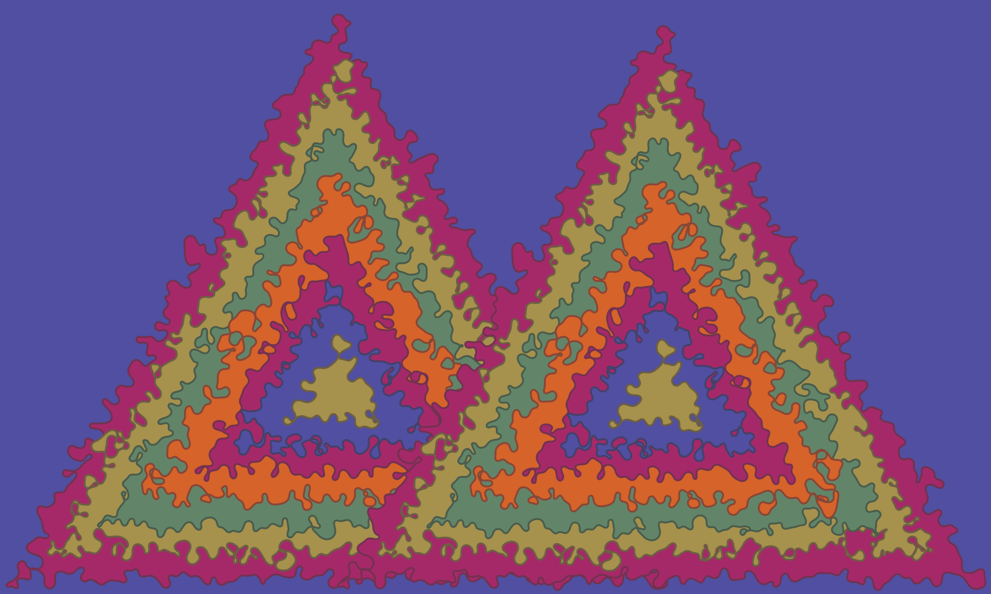
Wiskunde A

4 VWO

Katern 2

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Veranderingen

1.1 In grafieken

Inleiding

In de Delta Nederland verandert de waterstand voortdurend. De veranderingen worden beschreven met eb, laagwater, vloed en hoogwater. Tussen hoogwater en laagwater daalt het water. Maar stijging en daling zijn niet constant: vlak voor hoogwater neemt de stijging langzaam af en na hoogwater neemt de daling een paar uur lang toe.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen stijgend en dalend en constant gebruiken bij grafieken;
- toenemende, afnemende en constante stijging en daling herkennen;
- (lokale) maxima en minima van een grafiek bepalen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Zoek via **deze website van Rijkswaterstaat** een grafiek van de waterstand bijvoorbeeld bij Vlissingen. Klik op de huidige waterstand en kies ‘Meer info’.

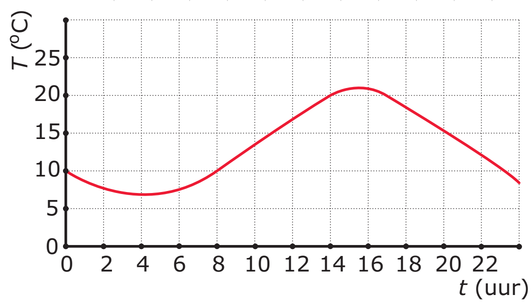
a Herken je stijging en daling in de grafiek? Kun je soorten stijging en daling beschrijven?

b Wanneer stijgt het water het snelst?

c Hoe zit het met de stijging van het water bij ‘hoog water’?

Uitleg

Deze grafiek geeft de temperatuur T (in °C) op een bepaalde plaats weer afhankelijk van het tijdstip t (in uren) op de dag.



Figuur 1.2

De temperatuur stijgt vanaf $t = 4$ tot aan $t = 15{,}5$, want als t toeneemt vanaf 4 tot $15{,}5$, wordt ook T groter. Je zegt dan dat de grafiek stijgend is op het interval $\langle 4; 15{,}5 \rangle$.

De temperatuur daalt vanaf $t = 15{,}5$ tot aan $t = 24$, want als t toeneemt vanaf $15{,}5$ tot 24, wordt T juist kleiner. Je zegt dan dat de grafiek dalend is op het interval $\langle 15{,}5; 24 \rangle$.

De temperatuur is nergens constant, hoewel hij tussen 14 uur en 17 uur maar weinig verandert.

Als je de stijging op het interval $\langle 4; 15{,}5 \rangle$ nauwkeuriger bekijkt zie je dat hij op het interval $\langle 4{,}8 \rangle$ steeds groter wordt; de grafiek wordt steiler. Er is op dat interval sprake van toenemende stijging. Op het interval $\langle 8{,}14 \rangle$ daarentegen is er een constante stijging; de grafiek blijft daar voortdurend even steil. Op het interval $\langle 14; 15{,}5\rangle$ wordt de stijging steeds minder, het gaat nu om afnemende stijging. Ga zelf na dat de grafiek op het interval $\langle 0{,}4\rangle$ een afnemende daling vertoont. En op het interval $\langle 17{,}23\rangle$ is er een vrijwel constante daling.

De hoogste dagtemperatuur is 21 °C. Dit is het maximum van T en het wordt bereikt op $t = 15{,}5$. De laagste dagtemperatuur is 7 °C. Dit is het minimum van T en het wordt bereikt op $t = 4$.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de dagtemperatuur in de **Uitleg**.

a Als de grafiek stijgt, neemt T dan toe of juist af?

b Als de grafiek toenemend stijgt, wat gebeurt er dan met T?

c Wat betekent voor de grafiek het verschil tussen een toenemende daling en een afnemende daling? En wat betekent dit voor de temperatuur T?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een functie is:

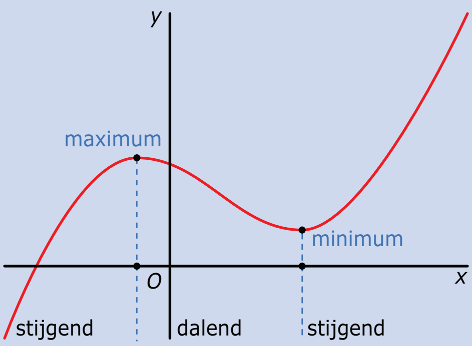
- **stijgend** als de y-waarden groter worden bij groter wordende x;
- **dalend** als de y-waarden kleiner worden bij groter wordende x.

Verder heeft de functie:

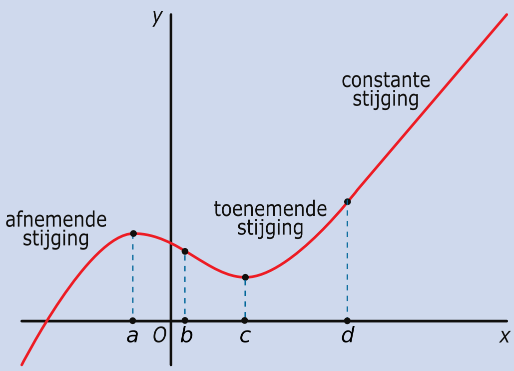
- een **maximum** als hij overgaat van stijgend in dalend in een aaneengesloten grafiek;
- een **minimum** als hij overgaat van dalend in stijgend in een aaneengesloten grafiek.

Deze waarden noem je de **extremen**, ook wel de **uiterste waarden** van de functie.

Om aan te geven voor welke waarden van x van een bepaalde soort stijging of daling sprake is, gebruik je **intervallen**.



Figuur 1.3



Figuur 1.4

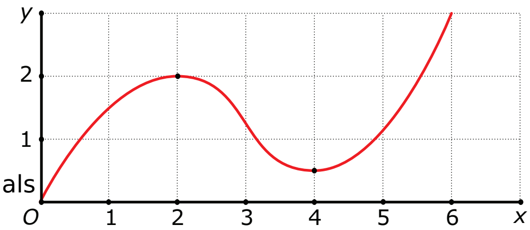
Deze grafiek heeft een:

- **afnemende stijging** op het interval $\langle \leftarrow, a\rangle$, omdat de stijging daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende daling** op het interval $\langle a,b\rangle$, omdat de daling daar steeds sterker wordt;
- **afnemende daling** op het interval $\langle b,c\rangle$, omdat de daling daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende stijging** op het interval $\langle c,d\rangle$, omdat de stijging daar steeds sterker wordt;
- **constante stijging** op het interval $\langle d, \rightarrow\rangle$, omdat de stijging daar steeds even sterk blijft, de grafiek is daar een rechte lijn.

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek van functie $y = f(x)$ op het interval $[0,6]$.

Beschrijf de veranderingen in deze grafiek.



Figuur 1.5

Antwoord

De veranderingen in deze grafiek kun je van links naar rechts als volgt beschrijven:

- de grafiek is afnemend stijgend op het interval $\langle 0,2\rangle$.
- de grafiek is toenemend dalend op het interval $\langle 2,3\rangle$.
- de grafiek is afnemend dalend op het interval $\langle 3,4\rangle$.
- de grafiek is toenemend stijgend op het interval $\langle 4,6\rangle$.

Verder heeft de functie:

- een maximum(waarde) van 2 voor $x = 2$: max. $f(2) = 2$;
- een minimum(waarde) van $0{,}6$ voor $x = 4$: min. $f(4) = 0{,}6$.

Dit zijn de extremen (uiterste waarden) van de functie.

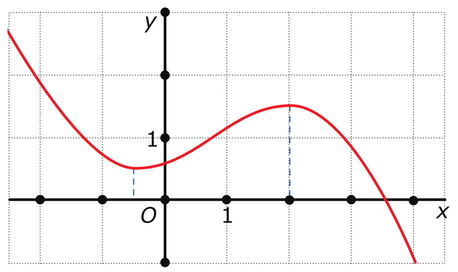
Opmerking: Dat er een minimum is bij $x = 4$, wil niet zeggen dat y niet lager kan zijn. Je ziet dat bijvoorbeeld bij $x = 0$ de y-waarde lager is. Het minimum is een lokaal (plaatselijk) minimum, net als het maximum.

Opgave 2

Bekijk de grafiek van f.

a Beschrijf met intervallen de verandering van de grafiek.

b Schrijf het maximum en het minimum van de functie op.



Figuur 1.6

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie f met functievoorschrift $f(x) = -5+36x-6x^2$.
Beschrijf het verloop van de grafiek.

Antwoord

Breng eerst de grafiek in beeld, bijvoorbeeld met de grafische rekenmachine.

Figuur 1.7

De grafiek heeft een maximum van 49 bij $x = 3$. De grafiek gaat dus over van stijgend naar dalend. Aan de grafiek zie je met wat voor soort stijging en daling je te maken hebt.

De grafiek is afnemend stijgend op het interval $\langle \leftarrow, 3\rangle$ en toenemend dalend op het interval $\langle 3, \rightarrow\rangle$.

Opgave 3

Gegeven is de kwadratische functie f met voorschrift $f(x) = -x^2 + 6x$. De grafiek van zo'n functie is een parabool.

a Met de grafische rekenmachine kun je de parabool bekijken. Op welk interval is de grafiek stijgend?

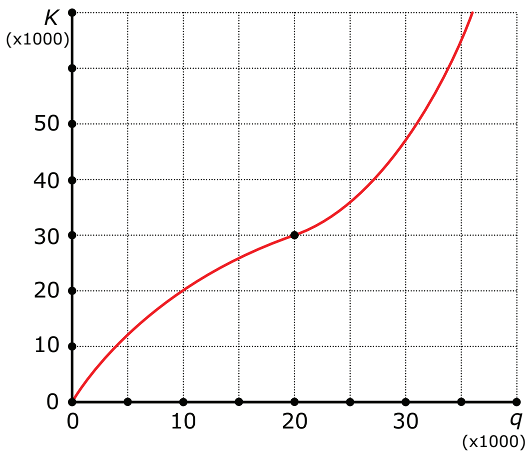
b Om welk soort stijging gaat het bij a?

c Is er in de grafiek sprake van toenemende of afnemende daling?

d Elke parabool heeft een top. Daarbij hoort een minimum of een maximum. Welke extreme waarde heeft deze functie?

Voorbeeld 3

Bij de productie van een bepaald artikel stijgen de kosten K met een toename van het geproduceerde aantal producten q. Die kostenstijging neemt echter af omdat de productielijn steeds efficiënter wordt ingezet. Wanneer er 20000 artikelen worden gemaakt, zijn de kosten € 30.000. Om nog meer producten te kunnen maken, moet de productielijn worden aangepast en de kosten stijgen dan harder. Je ziet een schets van een bijpassende grafiek.



Figuur 1.8

Op de horizontale as komt het aantal producten q, op de verticale as de kosten K, omdat de kosten afhangen van het aantal geproduceerde artikelen. De grafiek begint in $(0,0)$ met sterke stijging die vrij snel afvlakt. Dat gaat zo door tot het punt met $q = 20000$ en $K = 30000$. Daarna stijgt de grafiek steeds sterker.

Opgave 4

Van een functie is gegeven dat:

- de grafiek constant stijgt tot $x = 2$;
- de grafiek constant is van $x = 2$ tot $x = 3$;
- de grafiek toenemend daalt van $x = 3$ tot $x = 4$ en dan afnemend daalt tot $x = 5$;
- de grafiek toenemend stijgt vanaf $x = 5$.

Maak een schets van de grafiek van deze functie en leg uit bij welke waarde van x de functie een extreme waarde moet hebben.

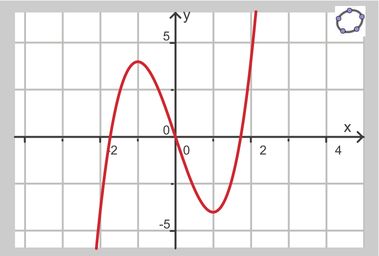
Opgave 5

Je gebruikt nu steeds een grafiek om de veranderingen en de extremen van een functie te bepalen. Waarom kun je op deze manier nooit zeker zijn of je wel alle veranderingen en extremen hebt gevonden?

Verwerken

Opgave 6

Bekijk deze grafiek gemaakt met GeoGebra.



Figuur 1.9

Geef voor deze functie aan:

- op welke intervallen de grafiek daalt dan wel stijgt en om welk soort stijging of daling het daarbij gaat;
- welke extremen er zijn;
- voor welke waarden van x de daling het sterkst is.

Opgave 7

Gegeven is een functie met voorschrift $f(x) = x^3 - 3x$. Bekijk deze functie met de grafische rekenmachine.

a Beschrijf met intervallen het verloop van de grafiek van f.

b Wat zijn de extremen van f?

c Waarom kun je niet aangeven waar de snelheid van stijgen het grootst is?

Opgave 8

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 8$.

a Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van deze functie bekijken. Welke extremen heeft deze functie?

b Op hoeveel intervallen is bij de grafiek van f sprake van toenemende daling?

c Geef het bereik van f.

Opgave 9

Sofie rijdt met de auto naar de supermarkt. De eerste 7 seconden trekt ze eerst rustig maar daarna snel op, daarna rijdt ze 15 seconden met een constante snelheid om vervolgens 10 seconden lang geleidelijk af te remmen, totdat ze stil staat voor een stoplicht. Ze staat daar 30 seconden stil. Als het stoplicht op groen springt, trekt Sofie geleidelijk op en na 8 seconden rijdt ze weer met een constante snelheid, totdat ze na 2 minuten bij de supermarkt is aangekomen en in 12 seconden geleidelijk afremt totdat ze stil staat.
Beschrijf met intervallen de soorten stijging en daling van de snelheid die optreden gedurende de route die Sofie naar de supermarkt aflegt.

Opgave 10

Voor de temperatuur T in °C op een bepaalde dag geldt:

- om 6:00 uur ’s morgens ($t = 6$) is de temperatuur $T = 2$ °C;
- de grafiek toenemend stijgt van $t = 6$ tot $t = 12$;
- de grafiek afnemend stijgt van 12:00 uur tot 14:30 uur en dan toenemend daalt tot $t = 20$;
- de grafiek afnemend daalt van $t = 20$ tot aan het eind van de dag.

Maak een schets van een mogelijke grafiek van deze functie en leg uit bij welke waarde van t de functie T een uiterste waarde moet hebben.

Toepassen

Opgave 11: Winstformule

Voor een klus maakt een bedrijf gebruik van de volgende winstformule $W = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2$, waarbij W de winst in honderden euro's is en x het aantal werknemers dat het bedrijf voor de klus gebruikt.

a Bij welk aantal werknemers is er maximale winst?

Voor het bepalen van hoeveel werknemers het bedrijf moet inzetten, wordt er gekeken naar de extra winst per werknemer. Zo is de extra winst van de zesde werknemer $W(6) - W(5)$. De extra winst per werknemer wordt ook wel de marginale winst genoemd. Het bedrijf zorgt er voor dat er zoveel werknemers gebruikt worden dat de marginale winst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

b Hoeveel werknemers moet men dan voor de klus inzetten?

c Het antwoord van b wijkt af van dat van a. Toch kan het voor het bedrijf beter zijn, om naar de extra winst te kijken zoals bij b is gedaan. Waarom?

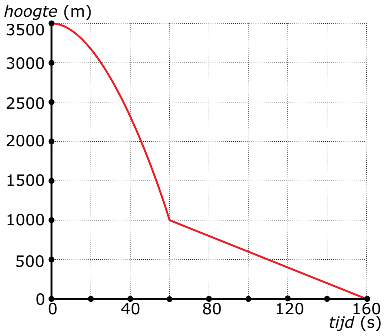
Opgave 12: Parachutist

Je ziet de grafiek die hoort bij een parachutesprong vanaf 3500 meter hoogte. Eerst maakt de parachutist een vrije val en daarna opent hij zijn parachute.

a Na hoeveel seconden heeft deze parachutist zijn valscherm geopend? Hoe zie je dat aan de grafiek?

b In de periode van vrije val is de grafiek toenemend dalend. Wat betekent dit voor de valsnelheid?

c Als de parachute uit is, is de valsnelheid constant. Hoe zie je dat aan de grafiek? Hoe groot is de valsnelheid als de parachute uitgevouwen is?



Figuur 1.10

Testen

Opgave 13

Bekijk de grafiek van de lengte van een man vanaf zijn veertiende levensjaar tot zijn huidige leeftijd.

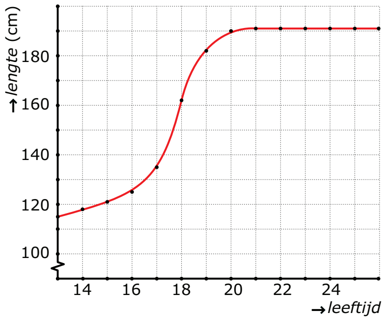
a Gedurende welk levensjaar groeit hij het snelst? Hoeveel centimeter groeit hij dat jaar?

b Gedurende welke periode is de grafiek stijgend?

c Gedurende welke periode is er sprake van een afnemende stijging?

d Gedurende welke periode is zijn lengte constant?

e Gedurende welke perioden is de groeisnelheid constant? Hoe zie je dat aan de grafiek?



Figuur 1.11

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = -0{,}5x^4 + 4x^2$ op het interval $[-4,4]$.

a Op welke intervallen daalt de grafiek?

b Op hoeveel intervallen is de grafiek afnemend stijgend?

c Geef alle extremen van deze functie.

1.2 Veranderingen per stap

Inleiding

Om veranderingen van grafieken nauwkeurig te beschrijven kijk je naar de toenames (of afnames) van de uitkomsten bij toename van de invoerwaarden met een vaste stapgrootte. Bijvoorbeeld bij een functie $y = f(x)$ bekijk je de toename van y bij een toename van x met een vaste stapgrootte. Je maakt van die toenames een toenamediagram.

Je leert in dit onderwerp

- een toenamediagram maken bij een gegeven grafiek of een gegeven functievoorschrift;
- de invloed van de stapgrootte op het toenamediagram bepalen;
- vanuit een gegeven toenamediagram (en 'beginwaarde') een mogelijke grafiek van de functie samenstellen of bepalen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, afnemende of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet een grafiek met het verloop van het niveau van zeewater over een dag. De hoogte wordt gemeten in meter ten opzichte van een afgesproken hoogte in Amsterdam, het Normaal Amsterdams Peil of NAP.

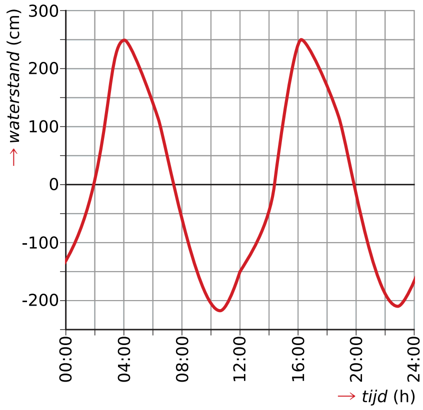
Om nauwkeuriger zicht te krijgen op de veranderingen van de waterstand, kun je ook een staafdiagram maken van de veranderingen per uur.

a Maak zo'n staafdiagram voor de periode van middernacht tot twee uur 's middags.

b Hoe kun je aan het staafdiagram zien of het water stijgt of daalt?

c Hoe kun je aan dat staafdiagram zien wanneer het water snel stijgt?

d In de Westerschelde moet je goed weten waar je wel en waar je niet kunt varen. Wat heb je dan aan het diagram met veranderingen van de waterstand?



Figuur 2.1

Uitleg

De grafiek geeft de gemiddelde dagtemperatuur T op een bepaalde plaats weer (in °C) afhankelijk van het tijdstip t (in uren) op die dag.
De grafiek begint op $t = 0$ met een temperatuur van 10 °C. Na 2 uur is die temperatuur gezakt tot ongeveer 8 °C. De temperatuur neemt dus af met 2 °C. Er is sprake van een toename van -2 °C.
Weer twee uur later is de temperatuur nog een graad gezakt: bij $t = 4$ is er van een toename van -1 °C ten opzichte van de temperatuur bij $t = 2$.
En zo kun je doorgaan met het bepalen van de toenames (of afnames) in stappen van 2 uur. Je doorloopt de tijd met een stapgrootte van 2 uur en je maakt een tabel van de toenames:

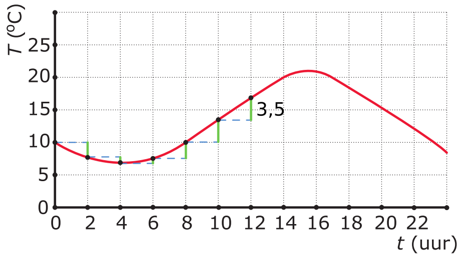
t (uur)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
ΔT		-2	-1	1	2	3	$3{,}5$	$3{,}5$	1	-3	-3	-$3{,}5$	-$3{,}5$

Tabel 2.1

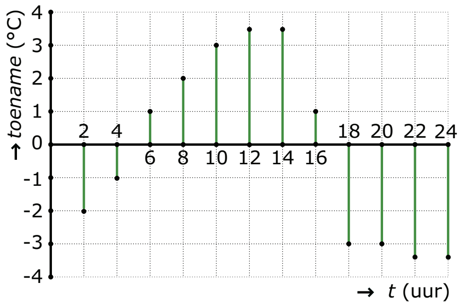
Onder ΔT versta je de toename van de temperatuur T. Deze tabel kun je weergeven in een diagram. Als de toename negatief is, teken je een staafje naar beneden en als die positief is naar boven. Zo'n diagram noem je een toenamediagram.

In het toenamediagram zie je:

- waar de grafiek stijgend is, de toenamen positief zijn (echte toenamen);
- waar de grafiek dalend is, de toenamen negatief zijn (afnamen);
- waar de toenamen steeds groter worden, is de stijging toenemend, enzovoort.



Figuur 2.2



Figuur 2.3

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de gemiddelde dagtemperatuur in de **Uitleg**.

a Maak een tabel met toenames vanaf $t = 0$ met een stapgrootte van $\Delta t = 3$.

b Teken nu het bijbehorende toenamediagram van de temperatuurgrafiek met een stapgrootte van $\Delta t = 3$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

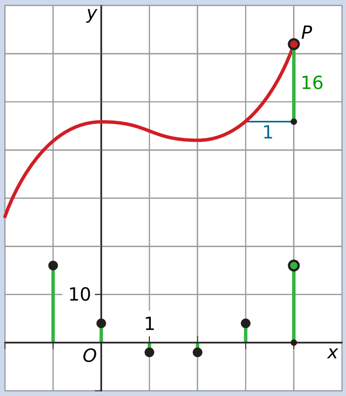
Bekijk de applet: toenamediagram

Bekijk deze grafiek op het interval: [-2,4].

Als je de waarden van x met een vaste **stapgrootte** laat toenemen, kun je daarbij een tabel maken met de toenamen Δy van de functiewaarden.
Als je als stapgrootte 1 neemt, dan ziet die tabel er zo uit:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	26	42	46	44	42	46	62
Δy		16	4	-2	-2	4	16

Tabel 2.2



Figuur 2.4

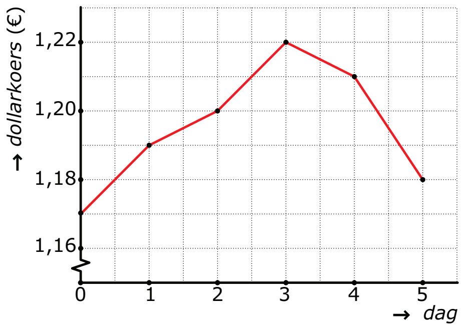
Je ziet het bijbehorende **toenamediagram** in groen in de figuur.

De hoogte van het staafje bij $x = 3$ is bijvoorbeeld $\Delta y = y(3) - y(2) = 46 - 42 = 4$. Dus het staafje bij $x = 3$ wordt 4 hoog. Bij een negatieve toename teken je het staafje naar beneden, bij $x = 1$ bijvoorbeeld teken je het staafje 2 naar beneden.

Als je het functievoorschrift weet, kun je de grafische rekenmachine gebruiken om een toenametabel te tekenen. Je voert dan $y_1 = f(x)$ en $y_2 = y_1(x) - y_1(x-1)$ in, waarin f de gegeven functie is. Als je nu met de grafische rekenmachine een tabel met stapgrootte 1 maakt, krijg je de toenametabel. Een toenamediagram kan de rekenmachine niet maken.

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek van het verloop van de koers van de dollar gedurende vijf dagen. Op dag 1 was een euro in dollars 1,19 waard. Maak er een toenamediagram bij met stapgrootte 1 dag.



Figuur 2.5

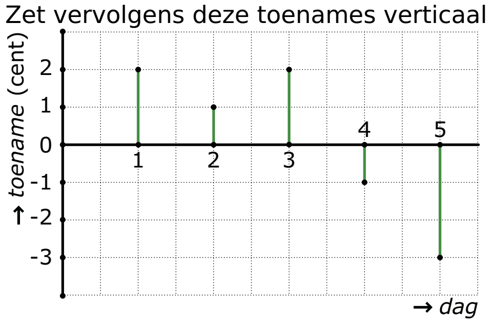
Antwoord

Maak eerst een tabel met de toenames:

dag	0	1	2	3	4	5
toename (cent)	-	2	1	2	-1	-3

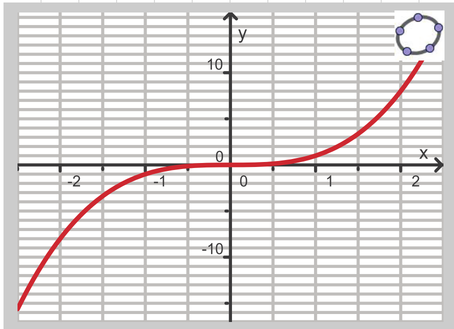
Tabel 2.3

Zet vervolgens deze toenames verticaal in een diagram uit:



Figuur 2.6

Opgave 2



Figuur 2.7

Bekijk de grafiek gemaakt met GeoGebra.

