef met een kruisje aan wat je vanmorgen als ontbijt hebt gehad. Kies uit bruin brood, yoghurt met muesli en/of fruit.'

Wat is er mis met deze vraag?

e Welke vraag zou jij stellen waarop je een zinvol antwoord krijgt? Probeer uit of het een handige en goede vraag is.

Toepassen

Opgave 14: De Nationale Doorsnee

De 'Nationale Doorsnee' was in 2000 een landelijk statistiekproject voor leerlingen uit leerjaar 1 en 2. Centrale vraag was: "Wie is de gemiddelde leerling van Nederland?" Het ging bij dit project om negen kenmerken:

- lichaamslengte
- ontbijtgewoonte

- tijdsbesteding sport
- tijdsbesteding tv
- tijdsbesteding computer
- leukste vak op school
- zakgeld per week
- bijverdienste per week
- favoriete popster of popgroep

a Naar welk soort variabele verwijst elk van deze kenmerken? Kwalificeer met kwalitatief, kwantitatief, discreet of continu.

b Bedenk bij elk kenmerk een goede vraag die aansluit bij de door jou genoemde soort variabele.

c Welk tiende kenmerk en welke tiende vraag zou je kunnen toevoegen om de gemiddelde leerling van Nederland nog verder te typeren?

Opgave 15: Het gebruik van de fiets

Maak een opzet voor een onderzoek onder een deel van de ouders en leerlingen van de school naar hun gebruik van de fiets; neem je onderzoeksplannen onder de loep en verbeter deze.

a Ontwerp minimaal twee concrete onderzoeksvragen: wat wil je precies weten over het fietsgebruik van de leerlingen en hun ouders? Anders gezegd: welke vragen wil je beantwoord zien nadat je dit onderzoek hebt uitgevoerd?

b Ontwerp een lijst met vragen, zodanig dat je met de antwoorden erop je eigen onderzoeksvragen kunt beantwoorden.

c Stel een lijst met variabelen samen waarin je de antwoorden op je vragenlijst gaat vastleggen en geef bij elke variabele aan of het om een kwalitatieve, discreet kwantitatieve of continu kwantitatieve variabele gaat.

d Ontwerp een aselecte en representatieve steekproef van leerlingen en ouders op jouw school.

e Ontwerp de manier waarop je de steekproefpersonen de vragen gaat stellen zodanig dat je de meeste kans hebt op zo veel mogelijk serieuze antwoorden.

Testen

Opgave 16

In 2006 hield het mannenblad ‘Men’s Health’ een wereldwijd seksonderzoek. Ruim 40000 mannen (lezers) van het blad vulden de vragenlijst in. In Nederland waren er ongeveer 1500 mannen die reageerden. De kop boven veel artikelen was: ‘Nederlandse man vrijt langdurig.’

a Wat vind je van de opzet van het onderzoek? Gebruik in ieder geval de woorden aselect, representatief en steekproefomvang.

b Wat vind je van de kop boven de artikelen?

c Wat is het lastige van vragen bij seksonderzoeken en de conclusies die je eruit kunt trekken?

Opgave 17

In deze afbeelding kun je voor ieder genoemd muziekgenre het aantal muziekfestivals dat in Nederland in 2013 plaatsvond, aflezen.

a Van welk type variabele worden hier gegevens afgebeeld: van een discrete kwantitatieve variabele of van een kwalitatieve variabele?

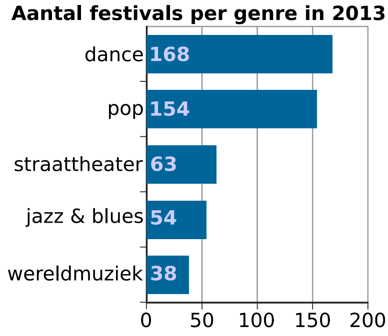
Deze gegevens zijn verzameld vanwege een statistisch onderzoek.

b Bedenk een mogelijk onderzoek waarbij deze gegevens als onderdeel van een aselecte, representatieve steekproef worden gebruikt. Omschrijf duidelijk de onderzoeksvraag, de populatie en de steekproef.

c Bedenk een mogelijk onderzoek waarbij dit de gegevens van de gehele populatie zijn. Omschrijf duidelijk de onderzoeksvraag en de populatie.

Stel dat deze gegevens gebruikt worden voor het beantwoorden van de onderzoeksvraag ‘Welk genre muziekfestival kwam het meest voor in Nederland in 2013?’.

d Is dit dan een vorm van beschrijvende of verklarende statistiek? Verklaar je antwoord.



Figuur 1.4

Opgave 18

De mentor van een bovenbouwgroep wil aselect een leerling kiezen als assistent bij de uitleg. In de groep zitten 32 leerlingen.

a Bedenk een manier om dit met een getalsimulatie op de grafische rekenmachine of in (een digitaal programma zoals) Excel uit te voeren.

b Bedenk een manier om dit met een (getal-)simulatie zonder rekenmachine of digitaal hulpmiddel uit te voeren.

c Bedenk een manier om zonder simulatie, hopelijk aselect, een leerling uit deze groep te kiezen.

Practicum

Met de volgende practica kun je leren hoe je **toevalsgetallen** met de grafische rekenmachine genereert.

- **Simulaties en de TI84**
- **Simulaties en de TInspire**
- **Simulaties en de Casio fx-CG50**
- **Simulaties en de HPprime**
- **Simulaties en de NumWorks**

Met Excel (een spreadsheetprogramma, een rekenblad) werken is bij statistiek eigenlijk onontbeerlijk. Je kunt er grote hoeveelheden gegevens in kwijt. Bekijk deze practica voor **Excel 2013/2016/2019/2021**:

- **Tafels** om de basisbeginselen van het werken met Excel te leren.
- **Diagrammen** om te leren hoe je in Excel lijn-, staaf-, cirkeldiagrammen kunt maken.

- **Data presenteren en vergelijken** om te bekijken hoe je grote databestanden kunt samenvatten en deelgroepen daarin kunt vergelijken.
- Van **Steekproeven en uitspraken**, alleen het eerste deel: “Een steekproef trekken met toevalsgetallen”.

1.2 Data ordenen

Inleiding

Een onderzoek levert veel waarnemingen (antwoorden, kenmerken of meetresultaten) op. Je zult eerst overzicht moeten krijgen over al die gegevens door ze te ordenen. Dat doe je door bijvoorbeeld ‘turven’ hoe vaak een antwoord voor komt.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de ruwe gegevens uit een onderzoek te ordenen in een overzichtelijke tabel;
- bij veel verschillende gegevens een klassenindeling te maken;
- de begrippen turftabel, frequentietabel en somfrequentietabel, klassenbreedte en klassengrens;
- het onderscheid tussen absolute frequentie en relatieve frequentie;
- het begrip proportie.

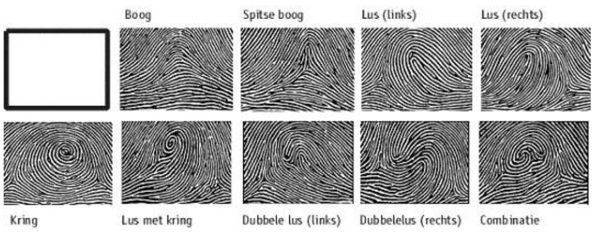
Voorkennis

- de begrippen steekproef en populatie;
- rekenen met procenten.

Verkennen

Opgave V1

Sir Francis Galton heeft rond 1890 vingerafdrukken bestudeerd. Hij ontdekte dat je bij vingerafdrukken grofweg drie patronen kunt onderscheiden: de boog, de kring en de lus. Voor sommige patronen moeten ook nog de lijnen tussen de kern en delta geteld worden. De kern is het middelpunt van een patroon, de delta is een driehoekje dat zich meestal naast de kern bevindt. Hierdoor is ieder mens te identificeren op grond van de vingerafdruk.



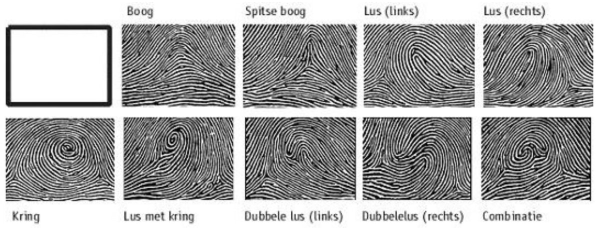
Figuur 2.2

Hoe zou je gegevens over vingerafdrukken van bijvoorbeeld alle leerlingen kunnen verzamelen, ordenen en snel kunnen terugvinden in een bestand?

Uitleg

Een statistisch onderzoek levert bijvoorbeeld antwoorden, waarnemingen, kenmerken of meetresultaten. Je moet eerst overzicht krijgen over al die gegevens met sorteren en samenvatten. Dat is beschrijvende statistiek.

Sir Francis Galton heeft rond 1890 vingerafdrukken bestudeerd. Hij ontdekte dat je bij vingerafdrukken grofweg drie patronen kunt onderscheiden: de boog, de kring en de lus.
Deze indeling is vrij globaal. Voor sommige patronen moeten ook nog het aantal lijnen tussen de kern en delta geteld worden. Hierdoor is ieder mens te identificeren op grond van de vingerafdruk.



Figuur 2.3

Je ziet hoe door ‘turven’ een frequentietabel van kenmerk ‘patroon van linker duimafdruk’ ontstaat voor een groep van 25 personen. Er is gebruikgemaakt van de verdeling in drie hoofdcategorieën van vingerafdrukken. De relatieve frequentie, ook wel ‘proportie’ genoemd, ontstaat door de absolute frequentie te delen door het totaal aantal waarnemingen.

linker duimafdruk	aantal	abs.freq.	rel.freq.	percentage
lus	||||| |||	8	$\frac{8}{25} = 0{,}32$	32%
boog	||||| |||||		11	$\frac{11}{25} = 0{,}44$	44%
kring	|||||		6	$\frac{6}{25} = 0{,}24$	24%

Tabel 2.1

Bij een tabel met (relatieve) frequenties kun je een tabel met (relatieve) somfrequenties maken door bij elke frequentie de voorafgaande frequenties op te tellen. Somfrequenties noem je cumulatieve frequenties (cumuleren betekent opstapelen).

Bij continue variabelen moet je gebruikmaken van een klassenindeling. Zorg dat je ongeveer tien klassen krijgt om mee te werken.

Stel bijvoorbeeld dat je de lengtes van een groep meisjes onderzoekt. Is het kleinste meisje $1{,}51$ m en het langste $1{,}98$ m, dan kun je klassen maken met een klassenbreedte van 5 cm. De klassen sluiten altijd op elkaar aan. De eerste klasse is $1{,}50- < 1{,}55$. De tweede klasse is $1{,}55- < 1{,}60$, enzovoort.

De notatie $- <$ betekent ‘vanaf ... tot ...’. De waarden $1{,}50$ en $1{,}55$ van de eerste klasse worden de klassengrenzen genoemd. Een meisje dat afgerond $1{,}55$ m lang is, zit in de tweede klasse, want die klasse begint bij $1{,}55$.

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg**. Bij het onderzoek welk soort vingerafdrukken er in een groep van 25 personen voorkomen, is alleen onderscheid gemaakt tussen lus, boog en kring, zoals je in de tabel kunt zien.

a Welke proportie hoort er bij de lus?

b Welk voordeel hebben relatieve frequenties boven absolute frequenties?

c Houd zelf zo'n vingerafdrukkenonderzoekje in je klas en maak er een tabel van zoals die in de uitleg.

Opgave 2

Bekijk de tabel met de lengtes van twintig meisjes.

a Maak een frequentietabel met een klassenindeling. Je eerste klasse is $150- < 155$.

b Reken in de frequentietabel alle absolute frequenties om naar relatieve frequenties. Maak ook een kolom in de tabel met de cumulatieve frequenties.

c Welke vragen kun je bijvoorbeeld beantwoorden met de cumulatieve frequenties?

d Als je zo'n relatieve en cumulatieve frequentietabel voor de lengtes van alle leerlingen in je klas wilt maken, welke klassengrenzen kies je dan?

1,63	1,72	1,86	1,66
1,73	1,92	1,66	1,74
1,95	1,68	1,76	1,53
1,70	1,78	1,55	1,71
1,80	1,81	1,72	1,83

Tabel 2.2

Opgave 3

Bekijk de klassenindeling met daarin de lengtes van twintig meisjes.

a Wat valt je op aan de klassenindeling?

b Welke eerste indruk wekt deze klassenindeling?

c Leg uit waarom dergelijke klassenindelingen niet goed bruikbaar zijn.

$1{,}50- < 1{,}70$	6	0,3	30%
$1{,}70- < 1{,}75$	6	0,3	30%
$1{,}75- < 1{,}85$	6	0,4	30%
$1{,}90- < 1{,}95$	1	0,05	5%
$1{,}95- < 2{,}00$	1	0,05	5%
Totaal	20	1	100%

Tabel 2.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij statistisch onderzoek worden antwoorden op onderzoeksvragen of resultaten van metingen **waarnemingen** genoemd. Waarnemingen moeten ingedeeld, geteld en/of gesorteerd worden.

Waarnemingen worden ingedeeld in **klassen** (groepen) als de variabele continu is en/of als er veel waarnemingen zijn.

Klassen van kwantitatieve variabelen kun je op twee manieren noteren:

- continue variabele: vanaf ... tot ... wordt genoteerd als $1{,}50- < 1{,}60$
- discrete variabele: vanaf ... tot en met ... wordt genoteerd als $10 - 14$

De eerste notatie spreek je uit als '... tot kleiner dan ...'.

De tweede notatie betekent bij een discrete variabele dat $10,11,12,13$ en 14 in deze klasse vallen.

Let op! Voor leeftijden (alleen hele getallen) is dit lastiger, want $10-14$ betekent dan $10-<15$.

De **klassengrenzen** zijn de minimale en maximale waarneming die in de klasse horen. Het verschil tussen twee opvolgende klassengrenzen is de **klassenbreedte**.

Tip 1. Neem voor het aantal klassen minimaal vijf en maximaal twintig. Maak het aantal (ongeveer) gelijk aan de wortel uit het aantal waarnemingsgetallen.

Tip 2. Een handige klassenbreedte kun je als volgt berekenen:

- Neem het verschil tussen de grootste en de kleinste waarneming en deel dat door het gewenste aantal klassen.
- Neem een handige breedte die daar in de buurt ligt.

De **(absolute) frequentie** is het aantal keren dat een waarneming voorkomt.

De **relatieve frequentie** of **proportie** is de frequentie van een waarneming gedeeld door het totale aantal waarnemingen.

Turven is een handmatige manier om waarnemingen te tellen. Steeds meer worden waarnemingen met computers verzameld en verwerkt. In het **Practicum: Statistiek** zie je hoe dit met Excel gaat.

Een **frequentieverdeling** is een overzicht van het aantal keren dat alle waarnemingen (in klassen) voorkomen.

Een **cumulatieve (som)frequentieverdeling** wordt gemaakt door bij elke frequentie de voorafgaande frequenties op te tellen. Hiermee kan makkelijk worden bepaald wat bijvoorbeeld de frequentie van alle waarden kleiner dan een bepaalde waarneming is. (Cumuleren betekent opstapelen.)

Voorbeeld 1

Bekijk de tabel met schoenmaten van 75 mensen op zaterdag 14 juli 2015 in een schoenenwinkel.

Maak een complete frequentieverdeling met daarin de absolute frequenties, relatieve frequenties, cumulatieve frequenties en cumulatieve relatieve frequenties.

Schoenmaten op zaterdag 14 juli 2007 in H bij schoenenzaak v.O.

schoenmaat	aantal
36	III
37	IIIII
38	IIIII IIII
39	IIIII IIIII IIIII III
40	IIIII IIIII II
41	IIIII III
42	IIIII IIIII
43	IIII
44	I

Figuur 2.4

Antwoord

Werk je het met hand uit, dan tel je eerst het aantal turven in de tabel. Dit noteer je bij de absolute frequentie. Deel de absolute frequentie door het totaal aantal en vermenigvuldig met 100 om de relatieve frequentie in % te krijgen. Zo hoort bij schoenmaat 36 een relatieve frequente van $\frac{3}{75} \cdot 100 = 4\%$. Voor de cumulatieve frequentie tel je telkens de voorgaande frequentie erbij op. Bij schoenmaat 37 hoort de cumulatieve frequentie $3+5=8$ en bij schoenmaat 38 hoort een cumulatieve frequentie van $8+14=22$.

Doe dit ook bij de relatieve frequentie (in %) om de relatieve cumulatieve frequentie te krijgen.

Schoenmaten op zaterdag 14 juli 2007 in H bij schoenenzaak v.O.					
schoenmaat	aantal	abs. freq	rel. freq (%)	cum. freq	rel. cum. freq
36	III	3	4,0	3	4,0
37	IIIII	5	6,7	8	10,7
38	IIIII IIII	14	18,7	22	29,3
39	IIIII IIIII IIIII III	18	24,0	40	53,3
40	IIIII IIIII II	12	16,0	52	69,3
41	IIIII III	8	10,7	60	80,0
42	IIIII IIIII	10	13,3	70	93,3
43	IIII	4	5,3	74	98,7
44	I	1	1,3	75	100,0
		75	100,0		

Figuur 2.5

Opgave 4

Bekijk de frequentietabel uit **Voorbeeld 1**. Werk met de gegevens in deze tabel of met het bestand **Schoenmaten - uitwerking**.

a Als je bij de absolute frequenties één waarneming 36 toevoegt, hoeveel getallen veranderen er dan in de absolute frequentiekolom? Gebruik de tabel uit het voorbeeld.

b Hoeveel getallen veranderen met de toevoeging in de somfrequentiekolom?

c Hoeveel getallen veranderen in de relatieve somfrequentiekolom?

Opgave 5

Bekijk nog eens de complete frequentietabel uit **Voorbeeld 1**. Werk met de gegevens in deze tabel of op je pc met het bestand **Schoenmaten - uitwerking**.

a Als je bij de absolute frequenties een waarneming van 44 weghaalt, hoeveel getallen veranderen er dan in de absolute frequentiekolom?

b Hoeveel getallen veranderen met de weglating in de somfrequentiekolom?

c Hoeveel getallen veranderen in de relatieve somfrequentietabel?

Voorbeeld 2

Bekijk de tabel met de lengtes in centimeters van negentig meisjes.

175	168	177	167	176	172	166	160	166
173	172	170	186	168	165	159	164	183
155	179	184	155	188	163	156	172	163
161	162	174	159	162	169	171	179	170
170	165	157	168	167	166	172	174	158
183	173	168	150	182	154	160	159	168
189	153	162	166	157	179	164	169	175
165	193	154	180	171	168	180	181	173
171	176	165	176	172	169	161	167	165
159	169	176	185	176	164	169	166	165

Tabel 2.4

Maak een klassenindeling met een klassenbreedte van 5 cm en als ondergrens 1,50 m. Bereken ook de relatieve frequenties.

Antwoord

Maak de klassenindeling en turf de aantallen; maak een (absolute) frequentietabel. Excel kan automatisch turven in series getallen. In het **Practicum: Statistiek** kun je zien hoe dat in zijn werk gaat. Let erop dat de eerste klasse $150- < 155$ is, de tweede klasse $155- < 160$, enzovoort.

klasse	*frequentie*	*relatieve frequentie*
$150- < 155$	4	4,4
$155- < 160$	10	11,1
$160- < 165$	12	13,3
$165- < 170$	25	27,8
$170- < 175$	16	17,8
$175- < 180$	11	12,2
$180- < 185$	7	7,8
$185- < 190$	4	4,4
$190- < 195$	1	1,1

Tabel 2.5

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

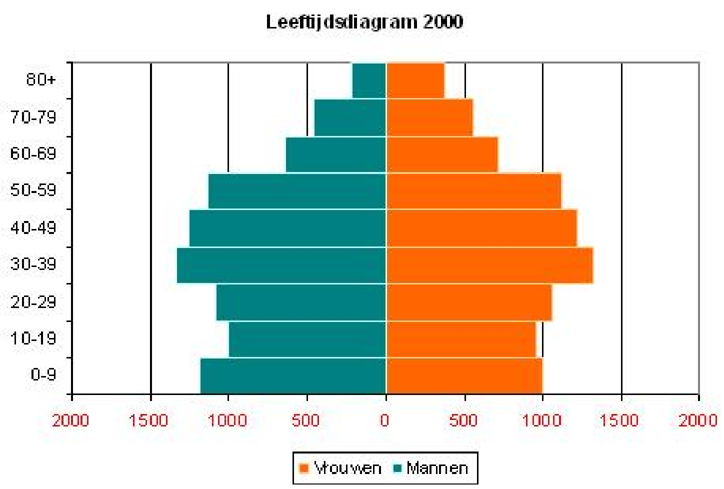
a Verander de klassenbreedte van 5 in 8. Wat is nu de hoogste frequentie?

b Verander de klassenbreedte van 5 in 2. Wat is nu de hoogste frequentie?

c Probeer nog een aantal klassenbreedten. Welke klassenbreedte vind je het meest geschikt?

Voorbeeld 3

In het leeftijdsdiagram van de Nederlandse bevolking in 2000 zie je hoe de klassenindeling $0-9$, $10-19$, $20-29$, enzovoort wordt gebruikt. De aantallen Nederlanders zijn duizendtallen. Bijvoorbeeld de klasse $10-19$ bevat de Nederlandse mannen of vrouwen die een leeftijd hebben vanaf 10 tot 20 jaar.



Figuur 2.6

Kun je met de gegevens in dit diagram een nieuw leeftijdsdiagram maken met klassen van $0-14$, $15-29$, $30-44$, enzovoort? En met klassen van $0-19$, $20-39$, enzovoort? Licht je antwoord toe.

Antwoord

Omdat in de klasse $0-14$ de klasse $0-9$ geheel en de klasse $10-19$ voor een deel is opgenomen, kun je uit dit diagram niet opmaken hoeveel mensen in de klasse $0-14$ moeten komen. Je kent de onderverdeling van de klassen namelijk niet. Je weet alleen het totale aantal in de gegeven klassen.
Voor de klassen $0-19$, $20-39$, is dat anders, omdat je nu het aantal mensen uit twee gegeven klassen bij elkaar op kunt tellen. Met de klassenindeling $0-19$, $20-39$ ... $60-79$ zou je dus wel een nieuw diagram kunnen tekenen.

Opgave 7

Je ziet in **Voorbeeld 3** een leeftijdsdiagram van de Nederlandse bevolking in 2000.

a Welke klassengrenzen heeft de klasse $0-9$?

b Als je het aantal klassen van 9 in 3 verandert, wat is dan de hoogste frequentie?

c Waarom is het verhogen van het aantal klassen nu niet mogelijk zonder extra informatie?

Opgave 8

Welke van de volgende beweringen zijn juist? Licht je antwoord toe.

A. In een relatieve frequentietabel of relatieve somfrequentietabel staan altijd percentages.
B. De totale relatieve somfrequentie is in theorie altijd 100%.
C. De totale relatieve somfrequentie is in de praktijk altijd 100%.
D. De relatieve frequentie is overal 100%.
E. Als er waarnemingen in de laatste klasse vallen, zijn de relatieve somfrequenties lager dan 100%, behalve bij de laatste klasse.

Verwerken

Opgave 9

Bekijk de frequentieverdeling van de weeklonen van 65 werknemers van een bedrijf.

loon (in €)	aantal
500 -< 600	8
600 -< 700	10
700 -< 800	16
800 -< 900	14
900 -< 1000	10
1000 -< 1100	5
1100 - < 1200	2
totaal	65

Figuur 2.7

a Geef de ondergrens van de zesde klasse.

b Geef de bovengrens van de vierde klasse.

c Geef het klassenmidden van de derde klasse.

d Welke ondergrens en welke bovengrens heeft de vijfde klasse?

e Welke klassenbreedte is hier gebruikt?

f Is hier sprake van relatieve of van absolute frequenties?

Opgave 10

Voor een toets kun je maximaal 100 punten scoren. Je ziet hoe een groep van veertig personen de toets heeft gemaakt:

59 – 57 – 53 – 60 – 63 – 58 – 77 – 33 – 50 – 59
58 – 75 – 62 – 54 – 53 – 78 – 59 – 68 – 65 – 62
57 – 60 – 80 – 47 – 90 – 30 – 60 – 35 – 57 – 87
63 – 65 – 63 – 58 – 65 – 70 – 73 – 58 – 63 – 55

a Deel deze scores in klassen in. Neem als laagste klasse $25- < 35$. Maak een frequentietabel.

b Maak bij deze tabel een kolom van relatieve frequenties.

Opgave 11

Genereer in Excel of met de grafische rekenmachine honderd toevalsgetallen van 1 tot en met 20.

a Maak een turftabel.

b Maak een frequentietabel.

c Maak een tabel met relatieve frequenties en somfrequenties.

d Welke relatieve frequenties verwacht je bij de twintig getallen als je 10^6 toevalsgetallen van 1 tot en met 20 zou genereren?

Opgave 12

Bekijk de klassenindeling met de lengtes van zestig jongens.

lengte (cm)	*abs. freq.*	*rel. freq.*	*cum. rel. freq.* (%)
$150- < 165$	15	0,25	25
$165- < 175$	15	0,25	50
$175- < 180$	15	0,25	75
$180- < 185$	5	0,083	83,3
$185- < 190$	5	0,083	91,7
$190- < 195$	5	0,083	100
totaal	60	1	100

Tabel 2.6

a Waarom voldoet deze klassenindeling niet aan de regels?

b Wat valt je op aan deze klassenindeling?

c Leg uit waarom dergelijke klassenindelingen niet goed bruikbaar zijn.

d Maak met de gegevens uit de tabel een geschikte klassenindeling. Bepaal nu de frequentie, de relatieve frequentie en de cumulatieve relatieve frequentie.

e Klopt je antwoord op b nog steeds? Zo niet, wat geeft de tabel nu voor indruk?

Opgave 13

Bekijk de frequentietabellen met weeklonen van twee bedrijven. Alle werknemers zijn opgenomen in de tabellen.

weekloon (euro)	*aantal werknemers*
500– < 600	8
600– < 700	10
700– < 800	16
800– < 900	14
900– < 1000	10
1000– < 1100	5
1100– < 1200	2
totaal	65

Bedrijf 1

weekloon (euro)	*aantal werknemers*
400– < 450	2
450– < 500	3
500– < 550	4
550– < 600	8
600– < 650	3
650– < 700	2
700– < 750	2
750– < 800	1
totaal	25

Bedrijf 2

Tabel 2.7

a Noem twee redenen waarom je de weeklonen van deze twee bedrijven niet zinvol met elkaar kunt vergelijken als je alleen naar deze frequentietabellen kijkt.

b Maak frequentietabellen waarmee je de weeklonen van deze twee bedrijven wel goed kunt vergelijken.

c Een van de onderzoeksvragen is: ‘In welk bedrijf zijn er relatief meer mensen die minder dan € 600,00 per week verdienen?’

Uit welk soort frequentietabel zou je dit direct kunnen aflezen? Geef een antwoord op deze onderzoeksvraag.

d Het is niet mogelijk om de percentages werknemers die minder dan € 650,00 per week verdienen met elkaar te vergelijken. Leg uit waarom dat niet kan en bedenk een manier om daar wel een schatting van te kunnen maken.

Toepassen

Opgave 14: Het CBS

Het **Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS)** houdt veel geordende statistieken bij die van belang zijn voor Nederland en de Nederlandse overheid.

Het CBS doet regelmatig onderzoek naar de opbouw van de Nederlandse bevolking met betrekking tot geslacht, leeftijd, burgerlijke staat, e.d. Je ziet hier een dataset vanuit Statline, gemaakt in januari 2020. De variabele ‘Groene druk’ stelt de verhouding voor tussen het aantal 0 tot 20 jarigen en het aantal 20 tot 65 jarigen. De variabele ‘Grijze druk’ stelt de verhouding voor tussen het aantal 65-plussers en het aantal 20 tot 65 jarigen.

Figuur 2.8

Onderwerp		Perioden 1900	1950	2000	2010	2017
Bevolking op 1 januari						
Naar geslacht						
Mannen en vrouwen	x 1 000	5 104	10 027	15 864	16 575	17 082
Mannen	x 1 000	2 521	4 998	7 846	8 203	8 475
Vrouwen	x 1 000	2 583	5 029	8 018	8 372	8 606
Naar leeftijd						
Totaal bevolking	x 1 000	5 104	10 027	15 864	16 575	17 082
0 tot 20 jaar	x 1 000	2 264	3 742	3 873	3 928	3 817
20 tot 45 jaar	x 1 000	1 732	3 597	5 976	5 490	5 281
45 tot 65 jaar	x 1 000	802	1 916	3 863	4 619	4 824
65 tot 80 jaar	x 1 000	272	671	1 652	1 890	2 395
80 jaar of ouder	x 1 000	35	100	500	648	764
Demografische druk						
Groene druk	%	89,3	67,9	39,4	38,9	37,8
Grijze druk	%	12,1	14,0	21,9	25,1	31,3

Figuur 2.9

a Welke rijen van deze tabel bevatten echte data en welke rijen worden daaruit afgeleid?

b Over welke soorten variabelen gaan deze tabellen? Waarom kiest het CBS daar voor?

c Waarom is het CBS geïnteresseerd in de variabele ‘Grijze druk’?

d Bereken zelf de waarden van de ‘Grijze druk’ en leg uit wat het oplopen van dat getal voor de overheid betekent.

e Welke betekenis heeft de ‘Groene druk’?

f Hoe kun je zien dat in NL de proportie mannen kleiner is dan de proportie vrouwen?
Hoeveel bedraagt de proportie mannen in 2017?

Testen

Opgave 15

Voor een biologiepracticum moet het aantal slakken op een stuk grond worden geteld. Het stuk grond wordt in stukken van 1 m^2 verdeeld. Iedere leerling telt het aantal slakken op vier van die stukken. Je ziet de resultaten.

aantal slakken per m^2	2	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	16	14	7	4	2	3	1	1

Tabel 2.8

a Om welke populatie gaat het hier? Om welke variabele? En om welke soort variabele?

b Hoeveel m^2 is de oppervlakte van het stuk grond?

c Hoeveel leerlingen hebben er geteld?

d Hoeveel slakken zijn er totaal geteld?

e Hoe groot is de proportie m^2 met 7 slakken op het stuk grond?

f Hoeveel slakken zijn er gemiddeld per m^2 gevonden?

Opgave 16

Leerlingen in een brugklas hebben hun schoenmaat gegeven.
40 – 42 – 37 – 38 – 40
35 – 41 – 36 – 38 – 37
38 – 40 – 40 – 40 – 39
40 – 39 – 38 – 41 – 40
41 – 39 – 39 – 39 – 34
41 – 37 – 38 – 45 – 42

a Maak een frequentietabel en een tabel met relatieve frequenties.

b Maak ook een cumulatieve relatieve frequentietabel van de schoenmaten.

c Hoeveel procent van de leerlingen in deze klas heeft een schoenmaat boven de 40?

d Maak een frequentietabel met relatieve frequenties en cumulatieve relatieve frequenties waarin de schoenmaten zijn opgedeeld in klassen van vier schoenmaten breed.

e Maak op basis van deze nieuwe frequentietabel een schatting van het percentage leerlingen in deze klas met een schoenmaat boven de 40. Waarom is dat alleen een schatting?

Practicum

Met **Excel** (een spreadsheetprogramma, een rekenblad) werken is bij statistiek eigenlijk onontbeerlijk. Je kunt er grote hoeveelheden gegevens in kwijt. Bekijk deze practica voor **Excel**:

- **Tafels** om de basisbeginselen van het werken met Excel te leren.
- **Diagrammen** om te leren hoe je in Excel lijn-, staaf-, cirkeldiagrammen kunt maken.
- **Data presenteren en (deel)groepen vergelijken** om te bekijken hoe je grote databestanden kunt samenvatten en deelgroepen daarin kunt vergelijken.
- Van **Steekproeven en uitspraken**, alleen het eerste deel: ‘Steekproeven trekken met toevalsgetallen’.

1.3 Diagrammen

Inleiding

Nadat de gegevens geordend zijn in een tabel, kun je deze ook grafisch verwerken. Een figuur is vaak gemakkelijker te lezen en is toegankelijker voor de lezer. Maar welk type diagram kun je nu het beste gebruiken? Het begrip **diagram** is een zeer algemeen begrip; er is dus heel veel keuze.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- verschillende soorten diagrammen te tekenen en af te lezen: staafdiagram, histogram, cirkeldiagram, steelbladdiagram, lijndiagram, frequentiepolygoon, cumulatief frequentiepolygoon, Lorenzcurve;
- een keuze te maken uit de genoemde diagrammen om je onderzoeksgegevens te verwerken.

Voorkennis

- statistische begrippen, zoals steekproef, absolute, relatieve en somfrequentie en proportie;
- gegevens in een frequentietabel (zowel met absolute als met relatieve frequenties) verwerken.

Verkennen

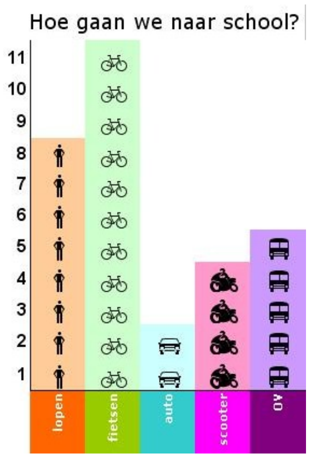
Opgave V1

Zoek op internet vier verschillende afbeeldingen van diagrammen. Bijvoorbeeld met de zoekwoorden diagram, graph en chart (voor Engelstalige sites). Geef bij elk diagram aan welk verhaal het vertelt. Die informatie vind je mogelijk in de kop van het artikel.

