

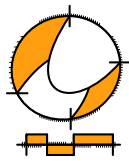
Wiskunde A

4 VWO

Katern I

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Werken met formules 5

- 1.1 Formules gebruiken 6
- 1.2 Formules herschrijven 13
- 1.3 Formules en de grafische rekenmachine 23
- 1.4 Vergelijkingen 31
- 1.5 Ongelijkheden 39
- 1.6 Totaalbeeld 47

2 Functies en grafieken 53

- 2.1 Het begrip functie 54
- 2.2 Domein en bereik 62
- 2.3 Bijzondere functies 71
- 2.4 Karakteristieken 80
- 2.5 Verschuiven en vervormen 88
- 2.6 Totaalbeeld 98

Register 105

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Werken met formules

1.1	Formules gebruiken	6
1.2	Formules herschrijven	13
1.3	Formules en de grafische rekenmachine	23
1.4	Vergelijkingen	31
1.5	Ongelijkheden	39
1.6	Totaalbeeld	47

1.1 Formules gebruiken

Inleiding

'De oppervlakte van een rechthoek kun je uitrekenen door de lengte en de breedte met elkaar te vermenigvuldigen.' Dat is een zin die je kunt inkorten tot $A = l \cdot b$, als je de oppervlakte van de rechthoek voorstelt door de letter A , de lengte door de letter l en de breedte door de letter b . Zo'n ingekorte zin heet een formule. Formules zijn overzichtelijker dan lange zinnen, maar je moet wel goed onthouden (of opschrijven) wat al die letters voorstellen. En bij toepassingen moet je ook om de eenheden denken: als lengte en breedte in meter zijn, dan is de oppervlakte in vierkante meter.

Je leert in dit onderwerp

- verschillende soorten formules herkennen: formules die een verband weergeven tussen variabelen, formules in de vorm van een vergelijking die je kunt oplossen en formules als rekenregel;
- bij een formule die het verband tussen twee variabelen beschrijft de grafiek tekenen;
- onderscheid maken tussen grootheden en eenheden.

Voorkennis

- werken met variabelen (die 'letters' als naam hebben);
- tabellen maken en grafieken tekenen.

Verkennen

Opgave V1

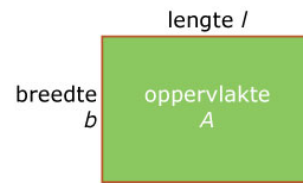
Iemand wil een stuk hei afgrenzen om er schapen te laten grazen met 360 meter gaas. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,5 hectare (dus 5000 m²).

De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk hei.

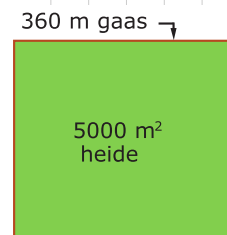
- Om welke variabele grootheden gaat het in dit probleem?
- Stel bij dit probleem passende formules op.
- Los het verder op, bijvoorbeeld met behulp van tabellen, grafieken of vergelijkingen.

Uitleg

'De oppervlakte van een rechthoek kun je uitrekenen door de lengte en de breedte met elkaar te vermenigvuldigen.' Deze zin kun je inkorten tot $A = l \cdot b$, als je de oppervlakte van de rechthoek voorstelt door de variabele A , de lengte door de variabele l en de breedte door de variabele b . Zo'n ingekorte zin heet een 'formule'. Formules zijn overzichtelijker dan zinnen, maar je moet onthouden wat de variabelen voorstellen.



Figuur 1.1



Figuur 1.2

Lengte en breedte zijn grootheden waarbij een eenheid (bijvoorbeeld centimeter) hoort.

In formules schrijf je alleen variabelen, geen eenheden. Bij toepassingen moet je wel zorgen dat de eenheden kloppen: als lengte en breedte in meter zijn, dan is de oppervlakte in vierkante meter.

In veel formules komt een 'isgelijktteken' voor.

In de formule $A = l \cdot b$ komen drie variabelen voor. Je moet van twee daarvan de waarde weten om de derde te kunnen uitrekenen. Weet je bijvoorbeeld dat $A = 30 \text{ m}^2$ dan krijg je $30 = l \cdot b$, ofwel $l = \frac{30}{b}$.

Bij dit verband tussen l en b kun je een tabel en een grafiek maken:

l	1	2	3	4	5	6	10	15	30
b	30	15	10	7,5	6	5	3	2	1

Tabel 1.1

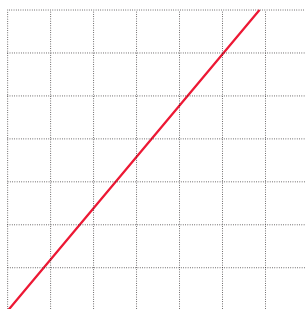
Neem je in dit verband voor $l = 15$ krijg je de vergelijking $\frac{30}{b} = 15$. In de tabel zie je dat een oplossing voor deze vergelijking $b = 2$ is.

Opgave 1

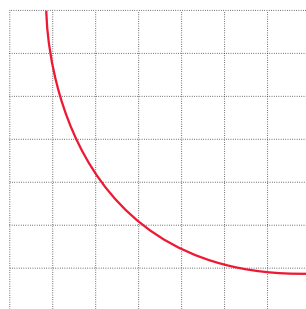
Gebruik de formule $A = l \cdot b$ uit de **Uitleg**.

- Stel dat gegeven is: $l = 6$ meter. Vul dit in de formule in. Geef de formule die hierdoor ontstaat.
- Stel dat gegeven is: $A = 12 \text{ m}^2$. Schrijf op wat de formule dan wordt.
- Van een rechthoek is bekend dat het een vierkant is. Schrijf de formule op die voor deze rechthoek het verband tussen oppervlakte en lengte beschrijft.