Je laat de waarden van x oplopen met een stapgrootte 1. De bijbehorende verandering van de functiewaarden kun je in een tabel zetten.

a Maak een toenametabel die begint bij $x = -2$.

b Teken het bijpassende toenamediagram.

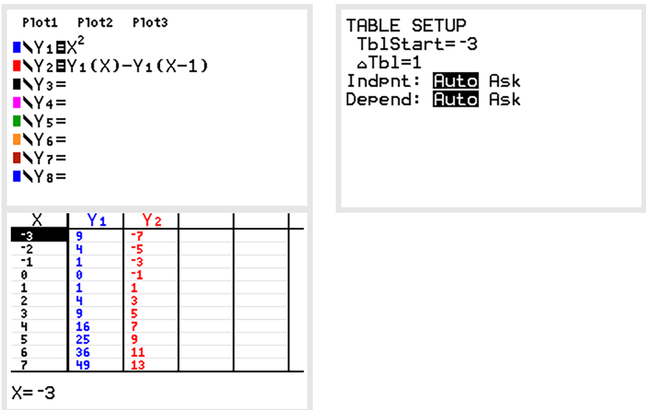
Voorbeeld 2

Bekijk de applet

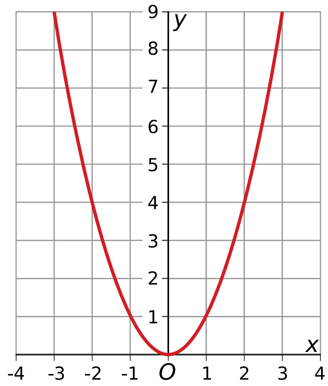
Gegeven is de functie met voorschrift $y = x^2$ op het interval $[-3,3]$. Maak een toenamediagram bij deze functie met stapgrootte 1.

Antwoord

Je kunt met de grafische rekenmachine een toenametabel maken bij een stapgrootte 1.



Figuur 2.9



Figuur 2.8

Opgave 3

Teken zelf het toenamediagram bij de functie uit **Voorbeeld 2**. Neem een stapgrootte van $\Delta x = 0{,}5$ en gebruik je grafische rekenmachine.

Opgave 4

Maak op de grafische rekenmachine de grafiek van de functie van f met voorschrift $f(x) = -x^3 + 6x$ op het interval $[-3,3]$.

a Maak een toenametabel met stapgrootte 1 die begint bij $x = -3$.

b Wat weet je op grond van alleen de toenametabel van het maximum van deze functie?

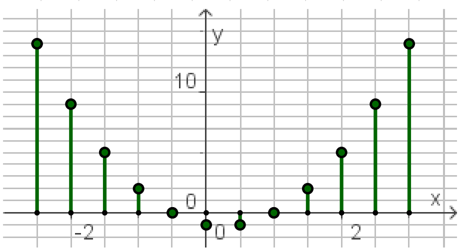
A. Het maximum ligt tussen $x = 0$ en $x = 1$, want bij die waarden horen dezelfde toenamen.

B. Het maximum ligt tussen $x = 0$ en $x = 1$, want bij die waarden horen de grootste toenamen.

C. Het maximum ligt bij $x = 1{,}5$, want precies daar gaan de toenamen over in afnamen.

D. Het maximum ligt tussen $x = 1$ en $x = 2$, daar gaan de toenamen over van positief in negatief.

c Teken het bijpassende toenamediagram.



Figuur 2.10

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Uit een toenamediagram kun je de grafiek van de functie weer samenstellen. Je moet daarvoor wel een punt van die grafiek weten, anders weet je niet waar je moet beginnen.

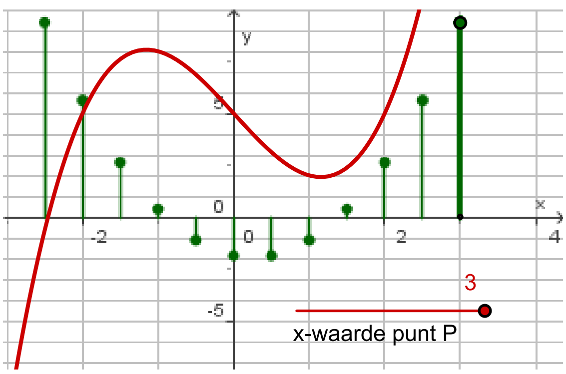
Bekijk het toenamediagram met stapgrootte $0{,}5$.
Stel dat de grafiek door het punt $P(0,10)$ gaat.

Je kunt ook vanuit het toenamediagram een tabel maken:

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
Δy	5	2	0	-1	-1	0	2	5
y	9	11	11	10	9	9	11	16

Tabel 2.4

Daarmee kun je de grafiek tekenen. Kijk goed hoe je de y-waarden kunt vinden van punten die x-waarden links van 0 hebben.



Figuur 2.11

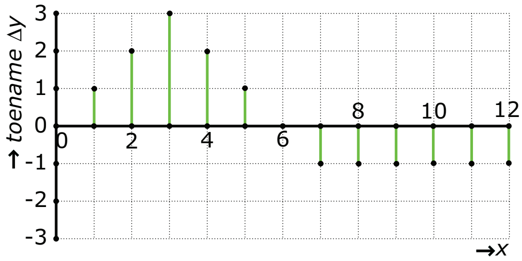
Opgave 5

Bekijk het toenamediagram van functie f in **Voorbeeld 3**.

Maak de tabel naar beide zijden af. Schets een mogelijke grafiek van f op het interval $[-3,3]$.

Opgave 6

Bekijk het toenamediagram van de grafiek van een functie f waarvoor geldt: $f(0) = 4$.



Figuur 2.12

a Maak een grafiek van de functie f.

b Je kunt dus een mogelijke grafiek van f tekenen. Waarom zijn er meerdere mogelijkheden voor de grafiek van de functie van f bij een toenamediagram? Kies uit:

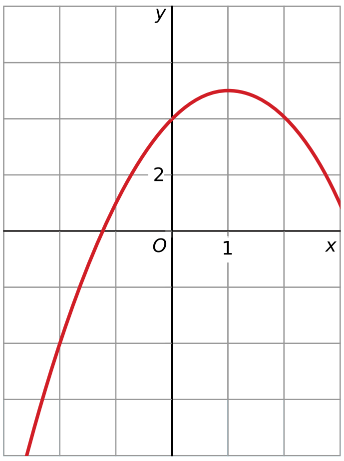
A. Het toenamediagram is te onduidelijk om functiewaarden nauwkeurig uit af te lezen.

B. Omdat je niet weet hoe de functie verloopt tussen de waarden in de tabel.

C. Er zijn meerdere toenametabellen mogelijk bij dit toenamediagram.

Verwerken

Opgave 7



Figuur 2.13

Teken bij de grafiek een toenamediagram met stapgrootte 1, te beginnen bij $x = -1$.

Opgave 8

Gegeven is de functie f met voorschrift: $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 8$.

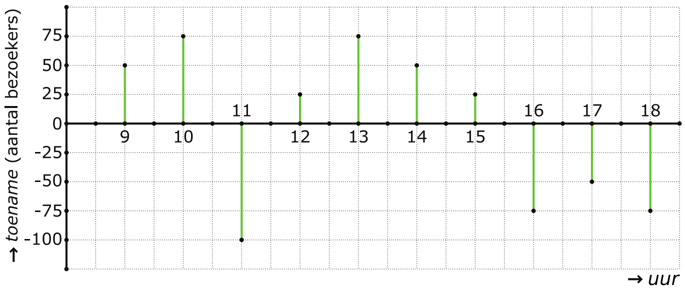
a Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van deze functie bekijken en een toenametabel maken. Teken een toenamediagram op het interval $[-3,3]$ met een stapgrootte van $0{,}5$.

b Hoe zie je aan het toenamediagram dat er precies één interval is waarop de grafiek toenemend daalt?

c Waarom kun je op grond van het toenamediagram concluderen dat er waarschijnlijk drie extremen zijn?

Opgave 9

In een museum is vanaf de opening om 8:00 uur 's morgens tot de sluitingstijd om 18:00 uur elk uur het aantal bezoekers geteld. Van deze gegevens is een toenamediagram gemaakt. Om 12:00 uur waren er 50 bezoekers.



Figuur 2.14

a Maak een grafiek van het totaal aantal bezoekers afhankelijk van het uur van deze dag, van 8:00 uur tot 18:00 uur.

b Rond welk tijdstip waren er waarschijnlijk de meeste bezoekers in het museum?

c Kun je vaststellen hoeveel bezoekers er maximaal in het museum waren op enig moment die dag? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Biologen houden het verloop van de aantallen van een bepaald soort vlinder bij in een afgesloten natuurgebied. De tabel geeft de verzamelde informatie weer:

Jaartal	2010	2011	2012	2013	2014
Aantal vlinders	2450	2050	1810	1665	1580
Verschil V t.o.v. vorig jaar		-400	-240	-145	-85

Tabel 2.5

Het lijkt erop dat het verschil V ten opzichte van het voorgaande jaar exponentieel verandert met de tijd t in jaren. Er lijkt te gelden: $V = -400 \cdot 0{,}6^{t-1}$ met $t = 0$ in het jaar 2010.

a Ga na of deze formule in overeenstemming is met de gevonden verschillen.

b Ga er vanuit dat deze formule geldig blijft in de jaren na 2014. Teken een toenamediagram van het aantal vlinders in dit natuurgebied met een stapgrootte van 1 jaar.

c Maak ook een grafiek van het aantal vlinders N in de loop van de jaren.

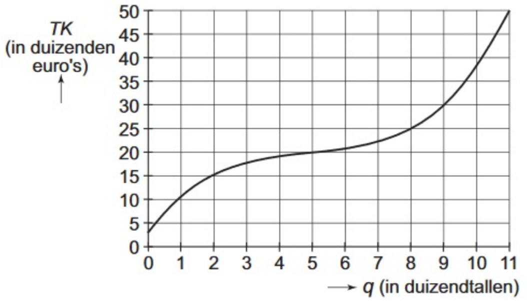
d Van wat voor soort daling is er sprake bij het aantal vlinders? Hoe kun je dat aan het toenamediagram zien?

e Het aantal vlinders van deze soort lijkt zich in dit natuurgebied te stabiliseren. Hoe kun je dat aan het toenamediagram zien? En wat betekent dit voor de grafiek van het aantal vlinders?

Toepassen

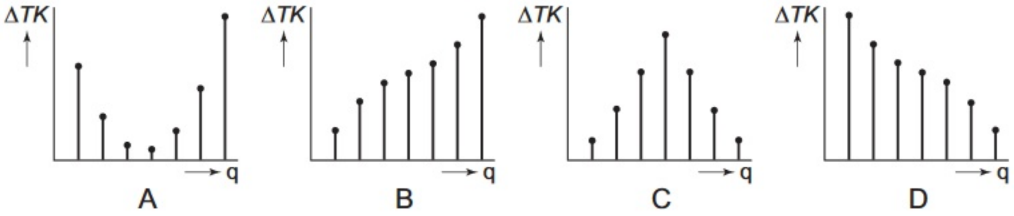
Opgave 11: Verpakkingen produceren

Een bedrijf maakt bijzondere verpakkingen. Het bedrijf heeft onderzocht hoe de kosten voor het maken van die verpakkingen samenhangen met het aantal verpakkingen. Het verband tussen de totale kosten TK (in duizenden euro's) en het aantal geproduceerde verpakkingen q (in duizendtallen) zie je in de figuur. Daaruit lees je bijvoorbeeld af dat bij een productie van 2000 verpakkingen de totale kosten € 15.000 zijn.



Figuur 2.15

In de diagrammen A, B, C en D, is de toename ΔTK van TK weergegeven. Eén van de vier diagrammen past bij de grafiek.



Figuur 2.16

a Welk toenamediagram past bij de grafiek? Licht je antwoord toe.

A. diagram A
B. diagram B
C. diagram C
D. diagram D

b Met hoeveel procent stijgen de totale kosten als de productie van 4000 naar 8000 verpakkingen gaat?

(naar: examen havo wiskunde A in 2006, eerste tijdvak)

Opgave 12: Model voor een chemische ramp

Onderzoekers hebben een model ontwikkeld voor een ramp met een chemische fabriek bij een middelgrote stad. In dit model wordt het aantal personen dat last heeft van ongemakken zoals buikloop, duizeligheid en hoofdpijn, voorgesteld door het functievoorschrift: $n(t) = -4(40-t)^3 + 150(40-t)^2 + 16000$.

Hierbij stelt t het aantal dagen na het plaatsvinden van de ramp voor en $n(t)$ het bijbehorend aantal slachtoffers.

a Plot de grafiek van n. Laat t lopen van 0 tot 40.

b Geef met intervallen aan welke soorten verandering je in de grafiek ziet.

c Na hoeveel dagen is er een maximaal aantal slachtoffers?

d De gevolgen van het ongeval zijn over het hoogtepunt heen als de toename van het aantal slachtoffers in vergelijking met twee dagen daarvoor kleiner is dan 1500. Na hoeveel dagen is dat het geval?

Testen

Opgave 13

Je ziet hier de grafiek van de lengte van een man vanaf zijn 12de levensjaar tot zijn huidige leeftijd.

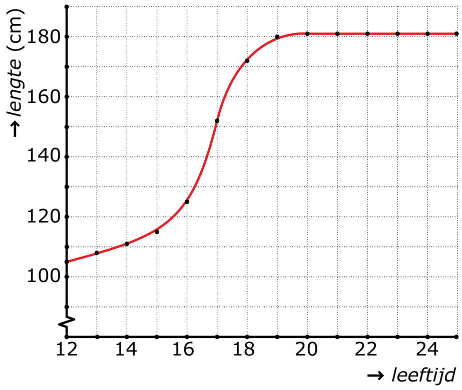
a Maak bij deze grafiek een toenamediagram met een stapgrootte van 1 jaar.

b Hoe kun je aan het toenamediagram zien dat de grafiek nooit daalt?

c Waarom mag je op grond van het toenamediagram alleen niet de conclusie trekken dat de grafiek nooit daalt?

d Gedurende welke periode is zijn lengte constant? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?

e Gedurende welke perioden is de groeisnelheid constant? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?



Figuur 2.17

Opgave 14

Bekijk met de grafische rekenmachine de grafiek van de functie $f(x) = -0{,}5x^4 + 4x^2$ op het interval $[-3,3]$.

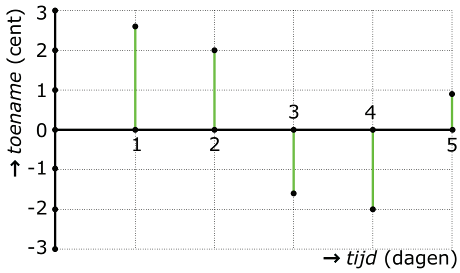
a Teken een toenamediagram met een stapgrootte van $0{,}5$.

b Hoe zie je aan het toenamediagram dat er precies één interval is waarop de grafiek van f afnemend daalt?

c Hoe kun je in het toenamediagram de plaats van de extremen van de functie terugvinden?

Opgave 15

De Amerikaanse dollar begon op dinsdag met een koers van 1,22 ten opzichte van de euro. Het toenamediagram heeft betrekking op die week van zondag tot en met vrijdag. In het diagram zie je de toename of afname van de koers per dag in tienden van centen nauwkeurig. Teken een grafiek waarin de koers van de dollar in de loop van die week zichtbaar is.



Figuur 2.18

1.3 Differentiequotiënt

Inleiding

Je hebt veranderingen in grafieken leren beschrijven in woorden en met toenamediagrammen. Bij toenamediagrammen moet je met een vaste stapgrootte werken. Maar als je wilt nagaan of een wielrenner de eerste 10 minuten gemiddeld net zoveel heeft afgelegd als de volgende 15 minuten, heb je met ongelijke intervallen te doen. In dat geval werk je met gemiddelde veranderingen.

Je leert in dit onderwerp

- de betekenis van het begrip differentiequotiënt kennen;
- tussen twee punten uit een tabel of een grafiek het differentiequotiënt bepalen;
- het differentiequotiënt van een functie op een gegeven interval berekenen;
- werken met toepassingen van het differentiequotiënt.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- werken met toenamediagrammen.

Verkennen

Opgave V1

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel:

tijd (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 3.1

Figuur 3.1

a Is hij de eerste 8 km gemiddeld sneller of langzamer dan in de volgende 4 km? Waaraan zie je dat?

b Waarom is er bij deze situatie eigenlijk geen toenamediagram te maken?

Je maakt bij deze tabel een grafiek door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd, op de verticale as de afgelegde afstand. Niet alle lijnstukken zijn even steil.

c Hoe kun je de helling van zo'n lijnstuk in een getal uitdrukken?

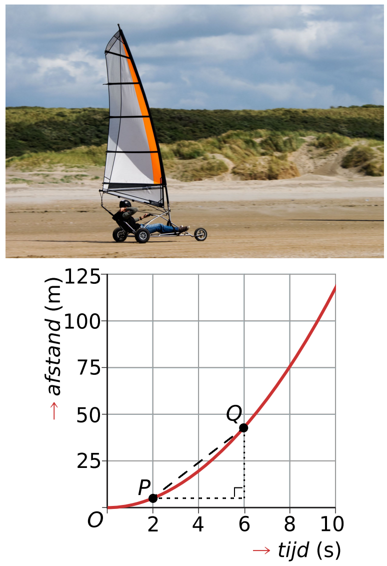
d Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de periode van 12 kilometer tot en met 18 kilometer.

e Wat betekent het getal dat je zojuist hebt gevonden voor de wielrenner?

Uitleg

Als een zeilwagen start en de windkracht constant is, dan neemt zijn snelheid toe. Veronderstel dat voor de afgelegde afstand s (in meter) geldt: $s(t) = 1{,}2 \cdot t^2$. Hierin is t de tijd in seconden. Bekijk de grafiek.
Na 2 seconden is de afgelegde afstand $s(2) = 4{,}8$ m.
Na 6 seconden is de afgelegde afstand $s(6) = 43{,}2$ m.
In die 4 seconden is er $s(6) - s(2) = 43{,}2 - 4{,}8 = 38{,}4$ m afgelegd.

De gemiddelde snelheid is: $\frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.



Figuur 3.2

Je berekent de gemiddelde snelheid, ofwel de gemiddelde verandering van plaats, door het verschil in afstand te delen door het verschil in tijd:

gemiddelde snelheid $= \frac{\Delta \text{ afstand}}{\Delta \text{ tijd}}$.

Het teken Δ (een Griekse letter D) staat voor differentie, wat verschil betekent. Dit getal is de helling van het lijnstuk tussen de punten die horen bij $t = 1$ seconde en bij $t = 4$ seconden.

Op het interval $[2{,}6]$ verandert $s(t)$ gemiddeld met: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(6) - s(2)}{6-2} = \frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.

Dit heet een differentiequotiënt ('differentie' is 'verschil' en een quotiënt is de uitkomst van een deling).
De gemiddelde verandering van s op een gegeven interval van t is het differentiequotiënt over dat interval.
Het is ook de helling van het lijnstuk PQ.

Opgave 1

Voor de afgelegde afstand s (in meter) van de zeilwagen in de **Uitleg** geldt dat $s = 1{,}2t^2$. Hierin is t de tijd in seconden.

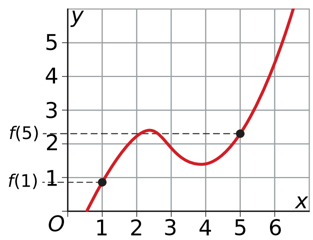
a Bereken de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0{,}6]$.

b Bereken ook de gemiddelde snelheid op het interval $[6{,}10]$.

c Op welk van beide intervallen was de gemiddelde snelheid van de zeilwagen het hoogst?

Opgave 2

In het algemeen heb je te maken met een functie als $y = f(x)$.
Hier zie je een grafiek van een functie f.
Bekijk het interval $[1{,}5]$.



Figuur 3.3

a Bereken de gemiddelde verandering van f op dit interval.
Lees functiewaarden af uit de grafiek.

b Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval $[2{,}4]$.

c Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de punten $(1, f(1))$ en $(6, f(6))$.

d Geef een interval waarop de gemiddelde verandering 2 is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

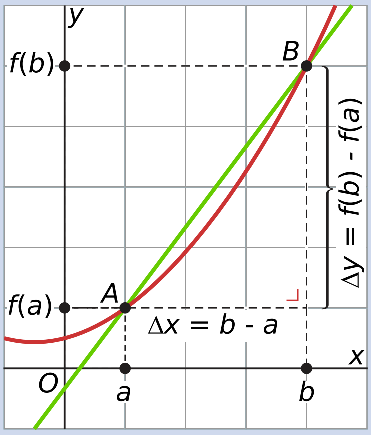
Bekijk de grafiek van de functie $y = f(x)$.

De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a,b]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

De uitkomst hiervan noem je het **differentiequotiënt** van de functie f op het interval $[a,b]$. In de grafiek van f is dit differentiequotiënt gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door $A(a,f(a))$ en $B(b,f(b))$.
Onthoud dat het differentiequotiënt gelijk is aan

- de helling van de lijn AB;
- de richtingscoëfficiënt van de lijn AB;
- de gemiddelde verandering van de grafiek op het interval $[a,b]$.



Figuur 3.4

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - x^2$.

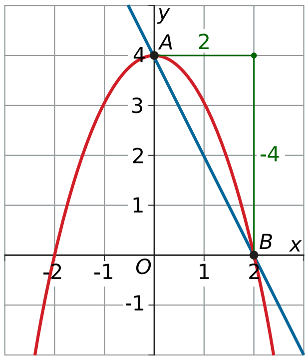
Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$ en beschrijf de betekenis van dit getal.

Antwoord

Het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{0-4}{2} = -2$.

Je ziet dat het differentiequotiënt gelijk is aan het hellingsgetal van het lijnstuk AB. Het is de gemiddelde verandering van de functiewaarden op het interval $[0,2]$. Het geeft dus de toename of de afname van $f(x)$ per eenheid van x weer.



Figuur 3.5

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-2,1]$.

b Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op het interval $[-1,1]$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

a Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval $[2,5]$.

b Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[-3,6]$.

c Geef een interval waarop de gemiddelde verandering van f gelijk is aan 0.

Voorbeeld 2

Ilse is om 14:00 uur begonnen met het verkopen van kaartjes voor een voorstelling. Zij heeft op een aantal tijdstippen bijgehouden hoeveel kaartjes ze verkocht heeft:

tijd	10:00	12:00	13:30	15:00	18:00
aantal kaartjes	0	178	331	405	642

Tabel 3.2

Om 12:00 uur had Ilse 178 kaartjes verkocht en om 13:30 uur 331. Wanneer liep de kaartverkoop het best, tussen 10:00 en 12:00 uur of tussen 12:00 en 13:30 uur?

Antwoord

Tussen 10:00 en 12:00 uur is de gemiddelde verkoop per uur $\frac{178-0}{2} = 89$.

Tussen 12:00 en 13:30 uur is de gemiddelde verkoop per uur $\frac{331-178}{1{,}5} = 102$.

Hoewel er tussen 10:00 en 12:00 uur meer kaarten zijn verkocht, liep tussen 12:00 en 13:30 uur de kaartverkoop gemiddeld het best. Met behulp van het berekenen van differentiequotiënten kun je de kaartverkoop eerlijk vergelijken op de verschillende tijdsintervallen.

Opgave 5

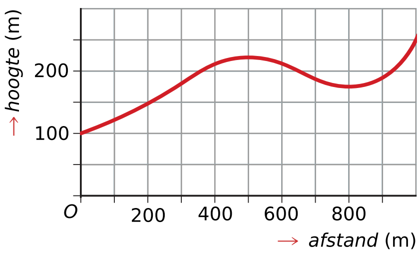
Bekijk **Voorbeeld 2**.

a In welk van de tijdsintervallen liep de kaartverkoop het best?

b Emmy koopt om 12:10 uur het 181e kaartje. Hoeveel bedraagt de gemiddelde verkoop per minuut tussen 12:10 en 13:30 uur?

Opgave 6

Bij het begin van een weg naar een top van 250 m hoogte staat een waarschuwingsbord met daarop een helling van 15%. Deze grafiek geeft het hoogteverloop van die weg weer. Horizontaal is de afstand uitgezet die je hemelsbreed hebt afgelegd en verticaal de hoogte waarop je je dan bevindt.



Figuur 3.6

a Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering bij zo'n hellingspercentage?

b Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering gerekend over de gehele weg?

c Klopt het waarschuwingsbord?

d Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering op het interval $[400{,}500]$ ongeveer?

e Schat de steilste helling van deze weg.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 + 5$. Toon aan dat het differentiequotiënt van f op het interval $[0,a]$ gelijk is aan $2a$.

Antwoord

Het differentiequotiënt van f op het interval $[0,a]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2a^2+5-5}{a-0} = \frac{2a^2}{a} = 2a$.

Als je nu een interval zoekt waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 4, kun je $a = 2$ nemen en vind je als interval $[0,2]$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je de functie $f(x) = 2x^2 + 5$.

a Geef een interval waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 6.

b Bereken het differentiequotiënt op het interval $[1,4]$.

c Noem een interval waarop het differentiequotiënt gelijk is aan die op het interval $[1,4]$.

Opgave 8

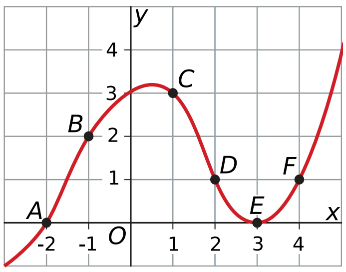
a Elke constante functie heeft de vorm $f(x) = c$. Toon aan dat de gemiddelde verandering van zo'n functie op elk interval gelijk is aan 0.

b Een lineaire functie is van de vorm $f(x) = ax + b$. Waarom is het differentiequotiënt van zo'n functie op elk interval gelijk aan a?

Verwerken

Opgave 9

Je ziet een aantal punten op de grafiek.



Figuur 3.7

a Bereken de gemiddelde helling van het lijnstuk AB.

b Bereken de gemiddelde helling van het lijnstuk CF.

c Voor twee lijnstukken die horen bij twee van de getekende punten hoort een differentiequotiënt van 0. Welke twee lijnstukken zijn dat?

d Punt F heeft een kleinere y-waarde dan punt C. Hoe kun je dat aan het differentiequotiënt op het interval $[1,4]$ zien?

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$.

b Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-1,2]$.

c Wat valt je bij b op? Kun je dat verklaren?