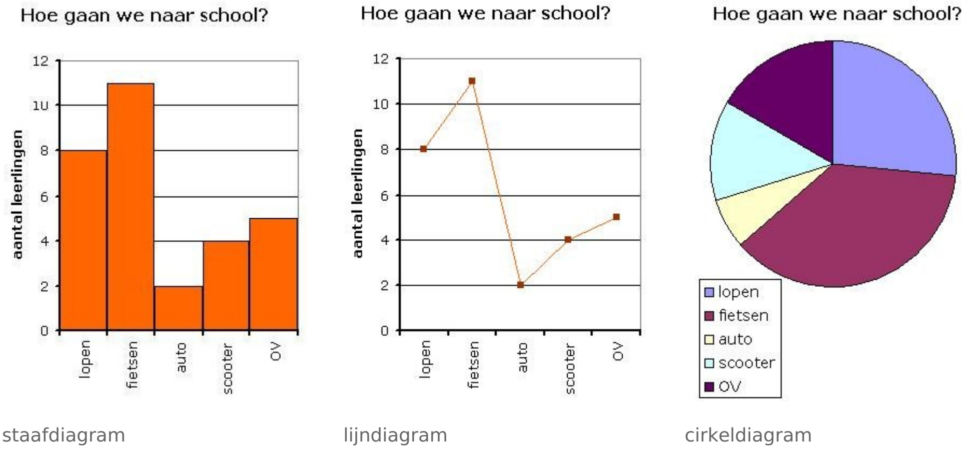
Uitleg

Een diagram is een grafische voorstelling van de (relatieve) frequenties van een statistische variabele.

Dit beelddiagram laat de frequenties van de kwalitatieve variabele *vervoersmiddel* zien. Deze variabele zie je verder nog in de vorm van een staafdiagram, een lijndiagram en een cirkeldiagram. Bij het maken van een cirkeldiagram reken je de frequenties om naar een sectorhoek. Dat doe je door de relatieve frequentie te vermenigvuldigen met 360°.



Figuur 3.2 beelddiagram



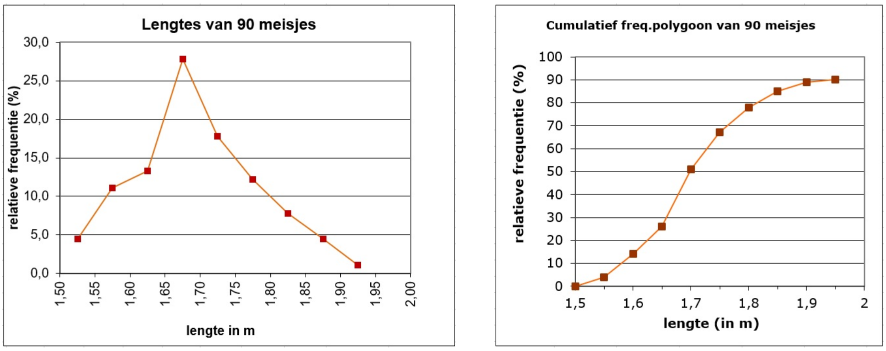
Figuur 3.3

Een histogram is een bijzonder staafdiagram. Je gebruikt het histogram alleen voor een continue kwantitatieve variabele. Bijvoorbeeld bij de lengtes van meisjes uit 4 havo. De horizontale as is dan een getallenlijn.

Een lijndiagram of frequentiepolygoon (polygoon = veelhoekig) ontstaat door in een histogram de middens van de bovenkanten van de staven te verbinden met lijnstukken en daarna de staven te verwijderen.

Een cumulatief frequentiepolygoon ontstaat uit een histogram van somfrequenties. Daarvoor verbind je de rechterbovenkanten van de staven.

Bij een diagram van een continue variabele en bij een diagram met een klassenindeling zet je de klassengrenzen links en rechts van de punt of de staaf. Anders (dus bij een discrete variabele zonder klassenindeling) staan de waarnemingsgetallen midden onder de punten of staven.



Figuur 3.4

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de vier verschillende soorten diagrammen met de manier waarop jullie naar school gaan.

a Maak met het beelddiagram een frequentietabel.

b Maak bij de frequentietabel een kolom met relatieve frequenties.

c Maak een staafdiagram en een frequentiepolygoon met relatieve frequenties.

d Bereken de sectorhoeken van het cirkeldiagram.

e Welk voordeel hebben relatieve frequenties boven absolute frequenties?

f Doe zelf een onderzoekje naar de manier waarop je klasgenoten naar school gaan.

Opgave 2

Bekijk het frequentiepolygoon van de lengtes van negentig meisjes in de **Uitleg**.

a Welke klassenindeling is gebruikt? En welke klassenbreedte?

b Hoe kun je dit frequentiepolygoon omzetten naar een histogram?

c Hoe maak je een cumulatief frequentiepolygoon?

Je vindt de gegevens uit de tabel in het bestand **Lengtes van 90 meisjes**.

d Maak een relatief frequentiepolygoon met dezelfde klassenindeling als in de uitleg.

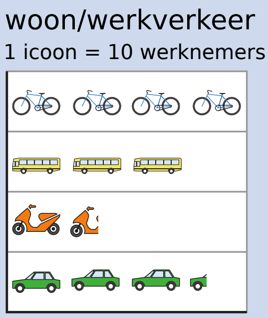
e Maak ook het cumulatief frequentiepolygoon.

Lengtes van 90 meisjes								
175	168	177	167	176	172	166	160	166
173	172	170	186	168	165	159	164	183
155	179	184	155	188	163	156	172	163
161	162	174	159	162	169	171	179	170
170	165	157	168	167	166	172	174	158
183	173	168	150	182	154	160	159	168
189	153	162	166	157	179	164	169	175
165	193	154	180	171	168	180	181	173
171	176	165	176	172	169	161	167	165
159	169	176	185	176	164	169	166	165

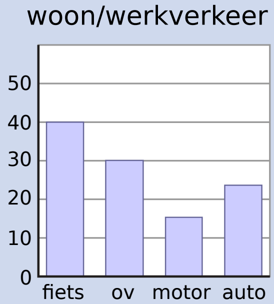
Figuur 3.5

Theorie en voorbeelden

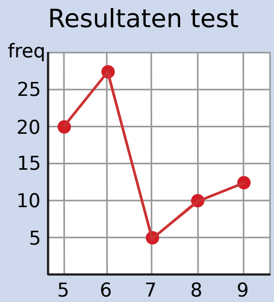
Om te onthouden



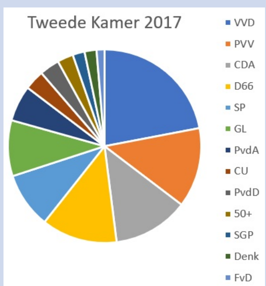
beelddiagram



staafdiagram



lijndiagram

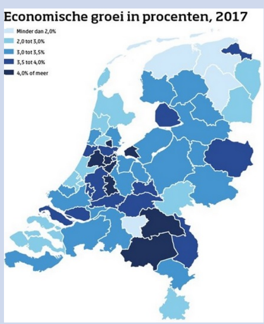


cirkeldiagram

snelheidsmeting binnen de bebouwde kom

	auto's km/h					
4	1	3	5			
5	0	3	5	6	6	9
6	1	3				
7	5					

steelbladdiagram



kaartdiagram

Figuur 3.6

Bij de analyse en presentatie van onderzoeksgegevens kun je vaak gebruikmaken van visuele weergaves. Een **diagram** is een grafische voorstelling van de (relatieve) frequenties van een statistische variabele.

Een **staafdiagram** en een **beelddiagram** geven de (relatieve) frequentie weer als staafhoogte of aantal afbeeldingen. Er is vaak ruimte tussen de staven.

Een **histogram** is een bijzonder staafdiagram. Je gebruikt het alleen voor een continue kwantitatieve variabele. De horizontale as is dan een getallenlijn. De staven staan tegen elkaar aan.

Een **lijndiagram** of **frequentiepolygoon** (polygoon = veelhoekig) ontstaat door in een histogram de middens van de bovenkanten van de staven te verbinden met lijnstukken en daarna de staven te verwijderen.

Het **steelbladdiagram** is een variant op de frequentietabel. Eigenlijk is het een frequentietabel en een histogram tegelijk, waarbij de afzonderlijke waarnemingen zichtbaar blijven.

Een **cirkeldiagram** laat relatieve frequenties zien als **sectorhoek**. De sectorhoek bereken je door de relatieve frequentie te vermenigvuldigen met $360°$.

Een **cumulatieve frequentietabel** ontstaat wanneer frequenties eerst worden opgeteld. Een **cumulatief histogram** en een **cumulatief frequentiepolygoon** ontstaan door van een cumulatieve frequentietabel een histogram en frequentiepolygoon te maken. Bij het maken van de cumulatieve frequentiepolygoon verbind je de rechterbovenkanten van de staven.

Bij een diagram van een continue variabele en bij een diagram met een klassenindeling zet je de klassengrenzen links en rechts van het punt of de staaf. Anders (dus bij een discrete variabele zonder klassenindeling) staan de waarnemingsgetallen midden onder de punten of staven.

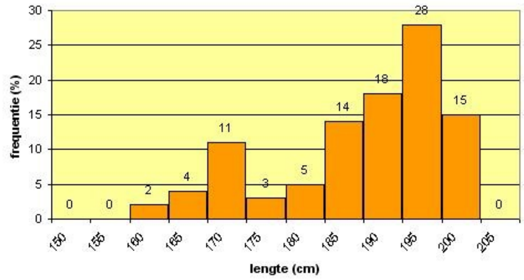
De grafische rekenmachine kent diverse statistische functies en diagrammen, maar bij grote datasets kun je beter werken met computerprogramma's zoals Excel. Zie het **Practicum**.

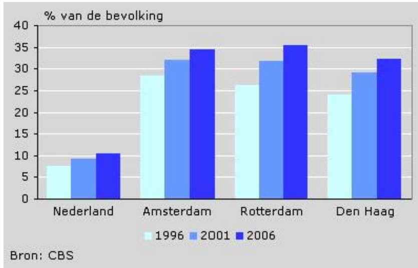
Het Engelse woord voor diagram is ‘chart’ of een ‘graph’. De bijbehorende diagrammen zijn dan bar graph, line graph en pie graph of pie chart.

Voorbeeld 1

Bekijk het diagram waarin de variabele ‘lengte van basketballers’ is weergegeven. De variabele is kwantitatief. Daarom is de variabele in beeld gebracht met een histogram, de staven zijn tegen elkaar aan getekend. De volgorde van de staven ligt vast.

Bekijk ook het diagram met percentages allochtonen per stad in een aantal jaren. Dit is een bijzonder diagram, want er zijn eigenlijk twee variabelen in verwerkt: *het jaar* (kwantitatief) en *de stad* (kwalitatief). Het diagram is dan ook een combinatie van een staafdiagram en een histogram. Je mag de staven van de jaren niet verwisselen. Je kunt de steden onderling wel verwisselen.





Figuur 3.7

Waarom mag je in het staafdiagram de staven onderling verwisselen en in het histogram niet?

Antwoord

De variabelen in het staafdiagram zijn kwalitatief. Onderling verwisselen van staven bij een kwalitatieve variabele maakt niet uit. Maar de variabele lengte (cm) in het histogram is kwantitatief en loopt op van de kleinste lengte naar de langste lengte. Omdat de variabele op de horizontale as oploopt vanaf 0, kun je de bij de lengte behorende staven niet verwisselen.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Wat is het verschil tussen een histogram en een staafdiagram?

b Welke extra afleesmogelijkheid is vaak waardevol bij histogrammen en hun bijbehorende frequentiepolygoon?

c Wat kun je uit een steelbladdiagram wel aflezen, maar uit het bijbehorende histogram niet?

Opgave 4

Dit is een deel van de dienstregeling van een busdienst. Het is een steelbladdiagram.

a Schrijf de frequentie per heel uur in een frequentietabel.

b Maak een histogram met het aantal busritten per uur.

c Welke informatie staat wel in een steelbladdiagram en niet in een histogram?

d Welke informatie staat zowel in een steelbladdiagram als in een histogram?

e Waarom maak je bij elk onderzoek niet altijd een steelbladdiagram in plaats van een histogram?

maandag t/m vrijdag					
05					
06	17	47			
07	17	32^{e}	47		
08	02^{e}	17	32^{e}	47	
09	02^{e}	17	28^{d}	47	58^{d}
10	17	28^{d}	47	58^{d}	
11	17	28^{d}	47	58^{d}	
12	17	28^{d}	47	58^{d}	
13	17	28^{d}	43	58^{be}	
14	13	28^{e}	43	58^{be}	
15	13	28^{e}	43	58^{be}	
16	13	28^{e}	43	58^{be}	
17	13	28^{e}	43	58^{e}	
18	13	50			
19	20^{ad}	50			
20	20^{ad}	50			
21	20^{ad}	50			
22	20^{ad}	50^{c}			
23	20^{ad}	50^{c}			
00	20^{e}	55^{d}			
01					

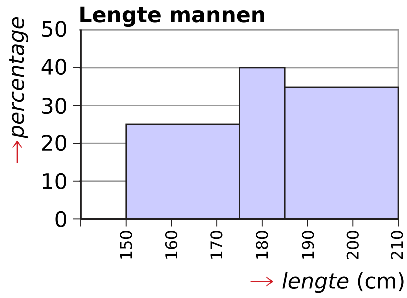
Figuur 3.8

Opgave 5

Bekijk het histogram met de lengtes van een groep mannen. De klassenindeling in dit histogram voldoet niet aan de regels.

a Elk van de drie staven kun je met verticale lijntjes verdelen in staven van 5 cm breed. Leg uit waarom het histogram dan niet meer de juiste weergave van de lengtes van deze groep mannen weergeeft.

b Maak met de gegevens die je uit het gegeven histogram hebt, een correcte versie van dit histogram.



Figuur 3.9

Voorbeeld 2

Maak een histogram en een frequentiepolygoon van de relatieve frequenties bij de variabele *levendgeborenen naar leeftijd moeder*.

levendgeboren naar leeftijd moeder	2003
klasse	frequentie
tot 15 jaar	0
15 - 19 jaar	2182
20 - 24 jaar	17383
25 - 29 jaar	49344
30 - 34 jaar	79001
35 - 39 jaar	39665
40 - 44 jaar	6225
45 - 49 jaar	217
	194017

Figuur 3.10

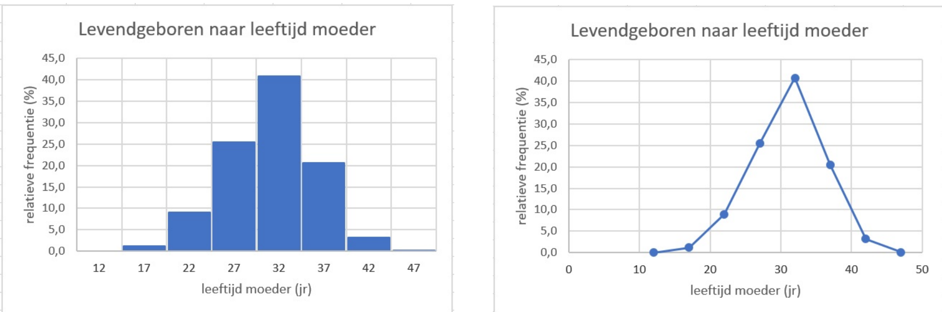
Antwoord

Maak eerst de lijst met relatieve frequenties.

klasse		*freq.*	*rel. freq. (%)*
1	15 – 19 jaar	2182	1,1
2	20 – 24 jaar	17383	9,0
3	25 – 29 jaar	49344	25,4
4	30 – 34 jaar	79001	40,7
5	35 – 39 jaar	39665	20,4
6	40 – 44 jaar	6225	3,2
7	45 – 49 jaar	217	0,1
	totaal	194017	100

Tabel 3.1

Maak vervolgens het histogram en de frequentiepolygoon. Bekijk het resultaat.



Figuur 3.11

Merk op dat Excel eigenlijk geen histogram kan tekenen. Je maakt een staafdiagram dat zo veel mogelijk op een echt histogram lijkt. Het verschil is dat op de horizontale as de klassenmiddens staan.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** het overzicht van levendgeborenen naar leeftijd van de moeder in 2003. Maak zelf (met de grafische rekenmachine of met Excel) het histogram en de polygoon van de relatieve frequenties bij deze klassenindeling van levendgeborenen naar leeftijd van de moeder.

levendgeboren naar leeftijd moeder	2003
klasse	frequentie
tot 15 jaar	0
15 - 19 jaar	2182
20 - 24 jaar	17383
25 - 29 jaar	49344
30 - 34 jaar	79001
35 - 39 jaar	39665
40 - 44 jaar	6225
45 - 49 jaar	217
	194017

Figuur 3.12

Voorbeeld 3

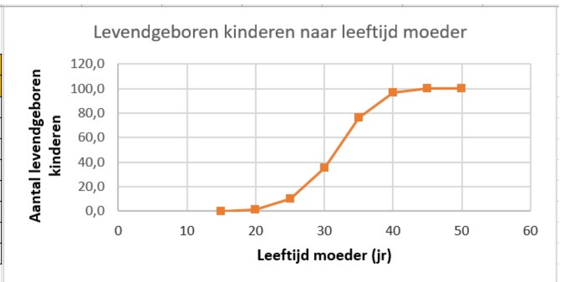
Maak een cumulatief relatief frequentiepolygoon bij de klassenindeling van de variabele *levendgeboren naar leeftijd moeder*.

Antwoord

Maak eerst de lijst met relatieve frequenties en cumulatieve relatieve frequenties. In Excel gaat dat heel gemakkelijk. Maak vervolgens een lijst met rechterklassengrenzen. Nu ga je geen lijndiagram maken, maar je kiest voor spreiding en je maakt een lijngrafiek. Bekijk het resultaat.

(Excel kan eigenlijk geen cumulatief histogram tekenen en ook geen cumulatief frequentiepolygoon. Je maakt een grafiek die zo veel mogelijk op een frequentiepolygoon lijkt.)

levendgeboren naar leeftijd moeder	2003			
		X-as		Y-as
klasse	frequentie	rechtergrens	cum.freq.	cum.freq.(%)
tot 15 jaar	0	15	0	0,0
15 - 19 jaar	2182	20	2182	1,1
20 - 24 jaar	17383	25	19565	10,1
25 - 29 jaar	49344	30	68909	35,5
30 - 34 jaar	79001	35	147910	76,2
35 - 39 jaar	39665	40	187575	96,7
40 - 44 jaar	6225	45	193800	99,9
45 - 49 jaar	217	50	194017	100,0
	194017			



Figuur 3.13

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**. Maak het histogram en het cumulatieve relatieve frequentiepolygoon bij deze klassenindeling van levendgeborenen per leeftijd van de moeder (bijvoorbeeld met Excel).

Opgave 8

Bekijk de gegevens over het verbruik van energie in 1998. Het verbruik is gegeven in PJ (1 PJ = 1 petajoule = 10^{15} joule).

1998	*aantal PJ*	*percentage* (%)	*graden* (°)
aardgas	1284	48,8	
aardolie	939		
steenkool	347		
overige	63		
totaal	2633	100	360

Tabel 3.2

a Bereken de procentuele verhoudingen tussen aardgas, aardolie, steenkool en overige in 1998.

b Maak een cirkeldiagram voor het energieverbruik in het jaar 1998.

In de tabel zie je het verbruik in PJ in de loop van de jaren.

kalenderjaar	*aardgas*	*aardolie*	*steenkool*	*overige*
1998	1284	939	347	63
2000	1469	1073	332	105
2001	1508	1113	351	106
2002	1500	1118	355	104
2003	1481	1194	370	112

Tabel 3.3

c Teken een nieuw cirkeldiagram voor de onderlinge verhoudingen tussen aardgas, aardolie, steenkool en overige voor het jaar 2003 met behulp van deze tabel.

d Vergelijk de procentuele verhouding tussen aardgas, aardolie, steenkool en overige van de jaren 1998 en 2003. Wat valt je op?

Verwerken

Opgave 9

Bekijk de opbouw van de benzineprijs van Euro 95 volgens de Bovag.

a Hoeveel procent is de bruto winstmarge voor het tankstation volgens de Bovag?

b Geef de opbouw weer in een cirkeldiagram.

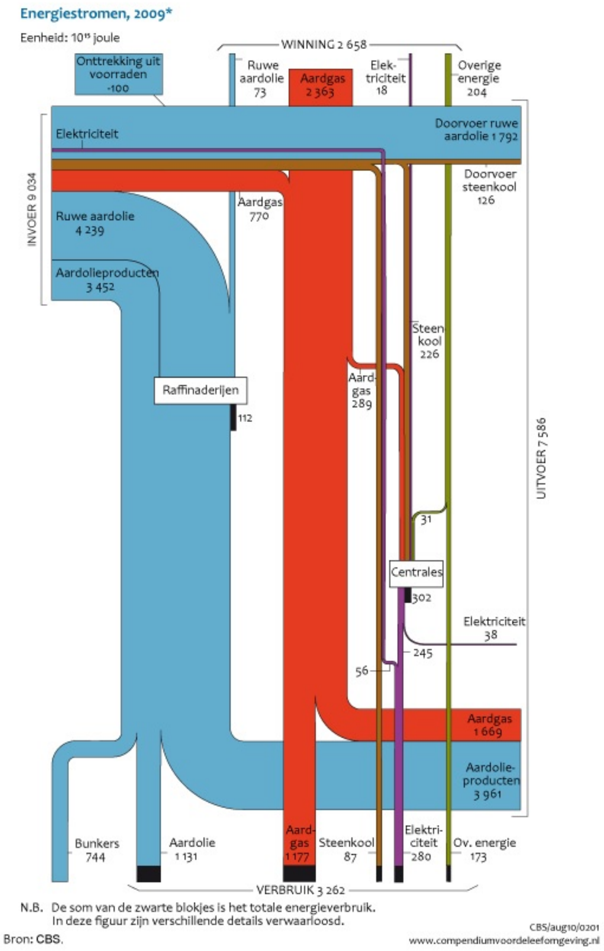
c Wat zal de Bovag zeggen als consumenten klagen over de hoge benzineprijzen?

Opbouw benzineprijs Euro 95	
bedragen in eurocenten	
(Aan deze berekening kunnen geen rechten worden ontleend)	
Adviesprijs	*144*
Productprijs	45,3
Distributiekosten	6,8
Brutowinst oliemaatschappij	1,4
Bruto winstmarge tankstation	5
Accijns en heffingen	62,5
BTW	23

Figuur 3.14

Opgave 10

Dit stroomdiagram geeft de energiebalans in 2009 van Nederland weer. Je ziet de hoeveelheid energie die Nederland opwekt en invoert. Je ziet ook de energie die we met z'n allen verbruiken of doorvoeren/uitvoeren naar het buitenland. De gebruikte eenheid is 10^{15} joule.



Figuur 3.15

a Wat betekent het getal 2363 bij de aardgaswinning?

b Hoeveel joule energie is er in 2009 verbruikt door onze energiecentrales om elektriciteit op te wekken?

c Deze energiecentrales halen hun energie behalve uit aardgas en steenkool ook uit andere energiebronnen. Waaruit blijkt dat? En welke energiebronnen zijn dat?

d Hoeveel joule energie is er in Nederland in 2009 verbruikt?

e Hoeveel joule energie is er in Nederland in 2009 ingevoerd?

f Hoeveel joule energie is er als elektriciteit ingevoerd?

g Waarom was het vinden van aardgas in de Nederlandse bodem de afgelopen jaren zo belangrijk voor onze economie?

h Nederland kent ook opgeslagen energievoorraden. Waar zie je dat in het schema?

Opgave 11

Bekijk de frequentieverdeling van de weeklonen van 65 werknemers van een bedrijf.

a Bereken de relatieve frequenties bij deze tabel.

b Maak een staafdiagram van de frequenties en van de relatieve frequenties.

c Maak een frequentiepolygoon.

Het bedrijf neemt vijf extra werknemers in dienst. Zij krijgen een weekloon van € 835,00; € 1156,00; € 1345,00; € 1567,00 en € 1714,00.

d Pas de frequentietabel aan voor de zeventig werknemers.

e Teken een staafdiagram en een lijndiagram bij de nieuwe frequentietabel.

loon (€)	*aantal*
$500- < 600$	8
$600- < 700$	10
$700- < 800$	16
$800- < 900$	14
$900- < 1000$	10
$1000- < 1100$	5
$1100- < 1200$	2
totaal	65

Tabel 3.4

Opgave 12

Voor een toets kun je maximaal 100 punten scoren. Je ziet de scores van een groep van veertig personen.
59 – 57 – 53 – 60 – 63 – 58 – 77 – 33 – 50 – 59
58 – 75 – 62 – 54 – 53 – 78 – 59 – 68 – 65 – 62
57 – 60 – 80 – 47 – 90 – 30 – 60 – 35 – 57 – 87
63 – 65 – 63 – 58 – 65 – 70 – 73 – 58 – 63 – 55

a Deel deze scores in klassen in. Neem als laagste klasse $25- < 35$. Maak een relatieve frequentietabel.

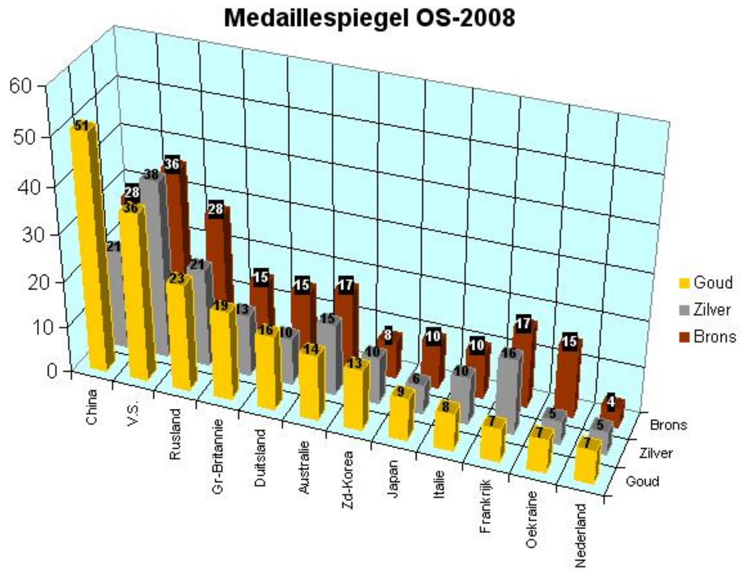
b Maak bij deze tabel een histogram van relatieve frequenties.

c Maak een frequentiepolygoon met de relatieve frequenties.

d Personen die 55 of meer punten hebben, scoren voldoende. Maak een cumulatief relatief frequentiepolygoon en bepaal hoeveel procent van deze groep voldoende heeft gescoord.

Opgave 13

Je ziet de medaillespiegel van de Olympische Spelen van 2008 in Beijng met de beste 12 landen.



Figuur 3.16

a Wat geeft elke staaf in dit diagram weer?

b Waarom is een 3D-diagram hier handig? Wat staat er op elk van de assen weergegeven?

c Welk land heeft de meeste gouden medailles gewonnen?

d Welk land heeft de meeste zilveren medailles gewonnen?

e Welk land heeft totaal de meeste medailles gewonnen?

f Deze gegevens kun je ook in een gestapeld staafdiagram weergeven. Hoe ziet dat eruit? Wat is het voordeel en het nadeel?

g Bedenk een presentatie die alle gewenste informatie bevat en een duidelijk overzicht geeft.

Opgave 14

In de tabel zie je de behaalde cijfers voor een wiskundetoets door twee parallelklassen.

cijfers klas A						cijfers klas B				
6,7	6,4	4,9	3,8	4,0		4,0	6,2	4,9	3,9	5,9
5,6	5,8	6,8	8,2	4,7		7,3	4,7	6,7	7,6	9,4
3,4	8,5	4,1	6,9	7,3		8,3	5,7	7,2	8,7	7,1
6,1	7,5	6,7	6,2	3,4		7,0	6,5	7,4	5,0	4,8
7,9	4,5	8,3				7,7	6,5	4,9	8,8	6,3

Tabel 3.5

a Verwerk de resultaten van beide klassen in één frequentietabel waarin de resultaten van beide klassen gescheiden blijven en teken het bijbehorende staafdiagram. Kies een klassenbreedte van 0,5.

b Om een overzicht te krijgen van hoe de toets gemaakt is, kun je de resultaten verwerken in een steelbladdiagram. Doe dat.

c Om het verschil tussen beide klassen te onderzoeken, kun je de resultaten verwerken in een dubbel steelbladdiagram. Doe dat.

d Noem enkele voordelen die het steelbladdiagram heeft boven een frequentietabel en een histogram.

Opgave 15

Je ziet informatie over de bevolking van Amsterdam.

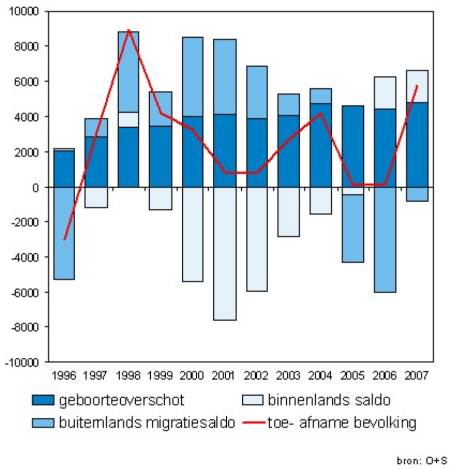
a Welke diagrammen herken je in de figuur?

b Wat betekenen de variabelen *geboorteoverschot*, *buitenlands migratiesaldo* en *binnenlands saldo*?

c Wat is de bevolkingstoename van Amsterdam in 2004 ongeveer? Geef voor dat jaar het *geboorteoverschot*, het *buitenlands migratiesaldo* en het *binnenlands saldo*.

d Het migratiesaldo zit soms boven en soms onder de nullijn. Leg uit wat dat betekent.

e Aan het lijndiagram zie je dat in 2007 de Amsterdamse bevolking met ongeveer 6000 personen is toegenomen. Laat zien hoe je dit kunt berekenen met het staafdiagram.

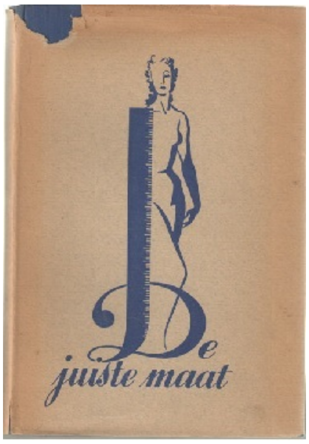


Figuur 3.17

Toepassen

In 1951 verscheen bij uitgeverij Stafleu in Leiden het boek ‘De Juiste Maat’, met als ondertitel ‘Lichaamsafmetingen van Nederlandse vrouwen als basis voor een nieuw maatsysteem voor dameskonfectiekleding’. Auteurs van dit boek waren J. Sittig, Adviesbureau voor Toegepaste Statistiek, en prof. dr. H. Freudenthal, Rijksuniversiteit Utrecht. Het onderzoek was gehouden in opdracht van N.V. Magazijn De Bijenkorf, Amsterdam. In het kader van dit onderzoek zijn bij 5001 vrouwelijke klanten van de Bijenkorf vijftien lichaamsmaten opgemeten. Vervolgens is gekeken welke van deze maten het meest bruikbaar zijn om een **maatsysteem voor kleding** op te baseren.

Bekijk een deel van de uitkomst van het onderzoek in het bestand **Statistiek Bijenkorf 1947**.



Figuur 3.18

Opgave 16

Bekijk bij **Toepassen** de gegevens over lengte en gewicht van de 5001 gemeten vrouwen.

a Om welk type statistische variabelen gaat het hier?

b Welke klassenindeling is er gebruikt voor de variabele *lengte*? En voor de variabele *gewicht*?

c Maak een histogram van de relatieve frequenties van de lengtes van de vrouwen. Wat valt op aan dit histogram?

d Hoeveel procent van de vrouwen heeft een lengte vanaf (afgerond) 1,56 m tot en met 1,68 m?

e Maak een histogram van de relatieve frequenties van de gewichten van de vrouwen.
Wat valt op aan dit histogram?

Testen

Opgave 17

Je ziet de omzet en de kosten van een bedrijf. Beiden zijn afgerond op veelvouden van € 5000.

a Teken de cumulatieve frequentiepolygonen van de omzet en van de kosten in één figuur. Nummer de maanden 1 tot en met 12.

b In welke maanden ligt het cumulatieve frequentiepolygoon van de kosten boven dat van de omzet?

c Wat betekent dit voor het bedrijf?

d Wat is het eindresultaat voor dit bedrijf over het hele jaar?

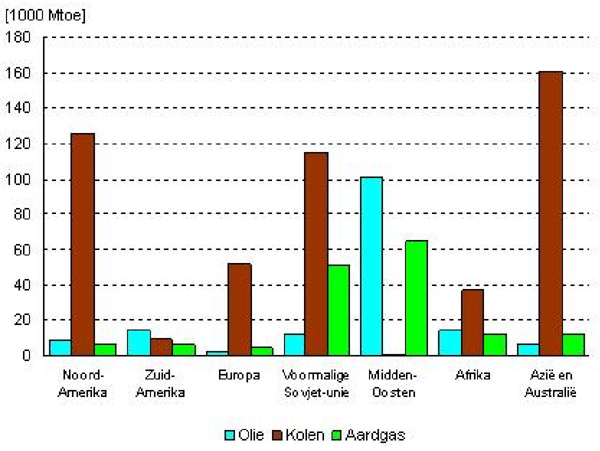
2017	*omzet in €*	*kosten in €*
jan	10000	550000
feb	15000	40000
mrt	20000	40000
apr	30000	40000
mei	50000	60000
jun	100000	75000
jul	300000	75000
aug	450000	75000
sep	150000	75000
okt	50000	40000
nov	30000	40000
dec	10000	40000

Tabel 3.6

Opgave 18

Je ziet een staafdiagram van de wereldvoorraad olie, kolen en gas per regio per eind 2003.