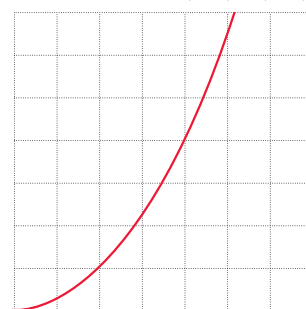
De grafieken horen bij de formules uit de vragen a, b of c.



grafiek I



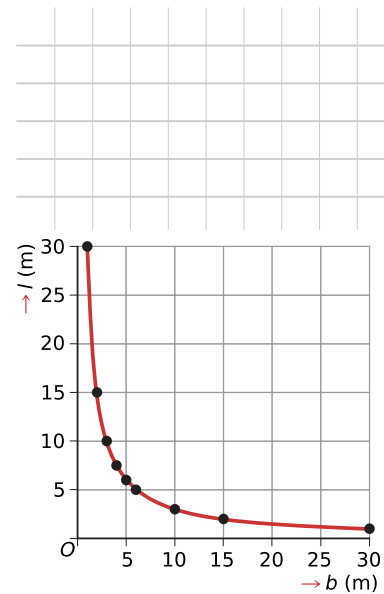
grafiek II



grafiek III

Figuur 1.4

- Neem de grafieken over. Schrijf bij elke grafiek de juiste formule, zet de juiste variabelen bij de assen en maak er een goede schaalverdeling bij.



Figuur 1.3

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je dat er verschillende soorten formules bestaan. Zo is $A = l \cdot b$ een verband tussen drie variabelen, $A = 6 \cdot b$ een verband tussen twee variabelen en $30 = 6 \cdot b$ een vergelijking met één variabele.

Ga in deze opgave uit van de situatie waarin de lengte l altijd 2 groter is dan de breedte b , dus $l = b + 2$.

- Welke formule geeft nu het verband tussen de oppervlakte A en de breedte b weer?
- Maak bij deze formule een tabel en een grafiek.
- Neem aan dat $A = 15 \text{ m}^2$. Welke vergelijking krijg je dan?
- Welke oplossing heeft die vergelijking?
- Bekijk de formule $b(b + 2) = b^2 + 2b$.
Is deze formule een vergelijking? En waarom?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **formule** is een wiskundige uitdrukking met een of meer **variabelen**. Vaak heeft een formule ook een **isgelijktteken**.

De formule $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ geldt voor elke waarde van x en heet daarom een **rekenregel**.

De formule $2t + 40 = 300$ heeft maar één variabele en geeft informatie over de onbekende t .

Deze **vergelijking** heeft als oplossing $t = 130$, want $2 \cdot 130 + 40 = 300$.

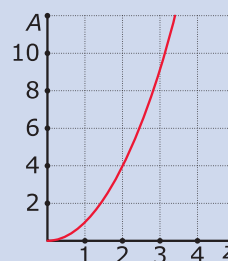
De formule $A = z^2$ is een vergelijking met twee variabelen en beschrijft een **verband** tussen de variabelen A en z .

Je kunt er een tabel bij maken en een grafiek bij tekenen.

z	0	1	2	3	4
A	0	1	4	9	16

Tabel 1.2

In de praktijk beschrijven formules vaak het verband tussen **grootheden**. Die grootheden worden voorgesteld door een variabele. De naam van de variabele lijkt vaak op de naam van de grootheid. Bij zo'n grootheid hoort weer een afgesproken **eenheid** waarin hij kan worden gemeten.



Figuur 1.5

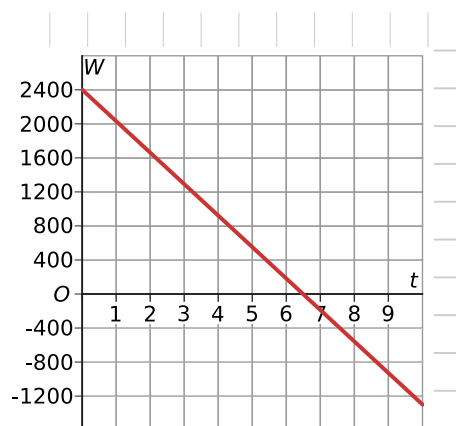
Voorbeeld 1

Een aannemer krijgt voor een opdracht een vast bedrag van de opdrachtgever. De aannemer maakt gebruik van de winstformule $W = 2400 - 370t$, waarbij W de winst in euro is en t de tijd in dagen die aan het project besteed wordt om het af te krijgen. Bekijk de bijbehorende grafiek.

Hoe lees je uit de grafiek af bij welke t er geen winst en geen verlies wordt gemaakt?

Antwoord

Als $W = 0$ wordt er geen verlies en geen winst gemaakt. Je moet dus het snijpunt van de grafiek met de horizontale as hebben. Je ziet dat bij $t \approx 6,5$ de winst 0 is. Dus als het bedrijf ongeveer 6,5 dag kwijt is aan het project, dan maakt het geen winst en geen verlies.



Figuur 1.6

Opgave 3

Bereken na hoeveel dagen de aannemer uit **Voorbeeld 1** geen winst en geen verlies maakt. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

Voor het gebruik van elektriciteit betaal je een vast bedrag per jaar en een bedrag per kWh (kilowattuur) verbruik. De totale jaarlijkse kosten hangen daarom af van het aantal kWh dat er wordt verbruikt. Die totale kosten kun je omrekenen naar gemiddelde totale kosten (euro per kWh). Er geldt: $K = 0,12 + \frac{32}{a}$.

In de formule is a het verbruik van elektriciteit in kWh en K de gemiddelde totale kosten per kWh (in euro).

- Hoeveel bedraagt het vaste bedrag per jaar?
- Teken een grafiek van K afhankelijk van a .
- Voor welke waarde van a bedragen de gemiddelde totale kosten per kWh 16 eurocent?

Voorbeeld 2

Wat is het verschil tussen de volgende formules?