Opgave 11

Tijdens een hardloopwedstrijd van 10 kilometer wordt op drie momenten de (tussen)tijd gemeten. De resultaten van Bram zie je in de tabel.

tijd (minuten)	0	12	27	39
afstand (kilometer)	0	3	7	10

Tabel 3.3

a Op welk tijdsinterval liep Bram gemiddeld het snelst?

b Cedric loopt de eerste 1,5 kilometer in 6 minuten. Stel dat hij de hele wedstrijd met hetzelfde tempo loopt. Finisht hij dan voor of na Bram?

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2$. Toon aan dat het differentiequotiënt op elk interval $[a,a+1]$ gelijk is aan $6 \cdot a + 3$.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2{,}5x^2 + 3x$.

a Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[0,2]$ exact.

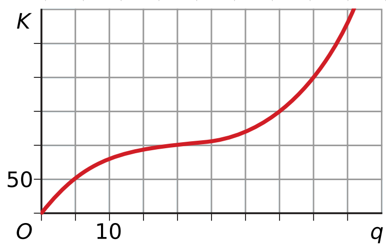
b Geef nog een interval met eenzelfde differentiequotiënt als bij a.

Toepassen

Opgave 14: Koekjesproductie

Het bedrijf Fiesta produceert koekjes voor de horeca. Als verpakking gebruiken ze zakken van 3 kilogram. De kosten hangen af van het aantal zakken koekjes dat gemaakt wordt, q is het aantal geproduceerde zakken koekjes per uur.
Voor de kosten K (in euro) wordt het volgende functievoorschrift gebruikt:

$K(q) = 0{,}01q^3 - 0{,}6q^2 + 13q$



Figuur 3.8

a Bereken de totale kostenstijging bij een productietoename van 0 zakken per uur naar 20 zakken per uur.

b Bereken de gemiddelde kostenstijging bij een productietoename van 0 zakken per uur naar 20 zakken per uur.

c Plot zelf de grafiek op de grafische rekenmachine. Plot ook de lijn door de punten $(0,0)$ en $(20,100)$. De lijn snijdt de grafiek van K in een derde punt. Geef de coördinaten van dat punt.

d Kun je nu zonder berekening zeggen wat de gemiddelde kostenstijging is op het interval $[20,40]$? Licht je antwoord toe.

Opgave 15: Afkoelende koffie

Het afkoelen van een kopje koffie hangt af van de temperatuur van de koffie bij het inschenken en van de kamertemperatuur. Ook de vorm en het materiaal waarvan het kopje is gemaakt, heeft invloed. De formule $T(t) = 20 + 70 \cdot 0{,}82^t$ geeft de temperatuur van de koffie.

a Hoe hoog is de temperatuur van de koffie bij het inschenken?

b Hoeveel graden daalt de temperatuur van de koffie gemiddeld in de eerste vijf minuten?

c Bereken ook in één decimaal nauwkeurig hoeveel de temperatuur gemiddeld daalt in de volgende vijf minuten.

d De temperatuur van de koffie daalt van $t = 0$ tot $t = 5$ sneller dan van $t = 5$ tot $t = 10$. Leg uit hoe je dit aan de differentiequotiënten bij b en c kunt zien. Geef ook een natuurkundige verklaring.

Testen

Opgave 16

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die tijden vind je in de tabel:

tijd t (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand a (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 3.4

a Bereken het differentiequotiënt op het tijdsinterval $[0,10]$.

b Welke betekenis heeft dit getal voor de wielrenner?

c Je kunt bij deze tabel een grafiek maken door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd t in minuten, op de verticale as de afgelegde afstand a in kilometer. Bereken het hellingsgetal van het lijnstuk dat hoort bij het interval $[44,60]$.

d Bereken voor het tijdsinterval $[18,44]$ de waarde $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ in twee decimalen nauwkeurig.

e Welke betekenis hebben de bij c en d gevonden getallen voor de grafiek? Geef alle goede antwoorden.

A. Ze geven de helling weer van het lijnstuk door bij het begin- en het eindpunt bij het tijdsinterval.

B. Ze geven de totale toename van de afstand weer op het tijdsinterval.

C. Ze geven de gemiddelde toename van de afstand per minuut weer op het tijdsinterval.

Opgave 17

Gegeven de functie $f(x) = 0{,}5x^2 - 5x + 4$.

a Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval $[0,2]$.

b Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[-3,7]$.

c Geef een interval waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 0.

1.4 Differentiaalquotiënt

Inleiding

Als je in de auto vanuit een buitenwijk naar het centrum van de stad rijdt, leg je ongeveer 4 kilometer af in 15 minuten. Dat is 16 km/h (kilometer per uur).
Toch kun je onderweg wel een bekeuring oplopen voor het rijden van meer dan 50 km/h binnen de bebouwde kom. Je gemiddelde snelheid zegt nog weinig over je snelheid op elk moment van de route.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de verandering op een bepaald moment (het differentiaalquotiënt) benaderen;
- het begrip ‘hellingsgetal in een punt’ van een grafiek;
- een raaklijn in een punt van een grafiek aan die grafiek van een formule voorzien;
- werken met toepassingen van de verandering op een bepaald moment.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- werken met differentiequotiënten.

Verkennen

Opgave V1

Met een zeilwagen die Stevin in de zeventiende eeuw uitvond kun je veranderingen van de snelheid bestuderen.

In deze opgave wordt zo'n zeilwagen klaargemaakt, de zeilen worden gehesen. De zeilwagen gaat steeds sneller, er staat een flinke wind. Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s in m de formule $s = 1{,}2t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden.


Figuur 4.2

a Hoeveel m heeft de zeilwagen na 5 s afgelegd en hoe snel rijdt hij dan?

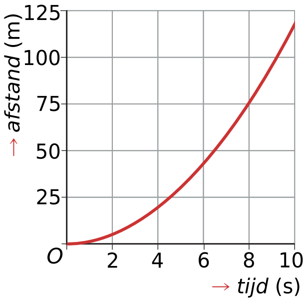
b Kun je een formule opstellen voor de snelheid v in m/s van de zeilwagen als functie van t?

Uitleg

Bekijk de grafiek van de positie van een startende zeilwagen.

Je mag aannemen dat de snelheid constant toeneemt. De afgelegde afstand neemt dan kwadratisch toe. Voor de afgelegde afstand s (in meter) geldt bijvoorbeeld $s(t) = 1{,}2 \cdot t^2$, waarin t de tijd in seconden is.

De gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden bereken je met het differentiequotiënt: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot 4^2 - 1{,}2 \cdot 0^2}{4-0} = \frac{19{,}2}{4} = 4{,}8$.
Die gemiddelde snelheid voor de eerste 4 seconden is dus $4{,}8$ meter per seconde (m/s).



Figuur 4.3

Omdat de zeilwagen versnelt (steeds sneller gaat rijden), is de snelheid op $t = 4$ hoger dan de gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden. Die snelheid op $t = 4$ kun je benaderen. Daarbij bereken je differentiequotiënten op steeds kleinere intervallen met $t = 4$ als beginwaarde.
Op het interval $[4; 4{,}1]$ is het differentiequotiënt:
$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot 4{,}1^2 - 1{,}2 \cdot 4^2}{4{,}1-4} = \frac{0{,}972}{0{,}1} = 9{,}72$.
Dit is een eerste benadering van de snelheid op $t = 4$.

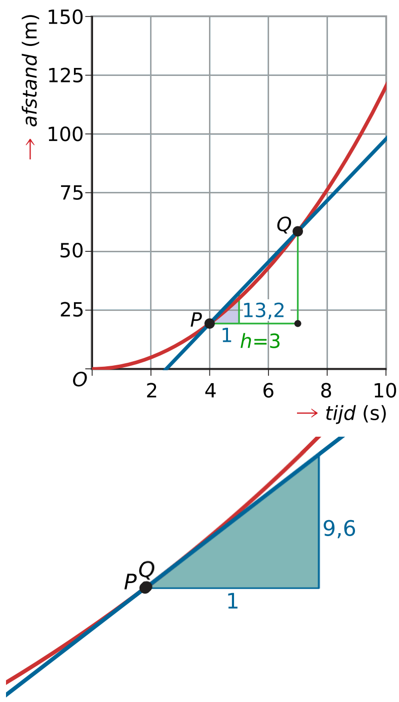
Op het interval $[4; 4{,}01]$ is het differentiequotiënt:
$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot 4{,}01^2 - 1{,}2 \cdot 4^2}{4{,}01-4} = \frac{0{,}09612}{0{,}01} = 9{,}612$.
Dit is een tweede en betere benadering van de snelheid op $t = 4$.

Bekijk de applet.

Je kunt de intervallen steeds kleiner maken en het differentiequotiënt uitrekenen om een nog betere benadering te krijgen van de snelheid op $t = 4$.

interval	differentiequotiënt
$[4; 4{,}1]$	$9{,}72$
$[4; 4{,}01]$	$9{,}612$
$[4; 4{,}001]$	$9{,}6012$
$[4; 4{,}0001]$	$9{,}60012$

Tabel 4.1



Figuur 4.4

Het differentiequotiënt komt steeds dichter in de buurt van $9{,}6$, naarmate de rechtergrens van het interval dichter bij 4 komt. Je kunt nu zeggen dat bij $t = 4$ de snelheid $9{,}6$ m/s is. Die snelheid bepaal je dus door een serie differentiequotiënten te berekenen op intervallen $[4, 4+h]$ waarin h steeds dichter bij 0 komt.
Het getal dat die serie differentiequotiënten benadert is de snelheid op $t = 4$ en de lijn PQ waarvan zo'n differentiequotiënt de richtingscoëfficiënt is, gaat over in een raaklijn aan de grafiek. Je noemt de gevonden waarde het differentiaalquotiënt op dat tijdstip.
Dit differentiaalquotiënt is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor $t = 4$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe de snelheid van een zeilwagen op een bepaald tijdstip wordt gevonden met behulp van een rij van differentiequotiënten.

a Kies het juiste antwoord. De snelheid op $t = 4$ is:

A. hetzelfde als de gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden.
B. groter dan de gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden.
C. kleiner dan de gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden.

b Bereken zelf de differentiequotiënten op de intervallen in de tabel in de uitleg.

c Hoe groot is de snelheid op $t = 4$?

d Hoe is de snelheid op $t = 4$ zichtbaar in de grafiek? Kies het juiste antwoord.

A. Als richtingscoëfficiënt van het lijnstuk op het interval $[0,4]$.
B. Als richtingscoëfficiënt van het lijnstuk op het interval $[4; 4{,}0001]$.
C. Als richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het punt met $t = 4$.
D. Als uitkomst bij $t = 4$.

e Bereken met behulp van een rij met differentiequotiënten het differentiaalquotiënt op $t = 5$.

Het differentiaalquotiënt dat je bij e hebt berekend is de snelheid op $t = 5$ van de zeilwagen.
Maar het is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek als $t = 5$. Van die raaklijn weet je dus de helling.

f Door welk punt gaat die raaklijn? Welke vergelijking past er dus bij?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: differentiaalquotiënt.

Je ziet een deel van de grafiek van de functie $y = f(x)$.

De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a,b]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

De **verandering in een punt** met $x = a$ van de functie f vind je door een aantal keer het differentiequotiënt op $[a,a+h]$ te berekenen, waarbij je h steeds dichter bij 0 kiest: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Je krijgt dan een rij met differentiequotiënten die een bepaald getal benadert.

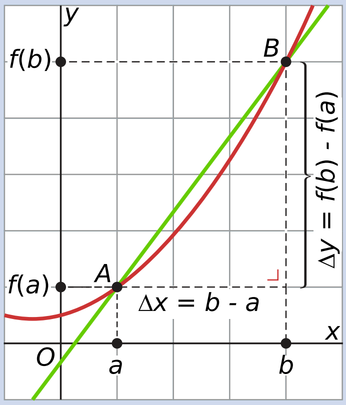
Dit getal heet het **differentiaalquotiënt** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = a$.

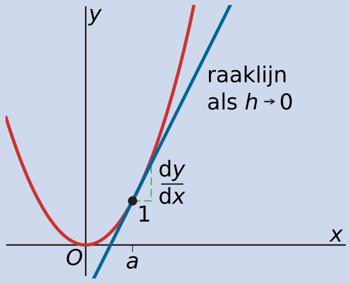
In plaats van $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = a$, schrijf je ook wel $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$.

In de grafiek is het differentiaalquotiënt gelijk aan de **richtingscoëfficiënt** van de **raaklijn** in het punt van de grafiek met $x = a$.

- Als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn positief en stijgt de grafiek dus.
- Als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} < 0$, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn negatief en daalt de grafiek dus.
- Als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, dan is het hellingsgetal van de raaklijn 0. Er kan dan sprake zijn van een top, maar dat hoeft niet.
- Het hellingsgetal van de raaklijn in een top is altijd 0.

Op de grafische rekenmachine vind je het differentiaalquotiënt als dy/dx. Als je hier een x-waarde aan koppelt dan vind je direct het hellingsgetal van de raaklijn in dat punt aan de grafiek. Bekijk daarvoor het **Practicum**.





Figuur 4.5

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met $f(x) = 4 - x^2$.
Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 1$ en beschrijf de betekenis van dit getal.

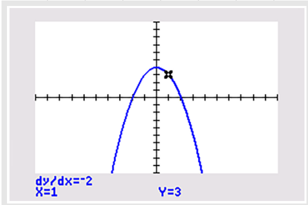
Antwoord

Maak een rij met differentiequotiënten door bij het interval $[1, 1 + h]$ voor h steeds kleinere waarden te kiezen. Bijvoorbeeld:

interval	differentiequotiënt
$[1; 1{,}1]$	$-2{,}1$
$[1; 1{,}01]$	$-2{,}01$
$[1; 1{,}001]$	$-2{,}001$
$[1; 1{,}0001]$	$-2{,}0001$

Tabel 4.2

Deze rij getallen lijkt te naderen naar -2. Dit is het differentiaalquotiënt van deze functie voor $x = 1$ en de veranderingssnelheid van de grafiek voor die waarde van x. Het is ook het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 1$. Je ziet in de figuur dat een grafische rekenmachine dit voor je kan berekenen, zie ook het **Practicum**.



Figuur 4.6

Opgave 2

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je bij een gegeven functie f het differentiaalquotiënt voor een bepaalde x-waarde kunt berekenen.

a Wat betekent dit getal voor de grafiek? Meerdere antwoorden kunnen goed zijn.

A. De richtingscoëfficiënt van de grafiek voor die x-waarde.
B. De richtingscoëfficiënt van het lijnstuk op het interval $[0, x]$.
C. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor die x-waarde.
D. De y-waarde bij die waarde van x.

b Welke betekenis heeft dit getal voor de functiewaarden?

A. De grootte van de functiewaarde bij die waarde van x.
B. De snelheid waarmee de functiewaarden veranderen voor die waarde van x.
C. De gemiddelde verandering van de functiewaarden.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je wilt het differentiaalquotiënt van f bepalen voor $x = 2$.

a Maak zelf de tabel met differentiequotiënten op het interval $[2, 2 + h]$ waarin h achtereenvolgens de waarden $0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$ en $0{,}0001$ heeft.

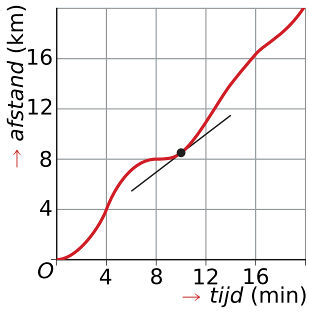
b Hoe groot is dus het differentiaalquotiënt voor $x = 2$?

c Welke vergelijking heeft de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$?

Voorbeeld 2

Bekijk de grafiek van de afgelegde afstand s van een auto op een binnenweg, uitgezet tegen de tijd t.

Je ziet dat de snelheid eerst langzaam toeneemt totdat hij na 4 minuten maximaal is. Dan neemt de snelheid weer af. Bij $t = 4$ gaat de grafiek van toenemend stijgend over in afnemend stijgend. Na 8 minuten staat de auto even stil om daarna weer langzaam op te trekken. Bepaal de snelheid van deze auto na precies 10 minuten.



Figuur 4.7

Antwoord

De snelheid na precies 10 minuten is het differentiaalquotiënt op $t = 10$. Omdat er geen functievoorschrift bij deze grafiek is, bepaal je de waarde van $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ voor $t = 10$ met behulp van de grafiek en de getekende raaklijn.

Je ziet dat die raaklijn behalve door het punt $(10; 8{,}5)$ ook (bij benadering) door het punt $(12; 10)$ gaat. De helling van de raaklijn is daarom (ongeveer): $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10{,}0-8{,}5}{12-10} = 0{,}75$.

De auto had na precies 10 minuten een snelheid van 0,75 km/minuut. Dat is ongeveer 45 km/uur.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je een tijd-afstand grafiek van een auto.

a Wanneer was de snelheid van de auto hoger, bij $t = 4$ of bij $t = 16$?

b Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn bij $t = 8$?

c Hoeveel minuten heeft de auto ongeveer met constante snelheid gereden?

d Bereken de snelheid van de auto bij $t = 4$.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 1$ zonder een rij met differentiequotiënten te maken.

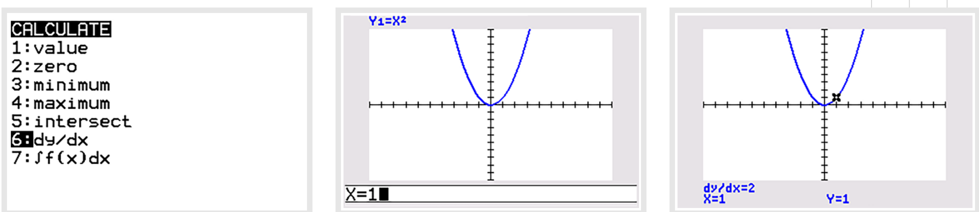
Antwoord

Het differentiequotiënt op het interval $[1, 1 + h]$ is:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2 + h$$

Dit differentiequotiënt heeft voor elke waarde van h (behalve $h = 0$) de waarde $2 + h$. Hoe dichter h bij 0 komt, hoe dichter $2 + h$ bij 2 komt. Dit betekent dat het differentiaalquotiënt voor $x = 1$ gelijk is aan 2.

Ook met de grafische rekenmachine kun je het differentiaalquotiënt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = 1$ meteen vinden:



Figuur 4.8

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** zie je de functie $f(x) = x^2$.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[2{,}2+h]$ en benader hiermee het differentiaalquotiënt voor $x = 2$.

b Controleer je antwoord bij a met de grafische rekenmachine.

c Stel een vergelijking op voor de raaklijn aan de grafiek voor $x = 2$.

d Er is een punt op de grafiek waarin de helling van de raaklijn precies het tegenovergestelde is van die bij a. Welk punt is dat? Licht je antwoord toe.

e In welk punt van de grafiek is de helling 0?

Verwerken

Opgave 6

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 5x^2 - x^3$ op de grafische rekenmachine.

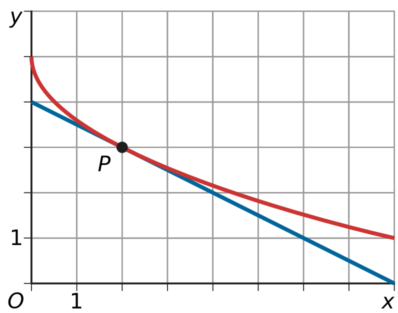
a Bereken het hellingsgetal van de raaklijn aan f voor $x = 2$ met behulp van een rij differentiequotiënten.

b Je kunt van tevoren aan de grafiek zien of het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 2$ positief of negatief is. Waaraan kun je dat zien?

c Stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 2$ aan de grafiek van f.

Opgave 7

Je ziet een deel van een grafiek met een raaklijn aan de grafiek in het punt bij $x = 2$.



Figuur 4.9

a Bepaal het differentiaalquotiënt voor $x = 2$ met behulp van de grafiek.

b Stel de vergelijking op van de getekende raaklijn.

De grafiek hoort bij de functie $f(x) = 5 - \sqrt{2x}$.

c Controleer je antwoord bij a door het differentiaalquotiënt door de grafische rekenmachine te laten bepalen.

Opgave 8

Gegeven is de functie met voorschrift $g(x) = \frac{4}{x}$ op het interval $[-5{,}5]$.

a Bereken de verandering van $g(x)$ voor $x = 1$.

b Er is een punt op de grafiek van g waar de helling dezelfde waarde heeft als die in het punt $(1{,}4)$. Welk punt is dat? Licht je antwoord toe.

c Voor $x = 0$ heeft de functie g geen functiewaarde. Wat betekent dit voor de helling? En wat is er met de grafiek aan de hand?

Opgave 9

De concentratie C van een bepaalde stof die is opgelost in water, neemt met de tijd af volgens de formule $C(t) = 10 \cdot 0{,}9^t$. Hierin is C in gram per liter (g/L) en t in uren.

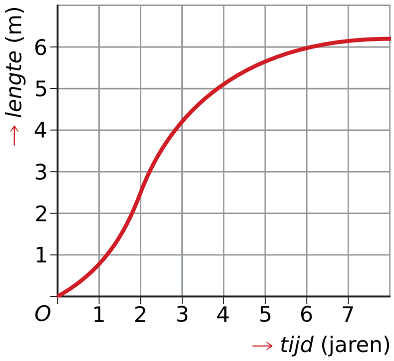
a Er verdwijnt niet elk uur een even grote hoeveelheid van deze stof uit het water. Hoe komt dat?

b Hoeveel gram van deze stof verdwijnt er gemiddeld in de eerste 5 uren? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c De vervalsnelheid van deze stof op $t = 5$ is niet gelijk aan de hoeveelheid die er tot dan toe gemiddeld per uur is verdwenen. Bereken deze vervalsnelheid in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Bekijk de grafiek van de lengtegroei van een boom. Neem de grafiek over.



Figuur 4.10

a Hoeveel meter per jaar groeit deze boom gemiddeld, gerekend over de eerste vijf jaar?

b Wat is de groeisnelheid na precies vijf jaar? Geef een zo nauwkeurig mogelijke schatting.

c Op welk tijdstip is de groeisnelheid het grootst? Licht je antwoord toe.

d Welke waarde krijgt de groeisnelheid uiteindelijk als de boom gezond blijft?

Opgave 11

De baan van een vuurpijl is bij benadering parabolisch tot hij uit elkaar spat. Bij deze baan past de formule $h(x) = -x^2 + 10x$, waarin zowel h als x in meters wordt uitgedrukt.

a Welke helling heeft de baan als de vuurpijl wordt afgeschoten?

b In welk punt van de baan is de helling 0?

c Als de pijl horizontaal 8 meter heeft afgelegd, spat hij uiteen. Hoe hoog is de pijl dan en welke helling heeft de baan op dat punt?

Toepassen

Opgave 12: Vallend voorwerp

Een steen valt van een loodrechte rotswand 500 meter naar beneden. Voor de afgelegde weg y (in meter) geldt de formule $y(t) = 4{,}9t^2$, waarin t de tijd in seconden is, tenminste zolang de steen nog aan het vallen is en niet op de grond terecht is gekomen.

a Bereken de gemiddelde snelheid van de steen gedurende de eerste 5 seconden.

b Bereken de snelheid van de steen na precies 5 seconden. Gebruik een rij van differentiequotiënten en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

c Bereken de snelheid waarmee de steen op de grond terechtkomt.

Testen

Opgave 13

Een hoeveelheid H (in kilogram) groeit exponentieel volgens de formule $H(t) = 2500 \cdot 1{,}2^t$ met t in dagen.

a Bereken de gemiddelde toename van deze hoeveelheid op het interval $[0{,}4]$.

b Bereken de toenamesnelheid van deze hoeveelheid op $t = 4$ met behulp van de grafische rekenmachine.

c Deze toenamesnelheid op $t = 4$ kun je in de grafiek aangeven. Leg uit hoe dat gaat.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 4$.

a Bereken het differentiaalquotiënt van f voor $x = 3$ met behulp van een rij differentiequotiënten. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 3$ aan de grafiek van f.

c Noem een punt op de grafiek van f waarvan het hellingsgetal van de raaklijn aan f door dat punt 0 is.

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het bepalen van een differentiaalquotiënt.

- **Veranderingen, differentiëren en de TI84**
- **Veranderingen, differentiëren en de TInspire**
- **Veranderingen, differentiëren en de Casio**
- **Veranderingen, differentiëren en de HPprime**
- **Veranderingen, differentiëren en de NumWorks**

1.5 Hellingsgrafiek

Inleiding

Je kunt bij veel functies in een punt van de grafiek de helling van die grafiek berekenen. Bij de meeste x-waarden hoort wel een hellingsgetal. En dus kun je een grafiek maken van het hellingsgetal afhankelijk van de waarde van x. Zo'n ‘hellingsgrafiek’ zegt dan weer het nodige over de grafiek van de functie zelf.

Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- bij een gegeven grafiek een hellingsgrafiek schetsen;
- bij een gegeven functievoorschrift een hellingsgrafiek tekenen en in eenvoudige gevallen het voorschrift van de hellingsfunctie bepalen;
- uit een gegeven hellingsgrafiek gegevens over de bijbehorende functie aflezen;
- werken met tekenschema's van de hellingen van een functie.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- met een differentiequotiënt de gemiddelde verandering op een interval uitrekenen;
- met een differentiaalquotiënt de verandering voor een bepaalde invoerwaarde berekenen.

Verkennen

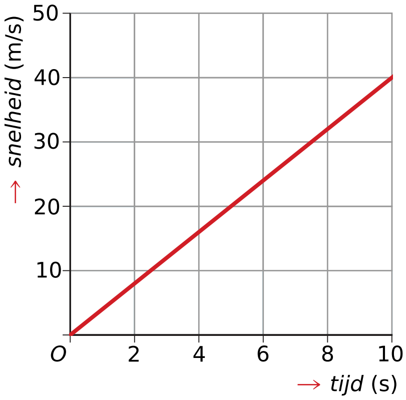
Opgave V1

Je zit op een stilstaande zeilwagen. Als je het zeil hijst, neemt je snelheid v door de windkracht toe. Bij een constante windkracht neemt de snelheid recht evenredig met die windkracht toe. Je ziet een snelheidsgrafiek bij een constante windkracht.

a Welke formule past bij deze grafiek?

b Schets de bijbehorende grafiek voor de afgelegde afstand.

c Kun je daar een formule bij verzinnen en zo berekenen welke afstand je na 20 seconden hebt afgelegd?

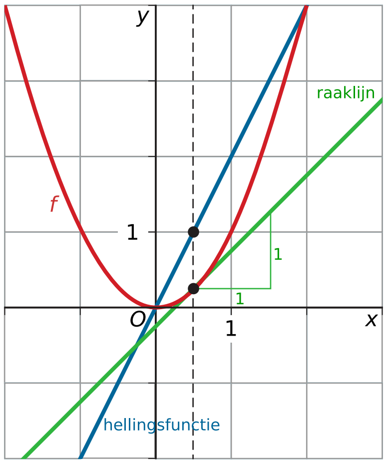


Figuur 5.2

Uitleg

Bekijk de applet.

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ met daarin de raaklijn aan de grafiek in het punt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. De richtingscoëfficiënt van die raaklijn bepaalt de helling van de grafiek bij $x = \frac{1}{2}$.