Mtoe = miljoen ton olie-equivalenten = 41808 terajoules.



Figuur 3.19

a Hoe zie je dat dit diagram geen histogram is?

b Waarom is een staafdiagram gemaakt en geen cirkeldiagram?

c Je ziet de bij het staafdiagram behorende data voor eind 2003 en eind 2002. Maak een cirkeldiagram voor de aardgasvoorraad per regio per eind 2003.

Wereld olie-, kolen- en gasvoorraden per regio per eind 2003 Referentie: BP review of World Energy, BP						
	2002			2003		
[1000 Mtoe]	Olie	Kolen	Aardgas	Olie	Kolen	Aardgas
Noord-Amerika	6,4	126	6,6	8,9	126	6,6
Zuid-Amerika	14,1	9,8	6,5	14,3	9,8	6,5
Europa	2,7	59,6	5,3	2,3	51,6	5,1
Voormalige Sovjet-unie	10,3	36,8	10,9	12,2	115,2	50,9
Midden-Oosten	93,4	1,1	51,5	101,7	1,1	64,6
Afrika	10,6	107,2	50,7	14,3	36,9	12,4
Azië en Australië	5,2	160,6	11,6	6,7	160,6	12,1
Totaal	142,7	501,2	143	160,4	501,2	158,2

Figuur 3.20

d Welk soort diagram zou je maken als je de voorraden per regio per eind 2003 en per eind 2002 met elkaar wilt vergelijken?

(bron: energie.nl)

Practicum

Met de volgende practica kun je **de statistische functies van de grafische rekenmachine** doornemen. Onder andere staat er in hoe je gegevens in lijsten invoert en statistische diagrammen maakt.

- **Statistiek en de TI-84**
- **Statistiek en de TInspire**
- **Statistiek en de Casio**
- **Statistiek en de HPprime**
- **Statistiek en de NumWorks**

De **statistische functies van Excel** vind je in het volgende practicum. Er staat meer in dan op dit moment nodig is, maar onder andere kun je er nog eens in vinden hoe je diagrammen maakt.

- **Data presenteren**

1.4 Data samenvatten

Inleiding

Grote verzamelingen statistische gegevens zijn (ondanks het gebruik van tabellen en diagrammen) vaak nogal onoverzichtelijk. Vergelijken van frequentieverdelingen is ook niet altijd in één oogopslag mogelijk. Daarom worden de resultaten van een statistisch onderzoek vaak samengevat in een aantal getallen die snel informatie geven over frequentieverdelingen, zoals gemiddelden en spreiding van gegevens.

Een aantal opgaven uit dit onderdeel is afkomstig uit de NLT-module: ‘Maak het verschil’, net als enkele datasets.

Je leert in dit onderwerp

- een reeks waarnemingen samen te vatten met centrummaten: gemiddelde, mediaan en modus;
- een reeks waarnemingen samen te vatten met spreidingsmaten: variantie, spreidingsbreedte, kwartielafstand en standaardafwijking;
- een reeks waarnemingen samen te vatten in een boxplot.

Voorkennis

- gegevens in een frequentietabel (met zowel absolute als relatieve als cumulatieve frequenties) verwerken;
- een (cumulatief) histogram en een (cumulatieve) frequentiepolygoon maken bij een frequentietabel.

Verkennen

Opgave V1

De schoolleiding en de ouderraad willen een goed beeld krijgen van de aanwezigheid van leerlingen in jullie leerjaar bij de diverse vakken. Ze willen dat in een beknopt en helder verslag van maximaal twee A4'tjes uiteengezet hebben.

Hoe kan zo’n beknopt verslag eruit zien, zodat iedereen goed geïnformeerd wordt? Denk aan het samenvatten van gegevens met behulp van diagrammen, gemiddelden en uitersten.

Uitleg

Jouw klas heeft een toets gehad. Je docent doet de mededeling dat de toets goed is gemaakt met een gemiddelde van 7,3. Ben je blij met deze informatie of hoor je liever dat het modale cijfer 7,3 is? Of dat de mediaan 7,3 is?

Met deze mededeling probeert je docent een frequentieverdeling met één getal te karakteriseren.

- Het modale cijfer is het cijfer dat het vaakst voorkomt. Hier zegt het niet veel, want misschien komt 7,3 twee keer voor en zijn alle andere cijfers heel verschillend.
- Ook een mediaan (middelste cijfer) van 7,3 zegt niet veel, hoewel je dan zeker weet dat de helft van de cijfers hoger dan of gelijk aan 7,3 is (en de andere helft lager dan of gelijk aan 7,3).
- Het gemiddelde krijg je door alle cijfers op te tellen en te delen door het totale aantal leerlingen. Maar ben jij een gemiddelde of bovengemiddelde leerling?

Deze getallen zeggen op zichzelf weinig. Het wordt al beter als je er een mededeling over de spreiding van de cijfers bij krijgt. Het gemiddelde cijfer is een 7,3 en de cijfers hebben een spreiding van 2,2 bijvoorbeeld.

Maar wat wordt onder de spreiding verstaan? Het verschil tussen het hoogste en het laagste cijfer, de spreidingsbreedte, is bijvoorbeeld zo'n spreidingsmaat. Maar er zijn ook andere spreidingsmaten.
Een boxplot, waarin onder andere mediaan en spreiding zijn verwerkt, kan je meer duidelijkheid verschaffen.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. In de tabel zie je de cijfers van een wiskundetoets van twee parallelklassen.

cijfers klas A						cijfers klas B				
6,7	6,4	4,9	3,8	4,0		4,0	6,2	4,9	3,9	5,9
5,6	5,8	6,8	8,2	4,7		7,3	4,7	6,7	7,6	9,4
3,4	8,5	4,1	6,9	7,3		8,3	5,7	7,2	8,7	7,1
6,1	7,5	6,7	6,2	3,4		7,0	6,5	7,4	5,0	4,8
7,9	4,5	8,3				7,7	6,5	4,9	8,8	6,3

Tabel 4.1

a Waarom heeft het geen zin om van beide klassen het modale cijfer te vergelijken?

b Bepaal van beide klassen de mediaan.

c Zegt de mediaan iets over welke klas beter heeft gescoord?

d Bereken van beide klassen het gemiddelde cijfer.

e Welke van beide klassen heeft het hoogste gemiddelde? Kun je nu zonder meer zeggen dat die klas ook beter heeft gescoord?

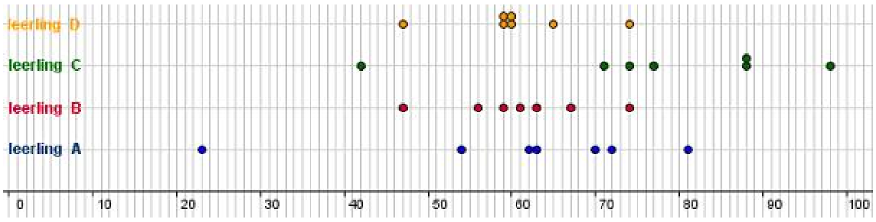
Opgave 2

Je ziet de SE-cijfers (schoolexamen) van enkele leerlingen aan het eind van havo 5. Hun eindcijfer SE is het gemiddelde van deze cijfers.

	se1	se2	se3	se4	se5	se6	se7
A	7,2	6,3	7,0	2,3	6,2	8,1	5,4
B	5,9	7,4	5,6	6,7	6,1	6,3	4,7
C	8,8	9,8	7,4	8,8	5,7	7,3	4,2
D	7,5	6,0	6,0	6,5	6,1	6,1	4,7

Figuur 4.1

Elk SE-cijfer telt even zwaar mee. In de figuur is voor elke leerling elk SE-cijfer aangegeven door een bolletje op een getallenlijn (de komma in het cijfer is weggelaten).



Figuur 4.2

a De leerlingen A en B hebben hetzelfde gemiddelde. Toch is hun cijferbeeld nogal verschillend. Hoe komt dat?

b De spreiding van de cijfers van leerling A en C is vrijwel hetzelfde. Waarin verschilt hun cijferbeeld vooral?

c De cijfers van de leerlingen B en D hebben dezelfde spreidingsbreedte. Is de spreiding van hun cijfers ook hetzelfde?

Een andere maat voor de spreiding vind je door te kijken hoe ver elk cijfer van het gemiddelde af ligt. Bereken van elk cijfer het verschil met het gemiddelde. Je ziet die verschillen voor leerling A.

	se1	se2	se3	se4	se5	se6	se7
A	7,2	6,3	7,0	2,3	6,2	8,1	5,4
	1,1	0,2	0,9	-3,8	0,1	2,0	-0,7

Figuur 4.3

d Bereken het gemiddelde van deze verschillen. Verbaast het antwoord je? Licht je antwoord toe.

Het gemiddelde van deze verschillen is geen goede spreidingsmaat. Dat zit hem in de mintekens. Door te kwadrateren vallen die mintekens weg. Maak voor leerling A een lijst van de kwadraten van de verschillen.

e Bereken daarvan het gemiddelde. Heb je nu een goede spreidingsmaat?

Door het kwadrateren wordt het getal dat je bij e hebt gevonden, nogal groot. Dat los je op door de wortel uit dit getal te nemen. Je krijgt dan de standaardafwijking van de set cijfers.

f Ga na dat de standaardafwijking voor leerling A ongeveer 1,73 is.

g Bereken ook voor leerling B de verschillen van de cijfers met het gemiddelde. Bereken vervolgens het gemiddelde van de kwadraten van die verschillen en de standaardafwijking.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Getallen die (bij benadering) het midden aangeven van een reeks waarnemingen heten centrummaten. Er zijn drie **centrummaten**.

- De **modus** is de waarneming met de hoogste frequentie. Vooral geschikt voor kwalitatieve variabelen.
- De **mediaan** is het middelste waarnemingsgetal als de waarnemingsgetallen op volgorde van klein naar groot staan. Is het aantal even, dan zijn er twee middelste waarnemingsgetallen. De mediaan is dan het gemiddelde van die middelste twee.
- Het **gemiddelde** bereken je door alle waarnemingsgetallen op te tellen en te delen door het totale aantal. Als je de waarnemingsgetallen x_1, x_2, x_3, ..., x_n noemt, schrijf je dit als: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

  Daarin geldt $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

  De Griekse hoofdletter sigma ($\sum$) is het somteken. Bij een frequentietabel vermenigvuldig je elk waarnemingsgetal met de frequentie.

  Het gemiddelde is dan: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{n}$.

Bij **klassenindelingen** spreek je van de **modale klasse** en kun je de mediaan het beste opzoeken in een cumulatieve relatieve frequentiepolygoon (de waarde bij 50% schatten door aflezen). Het gemiddelde kun je dan alleen maar schatten door het gemiddelde van de **klassenmiddens** te berekenen.

Centrummaten alleen zeggen nog weinig, er hoort steeds een spreidingsmaat bij. Er zijn drie **spreidingsmaten**:

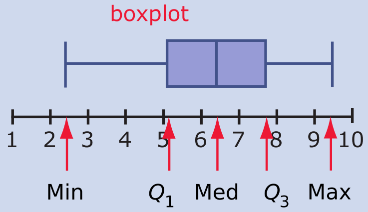
- De **spreidingsbreedte** (ook **variatiebreedte**) is het verschil tussen het hoogste en laagste waarnemingsgetal.
- De **interkwartielafstand** is het verschil tussen de mediaan van de grootste helft (het **derde kwartiel** of Q_3) en de mediaan van de kleinste helft (het **eerste kwartiel** of Q_1). Om de kwartielen te bepalen, zet je eerst de waarnemingsgetallen in volgorde van klein naar groot en verdeel je ze in twee helften. Bestaan de waarnemingen uit een oneven aantal waarden, dan wordt de mediaan van de hele set niet meegenomen om Q_1 en Q_3 te berekenen.
- De **standaardafwijking** (of **standaarddeviatie**) vind je door van elk waarnemingsgetal het verschil met het gemiddelde te bepalen en dat getal te kwadrateren. Die kwadraten tel je op en je deelt ze door het totale aantal waarnemingen. Dit getal heet de **variantie**. De wortel uit de variantie is de standaarddeviatie $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{n}}$. De Griekse (kleine) letter sigma is het teken voor standaardafwijking.

Bij klassenindelingen is de spreidingsbreedte het aantal klassen maal de klassenbreedte. De mediaan en de kwartielen zoek je het beste op in een cumulatieve relatieve frequentiepolygoon (de mediaan bij 50%, het eerste kwartiel bij 25% en het derde kwartiel bij 75%). De standaarddeviatie kun je nu alleen schatten door de standaarddeviatie van de klassenmiddens te berekenen. De mediaan, het gemiddelde en alle spreidingsmaten kunnen alleen gebruikt worden voor kwantitatieve variabelen. Hoe je ze met de grafische rekenmachine bepaalt, zie je in het **Practicum**. Het is bij grotere datasets verstandiger om met Excel te werken.

De mediaan, het eerste en derde kwartiel en de spreidingsbreedte en de kwartielafstand kun je laten zien in een **boxplot**. Een boxplot heeft dus vijf grenzen:

- Linkergrens met het laagste getal.
- Rechtergrens met het hoogste getal.
- Middelste grens Q_2, de mediaan.
- De tweede grens Q_1 tussen de linkergrens en Q_2; de mediaan van de eerste helft.
- De vierde grens Q_3 tussen Q_2 en de rechtergrens; de mediaan van de tweede helft.

De interkwartielafstand is het verschil tussen het eerste kwartiel (Q_1) en het derde kwartiel (Q_3), dus $Q_3 - Q_1$.



Figuur 4.4

Voorbeeld 1

Bekijk het steelbladdiagram van de cijfers in een klas. Het is tegelijk een klassenindeling (eerste klasse $2{,}0- < 3{,}0$) en een overzicht van alle cijfers (in de tweede klasse zit twee keer het cijfer $3{,}9$). Je kunt er ook een boxplot van maken. Laat dat zien.

2	4							
3	9	9						
4	4	4						
5	0	0	1	5	5	9	9	
6	2	4	4	4	6	6	8	9
7	1	3	7					
8	2	5	6	6	6	6		
9	5							

Figuur 4.5

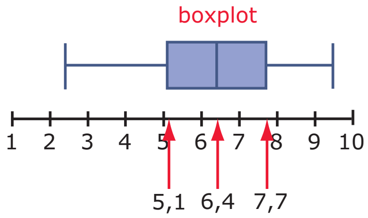
Antwoord

Bepaal eerst:

- De modus is $8{,}6$ en de modale klasse is $6{,}0- < 7{,}0$.
- De mediaan is $6{,}4$ (het gemiddelde van de twee middelste cijfers), het eerste kwartiel is $5{,}1$ en het derde kwartiel is $7{,}7$.
- De spreidingsbreedte is $9{,}5 - 2{,}4 = 7{,}1$ als je naar de werkelijke cijfers kijkt, of $10{,}0 - 2{,}0 = 8{,}0$ als je naar de klassenindeling kijkt.
- De kwartielafstand is $7{,}7 - 5{,}1 = 2{,}6$. Het is de breedte van de box van de boxplot.

De boxplot verdeelt alle cijfers in vier delen met elk 25% van deze cijfers.

Bestaan de waarnemingen uit een oneven aantal waarden, dan wordt de mediaan van de hele set niet meegenomen om Q_1 en Q_3 te berekenen.



Figuur 4.6

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** het steelbladdiagram en de boxplot. In de tabel zie je de cijfers gehaald voor een wiskundetoets van twee parallelklassen.

cijfers klas A						cijfers klas B				
6,7	6,4	4,9	3,8	4,0		4,0	6,2	4,9	3,9	5,9
5,6	5,8	6,8	8,2	4,7		7,3	4,7	6,7	7,6	9,4
3,4	8,5	4,1	6,9	7,3		8,3	5,7	7,2	8,7	7,1
6,1	7,5	6,7	6,2	3,4		7,0	6,5	7,4	5,0	4,8
7,9	4,5	8,3				7,7	6,5	4,9	8,8	6,3

Tabel 4.2

Maak van de cijfers van beide klassen een steelbladdiagram en bepaal de mediaan en de kwartielafstand van beide klassen. Teken voor beide klassen een boxplot van de resultaten.

Opgave 4

Welke uitspraak is waar voor de volgende waarnemingsgetallen?
58; 63; 51; 56; 86; 69; 55; 76; 74; 69; 45; 75; 55; 68; 68; 52; 70; 57; 65; 78; 65; 72; 83; 65; 79.

A. De modus en mediaan zijn gelijk.
B. De modus en het gemiddelde zijn gelijk.
C. Het gemiddelde en de mediaan zijn gelijk.
D. Geen van deze uitspraken is waar.

Opgave 5

Welke uitspraken zijn waar voor de volgende waarnemingsgetallen?
58; 63; 51; 56; 86; 69; 55; 76; 74; 69; 45; 75; 55; 68; 68; 52; 70; 57; 65; 78; 65; 72; 83; 65;
79; 57; 63; 63; 72; 63.

A. De modus is groter dan de mediaan.
B. Het gemiddelde is groter dan de mediaan.
C. De modus is kleiner dan het gemiddelde.

Voorbeeld 2

Bekijk de tabel met leeftijd, lengte en gewicht van 36 mannen.

gegevens van 36 mannen											
nr	*leeftijd* (j)	*lengte* (cm)	*gewicht* (kg)	*nr*	*leeftijd* (j)	*lengte* (cm)	*gewicht* (kg)	*nr*	*leeftijd* (j)	*lengte* (cm)	*gewicht* (kg)
i	L	l	G	i	L	l	G	i	L	l	G
1	20	180	95	13	46	180	95	25	67	171	68
2	23	184,5	91	14	47	177,5	75	26	67	170	81
3	23	180,5	90	15	51	196	86	27	68	169	97
4	29	169	91	16	52	188,5	93	28	68	176	72
5	30	176	80	17	53	170	85	29	71	171	84
6	33	182	82	18	54	178,5	77	30	71	180,5	75
7	36	182,5	85	19	56	172,5	74	31	71	172	77
8	36	176,5	74	20	61	164	85	32	74	171	77
9	38	180	73	21	61	181	89	33	75	183	95
10	40	190,5	112	22	61	173	95	34	75	172,5	74
11	41	184	89	23	61	181	89	35	82	173	66
12	44	179	75	24	63	181,5	100	36	84	175	90

Tabel 4.3

Je wilt van alle drie de series waarnemingsgetallen zowel de drie centrummaten als de drie spreidingsmaten bepalen.

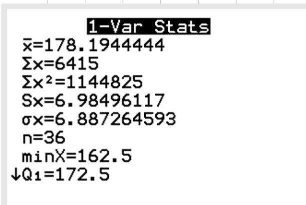
Gebruik je Excel, dan gebruik je de statistische functies om de centrummaten en de spreidingsmaten te (laten) berekenen. Zie het **Practicum**

Werk je met de hand of met de grafische rekenmachine, dan maak je meteen geschikte frequentieverdelingen. Je kunt dan de centrummaten en de spreidingsmaten alleen nog schatten vanuit de klassenmiddens. Zie het **Practicum**.

Antwoord

Voor de modus en de mediaan zijn de sorteerfuncties in Excel erg handig. Verder kun je gemakkelijk optellen en kolommen maken met de waarden van een waarnemingsgetal maal zijn frequentie, enzovoort.

Werk je met de grafische rekenmachine, maak dan eerst een tabel van relatieve frequenties met bijbehorende klassenmiddens. Laat vervolgens de machine de centrum- en spreidingsmaten bepalen. Zo krijg je voor de lengte deze gegevens.



Figuur 4.7

Bij de klassenindelingen zijn centrum- en de spreidingsmaten niet exact bepaald, omdat je door indelen in klassen de echte gegevens kwijt bent geraakt. Je krijgt zo schattingen van deze waarden.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** de tabel met gegevens van 36 mannen en in het antwoord de tabel met centrummaten en spreidingsmaten.

a Hoe wordt het gemiddelde berekend?

b Hoe wordt de spreidingsbreedte (variatiebreedte) berekend?

c Hoe wordt de kwartielafstand berekend?

d Ga na dat de modale leeftijd, de modale lengte en het modale gewicht correct zijn.

e Bereken de kwartielen en teken de bijpassende boxplots.

f Hoe wordt de standaardafwijking berekend?

Opgave 7

Bekijk de tabel met gegevens van 36 vrouwen.

gegevens van 36 vrouwen											
nr	*leeftijd* (j)	*lengte* (cm)	*gewicht* (kg)	nr	*leeftijd* (j)	*lengte* (cm)	*gewicht* (kg)	nr	*leeftijd* (j)	*lengte* (cm)	*gewicht* (kg)
i	L	l	G	i	L	l	G	i	L	l	G
1	21	181	85	13	53	168,5	64	25	70	166	65
2	22	171	55	14	53	165	64	26	71	159	93
3	30	176	55	15	53	179	77	27	73	154	76
4	32	176,5	70	16	57	174	76	28	73	153	54
5	34	158,5	61	17	62	179	80	29	74	160	60
6	43	160	80	18	64	163,5	80	30	75	163,5	79
7	49	179	75	19	65	160	92	31	75	153	93
8	50	166	74	20	65	182	78	32	76	159	81
9	50	171	84	21	65	154	74	33	77	165	68
10	50	166,5	65	22	67	162	64	34	78	163	89
11	51	171	80	23	68	160	63	35	80	166,5	60
12	52	171	71	24	69	163	75,5	36	80	157	72

Tabel 4.4

a Bepaal vanuit de basisgegevens de centrummaten en de kwartielen van de leeftijden, de lengtes en de gewichten van vrouwen.

b Bepaal ook de bijbehorende spreidingsmaten en teken de boxplots.

Opgave 8

In twee verzorgingstehuizen heeft men de keuze uit verschillende zitbreedtes voor rolstoelen. Van alle zitbreedtes zijn evenveel rolstoelen beschikbaar.
Verzorgingstehuis Alfa heeft rolstoelen met zitbreedtes van 35 cm, 38 cm, 41 cm, 45 cm en 50 cm.
Verzorgingstehuis Omega heeft rolstoelen met zitbreedtes van 34 cm, 38 cm, 41 cm, 46 cm en 50 cm.

a Bereken per verzorgingstehuis het gemiddelde en de mediaan van de zitbreedtes van de rolstoelen.

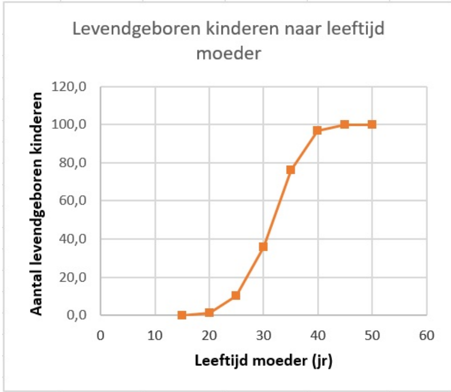
b Geven deze centrummaten het verschil tussen de zitbreedtes van de rolstoelen van beide verzorgingstehuizen voldoende aan? Licht je antwoord toe.

Voorbeeld 3

Je ziet een cumulatieve relatieve frequentiepolygoon bij deze klassenindeling van levendgeborenen naar leeftijd van de moeder. Maak een bijpassende boxplot.

levendgeborenen naar leeftijd moeder 2003	
klasse	*frequentie*
15 – 19 jaar	2182
20 – 24 jaar	17383
25 – 29 jaar	49344
30 – 34 jaar	79001
35 – 39 jaar	39665
40 – 44 jaar	6225
45 – 49 jaar	217

Tabel 4.5

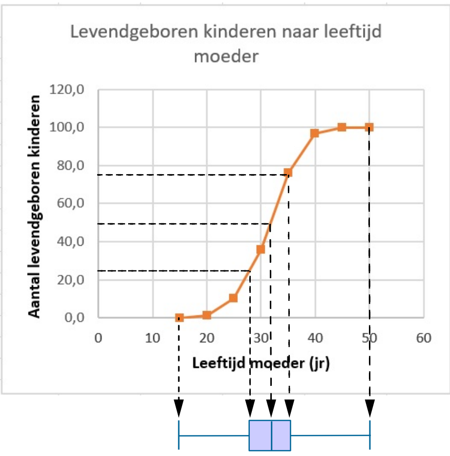


Figuur 4.8

Antwoord

Lees bij 50% de mediaan af, bij 25% het eerste kwartiel en bij 75% het derde kwartiel. Het minimum en maximum zitten bij 0% en 100%. Je ziet:

- het eerste kwartiel $Q_1 = 28$
- de mediaan $Q_2 = 31{,}5$
- het derde kwartiel $Q_3 = 35$



Figuur 4.9

Opgave 9

Bestudeer in **Voorbeeld 3** hoe je bij een klassenindeling een boxplot maakt.

Bekijk vervolgens de tabel met gegevens van 36 mannen in **Voorbeeld 2**. Maak bij de klassenindeling van de kolom ‘lengte’ een cumulatieve relatieve frequentiepolygoon en een boxplot.

Verwerken

Opgave 10

Je hebt de waarnemingsgetallen $16,18,22,24,26,26,28,30$ en 36.

a Teken een boxplot.

b Doe dat nog eens als je bij alle getallen 4 optelt.

c En ook als je van alle getallen 40 aftrekt.

d Doe het nog eens als je alle getallen door 2 deelt.

e Welk resultaat krijg je als je alle getallen met 3 vermenigvuldigt?

f Beschrijf wat er met de boxplot gebeurt als bij alle waarnemingsgetallen een getal wordt opgeteld of ervan afgetrokken wordt.

g Beschrijf wat er met de boxplot gebeurt als alle waarnemingsgetallen met een getal worden vermenigvuldigd of door een getal worden gedeeld.

Opgave 11

Voor een practicum biologie worden regenwormen gevangen. De lengte van die regenwormen vind je in de tabel.

a Kijk naar de manier waarop de klassen zijn gemaakt. Hoe nauwkeurig zijn de regenwormen gemeten? Bij welke klasse hoort een regenworm die $3,0$ cm lang is?

b Welke klasse is de modale klasse?

c Teken een histogram van de cumulatieve relatieve frequenties. Teken in dezelfde figuur de cumulatieve frequentiepolygoon.

d In welke klasse zit de mediaan? Kun je precies zeggen hoe groot die mediaan is? Schat de mediaan met behulp van de cumulatieve frequentiepolygoon.

e Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking.

lengte regenworm (cm)	*aantal*
$0,0- < 3,0$	4
$3,0- < 6,0$	8
$6,0- < 9,0$	17
$9,0- < 12,0$	22
$12,0- < 15,0$	23
$15,0- < 18,0$	17
$18,0- < 21,0$	6
$21,0- < 24,0$	2
$24,0- < 27,0$	1

Tabel 4.6

Opgave 12

Een supermarkt laat onderzoek verrichten naar de besteding per klant en naar de hoeveelheid tijd die een klant aan de kassa nodig heeft om af te rekenen. Er worden op verschillende tijdstippen tellingen gehouden. Je ziet de resultaten.

kassatijd (min)	*aantal klanten*
$0- < 1$	22
$1- < 2$	75
$2- < 3$	58
$3- < 4$	25
$4- < 5$	16
$5- < 6$	4

kassabon (€)	*aantal klanten*
$0- < 50$	24
$50- < 100$	61
$100- < 150$	75
$150- < 200$	25
$200- < 250$	12
$250- < 300$	2
$300- < 350$	1

Tabel 4.7

a Bepaal bij beide tabellen de modus, de mediaan, het eerste en het derde kwartiel en het gemiddelde.

b Hoe groot is de standaardafwijking bij beide verdelingen?

c Teken bij beide tabellen een boxplot.

De supermarkt heeft een weekomzet van € 150000,00. Een caissière mag 38 uur per week werken.

d Hoeveel caissières moet de supermarkt in dienst nemen als er vanwege de wisselende winkeldrukte een overcapaciteit van 25% wordt aangehouden?

Opgave 13

Op elk uur van een dag is de temperatuur bepaald. De uren van middernacht tot 12 uur 's middags worden aangegeven met am (het Latijnse ‘ante meridiem’ (am) betekent ‘voor het middaguur’), en de uren van 12 uur 's middags tot middernacht met pm (‘post meridiem’ (pm)).

uur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
am	16,1	15,8	15,4	15,1	14,8	15,0	16,1	17,4	18,5	19,4	20,3	21,1
pm	21,9	22,6	22,7	22,5	21,9	21,0	19,8	18,8	18,1	17,5	17,0	16,6

Tabel 4.8

a Verwerk deze gegevens in een dubbel steelbladdiagram.

b Maak boxplots van elk dagdeel afzonderlijk en van de totale dag.

c Bereken voor beide dagdelen afzonderlijk het gemiddelde en de standaardafwijking.

d Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van alle metingen van die dag.

e Geef een verklaring voor de verschillen die je vindt. (Dit is bivariate statistiek. Je bekijkt twee variabelen en hun eventuele samenhang/verschil.)

Opgave 14

In een nieuw te bouwen ziekenhuis moeten bedden worden aangeschaft. De facilitaire dienst vraagt zich af welke lengte de bedden moeten krijgen. Hoe langer de bedden, hoe hoger de kosten. In het oude ziekenhuis hebben ze het laatste jaar van 278 patiënten gegevens verzameld. Je vindt ze in het bestand **Patiëntengegevens**.

a Bereken de gemiddelde lengte van de patiënten. Bereken ook de gemiddelde lengte van de vrouwelijke en de mannelijke patiënten apart.

b Men kan natuurlijk alle bedden zo lang maken als de langste patiënt. Hoe lang worden de bedden dan? Noem een bezwaar tegen dit idee.

Handiger is misschien de lengte van het bed zo te kiezen dat 50% van de patiënten erin past. Voor langere patiënten neem je dan een bed met een lengte van de langste patiënt.

c Hoe lang moet het bed dan worden als 50% van de patiënten erin past?

Het hoofd van de facilitaire dienst denkt dat het goedkoper is om verschil te maken in mannen- en vrouwenbedden, wat de lengte betreft.

d Als we hiervan uitgaan en de voorwaarde na b, hoe lang worden dan een ‘mannenbed’ en een ‘vrouwenbed’?

Opgave 15

Het gemiddelde van de getallen 23, 6, 15, 31, 7 en c is gelijk aan 16. Bereken c.

Opgave 16

In een eetcafé komen op een dag tachtig mensen eten. Ze besteden gemiddeld € 22,00. Studenten betalen € 15,00 voor het studentenmenu, dagjesmensen betalen € 25,00 voor het toeristenmenu.
Hoeveel studenten waren er die dag?

Toepassen

In 1947 zijn bij 5001 vrouwelijke klanten van de Bijenkorf vijftien lichaamsmaten opgemeten. Vervolgens is gekeken welke van deze maten het meest bruikbaar zijn om een **maatsysteem voor kleding** op te baseren. Bekijk een deel van de uitkomst van het onderzoek in het bestand **Statistiek Bijenkorf 1947**.

Je kunt met Excel centrum en spreiding van de gegevens berekenen en boxplots maken.

Soms is er sprake van een **uitschieter**, een waarde die wel erg veel afwijkt.

In een boxplot is een uitschieter een waarde die meer dan $1{,}5$ keer de interkwartielafstand onder het eerste kwartiel of boven het derde kwartiel zit.

Opgave 17

Bekijk bij **Toepassen** de gegevens over lengte en gewicht van de 5001 gemeten vrouwen.

a Bepaal de modale lengte en bereken de gemiddelde lengte.

b Bepaal de mediaan en de kwartielen van de lengte en teken een bijpassende boxplot.

c Zijn er bij deze lengtes uitschieters? Licht je antwoord toe.

d Verdeel de lengtes in klassen van 5 cm, te beginnen bij $135- < 140$. Maak bij de nieuwe frequentieverdeling een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon. Welke vorm heeft de polygoon?

e Bepaal opnieuw de gemiddelde lengte, de mediaan en de kwartielen. Wijken de resultaten veel af van de antwoorden bij a en b?

Opgave 18

In de dataset in **Toepassen** vind je ook gegevens over de *mouwlengte* en de *kniehoogte* van de 5001 vrouwen.

a Bepaal modus, mediaan en het gemiddelde van de mouwlengtes m_i.

b Bepaal de spreidingsbreedte, de interkwartielafstand en de standaardafwijking van de mouwlengtes m_i.

c Er is één nogal afwijkende mouwlengte. Is hier sprake van een uitschieter?

Testen

Opgave 19

Op een feestje zijn acht personen aanwezig. Je ziet een tabel met gegevens over de feestgangers.

naam	leeftijd in jaar	lengte in cm	favoriete drankje	gewicht in kg	zakgeld in € per week	vervoer-middel
Jan	15	187	cola	71	€ 15	fiets
Leo	16	178	colal	69	€ 20	fiets
Elske	15	172	sinas	66	€ 17	bus
Daphne	17	171	cola	67	€ 20	scooter
Mart	19	195	cassis	76	€ 19	auto
Durk	57	180	bier	74	€ 50	auto
Henk	17	187	cola	75	€ 18	fiets
Leo	15	179	cola	70	€ 18	brommer

Figuur 4.10

a Welke centrummaat zou je gebruiken om voor elke kolom de feestgangers te typeren?

b Welke spreidingsmaat zou je zo mogelijk gebruiken om voor elke kolom de feestgangers te typeren?

c Hoe zou je de doorsneefeestganger omschrijven?