- $K = 2a - 4b$
- $K = 20 - 4b$
- $20 - 4b = 10$
- $2a - 4b = 2(a - 2b)$

Antwoord

- $K = 2a - 4b$ is een verband tussen drie variabelen: K , a en b .
- $K = 20 - 4b$ is een verband tussen twee variabelen: K en b .
Je kunt er een grafiek bij maken.
- $20 - 4b = 10$ is een vergelijking die je kunt oplossen. De oplossing is: $b = 2,5$.
- $2a - 4b = 2(a - 2b)$ is een rekenregel.
Dit wordt duidelijk als je de haakjes wegwerkt:
 $2(a - 2b) = 2 \cdot a - 2 \cdot 2b = 2a - 4b$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je de formule $K = 2a - 4b$.

- a Neem $a = 10$ en teken de grafiek.
- b Neem nu $b = -1$ en teken de grafiek.
- c Los de vergelijking $20 - 4b = 10$ op.

Opgave 6

Geef van de formules aan wat ze beschrijven: een verband tussen variabelen, een rekenregel of een vergelijking die je kunt oplossen. Geef ook aan of je er een grafiek bij kunt maken.

- a $V = 3r^2$
- b $V = l \cdot b \cdot h$
- c $4(a - b) = 4a - 4b$
- d $l = 200 - b$
- e $2p + 25 = 14 - 0,5p$
- f $x \cdot y = 12$

Verwerken**Opgave 7**

Geef van de formules aan wat ze beschrijven: een verband tussen variabelen, een rekenregel of een vergelijking die je kunt oplossen. Geef ook aan of je er een grafiek bij kunt maken.

- a $3 \cdot (2x + y) = 6x + 3y$
- b $2x - 4 = x + 5$
- c $y = 2x^2 + 4$
- d $R = p \cdot q$

Opgave 8

Een boot staat aan de top van een vlakke helling en wordt met een constante snelheid te water gelaten. De hoogte h (in centimeter) van de onderkant van de boot boven het water wordt gegeven door de formule $h = 1500 - 400t$, waarbij t de tijd in minuten is. Het laagste punt van de helling ligt onder water.

- a Teken de grafiek bij de formule.
- b Na hoeveel tijd (in seconden nauwkeurig) raakt de onderkant van de boot net het water?
- c De boot ligt na 4,5 minuten volledig in het water. Hoeveel centimeter ligt de onderkant van de boot dan onder water?

Opgave 9

Voor een telefoonabonnement wordt de formule $K = 0,08 + \frac{24}{a}$ gebruikt, waarbij a het aantal belminuten per maand is en K de totale kosten in euro per belminuut.

- a Wat zijn de vaste kosten en wat zijn de kosten die je voor elke gebelde minuut moet betalen?

- b Teken een grafiek bij de formule. Neem een maximum van 200 belminuten.
- c Bij hoeveel belminuten betaal je 12 eurocent per minuut?

Opgave 10

Een elektrische weerstand wordt aangesloten op een spanning van 200 Volt. Met behulp van een ampèremeter kun je de stroomsterkte meten. Voor deze situatie geldt de wet van Ohm: $U = I \cdot R$ waarin U de spanning in V (Volt), I de stroomsterkte in A (Ampère) en R de weerstand in Ω (Ohm).

- a Bij een spanning van 200 Volt beschrijft de wet van Ohm het verband tussen I en R . Welke formule hoort daar bij? En welke eenheden horen bij deze formule?
- b Teken de grafiek bij deze formule. Zet R op de horizontale as.
- c Welke stroomsterkte wordt er gemeten als $R = 15$?

Opgave 11

Voor de inhoud I van een balk met hoogte 4 centimeter geldt de formule $I = 4 \cdot l \cdot b$, waarbij l de lengte en b de breedte van de balk is.

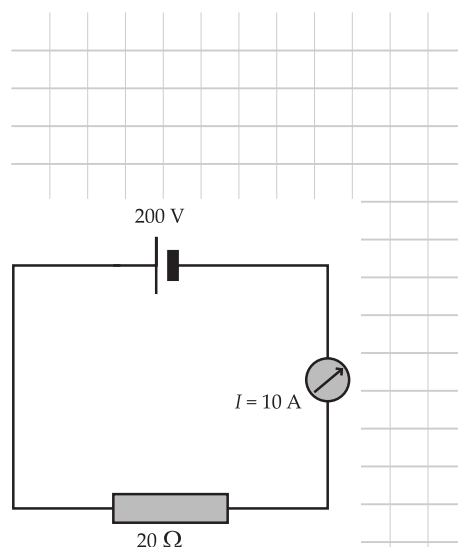
- a In welke eenheid moet I worden uitgedrukt als de lengte en breedte in centimeters zijn?
- b Welke grootheden komen er in de formule voor?
- c Stel dat je zo'n balk hebt met een inhoud van 64 cm^3 . Welke formule hoort hier bij? Teken ook de grafiek bij de formule, waarbij l op de horizontale as komt.
- d Teken in de grafiek die je bij c hebt getekend ook de lijn $b = l$. Deze lijn snijdt de grafiek van b , wat betekent dit snijpunt voor de balk?

Toepassen

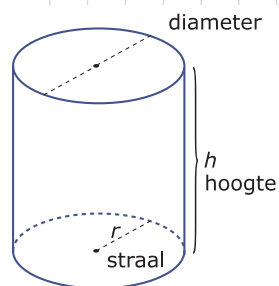
Opgave 12: Cilindervormig blikje

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Hierin is V de inhoud (het volume), r de straal in centimeter en h de hoogte in centimeter.

- a In welke eenheid moet V worden uitgedrukt?
- b Hoeveel bedraagt de inhoud van een blikje met een diameter van 80 millimeter en een hoogte van 16 centimeter?
- c Schrijf een formule van de vorm $V = \dots$ op die het verband tussen V en r voor blikjes met een hoogte van 16 centimeter aangeeft.
- d Welke vorm heeft de grafiek bij de formule die je in c hebt gevonden?
- e Van andere blikjes is de inhoud 1 liter. Welk verband is er nu tussen r en h ? Teken er een grafiek van.