Figuur 5.3

Als je de waarden van x verandert, veranderen ook de hellingsgetallen van de raaklijnen. Je kunt van die hellingsgetallen een afzonderlijke grafiek maken: de hellingsgrafiek. De bijbehorende functie wordt de hellingsfunctie $f'(x)$ genoemd. Die zie je ook getekend.

Als je de grafiek van de functie f en die van zijn hellingsfunctie f' vergelijkt, dan valt op:

- als de grafiek stijgt, is de helling positief (en omgekeerd);
- als de grafiek daalt, is de helling negatief (en omgekeerd);
- in toppen van de grafiek (extremen van de functie) is de helling 0.

Verder zie je dat de grafiek van f van afnemende daling overgaat naar een toenemende stijging. Dit betekent dat de hellingen van de raaklijnen steeds groter worden; dit zie je ook terug in de hellingsgrafiek, de grafiek is namelijk een stijgende rechte lijn.

Deze eigenschappen kun je goed gebruiken om uit een hellingsgrafiek de karakteristieke eigenschappen van de grafiek van f af te leiden. Uit de hellingsgrafiek van een functie kun je bijvoorbeeld de (lokale) extremen aflezen.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $f(x) = x^2$ in de **Uitleg**. Als je de grafiek op de grafische rekenmachine maakt, kun je met $\frac{dy}{dx}$ in elk punt de helling bepalen.

a Vul de tabel in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							

Tabel 5.1

b Teken met behulp van de tabel in a zelf de hellingsgrafiek van deze functie.
Ga na dat die hellingsgrafiek een rechte lijn wordt.

c Wat betekent $f'(x) = 0$ voor de grafiek van f?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

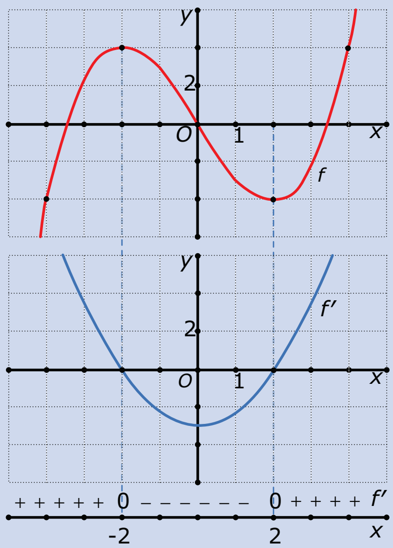
Bekijk de applet: Hellingsgrafiek

Een functie $y = f(x)$ heeft meestal in een punt van de grafiek een helling die wordt bepaald door het differentiaalquotiënt in dat punt.

Van die hellingsgetallen kun je ook weer een grafiek maken. Je ziet de grafiek van een functie (in rood) met de **hellingsgrafiek** (in blauw). De bijbehorende functie van de hellingsgrafiek wordt de **hellingsfunctie** of **afgeleide** van f genoemd en kun je korter schrijven als f' (spreek uit f accent). Je ziet:

- als de hellingsfunctie positieve waarden heeft, stijgt de bijbehorende functie;
- als de hellingsfunctie negatieve waarden heeft, daalt de bijbehorende functie;
- met wat voor soort stijging/daling je te maken hebt;
- waar de hellingsfunctie de waarde 0 heeft, heeft de grafiek van de bijbehorende functie een horizontale raaklijn; vaak gaat het daarbij om extremen van de functie.

Hieruit blijkt dat vooral het positief, negatief, of 0 zijn van de hellingsfunctie van belang is om het verloop van de grafiek van een functie te beschrijven. Dezelfde gegevens kun je ook terugvinden in een **tekenschema**, dat je onder de hellingsgrafiek ziet getekend. Een tekenschema is een getallenlijn waarop je aangeeft wanneer een functie positief, negatief of 0 is. Hoe steil de grafiek moet lopen kun je niet van een tekenschema aflezen. Wel waar toppen zitten.

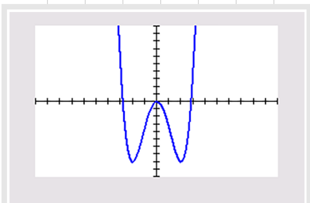


Figuur 5.4

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2$.

Teken de grafiek van de bijbehorende hellingsfunctie f'.



Figuur 5.5

Antwoord

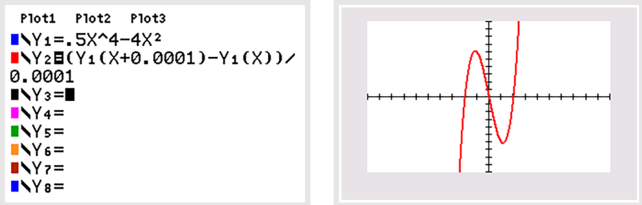
Maak eerst met behulp van de grafische rekenmachine een tabel met hellingsgetallen.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x) = \frac{dy}{dx}$	-30	0	6	0	-6	0	30

Tabel 5.2

Teken de bij deze tabel passende grafiek.

Je kunt ook direct de grafische rekenmachine een goede benadering van de hellingsgrafiek laten tekenen. Daartoe laat je hem voor willekeurige x het differentiaalquotiënt benaderen door een differentiequotiënt op het interval $[x; x + 0{,}001]$ en daarvan een grafiek maken. Bekijk dit in het **Practicum**.



Figuur 5.6

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0{,}5x^3 - 6x$.
In elk punt heeft de grafiek van f een bepaalde helling, die wordt bepaald door het differentiaalquotiënt $f'(x)$ in dat punt.

a Vul de tabel in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							

Tabel 5.3

b Met behulp van de tabel bij a kun je de hellingsgrafiek van de gegeven functie handmatig tekenen. Dat kan echter ook met de grafische rekenmachine. Maak die grafiek van f'.

c Welke waarde heeft $f'(x)$ in de toppen van de grafiek van f?

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

e Welke extreme waarde heeft $f'(x)$ en wat betekent dit voor de grafiek van f?

Opgave 3

Er is verband tussen de grafiek en de hellingsgrafiek van een functie. Kies telkens het juiste antwoord.

a Wat betekent het voor de grafiek van de functie als de hellingsgrafiek onder de x-as ligt?

A. De functiewaarden zijn negatief.
B. De grafiek is stijgend.
C. De grafiek is dalend.
D. De grafiek heeft een minimum.

b Soms is een grafiek toenemend stijgend. Hoe zie je dat aan de hellingsgrafiek?

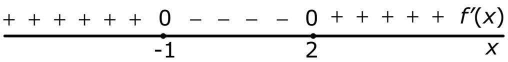
A. De hellingsgrafiek ligt boven de x-as.
B. De hellingsgrafiek is stijgend.
C. De hellingsgrafiek ligt boven de x-as en is stijgend.
D. De hellingsgrafiek heeft een maximum.

c Hoe vind je de extremen van een functie uit de hellingsgrafiek?

A. Je bekijkt voor welke waarden van x de hellingsgrafiek een maximum of een minimum heeft.
B. Je bekijkt voor welke waarden van x de helling overgaat van positief in negatief of omgekeerd.
C. Je bekijkt voor welke waarden van x de helling de waarde 0 heeft.
D. Dat kun je niet uit de hellingsgrafiek aflezen.

Voorbeeld 2

De hellingsfunctie zegt veel over het verloop van een grafiek. Het gaat er dan vooral om waar de hellingen positief, negatief of 0 zijn. Daarvoor heb je geen hellingsgrafiek nodig, een tekenschema van de afgeleide is genoeg.
Je ziet hier een tekenschema van de hellingsfunctie van een onbekende functie f.



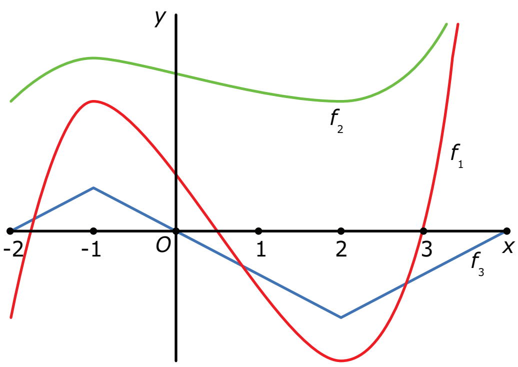
Figuur 5.7

Schets een mogelijke grafiek van f.

Antwoord

Als de hellingsfunctie positief is, is de grafiek van f stijgend, als de hellingsfunctie negatief is, is die grafiek dalend. Dit betekent dat:

- op het interval $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ de grafiek moet stijgen;
- op het interval $\langle -1, -2 \rangle$ de grafiek moet dalen;
- op het interval $\langle 2, \rightarrow \rangle$ de grafiek moet stijgen.



Figuur 5.8

Welke waarden $f(x)$ precies aanneemt is niet bekend. Daarom kies je zelf een startpunt, bijvoorbeeld $(0,0)$. De helling is daar negatief, dus de grafiek dalend. Hoe steil, is onbekend. Verder heeft de grafiek een maximum bij $x = -1$, omdat daar de helling overgaat van positief in negatief. Een minimum treedt op bij $x = 2$, omdat dan de helling van negatief in positief verandert.

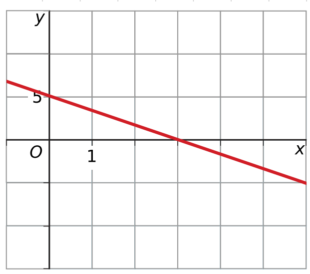
Je ziet drie mogelijke grafieken. Maar er zijn nog veel meer mogelijkheden. De grafieken hoeven niet door het punt $(0,0)$ te gaan.

Opgave 4

Je ziet de hellingsgrafiek van functie f.

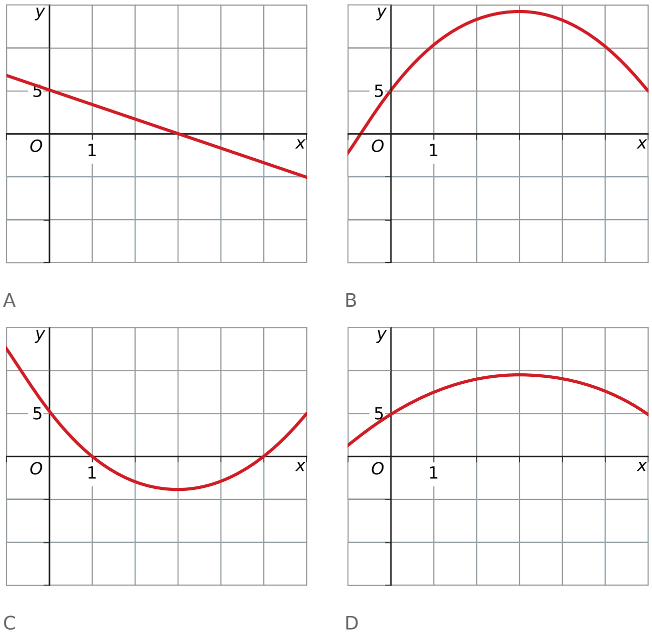
a Kies uit de volgende antwoorden. De grafiek van f heeft:

A. precies één extreme waarde van 5 voor $x = 0$;
B. geen extremen want de hellingsgrafiek is dalend;
C. geen extremen want de grafiek van de functie zelf is ook dalend;
D. een maximum voor $x = 3$



Figuur 5.9

b Als $f(0) = 5$, welke van deze grafieken A, B, C of D is dan een mogelijke grafiek van f?

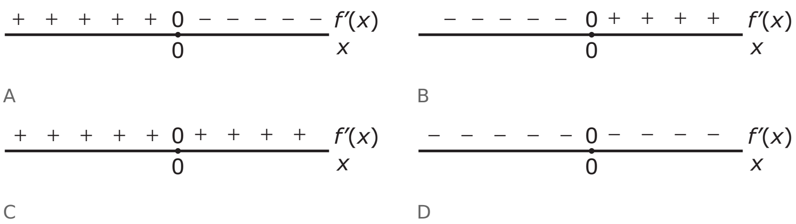


Figuur 5.10

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = x^3$.

a Welke van deze tekenschema's is van de bijbehorende hellingsfunctie?



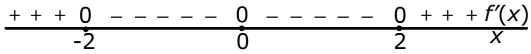
Figuur 5.11

b Voor $x = 0$ is de helling van de grafiek van f gelijk aan 0.
Waarom heeft de grafiek van f geen extreme waarde voor $x = 0$?
(Geef alle goede antwoorden aan.)

A. De grafiek is altijd stijgend, behalve bij $x = 0$.
B. Het tekenschema van de afgeleide wisselt bij $x = 0$ niet van teken.
C. De functie heeft geen horizontale raaklijn voor $x = 0$.
D. De functie heeft wel een horizontale raaklijn voor $x = 0$ maar gaat niet van stijgend naar dalend.

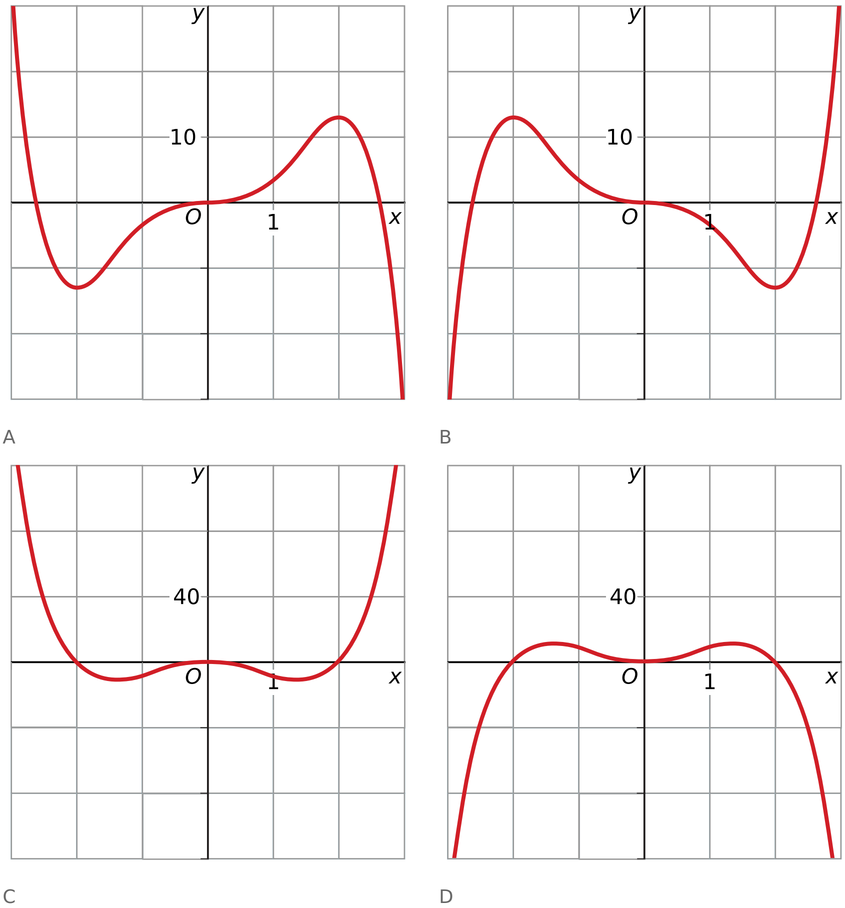
Opgave 6

Bekijk het tekenschema van de hellingsfunctie van f. De grafiek van f gaat door het punt $(0,0)$.



Figuur 5.12

Welke van deze grafieken is een mogelijke grafiek van f?



Figuur 5.13

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Stel een voorschrift op voor de hellingsfunctie $f'(x)$.

Antwoord

Je kunt dit doen door eerst met behulp van de grafische rekenmachine voor een aantal x waarden $\frac{dy}{dx}$ uit te rekenen en deze in een tabel te zetten.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

Tabel 5.4

In de tabel lijkt het er sprake van een lineair verband. Je ziet dat $f'(x)$ steeds precies 2 keer de x-waarde is. Je kunt de tabel nog uitbreiden om te bekijken of deze regelmaat blijft opgaan. Als je dit doet, zul je zien dat dit inderdaad het geval is. Je kunt niet alle mogelijkheden uitproberen, maar je mag er nu vanuit gaan dat $f'(x) = 2x$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je bij een gegeven kwadratische functie een formule voor de hellingsfunctie kunt opstellen.
Gegeven de kwadratische functie $g(x) = x^2 + 4$.
Stel het voorschrift van de hellingsfunctie op met behulp van een tabel van $g'(x)$. Wat valt je op?

Opgave 8

Voor een optrekkende zeilwagen geldt $a(t) = 1{,}2t^2$, waarin a de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconden is.

a De snelheid van dit voorwerp na 5 seconden is $a'(5)$. Bereken deze snelheid in meter per seconde (m/s) en in kilometer per uur (km/h).

b De snelheid v is een functie van t die hoort bij de hellingsgrafiek $a'(t)$.
Teken de grafiek van v en stel een formule op voor $v(t)$.

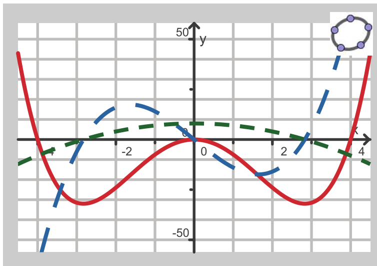
c Na hoeveel seconden beweegt de zeilwagen met een snelheid van 50 kilometer per uur (km/h)? Rond af op één decimaal.

Verwerken

Opgave 9

Je ziet hier drie grafieken gemaakt met GeoGebra.

Welke van de twee gestippelde grafieken is de hellingsgrafiek van de rode grafiek?



Figuur 5.14

Opgave 10

Bekijk het tekenschema van de hellingsfunctie van een functie g.
Schets een mogelijke grafiek van g.

– – – – – 0 – – – 0 + 0 – – – – 0 + + + + $g'(x)$
-2 0 1 3 x

Figuur 5.15

Opgave 11

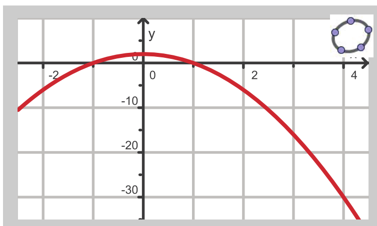
Bekijk de hellingsgrafiek van functie f, gemaakt met GeoGebra.

a Op welk interval stijgt de grafiek van f?

b Voor welke waarde(n) van x heeft de grafiek van f een maximum?

c Kun je uit de hellingsgrafiek aflezen hoe groot dit maximum is?

d Neem aan dat $f(0) = 2$. Schets de grafiek van f.



Figuur 5.16

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^2 + 3x$.
Stel de formule op van de hellingsgrafiek van f door eerst een tabel van differentiaalquotiënten te maken.

Opgave 13

Er zijn vier functies gegeven:

- $f(x) = -x^2 + 4$
- $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
- $h(x) = \frac{4}{x}$
- $k(x) = -x^4 + 4x$

a Bereken elk van deze functies het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 1$.

b Teken van elk van deze functies de grafiek van de hellingsfunctie.

c Bepaal met behulp van de hellingsgrafiek de extremen van de gekozen functie.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 8x$.

a Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van f zo in beeld brengen dat alle drie de nulpunten en de twee toppen zichtbaar zijn. Toon aan dat deze grafiek de x-as snijdt in het punt $(4,0)$.

b Bereken het hellingsgetal van de grafiek in dit punt.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 4$.

d Teken de grafiek van de afgeleide van f.

e Met behulp van de grafiek van die afgeleide kun je de extremen van f berekenen. Doe dat met behulp van de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 15: Elektrische auto

Een elektrische auto trekt op als het stoplicht op groen springt. Voor de afgelegde weg geldt: $s(t) = 1{,}6t^2$ waarin s de afgelegde weg in meters en t de tijd in seconden is. (Een elektrische auto hoeft niet te schakelen.)

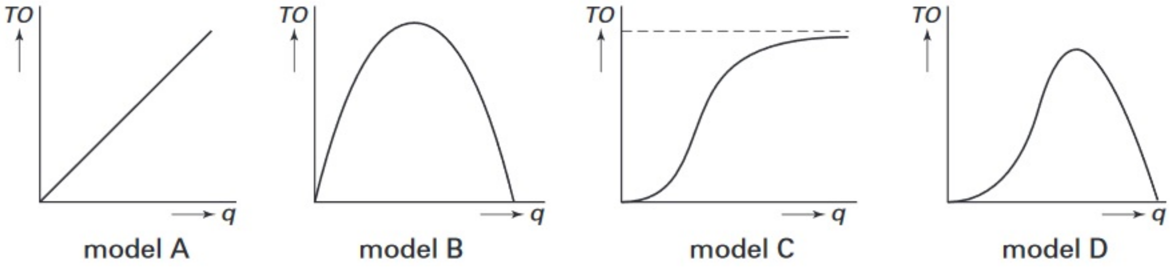
a De snelheid van deze auto wordt uitgedrukt in meter per seconde. Teken de grafiek van de snelheid v van deze auto als functie van de tijd t.

b Als het goed is, is je grafiek van de snelheid een rechte lijn. Stel een bijpassende formule op voor de snelheid $v(t)$.

c Na hoeveel seconden is de snelheid meer dan 80 km/h? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

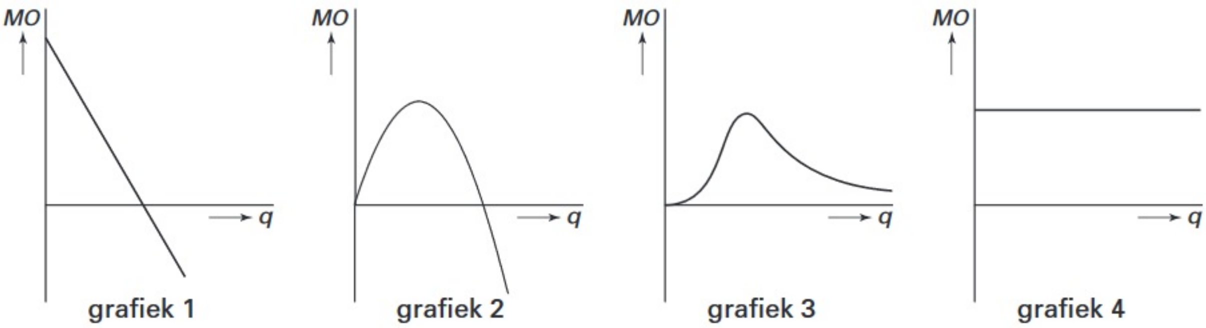
Opgave 16: Economische modellen

Een producent verkoopt q eenheden van een product. De totale opbrengst is TO. In de figuur staat voor vier economische modellen een schets van de grafiek van TO.



Figuur 5.17

Als je wilt weten hoe groot de totale opbrengst verandert bij een kleine toename van q, dan kijk je naar de marginale opbrengst MO. In de volgende figuur zie je bij elk van de modellen uit de figuur met economische modellen de grafiek van de marginale opbrengst, maar ze staan niet in de juiste volgorde.



Figuur 5.18

Geef voor elk van de grafieken 1, 2, 3 en 4 aan bij welk economisch model de grafiek hoort. Licht je antwoord toe.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2002, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 17

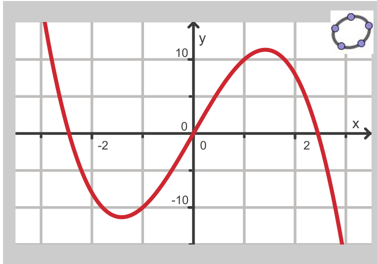
Gegeven de functie $f(x) = x^2 - 4x$.
Teken de grafiek van de bijbehorende hellingsfunctie.

Opgave 18

Je ziet de hellingsgrafiek van een functie g, getekend met GeoGebra.

De grafiek van deze functie gaat door het punt $(2,4)$.

Teken een mogelijke grafiek van g.



Figuur 5.19

Opgave 19

Dit is een tekenschema van de hellingsfunctie van een functie f.

+ + +	0	− − −	0	+ + +	$f'(x)$
	0		3		x

Figuur 5.20

a Voor welke waarde van x heeft deze functie een maximum?

b Op welk interval is de grafiek van deze functie dalend?

c Maak een schets van een mogelijke grafiek van f die door $(0,1)$ gaat.

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het maken ven hellingsgrafieken.

- **Veranderingen, differentiëren en de TI84**
- **Veranderingen, differentiëren en de TInspire**
- **Veranderingen, differentiëren en de Casio**
- **Veranderingen, differentiëren en de HPprime**
- **Veranderingen, differentiëren en de NumWorks**

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Veranderingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- toenemende, afnemende of constante stijging of daling — extremen
- toenametabel — vaste stapgrootte — toenamediagram
- gemiddelde verandering — differentiequotiënt — koorde
- veranderingssnelheid in een punt — differentiaalquotiënt — raaklijn
- hellingsgrafiek — hellingsfunctie — tekenschema

Activiteitenlijst

- bij een functie (of grafiek) aangeven waar hij (toenemend, afnemend) stijgt en daalt;
- bij een functie (of grafiek) een toenamediagram tekenen en omgekeerd bij een toenamediagram mogelijke grafieken van een bijpassende functie tekenen;
- bij een functie (of grafiek) het differentiequotiënt op een gegeven interval berekenen en de betekenis daarvan omschrijven;
- bij een functie (of grafiek) het differentiaalquotiënt voor een gegeven invoerwaarde berekenen en de betekenis ervan omschrijven — het hellingsgetal van een raaklijn aan een grafiek berekenen;
- bij een functie (of grafiek) een hellingsgrafiek tekenen — uit een hellingsgrafiek eigenschappen van de functie (stijgen, dalen, extremen) aflezen.

Achtergronden

Het wiskundig beschrijven van veranderingen is nog niet zo heel oud. Eigenlijk begon het allemaal met de Fransman **Nicole Oresme (1323—1382)** die de 'grafiek' bedacht om het bewegen van voorwerpen langs een rechte lijn te beschrijven.

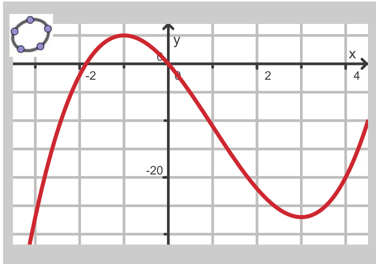
Later gebruikte **Galileo Galileï (1564—1642)** de grafieken van Oresme om er de vrije val van een voorwerp in vacuüm mee weer te geven. En **Isaac Newton (1642–1727)** en **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)** bedachten een goede techniek om veranderingen te berekenen: de 'differentiaalrekening'.

Figuur 6.1 Galileo Galileï (Wikipedia)

Testen

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$, gemaakt met GeoGebra.



Figuur 6.2

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-3,1]$.

b Geef een interval waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 0.

c Stel de vergelijking op van de raaklijn aan f voor $x = 1$.

d Maak de hellingsgrafiek bij deze functie.

e Uit de hellingsgrafiek kun je de x-waarden van de extremen van de gegeven functie halen. Leg uit hoe en bereken de extremen van f.