Opgave 20

Een groep leerlingen wordt tijdens de zwemles gevraagd om zo lang mogelijk hun adem in te houden onder water. Je ziet hier de bijbehorende tijden (in seconden).

$17; 39; 17; 21; 26; 21; 31; 17; 37; 43$
$36; 17; 15; 29; 21; 31; 35; 23; 18; 17$
$26; 21; 28; 23; 22; 16; 37; 33; 27$

a Bepaal de drie centrummaten van deze gegevens.

b Bepaal de spreidingsbreedte en de standaardafwijking.

c Teken een boxplot bij deze gegevens.

d Maak een klassenindeling met de eerste klasse $15- < 20$.

e Bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie bij deze klassenindeling.

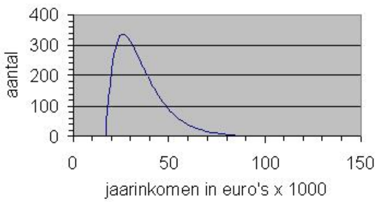
f Teken een bijpassende cumulatieve relatieve frequentiepolygoon. Bepaal daarmee de mediaan bij deze klassenindeling.

Opgave 21

In de grafiek vind je de jaarinkomens van de werknemers van een grote fabriek.

a Wat verdient de doorsneewerknemer van deze fabriek? Welke centrummaat heb je gekozen en waarom?

b Welke centrummaat is groter, de mediaan of de modus? Leg uit waar je dat aan kunt zien.



Figuur 4.11

Practicum

Met de volgende practica kun je **de statistische functies van de grafische rekenmachine** doornemen. Onder andere staat er in hoe je centrummaten en spreidingsmaten kunt berekenen.

- **Statistiek en de TI-84**
- **Statistiek en de TInspire**
- **Statistiek en de Casio**
- **Statistiek en de HPprime**
- **Statistiek en de NumWorks**

De **statistische functies van Excel** vind je in het volgende practicum. Er staat meer in dan op dit moment nodig is, maar onder andere kun je er nog eens in vinden hoe je diagrammen maakt en centrummaten en spreidingsmaten kunt laten berekenen door Excel.

- **Data presenteren**

1.5 Uitspraken

Inleiding

Een statistisch onderzoek is opgezet om uitspraken te kunnen doen. In kranten en tijdschriften staat het er bol van. Maar vaak ontbreekt belangrijke informatie: er staat bijvoorbeeld wel een gemiddelde, maar er wordt geen spreidingsmaat vermeld. Of er wordt niet vermeld hoe de steekproef is samengesteld...
Welke uitspraken kun je wel doen en welke niet? En wat moet je allemaal vermelden om de betrouwbaarheid van een uitspraak duidelijk te maken?

Een aantal opgaven uit dit onderdeel is afkomstig uit de NLT-module ‘Maak het verschil’, net als enkele datasets.

Je leert in dit onderwerp

- wat een klokvormige frequentieverdeling is en welke vuistregels daarbij horen;
- hoe je verantwoorde uitspraken kunt doen bij statistische gegevens;
- kritisch te kijken naar uitspraken en conclusies die je tegenkomt.

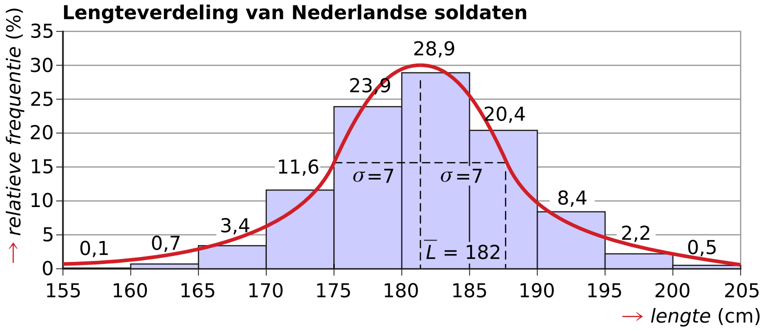
Voorkennis

- allerlei statistische diagrammen interpreteren en maken;
- centrummaten en spreidingsmaten berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de lengteverdeling van een grote groep mannelijke Nederlandse soldaten.

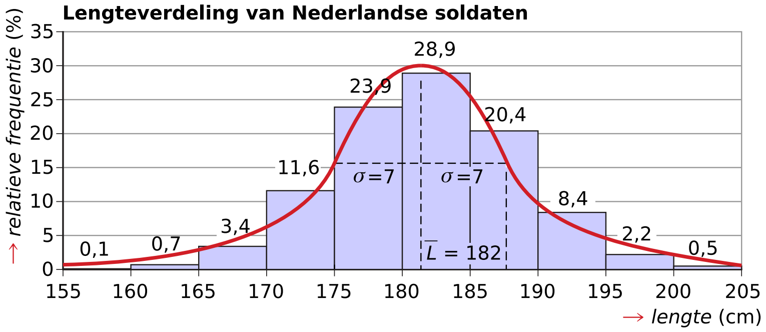


Figuur 5.1

Kun je verklaren waarom de lengtes van zo'n grote groep mannen de vorm van het silhouet van zo'n kerkklok heeft? Waar zit het gemiddelde?

Uitleg

Bekijk de lengteverdeling van een grote groep mannelijke Nederlandse soldaten.



Figuur 5.2

Het histogram of de bijbehorende frequentiepolygoon heeft een klokvorm. Bij veel continue variabelen, bijvoorbeeld bij gewicht, lengte of inhoud, krijg je zo'n klokvormige frequentieverdeling. Je kunt met behulp van gemiddelde en standaardafwijking twee algemene uitspraken doen. Deze uitspraken zijn vuistregels.

Vuistregel 1: tussen $\overline{x} - \sigma_x$ en $\overline{x} + \sigma_x$ zit 68% van de waarnemingsgetallen.

Vuistregel 2: tussen $\overline{x} - 2\sigma_x$ en $\overline{x} + 2\sigma_x$ zit 95% van de waarnemingsgetallen.

Deze uitspraken betreffen alleen de steekproef (beschrijvende statistiek). 68% van deze soldaten heeft een lengte tussen 175 cm en 189 cm. 95% van deze soldaten heeft een lengte tussen 168 cm en 196 cm.

Vaak wordt verondersteld dat deze gegevens voor de hele populatie Nederlandse jonge mannen gelden en dat die uitspraken op hen van toepassing zijn. Uitspraken doen over een populatie op grond van een steekproef kan alleen als die steekproef representatief is. En dat is hier nog maar de vraag.

Statistiek lijkt spijkerhard, maar je kunt sneller misleid worden door diagrammen en cijfers dan je denkt. Soms wordt een deel van een diagram of van een as weggelaten. Of de cijfers en uitspraken gaan over een te kleine of verkeerde steekproef. Wees altijd op je hoede met cijfers en diagrammen bij een onderzoek. Je hoort immers zelden dat uit een onderzoek geen conclusies getrokken kunnen of mogen worden.

Opgave 1

Gebruik de lengteverdeling van 90 meisjes die je vindt in het bestand **Lengteverdeling 90 meisjes**.

a Maak van deze verdeling een frequentiepolygoon.

De frequentieverdeling is niet een perfecte klokvorm, omdat de steekproef veel te klein is.

b Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de gegeven lengteverdeling.

c Onderzoek of voor de gegeven lengteverdeling de 68%-vuistregel geldt.

d Onderzoek of voor de gegeven lengteverdeling de 95%-vuistregel geldt.

Opgave 2

Op grond van een representatieve steekproef uit alle Nederlandse meisjes heeft een onderzoeksbureau geconcludeerd dat hun lengtes klokvormig verdeeld zijn met een gemiddelde lengte van 172 cm en een standaardafwijking van 6 cm.

a Bepaal met behulp van de vuistregels hoeveel procent van de Nederlandse meisjes langer is dan $172 + 6 = 178$ cm.

b Bepaal hoeveel procent korter is dan $172 - 2 \cdot 6 = 160$ cm.

Opgave 3

Je ziet hier een aantal conclusies uit de statistische gegevens. Geef commentaar op de uitspraken.

a In 1971 nam de NAVO 49% van alle militaire uitgaven voor haar rekening. In 1981 was dat nog 43%. De militaire uitgaven van de NAVO zijn in 1981 lager dan in 1971.

b Van alle verkeersongelukken op deze weg blijkt bij 25% alcohol een rol te hebben gespeeld. Rijden na het drinken van alcohol is veiliger dan rijden zonder alcohol.

c Wasmiddel XXX wast 20% witter dan alle andere wasmiddelen.

d School A heeft hogere percentages geslaagden dan school B. Je kunt beter op school A zitten als je snel wilt slagen.

Theorie en voorbeelden

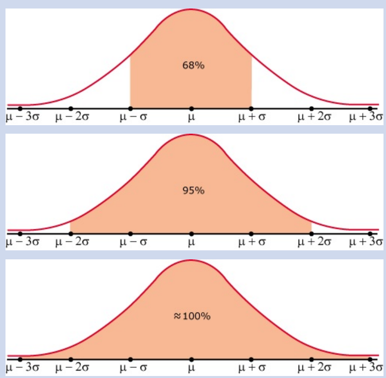
Om te onthouden

In elk deel van een boxplot zit 25% van de waarnemingen. Wanneer het histogram of de bijbehorende frequentiepolygoon bij benadering **klokvormig** is, zijn het gemiddelde $\overline{x}$ en de standaardafwijking σ_x goede karakteristieken van de frequentieverdeling. Er gelden vuistregels.

- Vuistregel 1: tussen $\overline{x} - \sigma_x$ en $\overline{x} + \sigma_x$ zit 68% van de waarnemingsgetallen.
- Vuistregel 2: tussen $\overline{x} - 2\sigma_x$ en $\overline{x} + 2\sigma_x$ zit 95% van de waarnemingsgetallen.
- Vuistregel 3: tussen $\overline{x} - 3\sigma_x$ en $\overline{x} + 3\sigma_x$ zit bijna 100% van de waarnemingsgetallen.

Deze uitspraken betreffen de steekproef.

De uitspraken die je doet over je steekproef zijn alleen geldig voor de hele populatie als de steekproef een goede afspiegeling van die populatie is, dus **representatief** is. De uitspraken zijn betrouwbaarder als de steekproef voldoende groot is.



Figuur 5.3

Voorbeeld 1

De lengteverdeling van Nederlandse mannen boven de 20 jaar is bij benadering klokvormig. De gemiddelde lengte is 180,3 cm. De standaardafwijking is 7,74 cm.
Tussen welke twee lengtes zit volgens de vuistregels 68% van de Nederlandse mannen? En 95%?

Antwoord

Volgens de vuistregels zit 68% van deze mannen tussen de gemiddelde lengte min de standaardafwijking en de gemiddelde lengte plus de standaardafwijking. Dus 68% heeft een lengte tussen 172,6 cm en 188,0 cm.

De 95%-regel zegt dat 95% van de lengtes maximaal twee keer de standaardafwijking van het gemiddelde af zit. Dus 95% van de mannen heeft een lengte tussen 164,8 cm en 195,8 cm.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Neem aan dat voor de verdeling van lengte L van de Nederlandse mannen boven de 20 jaar deze verdeling geldt.

lengte Nederlandse mannen boven 20 jaar	
lengte	*percentage*
< 163	1
$163- < 168$	3,3
$168- < 173$	11,8
$173- < 178$	18,2
$178- < 183$	26,7
$183- < 188$	23,2
$188- < 193$	9,3
$193- < 198$	4,9
> 198	1,5

Tabel 5.1

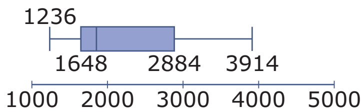
Teken een bijpassend frequentiepolygoon en reken het gemiddelde $\overline{L}$ en de standaardafwijking σ_L na. Laat zien dat er sprake is van een klokvorm.

Opgave 5

Voor een onderzoek naar de levensduur van een bepaald type batterijen is op basis van 200 waarnemingen een boxplot getekend.

Geef aan welke van de volgende beweringen waar zijn. Licht je antwoord toe.

A. Minimaal 25% van de batterijen gaat langer dan 3000 uur mee.
B. Meer dan 50% van de batterijen heeft een levensduur van minder dan 2000 uur.
C. De batterijen gaan gegarandeerd 1200 uur mee.
D. Minstens 75% van de batterijen werkt nog na 1600 uur.



Figuur 5.4

Opgave 6

Op de verpakking van een pak koffie staat een inhoud van 250 gram. In werkelijkheid is dat iets meer of minder. Het gewicht van 1000 pakken koffie wordt gemeten, zonder verpakking. Uit de metingen blijkt een gemiddeld gewicht van 254 gram. De standaardafwijking is 4 gram. Ga ervan uit dat de verdeling van het gewicht klokvormig is.

Geef aan welke uitspraken volgens de vuistregels waar zijn.

A. Ongeveer 95% van de pakken koffie heeft een gewicht tussen 246 en 262 gram.
B. Ongeveer 5% van de pakken koffie heeft een gewicht onder 246 gram.
C. Ongeveer 16% van de pakken koffie heeft minder dan de beloofde 250 gram inhoud.
D. Ongeveer 50% van de pakken koffie heeft een gewicht van 250 gram.
E. Minimaal 75% van de pakken koffie heeft een gewicht van meer dan 250 gram.

Voorbeeld 2

Voorbeelden van misleidingen.

Belgen spreken langzamer dan Nederlanders De schok was groot toen uit een artikel in Onze Taal bleek dat Belgen beduidend langzamer praten dan Nederlanders. In de Randstad haalt men 5,42 lettergrepen per seconde, in Oost-Vlaanderen slechts 4,43. Sommige mensen gingen het meteen controleren. De spreeksnelheid van 21 miljoen Nederlandssprekenden werd bepaald door maar liefst 160 leraren en leraressen een stukje te laten opzeggen. Er waren acht groepen, dus twintig sprekers per groep. En dan werd ook nog gerapporteerd over het verschil tussen jong en oud, man en vrouw. Eén oude Antwerpse stotteraarster, en de achterstand is hopeloos. Onderzoeker Guy De Pauw maakte het allemaal nog erger door een dag later te verklaren dat de verschillen niet significant waren. Alsof dat er nog toe doet, met zo'n steekproef. *bron: vanmaanen.org, 2004, artikel Onze Taal, Hans van Maanen, wetenschapsjournalist*

Tabel 5.2

Vitalinea misleidt consument
In de nieuwe reclamespots voor het aanprijzen van Vitalinea van Danone gebruiken de reclameboys wel heel trieste, misleidende statistieken, waar de fouten zo van afdruipen. De reclame claimt dat 'Tijdens een studie bij 400 Belgen, is gebleken dat 80% van de deelnemers gemiddeld 3,6 kilogram afvalt.' Misschien valt je frank niet direct, maar deze statistiek wil helemaal niks zeggen. Waarom geven de onderzoekers het gemiddelde gewichtsverlies van slechts 80% van de deelnemers? Waarom niet van de volle 100%? Waar zijn de statistieken van die andere 20% deelnemers plots heen? Wat mij betreft zijn deze 20% mensen die niet meegeteld zijn allemaal 30 kilogram bijgekomen door het eten van Vitalinea, en komt het gemiddelde dus uit op een gewichtstoename bij het eten van Vitalinea. Het enige dat ik kan concluderen van de reclame, is dat als je wil vermageren, Vitalinea niet het goede product is. Simpele logica.
bron: anthony.liekens.net, 2005, Anthony Liekens

Tabel 5.3

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe slordige statistieken je kunnen misleiden en/of hoe soms slordige conclusies worden getrokken. Geef bij elk van de voorbeelden kort commentaar.

Opgave 8

Wij Nederlanders, we doen nauwelijks iets anders dan fietsen. Kijk maar.

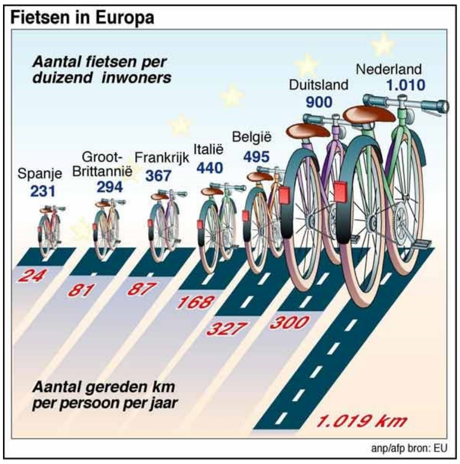
a Welk land heeft vermoedelijk de meeste fietsen?

b Welke informatie ontbreekt om dit met zekerheid te kunnen zeggen?

c Hoeveel kilometer fietsen we per persoon in Nederland per jaar gemiddeld?

d Het rechter deel van de figuur is eigenlijk een staafdiagram. De lengte van de staaf past dan bij de grootte van de waarde die hij aangeeft. Klopt dat hier wel? Licht je antwoord toe met een voorbeeld.

e Waarom zijn, zo bekeken, de fietsen ook een staafdiagram? Klopt dat staafdiagram dan?



Figuur 5.5

Verwerken

Opgave 9

Bekijk het bestand **Gegevens 36 mannen**.

Op het moment van deze steekproef van 36 was de gemiddelde lengte van alle Nederlandse mannen 177,6 cm met een standaardafwijking van 6,6 cm. De verdeling van deze lengtes had een zuivere klokvorm.

gegevens van 36 mannen											
nr	*leeftijd* (j)	*lengte* (cm)	*gewicht* (kg)	*nr*	*leeftijd* (j)	*lengte* (cm)	*gewicht* (kg)	nr	*leeftijd* (j)	*lengte* (cm)	*gewicht* (kg)
i	L	l	G	i	L	l	G	i	L	l	G
1	20	180	95	13	46	180	95	25	67	171	68
2	23	184,5	91	14	47	177,5	75	26	67	170	81
3	23	180,5	90	15	51	196	86	27	68	169	97
4	29	169	91	16	52	188,5	93	28	68	176	72
5	30	176	80	17	53	170	85	29	71	171	84
6	33	182	82	18	54	178,5	77	30	71	180,5	75
7	36	182,5	85	19	56	172,5	74	31	71	172	77
8	36	176,5	74	20	61	164	85	32	74	171	77
9	38	180	73	21	61	181	89	33	75	183	95
10	40	190,5	112	22	61	173	95	34	75	172,5	74
11	41	184	89	23	61	181	89	35	82	173	66
12	44	179	75	24	63	181,5	100	36	84	175	90

Tabel 5.4

a Tussen welke twee waarden zou 68% van de lengtes van de 36 mannen moeten liggen als de steekproef representatief is?

b Ga na of deze steekproef voldoet aan de eerste vuistregel van de klokvormige frequentieverdeling.

c Tussen welke twee grenzen zou ongeveer 95% van de lengtes van de 36 mannen moeten liggen als de steekproef representatief is?

d Ga na of deze steekproef voldoet aan de tweede vuistregel van klokvormige frequentieverdeling. Bekijk daarvoor de tabel met gegevens van 36 mannen.

Opgave 10

Een kledingzaak maakt broeken die op maat afgeknipt worden. Zo zijn ze voor iedereen precies lang genoeg. Maar hoe langer de broek vóór het afknippen, hoe duurder en hoe meer stof er wordt weggegooid. De ontwerpers hebben laten onderzoeken wat de beenlengte van Nederlandse mannen is. Die is klokvormig verdeeld met gemiddelde 80 cm en standaardafwijking 5 cm. De langst gemeten lengte is 95 cm.

a Alle broeken kunnen zo lang worden als de langste man nodig heeft. Hoe lang worden de broeken dan? Noem een bezwaar tegen dit idee.

Een andere mogelijkheid is om de lengte van de broek zo te kiezen dat 84% van de mannen erin past.

b Hoe lang moet de broek dan worden?

De damesafdeling van de kledingzaak wil ook zulke broeken. De verdeling van de beenlengtes van vrouwen is ook klokvormig, met $\overline{x} = 74$ cm en $\sigma_x = 4$ cm.

c Hoe lang moeten de vrouwenbroeken zijn zodat 84% van de vrouwen erin past?

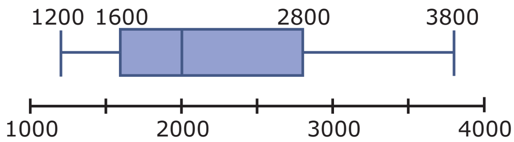
Opgave 11

In een bedrijf is het modale salaris ongeveer € 1600,00 per maand. Het gemiddelde salaris is € 1800,00 per maand. Het hoogste salaris is dat van de algemeen directeur. In de boxplot zie je de verdeling van de salarissen over alle 120 mensen die bij het bedrijf werken. Bereken in de volgende gevallen steeds het modale salaris en het gemiddelde salaris en teken de nieuwe boxplot. Doe voor elk van de drie situaties een kenmerkende uitspraak over de gevolgen van de maatregel voor de laagstbetaalde 25% werknemers.

a Alle medewerkers krijgen een loonsverhoging van 3%.

b Alle medewerkers krijgen een maandelijkse toeslag van € 200,00.

c Het salaris van de algemeen directeur wordt met € 800,00 per maand verhoogd.



Figuur 5.6

Opgave 12

Bekijk de gegevens van pasgeboren kinderen in Nederland. De verdeling is klokvormig. Doe vier uitspraken met behulp van de vuistregels over geboortegewicht en geboortelengte.

Geboortelengte in cm							
< 45,5	45,5 -< 47,5	47,5 -< 49,5	49,5 -< 51,5	51,5 -< 53,5	53,5 -< 55,5	> 55,5	
3,7	6,6	18,1	37,5	22,9	6,9	4,2	
Geboortegewicht in kg							
< 1,5	1,5 -< 2,0	2,0 -< 2,5	2,5 -< 3,0	3,0 -< 3,5	3,5 -< 4,0	4,0 -< 4,5	> 4,5
0,8	1,0	3,4	12,4	32,2	33,6	12,6	4,0

Figuur 5.7

Opgave 13

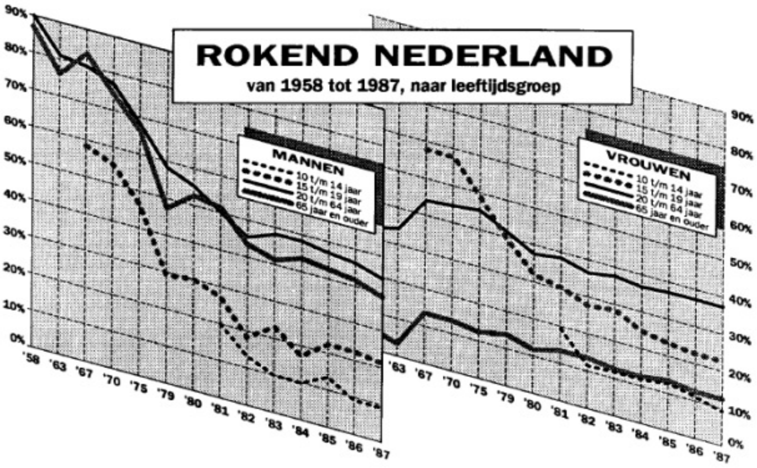
Open het Excel bestand **Patiëntgegevens**.

a Bereken de gemiddelde lengte van zowel de vrouwelijke als de mannelijke patiënten en de bijbehorende standaardafwijkingen. Is er verschil tussen de lengtes van mannen en vrouwen?

b Onderzoek of 50% van de mannen langer is dan de 84% kortste vrouwelijke patiënten.

Opgave 14

De lijndiagrammen komen uit een krantenartikel uit 1988. Volgens de linker grafiek rookte in 1958 nog 90% van de mannen in de leeftijdsgroep van 20 tot 65 jaar. In 1987 was dit gedaald tot 43%. Deze sterke daling wordt door de tekenaar op een misleidende wijze benadrukt.



Figuur 5.8

a Wat veroorzaakt deze misleiding?

b Bekijk het diagram van de mannen van 15 tot 20 jaar. De grafiek ziet er ook voor de jaren 1982 tot 1987 dalend uit. Daalt het percentage rokers van die categorie ook werkelijk?

c Bij welke van deze acht diagrammen is er vrijwel nooit van daling sprake?

In het krantenartikel stond:

Een overzicht van de rookgewoonten in Nederland in 1987 gaf, net als in de jaren daarvoor, opnieuw een daling te zien van het aantal rokers in ons land. Hoewel de betrekkelijk snelle daling in de jaren zeventig en het begin van de jaren tachtig is afgenomen, heeft die tendens zich de afgelopen drie jaar gestabiliseerd op een daling van 1% per jaar. Kon in 1958 worden becijferd dat 60% van de Nederlandse mannen en vrouwen in de leeftijdsgroep van 15 tot 65 jaar rookte, volgens cijfers van de Stichting Volksgezondheid en Roken was dat in 1987 afgenomen tot 37%.

Een lezer van dit artikel denkt dat die 37% niet kan kloppen. Hij redeneert zo:

- de laatste drie jaar was er een daling van 1%;
- volgens de tekst en de figuur was de daling in de periode daarvoor nog sterker;
- in 1958 was het percentage rokers 60;
- in de 29 jaar van de periode 1958-1987 is daar zeker $29 \cdot 1\% = 29\%$ van af gegaan, dus in 1987 moet het minder dan 31% zijn.

d Leg uit waarom 37% wel correct kan zijn als je de 1% daling per jaar goed interpreteert.

Toepassen

In 1947 zijn bij 5001 vrouwelijke klanten van de Bijenkorf vijftien lichaamsmaten opgemeten. Vervolgens is gekeken welke van deze maten het meest bruikbaar zijn om een **maatsysteem voor kleding** op te baseren. Bekijk een deel van de uitkomst van het onderzoek in het bestand **Statistiek Bijenkorf 1947**.

Je kunt onder andere met behulp van de **vuistregels voor klokvormige verdelingen** uitspraken doen over deze populatie. En (er van uitgaande dat deze steekproef representatief was voor de bezoeksters van de Bijenkorf in die tijd) een maatsysteem voor vrouwenkleding bedenken.

Opgave 15

Bekijk de uitkomst van het onderzoek in het bestand **Statistiek Bijenkorf 1947**.

a Bepaal de gemiddelde lengte en de bijbehorende standaardafwijking.

b Maak het bijpassende histogram voor de variabele *lengte*.
Laat zien dat er van een mooie klokvormige frequentieverdeling sprake is.

c Hoeveel lengtes verschillen meer dan één keer de standaarddeviatie van het gemiddelde? Hoeveel procent van de vrouwen betreft dit?

d Hoeveel procent van de lengtes verschilt meer dan twee keer de standaardafwijking met het gemiddelde?

e Komen deze antwoorden overeen met de vuistregels voor klokvormige verdelingen?

f Waarom heeft het geen zin om na te gaan of voor de frequentieverdeling van de gewichten de vuistregels opgaan?

Testen

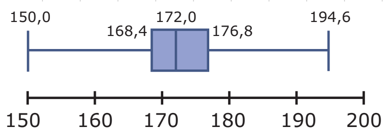
Opgave 16

Je ziet een boxplot van de lengtes van 1064 vaders van ongeveer 100 jaar geleden.

a Welke uitspraak kun je doen over de 25% kortste mannen?

b Controleer de uitspraak: 266 van deze 1064 mannen had een lengte vanaf 172,0 tot 176,8 cm.

c Geef twee redenen waarom de lengtes van deze mannen geen zuiver klokvormige frequentieverdeling hebben.



Figuur 5.9

Opgave 17

Je ziet de leeftijdsopbouw van leraren in het havo/vwo in procenten.

a Bereken voor elk van de vijf genoemde jaren het gemiddelde en de standaarddeviatie van de leeftijden van deze leraren.

b Teken de vijf frequentiepolygonen en geef die waarden daarin aan.

c Welke conclusies kun je trekken?

d De waarden van 1995 en 2000 zijn schattingen die de onderzoekers in 1994 hebben gedaan. Passen die schattingen bij de gegevens uit de voorgaande jaren?

Leraren in HAVO/VWO					
Leeftijd	*1980*	*1985*	*1990*	*1995*	*2000*
-29	20	12	8	3	6
30-34	21	19	13	8	4
35-39	18	21	19	14	9
40-44	14	18	21	20	14
45-49	11	13	19	22	20
50-54	8	10	14	18	22
55-59	5	6	5	12	17
60-64	3	1	1	3	8

Tabel 5.5

(bron: 'Onderwijswacht Gelders onderzoek' - Arbon 1994)

Opgave 18

Open het bestand **Etmaaltemperaturen De Bilt**.

a Maak een histogram van de temperaturen in de maand juli over de jaren 1755 tot 1900. Neem een klassenbreedte van 1 °C.

b Maak ook een histogram voor de periode van 1900 tot 2007.

c Vergelijk de twee histogrammen met elkaar. Kun je concluderen dat de temperatuur in de maand juli na 1900 gemiddeld hoger is dan in de voorgaande periode?

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Statistiek** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- kwalitatieve variabelen — discrete/continue kwantitatieve variabelen
- (relatieve) frequentie — frequentietabel, frequentieverdeling — somfrequenties — klassenindeling
- staafdiagram, lijndiagram, cirkeldiagram — histogram, (som-) frequentiepolygoon — steelblad diagram
- centrummaten: modus, mediaan, gemiddelde — spreidingsmaten: spreidingsbreedte, kwartielafstand, standaardafwijking — kwartielen, boxplot
- klokvormige frequentieverdeling — twee vuistregels

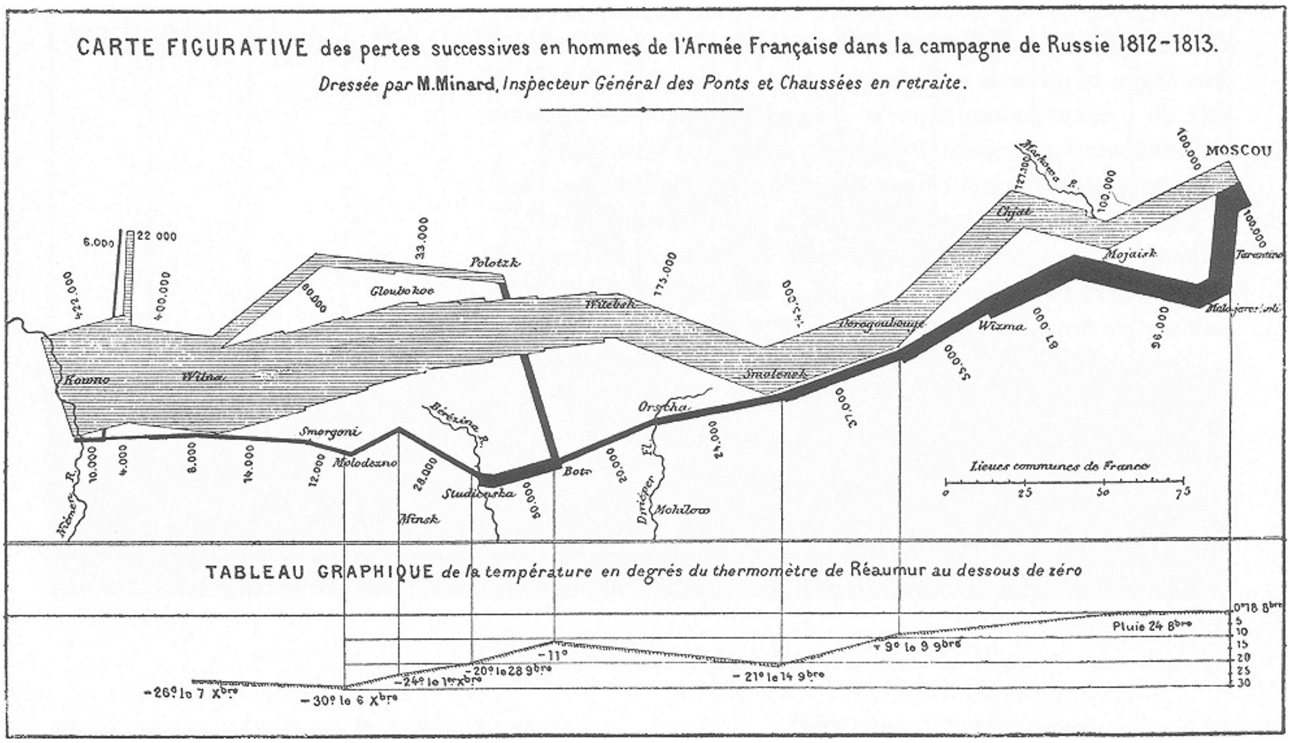
Activiteitenlijst

- representativiteit van een steekproef beoordelen — soorten statistische variabelen herkennen
- (som)frequentieverdelingen maken — werken met klassen
- diagrammen gebruiken om statistische resultaten weer te geven (ook met de GR en/of Excel)
- centrummaten en spreidingsmaten berekenen (schatten) zowel met als zonder klassenindeling (ook met de GR en/of Excel)
- uitspraken doen op grond van steekproefverdelingen

Achtergronden

De beschrijvende statistiek ontstond pas toen staten en centrale overheden een belangrijke rol gingen spelen. Immers: vooral centrale overheden zijn geïnteresseerd in globale overzichten van de bevolking, omdat het aantal mensen waarover zij verantwoordelijk is te groot is om van iedereen alles te weten. Via **Historische hoogtepunten van de grafische verwerking** kun je veel informatie vinden over het ontstaan van statistieken en de mensen die daarin een rol hebben gespeeld.

Hieronder zie je Minard's beroemde diagram van de tocht van Napoleon naar Rusland.