Figuur 1.7



Figuur 1.8

Opgave 13: Reclamedrukwerk

Een reclamedrukbedrijf print flyers in bulkbestellingen. Hoe groter de bestelling, hoe minder je kosten per flyer bedragen.

Bij dit bedrijf zijn de drukkosten als volgt bepaald: voor bestellingen van 1000 flyers of minder betaal je vaste kosten van € 15,00 plus € 0,01 per flyer. Bij grotere bestellingen zijn de vaste kosten € 20,00, maar de prijs per flyer daalt naar € 0,005.

- Geef een globale schets van de grafiek van de kosten van een bestelling flyers, afhankelijk van de grootte van de bestelling.
- Druk de totaalkosten K van een bestelling flyers uit in de hoeveelheid te printen flyers f .
- Geef de uitdrukking voor de prijs per flyer, als je de totaalkosten weet.

Testen

Opgave 14

Welke van deze formules beschrijft een verband tussen twee variabelen? Teken bij deze formules een grafiek.

- $a + b = 8$
- $2p(q - 3) = 2pq - 6p$
- $4x^2 - 25 = 135$
- $R = 50p - 2p^2$

Opgave 15

De Quetelet-index (QI) is een maat voor een gezond gewicht. Je berekent de QI met de formule $QI = \frac{G}{l^2}$. Hierin is l je lengte in meters en G je gewicht in kilogram. Bij deze index wordt de eenheid niet vermeld. De waarde wordt in één decimaal nauwkeurig uitgerekend en gebruikt. Neem aan dat een QI van 20 tot 25 gezond is.

- Bereken de QI van iemand die 180 centimeter lang is en 78 kilogram weegt.
- Bij een QI van 20 kun je een grafiek maken van iemands gewicht afhankelijk van zijn lengte. Teken die grafiek.
- Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek $QI = 25$.
- Stel je een persoon voor van 180 centimeter lengte. Geef in je figuur aan welke gewichten voor deze persoon gezond zijn. Zet de ondergrens en de bovengrens er in de grafiek bij, in kilogram nauwkeurig.

1.2 Formules herschrijven

Inleiding

Formules kun je vaak op verschillende manieren schrijven. Zo kun je de omtrek van een rechthoek uitleggen als 'Tel lengte en breedte en lengte en breedte bij elkaar op', maar ook als 'Neem 2 keer de lengte en 2 keer de breedte en tel dat bij elkaar op'. Dan zeg je verschillende dingen, maar die leveren toch altijd dezelfde omtrek op. Het zijn gelijkwaardige formules (in woorden). Soms is de éne versie van de formule handiger, soms werk je liever met een andere...

Je leert in dit onderwerp

- formules herleiden;
- haakjes uitwerken;
- ontbinden in factoren;
- werken met breuken.

Voorkennis

- werken met variabelen (met 'letters');
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Iemand wil een stuk hei afgrenzen om er schapen te laten grazen met 360 meter gaas. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,45 hectare (dus 4500 m²). De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk hei.

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b .

- Stel bij dit probleem een formule op die past bij de gegeven omtrek en één die past bij de gegeven oppervlakte.
- Schrijf beide formules in de vorm $l = \dots$
- Hoe kun je nu het probleem verder oplossen?

Uitleg

Als een rechthoek met lengte l en breedte b een omtrek heeft van 360 m, dan geldt de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$.

Die formule kun je schrijven als $2l + 2b = 360$ en dan verder herleiden:

$$\begin{aligned} 2l + 2b &= 360 \\ l + b &= 180 && \text{beide zijden } /2 \\ l &= 180 - b && \text{beide zijden } -b \end{aligned}$$

Nu heb je l uitgedrukt in b . Zoiets doe je om grafieken te maken, l komt op de verticale as.



Figuur 2.1



Figuur 2.2

Als deze rechthoek een oppervlakte van 4500 m^2 moet hebben, geldt ook $l \cdot b = 4500$.

En dit kun je herleiden:

$$l \cdot b = 4500$$

$$l = \frac{4500}{b}$$

beide zijden $/b$

Wil je nu weten voor welke b de rechthoek aan beide eisen voldoet, dan kun je met twee grafieken werken. Maar je kunt ook een vergelijking maken en die oplossen:

$$\frac{4500}{b} = 180 - b$$

$$4500 = 180b - b^2$$

$$b^2 - 180b + 4500 = 0$$

$$(b - 30)(b - 150) = 0$$

$$b = 30 \vee b = 150$$

beide zijden met b vermenigvuldigen
op 0 herleiden
ontbinden in factoren
oplossingen opschrijven

Je vindt dus twee mogelijke waarden voor de breedte van deze rechthoek.

Opgave 1

Je ziet in de **Uitleg** dat je de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$ eenvoudiger kunt schrijven als $l + b = 180$. Schrijf de volgende formules zo eenvoudig mogelijk.

- a $2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot x - 6 \cdot y = 12$
- b $2 \cdot x \cdot y + x \cdot y = 18$
- c $y = 4x^2 + x + 3y - 7x + 2x^2$
- d $2xy + xy - 3x = 18$

Opgave 2

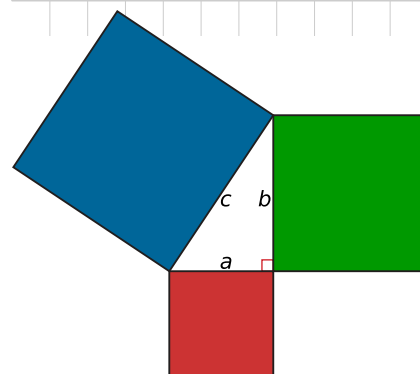
Je ziet in de **Uitleg** dat je de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$ kunt schrijven in de vorm $l = 180 - b$. Herleid de volgende formules zodat y is uitgedrukt in x .