Opgave 2

De hoogte van een vuurpijl die je van de grond afschiet, wordt gegeven door $h(t) = 60t - 5t^2$, waarin h de hoogte boven de begane grond in meter en t de tijd in seconden na het afschieten.

a Na tien seconden ontploft de vuurpijl. Op welke hoogte is dat?

b Teken een bijpassend toenamediagram van 0 tot 6 met stapgrootte 1.

c Bereken de gemiddelde snelheid van de vuurpijl over de eerste zes seconden.

d Bereken de snelheid van de vuurpijl op $t = 4$.

e Plot de grafiek van de snelheid $h'(t)$ van de vuurpijl. Maak eerst een tabel met hellingsgetallen.

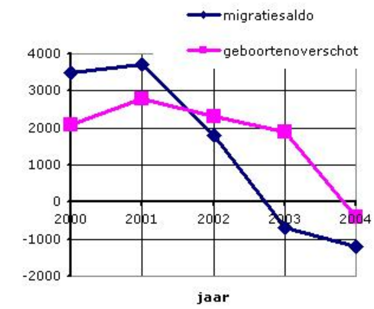
f De grafiek van de snelheid die je bij e hebt getekend moet een rechte lijn zijn. Stel bij die rechte lijn een formule op en bereken met die formule de snelheid op het moment van ontploffen.

Opgave 3

Het migratiesaldo van R geeft het verschil tussen het aantal mensen dat in R komt wonen, en het aantal mensen dat uit R vertrekt. Het geboorteoverschot is het verschil tussen het aantal geboorten en het aantal overledenen in R. In deze grafiek zie je het migratiesaldo en het geboorteoverschot voor de jaren 2000 tot en met 2004.

Bevolking van R

jaar	migratiesaldo	geboortenoverschot
2000	3500	2100
2001	3700	2800
2002	1800	2300
2003	-700	1900
2004	-1200	-400



Figuur 6.3

a Met hoeveel mensen is het aantal inwoners in R in het jaar 2000 toegenomen?

b In welk jaar is het aantal inwoners in deze stad afgenomen?

c Het aantal inwoners van R was aan het begin van het jaar 2000 ongeveer 72600 (op honderdtallen afgerond). Teken een grafiek van het aantal inwoners in R in de jaren 2000 tot en met 2004.

d Hoe groot was het aantal inwoners op 1 januari 2005?

Opgave 4

In een viskwekerij wordt vis uitgezet in een aantal nieuw aangelegde kweekvijvers. Als er geen vis wordt gevangen zal de visstand zich in de loop der jaren uitbreiden. De grafiek geeft een model van de groei van de visstand.

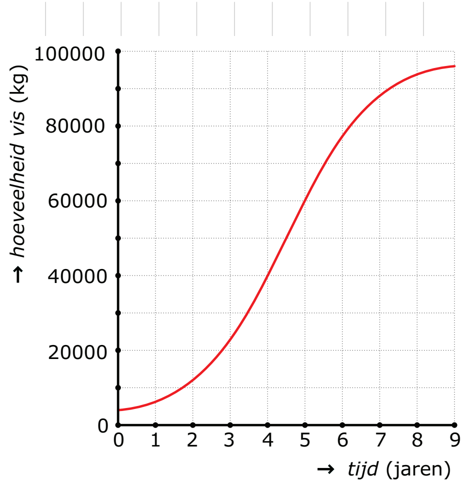
a Teken het toenamediagram met stapgrootte 1.

b De viskweker zal een aantal jaren afwachten alvorens te oogsten. Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens de grafiek.
Welk advies zou je de viskweker geven over:

- het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten.
- de grootte van de jaarlijkse vangst.

Geef bij dit advies een toelichting waarmee je de viskweker denkt te overtuigen.

(bron: examen wiskunde A vwo in 1989, eerste tijdvak)



Figuur 6.4

Toepassen

Opgave 5: Suikerbieten

Een boer verbouwt suikerbieten op een bepaalde lap grond. Voor het onkruid wieden heeft hij personeel in dienst. De opbrengst bij de verkoop van de suikerbieten neemt toe als er beter wordt gewied, dus als hij meer werknemers in dienst neemt. Maar dat gaat niet onbeperkt: op zeker moment lopen de bietenwieders elkaar voor de voeten en wordt het wieden er niet beter van.
Een mogelijk verband tussen de opbrengst R (in honderden euro) en het aantal werknemers w wordt gegeven door de formule $R = -\frac{1}{3}w^3 + 6w^2$.

Voor de boer is het interessant om te weten hoeveel werknemers hij het beste kan inhuren. Daarbij kijkt hij naar de meeropbrengst van een werknemer. Zo is de meeropbrengst van de derde werknemer $R(3) - R(2)$. De meeropbrengst per werknemer heet in economentaal ook wel marginale opbrengst. De boer zorgt er voor dat hij zoveel werknemers in dienst neemt dat de marginale opbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

a Hoeveel bedraagt de marginale opbrengst (de meeropbrengst) van de derde werknemer?

b Je kunt met de grafische rekenmachine een tabel maken van de meeropbrengsten van elk van de eerste 10 werknemers. Maak die tabel en beslis op grond daarvan hoeveel werknemers de boer in dienst zal nemen voor het bieten wieden.

c De boer kiest voor zoveel werknemers, dat de meeropbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is. Waarom doet hij dat? Waarom kiest hij niet voor het aantal werknemers waarbij de opbrengst zo groot mogelijk is?

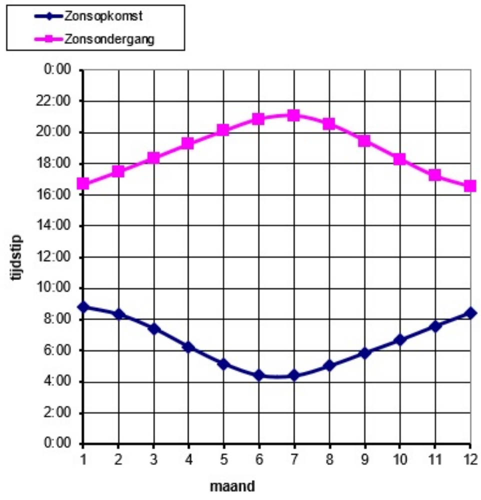
Opgave 6: Daglengte

Door het KNMI worden de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang gedurende het jaar bijgehouden. Via internet kun je actuele informatie over dit onderwerp vinden. **Hier** zie je een tabel en een grafiek voor Amsterdam in een bepaald jaar gemaakt in MS-Excel.

Je ziet dat de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang in de loop van het jaar veranderen. Bovendien is de snelheid waarmee die veranderingen plaatsvinden ook veranderlijk. In de tweede helft van de maand juni bijvoorbeeld verandert het tijdstip van zonsondergang maar weinig per dag. Maar in september is die verandering per dag juist behoorlijk groot. Ook de daglengte (verschil tussen zonsopkomst en zonsondergang) verandert in de loop van het jaar. En ook die verandering gaat soms sneller en soms minder snel...
Een goede manier om de veranderingen nauwkeurig te bekijken is een toenamediagram bijvoorbeeld per maand.

Zonsopkomst en zonsondergang in Nederland
De tijdstippen gelden steeds voor de eerste dag van de maand
Alle tijden zijn in M.E.T. (geen zomertijd dus)

maand	opkomst	ondergang
1	8:48	16:39
2	8:20	17:28
3	7:26	18:20
4	6:15	19:14
5	5:10	20:05
6	4:25	20:50
7	4:24	21:03
8	5:02	20:30
9	5:52	19:27
10	6:41	18:17
11	7:35	17:12
12	8:26	16:32



Figuur 6.5

a Het tijdstip van zonsopkomst verandert per dag. In welke maanden verandert het tijdstip van zonsopkomst het snelst per dag? Hoe zie je dat aan de grafiek?

b Ook het tijdstip van zonsondergang verandert per dag. Verandert het tijdstip van zonsondergang het snelst per dag in dezelfde maanden als dat van zonsopkomst? Kun je dit verklaren?

c De daglengte-grafiek is af te leiden uit die van zonsopkomst en zonsondergang. Hoe?

d In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder?

e Teken zelf in Excel een grafiek en een toenamediagram van de daglengte in de loop van het jaar. Neem de gegevens over. Neem voor het toenamediagram een stapgrootte van 1 maand.

f De daglengte verandert dagelijks. In welke maanden verandert de daglengte het snelst? Hoe zie je dat aan de grafiek en hoe aan het toenamediagram?

g In bepaalde maanden lijkt de daglengte wel vrijwel constant. In welke maanden is dat het geval? En hoe zie je dat aan het toenamediagram?

h In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?

Opgave 7: Snelheid, versnelling

Voor de snelheid v in m/s van een bewegend voorwerp geldt: $v = 2{,}4t$ waarin t de tijd in seconden is.

a De grafiek van v is de hellingsgrafiek van de grafiek van de afgelegde weg $s(t)$ waarin s in meters is uitgedrukt. Neem aan, dat $s(0) = 0$. Maak een zo nauwkeurig mogelijke grafiek van $s(t)$.

b Bij de grafiek van $v(t)$ hoort ook een hellingsgrafiek. Teken die hellingsgrafiek.

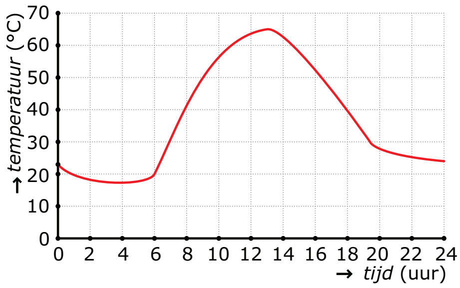
c Wat stelt de hellingsgrafiek van $v(t)$ voor?

d Voor de afgelegde weg geldt de formule $s(t) = 1{,}2t^2$.
Laat met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[t,t+h]$ zien, dat de gegeven functie v inderdaad de hellingfunctie van s is.

Examen

Opgave 8: Woestijnhagedis

De woestijnhagedis (diposaurus dorsalis) leeft in de woestijnen van Californië (V.S.). In deze woestijn zijn er dagelijks grote temperatuurschommelingen. In de zomer kan de temperatuur op een dag variëren van ongeveer 20 °C tot ongeveer 65 °C. In de winter kan het er zelfs vriezen. Omdat de hagedis een koudbloedig dier is, is zijn gedragspatroon erg afhankelijk van de temperatuur. Je ziet in de figuur het temperatuurverloop voor een zomerdag (eind juli/begin augustus) in de Californische woestijn. Deze figuur is typerend voor alle dagen in de periode eind juli/begin augustus. Alleen als de temperatuur tussen de 36 °C en 42 °C ligt, is de hagedis voortdurend buiten zijn hol actief met het zoeken naar voedsel. Hij heeft dan geen beschutting nodig. Als de temperatuur tussen de 42 °C en de 50 °C is moet hij af en toe beschutting zoeken tegen de zon. Bij alle andere temperaturen bevindt de hagedis zich voortdurend in zijn hol.

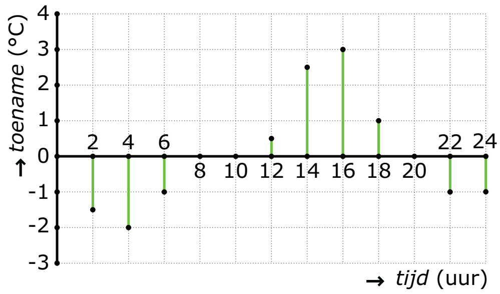


Figuur 6.6

a Hoeveel uur per dag is de hagedis in de periode eind juli/begin augustus voortdurend buiten zijn hol actief? Licht je antwoord toe.

b In de figuur is te zien, dat de temperatuur tussen 6:00 uur en 10:00 uur vrij snel stijgt. Hoeveel bedraagt in deze periode de gemiddelde temperatuurstijging per uur?

In dit diagram zie je de toename/afname van de temperatuur in het hol van de hagedis. Ook deze figuur is typerend voor de periode eind juli/begin augustus. Omdat het niet zo eenvoudig is om deze temperaturen te meten, kun je in het diagram slechts aflezen hoeveel de temperatuur per 2 uur is gestegen of gedaald. Om 8:00 uur 's morgens is de temperatuur in het hol ongeveer 38 °C.



Figuur 6.7

c Teken een grafiek van de temperatuur in het hol van de hagedis uitgaande van het toename-/afnamediagram.

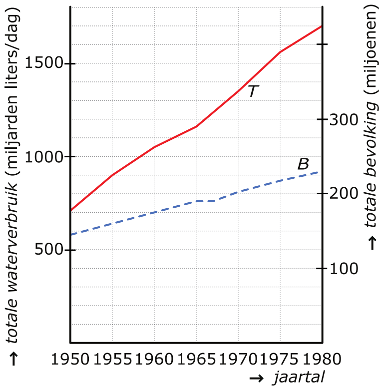
d Bepaal op welke momenten van de dag het temperatuurverschil tussen de binnenkant van het hol en de omgeving het grootst is.

(bron: examen wiskunde A havo 1996, tweede tijdvak, aangepast)

Opgave 9: Schoon drinkwater

Overal op aarde is de behoefte aan schoon water groot. Niet alleen voor huishoudelijk gebruik (o.a. drinkwater), maar vooral voor niet-huishoudelijk gebruik (landbouw en industrie) is heel veel water nodig. Deze opgave gaat over het waterverbruik in de Verenigde Staten vanaf 1950.

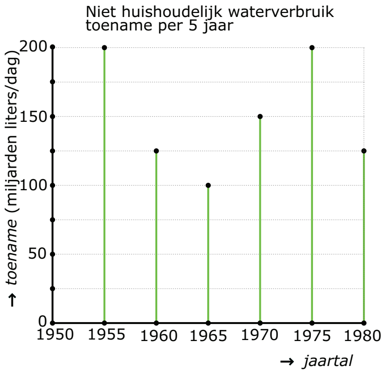
In de grafiek staan gegevens over het totale jaarverbruik (T) en de grootte van de bevolking (B) van de V.S. Je kunt er bijvoorbeeld uit aflezen dat in 1980 het totale waterverbruik ongeveer 1680 miljard liter per dag bedroeg, en dat de bevolking in dat jaar ongeveer 230 miljoen mensen telde.



Figuur 6.8

a Laat zien dat het totale verbruik per jaar in 1975 gemiddeld ongeveer $2{,}6$ miljoen liter water per inwoner was.

Het aantal liters in opgave a is erg groot. Dat komt vooral door het niet-huishoudelijk waterverbruik. In 1950 was het totale waterverbruik (700 miljard liter per dag) opgebouwd uit 625 miljard liter water voor niet-huishoudelijk gebruik en 75 miljard liter per dag voor huishoudelijk verbruik.



Figuur 6.9

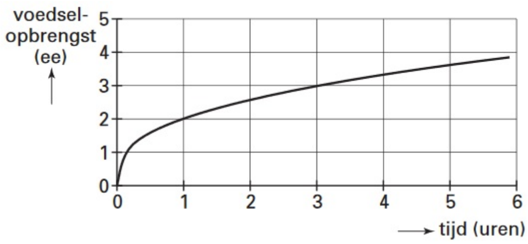
b Bekijk ook het toenamediagram van het waterverbruik per dag in de V.S. voor niet-huishoudelijk gebruik.
Onderzoek of het niet-huishoudelijk verbruik als percentage van het totale waterverbruik per dag in 1980 groter was dan in 1950.

c Bij een onderzoek schatte men dat de toename van het totale waterverbruik elke 5 jaar zou liggen tussen 110 en 200 miljard liter per dag. Tussen welke twee getallen ligt volgens deze veronderstelling het totale waterverbruik in de V.S. in 2010?

(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)

Opgave 10: Roofdieren

De meeste roofdieren proberen iedere dag hun voedsel zo snel mogelijk te vangen. Naarmate meer voedsel is gevangen, wordt het vaak moeilijker om nog nieuw voedsel te vangen. Deze opgave gaat over het wiskundige model dat daarbij gemaakt kan worden. In dat model geeft de opbrengstfunctie het verband aan tussen de hoeveelheid voedsel (de voedselopbrengst) en de tijd die nodig is om die hoeveelheid voedsel te vangen. In de figuur is de grafiek getekend van de opbrengstfunctie voor roofdiersoort A. De voedselopbrengst is uitgedrukt in energie-eenheden (ee) en de benodigde tijd in uren.



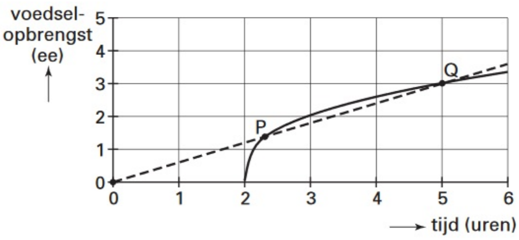
Figuur 6.10

We bekijken een roofdier van soort A. Na $0{,}5$ uur heeft dit roofdier een bepaalde hoeveelheid energie aan voedsel gevangen. Om de dubbele hoeveelheid te vangen is meer dan het dubbele van $0{,}5$ uur nodig.

a Bepaal met behulp van de grafiek hoeveel maal zo groot de daarvoor benodigde tijd is.

Sommige roofdieren leven niet in hetzelfde gebied als hun prooidieren. Zulke roofdieren moeten zich eerst verplaatsen naar hun voedselgebied voordat ze met de jacht kunnen beginnen. De tijd die nodig is om een bepaalde hoeveelheid voedsel te vangen wordt daardoor uitgebreid met de tijd die nodig is om naar het voedselgebied te gaan. Dit heeft gevolgen voor de gemiddelde opbrengst per uur. In de figuur is de grafiek van de opbrengstfunctie van roofdiersoort B getekend. Zoals je in de figuur kunt zien, is een roofdier van deze soort twee uur onderweg (1 uur heen en 1 uur terug).

Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich het punt Q met coördinaten $(5{,}3)$. Dat wil zeggen dat, als een roofdier van roofdiersoort B vijf uur jaagt (inclusief verplaatsing), dan is zijn voedselopbrengst 3 ee. De gemiddelde voedselopbrengst is dan $\frac{3}{5} = 0{,}6$ ee/h. In de figuur is ook een stippellijn getekend die gaat door de oorsprong en punt Q. Deze stippellijn snijdt de grafiek van roofdiersoort B ook in punt P.



Figuur 6.11

b Leg uit, zonder berekening, dat de gemiddelde voedselopbrengst die hoort bij punt P ook gelijk is aan $0{,}6$ ee/uur.

c Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich een punt waarbij de gemiddelde opbrengst per uur voor een roofdier van soort B maximaal is.

Bepaal met behulp van de figuur bij b, bij welke tijd de gemiddelde opbrengst per uur maximaal is. Licht je antwoord toe.

Een roofdier van soort C is in totaal 1 uur onderweg. Voor deze roofdieren is de opbrengstfunctie gegeven door de formule:

$r = 4\sqrt{t-1}$ als $t > 1$ (voor het eerste uur geldt: $r = 0$)

Hierin is t de tijd in uren en r de hoeveelheid gevonden voedsel in ee.

Deze opbrengstfunctie r heeft voor $t > 1$ de volgende twee eigenschappen:

- een langere tijd levert altijd een hogere opbrengst op;
- de toename van de opbrengst wordt steeds geringer naarmate t groter wordt.

Deze twee eigenschappen zijn zichtbaar in de grafiek van r, maar ze kunnen ook worden verklaard aan de hand van de grafiek van de afgeleide van r.

d Schets de grafiek van de afgeleide van r en verklaar de beide eigenschappen aan de hand van deze grafiek.

(bron: vwo wiskunde A examen 2006, eerste tijdvak)

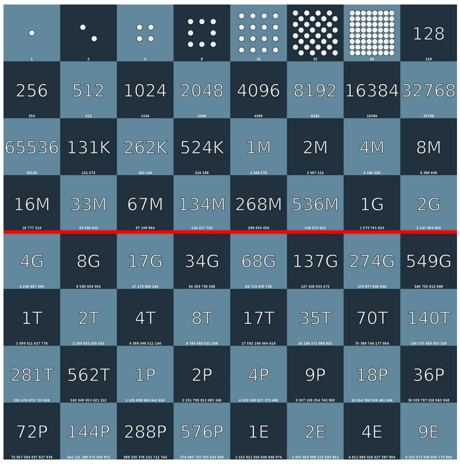
2

Exponentiële functies

2.1 Exponentiële groei

Inleiding

Groeiverschijnselen komen veel voor, denk aan het toenemen van geld dat je op de bank zet, het toenemen van de kosten als je meer km in de taxi zit, het groeien van de bevolking, enzovoorts. Soms is er sprake van toename met een vaste hoeveelheid per tijdseenheid, soms is er sprake van toename die afhankelijk is van de hoeveelheid zelf: hoe groter de hoeveelheid, hoe groter ook de toename per tijdseenheid. Bij exponentiële groei is de toename een vast percentage van de totale hoeveelheid.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei en afname, bijpassende formules opstellen;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden;
- enkele rekenregels voor het werken met machten.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Stel je voor dat je een heel groot vel papier hebt (A1-formaat). Het vel papier vouw je dubbel. Het dubbelgevouwen papier is dan twee lagen dik. Vouw je dit papier nogmaals dubbel, dan is het papier vier lagen dik. Een echt vel papier kun je natuurlijk steeds moeilijker dubbelvouwen. Wanneer je je het vel papier voorstelt als een onbegrensd vlak zonder dikte, kun je in principe blijven doorgaan met dubbelvouwen.

a Hoeveel lagen papier zijn er na twintig keer dubbelvouwen?

b Waarom zal dit met een A4-tje nooit lukken?

Stel dat het onbegrensde vel papier $0{,}15$ mm dik is.

c Hoe dik is het aantal lagen na twintig keer vouwen?

d Van een ander vel papier is na net zo vaak vouwen het aantal lagen maar 5 cm dik. Hoe dik is dat papier?

Uitleg

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Elke bacterie brengt twee nieuwe bacteriën voort door zich te delen. Bij een geschikte constante temperatuur kan de groei van het aantal bacteriën verlopen als in de tabel is te zien.

tijd (uren)	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	6	12	24	48	96	192	384

Tabel 1.1

De hoeveelheid bacteriën wordt elk uur twee keer zo groot. Dat zie je door opeenvolgende waarden in de tabel op elkaar te delen.

$\frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = \frac{192}{96} = 2$

Je moet dus steeds met factor 2 vermenigvuldigen om de volgende waarde te vinden:

- op tijdstip 0 heb je 6 bacteriën;
- na 1 uur heb je $6 \cdot 2$ bacteriën;
- na 2 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2$ bacteriën;
- na 3 uur is er $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2^3$ bacteriën; enzovoort.

De hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Voor de hoeveelheid bacteriën B na t uur geldt in dit geval de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$. Je ziet dat er machten worden gebruikt voor het herhaaldelijk vermenigvuldigen. In dit geval zijn het machten met grondtal 2, dit getal is de groeifactor per uur. Omdat de variabele t in de exponent zit, spreek je van exponentiële groei.

Met het voorbeeld van bacteriegroei en de functie $B(t)$ kun je een aantal rekenregels voor machten afleiden.

- Allereerst heb je op $t = 0$ volgens de formule $6 \cdot 2^0$ bacteriën. Omdat je weet dat dit precies 6 moet zijn is: $2^0 = 1$.
- Na 3 uur heb je $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 7 uur, dus $6 \cdot 2^7$. Conclusie: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Als je machten vermenigvuldigt tel je de exponenten op.
- Na 7 uur heb je $6 \cdot 2^7$ en 4 uur eerder $6 \cdot \frac{2^7}{2^4}$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 3 uur, dus $6 \cdot 2^3$. Conclusie: $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$. Als je machten deelt trek je de exponenten af.
- De groeifactor per uur is 2. Per drie uur is die groeifactor $2^3 = 8$. De hoeveelheid bacteriën na 12 uur kun je op twee manieren berekenen: $6 \cdot 2^{12}$ of $6 \cdot 8^4$. Dus moet $\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$. Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^3$$

$$(2^3)^4 = 2^{12}$$

$$2^0 = 1$$

Figuur 1.2

Opgave 1

Lees het verhaal van de bacteriegroei in de **Uitleg**.

a Wat versta je onder de ‘groeifactor’ per uur van de hoeveelheid bacteriën?

b Hoeveel procent bacteriën komt er elk uur bij?

c Hoeveel bacteriën heb je na 12 uur?

d Hoeveel bacteriën heb je na 13 uur?

e Hoeveel bacteriën heb je na 15 uur?

Opgave 2

Schrijf als één macht, gebruik de rekenregels.

a $2^4 \cdot 2^{14}$

b $3^3 \cdot 3^5$

c $\frac{5^9}{5^4}$

d $(6^3)^6$

Opgave 3

Bekijk de tabel.

tijd (h)	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00
bacteriën	50	150	450	1350	4050	12150	36450

Tabel 1.2

a Toon aan dat er sprake is van exponentiële groei.

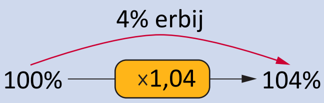
b Hoe groot is de groeifactor?

c Hoeveel bacteriën zijn er om 17:00 uur?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is dan geldt: $g > 0$. Om vast te stellen of de groei exponentieel is, deel je opeenvolgende waarden van de hoeveelheid op elkaar. Komt daar steeds hetzelfde getal uit, dan is er sprake van **exponentiële groei**. De hoeveelheid op $t = 0$ noem je de beginwaarde.



Figuur 1.3

Als een hoeveelheid met steeds hetzelfde percentage groeit is er sprake van exponentiële groei. Bij een groei met p procent hoort de groeifactor: $g = 1 + \frac{p}{100}$.

Voor $p > 0$ neemt de hoeveelheid toe en is $g > 1$: exponentiële toename.
Voor $p < 0$ neemt de hoeveelheid af en is $0 < g < 1$: exponentiële afname.

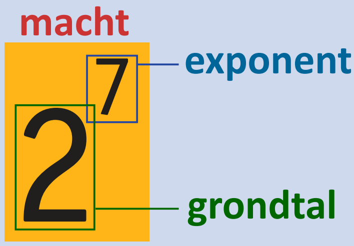
Als je de groeifactor g weet, kun je met de formule $p = 100 \cdot (g - 1)$ het groeipercentage uitrekenen.

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je n keer hetzelfde getal g, dan schrijf je dat als g^n. Dit is een **macht**. De groeifactor g heet het **grondtal**, n heet de **exponent**, waarbij n (voorlopig) een positief geheel getal is. Voor $n = 0$ is de afspraak: $g^0 = 1$. In het algemeen gelden voor een willekeurig grondtal g en willekeurige positieve gehele getallen n en m de volgende **rekenregels**:

$g^n \cdot g^m = g^{n+m}$

$\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$

$(g^n)^m = g^{n \cdot m}$



Figuur 1.4

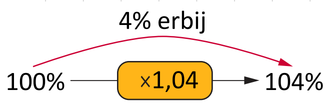
Voorbeeld 1

Op 1 januari 2010 stond een bedrag van € 3500,00 op een spaarrekening. De bank gaf (toen nog) op deze rekening een rente van 4% per jaar. Neem aan dat dit alles vanaf 1 januari 2010 niet verandert.