Figuur 6.1

Testen

Opgave 1

In 1987 verscheen het geruchtmakende boek ‘Women and Love: A Cultural Revolution in Progress’ van Shere Hite. De auteur beschreef daarin de resultaten van een onderzoek onder 100000 Noord-Amerikaanse vrouwen met betrekking tot hun relatie. Van de vrouwen die de vragenlijst terugstuurden:

- voelde 84% zich emotioneel niet goed in hun relatie;
- had 95% psychische of lichamelijke mishandeling doorstaan;
- gaf slechts 13% aan na twee jaar huwelijk nog van hun man te houden.

Om te laten zien dat Hite een representatieve steekproef had opgesteld, gebruikte ze tabellen. Hite hield onder meer rekening met ras/afkomst en de regio. Zo'n 4500 vrouwen stuurden de vragenlijst ingevuld terug aan de auteur.

a Specificeer zo nauwkeurig mogelijk welke populatie Shere Hite met behulp van deze steekproef wilde onderzoeken en geef aan met welk type statistiek Shere Hite bezig was, met beschrijvende of met verklarende statistiek.

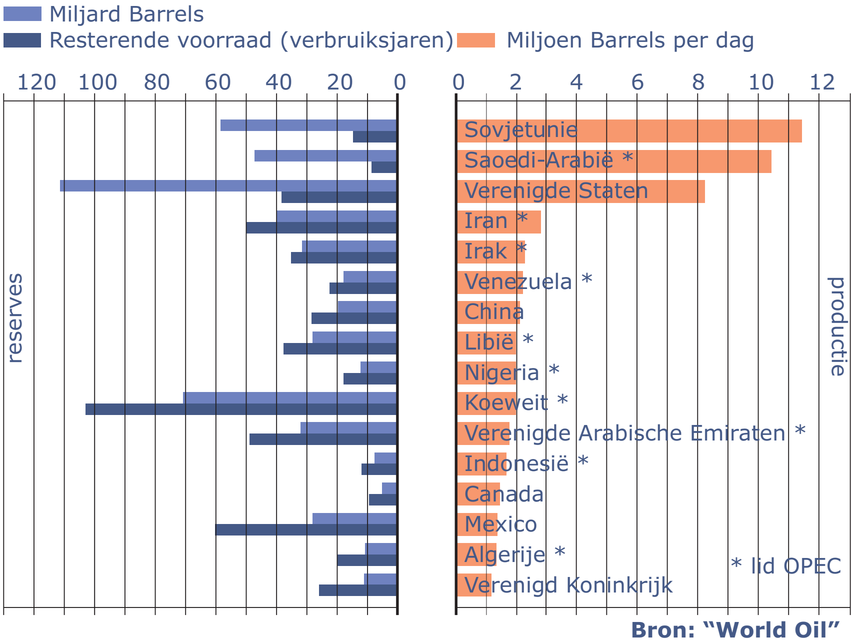
b Shere Hite heeft rekening gehouden met jaarlijks inkomen, type woonplaats, regio en met ras/afkomst van de onderzochte vrouwen. Op welke kenmerken had ze haar steekproef nog verder kunnen uitsplitsen om de steekproef nog representatiever te maken? Noem er twee.

c Uit de gegevens die je nu over dit onderzoek hebt, kun je niet afleiden of deze steekproef aselect is. Definieer de term aselecte steekproef voor dit onderzoek.

d Kon Shere Hite met 100% zekerheid weten dat 87% van de vrouwen na twee jaar huwelijk niet meer van hun man hield? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

In de figuur vind je gegevens over de oliereserves en de olieproductie uit 'Aardolie, de halve wereld draait erop', van de Stichting School en Bedrijf.



Figuur 6.2

a Voor welk type variabele zie je staafdiagrammen omtrent olie afgebeeld?

b Hoeveel procent van de reserves, gerekend in vaten, is in handen van de OPEC-landen?

c Hoe groot is de productieproportie van Rusland (vroeger: Sovjetunie)?

d Geef zowel de reserves (in miljarden vaten) als de productie (in miljoenen vaten per dag) weer in een cirkeldiagram. Neem als categorieën de OPEC-landen, de Verenigde Staten, Rusland en overig.

e Vergelijk de oliereserves en de olieproductie met elkaar op basis van je cirkeldiagrammen.

Opgave 3

Op de verpakking van een literpak melk staat 'Inhoud 1 liter'. In werkelijkheid wil dat nog wel eens iets meer of minder zijn. Uit metingen blijkt een gemiddelde inhoud van $1{,}002$ liter. De standaardafwijking is $0{,}004$ liter. De verdeling van de inhoud is klokvormig. Geef met behulp van de vuistregels bij de uitspraken aan of ze waar of niet waar zijn.

a Ongeveer 95% van de pakken melk heeft een inhoud van meer dan $1{,}010$ liter.

b Ongeveer 32% van de pakken melk bevat minder dan $0{,}998$ of meer dan $1{,}006$ liter.

c Ongeveer 50% van de pakken melk bevat $1,002$ liter.

Stel je voor dat er iets mis is met de vulmachine van de melkpakken en dat de frequentieverdeling van de inhoud opeens scheef naar rechts wordt in plaats van klokvormig.

d Beargumenteer of de volgende uitspraak wel of niet met zekerheid kan worden gedaan:

'Méér dan 50% van de melkpakken heeft een inhoud die groter is dan het (nieuwe) gemiddelde.'

Opgave 4

De tabel geeft de leeftijden van het personeel van twee bedrijven.

leeftijden van het personeel			
bedrijf A		bedrijf B	
leeftijd	*aantal*	*leeftijd*	*aantal*
$15- < 18$	89	$15- < 18$	67
$18- < 25$	133	$18- < 25$	205
$25- < 40$	414	$25- < 40$	801
$40- < 55$	249	$40- < 55$	562
$55- < 60$	68	$55- < 60$	265
$60- < 65$	47	$60- < 65$	100
	1000		2000

Tabel 6.1

a De twee bedrijven willen fuseren. Werknemers vanaf 60 jaar kunnen gebruikmaken van een afvloeiingsregeling.
Hoeveel procent van de werknemers van het gefuseerde bedrijf kan daar gebruik van maken?

b Wat is er (theoretisch) mis met de frequentietabellen van bedrijf A en bedrijf B?

c Leg uit waarom een cumulatieve relatieve frequentiepolygoon van dergelijke frequentietabellen de zuiverste indruk geeft. Waarom geven een (relatieve) frequentiepolygoon, een histogram en een cirkeldiagram hier een vertekend beeld?

d Wil je deze twee frequentietabellen alleen gebruiken om ze met elkaar te vergelijken, dan doen de bezwaren er minder toe. Teken de relatieve histogrammen van beide bedrijven met gebruikmaking van de gegeven klassenindeling en benoem de verschillen en overeenkomsten tussen beide frequentieverdelingen die je uit deze histogrammen mag en kunt afleiden.

Opgave 5

Uit onderzoek van het gemengde boerenbedrijf bleek het houden van kippen een belangrijke rol te spelen bij het tot stand komen van het inkomen van deze boeren. Daarom werd de boeren gevraagd naar het aantal kippen op hun bedrijf.

aantal kippen	*aantal bedrijven*	*aantal kippen*	*aantal bedrijven*
1 – 10	5	101 – 110	123
11 – 20	12	111 – 120	101
21 – 30	19	121 – 130	85
31 – 40	24	131 – 140	79
41 – 50	33	141 – 150	60
51 – 60	52	151 – 160	43
61 – 70	69	161 – 170	21
71 – 80	75	171 – 180	9
81 – 90	108	181 – 190	4
91 – 100	120	191 – 200	2

Tabel 6.2

a Met welk type variabele heb je hier te maken?

b Teken een cumulatief relatief frequentiepolygoon.

c Schat de mediaan en de beide kwartielen. Teken een boxplot bij deze gegevens.

d Je kunt het gemiddelde en de standaarddeviatie schatten vanuit de klassenmiddens en de frequentietabel. Laat zien hoe dat gaat en geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

e Als het aantal kippen op een gemengd boerenbedrijf een klokvormige verdeling kent, hoeveel kippen hebben dan de $2{,}5\%$ gemengde boerenbedrijven met de meeste kippen?

Toepassen

Opgave 6: Cooper-test

In de sport wordt veel met statistieken gewerkt. Er wordt namelijk nogal wat gemeten... De Cooper-test is een bekende manier om de conditie te meten. Je meet dan hoever je kunt hardlopen in 12 minuten. En de afgelegde afstand zegt iets over je fitheid.

Dit **XL-bestand met Coopertest resultaten** van een groep scholieren levert een verzameling basisgegevens. In deze tabel zie je hoeveel iemand onder de 30 jaar kan lopen met een conditie die slecht / redelijk / goed / zeer goed is.

	vrouwen	*mannen*
slecht	$0 - < 1800$	$0 - < 2000$
redelijk	$1800 - < 2200$	$2000 - < 2400$
goed	$2200 - < 2700$	$2400 - < 2800$
zeer goed	> 2700	> 2800

Tabel 6.3

Nu kun je nagaan hoeveel procent van deze groep scholieren in welke categorie valt, voor mannen en vrouwen afzonderlijk of voor beide groepen samen. Ook kun je de gemiddelde score, de standaardafwijking, e.d., berekenen. En nagaan of er van een klokvormige verdeling sprake is, de vuistregels kloppen... Maar het is natuurlijk leuker om dit met resultaten van de eigen school te doen.

In 2004 volbrachten 182 leerlingen in klas 4 en 5 een Coopertest. Van de leerlingen die de Coopertest (12 minutenloop) uitliepen is de afgelegde afstand genoteerd. Misschien kun je ook werken met gegevens van je eigen school!

a Welke klassenindeling zou je kiezen voor de vrouwen en welke voor de mannen om te kunnen concluderen of de conditie slecht, redelijk, goed of zeer goed is?

b Verwerk de gegevens voor vrouwen en mannen apart in twee afzonderlijke histogrammen.

c Verwerk de gegevens voor de vrouwen in een cirkeldiagram. Verwerk de gegevens voor de mannen in een cirkeldiagram.

d Welk percentage vrouwen heeft een goede of zeer goede conditie? Welk percentage mannen heeft een goede of zeer goede conditie?

e Typeer de afgelegde afstanden van de mannen en de vrouwen bij de Coopertest in gemiddelde, modus en mediaan.

f Teken van de resultaten van de mannen en van de vrouwen een boxplot. Bereken de kwartielafstand en de spreidingsbreedte.

g Doe een uitspraak op grond van beide boxplots waarin je de conditie van de mannen en de vrouwen met elkaar vergelijkt.

h Bereken voor beide groepen de standaardafwijking.

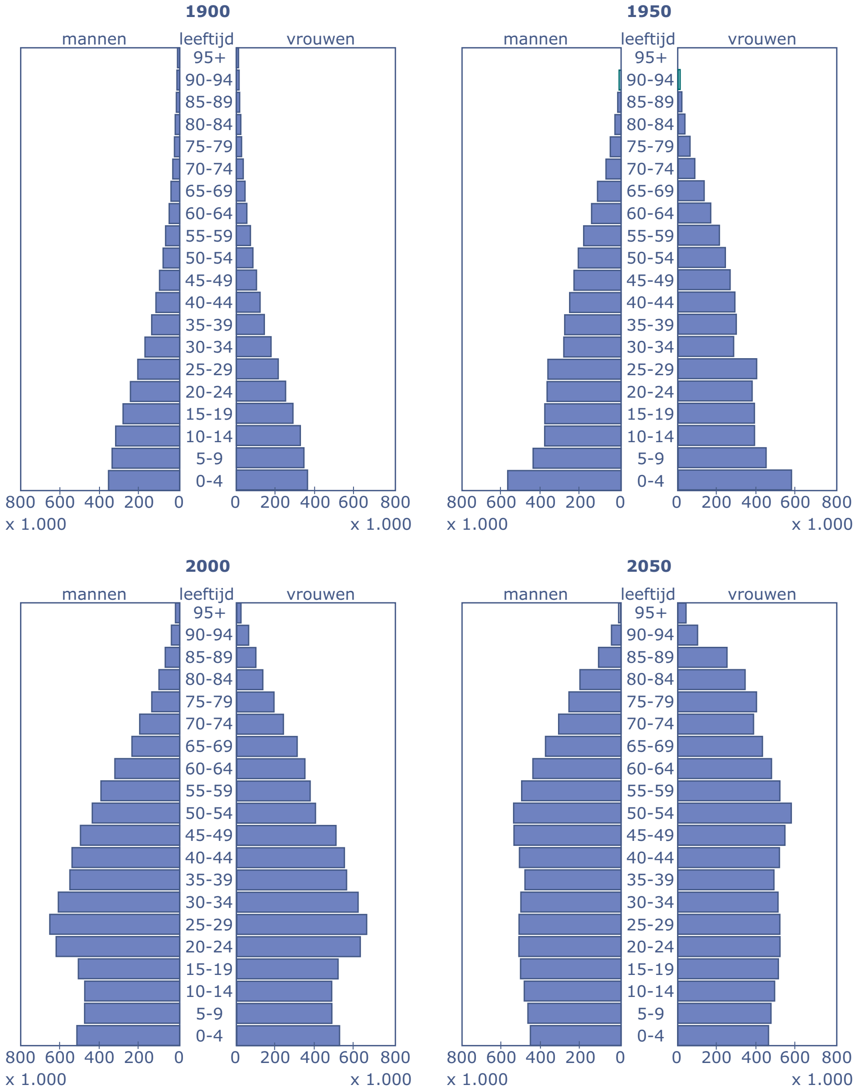
i Van hoeveel procent van de mannen en van hoeveel procent van de vrouwen wijkt de gelopen afstand meer dan de standaardafwijking van het gemiddelde af?

j Van hoeveel procent van de mannen en van hoeveel procent van de vrouwen wijkt de gelopen afstand meer dan twee keer de standaardafwijking van het gemiddelde af?

k Doe een uitspraak op grond van deze laatste gegevens waarin je de conditie van de mannen en de vrouwen met elkaar vergelijkt.

Opgave 7: Leeftijdsdiagrammen NL

Je ziet hier vier leeftijdsdiagrammen van Nederland.



Bron: Bevolkingsprognose Midden Variant

Figuur 6.3

a Wat voor soort diagrammen zijn dit?

b Hoeveel kinderen van 0−4 waren er in 1900 ongeveer? En in 1950?

c In de jaren rond 1950 zijn er nogal veel kinderen geboren. Waaraan kun je dat zien?

d Waaraan kun je zien dat Nederland aan het vergrijzen is?

e Waaraan kun je zien dat vrouwen gemiddeld ouder worden dan mannen?

f De belangrijkste centrummaat bij een leeftijddiagram is de modale klasse. Welke klasse was in 1900 de modale klasse? En in 2050?

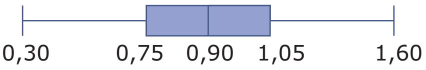
g Welke gevolgen heeft het feit dat de modale klasse steeds hoger komt te liggen?

h De bevolkingsopbouw van Nederland is ook goed zichtbaar te maken in boxplots. Teken bij het leeftijdsdiagram van 1900 een boxplot (mannen en vrouwen samen). Doe dat ook bij het geschatte leeftijdsdiagram van 2050. Noem minstens drie karakteristieke verschillen en geef er verklaringen bij.

Examen

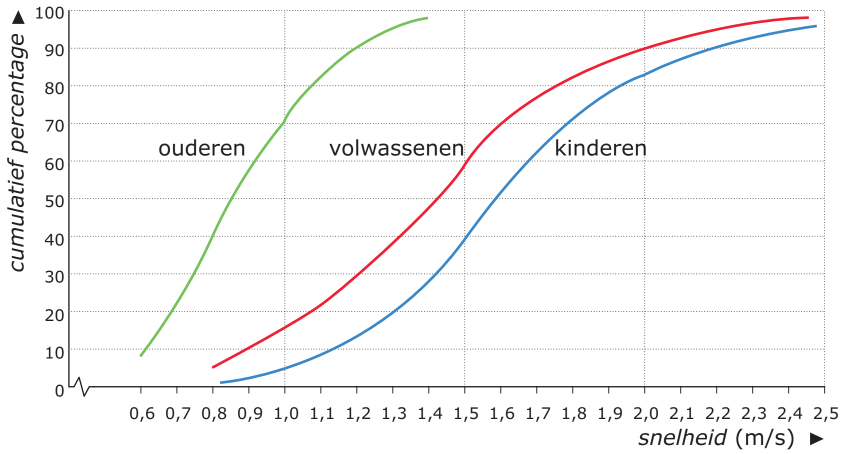
Opgave 8: Oversteken

Men heeft onderzoek gedaan naar de loopsnelheden van voetgangers. Bij dit onderzoek zijn de voetgangers in drie leeftijdsgroepen verdeeld, namelijk kinderen, volwassenen en ouderen. Met de gegevens uit het onderzoek heeft men een boxplot gemaakt voor de loopsnelheden van de groep ouderen.



Figuur 6.4

De snelheden die bij de boxplot vermeld zijn, zijn in meters per seconde. Meer gedetailleerde informatie over de groepen zie je in de volgende figuur.

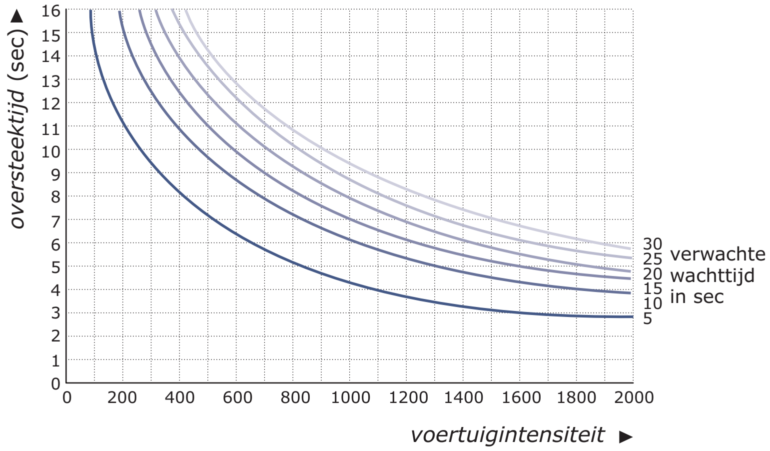


Figuur 6.5

Op de verticale as staat een cumulatief percentage; dit houdt in dat afgelezen kan worden hoeveel procent van de mensen van de verschillende groepen met de aangegeven snelheid of een lagere snelheid loopt. Zo kun je bijvoorbeeld aflezen dat voor de groep ouderen bij een snelheid van 1 m/s het cumulatieve percentage bijna 70 is. Dus bijna 70% van de ouderen loopt met een snelheid van 1 m/s of langzamer. Aan de hand van onder andere deze gegevens wordt een model gemaakt voor de tijd die de mensen nodig hebben om een weg over te steken. Neem aan dat de loopsnelheden ook voor het oversteken van een weg gelden. We bekijken het oversteken van een 20 meter brede weg. Er wordt recht overgestoken, dus men loopt daarbij 20 m.

a Maak met behulp van de gegevens een boxplot voor de oversteektijden van ouderen. Licht je werkwijze toe.

Tot nu toe hebben we alleen gekeken naar de tijd van oversteken zelf. Als je bij een weg aankomt, kun je niet altijd meteen oversteken; soms moet je een aantal seconden wachten. Deze wachttijd hangt samen met de drukte op de weg en de benodigde oversteektijd. De drukte op de weg wordt aangegeven met het aantal voertuigen dat per uur passeert (voertuigenintensiteit). Omdat ouderen in het algemeen minder snel lopen, zal voor deze groep de benodigde oversteektijd en dus ook de wachttijd groter zijn dan bijvoorbeeld voor kinderen. Er is een model gemaakt voor de samenhang tussen oversteektijd, voertuigenintensiteit en verwachte wachttijd.



Figuur 6.6

In de figuur hierboven is dat voor zes verschillende wachttijden in beeld gebracht. Uit deze figuur is bijvoorbeeld af te lezen dat volgens dit model bij een oversteektijd van 9 s en een voertuigenintensiteit van 700 voertuigen per uur rekening gehouden moet worden met een wachttijd van 15 s.

b Teken de grafiek die het verband aangeeft tussen de oversteektijd en de verwachte wachttijd bij een voertuigenintensiteit van 800. Teken de grafiek alleen voor wachttijden van 5 tot en met 30 s.

We willen een beeld krijgen van de totale tijd die een rol speelt bij het oversteken van een weg van 20 m breed en een voertuigenintensiteit van 800 voertuigen per uur. We spreken dan over de somtijd. Als we iemands verwachte wachttijd en zijn oversteektijd optellen, krijgen we zijn somtijd. We bekijken nu de groep van volwassenen. De hoogste snelheid die in deze groep is waargenomen is 2,6 m/s.

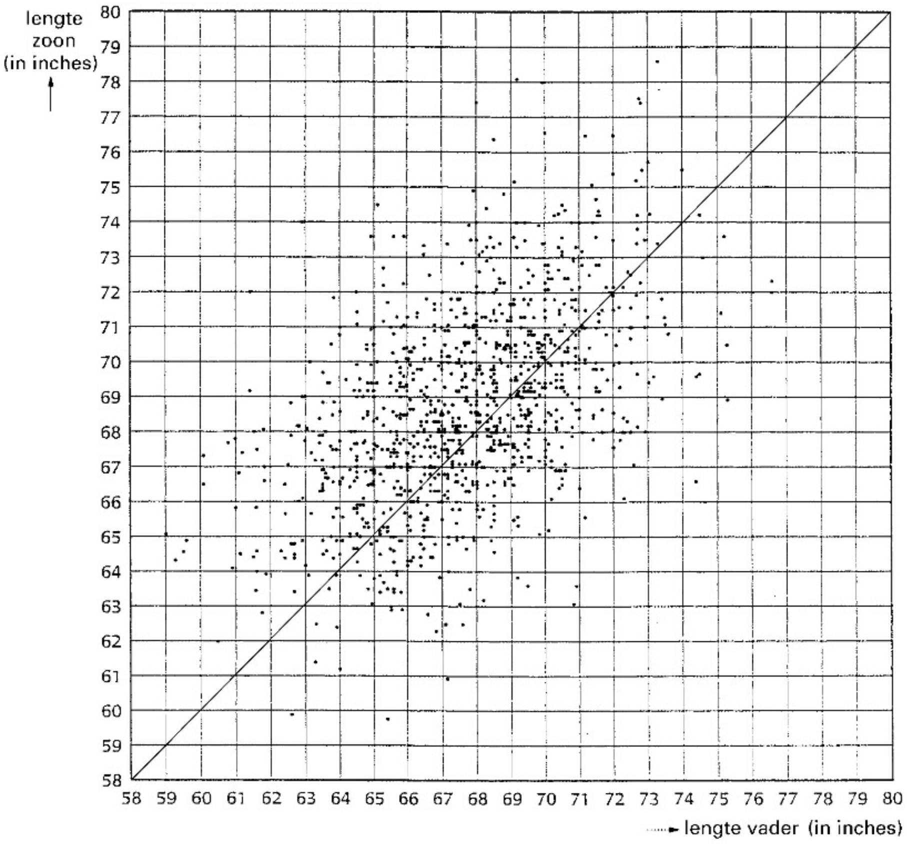
c Wat is de langste somtijd en wat is de kortste somtijd van de 10% snelste volwassenen? Licht je antwoord toe.

Opgave 9: Vaders en zonen

De Engelsman Karl Pearson was een van de grondleggers van de moderne statistiek. Hij heeft zich vaak bezig gehouden met statistiek over biologische onderwerpen. Ongeveer een eeuw geleden onderzocht hij, samen met zijn collega Alice Lee, of in Engeland zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders. Zij vergeleken de lengtes van 1064 zonen en hun vaders. De zonen studeerden allen aan een Londense universiteit.

a Is hier sprake van een aselecte steekproef? Licht je antwoord toe.

Hier zie je een overzicht van de resultaten. Elke stip stelt één vader-zoon-paar voor. De lengte van de vader staat op de horizontale as, de lengte van de zoon op de verticale as. De lengtes zijn gegeven in inches (1 inch = $2,54$ cm). In de figuur is een lijn getekend. Als een stip op deze lijn ligt, dan zijn de vader en de zoon precies even lang. We noemen een vader en zijn zoon ongeveer even lang als ze minder dan 2 inch in lengte verschillen.



Figuur 6.7

b Teken in de figuur op de **bijlage** het gebied waarin de punten liggen die horen bij vaders en zonen die ongeveer even lang zijn. Licht je werkwijze toe.

c Kun je met behulp van het getekende gebied concluderen dat de zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders? Licht je antwoord toe.

Op de **bijlage** zie je een boxplot van de lengtes van de 1064 vaders. De vijf kenmerkende getallen van de boxplot staan erbij. Op de bijlage vind je ook een lijst met de lengtes van alle 1064 zonen. De getallen in deze lijst staan op volgorde van grootte. Na iedere 10 getallen staat een streepje. Na iedere 50 getallen staat bij het streepje hoeveel getallen er tot daar staan.

d Teken de boxplot van de lengtes van de zonen. Schrijf de vijf kenmerkende getallen van de boxplot erbij.

Het onderzoek dat bovenstaande getallen opleverde, is ongeveer honderd jaar geleden gedaan. In die tijd hadden jonge mannen een gemiddelde lengte van $68{,}6$ inch. Dat is niet zo groot want $68{,}6$ inch is maar 174 cm (1 inch = $2{,}54$ cm). Tegenwoordig is de helft van de jonge mannen langer dan 182 cm. Honderd jaar geleden was veel minder dan de helft van de jonge mannen zo lang. De lengte was toen klokvormig verdeeld met een gemiddelde van $68{,}6$ inch en een standaardafwijking van $2{,}7$ inch.

e Onderzoek met de vuistregels of het aantal jonge mannen langer dan 182 cm in die tijd groter of kleiner dan 16% van het totaal aantal jonge mannen was.

(bron: examen wiskunde A havo 2003, eerste tijdvak, aangepast)

2

Machtsfuncties

2.1 Machten

Inleiding

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$. Dit is een voorbeeld van een machtsverband, want de variabele h moet tot de macht $\frac{1}{2}$ worden verheven. Je kunt ook zeggen dat h een machtsfunctie is van a. Je maakt in dit onderdeel met machtsfuncties kennis.

Je leert in dit onderwerp

- wat een machtsverband en een machtsfunctie is;
- bij een machtsverband heen en terug te rekenen;
- hoe bij een machtsverband de verandering van de éne variabele samenhangt met die van de andere.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen en ongelijkheden oplossen.

Verkennen

Opgave V1

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$.

Geef van de volgende beweringen aan of ze waar zijn of niet, en geef een uitleg.

a Als je op een toren van 100 m hoog staat kun je meer dan 30 km ver kijken.

b Als je op een toren van 50 m hoog staat kun je niet verder dan (afgerond) 18 km kijken.

c Op een hoogte van 100 m kun je twee keer zo ver kijken als op een hoogte van 50 m.

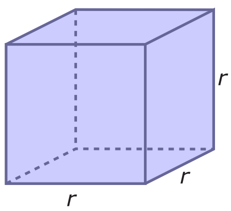
Figuur 1.1

Uitleg

De inhoud I van een kubus met ribben van lengte r is: $I = r \cdot r \cdot r = r^3$.

Dit is een voorbeeld van een machtsfunctie: de variabele r moet tot de derdemacht worden verheven om een functiewaarde te vinden. Als $r = 5$, dan is $I = 5^3 = 125$.

Stel nu dat je een kubus hebt met een inhoud van 100, wat is dan de lengte van een ribbe van deze kubus?



Figuur 1.2

Je weet dat $(r^3)^{\frac{1}{3}} = r^{3 \cdot \frac{1}{3}} = r^1 = r$. Je kunt daarom van r^3 terugrekenen naar r door de omgekeerde macht te gebruiken: als

$r^3 = 100$ dan is $r = 100^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{100}$. Met de rekenmachine kun je een benadering voor dit getal vinden: $r \approx 4{,}64$.

Kijk je naar de massa van de kubus, dan moet je rekening houden met de soortelijke massa. Dat is de massa (kilogram) van 1 dm^3. De soortelijke massa van ijzer is $7{,}87$ kg per dm^3. De massa m is dan recht evenredig met de inhoud I: $m = 7{,}87 \cdot I$. Als de inhoud bijvoorbeeld twee keer zo groot wordt, wordt de massa ook twee keer zo groot.

De formule voor de inhoud van de kubus en de formule voor de massa van de kubus kun je combineren. De formule voor de inhoud van de kubus is $I = r^3$. In de formule voor de massa van de kubus mag je dus I vervangen door r^3. Voor de massa van de kubus geldt dan: $m = 7{,}87 \cdot r^3$, met r in decimeters. De massa is nu uitgedrukt in de lengte van de ribbe.

Dit is opnieuw een voorbeeld van een machtsfunctie: m is recht evenredig met een macht van r. Als r^3 bijvoorbeeld twee keer zo groot wordt, wordt m ook twee keer zo groot.

Opgave 1

De formule voor de inhoud I van een kubus is $I = r^3$, waarbij r de lengte van een ribbe is.

a Bereken de inhoud van een kubus waarvan de ribbe 4 cm is.

b Maak de ribbe twee keer zo groot. Wat gebeurt er met de inhoud?

c Bereken hoe groot je de ribbe moet nemen om een kubus te krijgen met een inhoud van 500 cm^3. Rond af op één decimaal.

De soortelijke massa van marmer is $2{,}7$ g/cm^3.

d Licht toe dat de massa m van een kubus van marmer recht evenredig is een macht van de ribbe r. Geef de bijbehorende formule.

Opgave 2

Ook het verband tussen de lengte van de ribben r en de oppervlakte A van een kubus is een machtsverband. De bijbehorende formule is: $A = 6r^2$.

a Is de oppervlakte recht evenredig met de tweede macht van de ribbe, of is de ribbe recht evenredig met de tweede macht van de oppervlakte?

b Bereken de oppervlakte van een kubus met een ribbe van 5 cm.

c Hoeveel keer zo groot moet de ribbe worden om een kubus te krijgen met een 4 maal zo grote oppervlakte?

d Druk r uit in A.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

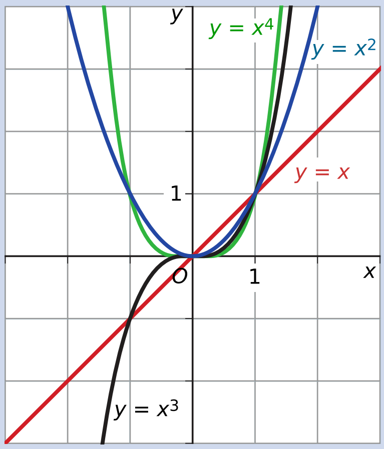
Bekijk de applet: machtsfuncties

Als y **recht evenredig met een macht** van x is, dus $y = c \cdot x^p$, dan spreek je van een **machtsfunctie**. De constante c is de **evenredigheidsconstante**.

Bekijk de voorbeelden van grafieken van machtsfuncties. Daarbij is p steeds een positief getal of 0 en $c = 1$.

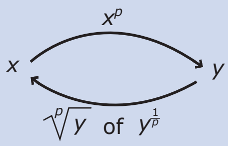
Vanuit de machtsfunctie $y = x^p$ (dus als $c = 1$) kun je op twee manieren terugrekenen:

- $x = \sqrt[p]{y}$
- $x = y^{\frac{1}{p}}$



Figuur 1.3

Als de evenredigheidsconstante niet de waarde 1 heeft, begin je met door c te delen. Daarna pas je of de p-demachtswortel toe, of je werkt met de omgekeerde macht. Afhankelijk van de waarde van p zijn er één of twee mogelijke uitkomsten.



Figuur 1.4

Voor elke x en voor willekeurige reële getallen a en b gelden de volgende

eigenschappen van machten en exponenten

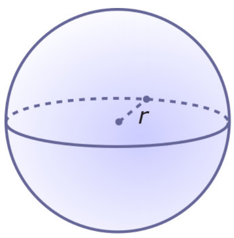
$x^0 = 1$	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ mits $x \neq 0$	$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$ mits $x \geq 0$ en $a > 0$
$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$	$x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$ mits $x \neq 0$	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Tabel 1.1

Voorbeeld 1

De inhoud van een bol is recht evenredig met de derdemacht van de straal: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

Bepaal de evenredigheidsconstante en bereken de straal van een bol met een inhoud van $I = 1000$ cm^3 in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 1.5

Antwoord

De evenredigheidsconstante is $\frac{4}{3}\pi \approx 4{,}19$.

Om de straal van de bol te berekenen moet je de vergelijking $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 1000$ oplossen:

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 &= 1000 \\ r^3 &= 238{,}732... \\ r &= (238{,}732...)^{\frac{1}{3}} \approx 6{,}20 \end{aligned}$$

links en rechts delen door $\frac{4}{3}\pi$

links en rechts tot de macht $\frac{1}{3}$

Je vindt: $r \approx 6{,}20$ cm.

In de laatste stap kun je dus ook de derdemachtswortel trekken: $r = \sqrt[3]{238{,}732...} \approx 6{,}20$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** is de formule voor de inhoud van een bol gegeven. Rond af op één decimaal nauwkeurig.

a Bereken de inhoud in cm^3 als $r = 0, 5, 10, 15$ en 20 cm.

b Maak een tabel waarin r^3 wordt uitgezet tegen I. Hoe ziet de bijbehorende grafiek eruit? Hoe blijkt hieruit dat I recht evenredig is met r^3?

c Je kunt de formule $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ ook schrijven in de vorm $r = ...$ Laat zien hoe je dit kunt doen.