- a $2x - 4y = 10$
- b $-3x + 5 = 10 - 2y$
- c $5x + 10xy = 20$
- d $x \cdot (y + 2) = 6$

Opgave 3

In een rechthoekige driehoek geldt de stelling van Pythagoras. In formulevorm: $a^2 + b^2 = c^2$.

- a Geef twee gelijkwaardige formules.
- b Neem $a = 3x$ en $b = 4x$ en druk c uit in x .
Neem aan dat $x > 0$.



Figuur 2.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Formules kun je **herleiden** (of **herschrijven**) met rekenregels. Zo is de uitdrukking $l + l + b + b$ te herleiden tot $2l + 2b$.

Als je in beide uitdrukkingen dezelfde waarden voor de variabelen b en l invult, geven ze een gelijke waarde als uitkomst. De uitdrukkingen zijn dus **gelijkwaardig**.

Formules kunnen ook gelijkwaardig zijn. Zo zijn $2l + 2b = 60$ en $b = 30 - l$ gelijkwaardig, want als je dezelfde waarden voor b respectievelijk l invult, zijn beide formules tegelijk 'waar' of 'niet waar'. En daarom zijn dit **gelijkwaardige formules**.

Formules blijven gelijkwaardig als je de gewone rekenregels toepast, zoals haakjes wegwerken, ontbinden in factoren en rekenen met breuken. Ook mag je:

- aan beide zijden van een isgelijktteken hetzelfde optellen of aftrekken;
- aan beide zijden van een isgelijktteken met hetzelfde vermenigvuldigen of delen (behalve vermenigvuldigen of delen met 0);
- de uitdrukkingen aan beide zijden van het isgelijktteken verwisselen.

Hier zie je nog een keer de rekenregels voor werken met haakjes en breuken:

- **haakjes wegwerken** (ook wel 'haakjes uitwerken'):

$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

- **ontbinden in factoren**:

$$a \cdot x + a \cdot y = a \cdot (x + y)$$

$$x^2 + p \cdot x + q = (x + a) \cdot (x + b) \text{ met } a + b = p \text{ en } a \cdot b = q \text{ (de productsommethode)}$$

- **breuken optellen/aftrekken**:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

- **breuken vermenigvuldigen** (ga ervan uit dat er nergens door 0 wordt gedeeld):

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- **breuken delen**

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \div \frac{b \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \text{ of } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Voorbeeld 1

Voorbeelden van haakjes wegwerken zijn:

- $-2 \cdot (x - y) = -2 \cdot x - 2 \cdot y = -2x + 2y$
- $2x^2 \cdot (x^3 - 5x) = 2x^2 \cdot x^3 - 10x^2 \cdot x = 2x^5 - 10x^3$
- $2 - (x - 5) = 2 - x - 5 = 2 - x + 5 = 7 - x$
- $(x + 3)(x - 5) = (x + 3)(x + -5) = x \cdot x + x \cdot -5 + 3 \cdot x + 3 \cdot -5 = x^2 - 2x - 15$

Denk na vóór je haakjes wegwerkt. Bijvoorbeeld: aan de uitdrukking $(x - 5)^2$ zie je gemakkelijk dat die gelijk is aan 0 als $x = 5$. Werk je de haakjes weg, dan krijg je de uitdrukking $x^2 - 10x + 25$ en zie je dat een stuk minder snel.

Pas ook goed op met de volgende berekening (waar staan de haakjes?):

- Goed: $\frac{x+6}{2} = \frac{x}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2}x + 3$
- Fout: $\frac{6}{x+2} = \frac{6}{x} + 3$

Bij de eerste breuk moet je zowel x als 6 door 2 delen.

Met een getalvoorbeeld kun je zien dat de tweede breuk niet goed is uitgewerkt.

Kies je bijvoorbeeld $x = 1$, dan zou de uitkomst $\frac{6}{1+2} = 2$ moeten zijn en niet $\frac{6}{1} + 3 = 9$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Werk in de uitdrukkingen de haakjes weg en schrijf zo kort mogelijk.

- a $3x \cdot (x - 2y)$
- b $2a - (9a + 6)$
- c $0,5p \cdot 100p - p \cdot (20p + 100)$
- d $-5p^3(p^2 - 3p^3)$
- e $0,5x \cdot (10x - 3) - 5x^2$
- f $\frac{3(x+2)+6}{3}$

Opgave 5

Werk in de uitdrukkingen de haakjes weg en schrijf zo kort mogelijk.

- a $(x + 2) \cdot (x + 4)$
- b $2(b + 4)(b - 2)$
- c $(l + 3)(l - 3)$
- d $(5c - 4)^2$

Voorbeeld 2

Voorbeelden van ontbinden in factoren zijn:

	-12	
1	-12	
2	-6	← -4
3	-4	
-3	4	
-2	6	
-1	12	

Figuur 2.4

- $2x^2 + 6xy = 2x \cdot x + 2x \cdot 3y = 2x(x + 3y)$
- $-x^2 + 4x = -x \cdot x - -x \cdot 4 = -x(x - 4)$
- $x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$ (de somproductmethode toepassen, zie figuur)
- $3x^4 + 9x^8 = 3x^4(1 + 3x^4)$

Opgave 6

Ontbind in factoren.

- a $2x^2 + 10x$
- b $3x^2 - 9x$
- c $x^2 + 5x + 4$
- d $b^2 - 9b + 8$
- e $k^2 - 17k + 16$

Opgave 7

Ontbind in factoren.

- a $c^3 + 2c^2 + c$
- b $p^3 - p^5$
- c $2x^4 + 8x^{10}$
- d $3y^4 - 6y^5$

Voorbeeld 3

Als breuken gelijknamig zijn, mag je ze bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken.