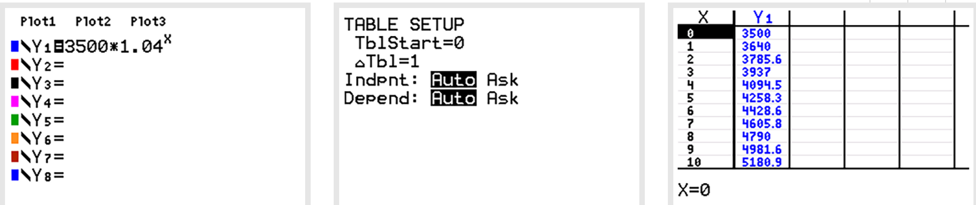
- Stel de formule op voor het saldo S op deze rekening afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010.
- Maak een tabel met de grafische rekenmachine en bekijk hoe het saldo zich ontwikkelt.
- Wat is de groeifactor per drie jaar? En per vijf jaar?

Antwoord

- Bij een toename van 4% per jaar hoort een groeifactor van $1{,}04$. Op $t = 0$ was het saldo € 3500,00. Een passende formule is daarom $S = 3500 \cdot 1{,}04^t$.
- Als je deze formule invoert op de rekenmachine heb je snel een tabel.
- Per drie jaar is de groeifactor: $1{,}04^3 \approx 1{,}12$ dus het groeipercentage is dan ongeveer 12. Per vijf jaar is de groeifactor: $1{,}04^5 \approx 1{,}22$ dus de groei is dan ongeveer 22%.



Figuur 1.5



Figuur 1.6

Opgave 4

Iemand zet op 1 januari 2010 € 800,00 op een bankrekening tegen 6% rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

a Hoe groot is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?

b Hoeveel staat er op de bankrekening op 1 januari 2015?

c Welke formule geldt voor het spaartegoed S uitgedrukt in t, waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2010 is?

d Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipercentage per vijf jaar.

e Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2030 kunt berekenen:

- $t = 20$ invullen in de formule;
- het tegoed op 1 januari 2010 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vier jaar;
- het tegoed op 1 januari 2010 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vijf jaar.

Voorbeeld 2

Een krant zag in een reeks van jaren het aantal jaarabonnementen dalen.

jaartal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen (×	970	941	913	885	859	833

Tabel 1.3

Stel op grond van deze tabel een zo goed mogelijk passende formule op die het verloop van het aantal duizenden abonnementen A als functie van de tijd t in jaren beschrijft. Neem $t = 0$ voor 2010. Als het aantal jaarabonnementen onder de 500.000 zakt raakt de krant in problemen. In welk jaar is dat het geval als dit verloop niet wijzigt?

Antwoord

De jaartallen nemen gelijkmatig toe. Deling van opeenvolgende aantallen abonnementen levert steeds (ongeveer) $0{,}97$ op, dus de daling is een vorm van exponentiële groei. De groeifactor $g \approx 0{,}97 < 1$, dus er is sprake van exponentiële afname.
Het aantal abonnementen neemt jaarlijks met 3 procent af.

Een passende formule is daarom: $A(t) = 970 \cdot 0{,}97^t$.

Maak vervolgens een tabel van deze functie met de rekenmachine.
Ga na dat op $t = 22$ de waarde van A minder dan 500 is.
Op deze manier raakt de krant in 2032 in de problemen.

Opgave 5

Bekijk de tabel in **Voorbeeld 2**, waarbij sprake is van exponentiële afname.

a Controleer dat de groeifactor per jaar inderdaad telkens ongeveer $0{,}97$ is.

b Welke formule vind je voor het aantal abonnementen $A(t)$ als je $t = 0$ neemt in 2017?

c Laat zien dat de krant in 2032 inderdaad in de problemen raakt.

Opgave 6

Neem de tabel over en vul in:

procentuele toename per jaar	13	-6	0,3				
groeifactor per jaar				1,15	0,98	3,95	0,01

Tabel 1.4

Voorbeeld 3

Schrijf de volgende uitdrukkingen als één macht.

- $\frac{(3^{16})^{10}}{3^{50} \cdot 3^{60}}$
- $\frac{4^{1000} \cdot 16^{212}}{8^{812}}$

Antwoord

Deze machten kun je niet berekenen met de grafische rekenmachine. Je moet hier de rekenregels van machten toepassen.

- $\frac{(3^{16})^{10}}{3^{50} \cdot 3^{60}} = \frac{3^{16 \cdot 10}}{3^{50+60}} = \frac{3^{160}}{3^{110}} = 3^{160-110} = 3^{50}$
- Alle getallen zijn machten van twee: $4 = 2^2$, $16 = 2^4$ en $8 = 2^3$.
  En dus staat hier:
  $\frac{(2^2)^{1000} \cdot (2^4)^{212}}{(2^3)^{812}} = \frac{2^{2 \cdot 1000} \cdot 2^{4 \cdot 212}}{2^{3 \cdot 812}} = \frac{2^{2000} \cdot 2^{848}}{2^{2436}} = \frac{2^{2000+848}}{2^{2436}} = \frac{2^{2848}}{2^{2436}} =$
  $2^{2848-2436} = 2^{412}$

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**. Gebruik de rekenregels voor machten om de uitdrukkingen als één macht van twee of één macht van drie te schrijven.

a $3^{83} \cdot (3^{40})^2$

b $\frac{2^{214} \cdot 2^{80}}{(2^{12})^{24}}$

c $\frac{(3^{21})^4 \cdot 3^{41}}{(3^3)^9}$

d $\frac{4^9 \cdot 2^4}{16^3}$

Verwerken

Opgave 8

In een ondiep meer van 1000 km^2 begint riet te groeien. Op 1 januari 2014 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 2 km^2. Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. In 2017 constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar drie keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

a Geef de formule van de met riet begroeide oppervlakte R (in km^2) na t jaar met $t = 0$ op 1 januari 2014.

b Maak een tabel bij deze formule voor de eerste vijf jaar.

c In welk jaar is het hele meer voor het eerst helemaal begroeid met riet?

Opgave 9

Neem de tabel over en vul in.
p is de procentuele toename per jaar.
g is de groeifactor per jaar.

p	17			-9	-0,15				
g		1,007	2,051			0,78	0,07	1,02	3,96

Tabel 1.5

Opgave 10

Schrijf als één macht.

a $2^{41} \cdot 2^{39}$

b $\frac{2^4}{2}$

c $\left(5^3\right)^2$

d $\frac{\left(2^4\right)^{128}}{2^{509}}$

e $\left(5^2\right)^4 \cdot 5^3$

Opgave 11

Elk jaar wordt het aantal herten in een natuurgebied geteld op 1 januari. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

a Stel een formule op voor de ‘groei’ van het aantal herten vanaf het jaar 2014.

b Bereken het aantal herten in het jaar 2024.

c Bereken het groeipercentage per tien jaar.

d In welk jaar is het aantal herten gehalveerd?

Opgave 12

Schrijf als één macht van twee of één macht van drie.

a $\dfrac{(2^{30})^{12} \cdot 2^{60}}{2^{343} \cdot 2^{77}}$

b $\dfrac{64^{56}}{(2^7)^{12}}$

c $\dfrac{(3^{16})^{10}}{3^{10} \cdot 27^{24}}$

d $\dfrac{3^{214}}{3^{211}} \cdot 81^{25}$

Toepassen

Opgave 13: Rendement op aandelen

Een kapitaal van € 10415,00 wordt gedurende tien jaar belegd in aandelen. In de tabel zie je de groei van het kapitaal in de eerste zes jaar.

tijd (jaren)	1	2	3	4	5	6
kapitaal (euro)	10415	10850	11300	11760	12250	12760

Tabel 1.6

Onder rendement wordt hier verstaan de procentuele toename van het belegde kapitaal per jaar.

a Maak duidelijk dat het kapitaal in de eerste zes jaar bij benadering exponentieel toeneemt.

b Bereken voor deze periode het rendement (per jaar).

c Maak een tabel van een kapitaal van € 10000,00 dat tien jaar wordt belegd bij een rendement van 8% per jaar.

d Na hoeveel jaar is dit kapitaal verdubbeld?

e Iemand belegt een kapitaal van € 10000,00 gedurende tien jaar. Stel dat hij de eerste vijf jaar een rendement van 14% per jaar behaalt en de daarop volgende vijf jaar 4% per jaar. Bereken het kapitaal K na vijf jaar en na tien jaar.

f Laat met een berekening zien of het de belegger meer oplevert in vergelijking met de vorige situatie als het rendement de eerste vijf jaar 4% is en de volgende vijf jaar 14%.

Opgave 14: Zakgeld

Mark en Peter zijn tweelingbroers. Toen ze 14 jaar oud waren kregen ze € 5,00 zakgeld per week. Met hun vijftiende verjaardag vond de vader het slimmer om ze ieder jaar zakgeld te geven in plaats van iedere week. De vader gaf zijn kinderen twee opties:

1. Je zakgeld wordt ieder jaar verdubbeld.
2. Je zakgeld gaat ieder jaar met € 100,00 omhoog!

Mark koos voor optie 1. Peter voor optie 2.
Onderzoek in welk jaar Mark voor het eerst meer krijgt dan Peter.

Testen

Opgave 15

Iemand betaalt een huur van € 950,00 (per maand). Er wordt een jaarlijkse huurverhoging verwacht van 4%.

a Stel een formule op waarmee je voor volgende jaren de huur per maand kunt berekenen.

b Maak een tabel waarmee je kunt uitzoeken hoe lang het duurt tot de huur meer dan € 1300,00 per maand is geworden.

c Hoe groot is de groeifactor van de maandelijkse huur per vier jaar?

d Bereken met behulp van de groeifactor per vier jaar de groeifactor per twintig jaar.

e Bereken het groeipercentage per twintig jaar.

f Na hoeveel jaar is de huur per maand voor het eerst meer dan verdubbeld?

Opgave 16

Schrijf als één macht.

a $\frac{17^{31} \cdot 17^{54}}{(17^3)^{21}}$

b $\frac{2^{45} \cdot 64^{22}}{8^{20}}$

Opgave 17

Iemand koopt voor € 5000,00 aandelen. In de volgende jaren blijkt dat de aandelen elk jaar 12% in waarde dalen.

a Stel een functievoorschrift op voor de waarde van de aandelen $W(t)$, waarin t de tijd in jaren sinds de aankoop van de aandelen is.

b Na hoeveel jaar is de waarde van de aandelen minder dan € 1000,00 geworden?

c Bereken het groeipercentage per 5 jaar.

d Met welk getal moet je de waarde na vijf jaar vermenigvuldigen om de waarde na tien jaar te krijgen? Bereken de waarde na 10 jaar.

e Bereken het groeipercentage per 10 jaar.

2.2 Reële exponenten

Inleiding

Tot nu toe kun je bij exponentiële groei eigenlijk alleen wat zeggen op tijdstippen die gehele positieve waarden hebben. En dat is natuurlijk niet wenselijk, je wilt weten hoeveel bacteriën er zijn na $1{,}5$ uur, of $2{,}3$ uur voor het begintijdstip.
Je gaat nu kijken hoe het met gebroken en/of negatieve exponenten zit.
Dat levert weer een paar nieuwe rekenregels voor machten op...
In het algemeen zul je leren werken met alle mogelijke reële exponenten.

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken en/of negatieve exponenten;
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden;
- alle rekenregels voor het werken met machten;
- exponentiële vergelijkingen met de grafische rekenmachine oplossen.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

De hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B = 600 \cdot 2^t$. Het startmoment van meten, $t = 0$, is vandaag om 12:00 uur.

a Hoeveel bacteriën zullen er geweest zijn om 11:00 uur? En om 10:00 uur?

b Hoe bereken je de hoeveelheid bacteriën als je terug gaat in de tijd? Kan dat ook zonder formule alleen met de groeifactor?

c Kun je ook het aantal bacteriën bepalen om 14:15 uur?

Figuur 2.1

Uitleg 1

Voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt: $B = 600 \cdot 2^t$.
$t = 0$ komt overeen met 12:00 uur.
$t = -1$ komt overeen met een uur voor 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën. Als je aanneemt dat dit vóór 12:00 uur ook het geval was, dan zal er om 11:00 uur $600 \cdot \frac{1}{2} = 300$ bacteriën in het schaaltje hebben gezeten.

Het aantal bacteriën in voorgaande uren bereken je door telkens te delen door 2 (vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$).

tijd (uren)	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	150	300	600	1200	2400	4800	9600	19200	38400

Tabel 2.1

Met het functievoorschrift $B(t) = 600 \cdot 2^t$ kun je de hoeveelheid bacteriën t uur na 12:00 uur berekenen voor positieve gehele getallen t. Wil je met deze formule ook het aantal bacteriën 1 uur voor 12:00 uur kunnen berekenen, dan moet: $B(-1) = 600 \cdot 2^{-1} = 300$. Blijkbaar moet je afspreken dat $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Ook voor andere tijdstippen voor 12:00 uur wil je het functievoorschrift kunnen gebruiken. Dus moet gelden:

- op tijdstip $t = -1$ (11:00 uur): $600 \cdot 2^{-1} = 600 \cdot \frac{1}{2} = 300$;
- op tijdstip $t = -2$ (10:00 uur): $600 \cdot 2^{-2} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 150$;
- op tijdstip $t = -3$ (9:00 uur): $600 \cdot 2^{-3} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 75$, enzovoort.

Je moet dus ook afspreken dat $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ en $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$, enzovoort.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$. Daarmee kun je met negatieve exponenten rekenen. Let op: in dat geval mag g niet 0 zijn!

Opgave 1

Neem de **Uitleg 1** door. Kijk goed wanneer er negatieve exponenten worden gebruikt.

a Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 8:00 uur te berekenen?

b Bereken het aantal bacteriën om 8:00 uur.

Uitleg 2

De hoeveelheid bacteriën B op een petrischaaltje na t uur, kan met de formule $B = 600 \cdot 2^t$ berekend worden. $t = 0$ komt overeen met tijdstip 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën, het groeit met groeifactor 2. Het aantal bacteriën groeit ook met een vaste groeifactor per half uur en bijvoorbeeld per kwartier.

Voor de groeifactor per half uur schrijf je $2^{\frac{1}{2}}$.

Voor de groeifactor per kwartier schrijf je $2^{\frac{1}{4}}$.

Voor de groeifactor per anderhalf uur schrijf je $2^{1\frac{1}{2}}$.

Welk getal stelt $2^{\frac{1}{2}}$ voor?
De groeifactor per uur kun je vinden door de groeifactor per half uur twee keer toe te passen: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$.

Je weet dat $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Dus: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Op dezelfde manier kun je beredeneren dat voor de groeifactor per kwartier geldt: $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$. En daarmee kun je met gebroken exponenten rekenen. Let op: nu moet g positief zijn om altijd een reële uitkomst op te leveren. Stel bijvoorbeeld dat $g = -1$, dan is $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ geen reëel getal.

Opgave 2

Neem **Uitleg 2** door. Kijk goed wanneer er gebroken exponenten worden gebruikt.

a Wat moet je in de formule $B = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 14:30 uur te berekenen?

b Bereken dit aantal op twee manieren, met het functievoorschrift en met behulp van de groeifactor per half uur. Rond je antwoorden af op gehelen.

Opgave 3

Bekijk de groei van de bacteriën in **Uitleg 2**.

a Hoe groot is de groeifactor per drie uur?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per half uur? Rond je antwoord af op twee decimalen.

c Hoe groot is de groeifactor per kwartier? Rond je antwoord af op twee decimalen.

d Gebruik de rekenmachine om het aantal bacteriën te berekenen na 5 uur, na $5{,}5$ uur en na $5{,}75$ uur. Rond je antwoorden af op gehelen.

e Laat zien dat je het aantal bacteriën na $5{,}75$ uur ook kunt berekenen door het aantal na vijf uur eerst te vermenigvuldigen met de groeifactor per half uur en daarna met de groeifactor per kwartier. Rond je antwoord af op gehelen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

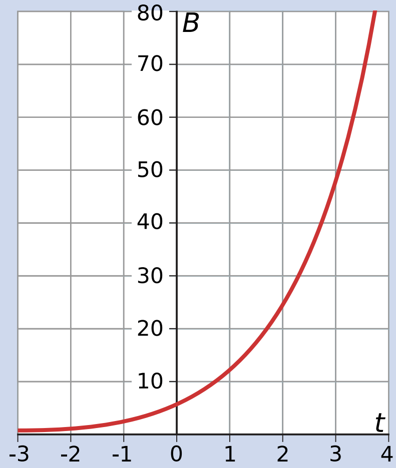
Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de groeifactor die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is dan geldt: $g > 0$. Om met negatieve exponenten en/of gebroken exponenten te kunnen werken, zijn de volgende afspraken nodig:

- **negatieve exponenten**: $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$
- **gebroken exponenten**: $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$

Deze afspraken gelden voor $g > 0$ en positieve gehele n.

Beide afspraken passen in de **rekenregels voor machten**, bijvoorbeeld: $g^{-n} = g^{0-n} = \frac{g^0}{g^n} = \frac{1}{g^n}$

Je hebt nu gezien dat een macht g^a voor $g > 0$ betekenis heeft als de exponent a een positief getal, nul, een negatief getal of een gebroken getal is. In feite mag a elk reëel getal zijn. En daarom kunnen bij exponentiële groei grafieken worden getekend in de vorm van een vloeiende kromme lijn. Je ziet de grafiek van $B = 6 \cdot 2^t$.



Figuur 2.2

Voorbeeld 1

Het aantal leden van een vereniging neemt exponentieel toe. Hier zie je een tabel van het aantal leden vanaf het jaar 2009.

jaar	2009	2010	2011	2012	2013	2014
aantal leden	720	806	903	1011	1132	1268

Tabel 2.2

Controleer dat er inderdaad sprake is van exponentiële groei. Stel ook een formule op van het aantal leden N na t jaar, met $t = 0$ in 2009 en bereken met die formule hoeveel leden er in 2005 waren.

Antwoord

$\frac{806}{720} \approx 1{,}12$

Controleer dit ook bij de rest van de jaren en noteer je berekeningen. Het aantal leden neemt steeds met een factor van ongeveer $1{,}12$ toe. Dus de groeifactor is ongeveer $1{,}12$. Verder weet je dat het aantal leden in het jaar 2009 gelijk is aan 720. De formule is $N = 720 \cdot 1{,}12^t$.
Als je wilt weten hoeveel leden er in 2005 waren vul je voor t in de formule -4 in: $720 \cdot 1{,}12^{-4} \approx 458$. Dus er waren 458 leden in 2005.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** gaat het over het aantal leden van een vereniging.

a Hoeveel leden waren er in het jaar 2003?

b Bij de oprichting had de vereniging 207 leden. In welk jaar is de vereniging opgericht?

Voorbeeld 2

Een spaartegoed staat uit tegen 5% rente per jaar (vroeger kon dat nog). De bank kan de rente per half jaar bijschrijven of maandelijks. Met welke rentepercentages moeten ze dan werken? Geef beide percentages in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De groeifactor van het spaartegoed per jaar is $1{,}05$. Noem de groeifactor per half jaar g. De waarde hiervan kun je op twee manieren uitrekenen:

- De groeifactor per jaar is $1{,}05$. Dus er moet gelden $g \cdot g = g^2 = 1{,}05$, hieruit volgt $g = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}0247$;
- $g = 1{,}05^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}0247$

De rente per half jaar is dus ongeveer $2{,}47$%.

Op dezelfde manier is de groeifactor per maand $1{,}05^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}0041$ of $\sqrt[12]{1{,}05} \approx 1{,}0041$. De rente per maand is dus ongeveer $0{,}41$%.

Opgave 5

Iemand zet op 1 juli 2014 een bedrag van € 7500,00 op de bank tegen een rente van $4{,}2$% per jaar. Hoeveel bedraagt zijn kapitaal op 1 januari 2016?

a Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per jaar.

b Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per half jaar.

c Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per maand.

Voorbeeld 3

De ouderdom van hele oude voorwerpen wordt bepaald met de zogenaamde C14-methode. C14 is een bepaalde variant van koolstof, een stof die in levende wezens voorkomt en dus ook in mummies, oude houten en leren voorwerpen, en dergelijke. Deze variant neemt exponentieel af nadat een levend wezen is gestorven. Voor dat moment is de concentratie C14 gelijk aan die in onze atmosfeer, na die tijd wordt die concentratie kleiner. De tijd waarin de concentratie gehalveerd is noem je de **halveringstijd**. De halveringstijd van deze stof is nauwkeurig bekend, namelijk 5736 jaar.

Meer hierover in **het artikel C14-datering in de Wikipedia**.

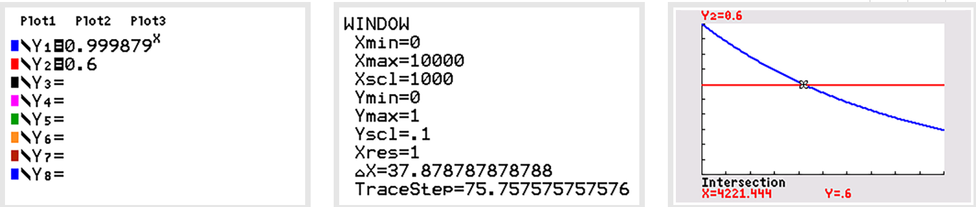
Stel dat bij een bepaalde mummie de concentratie C14 is afgenomen met 40%. Er is dan dus nog 60% van de oorspronkelijke concentratie over. Hoe bereken je nu de leeftijd van die mummie?

Antwoord

De halveringstijd is 5736 jaar. Stel dat de concentratie C14 op een bepaald moment c is, dan is die concentratie in 5736 jaar gehalveerd tot $0{,}5c$. Omdat de hoeveelheid C14 exponentieel afneemt geldt $0{,}5c = c \cdot g^{5736}$, waarin g de groeifactor per jaar is.

Deze vergelijking kun je herleiden tot $g^{5736} = \frac{0{,}5c}{c}$ en dus geldt $g^{5736} = 0{,}5$.

Hieruit bereken je de groeifactor per jaar: $g = \sqrt[5736]{0{,}5} \approx 0{,}999879$. Als t de leeftijd van de mummie is moet gelden $0{,}999879^t = 0{,}6$. Deze exponentiële vergelijking los je op met de grafische rekenmachine. Je vindt $t \approx 4221$. De mummie is ongeveer 4221 jaar oud.



Figuur 2.3

Uit dit voorbeeld blijkt dat je voor het rekenen met halveringstijd geen hoeveelheden nodig hebt. In het algemeen geldt $g^t = 0{,}5$. Dit is op vergelijkbare wijze ook van toepassing bij verdubbelingstijd: de tijd waarin een hoeveelheid is verdubbeld. Er geldt dan in het algemeen $g^t = 2$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** wordt de C14-methode voor het dateren van oude voorwerpen besproken.

a Bereken de groeifactor per eeuw. Rond je antwoord af op drie decimalen.

b Bereken met behulp hiervan de leeftijd van een oud gebruiksvoorwerp waarvan de concentratie C14 38% is.

Verwerken

Opgave 7

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1{,}1^t$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (in jaren) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

a Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 januari 2025?

b Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 augustus 2025?

c Hoe groot is de groeifactor per jaar?

d Hoe groot is het groeipercentage per maand?

e Bereken het aantal inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

Opgave 8

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel. In drie uur tijd is het aantal gegroeid van 1200 naar 3000.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per 3 uur?

b Bereken het groeipercentage per uur.

c Welke formule kun je opstellen voor de groei van deze kolonie als H de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren is. Neem $t = 0$ op het moment dat er 1200 bacteriën zijn.

d Op welk moment waren er nog 600 bacteriën?

Opgave 9

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in vijftienhonderd jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs $1{,}2$ miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot $2{,}4$ miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking $4{,}8$ miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

a Bereken voor de periodes 1500-1750, 1750-1800 en 1986-1997 het groeipercentage per jaar.

b In welke periodes is de wereldbevolking verdubbeld?

c Bereken voor deze periodes het groeipercentage per jaar.

Opgave 10

Op 1 januari 2012 heeft iemand een kapitaal van € 7969,24 op zijn spaarrekening staan. Het kapitaal staat al jaren vast tegen een rente van 6%. De rente wordt ieder jaar bijgeschreven.

a In welk jaar had het kapitaal een grootte van € 5618,00?

b Bereken de grootte van het kapitaal op 1 januari 2011, 1 januari 2010 en 1 januari 2009.

c De spaarder heeft waarschijnlijk een rond bedrag ingelegd toen hij begon met sparen. Wanneer, denk je, is hij begonnen? En met welk bedrag?

Toepassen

Opgave 11: Radioactiviteit

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in twee jaar 19% omgezet in radium-224. Een laboratorium had in het jaar 2001 nog 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, na t jaar met $t = 0$ op het moment dat er 1000 mg radium-228 aanwezig was.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 200 milligram omgezet is in radium-224.

c Bereken hoe lang het duurt voordat de helft van de aanwezige radium-228 omgezet is in radium-224.

d Schat met behulp van je antwoord op c hoelang het duurt tot 750 milligram radium-228 is omgezet in radium-224.

Testen

Opgave 12

In een vijver is sterke algengroei. Op het tijdstip dat men begint met meten zit er in een liter water tien gram algen. Deze concentratie algen blijkt per week met 15% toe te nemen.

a Geef een formule waarmee je de concentratie algen kunt berekenen. Neem t voor de tijd in weken, met $t = 0$ het tijdstip waarop men begon met meten.

b Neem aan dat ook voor de meting de concentratie algen groeide met 15% per week. Hoeveel bedroeg de concentratie drie weken voor het begin van de meting? Rond af op één decimaal.

c Hoeveel bedroeg de concentratie twee dagen voor het begin van de meting? Geef het antwoord weer in één decimaal nauwkeurig.

d Na hoeveel dagen is de hoeveelheid algen verdubbeld?

Opgave 13

Van een bepaald soort vlinders daalt het aantal exponentieel. In een zeker seizoen ($t = 0$) zijn er ongeveer 6000 van deze vlinders. Vier jaar later zijn er nog maar ongeveer 4300.

a Bereken de groeifactor per jaar van deze soort vlinders. Rond af op twee decimalen.

b Stel een formule op voor het aantal vlinders van deze soort als functie van t (in jaren).

c Met hoeveel procent neemt het aantal vlinders per jaar af?

d Hoeveel bedraagt de halveringstijd voor het aantal vlinders van deze soort?

e Bereken na hoeveel jaar het aantal vlinders voor het eerst minder dan 1000 zal zijn.

2.3 Exponenten en machten

Inleiding

Je hebt in het kader van exponentiële groei allerlei rekenregels en eigenschappen van machten en hun exponenten opgebouwd. Deze eigenschappen van exponenten en machten zul je veel moeten toepassen. Daarom moet je die eigenschappen goed 'in de vingers hebben'.
Hoog tijd voor algebraïsche vingeroefeningen...

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de rekenregels voor exponenten en machten;
- uitdrukkingen herschrijven zonder negatieve of gebroken exponenten;
- uitdrukkingen herschrijven als een macht van x;
- herleiden van formules tot de standaardvorm.

Voorkennis

- werken met negatieve en gebroken exponenten;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten.