Opgave 4

Bij welke van de volgende formules is y recht evenredig met een macht van x? Geef in dat geval de evenredigheidsconstante.

a $y = 2x$

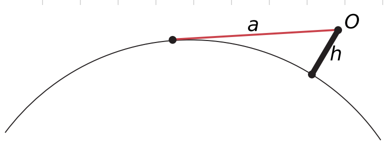
b $y = 2x^4 + 5$

c $y = 0{,}15x^4$

d $y = 5 + 0{,}15x^4$

Voorbeeld 2

In een vlak landschap is er een verband tussen hoe ver je kunt kijken en hoe hoog je ogen zich boven het landschap bevinden. Voor de kijkafstand a (meter) als functie van de hoogte h (meter) geldt: $a = 3572 \cdot h^{\frac{1}{2}}$.



Figuur 1.6

Omdat $h^{\frac{1}{2}} = \sqrt{h}$ kun je deze formule ook schrijven als $a = 3572 \cdot \sqrt{h}$. Je kunt bij deze machtsfunctie bij een gegeven waarde van h de bijbehorende waarde van a berekenen en omgekeerd. Laat dat met voorbeelden zien.

Antwoord

Bijvoorbeeld bij $h = 30$ geldt $a = 3572 \cdot 30^{\frac{1}{2}} = 3572 \cdot \sqrt{30} \approx 19564$.

Neem je omgekeerd een kijkafstand van 20 km, dus $a = 20000$, dan geldt:

$$3572 \cdot h^{\frac{1}{2}} = 20000$$

links en rechts delen door 3572

$$h^{\frac{1}{2}} = \frac{20000}{3572}$$

links en rechts kwadrateren

$$h = \left(\frac{20000}{3572}\right)^2$$

Er geldt: $h = \left(\frac{20000}{3572}\right)^2 \approx 31{,}3$.

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 2** de formule voor de kijkafstand.

a Bereken in meters nauwkeurig hoe ver je kunt kijken vanaf een toren van 50 m hoog.

Op een eiland wordt een vuurtoren gebouwd. De toren wordt zo hoog gemaakt dat je bij helder weer 25 km ver kunt kijken.

b Bepaal de hoogte van de toren op de volgende manieren:

- Aflezen uit de grafiek: $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$.
- In de formule $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$ de variabele a vervangen door 25000; de vergelijking die je dan krijgt, moet je oplossen door hem stapsgewijs te vereenvoudigen.
- Berekenen met de formule: $h = \left(\frac{a}{3572}\right)^2$.

Opgave 6

Gegeven is het volgende machtsverband tussen: $y = 5 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

a Bereken y als $x = 16$.

b Bereken y als $x = 20$ in twee decimalen nauwkeurig.

c Bereken x als $y = 10$.

d Bereken x als $y = 30$.

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de machtsfunctie $f(x) = 120x^5$.

a Bereken $f(4)$.

b Voor welke waarde van x is $f(x) = 20000$? Rond af op twee decimalen.

c Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende functiewaarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 8

Voor een bezoek aan een zwembad gelden de volgende tarieven per persoon:

- Standaardtarief: € 2,50 per bezoek
- Abonnementstarief: € 1,20 per bezoek met een abonnement van € 25,00 per jaar

Stel het aantal bezoeken aan dit zwembad per jaar voor door a en noem de kosten daarvan K (euro).

a Stel voor beide tarieven een formule op voor K als functie van a.

b Bij welke van beide tarieven zijn de kosten recht evenredig met het aantal bezoeken? Licht je antwoord toe.

c Bereken algebraïsch vanaf hoeveel bezoeken per persoon per jaar het voordelig is om een abonnement aan te schaffen.

Opgave 9

Er is een verband tussen de snelheid s van een auto en de bijbehorende remweg r. De remweg is de afstand die de auto nog aflegt als je zo hard mogelijk remt. Een vuistregel voor dit verband is: $r = \frac{s^2}{100}$.

a r is recht evenredig met een macht van s. Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b In een weg zit een scherpe bocht waarin je maar 10 meter vooruit kunt kijken. Een eis voor veilig rijden is dat je moet kunnen stoppen binnen de afstand die je kunt overzien. Hoe groot is volgens deze vuistregel de maximumsnelheid in deze bocht? Rond af op één decimaal nauwkeurig.

c Geef de formule waarmee de snelheid wordt uitgedrukt in de remweg. Beschrijf in woorden wat voor verband dit is.

d Is de volgende uitspraak waar of niet waar: ‘Bij een zicht van 100 meter kun je twee maal zo hard rijden als bij een zicht van 50 meter’?

Opgave 10

Deze opgave gaat over de inhoud I (cm^3) van een kubus met ribben r in centimeters.

a Bereken de inhoud van een kubus met $r = 2$.

b Bereken de inhoud van een kubus met $r = 6$.

c De ribbe van de tweede kubus is drie keer zo groot als de ribbe van de eerste. Wat betekent dit voor de inhoud van de kubus?

d Een kubus heeft een inhoud van 50 cm^3. Bereken r in één decimaal nauwkeurig.

e Geef de formule waarmee je de inhoud I uitdrukt in r.

f Geef de formule waarmee je de lengte r van de ribbe uitdrukt in inhoud I.

Opgave 11

Een formule voor de totale oppervlakte A van een kubus met ribben r is: $A = 6r^2$.

a Licht toe hoe je deze formule kunt afleiden.

b Bereken de totale oppervlakte van een kubus met ribben van 3 cm.

c Bereken de totale oppervlakte van een kubus met ribben van 6 cm.

d Wat gebeurt er met de totale oppervlakte als je de ribben twee keer zo groot maakt?

e Van een kubus is de totale oppervlakte 500 cm^2. Bereken de lengte van de ribben. Rond af op twee decimalen.

f Geef een formule waarmee je de ribbe r uitdrukt in de totale oppervlakte A.

Opgave 12

Ga uit van een massieve ijzeren kubus met ribben r in cm. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

a Stel een formule op voor het gewicht G van de kubus als functie van r.

b Stel een formule op voor de oppervlakte A van de kubus als functie van r.

c Leid een formule af van de vorm $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de evenredigheidsconstante c. Rond c af op twee decimalen.

d Bereken het gewicht van zo'n kubus als de totale buitenoppervlakte 150 cm^2 is.

Toepassen

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij het warmteverlies van het dier. Diersoorten met een relatief grote huidoppervlakte in verhouding tot hun inhoud zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten.

Meeh vond de formule: $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$.
Hierin is H de huidoppervlakte (dm^2) en G het gewicht (kg) van het dier.

Je ziet dat de huidoppervlakte recht evenredig is met de $\frac{2}{3}$ macht van het lichaamsgewicht. De factor c is de evenredigheidsconstante en verschilt per diersoort. In de biologie wordt deze evenredigheidsconstante de **Meeh-coëfficiënt** genoemd.

In de tabel zie je gewichten G (kg) van een Schotse Hooglander met de bijbehorende huidoppervlakte H (dm^2).

G	430	450	490	500	420
H	507	523	553	560	500

Tabel 1.2

Hiermee kun je de Meeh-coëfficiënt van de Schotse Hooglander berekenen.
Daarmee kun je dan weer berekenen hoe zwaar een Schotse Hooglander is met een gegeven huidoppervlakte.

Opgave 13

Bekijk het verband tussen huidoppervlakte (dm^2) en lichaamsgewicht (kg) van dieren.

a Hoe heet de constante c voor de diersoorten?

b Laat met een berekening zien dat voor de Schotse Hooglander geldt: $c \approx 8{,}9$.

c De huid van een bepaalde Schotse Hooglander heeft een oppervlakte van ongeveer 510 dm^2. Hoe zwaar was die koe?

Opgave 14

In deze tabel zie je een vijftal gewichten G (kg) van een mens, met de bijbehorende huidoppervlakte H (dm^2).

G	40	50	60	70	80
H	131	152	172	190	208

Tabel 1.3

In het voorbeeld zag je dat je hierbij een formule van de vorm $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$ kunt opstellen, waarbij c de Meeh-coëfficiënt van de mens is.

a Bereken c in één decimaal nauwkeurig met de waarden uit de eerste kolom.

b Hoeveel bedraagt de huidoppervlakte van iemand die 50 kg weegt?

c Hoeveel bedraagt het gewicht van iemand met een huidoppervlakte van 212 dm^2?

Opgave 15

Ook voor een massieve bol beschrijft de formule van Meeh het verband tussen de oppervlakte A en het gewicht G. Ga uit van een massieve ijzeren bol; de soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

a Zoek de formules op voor de inhoud van een bol met straal r en de oppervlakte van zo'n bol.

b Welke formule geldt voor het gewicht G als functie van de straal r van de bol? Neem r in centimeters en G in grammen.

c Door de formules voor het gewicht en de oppervlakte van een bol met straal r te combineren, vind je $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de waarde van c.

Testen

Opgave 16

Gegeven is de machtsfunctie f met formule $y = 5 \cdot (3x)^4$.

a y is recht evenredig met een macht van x. Wat is de evenredigheidsconstante?

b Voor welke waarden van x is $f(x) = 12000$?

c Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende functiewaarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 17

Het volume van een cilinder kun je berekenen met de formule $V = \pi r^2 h$. Hierin is r de straal van het grondvlak en h de hoogte van de cilinder, beide in centimeters. Je wilt blikken maken die even hoog als breed zijn, dus waarvan $h = 2r$.

a Welke formule geldt bij deze blikken voor V als functie van r?

b Herschrijf deze formule tot een formule waarin r recht evenredig is met een macht van V. Bepaal de evenredigheidsconstante. Rond af op twee decimalen.

c De oppervlakte van zo'n blik bestaat uit een rechthoek en twee cirkels. Leid een formule af voor de oppervlakte A als functie van r.

d Laat zien dat tussen A en V een machtsverband bestaat van de vorm $A = c \cdot V^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de waarde van c. Rond af op twee decimalen.

2.2 Machtsfuncties

Inleiding

Bij verbanden van de vorm $y = x^p$ hangt het verloop van de grafiek af van de waarde van p. Voor bijvoorbeeld $p = 2$ krijg je een kwadratische functie met als grafiek een parabool. Deze functie is dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$.
Voor $p = 1$ krijg je een lineaire functie, die stijgend is voor elke waarde van x.
In dit onderdeel zul je zien dat je voor negatieve en gebroken waarden van p machtsfuncties krijgt met weer andere karakteristieken.

Je leert in dit onderwerp

- de invloed van de waarde van de exponent in een machtsfunctie op het verloop van de grafiek kennen;
- het verloop van grafieken van functies die door verschuiving en/of herschalen van machtsfuncties ontstaan;
- vergelijkingen en ongelijkheden met daarin machtsfuncties algebraïsch oplossen.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen met machten oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Machtsfuncties hebben de vorm $f(x) = c \cdot x^p$. Je kunt de bijbehorende grafieken bekijken met de grafische rekenmachine. Je kiest dan voor c en voor p getallen.

a Neem nu $c = 1$ en neem voor p een even getal. Welke van deze machtsfuncties hebben een minimum? Wat zijn daar de coördinaten van?

b Neem weer $c = 1$ en neem voor p een oneven getal. Zijn er machtsfuncties waarbij de grafiek overal stijgend is? Zo ja, geef dan voorbeelden.

c Hoe kun je ervoor zorgen dat de machtsfunctie $f(x) = c \cdot x^p$ dalend is voor positieve waarden van x?

Neem nu ook gebroken getallen voor p.

d Welke verschillen zijn er tussen de grafiek bij $p = \frac{1}{2}$ en die bij $p = \frac{1}{3}$?

e Bekijk de grafiek bij $p = \frac{2}{3}$. Wat is er bij $x = 0$ aan de hand?

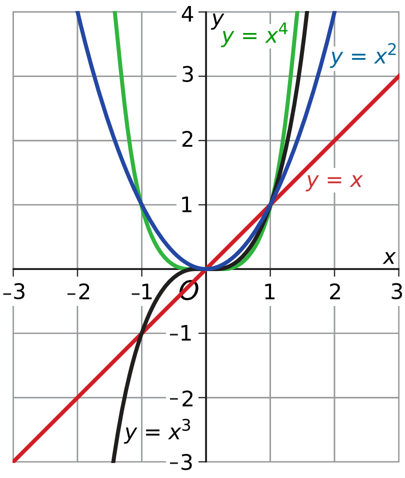
f Als p een niet geheel decimaal getal is, mag je alleen positieve waarden voor x toelaten. Waarom zou dat zijn?

Uitleg 1

Bekijk de applet

Je ziet de grafieken van $y = x^p$ voor enkele positieve gehele waarden van p.

- Als de exponent p een positief even (dus geheel) getal is, geldt dat de grafiek van $y = x^p$:
  - dalend is als $x < 0$;
  - stijgend is als $x > 0$;
  - de vergelijking $x^p = a$ twee oplossingen heeft als $a > 0$, één oplossing heeft als $a = 0$ en geen oplossingen heeft als $a < 0$.
- Als de exponent p een positief oneven (dus geheel) getal is, geldt dat de grafiek van $y = x^p$:
  - stijgend is voor elke waarde van x (behalve bij $x = 0$);
  - de vergelijking $x^p = a$ één oplossing heeft voor elke waarde van a.



Figuur 2.1

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Maak grafieken van de functies: $f(x) = x^4$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2$ en $j(x) = x$.

a Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = g(x)$? En $f(x) > g(x)$?

b Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = h(x)$? En $f(x) > h(x)$?

c Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = j(x)$? En $f(x) > j(x)$?

Opgave 2

Bekijk de functies $k(x) = x^5$ en $l(x) = x^6$.

a Maak een schets van de grafieken van $k(x)$ en $l(x)$.

b Voor welke waarden van x geldt $x^6 = 10$? Los op: $x^6 < 10$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

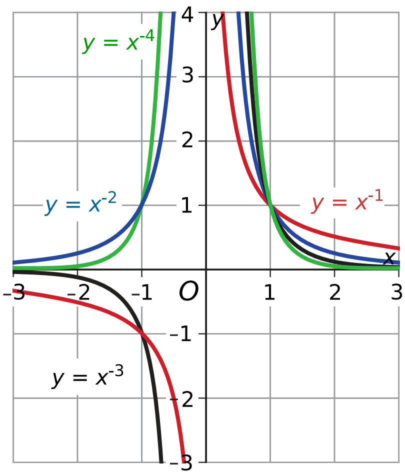
c En voor welke waarde van x geldt $x^5 = 10$? Los op: $x^5 > 10$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je ziet de grafieken van $y = x^p$ voor enkele negatieve gehele waarden van p.

- Als p een negatief even getal is, geldt dat de grafiek van $y = x^p$:
  - stijgend is als $x < 0$;
  - dalend is als $x > 0$;
  - de vergelijking $x^p = a$ twee oplossingen heeft als $a > 0$ en geen oplossingen heeft als $a \leq 0$.



Figuur 2.2

- Als p een negatief oneven getal is, geldt dat de grafiek van $y = x^p$:
  - dalend is voor elke waarde van x (behalve als $x = 0$);
  - de vergelijking $x^p = a$ één oplossing heeft voor elke waarde van a behalve $a = 0$.

Volgens de eigenschappen van machten en exponenten geldt: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Bij functies van de vorm $y = c \cdot x^{-n} = \frac{c}{x^n}$ is y recht evenredig met x^{-n} en omgekeerd evenredig met x^n.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** de grafieken van de functies: $k(x) = x^{-1}$ en $l(x) = x^{-2}$.

a Welke asymptoten hebben deze functies? En waarom?

b Voor welke waarden van x geldt $k(x) = l(x)$? Los op: $k(x) < l(x)$.

c Los de volgende vergelijkingen op:

- $x^{-1} = 0{,}005$ en $x^{-2} = 0{,}005$
- $x^{-1} = 5000$ en $x^{-2} = 5000$

d Voor welke waarden van x geldt $x^{-1} < 0{,}005$?

e Voor welke waarden van x geldt $x^{-1} > 5000$?

f Voor welke waarden van x geldt $x^{-2} < 0{,}005$?

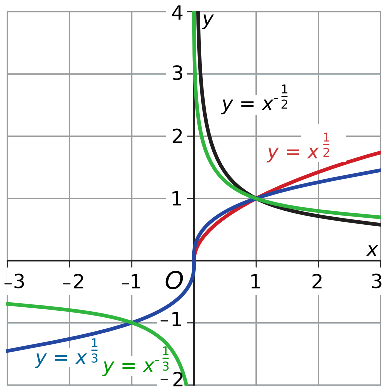
g Voor welke waarden van x geldt $x^{-2} > 5000$?

Uitleg 3

Bekijk de applet

Je ziet de grafieken van $y = x^{\frac{1}{p}}$ voor enkele gehele waarden van p.

- Als $p > 1$ en p even geldt voor $y = x^{\frac{1}{p}}$ dat:
  - het domein $[0, \rightarrow\rangle$ en het bereik $[0, \rightarrow\rangle$ is;
  - de grafiek stijgend is voor alle x uit het domein;
  - de grafiek door $(0,0)$ en $(1,1)$ gaat;
  - de vergelijking $x^{\frac{1}{p}} = a$ één oplossing heeft als $a \geq 0$.
- Als $p > 1$ en p oneven geldt voor $y = x^{\frac{1}{p}}$ dat:
  - het domein $\mathbb{R}$ en het bereik $\mathbb{R}$ is;
  - de grafiek stijgend is voor alle x uit het domein;
  - de grafiek door $(0,0)$, $(1,1)$ en $(-1,-1)$ gaat;
  - de vergelijking $x^{\frac{1}{p}} = a$ één oplossing heeft voor alle waarden van a.



Figuur 2.3

- Als $p < -1$ en p is even, dan geldt voor $y = x^{\frac{1}{p}}$ dat:
  - het domein $\langle 0, \rightarrow\rangle$ en het bereik $\langle 0, \rightarrow\rangle$ is;
  - de grafiek dalend is voor elke x uit het domein;
  - de grafiek horizontale asymptoot $y = 0$ en verticale asymptoot $x = 0$ heeft;
  - de vergelijking $x^{\frac{1}{p}} = a$ één oplossing heeft als $a > 0$.
- Als $p < -1$ en p oneven, dan geldt voor $y = x^{\frac{1}{p}}$ dat:
  - het domein $\langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$ en het bereik $\langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$ is;
  - de grafiek dalend is voor elke x uit het domein;
  - de grafiek horizontale asymptoot $y = 0$ en verticale asymptoot $x = 0$ heeft;
  - de vergelijking $x^{\frac{1}{p}} = a$ één oplossing heeft als $a \neq 0$.

Kijk nog eens goed of de grafische rekenmachine dezelfde grafieken geeft. Er kunnen verschillen zijn. Merk ook op dat de grafiek in de buurt van $x = 0$ niet altijd helemaal netjes wordt gemaakt.

Opgave 4

Bekijk **Uitleg 3**. Maak met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies: $a(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $b(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $c(x) = x$ en $d(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

a Voor welke waarden van x geldt $a(x) < b(x)$?

b Voor welke waarden van x geldt $d(x) < b(x)$?

c Voor welke waarden van x geldt $d(x) > c(x)$?

d Maak in één figuur een schets van de grafieken van $d(x)$ en $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$.

e Voor welke waarden van x geldt $x^{\frac{1}{4}} > 4$?

Theorie en voorbeelden

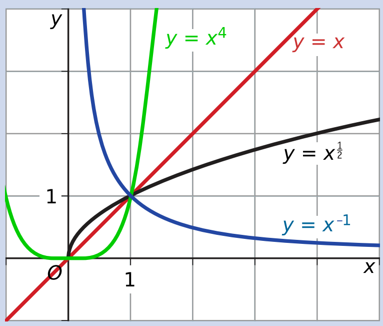
Om te onthouden

Bekijk de applet.

Je ziet enkele grafieken van de standaard **machtsfunctie** $y = x^p$ voor verschillende waarden van p.

Voor $x > 0$ zijn eigenschappen van $f(x) = x^{\frac{1}{p}}$:

- $p > 1$: de grafiek gaat door de punten $(0,0)$ en $(1,1)$ en stijgt steeds sneller;
- $p = 1$: de grafiek bij $y = x$ is lineair en gaat door de punten $(0,0)$ en $(1,1)$;
- $0 < p < 1$: de grafiek gaat door de punten $(0,0)$ en $(1,1)$ en stijgt steeds langzamer;
- $p < 0$: de functie is niet gedefinieerd voor $x = 0$, de grafiek gaat door het punt $(1,1)$ en daalt steeds langzamer, de x-as en de y-as zijn asymptoten van de grafiek.



Figuur 2.4

Voor $x < 0$ bestaat de functie alleen als p een geheel getal is of als p een breuk is met een oneven noemer, zoals $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, enzovoort. Afhankelijk van het even of oneven zijn van p is de grafiek daar dalend of stijgend.

De vergelijking $x^p = a$ heeft één oplossing als p (ongelijk aan 0) een oneven geheel getal is, namelijk $x = a^{\frac{1}{p}}$. Wanneer p een even geheel getal (ongelijk aan 0) is en $a > 0$ zijn er twee oplossingen, namelijk $x = -a^{\frac{1}{p}} \vee x = a^{\frac{1}{p}}$. Wanneer p een even geheel getal (ongelijk aan 0) is en $a < 0$ zijn er geen oplossingen.

Bij functies van de vorm $y = c \cdot x^{-n} = \frac{c}{x^n}$ is y **recht evenredig** met x^{-n} en **omgekeerd evenredig** met x^n.

Voorbeeld 1

Los op: $3x^{\frac{3}{2}} < 12$.

Antwoord

Beide kanten delen door 3 geeft: $x^{\frac{3}{2}} < 4$.

Los eerst op: $x^{\frac{3}{2}} = 4$.

Oplossing: $x = 4^{\frac{2}{3}} \approx 2{,}52$.

Maak de grafiek van $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ op de grafische rekenmachine.

Merk op dat voor de x-waarden van de functie geldt: $x > 0$. De vergelijking heeft inderdaad maar één oplossing.

Lees de (benaderde) oplossing van de ongelijkheid uit de grafiek af:

$0 \leq x < 2{,}52$

Figuur 2.5

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de ongelijkheid $3x^{\frac{3}{2}} < 12$ oplost.

a Los eerst de vergelijking $3x^{\frac{3}{2}} = 12$ algebraïsch op.

b In het voorbeeld wordt daarbij een macht met exponent $\frac{2}{3}$ gebruikt. Licht die stap toe. Heb je dat zelf ook gedaan?

c Los op dezelfde manier algebraïsch op: $15x^{\frac{5}{4}} < 180$. Geef je eindantwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie: $f(x) = 2(x-4)^3 - 10$.

Los op: $f(x) = 20$.

Antwoord

Om $f(x) = 20$ op te lossen, kun je stap voor stap terugrekenen:

$$\begin{aligned} 2(x-4)^3 - 10 &= 20 \\ 2(x-4)^3 &= 30 \\ (x-4)^3 &= 15 \\ x - 4 &= 15^{\frac{1}{3}} \\ x &= 15^{\frac{1}{3}} + 4 \end{aligned}$$

Je vindt: $x = 15^{\frac{1}{3}} + 4 \approx 6{,}47$.

Opgave 6

Bekijk de functie $f(x) = 3(x+2)^3 - 5$.

a Hoe ontstaat door herschalen en verschuiven de grafiek van f uit die van $y = x^3$?

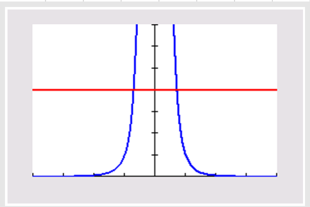
b Los op: $f(x) \leq 10$. Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 3

Los op: $\frac{1}{x^4} > 4$.

Antwoord

Omdat volgens de eigenschappen van machten en exponenten geldt $y = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$ is ook hier sprake van een machtsfunctie. Maak eerst de grafiek van $y_1 = x^{-4}$ en de lijn $y_2 = 4$ op de grafische rekenmachine.



Figuur 2.6

Los nu op: $x^{-4} = 4$.

Oplossing: $x = 4^{-\frac{1}{4}} \vee x = -4^{-\frac{1}{4}}$, dus $x \approx 0{,}7 \vee x \approx -0{,}7$.

In de grafiek is de oplossing van de ongelijkheid af te lezen: $-0{,}7 < x < 0 \vee 0 < x < 0{,}7$.

Merk op dat je $x = 0$ uitzondert, omdat voor deze waarde de functie niet bestaat.

Opgave 7

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

a $x^2 < \sqrt{x}$

b $\frac{1}{x^4} = 81$

c $\frac{1}{x^3} > 27$

d $\frac{1}{x^3} < 30$

e $x^5 < x^4$

f $x^6 < x^4$

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x+1)^{-2} - 4$.

a Welke asymptoten heeft de grafiek van $y = x^{-2}$?

b Beschrijf hoe de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^{-2}$.

c Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

d Los op: $f(x) < 10$. Rond af op twee decimalen.

Verwerken

Opgave 9

In een grootwinkelbedrijf onderzoekt de commerciële afdeling hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat dan de volgende formule geldt: $a = \frac{500}{p}$. Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro's.

a Je ziet dat a omgekeerd evenredig is met p. Schrijf de formule zo, dat a recht evenredig is met een macht van p.

b Als de prijs verdubbeld wordt, wordt de verkoop per dag dan meer of minder dan gehalveerd?

c Het bedrijf heeft een voorraad van 300 kg tomaten. Bereken de prijs waarbij de voorraad binnen een dag is verkocht. Geef ook de formule waarmee je dit direct kunt berekenen.

d Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij € 100,00? Geef zelf aan wat dit betekent voor de bruikbaarheid van deze formule.

Opgave 10

Los deze vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $2x^{\frac{1}{3}} = 4$

b $4x^{\frac{5}{2}} = 2$

c $\frac{10}{x^5} < 5$

d $3x^{\frac{1}{4}} > 3$

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = 4(x-2)^3 - 7$.

a Leg uit hoe de grafiek van deze functie door verschuiven en herschalen kan ontstaan uit de grafiek van $y = x^3$.

b Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) \leq 13$.

Opgave 12

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = -5 + 2\sqrt{x-3}$ en $g(x) = \sqrt{x}$.

a Schrijf $f(x)$ en $g(x)$ met machten en beschrijf hoe de grafiek van f vanuit die van g kan ontstaan.

b Los op: $f(x) \geq 100$

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{100}{(x-10)^2} + 25$.

a Laat zien dat de grafiek van deze functie kan ontstaan uit een machtsfunctie. Schrijf de bijbehorende verschuivingen en herschaling op.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

c Los op: $f(x) \leq 50$.

Opgave 14

Gegeven is de formule $y = -2(x-50)^n + 100$. Neem aan dat n een geheel getal is.

a Voor welke waarden van n heeft de functie een extreme waarde?

b Is die extreme waarde een maximum of een minimum? Waar zie je dat aan?

c Hoe kun je uit deze formule aflezen waar de top zich bevindt? Geef de coördinaten van deze top.

Toepassen

De Amerikaanse veearts en onderzoeker Max Kleiber ontdekte in 1932 dat het zuurstofverbruik Z (liter) van verschillende soorten zoogdieren recht evenredig is met een macht van de massa m (kilogram). In de tabel vind je enkele bijpassende gegevens.
Je kunt een formule opstellen voor Z afhankelijk van m als je uitgaat van een machtsfunctie van de vorm $Z = c \cdot m^p$, waarin de waarden van c en p nog berekend moeten worden.

Je hebt daartoe genoeg aan de gegevens van twee diersoorten, bijvoorbeeld:

- paard: $Z = 85{,}4$ en $m = 605{,}0$ geeft: $85{,}4 = c \cdot 605{,}0^p$.
- muis: $Z = 0{,}19$ en $m = 0{,}20$ geeft: $0{,}19 = c \cdot 0{,}20^p$.

Met de balansmethode vind je: $\frac{85{,}4}{0{,}19} = \frac{c \cdot 605{,}0^p}{c \cdot 0{,}20^p} = \frac{605{,}0^p}{0{,}20^p} = \left(\frac{605{,}0}{0{,}20}\right)^p$ en dus $449{,}47 \approx 3025^p$. Zo'n exponentiële vergelijking kun je oplossen met de grafische rekenmachine. Je vindt $p \approx 0{,}76$. Nu kun je door invullen uitrekenen dat $c \approx 0{,}66$. Dus $Z \approx 0{,}7 \cdot m^{0{,}76}$.

soort	m(kg)	Z(L)
muis	0,20	0,19
rat	1,10	0,75
kat	5,80	2,62
hond	11,5	4,38
mens	76,1	18,0
paard	605,0	85,4

Tabel 2.1

Opgave 15

Bekijk het verhaal van de formule van Kleiber. Er wordt een formule opgesteld voor het verband tussen het zuurstofverbruik Z in liters en de massa m in kg bij zoogdieren. Daarbij wordt gebruikgemaakt van de gegevens van de muis en het paard.

a Stel de formule op uitgaande van de gegevens van de rat en de mens. Vind je dezelfde formule?

b Bereken het zuurstofverbruik van een koe van 1000 kg. Rond af op één decimaal.

Opgave 16

Zoogdieren hebben allemaal ongeveer dezelfde lichaamstemperatuur. Hoe zwaarder een zoogdier is, hoe meer energie het kost om de lichaamstemperatuur constant te houden. Het gewicht G (gram) is recht evenredig met een macht van de energie P (joule) die per minuut nodig is om de lichaamstemperatuur constant te houden. Je ziet een tabel met een aantal waarden voor G en P.

G	1000	2000	5000	15000
P	3,02	5,08	10,11	23,04

Tabel 2.2

a Stel een formule op waarin je P uitdrukt in G.

b Hoeveel energie P per minuut heeft een mens van 70 kg nodig? Rond af op twee decimalen.

c Wat gebeurt er met P als G twee keer zo groot wordt?

Testen

Opgave 17

Geef van de volgende machtsfuncties:

- het domein en het bereik
- de intervallen waarop de grafiek dalend dan wel stijgend is
- het maximum of minimum (voor zover van toepassing)
- de asymptoten (voor zover van toepassing)

a $a(x) = x^5$ en $b(x) = x^6$

b $c(x) = x^{-3}$ en $d(x) = x^{-4}$

c $e(x) = x^{\frac{1}{4}}$ en $f(x) = x^{3\frac{1}{2}}$

Opgave 18

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $2(x + 4)^4 - 10 = 490$

b $10 - 2\sqrt{x - 4} > 6$

c $5 \cdot x^{\frac{2}{5}} = 20$

d $2(x+1)^3 > 100$

e $\frac{25}{x^3} \leq 5$

Practicum: Machtsfuncties

Met deze applet maak je machtsfuncties. Verzin zo'n functie. Bedenk eerst hoe hij kan ontstaan uit $y = x^p$ en wat de karakteristieken zijn. Controleer dan je antwoord met de applet.

Bekijk de applet: Machtsfunctie

2.3 Kwadratische functies

Inleiding

Je gaat nu dieper in op de eigenschappen van machtsfuncties met een exponent 2, kwadraten dus. Kwadratische functies zijn functies waarvan de grafieken kunnen ontstaan door verschuiving en herschaling van de grafiek van $y = x^2$. De grafieken van kwadratische functies zijn parabolen. De eigenschappen van die kwadratische functies kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen en om formules bij gegeven parabolen op te stellen.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- de eigenschappen van een kwadratische functie afleiden uit het functievoorschrift;
- kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden oplossen;
- een passend functievoorschrift opstellen bij een parabool (de grafiek van een kwadratische functie).

Voorkennis

- algebraïsch vergelijkingen oplossen;
- verschuivingen en herschalingen van grafieken toepassen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet al van alles over kwadratische functies.

a Wat zijn de oplossingen van de vergelijking $x^2 = 20$?

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = -1$?

c Heeft de ongelijkheid $x^2 > -1$ oplossingen? Zo ja, welke?

d Heeft elke kwadratische vergelijking oplossingen? Hoeveel oplossingen kunnen er zijn?

e Wat weet je allemaal van een kwadratische functie? Maak een overzicht.

Uitleg

Bekijk de applet

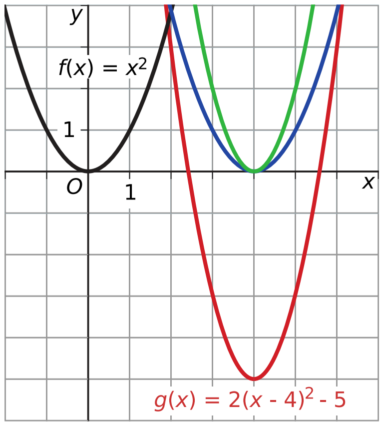
De standaardfunctie van alle kwadratische functies is de functie $y = x^2$. Alle andere kwadratische functies kunnen daaruit door verschuiving en/of herschaling worden verkregen. Ze hebben daarom de vorm $y = a(x - p)^2 + q$.

Kies je bijvoorbeeld $a = 2$, $p = 4$ en $q = -5$ dan krijg je de functie $y = 2(x - 4)^2 - 5$, waarvan de grafiek uit die van f verkregen kan worden door:

- een verschuiving in de x-richting van 4 (dus 4 naar rechts);
- herschalen in de y-richting met factor 2 (de y-waarden vermenigvuldigen met 2);
- een verschuiving in de y-richting van -5 (dus 5 naar beneden).

De grafiek van g is een dalparabool met top $(4, -5)$ en symmetrieas $x = 4$. De twee snijpunten met de x-as bereken je door de vergelijking $2(x - 4)^2 - 5 = 0$ op te lossen.

Neem je $a = -2$, dan wordt het functievoorschrift $y = -2(x - 4)^2 - 5$. De grafiek is dan een bergparabool, omdat vermenigvuldiging met een negatief getal een spiegeling in de x-as betekent.