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{5}{a} - \frac{2}{a} = \frac{3}{a}$$

Als je breuken met verschillende noemers wilt optellen of aftrekken, moet je ze eerst gelijknamig maken.

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{4y}{xy} + \frac{3x}{xy} = \frac{3x+4y}{xy}$$

Breuken vereenvoudig je door teller en noemer door hetzelfde getal te delen.

Hier zie je nog een paar voorbeelden (ga ervan uit dat je nooit door 0 deelt):

- $\frac{2}{a} + \frac{5}{a} = \frac{7}{a}$
- $\frac{2}{a} - \frac{5}{a} = \frac{-3}{a} = -\frac{3}{a}$

- $\frac{2}{a} - \frac{5}{b} = \frac{2b}{ab} - \frac{5a}{ab} = \frac{2b-5a}{ab}$
- $\frac{2}{3a} + \frac{5}{a^2} = \frac{2a}{3a^2} + \frac{15}{3a^2} = \frac{2a+15}{3a^2}$
- $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{2(x+3)}{x(x+3)} - \frac{1 \cdot x}{x(x+3)} = \frac{x+6}{x(x+3)}$

Opgave 8

Schrijf als één breuk.

a $\frac{2}{7} + \frac{1}{9}$

b $\frac{2}{7} - \frac{1}{3}$

c $\frac{2}{a} + \frac{1}{a}$

d $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$

Opgave 9

Schrijf als één breuk.

a $\frac{2}{x} + \frac{5}{y}$

b $\frac{-3}{a} - \frac{8}{a^2}$

c $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

d $\frac{2}{a} - \frac{3}{2a+1}$

Voorbeeld 4

Breuken kun je vermenigvuldigen of delen.

Bij delen kun je direct gebruiken: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Delen door de breuk

$\frac{c}{d}$ is gelijkwaardig met vermenigvuldigen met de breuk $\frac{d}{c}$.

Hier zie je een paar voorbeelden (ga ervan uit dat je nooit door 0 deelt):

- $\frac{2}{a} \cdot \frac{5}{a} = \frac{10}{a^2}$
- $\frac{2}{a} \div \frac{5}{a} = \frac{2}{a} \cdot \frac{a}{5} = \frac{2 \cdot a}{5 \cdot a} = \frac{2}{5}$; opmerking: $\frac{a}{a} = 1$.
- $\frac{2}{a} \div \frac{5}{b} = \frac{2b}{ab} \div \frac{5a}{ab} = \frac{2b}{5a}$ of $\frac{2}{a} \div \frac{5}{b} = \frac{2}{a} \cdot \frac{b}{5} = \frac{2b}{5a}$
- $\frac{2a}{3} \cdot \frac{5}{a^2} = \frac{10a}{3a^2} = \frac{10 \cdot a}{3a \cdot a} = \frac{10}{3a}$
- $\frac{2a}{3} \div \frac{5}{a^2} = \frac{2a^3}{3a^2} \div \frac{15}{3a^2} = \frac{2a^3}{15} = \frac{2}{15}a^3$ of $\frac{2a}{3} \div \frac{5}{a^2} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a^2}{5} = \frac{2a^3}{15} = \frac{2}{15}a^3$

Opgave 10

Schrijf als één breuk.

a $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{10}$

b $\frac{2}{7} \div \frac{3}{10}$

c $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{b}$

d $\frac{2}{a} \div \frac{1}{b}$

Opgave 11

Schrijf als één breuk.

a $\frac{2}{3x} \cdot \frac{5}{2y}$

b $\frac{2}{x} - \frac{1}{2x}$

c $\frac{3}{5x} \div \frac{2x}{5}$

d $\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}$

Verwerken

Opgave 12

Schrijf de formules zo eenvoudig mogelijk.

a $4 \cdot x + 10 = 3 \cdot x - 2 \cdot y$

b $2 \cdot y + 2 \cdot x \cdot x + 4 \cdot x = 6 \cdot x^2$

Opgave 13

Schrijf als één breuk.

a $\frac{3}{y} + \frac{5}{x}$

b $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x}$

c $\frac{2}{x} \div \frac{3}{y}$

d $2x - \frac{1}{2x}$

e $\frac{10y}{7x} \cdot \frac{5}{6x}$

Opgave 14

Druk in de formules y uit in x . Schrijf ze daarna zo eenvoudig mogelijk.

a $x - 2y = 10$

b $(x + 2) \cdot y = 6$

c $x = 4 - y^2$

d $x \cdot y^2 = 4$

Opgave 15

Werk de haakjes weg en herleid.

- a $-3x(x + 2y)$
- b $-2x - (x^2 + 6x)$
- c $(t + 20)(t - 5)$
- d $(x^2 + 1)(3x - 2)$
- e $(a - 3)(a + 3)$
- f $(x - 2)^2$

Opgave 16

Ontbind in factoren.

- a $x^2 - 4x$
- b $-2t^2 + 18t$
- c $x^2 + 5x - 6$
- d $12 - 4p - p^2$
- e $q^3 + 4q^2 + 8q$

Opgave 17

In Nederland wordt de temperatuur in graden Celsius ($^{\circ}\text{C}$) uitgedrukt. In sommige andere landen gebruiken ze graden Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). Met de formule $T_F = 1,8T_C + 32$, waarbij T_C de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ is en T_F de temperatuur in $^{\circ}\text{F}$, kun je uitrekenen wat de temperatuur in graden Fahrenheit is als je de temperatuur in graden Celsius weet.

- a Water kookt bij 100°C , hoeveel $^{\circ}\text{F}$ is dit?
- b Als je de temperatuur in $^{\circ}\text{F}$ weet kun je met een formule gemakkelijk uitrekenen hoeveel $^{\circ}\text{C}$ dat is. Geef die formule door T_C uit te drukken in T_F .