Verkennen

Opgave V1

Bereken: $\frac{\sqrt[3]{14^{120}}}{14^{39}}$

Uitleg

Om $\frac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}}$ te kunnen berekenen, moet je de eigenschappen van machten goed beheersen. De rekenmachine laat je namelijk (zeer waarschijnlijk) in de steek. Eerst schrijf je de teller als macht van negentien:

$$\sqrt[4]{19^{220}} = \left(19^{220}\right)^{\frac{1}{4}} = 19^{220 \cdot \frac{1}{4}} = 19^{55}$$

Dus: $\frac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}} = \frac{19^{55}}{19^{54}} = 19^{55-54} = 19$

Bekijk stap voor stap welke eigenschappen er zijn gebruikt.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Welke eigenschap van machten is er in de eerste stap gebruikt voor het 'wegwerken' van de wortel?

b Welke eigenschap is er vervolgens gebruikt?

c En welke eigenschap als laatste?

Opgave 2

Bereken: $\frac{31^{25} \cdot \sqrt[3]{31^{30}}}{\left(31^{12}\right)^3}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor elk positief grondtal g en voor willekeurige reële getallen a en b gelden de volgende **eigenschappen van machten**:

- $g^0 = 1$
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$
- $g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g}$ mits $a > 0$ en a een geheel getal
- $g^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{g^b} = \left(\sqrt[a]{g}\right)^b$ mits $a > 0$ en a een geheel getal
- $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$
- $g^{a-b} = \frac{g^a}{g^b}$
- $\left(g^a\right)^b = g^{a \cdot b}$

Bij exponentiële functies mag je ervan uitgaan dat het grondtal g positief is.

Denk verder nog aan de eigenschap $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Voorbeeld 1

Je ziet enkele berekeningen met behulp van de eigenschappen van machten.

- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{3^1}\right)^{-4} = \left(3^{-1}\right)^{-4} = 3^4 = 81$
- $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$
- $16^{1,5} = 16^{1+\frac{1}{2}} = 16^1 \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 16 \cdot \sqrt{16} = 16 \cdot 4 = 64$
- $27^{-\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Opgave 3

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

a 3^{-2}

b $8^{1\frac{2}{3}}$

c 4^{-3}

d $81^{\frac{1}{4}}$

e $2^{-3} \cdot 2^7$

f $\frac{5^2 \cdot 5^3}{25^{1,5}}$

Voorbeeld 2

Je ziet voorbeelden van het schrijven van uitdrukkingen zonder gebroken of negatieve exponenten.

- $2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$
- $5x^{1\frac{1}{3}} = 5 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 5x \cdot \sqrt[3]{x}$
- $x^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$

Opgave 4

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a $2x^{2\frac{1}{3}}$

b $\frac{3x^{-1}}{2x}$

c $4x^{-\frac{3}{4}}$

d $2x^{2\frac{1}{2}}$

e $\frac{1}{3}x^{-4}$

f $3x^{-2\frac{1}{2}}$

Voorbeeld 3

Je ziet voorbeelden van het schrijven van uitdrukkingen als macht van x.

- $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$
- $\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$
- $3x\sqrt{x} = 3x^1 \cdot \sqrt{x} = 3x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3x^{1\frac{1}{2}}$
- $\frac{2x^4}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2x^4}{x^{\frac{1}{3}}} = 2x^{3\frac{3}{4}}$

Opgave 5

Schrijf als macht van x.

a $\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x}$

b $\frac{2x}{x\sqrt{x}}$

c $5(\sqrt[3]{x})^2$

d $\frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{4\sqrt[3]{x}}$

Voorbeeld 4

De formule $y = 0{,}5^{2x-1}$ kun je met behulp van de eigenschappen voor machten herleiden tot de standaardvorm $y = b \cdot g^x$ voor exponentiële groei. Bepaal de groeifactor g (per eenheid x) en het begingetal b. Schrijf de functie vervolgens in de standaardvorm.

Antwoord

De formule kun je als volgt herleiden:

$y = 0{,}5^{2x-1}$

een aftrekking is optellen met een negatief getal

$y = 0{,}5^{2x+-1}$

gebruik de rekenregel: $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$

$y = 0{,}5^{2x} \cdot 0{,}5^{-1}$

gebruik de rekenregel: $g^{a \cdot b} = (g^a)^b$

$y = \left(0{,}5^2\right)^x \cdot 0{,}5^{-1}$

gebruik de rekenregel: $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$

$y = \left(0{,}5^2\right)^x \cdot \frac{1}{(0{,}5)^1}$

gebruik: $0{,}5^2 = 0{,}25$

$y = 0{,}25^x \cdot \frac{1}{0{,}5}$

bereken $\frac{1}{0{,}5}$

$y = 2 \cdot 0{,}25^x$

Het kan ook korter, bijvoorbeeld zo:

$y = 0{,}5^{2x-1} = 0{,}5^{2x} \cdot 0{,}5^{-1} = \left(0{,}5^2\right)^x \cdot 2 = 2 \cdot 0{,}25^x$

Het functievoorschrift heeft nu de vorm van de formules voor exponentiële groei. Het begingetal b is 2 en de groeifactor g is 0,25.

Opgave 6

Gegeven is de formule $y = 0{,}5^{2x+1}$. Deze formule beschrijft exponentiële groei.

a Waarom is de groeifactor per eenheid niet gelijk aan 0,5?

b Schrijf de formule in de standaardvorm $y = b \cdot g^x$.

Opgave 7

Schrijf de formules in de standaardvorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 2 \cdot 3^{2x+2}$

b $y = 5 \cdot 0{,}2^{3x-1}$

c $y = 0{,}4 \cdot 5^{-2x+3}$

Verwerken

Opgave 8

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

a $\left(2^3\right)^2$

b $2^3 \cdot 2^2$

c $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^8$

d $\sqrt[3]{1000}$

Opgave 9

Schrijf als macht van x.

a $\frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

b $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

c $\sqrt{x} \cdot x^{-2}$

d $\frac{1}{x\sqrt{x}}$

Opgave 10

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a x^{-1}

b $x^{-\frac{1}{2}}$

c $x^{\frac{3}{4}}$

d $x^{1\frac{3}{4}}$

e $3x^{-1,5}$

f $x^{-2,75}$

Opgave 11

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

a $\frac{17^{105}}{17^{23}} \cdot 17^{-85}$

b $\left(\frac{1}{2}\right)^{219} \cdot 8^{72}$

c $\left(\frac{3}{4}\right)^{231} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{230} \cdot 3^{233}$

d $\frac{7^{102}}{\left(49^{10}\right)^5}$

e $\left(\frac{4}{9} \cdot \sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}}$

f $\frac{5^3 \cdot \left(3^5\right)^{15}}{25 \cdot \sqrt[3]{3^{225}}}$

Opgave 12

Schrijf de volgende formules in de vorm $y = a \cdot x^b$.

a $y = \left(2x^3\right)^4 \cdot -3x^5$

b $y = \frac{2x \cdot x^2}{x^6}$

c $y = 4x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

d $y = \frac{2}{x\sqrt{x}}$

Opgave 13

Schrijf de volgende formules in de standaardvorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 3 \cdot 2^{0,5x}$

b $y = 0,5^{-x+2}$

c $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-2x}$

d $y = 6 \cdot 2^{4x-2}$

Toepassen

Opgave 14: Exponentiële groei of niet?

Gegeven is de formule $y = 4^{-2x+1}$. Deze formule beschrijft exponentiële groei.

a Waarom is de groeifactor per eenheid niet gelijk aan 4?

b Schrijf de formule in de standaardvorm $y = b \cdot g^x$.

Gegeven is de formule $y = 4^{-2x} + 1$. Deze formule beschrijft geen zuivere exponentiële groei.

c Laat dat zien door de formule te herleiden.

Testen

Opgave 15

Schrijf de volgende uitdrukkingen als macht van 5 of 7. Bereken met de rekenregels van machten.

a $5^{-5} \cdot 25^2$

b $7^{-10} \cdot (7^3)^5$

c $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$

d $125^{-\frac{1}{3}}$

Opgave 16

Herleid de uitdrukkingen naar de vorm ax^n.

a $2x^4 \cdot (3x^3)^2$

b $\frac{x^3 \cdot 5x^4}{x^8}$

c $\frac{3}{\sqrt{x}}$

d $5x \cdot \sqrt[5]{x^2}$

Opgave 17

Schrijf zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a $x^{1\frac{1}{4}}$

b $\frac{x^2 \cdot x^{-4}}{\sqrt{x}}$

Practicum

Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **de rekenregels voor machten en exponenten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.4 Exponentiële functies

Inleiding

De formules die je typisch bij exponentiële groei tegenkomt zijn voorbeelden van exponentiële functies. Je gaat daarom nu dit type functies nader bestuderen. In plaats van 'groeifactor' zal nu vaak 'grondtal' worden gezegd, nog steeds is dit grondtal een positief getal.

Je leert in dit onderwerp

- wat een exponentiële functie is;
- de karakteristieken van exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen;
- opstellen van een exponentiële functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van de hoeveelheid bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 600 \cdot 2^t$ met t in uren.

a Schets of plot de grafiek. Welke snijpunten met de assen heeft deze grafiek?

b Zijn er extremen?

c Zijn er asymptoten?

Uitleg

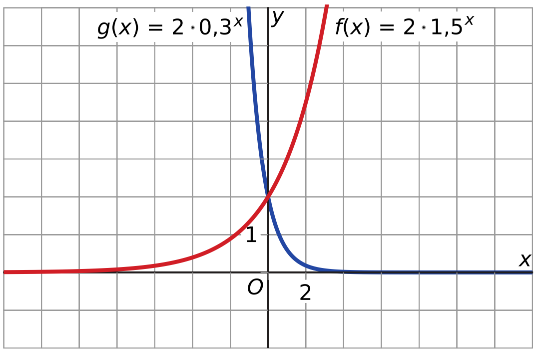
Bekijk de applet: Exponentiële functies

Functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ worden exponentiële functies genoemd. Voor positieve waarden van b is de grafiek bij de functie:

- stijgend als $g > 1$
- constant als $g = 1$
- dalend als $0 < g < 1$

Voor functies van de vorm $f(x) = g^x$ geldt ook:

- er zijn geen minima of maxima, want $f(x)$ wordt steeds groter/kleiner of blijft constant
- er zijn geen nulpunten, $f(x)$ wordt nooit 0
- $y = 0$ is een horizontale asymptoot



Figuur 4.1

Dat er geen nulpunten zijn, maar wel een asymptoot kun je beredeneren. Dan bedenk je dat door vermenigvuldigen met een getal dat groter is dan 1, elk positief getal alleen maar groter kan worden. Neemt x toe, dan wordt $f(x)$ dus groter. Neemt x af, dan wordt $f(x)$ kleiner, maar nooit negatief of 0. Vandaar dat er geen nulpunt is, maar wel een asymptoot. Een vergelijkbare redenering geldt voor $0 < g < 1$. Bedenk zelf wat er geldt bij een negatieve b.

Om een ongelijkheid op te lossen gebruik je de grafische rekenmachine. Bijvoorbeeld: $1{,}5^x > 8$.
Eerst los je de gelijkheid $1{,}5^x = 8$ op. Met de grafische rekenmachine vind je $x \approx 5{,}13$.
Omdat de groeifactor $1{,}5$ is weet je dat de grafiek stijgt als x toeneemt.
De oplossing van de ongelijkheid is op één decimaal nauwkeurig $x > 5{,}1$

Opgave 1

In de **Uitleg** kun je met de applet grafieken van functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ bekijken.

a Neem $b = 1$ en $g = 2$. Welk functievoorschrift krijg je? Wordt $f(x)$ ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

b Neem $b = 1$ en $g = 3$. Welk functievoorschrift krijg je? Wordt $f(x)$ ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

c Neem $b = 1$ en $g = 1$. Welk functievoorschrift krijg je? Wordt $f(x)$ ooit 0? Waarom komt deze grafiek niet steeds dichter in de buurt van de x-as?

d Neem $b = 1$ en $g = 0{,}5$. Welk functievoorschrift krijg je? Wordt $f(x)$ ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

e Neem $b = 2$ en $g = 1{,}5$. Welk functievoorschrift krijg je? Wordt $f(x)$ ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

f Neem $b = -2$ en $g = 1{,}5$. Welk functievoorschrift krijg je? Wordt $f(x)$ ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

Opgave 2

Welke eigenschappen heeft een functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ als $b < 0$? Maak ook nu weer verschil tussen $g > 1$, $g = 1$ en $0 < g < 1$.

Theorie en voorbeelden

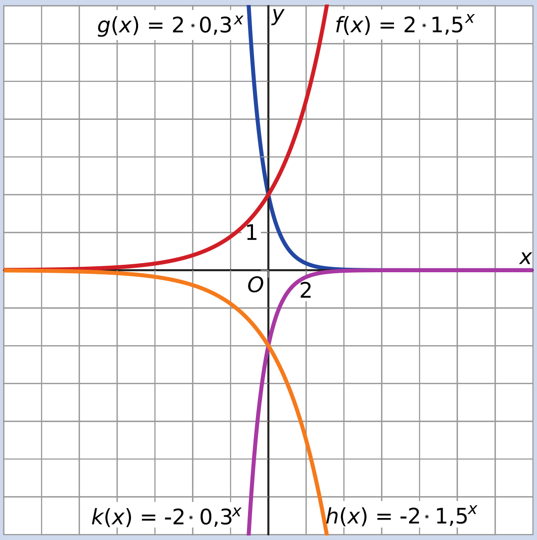
Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **exponentiële functie** heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.
b en g zijn onbekende getallen, x en y zijn variabelen.

De grafiek van een exponentiële functie heeft de volgende karakteristieken:

- Als $g = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = b$.
- Als $b > 0$ en $g > 1$, is de grafiek stijgend. Naar links (voor afnemende x) nadert de grafiek de x-as. Je kunt de functiewaarde zo dicht bij 0 krijgen als je wilt door x voldoende klein te nemen. De x-as is de **horizontale asymptoot** van de grafiek.
- Als $b > 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek dalend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek naar de x-as.
- Als $b < 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek stijgend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek naar de x-as.
- Als $b < 0$ en $g > 1$, is de grafiek dalend. Naar links (voor afnemende x) benadert de grafiek de x-as.



Figuur 4.2

Voor iedere grafiek bij $f(x) = b \cdot g^x$ geldt dat deze de y-as snijdt in het punt $(0,b)$.

Exponentiële vergelijkingen zoals $b \cdot g^x = a$ kun je oplossen met de grafische rekenmachine.
Bij **exponentiële ongelijkheden** kun je bovengenoemde karakteristieken gebruiken.

Voorbeeld 1

In het water van een meer is verontreiniging ontdekt, er wordt op een bepaald moment 40 mg/L (milligram per liter) van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Gelukkig wordt deze stof op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan worden gemeten met een nauwkeurigheid van gehele mg/L. Het blijkt dat de concentratie exponentieel vervalt met 20% per dag.

Na hoeveel dagen is deze stof uit het meer verdwenen?

Antwoord

De ‘groeifactor’ per dag is $0{,}80$. Op $t = 0$ is er 40 mg/L gemeten. Voor de concentratie C (in mg/L) geldt dus: $C(t) = 40 \cdot 0{,}80^t$.

Omdat de groeifactor tussen 0 en 1 ligt is dit een dalende exponentiële functie. Echter, zo'n exponentiële functie komt nooit op 0 uit, hoe groot je t ook kiest. $C(t)$ komt in de buurt van 0. Is de stof dan nooit verdwenen? Theoretisch inderdaad niet, maar in de praktijk is de stof niet meer meetbaar als de concentratie onder de 1 mg/L zakt (dat volgt uit de nauwkeurigheid van meten). Om te bepalen na hoeveel dagen de stof is verdwenen moet je daarom de ongelijkheid $40 \cdot 0{,}80^t < 1$ oplossen.

Dat doe je met de grafische rekenmachine. Je vindt: $t > 16{,}5$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je de functie $C(t) = 40 \cdot 0{,}8^t$.

a Los de ongelijkheid $C(t) < 10$ op. Rond af op één decimaal.

b Heeft de vergelijking $C(t) = 0$ een oplossing?

Opgave 4

Los op. Rond af op twee decimalen.

a $2 \cdot 8^x < 40$

b $\frac{1}{3} \cdot 4^x \geq 124$

c $55 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 100$

Voorbeeld 2

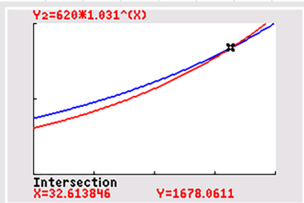
In een stedelijk gebied liggen twee middelgrote steden: A met 750000 inwoners en B met 620000 inwoners op 1 januari 2013. In A groeide het aantal inwoners de laatste jaren gemiddeld met 2,5% per jaar, in B was dat 3,1%.
Na hoeveel jaren is B groter dan A als deze ontwikkeling zo doorgaat?

Antwoord

Dat B harder groeit dan A is duidelijk. Als A het aantal inwoners van A en B dat van B voorstelt, dan geldt: de groeifactor van A is $1{,}025$, die van B is $1{,}031$. Neem A en B in duizendtallen, en t de tijd in jaren vanaf 1 januari 2013, dan zijn de groeifuncties:

- $A(t) = 750 \cdot 1{,}025^t$
- $B(t) = 620 \cdot 1{,}031^t$

De bijbehorende grafieken maak je op de grafische rekenmachine en je bepaalt het snijpunt. Ga na dat je $t = 32{,}6138...$ vindt.
Conclusie: 33 jaar na 1 januari 2013 is B groter als je ervan uitgaat dat er steeds op 1 januari wordt geteld.



Figuur 4.3

Opgave 5

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

a Waaraan zie je dat stad B harder groeit dan stad A?

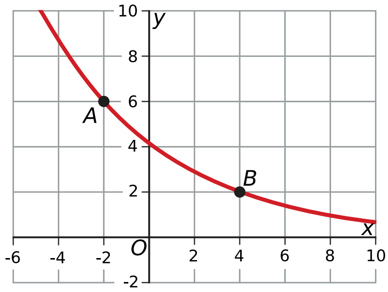
b Ga na dat je voor het snijpunt van beide grafieken inderdaad $t = 32{,}6138...$ vindt.

c Een derde stad C is op 1 januari 2013 kleiner dan zowel A als B. Maar deze stad groeit met 8,3% per jaar. Op 1 januari 2021 heeft C evenveel inwoners als B. In welk jaar is C even groot als A?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $A(-2,6)$ en $B(4,2)$.
Stel het bijpassende functievoorschrift op. Rond b en g af op twee decimalen.



Figuur 4.4

Antwoord

Bepaal eerst de groeifactor g:

Als x van -2 naar 4 gaat, wordt $f(x)$ vermenigvuldigd met $\frac{1}{3}$.

Voor g geldt daarom $g^6 = \frac{1}{3}$ en dus $g = \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \approx 0{,}83$.

Nu kun je b berekenen.
Uit $f(4) = b \cdot 0{,}83^4 = 2$ volgt $b \approx 4{,}21$.

Conclusie: $f(x) \approx 4{,}21 \cdot 0{,}83^x$.

Opgave 6

Stel het voorschrift op van de exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ waarvan de grafiek door de punten $(10,200)$ en $(14,350)$ gaat. Rond g af op twee decimalen en b op gehelen.

Verwerken

Opgave 7

Een saldo van € 4000,00 kan ontstaan zijn doordat ooit iemand € 1,00 op een spaarrekening zette tegen 5% rente.

a Hoeveel jaar eerder moet die € 1,00 dan op de spaarrekening gezet zijn? Een antwoord tot op een jaar nauwkeurig is voldoende.

b Kun je dit antwoord ook vinden door een geschikte grafiek van $S(t) = 4000 \cdot 1{,}05^t$ te tekenen?

c Stel je voor dat je de grafiek van S steeds verder naar links door trekt. Zal de grafiek ooit de horizontale as snijden? Licht je antwoord toe.

Opgave 8

Los de ongelijkheden op. Rond af op twee decimalen.

a $50 \cdot 1{,}5^x < 200$

b $25 \cdot 1{,}8^x > 250 \cdot 0{,}75^x$

Opgave 9

Op 1 januari 2010 zet persoon A € 2000,00 op de bank tegen 4% rente per jaar. Persoon B zet op die dag € 1500,00 op de bank tegen 6% rente per jaar.

a Geef de functievoorschriften van het banktegoed $a(t)$ van persoon A en het banktegoed $b(t)$ van persoon B, waarbij t de tijd in jaren is na 1 januari 2010.

b Maak met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies a en b. Bij welke vensterinstellingen komen de grafieken zo in beeld dat ook het snijpunt zichtbaar is?

c Vanaf welke maand van welk jaar is het banktegoed van persoon B groter dan dat van persoon A?

Opgave 10

Op een afgelegen terrein werd op 6 januari 2014 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval er al tien jaar heeft gelegen. De straling blijkt 2000 Bq (becquerel) te zijn. Vier maanden later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt nu ongeveer 1630 Bq te zijn. De straling neemt exponentieel af.

a Hoeveel Bq was de straling een jaar voor de vondst op 6 januari 2014? Rond af op gehelen.

b Hoe groot is de straling $2{,}5$ jaar na 6 januari 2014?

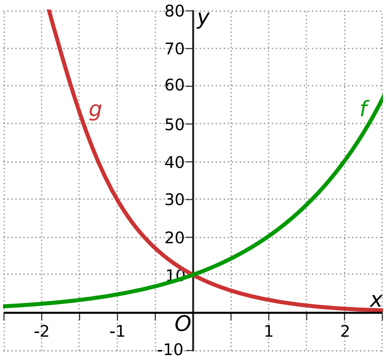
c Stel een functievoorschrift op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 6 januari 2014.

d Vanaf welke datum is de straling minder dan 1000 Bq?

Opgave 11

Bekijk de grafieken van twee exponentiële functies.

Geef van beide functies het functievoorschrift.



Figuur 4.5

Opgave 12

Een huurder betaalt een huur van € 650,00 en vindt de jaarlijkse huurverhoging van $5{,}5\%$ te veel. Hij herinnert zich nog dat exponentiële groei veel harder gaat dan lineaire groei. Hij stelt zijn verhuurder daarom voor om de huur elk jaar met € 50,00 te verhogen.

Na hoeveel jaar gaat dit de huurder voordeel opleveren?

Toepassen

Opgave 13: De wet van Moore

Het Amerikaanse bedrijf Intel is een zeer grote producent van computerchips. Gordon Moore was in 1968 één van de oprichters van het bedrijf. Deze opgave gaat over het aantal transistoren in een computerchip. (Een transistor is een elektronisch onderdeel van een chip.) In 1965 deed Moore daar een voorspelling over: Het aantal transistoren in een computerchip zal tussen 1965 en 1975 exponentieel groeien. Moore heeft meer dan gelijk gekregen: de voorspelling is zelfs tot het jaar 2010 uitgekomen! Zijn voorspelling is men de Wet van Moore gaan noemen. In de tabel zie je hoeveel transistoren er in de chips van Intel zitten. Ook zie je in welk jaar die chips op de markt zijn gebracht.

introductiejaar	naam chip	aantal transistoren
1971	4004	2250
1982	286	120000
1993	Pentium I	3100000
2000	Pentium IV	42000000
2014	Ivy Bridge	4,31 miljard

Tabel 4.1

In de tabel zie je dat het aantal transistoren tussen 1971 en 1982 met 117750 toeneemt.

a Stel dat het aantal transistoren in de jaren daarna lineair toe zou nemen met 117750 per jaar. In welk jaar zou dan het aantal van 3100000 transistoren per chip zijn bereikt? Licht je antwoord toe.

b In werkelijkheid is de toename dus exponentieel. Zo is in de periode van 1971 tot 2000 het aantal transistoren per chip toegenomen van 2250 tot 42 miljoen.

Bereken hiermee de groeifactor per jaar in vier decimalen nauwkeurig.

De Wet van Moore in formulevorm is: $A = 2250 \cdot 1{,}404^t$. Hierin is A het aantal transistoren per chip en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1971. In de Ivy Bridge chip zitten volgens de tabel $4{,}31$ miljard transistoren. Dat aantal transistoren wijkt af van de voorspelling volgens de Wet van Moore.

c Bereken hoeveel procent dit aantal afwijkt van de voorspelling volgende de formule van de Wet van Moore.

d Met behulp van de formule kun je een berekening maken wanneer er 10 miljard transistoren in een computerchip zitten. Bereken in welk jaar dit volgens deze formule het geval is.

(bron: examen wiskunde A havo 2005, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 14

Een bepaalde hoeveelheid H groeit vanaf $t = 0$ volgens $H(t) = 200 \cdot 1{,}03^t$.

a Hoe zie je aan het functievoorschrift dat er echt van toename sprake is?

b Vanaf welke waarde van t (in drie decimalen nauwkeurig) is de hoeveelheid 200% groter geworden dan op $t = 0$?

c Neem aan dat ook voor $t = 0$ deze hoeveelheid met 3% per tijdseenheid groeide. Voor welke waarden van t is de hoeveelheid kleiner dan $0{,}01$?

Opgave 15

Iemand betaalt op 1 januari 2000 een huur van € 850,00 per maand. Jaarlijks wordt in januari zijn huur met $5{,}5\%$ verhoogd.

a Stel het functievoorschrift op voor de huur per maand $H(t)$ afhankelijk van de tijd t in jaren na 2000.

b Vanaf welke datum is de huur hoger dan € 1000,00 per maand?

Opgave 16

De grafiek van een exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ gaat door de punten $(2{,}80)$ en $(8{,}200)$.

Stel een bijpassend functievoorschrift op.

2.5 Meer exponentiële functies

Inleiding

De standaardfunctie voor alle exponentiële functies is $f(x) = g^x$ met $g > 0$. Alle andere exponentiële functies kunnen uit f ontstaan door verschuiven en/of herschalen. Ze hebben allemaal de vorm $y = b \cdot g^x + d$. Je zult zien dat deze exponentiële functies wel degelijk nulpunten kunnen hebben...

Je leert in dit onderwerp

- werken met verschuiving en/of herschaling van exponentiële functies;
- de karakteristieken van deze exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met deze exponentiële functies oplossen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Laat zien dat de volgende functies kunnen worden geschreven in de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

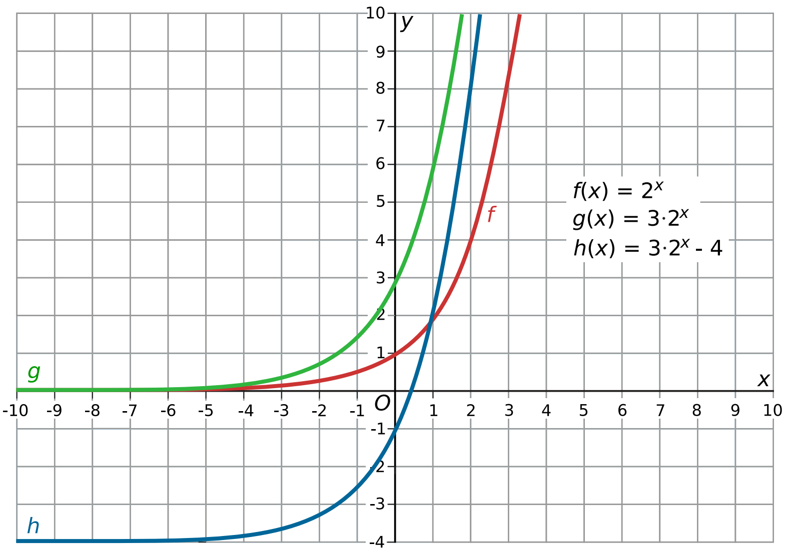
a $y_1 = 1 - 3 \cdot 0{,}5^x$

b $y_2 = -3 \cdot 0{,}5^{2x} - 4$

Uitleg

Bekijk de applet: Exponentiële functies

De standaardfunctie van alle exponentiële functies is $y = g^x$ met $g > 0$. Je ziet de grafiek met $g = 2$.