Figuur 3.2

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de functie $y = -2(x - 4)^2 - 5$.

a Heeft deze functie een minimum of een maximum? Hoe kun je dat aan het functievoorschrift zien?

b Snijdt de grafiek van de functie de x-as?

c Los op: $y = -7$

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 4$.

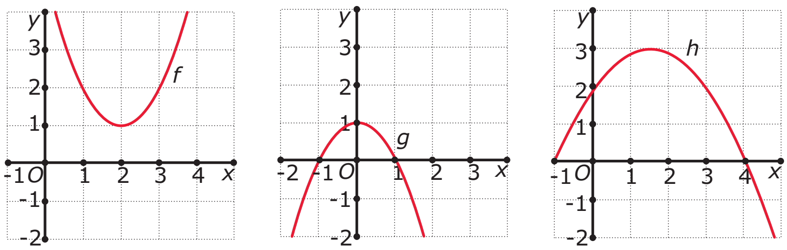
a Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$?

b Is hier sprake van een minimum of een maximum? Hoe kun je dat aan het functievoorschrift zien?

c Los algebraïsch op: $f(x) < 100$.

Opgave 3

Je ziet drie parabolen. Geef het bijbehorende functievoorschrift.



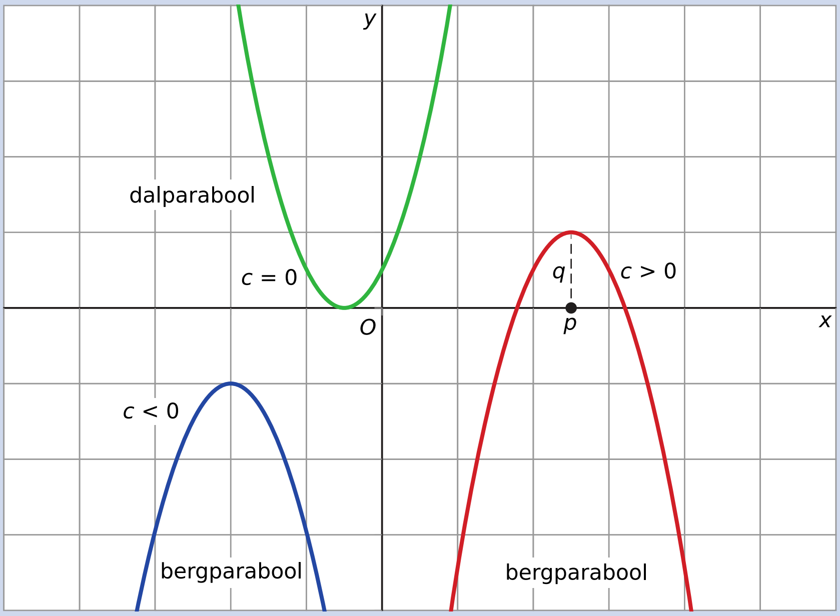
Figuur 3.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een functie van de vorm $y = a(x-p)^2 + q$, noem je een **kwadratische functie** (als $a \neq 0$). De grafiek van elke kwadratische functie ontstaat door verschuiven en herschalen van de grafiek van $y = x^2$. De grafiek van elke kwadratische functie is een **parabool** met **top** (p,q) en **symmetrieas** $x = p$. Als $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool**. Als $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool**.



Figuur 3.4

De **kwadratische vergelijking** $a(x-p)^2 + q = u$ kun je herschrijven tot: $(x-p)^2 = c$.

- Als $c > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $c = 0$ is er één oplossing.
- Als $c < 0$ zijn er geen oplossingen.

Je vindt die oplossingen door worteltrekken.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

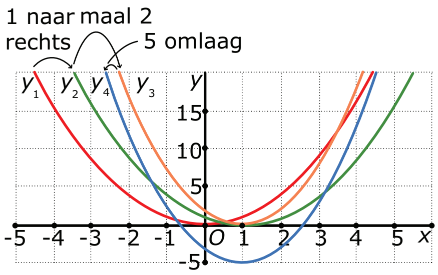
Gegeven is de kwadratische functie $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$. Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$? Bepaal ook de top en de symmetrieas van deze grafiek.

Antwoord

Ga na dat de grafiek van f ontstaat uit $y = x^2$ (rood) door:

- 1 eenheid in de x-richting te verschuiven (groen);
- met factor 2 te herschalen in de y-richting (oranje);
- met -5 in de y-richting te verschuiven (blauw).

De grafiek is een dalparabool met top $(1, -5)$. De coördinaten van die top zijn direct uit het functievoorschrift af te lezen. De symmetrieas is de lijn $x = 1$.



Figuur 3.5

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Gegeven is de functie $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$.

a Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit de grafiek $y = x^2$?

b Bepaal de uiterste waarde van f.

c Welke symmetrieas heeft de grafiek van f?

Opgave 5

Als je de grafiek van $y = x^2$ verschuift en in de y-richting herschaalt, krijg je een grafiek waarbij een formule hoort van de vorm: $y = a(x-p)^2 + q$

a Hoe kun je aan de formule zien of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is? Geeft dit ook aan of de grafiek een maximum of minimum heeft?

b Hoe kun je aan de formule zien op welke hoogte het maximum of minimum ligt?

c Hoe kun je aan de formule zien welke waarde van x je in moet vullen om het maximum of minimum te krijgen?

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $2(x-1)^2 - 5 = 3$ op.

Antwoord

Deze vergelijking los je systematisch op:

$$\begin{aligned} 2(x-1)^2 - 5 &= 3 \\ 2(x-1)^2 &= 8 \\ (x-1)^2 &= 4 \\ x - 1 &= -\sqrt{4} \vee x - 1 = \sqrt{4} \\ x &= 1 - 2 \vee x = 1 + 2 \end{aligned}$$

Je vindt: $x = -1 \vee x = 3$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Hoe kun je aan de formule $y = 2(x-1)^2 - 5$ zien dat de vergelijking $2(x-1)^2 - 5 = 3$ twee oplossingen heeft?

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $-2(x-3)^2 + 5 = 18$? Licht je antwoord toe.

c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $-2(x-3)^2 + 5 = 0$? Licht je antwoord toe.

d Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $-2(x-3)^2 + 5 = 5$?

Opgave 7

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Laat eventuele wortels staan.

a $x^2 = 100$

b $(x-4)^2 = 64$

c $-3(x+1)^2 = -75$

d $3(x+2)^2 - 3 = 27$

e $2x^2 - 7 = 0$

Voorbeeld 3

Los de ongelijkheid $-5(x+3)^2 - 17 \geq -47$ op.

Antwoord

Los de bij de ongelijkheid horende vergelijking systematisch op.

$$\begin{aligned} -5(x+3)^2 - 17 &= -47 && \text{beide zijden } +17 \\ -5(x+3)^2 &= -30 && \text{beide zijden } / -5 \\ (x+3)^2 &= 6 && \text{beide zijden worteltrekken} \\ x+3 &= \sqrt{6} \vee x+3 = -\sqrt{6} && \text{beide zijden } -3 \\ x &= -3+\sqrt{6} \vee x = -3-\sqrt{6} \end{aligned}$$

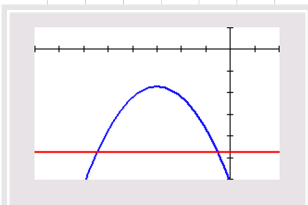
Gebruik de grafische rekenmachine om de ongelijkheid op te lossen.

Voer in: Y1=-5(X+3)^2-17 en Y2=-47.

Venster bijvoorbeeld: $-8 \leq x \leq 3$ en $-60 \leq y \leq 10$.

De grafiek van $y = -5(x+3)^2 - 17$ is een bergparabool met top $(-3, -17)$. Je kunt de oplossing van de ongelijkheid aflezen. Zie de grafiek.

Je vindt: $-3-\sqrt{6} \leq x \leq -3+\sqrt{6}$.



Figuur 3.6

Opgave 8

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $(x-4)^2 < 10$

b $-2(x+3)^2 + 10 < 4$

c $3(x-5)^2 - 2 \geq 10$

Verwerken

Opgave 9

De grafiek van de functie $f(x) = 2(x+8)^2 - 8$ ontstaat door verschuiving en herschaling van de grafiek van $y = x^2$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $y = x^2$?

b Verander de volgorde van de herschaling en de laatste verschuiving. Waarom is de volgorde van deze veranderingen belangrijk?

Opgave 10

Bekijk de grafiek van $f(x) = 0{,}5(x+3)^2 - 5$.

a Geef de extreme waarde (het maximum of het minimum) van f en de waarde van x waarvoor je deze extreme waarde krijgt.

b Los de vergelijking $0{,}5(x+3)^2 - 5 = 5$ op.

c Los op: $f(x) = -5$

d Los op: $f(x) = -10$

e Los op: $f(x) > -3$

f Los op: $f(x) < 0$

g Los op: $f(x) > -10$

Opgave 11

Gegeven is de formule $y = -3(x+2)^2 + 10$.

a Op welk interval is de grafiek met deze formule dalend?

b Bereken de snijpunten van de grafiek met de x-as. Rond af op twee decimalen.

Opgave 12

Los de ongelijkheden exact op.

a $5 - x^2 > -21$

b $-4(x+80)^2 - 40 < -100$

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + c$. Hierin is c een nog onbekende constante.

a Welke extreme waarde heeft deze functie?

b Voor welke waarden van c heeft de functie twee snijpunten met de x-as? Licht je antwoord toe.

c Voor welke waarden van c snijdt de grafiek van f de lijn $y = 4$ niet?

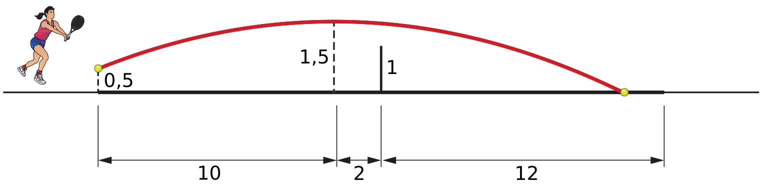
Opgave 14

Een kwadratisch verband heeft een grafiek waarvan de snijpunten met de x-as $A(-3,0)$ en $B(-11,0)$ zijn. De grafiek snijdt de y-as in het punt $C(0,12)$.

Stel een formule op voor dit kwadratisch verband.

Toepassen

Bekijk de applet: Baan van een tennisbal



Figuur 3.7

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf $0{,}5$ meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) **parabolische baan** ligt op 2 meter voor het net en $1{,}5$ meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, dat ongeveer 24 meter bedraagt.
Je kunt door berekening aantonen dat de bal 'in' is.
Breng daartoe een geschikt assenstelsel aan zoals dat in de figuur is te zien en stel een bijpassende kwadratische formule op voor de baan van de bal.

Opgave 15

De baan van een tennisbal kan worden beschreven met een kwadratische functie.

a De baan is slechts ongeveer parabolisch. Waarom is hij in de praktijk zeer waarschijnlijk niet precies parabolisch?

b Omdat de parabool door het punt $(10; 1{,}5)$ gaat, kun je de baan beschrijven met de formule $h(x) = a(x - 10)^2 + 1{,}5$. Licht dit toe.

c Laat zien dat $a = -0{,}01$.

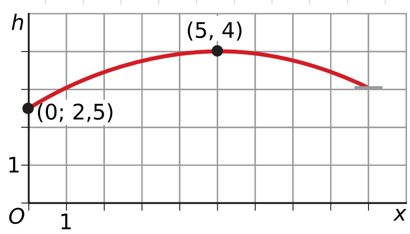
d Bereken nu de twee nulpunten van de kwadratische functie die de baan van de tennisbal (ongeveer) beschrijft. Laat zien dat de bal inderdaad 'in' is.

Opgave 16

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool, zie de figuur. Het hoogste punt van de baan is gegeven. De speler laat de bal op $2{,}5$ meter boven de grond los.

a Stel een formule op voor de functie $h(x)$ die de baan van de bal beschrijft.

b De ring van de basket hangt op $3{,}05$ meter boven de grond. Hoe ver staat de speler van (het midden van) de ring van de basket in cm nauwkeurig?



Figuur 3.8

Testen

Opgave 17

Bepaal bij de functies de top van de grafiek en geef aan of de grafiek een dal- of bergparabool is.

a $f(x) = -2x^2 - 2$

b $g(x) = 100(x - 4)^2 + 8$

c $h(x) = -(x + 5)^2 - 3$

Opgave 18

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Laat eventuele wortels staan.

a $3(x - 5)^2 - 5 = -2$

b $3(x - 5)^2 - 5 = -5$

c $-2(x + 4)^2 + 3 = 1$

d $2(x + 2)^2 > 10$

e $-(x + 4)^2 < -3$

Opgave 19

Stel een formule op van een kwadratisch verband waarvan de grafiek door de punten $(15,0)$, $(25,0)$ en $(5,30)$ gaat.

2.4 De abc-formule

Inleiding

In het vorige onderdeel heb je gezien hoe je de vergelijking $2(x-1)^2-5=3$ oplost door terug te rekenen. Dat terugrekenen lukt, omdat de x maar op één plaats in de vergelijking voorkomt. Kwadratische vergelijkingen komen ook voor in een vorm waarin terugrekenen niet mogelijk is. Werk je namelijk de haakjes weg, dan krijg je $2x^2-4x-3=3$. De x komt nu op meer plekken voor en terugrekenen is niet meer mogelijk. Door kwadraatafsplitsen kun je ook een formule afleiden waarmee een dergelijke vergelijking in één keer op te lossen is. Dat is de zogenaamde abc-formule.

Je leert in dit onderwerp

- nagaan hoeveel oplossingen een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2+bx+c=0$ heeft;
- kwadratische vergelijkingen van de vorm $ax^2+bx+c=0$ oplossen.

Voorkennis

- werken met kwadratische functies;
- kwadratische vergelijkingen van de vorm $a(x-p)^2+q=u$ oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $g(x)=2(x+1)^2+7$.

a Schrijf het functievoorschrift van g in de vorm $g(x)=ax^2+bx+c$.

b Hoe kun je met de grafische rekenmachine nagaan of je dit goed hebt gedaan?

c Hoe kun je aan een functievoorschrift van de vorm g in de vorm $g(x)=ax^2+bx+c$ zien of de grafiek een dal- of een bergparabool is?

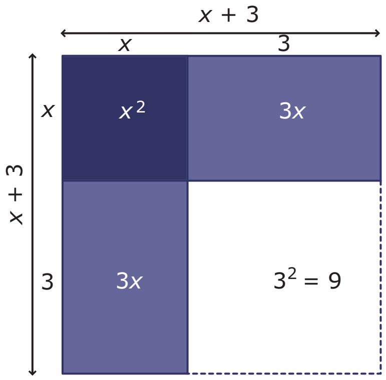
d Hoe bepaal je de top van de grafiek van g?

Uitleg 1

De vergelijking $x^2 + 6x = 16$ kun je niet oplossen door terugrekenen. Maar in de figuur zie je dat $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 3^2$.

Dit betekent dat je de gegeven vergelijking kunt schrijven als: $(x+3)^2 - 9 = 16$. En nu komt x weer op één plek voor en kun je terugrekenen:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - 9 &= 16\\ (x+3)^2 &= 25\\ x+3 &= -5 \vee x+3 = 5\\ x &= -8 \vee x = 2\end{aligned}$$



Figuur 4.1

In het algemeen is $x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$.

Je noemt dit kwadraat afsplitsen. De geldigheid van deze formule is eenvoudig aan te tonen door de haakjes weg te werken.

Opgave 1

Bij een kwadratisch verband hoort de formule $y = x^2 - 6x + 1$.

a Laat zien dat je de formule kunt schrijven als $y = (x-3)^2 - 8$.

b Welke coördinaten heeft de top van de grafiek bij dit kwadratisch verband?

c Bereken algebraïsch de snijpunten van deze grafiek met de x-as in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Los de vergelijkingen op met behulp van kwadraat afsplitsen.

a $x^2 + 4x = 5$

b $x^2 - 8x = 9$

c $2x^2 - 12x = 54$

Uitleg 2

De techniek van kwadraat afsplitsen kun je ook toepassen om bijvoorbeeld de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op te lossen. Je deelt dan eerst door 3. Omdat dit tijdrovend kan zijn, hebben wiskundigen de oplossingen berekend voor het algemene geval. Dat gaat ook met kwadraat afsplitsen.

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossing:

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dit noem je de abc-formule of wortelformule. Deze formule geeft meteen de twee oplossingen als je de juiste waarden voor a, b en c invult. De vergelijking moet vaak wel eerst nog in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ worden gezet.

Als je bijvoorbeeld $3x^2 + 17x = 45$ wilt oplossen, ga je eerst op 0 herleiden.
Je krijgt dan $3x^2 + 17x - 45 = 0$.

Nu lees je af: $a = 3$, $b = 17$ en $c = -45$.

Invullen in de abc-formule geeft: $x = \frac{-17+\sqrt{829}}{6} \vee x = \frac{-17-\sqrt{829}}{6}$.
Afgerond worden de oplossingen: $x \approx 1{,}97 \vee x \approx -7{,}63$.

De uitdrukking $b^2 - 4ac$ onder het wortelteken heet de discriminant. Omdat die discriminant in dit geval 829 is, zijn er twee mogelijke antwoorden. Is de discriminant negatief, dan zijn er geen reële oplossingen. Je kunt die discriminant beter eerst uitrekenen.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je de abc-formule kunt gebruiken om een kwadratische vergelijking op te lossen.

a Los de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op met behulp van de abc-formule.

b Los de vergelijking $x^2 - 6x + 1 = 0$ op met behulp van de abc-formule.

c Los de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op met kwadraat afsplitsen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Een algemene vorm voor een **kwadratische functie** is $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Aan dit functievoorschrift zie je niet meteen hoe hij uit de machtsfunctie $y = x^2$ kan ontstaan. Dat is lastig als je de top en de snijpunten met de x-as van de bijbehorende parabool wilt vinden.

Wiskundigen hebben al lang geleden de **abc-formule** afgeleid. Daarmee kun je de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen en zo de nulpunten (en de snijpunten met de x-as) van de kwadratische functie berekenen. De gevonden oplossing is: $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

De uitdrukking $D = b^2 - 4ac$, die onder het wortelteken staat, heet de **discriminant** van de kwadratische vergelijking. Omdat alleen de wortel uit een positief getal of 0 een reëel getal oplevert, bepaalt die discriminant het aantal oplossingen van de vergelijking:

- $D > 0$: er zijn twee oplossingen;
- $D = 0$: er is één oplossing (twee dezelfde);
- $D < 0$: er zijn geen reële oplossingen.

Omdat de symmetrieas van de parabool een x-waarde heeft die midden tussen beide nulpunten in zit, is de x-waarde van de top uit deze nulpunten af te leiden.

Voorbeeld 1

Los algebraïsch op: $x^2 + 10x = 15$. Geef je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Je kunt hier de abc-formule toepassen.
Eerst schrijf je de vergelijking als: $x^2 + 10x - 15 = 0$.
Dan neem je $a = 1$, $b = 10$ en $c = -15$.
Discriminant: $D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot -15 = 160$.
De discriminant is positief, dus er zijn twee oplossingen:

$x = \frac{-10+\sqrt{160}}{2} \vee x = \frac{-10-\sqrt{160}}{2}$

In twee decimalen nauwkeurig: $x \approx 1{,}32 \vee x \approx -11{,}32$.

Opgave 4

Bestudeer **Voorbeeld 1**. Los de volgende vergelijkingen op met behulp van de abc-formule. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^2 - 12x = 30$

b $x^2 + 3x = 16$

c $x^2 = 5 - 2x$

d $5x^2 = 1 + 2x^2 + 6x$

Opgave 5

Kwadratische vergelijkingen kunnen soms ook opgelost worden door ontbinden in factoren. Ga bij elk van de volgende vergelijkingen na of ze opgelost kunnen worden met ontbinden in factoren. Bereken van elk van de vergelijkingen de oplossing. Gebruik de abc-formule alleen als dat echt nodig is.

a $x^2 - x - 3 = 0$

b $-4x^2 + 5x - 14 = 0$

c $2x^2 - 10x + 10 = 2x - 6$

d $x - 5x^2 = 10$

e $x(x - 7) = 8$

Voorbeeld 2

Bepaal algebraïsch de snijpunten met de x-as van de functie $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$ en bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek.

Antwoord

Je kunt dit uitrekenen met de abc-formule: $2x^2 - 2x - 4 = 0$. Maar het gaat sneller door ontbinden in factoren toe te passen. Je vindt dat $x = -1 \vee x = 2$. Dus de snijpunten met de x-as zijn $(-1,0)$ en $(2,0)$.

De top van de grafiek vind je nu door te bedenken dat de symmetrieas door het punt midden tussen $(-1,0)$ en $(2,0)$ gaat. Dus geldt voor de x-waarde van de top: $x = \frac{-1+2}{2} = 0{,}5$.

De top is het punt $(0{,}5; -4{,}5)$.

Opgave 6

In het voorbeeld wordt de vergelijking $2x^2 - 2x - 4 = 0$ opgelost.

a Laat zien hoe dit met de abc-formule gaat.

b Los de vergelijking ook op door ontbinden in factoren.

Opgave 7

Bekijk de kwadratische functie $y = 2x^2 - 6x + 2$. Je wilt de snijpunten met de x-as (in twee decimalen nauwkeurig) en de top van de grafiek bepalen.

a Welke vergelijking moet je oplossen om de snijpunten met de x-as te berekenen?

b Je kunt deze vergelijking met de abc-formule oplossen. Bepaal wat dan de a, b en c zijn. Bereken daarna de discriminant.

c Kun je aan de discriminant zien hoeveel snijpunten met de x-as deze functie heeft?

d Los de vergelijking verder op en bereken de snijpunten met de x-as in twee decimalen nauwkeurig.

e Nu kun je vanuit de snijpunten met de x-as de top bepalen. Hoe gaat dat in zijn werk?

Voorbeeld 3

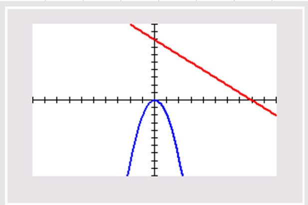
Los op: $-2x^2 < 8 - x$.

Antwoord

De bijbehorende vergelijking herleid je eerst tot: $-2x^2 + x - 8 = 0$. Je ziet dan dat: $a = -2$, $b = 1$ en $c = -8$. Discriminant $D = b^2 - 4ac = -63$. De discriminant is negatief, dus de vergelijking heeft geen oplossingen.

Nu bekijk je de grafieken van $y_1 = -2x^2$ en $y_2 = 8 - x$. Dan zie je meteen dat er geen snijpunten zijn: y_1 is voor elke x kleiner dan y_2.

Antwoord: voor elke x-waarde geldt dat $-2x^2 < 8 - x$.



Figuur 4.2

Opgave 8

Je wilt de ongelijkheid $3x^2 + 6x < x + 8$ oplossen. Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Los de bij de ongelijkheid horende vergelijking $3x^2 + 6x = x + 8$ op met de abc-formule.

b Controleer de oplossingen met de grafische rekenmachine en geef de oplossing van de ongelijkheid.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de kwadratische functie f met $f(x) = x^2 + 8x - 20$.

a Bereken de snijpunten van de grafiek van f met de x-as en de y-as.

b Bereken het minimum van f.

Opgave 10

Teken met de grafische rekenmachine in één figuur de grafieken van $f(x) = 2x^2 - x + 1$ en $g(x) = 10 - 3x$.

a Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

b Los in drie decimalen nauwkeurig op: $f(x) > g(x)$

Opgave 11

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{1}{3}x^2 + 10x + 1 = 0$

b $2x^2 - 5x = x$

c $x^2 - 5x + 10 = 0$

d $x(x - 1) = 12$

e $5 - \frac{1}{3}x^2 = 1$

Opgave 12

Los de ongelijkheden algebraïsch op. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^2 - x < x + 1$

b $x^2 - 2x > x + 3$

Opgave 13

Een korfballer scoort door een bal van bovenaf door een ronde korf te gooien. De baan die het zwaartepunt van deze bal aflegt, is gegeven door de formule $h = -0{,}125x^2 + x + 2{,}5$. h is de hoogte van de bal boven de grond en x is de horizontale afstand (gemeten over de vloer) van deze korfballer tot het punt recht onder het zwaartepunt van de bal is, beide in meters. De korf hangt op $3{,}5$ m hoogte.

a Op welke hoogte laat de speler de bal los?

Op het moment dat deze speler scoort, is het zwaartepunt van de bal precies $3{,}5$ m boven de grond in het midden van de bovenrand van de korf.

b Hoeveel meter staat deze speler voor het midden van de korf? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Hoeveel zit het hoogste punt van de baan van het zwaartepunt van de bal boven de grond?

Toepassen

In de micro-economie wordt het volgende **rekenmodel voor de winst van de verkoop van een bepaald product** gehanteerd als het bedrijf de enige aanbieder is.

Het aantal verkochte producten hangt alleen af van de prijs p in euro per stuk. Hoe hoger de prijs, hoe lager de hoeveelheid q die van dit product wordt verkocht per tijdseenheid. Bijvoorbeeld kan per week gelden $q = 400 - 2{,}5p$.

De inkoopkosten hangen weer af van de prijs per eenheid en de voorraadkosten. Bijvoorbeeld kan een eenheid product € 6,= kosten en de voorraadkosten kunnen € 1500,= per week zijn.

Voor de opbrengst — als wekelijks de hele voorraad wordt verkocht — geldt $TO = p \cdot q$, de wekelijkse kosten noem je TK en de winst is $TW = TO - TK$.

Opgave 14

Bekijk het rekenmodel voor het bepalen van de winst bij de verkoop van een bepaald product in **Toepassen**.

a Waarom is $TO = p \cdot q$?

b Welke waarden kunnen p en q aannemen?

c Stel een formule op voor TW als functie van de prijs p.

De winst is in dit rekenmodel een kwadratische functie van p.

d Bereken de maximale winst.

e Bij welke laagste prijs bedraagt de winst meer dan € 10.000?

Opgave 15

In de voorgaande opgave heb je een formule opgesteld voor de winst TW afhankelijk van de prijs p per eenheid product.

a Stel een formule op voor TW als functie van de verkochte hoeveelheid q.

b Bereken de maximale winst.

c Bij welke hoeveelheden verkocht product wordt nog verlies geleden?

Testen

Opgave 16

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $x^2 - 2x - 15 = 0$

b $-x^2 - x - 1 = 0$

c $20 - x^2 = 11$

d $x(x + 2) < 14$

e $x^2 - x + 10 \geq 3$

Opgave 17

Een door een tenniskanon afgeschoten tennisbal legt een baan af met (bij benadering) de vorm van een parabool. Hierbij hoort de formule $h = -0{,}015x^2+0{,}3x+0{,}5$. Daarbij is h (in meters) de hoogte boven de grond, en x (in meters) de horizontale afstand van de bal tot het tenniskanon.

a Op welke hoogte wordt de tennisbal afgeschoten?

b Bereken in één decimaal nauwkeurig na hoeveel meter de bal op de grond komt.

c Bereken algebraïsch de waarden van x waar de tennisbal zich hoger dan $1{,}5$ m boven de grond bevindt. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van kwadratische vergelijkingen**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.5 Veeltermen

Inleiding

Alle kwadratische functies hebben een grafiek van dezelfde vorm als de functie $f(x) = x^2$. Je kunt je ook wel functies voorstellen die bestaan uit een optelling van machtsfuncties met hogere machten, zoals bijvoorbeeld $g(x) = x^3 - 4x$ of $h(x) = 0{,}5x^4 + 8x^2 + 5$. Dergelijke functies heten veeltermfuncties, want het functievoorschrift is een veelterm (of polynoom). En je kunt je afvragen hoe het zit met hun grafieken.

Je leert in dit onderwerp

- werken met veeltermfuncties;
- toepassingen van veeltermfuncties.

Voorkennis

- werken met machtsfuncties en kwadratische functies in het algemeen;
- vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie g met functievoorschrift $g(x) = x^3 - 4x$.

a Bereken $g(5)$.

b Bereken $g(\text{-}5)$.

c Welke karakteristieken heeft de grafiek van g? Gebruik je grafische rekenmachine.

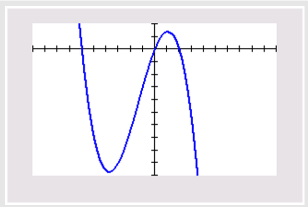
d Waarom is g geen machtsfunctie?

Uitleg

De functie $f(x) = \text{-}x^3 - 4x^2 + 12x$ is een voorbeeld van een veeltermfunctie. Elke uitdrukking die bestaat uit een optelling of aftrekking van machtsfuncties met een gehele positieve exponent en eventueel een constant getal, heet namelijk een veelterm (of polynoom).

Om de grafiek goed in beeld te krijgen, wil je vooraf weten hoeveel snijpunten met de x-as en toppen er zijn. Het is bewezen dat het maximaal aantal snijpunten met de x-as gelijk is aan de grootste exponent. In dit geval zijn er maximaal drie snijpunten met de x-as. Die drie snijpunten met de x-as kun je in dit geval algebraïsch berekenen: $\text{-}x^3 - 4x^2 + 12x = 0$ geeft $\text{-}x(x^2 + 4x - 12) = 0$. Ontbinden levert $\text{-}x(x+6)(x-2) = 0$ op, dus $x = 0 \vee x = \text{-}6 \vee x = 2$.

De enige snijpunten met de x-as zijn $(-6,0), (0,0)$ en $(2,0)$. Het aantal toppen is te beredeneren: voor hele grote (negatieve) waarden van x lijkt de grafiek op de machtsfunctie $y = -x^3$. Omdat die machtsfunctie geen toppen heeft, zijn de twee toppen tussen de drie snijpunten met de x-as ook de enige twee. De grafiek is weergegeven met $-10 \leq x \leq 10$ en $-50 \leq y \leq 10$ als vensterinstellingen.



Figuur 5.1

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Bepaal met de grafische rekenmachine beide toppen van de grafiek in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de exacte snijpunten van de grafiek van f met de parabool $y = -4x^2$.

Opgave 2

Neem de veeltermfunctie g met $g(x) = 0{,}5x^4 - 8x^2$.

a Bereken algebraïsch de drie snijpunten van de grafiek van g met de x-as.

b Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van g met de grafische rekenmachine. Rond indien nodig af op twee decimalen nauwkeurig.

c Los op: $g(x) < 4 - x^2$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **veeltermfunctie** is een functie die bestaat uit een optelling (of aftrekking) van machtsfuncties met gehele exponenten groter of gelijk aan 0. Een voorbeeld is: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, waarin a, b, c, d en e constanten zijn. Zolang $a \neq 0$ krijg je een **vierdegraadsfunctie**. Als $a = 0$ en $b \neq 0$ krijg je een **derdegraadsfunctie**, enzovoort.

De grafiek van een vierdegraadsfunctie heeft maximaal vier snijpunten met de x-as en maximaal drie toppen. En zo heeft een derdegraadsfunctie maximaal drie snijpunten met de x-as en twee toppen. Een vergelijkbare regelmaat geldt voor elke veelterm.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met $f(x) = -0{,}5x^4 + 800x^2$. Hoeveel toppen heeft de grafiek van f?

Antwoord

Om te kunnen vaststellen hoeveel toppen er zijn, breng je de grafiek van f met alle karakteristieken in beeld.

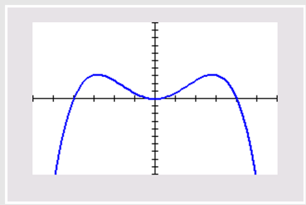
Het is handig om eerst de snijpunten met de x-as te berekenen.

$-0{,}5x^4 + 800x^2 = 0$ geeft $-0{,}5x^2(x^2 - 1600) = 0$

Dus de nulpunten zijn: $x = 0 \vee x = -40 \vee x = 40$.

De grafiek komt met alle karakteristieken in beeld met een venster van $-60 \leq x \leq 60$ en $-1000000 \leq y \leq 1000000$.

Er zijn drie toppen die je door de grafische rekenmachine kunt laten bepalen.



Figuur 5.2

Opgave 3

Derdegraadsfuncties hebben de vorm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ met $a \neq 0$.

a Neem $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ en $d = 0$. Hoeveel snijpunten met de x-as heeft f? En hoeveel toppen?

b Neem $a = 1$, $b = 4$, $c = 0$ en $d = 0$. Hoeveel snijpunten met de x-as heeft f? En hoeveel toppen?

c Neem $a = 1$, $b = 0$, $c = 4$ en $d = 0$. Hoeveel snijpunten met de x-as heeft f? En hoeveel toppen?

d Neem $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$ en $d = 0$. Hoeveel snijpunten met de x-as heeft f dan? En hoeveel toppen?

e Hoeveel snijpunten met de x-as en hoeveel toppen heeft een derdegraadsfunctie maximaal?

Opgave 4

Bekijk de vierdegraadsfunctie $f(x) = 2x^4 - 512x^2$. Je wilt de snijpunten met de x-as en de toppen van de grafiek van f bepalen. Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken de snijpunten van f met de x-as.

b Bij welke vensterinstellingen krijg je nu de grafiek van f goed in beeld?

c Hoeveel toppen zijn er?

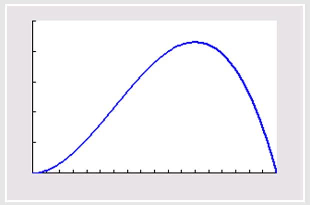
d Bepaal de extremen van f in één decimaal nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Een landbouwer verbouwt bieten. Bieten moet je vrijhouden van onkruid, dat heet ‘wieden’. Hoe meer mensen gaan wieden, hoe beter de bieten groeien. Maar als er te veel mensen gaan wieden, lopen ze elkaar in de weg en vertrappen ze de bietenplantjes zelf. Hierbij past een economisch model waarbij de oogst Q in honderden kg bieten, afhangt van het aantal werkers w volgens de formule $Q = -0{,}5w^3 + 9w^2$. Hoeveel wieders kan deze landbouwer het beste inzetten?