Toepassen

Opgave 18: Een boswal aanleggen

Een boer heeft een rechthoekig stuk land dat twee keer zo lang is als breed. Uit het oogpunt van landschapsbeheer haalt hij aan beide lange zijden een strook van 3 meter breed af en maakt daar een smalle boswal. Verder maakt hij een bredere boswal van 10 meter breed aan één van beide korte zijden. Zijn land wordt daarmee 2690 m^2 kleiner.

- a Maak eerst een tekening van de situatie. Noem de oorspronkelijke breedte van het land x (in meter). Hoe groot is de oppervlakte van dit land, uitgedrukt in x ?
- b Hoe groot is de oppervlakte van het land na de aanleg van de boswal? Geef deze oppervlakte als formule met haakjes.
- c Bereken door wegwerken van de haakjes hoe groot de breedte van het rechthoekige stuk land is.

Opgave 19: Windmolens

Windmolens kunnen elektriciteit opwekken. Voor een zekere windmolen wordt dat aangegeven door de formule: $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en D de rotordiameter in meter.

- Ga uit van een windmolen met een diameter van 24 meter. Bij welke windsnelheid in km/h wordt een vermogen van 26 kW opgewekt?
- Ga weer uit van een vermogen van 26 kW. Welke diameter de windmolen moet hebben, kun je dan berekenen als je de snelheid van de wind weet. Stel een formule op die D uitdrukt in v .
- In een bepaald gebied ligt de windsnelheid tussen de 7,2 en de 36 km/h. Als je een (gemiddeld) vermogen van 26 kW met een windmolen wilt kunnen opwekken, tussen welke waarden kies je dan de diameter van die molen?

Testen**Opgave 20**

Schrijf deze formules zo, dat y is uitgedrukt in x .

- $4x - 4y = 12$
- $x \cdot x + 4 \cdot y = 8 \cdot x^2 - 4 \cdot x$
- $2xy = 0,4x + 200$
- $x - 4y^2 = 2$

Opgave 21

Schrijf als één breuk.

- $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$
- $\frac{3}{4x} \div \frac{5}{2x}$
- $\frac{x+1}{x} + \frac{1}{2x}$
- $\frac{4x}{7} \cdot \frac{3y}{2}$

Opgave 22

Om je schoenmaat te bepalen kun je de formule $s = 1,5(v + 2)$ gebruiken, hierbij is v de voetslengte in centimeters is en s de schoenmaat.

- Welke schoenmaat hoort er bij een voetslengte van 25 centimeter?
- Druk v uit in s en bepaal met deze formule wat de voetslengte moet zijn, bij een schoenmaat van 42.

Opgave 23

Werk eerst de haakjes uit en ontbind daarna in factoren.

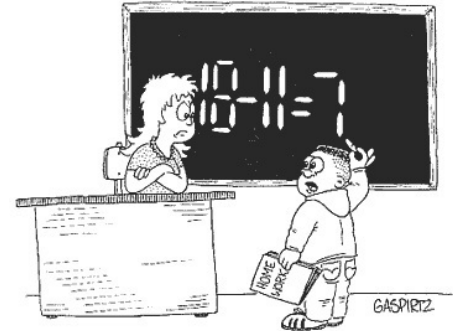
- $(x - 4)(x + 3) - 8$
- $(x + 3)(x - 2) + 4x - 8$

1.3 Formules en de grafische rekenmachine

Inleiding

De grafische rekenmachine kan grafieken maken bij sommige verbanden tussen twee variabelen. Dat moet een verband zijn, waarbij duidelijk is voor welke variabele getallen worden ingevuld (de invoervariabele) en welke variabele dan moet worden uitgerekend. Bij elke waarde van de invoervariabele is dus hoogstens één waarde van de uitvoervariabele mogelijk.

www.4allfree.com



I swear I didn't use a calculator.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- verbanden herleiden tot ze de juiste vorm hebben voor de grafische rekenmachine;
- grafieken maken met de grafische rekenmachine;
- het begrip 'functie' kennen;
- verbanden combineren.

Voorkennis

- werken met variabelen (met 'letters');
- regels zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Als je nog nooit met een grafische rekenmachine hebt gewerkt, doe je nu eerst het **Practicum: Basistechnieken GR**. Daarna bekijk je pas de rest van de opgave.

Gegeven is de formule $y = 0,5x^2 - x - 4$.

- Voer de formule in op de grafische rekenmachine.
- Laat de grafiek op je beeldscherm verschijnen. Bereken welke y -waarde bij $x = 9$ hoort.

Opgave V2

Gegeven zijn de formules $y = 2x - 3$ en $y = -0,5x + 2$.

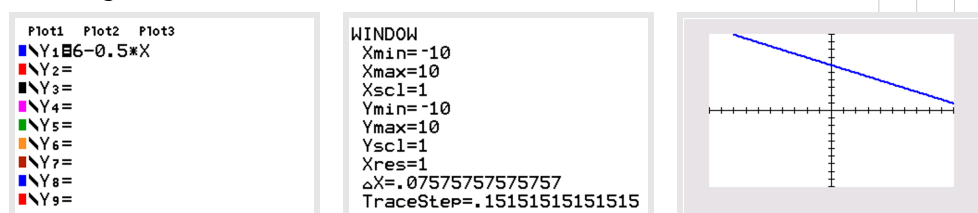
- Voer beide formules in op de grafische rekenmachine en laat de grafieken op je scherm verschijnen.
- Bepaal met behulp van de grafische rekenmachine de coördinaten van het snijpunt van de twee grafieken.

Uitleg

De formule $x + 2y = 12$ beschrijft een verband tussen x en y . Hierbij kun je een grafiek tekenen. Deze grafiek kun je ook met de grafische rekenmachine tekenen. Om hem te kunnen invoeren moet je de formule herschrijven in de vorm $y = \dots$. Je zegt ook wel dat y uitgedrukt moet worden in x .

$$\begin{aligned} x + 2y &= 12 \\ 2y &= 12 - x && \text{beide zijden } -x \\ y &= 6 - 0,5x && \text{beide zijden } /2 \end{aligned}$$

Je hebt de variabele y geschreven als functie van x . Nu kun je de formule in de grafische rekenmachine invoeren. In het **Practicum: Basistechnieken GR** leer je de eerste beginselen van het werken met de grafische rekenmachine.