Figuur 5.1

Alle functies die uit $y = 2^x$ door herschalen of verschuiven kunnen ontstaan, zijn van de vorm $y = b \cdot 2^x + d$:

- $f(x) = 3 \cdot 2^x$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = 0$ te nemen. De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door herschalen in de y-richting met factor 3 (alle y-waarden maal 3).
- $f(x) = 3 \cdot 2^x - 4$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = -4$ te nemen. De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door herschalen in de y-richting met factor 3 en vervolgens de grafiek -4 eenheden in de y-richting te verschuiven (alle y-waarden min 4).
- $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1} - 4$ wordt herschreven tot $f(x) = 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} - 4 = 1{,}5 \cdot 2^x - 4$. $f(x)$ ontstaat door $b = 1{,}5$, $g = 2$ en $d = -4$ te nemen. En de grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door herschalen in de y-richting met factor $1{,}5$ en vervolgens de grafiek -4 eenheden in de y-richting te verschuiven (alle y-waarden eerst maal $1{,}5$ en dan min 4).

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Het gaat daar over exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

a Neem $b = 3$, $g = 2$ en $d = 1$. Welk functievoorschrift $f_1(x)$ krijg je? Door welke verschuiving en/of herschaling in de y-richting ontstaat de grafiek van f_1 uit die van $y = 2^x$?

b Neem $b = 3$, $g = \frac{1}{2}$ en $d = -1$. Welk functievoorschrift $f_2(x)$ krijg je? Uit welke basisfunctie kan de grafiek van f_2 door verschuiving en/of herschaling in de y-richting ontstaan? Welke verschuiving en/of herschaling in de y-richting moet je dan toepassen?

c Neem $b = -10$, $g = 1{,}5$ en $d = 100$. Welk functievoorschrift $f_3(x)$ krijg je? Bij welke vensterinstellingen krijg je alle karakteristieken van de grafiek van f_3 goed in beeld?

Opgave 2

Bekijk de functie met voorschrift $f(x) = 6 \cdot 2^{-x-1} - 12$

a Herleid het functievoorschrift tot de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

b Uit welke basisfunctie kan de grafiek van f door verschuiving en/of herschaling in de y-richting ontstaan? Welke verschuiving en/of herschaling in de y-richting moet je dan toepassen?

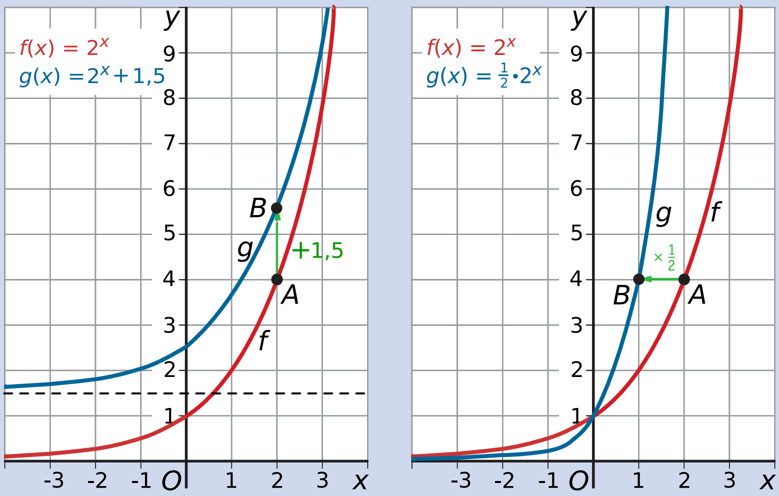
c Bereken met behulp van de grafische rekenmachine het nulpunt van de grafiek van f.

d Dit nulpunt had je ook wel algebraïsch kunnen vinden. Laat zien hoe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Exponentiële functies



Figuur 5.2

Elke **exponentiële functie** heeft een functievoorschrift dat kan worden geschreven in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.
Hierbij moet je soms gebruikmaken van de rekenregels voor machten. De grafiek van f is te tekenen door op die van $y = g^x$ de volgende **verschuiving** en **herschaling** in de y-richting toe te passen:

- herschalen in de y-richting met factor b;
- verschuiven in de y-richting met d eenheden.

De grafiek van f nadert dan voor grote of kleine x de lijn $y = d$. Dit is de **horizontale asymptoot**. Het eventuele nulpunt vind je door $b \cdot g^x + d = 0$ op te lossen. Vaak heb je daarvoor de rekenmachine nodig, maar in sommige situaties kun je dit ook algebraïsch oplossen.

Een exponentiële vergelijking/ongelijkheid kun je algebraïsch oplossen door de vergelijking aan beide zijden van het isgelijkteken als macht van hetzelfde getal te schrijven en de eigenschappen van machten te gebruiken. De ongelijkheid los je vervolgens op met behulp van de grafische rekenmachine of de karakteristieken van exponentiële grafieken.

Voorbeeld 1

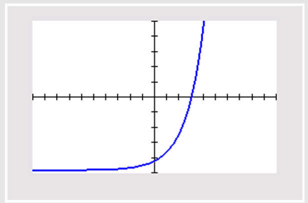
Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 60 \cdot 2^x - 480$.
Breng de grafiek in beeld met de grafische rekenmachine en bepaal welke waarde $f(x)$ nadert voor kleine waarden van x.

Antwoord

De grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = 2^x$ door

- herschaling in de y-richting met factor 60;
- verschuiving in de y-richting over -480 eenheden (dus naar beneden schuiven).

$f(x)$ nadert daarom voor kleine waarden van x tot -480. De horizontale asymptoot is $y = -480$. Bij een venster van $-10 \leq x \leq 10$ bij $-500 \leq y \leq 500$ komt de grafiek goed in beeld.



Figuur 5.3

Opgave 3

Bekijk de functie uit **Voorbeeld 1**.

a Plot zelf de grafiek van f en bepaal het nulpunt.

b Bereken algebraïsch het nulpunt van f

Opgave 4

Bestudeer eerst **Voorbeeld 1**.

Bekijk de grafieken van: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5$.

a Hoe kun je de grafiek van g door herschalen van de y-as en/of verschuiven laten ontstaan uit die van f?

b Hoe kun je de grafiek van h krijgen door herschalen van de y-as en/of verschuiven van de grafiek van f?

c Tot welke waarde nadert $h(x)$ als x groot wordt?

d Welke waarden kan $h(x)$ aannemen?

e Vereenvoudig de vergelijking $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5 = 10$ en los hem daarna op in drie decimalen nauwkeurig.

f Los op in drie decimalen nauwkeurig: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5 > 10$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie g met voorschrift $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$.
Laat zien hoe deze functie door herschalen in de y-richting en/of verschuiven kan ontstaan uit een basisfunctie van de vorm $y = 0{,}5^x$ en bereken algebraïsch het nulpunt van g.

Antwoord

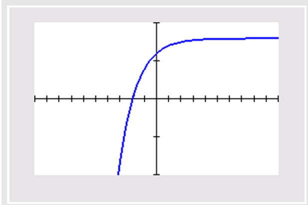
Eerst herleiden:

$g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = -2 \cdot 2^{-x} \cdot 2^{1} + 16 = -4 \cdot (2^{-1})^{x} + 16 = -4 \cdot 0{,}5^{x} + 16$

De grafiek van de functie $g(x) = -4 \cdot 0{,}5^{x} + 16$ kan ontstaan door vervorming van $y = 0{,}5^{x}$:

- herschaling in de y-richting met factor -4;
- verschuiving in de y-richting van 16 eenheden.

Voor het nulpunt moet je oplossen $16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = 0$.
Dit kun je schrijven als $2 \cdot 2^{-x+1} = 16$ en dus als $2^{-x+1} = 8$.
Hier maak je van $2^{-x+1} = 2^{3}$ en dus moet $-x + 1 = 3$, zodat $x = -2$.



Figuur 5.4

Opgave 5

De grafiek van de functie $f(x) = 2 \cdot 2^{x+1} - 1$ kun je door herschalen en verschuiven in de y-richting uit de grafiek van de functie $g(x) = 2^{x}$ laten ontstaan.

a Je kunt het functievoorschrift van f herleiden tot $f(x) = 4 \cdot 2^{x} - 1$. Laat zien hoe dat in zijn werk gaat.

b Beschrijf nu hoe je door herschalen en verschuiven de grafiek van f kunt laten ontstaan uit die van g.

c Het punt $(0,1)$ op de grafiek van g wordt na het herschalen en verschuiven in de y-richting een punt op de grafiek van f. Bereken de coördinaten van dit punt.

d Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van f?

e Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van f.

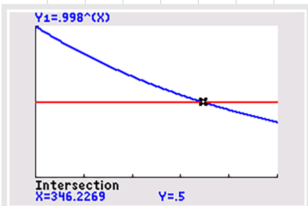
Voorbeeld 3

Een kop hete koffie komt uit een automaat. De koffie koelt af tot kamertemperatuur. De afkoeling gaat in het begin snel. Naarmate het temperatuurverschil tussen koffie en omgeving kleiner wordt, gaat de afkoeling trager. De temperatuur hangt af van de tijd waarin de koffie afkoelt. De functie $K(t) = 60 \cdot 0{,}998^{t} + 20$ beschrijft de temperatuur van de koffie in een omgeving van 20 °C. Hierin is t de tijd in seconden nadat de koffie uit de automaat komt.
De meeste mensen vinden koffie niet lekker als de temperatuur is gedaald tot beneden de 50 °C. Na hoeveel seconden is dat het geval?

Antwoord

Op $t = 0$ is de temparatuur $K(0) = 80$ °C. De temperatuur daalt langzaam richting de 20 °C. De vergelijking $60 \cdot 0{,}998^{t} + 20 = 50$ kun je met de grafische rekenmachine oplossen, je kunt er ook eerst $0{,}998^{t} = 0{,}5$ van maken. Ga na, dat je vindt: $t \approx 346$.

Conclusie: na ongeveer 346 seconden (5 minuten en 46 seconden) is de koffie voor de meeste mensen niet meer lekker.



Figuur 5.5

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** zie je de functie $K(t) = 60 \cdot 0{,}998^t + 20$, waarin t de tijd in seconden is nadat de koffie uit de automaat komt en K de temperatuur in °C .

a Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de temperatuur daalt?

b Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van K en wat betekent dat?

c Na hoeveel seconden heeft de koffie een temperatuur van 70 °C?

Opgave 7

Een thermoskan wordt 's morgens om 8:00 uur gevuld met koffie van 80 °C. De koffie in de thermoskan koelt af volgens de formule: $T(t) = 20 + 60 \cdot 0{,}83^t$ Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t het aantal uren na 8:00 uur.

a Ga ervan uit dat de koffie niet meer lekker is als de temperatuur beneden de 50 °C komt. Tot hoe laat is de koffie te drinken? Bereken dit tot op een kwartier nauwkeurig.

b Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de koffie bij het vullen van de thermoskan een temperatuur had van 80 °C?

c Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de temperatuur van de koffie daalt?

d Hoelang duurt het voor de koffie een temperatuur bereikt van 21 °C?

e Wat is de uiteindelijke temperatuur van de koffie?

f De koffie staat in een woonkamer. Kun je aan het functievoorschrift van $T(t)$ zien wat de temperatuur is van de woonkamer?

Verwerken

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{6} \cdot 5^x + 340$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit die de grafiek van $y = 5^x$?

b Plot de grafiek van f. Welke vensterinstellingen gebruik je?

c Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van f?

Opgave 9

Los de vergelijkingen en ongelijkheden op. Vereenvoudig eerst zo ver mogelijk en geef daarna de oplossing in twee decimalen nauwkeurig.

a $5^x = 10$

b $5^x \leq 10$

c $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 8 = 2$

d $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 8 < 2$

Opgave 10

Los algebraïsch op als dat mogelijk is. Geef anders een benadering met twee cijfers achter de komma.

a $4 \cdot 0{,}5^x - 1 < 0$

b $2 \cdot 2^{-x+1} - 1 > 0$

c $3{,}5^{x+50} - 0{,}5 > 3$

d $3^{x-4} < \frac{1}{9}\sqrt{3}$

Opgave 11

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend. De formule $A(t) = 540 - 540 \cdot 0{,}95^t$ geeft de hoeveelheid $A(t)$ in mg van het medicijn die na t minuten in het bloed aanwezig is.

a Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van $A(t)$ stijgend is?

b Hoeveel mg van het medicijn zal er uiteindelijk in het bloed zitten?

c Na hoeveel minuten (in gehelen) is 75% van de maximale hoeveelheid medicijn in het bloed opgenomen?

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x-2} - 3$ en $g(x) = 4 \cdot 0{,}5^{x+3} - 1$.

a Herleid beide functievoorschriften tot de vorm $y = b \cdot g^x + d$. Hoe ontstaan de grafieken van f en g door herschalen en/of verschuiven in de y-richting uit grafieken van bijpassende basisfuncties?

b Los algebraïsch op: $f(x) = -2\frac{7}{8}$.

c Los op: $g(x) > 1{,}5$. Rond het antwoord af op twee decimalen.

d Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $x \leq -2$?

Toepassen

Opgave 13: Dubbelvouwen

De dikte van een A4-tje is ongeveer $0{,}05$ millimeter dik. In de volksmond wordt gezegd dat je één A4-tje niet zeven keer kunt dubbelvouwen.

a Bereken hoe dik je A4-papier wordt als je het zeven keer dubbel zou vouwen.

b De straal van de aarde is ongeveer 6365 km. Als je in theorie een vel papier met een dikte van $0{,}05$ mm oneindig vaak dubbel zou kunnen vouwen, hoe vaak moet je dan vouwen om de diameter van de aarde te passeren?

De St. Mark's School in Southborough, Massachusetts, heeft met toiletpapier het wereldrecord dubbelvouwen in handen, met maar liefst dertien keer dubbelvouwen. Het eindresultaat was een pakket papier met een lengte van 4 meter en een breedte van 1 velletje toiletpapier. De afmeting van een velletje toiletpapier zijn ongeveer 20 bij 10 cm.

c Bereken de oorspronkelijke oppervlakte van het toiletpapier. Hoeveel velletjes toiletpapier hebben ze gebruikt?

Testen

Opgave 14

Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^x$ en $g(x) = 5 \cdot 3^x - 10$.

a Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f?

b Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van g?

c Los op: $g(x) \geq 100$. Rond af op één decimaal.

Opgave 15

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op.

a $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$

b $2 \cdot 5^{2x} > 250$

c $2^{-x+2} < 2\sqrt{2}$

Opgave 16

Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.

a Herleid functie f tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

b Hoe ontstaat de grafiek van f door herschalen in de y-richting of verschuiven uit de grafiek van $y = b \cdot g^x$?

c Welke asymptoot heeft de grafiek van f?

d Los algebraïsch op: $f(x) = 42$.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **exponentiële vergelijkingen en ongelijkheden**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Exponentiële functies**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- exponentiële groei en groeifactor — macht, grondtal, exponent
- negatieve exponenten — gebroken exponenten
- eigenschappen van machten
- exponentiële functie — exponentiële vergelijking/ongelijkheid
- verschuiven en herschalen — horizontale asymptoot van een exponentiële functie

Activiteitenlijst

- bij exponentiële groei de groeifactor bepalen en een formule maken — rekenregels voor machten gebruiken
- eigenschappen van machten met negatieve en/of gebroken exponenten gebruiken — grafieken maken bij exponentiële groei
- werken met de eigenschappen en rekenregels van machten
- de karakteristieken van een exponentiële functie bepalen — exponentiële vergelijkingen/ongelijkheden oplossen
- werken met de algemene gedaante van elke exponentiële functie

Achtergronden

Thomas Robert Malthus (1766—1834) was een Brits geestelijke die zich veel bezighield met demografische en economische vraagstukken. In 1798 publiceerde hij ‘An Essay on the Principle of Population’, waarin hij aannam dat de totale bevolking exponentieel groeit, terwijl de middelen van bestaan lineair toenemen. Dit leidt tot de beschikbaarheid van steeds minder grond (voedsel/energie) per mens en dus een daling in welvaart, de ‘Malthusiaanse catastrofe’. Op grond hiervan meende hij dat de totale bevolking een maximale omvang zou hebben, het ‘Malthusiaans plafond’. Hij veronderstelde dat de mensheid deze maximale omvang binnen afzienbare tijd zou bereiken en dat alleen middels hongersnood, epidemieën en oorlogen het aantal mensen binnen de grenzen van het Malthusiaans plafond zou kunnen blijven. Malthus geldt als één der eerste economen.


Figuur 6.1

In de tweede helft van de negentiende eeuw werd deze opinie fel bestreden, onder andere door Karl Marx en Friedrich Engels die in Malthus' catastrofe slechts een gevolg van de kapitalistische samenleving zagen. Ook economen als John Maynard Smith en Ronald Fisher trokken Malthus' pessimistische kijk in twijfel. In de twintigste eeuw heeft niets van een Malthusiaanse catastrofe plaatsgevonden. Wel verscheen in 1972 het ‘De grenzen aan de groei'. Dit is een geschrift van de **Club van Rome** die als doelstelling heeft de wereld bekend te maken met problemen als bevolkingsgroei, voedselproductie, industrialisatie, uitputting van natuurlijke hulpbronnen, vervuiling. Ook zij maakten veel gebruik van exponentiële groeimodellen.

Testen

Opgave 1

Los de ongelijkheden op. Rond af op twee decimalen.

a $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 50 < 25$

b $500 \cdot 1{,}5^x > 300 \cdot 2^x$

Opgave 2

Los algebraïsch op.

a $-35 + 5 \cdot 3^{x-5} = 100$

b $5 \cdot 2^{2x-4} = 10\sqrt{2}$

Opgave 3

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld groeit enkele jaren met 2% per jaar. In 2018 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?

b Geef een formule voor het aantal passagiers p op tijdstip t in jaren na 2018.

c Als de groei zo doorgaat, hoelang duurt het dan voor het huidige aantal passagiers verdubbeld is?

d Hoeveel passagiers waren er in 2015?

e Hoeveel bedraagt de groeifactor per tien jaar?

f Hoe groot is de groeifactor per kwartaal?

Opgave 4

Een doorzichtige kunststof absorbeert een deel van het licht dat er doorheen valt. Elke laag van 1 cm absorbeert 20% van het licht.

a Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per cm kunststof?

b Hoeveel procent van het licht wordt geabsorbeerd door een laag van $2{,}5$ cm dikte?

c Hoe dik moet de laag kunststof zijn om 90% van het licht te absorberen?

d Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per mm kunststof?

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = 45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} - 240$.

a Schrijf functie f in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

b Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $y = 3^x$?

c Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f?

d Bereken het nulpunt van f in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Iemand haalt een fles melk uit de koelkast en zet er een fles cola voor in de plaats. De temperatuur van de fles melk neemt hierdoor langzaam toe tot kamertemperatuur, de temperatuur van de fles cola neemt juist af tot koelkasttemperatuur. De formules voor de temperaturen T_1 en T_2 (in graden Celsius) in de flessen, afhankelijk van de tijd t (in minuten), zijn: $T_1 = 19 - 13 \cdot 0{,}78^t$ en $T_2 = 6 + 13 \cdot 0{,}78^t$.

a Teken met de grafische rekenmachine de grafieken van beide formules. Laat t hierbij lopen van 0 tot 25.

b Welke van de formules hoort bij de fles melk, en welke bij de fles cola? Licht je antwoord toe.

c Wat is de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles cola?

d Welke asymptoot heeft de grafiek van de temperatuur van de fles melk?

e Hoeveel bedraagt de kamertemperatuur?

f Vanaf welk tijdstip is de cola kouder dan de melk?

Toepassen

Opgave 7: Radioactief verval

Een natuurkundige toepassing van exponentiële functies vind je bij radioactiviteit.

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven. Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4{,}468 \cdot 10^9$ jaar. Het verval van U-238 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t. Begin je met 1 kg U-238, dan heb je na $4{,}468$ miljard jaar nog $0{,}5$ kg over (plus $0{,}5$ kg Th-234). Je kunt dus het beste de tijd in miljarden jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer $0{,}8563$. En $A = 1000 \cdot 0{,}8563^t$ gram.

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2001 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.

c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.

d Als je de halveringstijd weet kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot 750 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

Opgave 8: Wereldbevolking

Omstreeks 1970 bedroeg de wereldbevolking ongeveer $3,6$ miljard en zij groeide per jaar met $2,1$%.

a Hoe groot was toen de groeifactor?

b Als we ervan uitgaan dat die groeifactor door de jaren heen gelijk is gebleven, hoeveel mensen leefden er dan in 1971, 1988, 1900 en het jaar 0?

c B is de bevolking na t jaren, gerekend vanaf 1970 ($t = 0$). Geef B als functie van t door een formule.

d Je hebt nu een model van de bevolkingsgroei gemaakt, gebaseerd op gegevens uit 1970. Volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 is in 2050 het aantal mensen op aarde nog geen 9 miljard. Klopt dat met de formule die je bij b hebt gevonden?

e Waaraan kun je zien dat de bevolkingsgroei dan niet meer exponentieel loopt? Kun je daar redenen voor geven?

Opgave 9: Vissen in het Grevelingenmeer

De afsluiting van de Grevelingen had voor de visstand grote gevolgen. Om die gevolgen in kaart te brengen werden wiskundige modellen ontwikkeld. Onder andere voor de ontwikkeling van de scholpopulatie. Hiervoor werd o.a. het volgende model opgesteld:

- jaarlijks komen er 5 miljoen larven het Grevelingenmeer binnen;
- jaarlijks komen 200000 volwassen schollen (één jaar of ouder) het Grevelingenmeer binnen;
- 90% van die larven sterven als jonge vissen (dus voordat ze 1 jaar zijn);
- 33% van de volwassen vissen sterven jaarlijks.

Op grond hiervan kun je een tabel maken van het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer:

tijd t in jaar	0	1	2	3	4	5
aantal volwassen schollen N	200.000	833.333	1.255.556	1.537.037	1.724.691	1.849.794

Tabel 6.1

Zet je deze tabel voort, dan zul je zien dat het aantal volwassen schollen in dit model naar 2100000 nadert. Bij de tabel past de formule: $N(t) = 2{,}1 - 1{,}9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$ met N in miljoenen. Dat kun je zelf afleiden...

a Laat zien hoe uit het model de gegeven tabel kan worden afgeleid.

b Zet die tabel voort en laat zien dat het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer volgens dit model de 2.100.000 gaat benaderen.

c Leid nu zelf de gegeven groeifunctie af.

d Waarom wordt in dit geval wel gesproken van geremde groei?

Examen

Opgave 10: Ureumgehalte

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 gram toeneemt. Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo ververst worden dat de wettelijke norm van 2 gram ureum per m^3 water niet overschreden wordt. In een model gaan we er van uit dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken. Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 m^3 ververst wordt (dus 3% van het totaal). We beginnen de eerste dag met 0 gram ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 gram ureum in het water. Na verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 gram ureum over.

a Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 gram ureum in het water zit.

b In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

c Stel U is de hoeveelheid ureum aan het begin van een zekere dag. Toon aan dat de hoeveelheid ureum aan het begin van de daaropvolgende dag gelijk is aan $0{,}8U + 400$.

We starten in het model weer met 0 gram ureum aan het begin van de eerste dag. De hoeveelheid ureum in gram (U_n) aan het begin van de n-de dag kan rechtstreeks berekend worden met de formule: $U_n = 2000 - 2500 \cdot 0{,}8^n$

d Leg uit met behulp van deze formule dat aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm voldaan wordt.

e In de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden. Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(bron: examen wiskunde A havo 1991, eerste tijdvak)

Opgave 11: Sparen, sparen en sparen

Nederland is een echt spaarland. Jaarlijks worden er miljarden euro's gestort op spaarrekeningen. Er zijn verschillende soorten spaarrekeningen. In deze opgave bekijken we er drie: de groeirekening, de depositorekening en de renteklimrekening. We storten op elk van de drie spaarrekeningen een bedrag van € 10000 dat voor een periode van 10 jaar op de spaarrekening blijft staan.

Groeirekening De groeirekening is de bekendste soort. Het rentepercentage op deze rekening is 3,5% per jaar. Het is een 'rente op rente'-rekening: na een jaar wordt de rente bijgeschreven op de rekening, zodat het volgende jaar rente wordt berekend over een hoger bedrag G. Na elk jaar wordt het bedrag op de rekening dus hoger. Het bedrag G dat na t jaar op de groeirekening staat kun je berekenen met de formule: $G = 10000 \cdot 1{,}035^t$. Het bedrag op de groeirekening is na 10 jaar nog niet verdubbeld. Maar als je de rekening nog langer laat doorlopen, komt er een jaar dat het bedrag op de rekening voor het eerst twee keer zo hoog is. Het bedrag is zelfs nog hoger dan € 20000.

a Bereken na hoeveel jaar dat is.

Depositorekening De depositorekening is een spaarrekening met een rentepercentage van $4{,}0$% per jaar. De rente over elk jaar is € 400. Dat bedrag wordt steeds bijgeschreven op een aparte betaalrekening. Op de betaalrekening krijg je geen rente, zodat het bedrag op de betaalrekening lineair tieneemt. De rente van $4{,}0$% lijkt gunstiger dan een rente van $3{,}5$%. Toch heb je na tien jaar bij de depositorekening in totaal minder rente gekregen dan bij de groeirekening. Een bank introduceert een nieuwe depositorekening die in tien jaar evenveel rente oplevert als de groeirekening.

b Bereken het rentepercentage per jaar van die nieuwe depositorekening. Geef je antwoord in één decimaal.

Renteklimrekening De renteklimrekening is een soort depositorekening. Ook hier wordt jaarlijks de rente bijgeschreven op een aparte betaalrekening die geen rente oplevert. Bij de renteklimrekening wordt het rentepercentage elk jaar hoger. In deze tabel kun je aflezen welke bedragen er na t jaar sparen op de renteklimrekening R en op de betaalrekening B staan.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
B	0	300	615	950	1310	1700	2130	2615	3165	3775	4475

Tabel 6.2

In de volgende tabel staan de rentepercentages voor het t-de jaar.

t-de jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rentepercentage	3,00	3,15	3,35	3,60	3,90	4,30				

Tabel 6.3

c Bereken het rentepercentage voor het zevende jaar. Geef je antwoord in twee decimalen.

d De renteklimrekening geeft in tien jaar € 4475 rente. Wat dit betreft is het de beste van de drie spaarrekeningen. De groeirekening is de op één na beste. Bereken het rentepercentage per jaar dat een groeirekening moet hebben om in 10 jaar € 4475 rente te geven. Geef je antwoord in twee decimalen.

(bron: examen wiskunde A havo 2004, tweede tijdvak)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

www.math4all.nl