Antwoord

Bekijk eerst de grafiek van deze functie. Omdat Q niet negatief kan zijn en de nulpunten $w = 0$ en $w = 18$ zijn, geldt voor de functie $Q(w)$ dat $0 \leq x \leq 18$. De grafiek is weergegeven met een venster van $0 \leq x \leq 18$ en $0 \leq y \leq 500$.



Figuur 5.3

Op de vraag zijn twee antwoorden mogelijk:

- Als de boer een maximale oogst nastreeft, dan kan hij het beste twaalf wieders inzetten.
- Als de boer zijn werkers zo efficiënt mogelijk wil inzetten (die kosten immers geld) dan kan hij beter zeven werkers aan het werk laten. Want vanaf de achtste werker wordt de toename van de oogst kleiner. Bekijk eventueel een tabel van deze functie.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je een economisch model waarin een derdegraadsfunctie voorkomt.

a Breng de grafiek in beeld.

b Licht de mogelijke antwoorden op de vraag uit het voorbeeld met behulp van de grafiek en de bijpassende tabel toe.

Verwerken

Opgave 6

Ga voor de functies f, g en h na hoeveel toppen de bijbehorende grafieken hebben. Gebruik hiervoor de grafische rekenmachine.

a $f(x) = 0{,}1x^4 - 200x^2$

b $g(x) = 5x^3 + 10x^2 + 6$

c $h(x) = -x^4 - 9x$

Opgave 7

Gegeven is de functie f met $f(x) = \left(x^2 - 4\right)^2 - 100$.

a Laat zien dat hier sprake is van een vierdegraadsfunctie.

b Bereken algebraïsch de snijpunten met de x-as van de grafiek van f.

c Bereken de extremen van f.

d Los algebraïsch op: $f(x) \leq -91$.

Opgave 8

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Los de ongelijkheden op met behulp van de grafische rekenmachine.

a $x^3 - 4x^2 = 21x$

b $x\left(x^3 - 1\right) \leq 7x$

c $x(6 - x)(x + 5) \geq 0$

Opgave 9

Een bedrijf gebruikt voor de winst die het per maand maakt de formule $W = -q^3 + 9q^2 + 20q - 34$. Hierbij is q de productie in duizendtallen en W de winst in duizenden euro's.

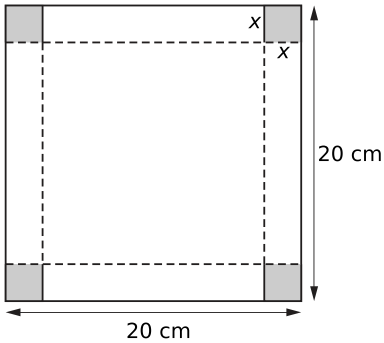
a Hoe groot is de winst als het bedrijf 2300 producten maakt?

b Hoeveel bedraagt de laagste productie waarbij het bedrijf € 166.000 winst maakt?

c Hoe groot is de winst maximaal?

Opgave 10

Je maakt een bakje met een open bovenkant door van een vierkant stuk karton van 20 cm bij 20 cm de vier hoeken in te knippen en als plakstroken te gebruiken. De ingeknipte hoeken zijn vierkantjes van x cm bij x cm. Er ontstaat zo een bakje met een hoogte van x cm.



Figuur 5.4

a Welke afmetingen heeft de bodem van het bakje nu?

b Stel een formule op voor de inhoud $I(x)$ van dit bakje. (Hoewel de bovenkant open is moet je ervan uit gaan dat er niets boven het bovenvlak uitsteekt.)

c Voor welke waarden van x is de inhoud van het bakje groter dan 500 cm^3?

d Voor welke waarde van x is de inhoud van het bakje maximaal? Rond af op twee decimalen.

Toepassen

Opgave 11: ChemTech

ChemTech produceert een bepaald onkruidbestrijdingsmiddel. Voor de productiekosten per maand maken zij gebruik van de formule $TK = 100q^3 - 600q^2 + 1300q$. Hierin is q de geproduceerde hoeveelheid per maand in duizenden kg en is TK de totale kosten in euro's.

ChemTech verkoopt het middel voor € 2,25 per kg.

a Hoeveel bedragen de productiekosten als er 2500 kg geproduceerd wordt?

b Stel een formule op voor de totale winst TW afhankelijk van q. Ga ervan uit dat de geproduceerde hoeveelheid elke maand ook wordt verkocht.

c Bereken bij welke productie per maand de winst maximaal is.

Testen

Opgave 12

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $x^4 - 8x^2 > 0$

b $-x^2(x-5) = 2x^2$

c $20 - x^4 = 11$

d $(x^2-4)(x^2-9) < 36$

Opgave 13

Voor de maandelijkse winst gebruikt een bedrijf de formule $W = -q^3 + 12q^2 + 8q - 40$. Hierbij is W de winst in honderden euro's en q de productie in honderdtallen per maand.
Bepaal bij welke productie de winst maximaal is en geef de maximale winst. Rond af op gehele euro's.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Machtsfuncties**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- recht evenredig met een macht — machtsverbanden;
- machtsfuncties, eigenschappen afhankelijk van exponent — machtsvergelijking;
- kwadratische functie — dal- en bergparabool — top — symmetrieas — kwadratische vergelijking;
- kwadraat afsplitsen — *abc*-formule;
- veeltermfunctie — derdegraads - en vierdegraads functie.

Activiteitenlijst

- machtsverbanden herkennen — heen- en terugrekenen bij machtsverbanden;
- de eigenschappen van machtsfuncties vinden — werken met transformaties van machtsfuncties;
- kwadratische functies tekenen — kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen;
- kwadratische functies schrijven als machtsfuncties — de *abc*-formule gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met veeltermfuncties.

Achtergronden

Een kwadraat is (de oppervlakte van) een vierkant, in de Oudheid werden kwadraten altijd door vierkanten voorgesteld. En (vierkants)wortels zijn de lengten van de zijden van een vierkant. Heel lang kon daar alleen meetkundig mee worden gemanipuleerd, want in de Oudheid waren de enige getallen 1, 2, 3, ... en de verhoudingen van die getallen (breuken dus). En daarmee was bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ geen getal, kon alleen worden benaderd met getallen. Hetzelfde gold voor kubussen (derde machten zouden wij zeggen) en kubische wortels (derdemachts wortels). Maar heel af en toe waren dat getallen, meestal niet. Toch werd met dergelijke machten gewerkt, maar steeds als vierkant of kubus. Ook gewone getallen (meetbare getallen) waren eigenlijk concrete lengtes net als wortels en π (onmeetbare getallen). Tot ruim voorbij de Middeleeuwen werd op die manier over getallen gedacht.

Vergelijkingen werden geformuleerd in termen van 'een vierkant en een lengte zijn samen 90, hoe groot is die lengte?' Nu noteer je dat als $x^2 + x = 90$ en dan wil je weten hoe groot x is. Na de Griekse wiskundige **Diophantos (ongeveer 200—284)** hielden vooral geleerden uit het grote Islamitische Rijk dat van 622 tot 1450 het Midden-Oosten domineerde zich met het oplossen van kwadratische vergelijkingen bezig. De wiskundige **Al-Khwarizmi (omstreeks 780—845)** bedacht de abc-formule, hoewel hij totaal andere notaties gebruikte.

Pas veel later ontstonden in West-Europa de moderne notaties zoals de gewoonte om letters te gebruiken voor variabelen en het wortelteken. Ook werd het getalbegrip verruimd, zodat alle wortels als getallen werden opgevat.

Figuur 6.1

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 10 - 2(x-1)^5$.

a Laat zien hoe de grafiek van f kan ontstaan uit de grafiek van $y = x^5$.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de beide assen. Rond indien nodig af op twee decimalen.

c Los algebraïsch op: $f(x) = 496$.

d Los algebraïsch op: $f(x) > 8$.

Opgave 2

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $-0{,}5(x-2)^4 + 45 \leq 4{,}5$

b $x(x-2) = 3x - 6$

c $x^3 - 4x^2 = 10x$

d $6 - 0{,}1(x-3)^{\frac{1}{3}} = 5$

e $\frac{1}{4}x^2 \geq x + 5$

f $\frac{4}{x^3} - 6 < 14$

Opgave 3

Een bedrijf gebruikt voor de winst die het per maand maakt de formule $W = -q^3 + 10q^2 + 14q - 20$. Hierbij is q de productie in honderdtallen en W de winst in honderden euro.

a Hoe groot is de winst als er 150 producten worden gemaakt?

b Bij welke laagste productie wordt er € 10862,50 winst gemaakt?

c Hoe groot is de maximale winst?

Opgave 4

Een kalkoen braden is lastig, omdat het enige tijd duurt voordat ook het binnenste van de kalkoen op temperatuur komt. Hoe lang dat duurt hangt af van het gewicht. Het is de kunst om de kalkoen zo lang te braden dat het binnenste net gaar is. Je kunt dat niet controleren zonder de kalkoen aan te snijden. De optimale braadtijd is daarom moeilijk vast te stellen. Gelukkig geven kookboeken vaak aanwijzingen voor de braadtijd, die afhankelijk is van het gewicht van de kalkoen. Onderzoekers hebben vastgesteld dat met de volgende formule het beste resultaat wordt verkregen: $t = 11g^{\frac{2}{3}}$
Hierin is g het gewicht van de kalkoen in kilogram en t de tijd in minuten die nodig is om het binnenste van de kalkoen op een temperatuur van 85 °C te brengen.

a Bereken hoe lang het bij een kalkoen van 3 kg duurt voor het binnenste op een temperatuur van 85 °C is. Verwacht je dat een kalkoen van 6 kg daarvoor twee keer zoveel tijd nodig heeft?

Als het binnenste van de kalkoen een temperatuur heeft van 85 °C duurt het nog een tijd voordat de kalkoen gaar is. Ga ervan uit dat die tijd 80 minuten is en dat die tijd niet afhangt van het gewicht van de kalkoen.

b Geef de formule voor de totale braadtijd T van een kalkoen afhankelijk van het gewicht. Is de totale braadtijd recht evenredig met een macht van het gewicht?

c Verklaar waarom het minder moeilijk is om kooktijden vast te stellen dan braadtijden. Is de kooktijd van bijvoorbeeld aardappels ook afhankelijk van het gewicht? En de totale tijd dat aardappels op het fornuis moeten staan?

Opgave 5

Een farmaceutisch bedrijf heeft een nieuw medicijn ontwikkeld tegen migraine. Het product komt in tabletvorm op de markt. Uit onderzoek is gebleken dat in West-Europa per dag gemiddeld 50000 mensen aan migraine lijden. Het bedrijf wil nu deze mensen helpen, maar vooral ook winst maken op het medicijn. Het medicijn zal worden verkocht in doosjes met 20 tabletten. Het aantal per dag verkochte doosjes wordt benaderd door de formule: $q = 10000 - 3000p$ waarin p de prijs in euro per doosje is.

a Welke formule kun je opstellen voor het verkoopresultaat V per dag afhankelijk van de prijs p?

b De fabrikant is geïnteresseerd in de inkomsten. Van een doosje verkochte tabletten gaat 84% van de opbrengst naar de tussenhandel en 16% naar de fabrikant. Welke formule geldt voor het resultaat R voor de fabrikant?

c De productiekosten bedragen € 870 per dag en € 0,09 per doosje. Welke formule geldt voor de productiekosten K als functie van p?

d Stel een formule op voor de winst W van de fabrikant.

e Bij welke prijs maakt de fabrikant winst?

f Bij welke prijs is zijn winst zo groot mogelijk?

Toepassen

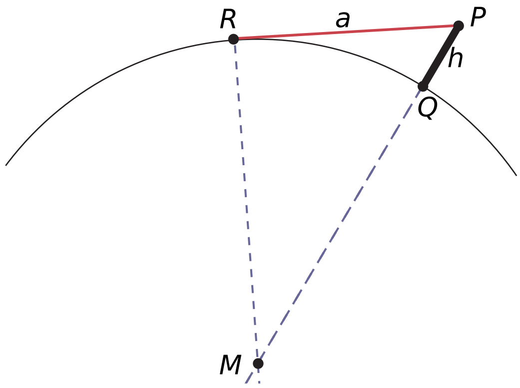
Opgave 6: Kijkafstand

De formule voor de kijkafstand uit het begin van het onderwerp ‘Machtsfuncties’ kun je heel goed zelf afleiden.

Neem eens aan dat de aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40000 km. De hoogte h (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand a (in m) is dan de lengte van PR (eigenlijk van de boog QR maar dat verschilt niet veel van elkaar).

Omdat h^2 heel veel kleiner is dan 12732400h kun je h^2 verwaarlozen. Je vindt dan $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

De kijkafstand a is dus bij benadering een machtsfunctie van de hoogte h die je ogen boven het aardoppervlak zitten.



Figuur 6.2

a Hoe kun je nu a berekenen? Maak zo een formule voor a afhankelijk van h.

b Laat zien dat ongeveer geldt $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

c De gevonden formule is iets anders dan die aan het begin van het onderwerp ‘Machtsfuncties’. Hoe zou dat kunnen komen?

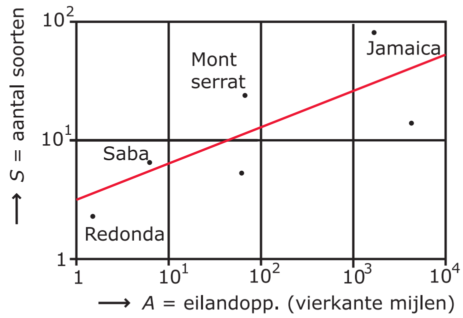
d Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.

e Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op Aarde?

Examen

Opgave 7: Diersoorten

Het lijkt aannemelijk dat er een verband bestaat tussen de oppervlakte van een gebied en het aantal verschillende diersoorten dat in dat gebied voorkomt. Een theorie hierover stelt dat het aantal verschillende diersoorten op een eiland in een bepaalde klimaatzone alleen afhankelijk is van de oppervlakte van het eiland. In deze opgave kijken we naar de verschillende soorten reptielen op eilanden in het Caraïbisch gebied. Onderzoekers telden op vele eilanden het aantal verschillende soorten reptielen (S). In de volgende figuur zijn de gegevens van enkele eilanden weergegeven.



Figuur 6.3

Volgens de theorie is het verband tussen de oppervlakte A van een eiland (in vierkante mijlen) en het aantal soorten reptielen (S) op dat eiland te beschrijven met de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$. De lijn in de bovenstaande figuur is de grafiek die bij deze formule behoort.

a Op het eiland Jamaica zijn meer soorten reptielen aangetroffen dan op grond van de theorie (de formule) verwacht mag worden. Hoeveel soorten reptielen zou een even groot eiland volgens de theorie hebben? Licht je antwoord toe.

b Binnen de theorie geldt als ruwe regel: ‘Bij een 10 keer zo groot eiland vinden we 2 keer zoveel diersoorten.’ Laat zien dat dit uit de formule volgt.

c Op een groot eiland worden veel verschillende soorten reptielen met uitsterven bedreigd. Men wil maatregelen nemen om de natuur te beschermen. Daarbij moet er een keuze worden gemaakt uit twee mogelijkheden:

- Oprichting van 1 groot natuurreservaat met een oppervlakte van 400 vierkante mijlen.
- Oprichting van 2 kleinere reservaten, elk met een oppervlakte van 200 vierkante mijlen. Dergelijke natuurreservaten liggen geïsoleerd in de bewoonde wereld en kunnen als ‘eilanden’ beschouwd worden.

Voor het schatten van het aantal soorten reptielen dat in zo’n reservaat zal voorkomen kan de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$ gebruikt worden. Of voor 1 of 2 reservaten gekozen wordt, is mede afhankelijk van het aantal soorten dat de twee kleinere reservaten gemeen zullen hebben. Men neemt aan dat er 8 soorten reptielen zijn die zowel in het éne als het andere kleine reservaat zullen voorkomen. Men wil de mogelijkheden kiezen waarbij in totaal zoveel mogelijk verschillende soorten reptielen zullen voorkomen.

Welke van de twee mogelijkheden zal men kiezen? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)

Opgave 8: Houtindustrie

Een deel van de bossen in Nederland is bestemd voor de houtindustrie. Voordat een bos wordt gekapt, onderzoekt men meestal eerst hoeveel m^3 hout het bos op zal leveren. Dit gebeurt aan de hand van de diameter en de hoogte van bomen. De diameter van een boom wordt gemeten op een vaste hoogte.

Voor het bepalen van de hoeveelheid hout in één boom wordt gebruikgemaakt van de volgende formule: $V = f \cdot d^2 \cdot h$ met diameter d en hoogte h (beide in meters). In deze formule is V het volume aan hout in de boom in m^3. De factor f heet de vormfactor. De vormfactor is een getal dat afhangt van de soort boom en de diameter d van de boom. Een voorbeeld van een boom die gebruikt wordt in de houtindustrie is de grove den (Pinus sylvestris). Zie de afbeelding.

Figuur 6.4

Voor de grove den wordt het verband tussen de vormfactor f en de diameter d (m) bij benadering gegeven door de volgende formule: $f = 0{,}30 \cdot d^2 - 0{,}36 \cdot d + 0{,}46$

In een bos staat een grove den met een diameter van $0{,}16$ m.

a Bereken hoeveel procent de vormfactor van deze boom afneemt als de diameter van deze boom met 100% toeneemt.

De grootste bekende diameter van een grove den is $1{,}2$ m. Naarmate de diameter van een grove den groter is, is de hoogte ook groter. Voor de grove den geldt bij benadering het volgende verband tussen de hoogte h en de diameter d: $h = 44 \cdot d^{0,65}$. Ook hier zijn de diameter en de hoogte in meters.

b Een grove den van 40 m hoog wordt gekapt. Bereken hoeveel hout deze grove den volgens de formules bevat.

Op basis van de formule $f = 0{,}30 \cdot d^2 - 0{,}36 \cdot d + 0{,}46$ en de formule $h = 44 \cdot d^{0{,}65}$ kan de formule $V = f \cdot d^2 \cdot h$ worden geschreven als $V = a \cdot d^{4{,}65} + b \cdot d^{3{,}65} + c \cdot d^{2{,}65}$. Hierin zijn a, b en c constanten.

c Toon aan dat V inderdaad geschreven kan worden als $V = a \cdot d^{4{,}65} + b \cdot d^{3{,}65} + c \cdot d^{2{,}65}$ en bereken a, b en c in twee decimalen nauwkeurig.

(naar: vwo examen wiskunde A in 2011, eerste tijdvak)

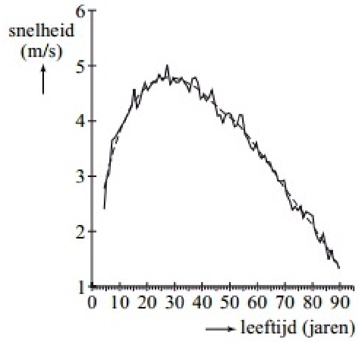
Opgave 9: Marathon

De Olympische hardloopwedstrijd met de grootste lengte is de marathon: ruim 42 km, om precies te zijn 42195 m. De marathon wordt zowel door mannen als door vrouwen gelopen. In deze opgave concentreren we ons op de marathonloopsters. De prestatie van een loopster geeft men in krantenberichten meestal weer door de tijd waarin de marathon is afgelegd, maar een even duidelijke maat is de gemiddelde snelheid over het gehele parcours. Dit noemen we kortweg de snelheid. Deze snelheid wordt uitgedrukt in m/s (meters per seconde). Een marathonloopster legt de marathon af in 2 uur, 43 minuten en 32 seconden.

a Bereken haar snelheid in m/s.

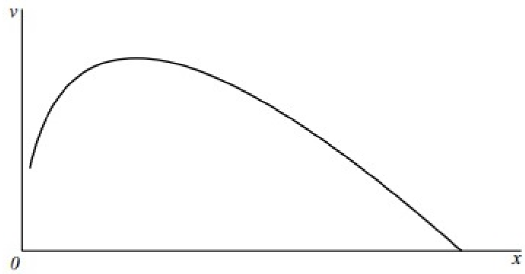
Elmer Sterken van de Rijksuniversiteit Groningen heeft onderzoek gedaan naar het verband tussen de snelheid van Amerikaanse marathonloopsters en hun leeftijden.

Je ziet een figuur uit het rapport dat hij daarover geschreven heeft. In deze figuur is voor iedere leeftijd weergegeven: ‘de hoogste snelheid ooit gelopen door een Amerikaanse’ (zie de zigzaglijn). De geregistreerde leeftijden lopen van 6 tot en met 90 jaar.



Figuur 6.5

De ‘zigzaglijn’ in de figuur is benaderd door de grafiek met de formule: $v = 2{,}836 \cdot x^{0{,}665} - 1{,}390 \cdot x^{0{,}818}$. Hierin is v de hoogste snelheid in m/s van marathonloopsters met een leeftijd van x jaar. In de tweede figuur is de grafiek van v weergegeven.



Figuur 6.6

In het vervolg van deze opgave beschouwen we deze laatste grafiek en de formule voor v als een wiskundig model van de werkelijkheid.
Petra loopt vaker een marathon en hoopt binnenkort de marathon binnen 3 uur te volbrengen. Petra is 52 jaar.

b Kan een 52-jarige marathonloopster volgens dit model de marathon binnen 3 uur lopen? Licht je antwoord toe.

c De grafiek van v heeft een maximum. Volgens het model is er dus blijkbaar een leeftijd waarop marathonloopsters (gemiddeld) het beste presteren. Onderzoek op welke leeftijd de prestatie het beste zou moeten zijn.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2010, eerste tijdvak)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

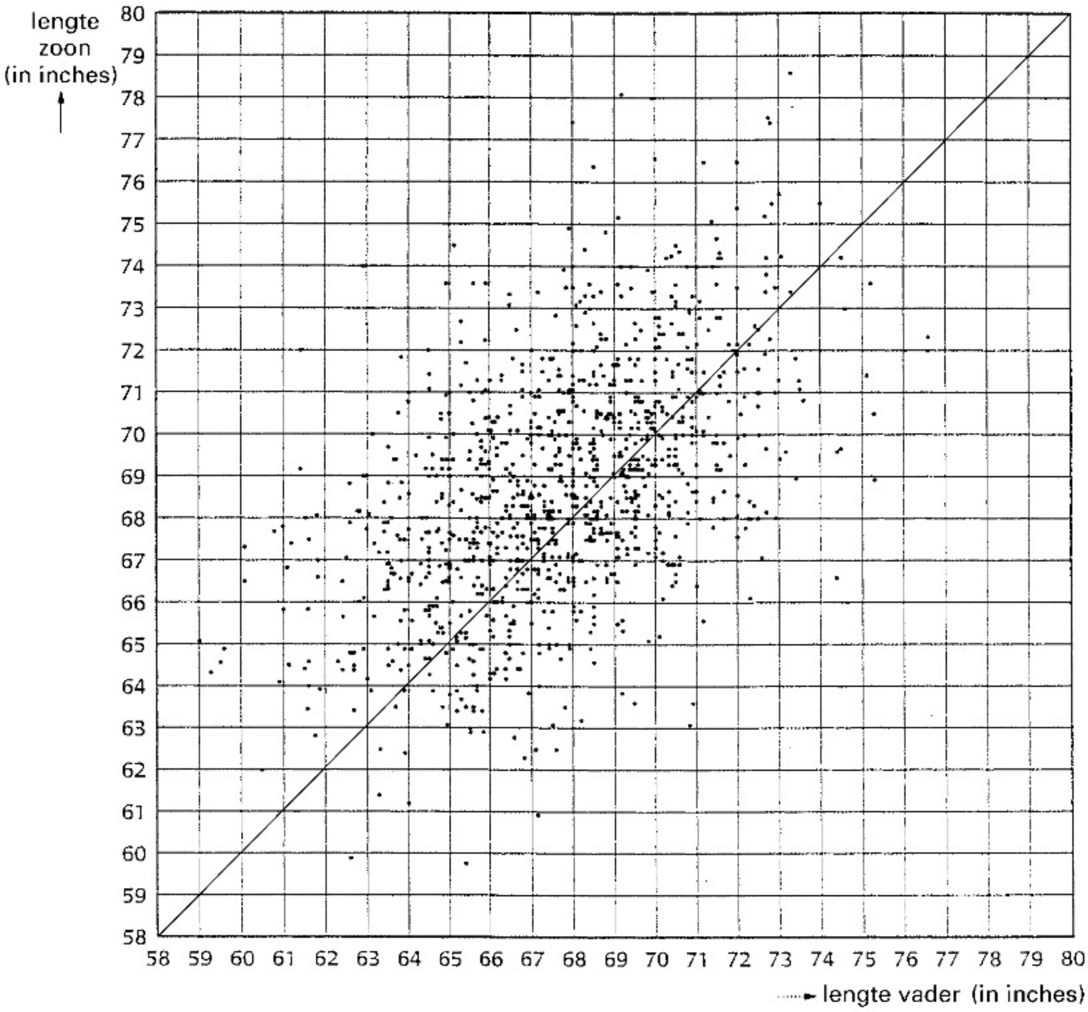
De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

www.math4all.nl

Werkblad bij Opgave 9 op pagina 76



Werkblad bij Opgave 9 op pagina 76

lengte van 1064 zonen

59.7	64.5	65.5	66.3	66.8	67.3	67.7	68.0	68.4	68.8	69.3	69.7	70.2	70.8	71.3	72.0	73.4
59.9	64.5	65.5	66.3	66.8	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	69.7	70.2	70.8	71.3	72.0	73.5
60.9	64.5	65.5	66.3	66.8	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	69.7	70.2	70.8	71.3	72.1	73.5
61.4	64.5	65.5	66.3	66.9	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	69.7	70.2	70.8	71.3	72.1	73.5
62.0	64.6	65.5	66.4	66.9	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	69.8	70.2	70.8	71.3	[950] 72.1	73.5
62.3	64.6	65.5	66.4	66.9	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	69.8	70.3	70.8	71.3	72.1	73.5
62.4	64.6	65.5	66.4	66.9	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	[700] 69.8	70.3	70.8	71.3	72.2	73.6
62.5	64.6	65.6	66.4	66.9	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	69.8	70.3	70.8	71.4	72.2	73.6
62.5	64.6	65.6	66.4	66.9	67.3	67.7	[450] 68.1	68.4	68.9	69.3	69.8	70.3	70.8	71.4	72.2	73.6
62.5	64.6	65.6	66.4	66.9	67.3	67.7	68.1	68.5	68.9	69.3	69.8	70.3	70.8	71.4	72.2	73.6
62.7	64.7	65.6	[200] 66.4	66.9	67.3	67.7	68.1	68.5	69.0	69.3	69.8	70.3	70.8	71.4	72.2	73.6
62.8	64.7	65.6	66.4	66.9	67.3	67.7	68.1	68.5	69.0	69.3	69.8	70.3	70.8	71.4	72.2	73.6
62.8	64.7	65.6	66.5	66.9	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.8	70.3	70.8	71.4	72.2	73.6
62.9	64.7	65.6	66.5	66.9	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.8	70.3	70.9	71.4	72.3	73.6
62.9	64.7	65.6	66.5	66.9	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.8	70.3	70.9	71.4	72.3	73.8
63.0	64.8	65.7	66.5	66.9	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.8	70.3	70.9	71.4	72.3	73.9
63.1	64.8	65.7	66.5	66.9	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.8	70.4	70.9	71.4	72.3	73.9
63.1	64.8	65.7	66.5	67.0	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.8	70.4	70.9	[900] 71.4	72.3	74.0
63.1	64.8	65.7	66.5	67.0	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.4	72.3	74.0
63.2	64.8	65.7	66.5	67.0	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	[650] 69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.3	74.0
63.4	64.8	65.7	66.5	67.0	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.4	74.0
63.4	64.9	65.7	66.5	67.0	67.4	[400] 67.8	68.1	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.4	74.0
63.4	64.9	65.7	66.5	67.0	67.4	67.8	68.2	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.4	74.0
63.4	64.9	[150] 65.8	66.5	67.0	67.4	67.8	68.2	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.4	74.0
63.4	64.9	65.8	66.5	67.0	67.5	67.8	68.2	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.4	74.2
63.5	64.9	65.8	66.5	67.0	67.5	67.8	68.2	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.5	74.2
63.5	64.9	65.8	66.5	67.0	67.5	67.8	68.2	68.5	69.1	69.4	69.9	70.4	71.0	71.5	72.5	74.2
63.5	64.9	65.8	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	69.1	69.4	69.9	70.4	71.0	71.5	72.5	74.2
63.5	64.9	65.8	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	69.1	69.4	69.9	70.4	71.0	71.6	72.5	74.3
63.5	64.9	65.8	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	69.1	69.4	69.9	70.4	71.0	71.6	72.6	74.3
63.6	64.9	65.8	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	69.1	69.5	70.0	70.4	[850] 71.0	71.6	72.6	74.3
63.6	65.0	65.8	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	69.1	69.5	70.0	70.4	71.0	71.6	72.6	74.3
63.7	65.0	65.9	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	[600] 69.1	69.5	70.0	70.4	71.0	71.6	72.7	74.3
63.8	65.0	65.9	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	69.1	69.5	70.0	70.5	71.0	71.7	72.7	74.4
63.8	65.0	65.9	66.6	67.0	[350] 67.5	67.9	68.2	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.0	71.7	72.7	74.5
63.8	65.0	65.9	66.6	67.0	67.5	67.9	68.2	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.0	71.7	72.7	74.5
63.9	[100] 65.0	65.9	66.6	67.0	67.5	67.9	68.2	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.0	71.7	72.7	74.7
63.9	65.0	65.9	66.6	67.1	67.5	67.9	68.2	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.0	71.7	72.7	74.8
63.9	65.0	66.0	66.6	67.1	67.5	67.9	68.2	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.0	71.7	72.8	74.9
63.9	65.0	66.0	66.6	67.1	67.5	67.9	68.2	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.1	71.7	72.8	75.1
63.9	65.0	66.0	66.6	67.1	67.5	67.9	68.3	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.1	71.7	72.8	75.2
63.9	65.1	66.0	66.6	67.1	67.5	67.9	68.3	68.7	69.2	69.5	70.0	70.5	71.1	71.7	72.8	[1050] 75.2
64.0	65.1	66.0	66.6	67.1	67.5	67.9	68.3	68.7	69.2	69.5	70.0	70.5	71.1	71.8	72.8	75.4
64.0	65.1	66.0	66.7	67.1	67.5	68.0	68.3	68.7	69.2	69.5	70.0	[800] 70.5	71.1	71.8	72.9	75.5
64.0	65.1	66.0	66.7	67.1	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.5	70.0	70.5	71.1	71.8	73.0	75.5
64.1	65.1	66.0	66.7	67.1	67.6	68.0	68.3	[550] 68.7	69.2	69.6	70.0	70.5	71.1	71.8	73.0	75.7
64.2	65.2	66.1	66.7	67.1	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.6	70.0	70.5	71.1	71.8	73.0	76.4
64.2	65.2	66.1	66.7	[300] 67.1	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.6	70.0	70.5	71.1	71.8	73.1	76.5
64.2	65.2	66.1	66.7	67.1	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.6	70.0	70.6	71.2	71.8	73.1	76.5
[50] 64.3	65.3	66.1	66.7	67.1	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.6	70.0	70.6	71.2	71.8	73.1	76.6
64.3	65.3	66.1	66.7	67.2	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.6	70.1	70.6	71.2	71.8	73.2	77.4
64.3	65.3	66.2	66.7	67.2	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.6	70.1	70.6	71.2	71.8	73.2	77.4
64.3	65.3	66.2	66.7	67.2	67.6	68.0	68.3	68.8	69.2	69.6	70.1	70.6	71.2	71.8	73.2	77.5
64.3	65.3	66.2	66.7	67.2	67.6	68.0	68.3	68.8	69.2	69.7	70.1	70.6	71.2	71.9	73.3	78.0
64.4	65.3	66.3	66.7	67.2	67.6	68.0	68.3	68.8	69.3	69.7	70.1	70.6	71.2	71.9	[1000] 73.3	78.1
64.4	65.3	66.3	66.7	67.2	67.7	68.0	68.3	68.8	69.3	69.7	70.1	70.6	71.3	71.9	73.3	78.6
64.4	65.4	66.3	66.7	67.2	67.7	68.0	68.3	68.8	69.3	69.7	[750] 70.1	70.6	71.3	72.0	73.3	
64.4	65.4	66.3	66.8	67.2	67.7	68.0	68.4	68.8	69.3	69.7	70.1	70.7	71.3	72.0	73.3	
64.4	65.4	66.3	66.8	67.2	67.7	68.0	[500] 68.4	68.8	69.3	69.7	70.2	70.7	71.3	72.0	73.4	
64.4	65.4	66.3	66.8	67.2	67.7	68.0	68.4	68.8	69.3	69.7	70.2	70.7	71.3	72.0	73.4	
64.4	65.4	66.3	[250] 66.8	67.3	67.7	68.0	68.4	68.8	69.3	69.7	70.2	70.7	71.3	72.0	73.4	
64.4	65.4	66.3	66.8	67.3	67.7	68.0	68.4	68.8	69.3	69.7	70.2	70.7	71.3	72.0	73.4	
64.5	65.5	66.3	66.8	67.3	67.7	68.0	68.4	68.8	69.3	69.7	70.2	70.7	71.3	72.0	73.4