Figuur 3.2

Opgave 1

Gegeven is de formule $4x + 2y = 10$.

- Herleid de formule tot y een functie is van x .
- Teken de grafiek bij de formule met de grafische rekenmachine.

Opgave 2

Gegeven zijn de twee formules $2x + y = 6$ en $x^2 + 2y = 12$.

- Herleid beide formules tot y een functie is van x .
- Voer beide formules in de grafische rekenmachine in en teken met de grafische rekenmachine de grafieken.
- Bepaal met de tabel op de grafische rekenmachine de snijpunten van beide grafieken.

Theorie en voorbeelden

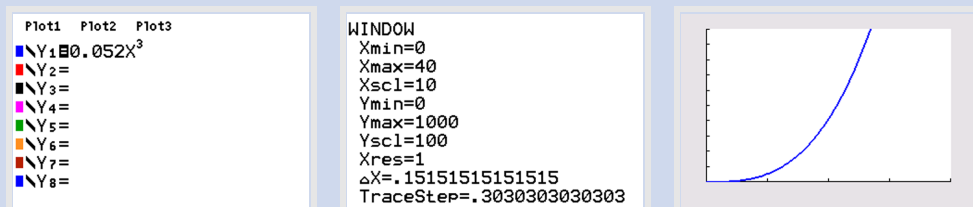
Om te onthouden

Bij een formule die het verband tussen de variabelen x en y beschrijft, noem je y een **functie** van x , wanneer deze formule de vorm $y = \dots$ heeft. In de bijbehorende grafiek komt y dan altijd op de verticale as.

- In de formule $y = x^2 + 4$ is y een functie van x .
- In de formule $P = 0,052v^3$ is P een functie van v .
- De formule $a + 2b = 6$ kun je op twee manieren schrijven:
 - $a = 6 - 2b$, met a als functie van b .
 - $b = 3 - 0,5a$, met b als functie van a .

Formules met twee variabelen van de vorm $y = \dots$ kun je in de grafische rekenmachine invoeren. Hoe je dat doet vind je in het **Practicum: Basistechnieken GR**.

Hier zie je bijvoorbeeld de grafiek van de functie $y = 0,052x^3$. Het maken van de grafiek van een functie op de grafische rekenmachine wordt **plotten** genoemd.



Figuur 3.3

Voorbeeld 1

Bij het toedienen van een medicijn wordt er een bepaalde stof in het bloed opgenomen. Voor de concentratie van het medicijn in het bloed gedurende de eerste twaalf uur na het toedienen kun je (bij benadering) de formule $C = \frac{14t}{t^2+4}$ gebruiken. C is de concentratie in milligram per liter en t de tijd in uren na het toedienen. Plot de grafiek en bepaal na hoeveel tijd er een maximale concentratie is.

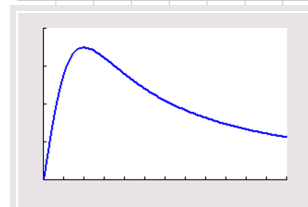
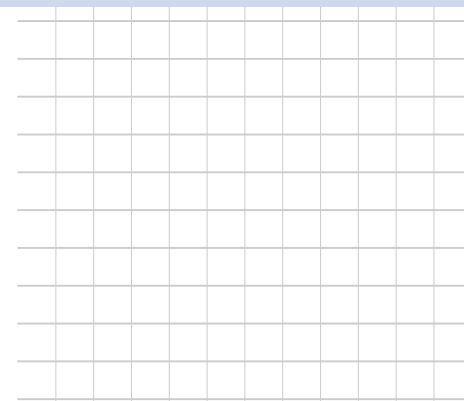
Antwoord

Je voert in de grafische rekenmachine de formule in als $Y1=(14X)/(X^2+4)$ (denk om de haakjes). Welke vensterinstellingen zijn nu geschikt?

Uit de gegevens volgt dat t begint bij $t = 0$, dus x is minimaal 0. De maximale waarde voor x volgt ook uit de gegevens, die is namelijk 12. Verder weet je dat $C \geq 0$, dus y is ook minimaal 0.

Als je een tabel met stapgrootte 1 maakt met de grafische rekenmachine zie je dat y maximaal 3,5 is. Dus voor de maximale waarde van y kun je 4 kiezen.

In de grafiek zie je dat er bij $t = 2$ een maximum is van $C = 3,5$. Dus de maximale concentratie is 3,5 mg/liter.



Figuur 3.4

Opgave 3

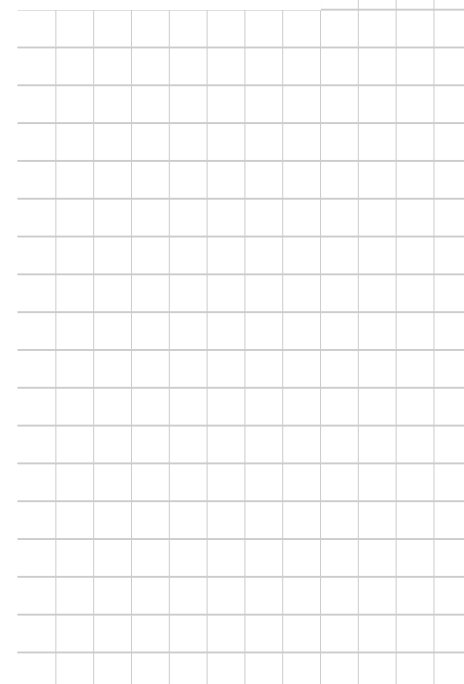
Bekijk **voorbeeld 1**. Stel dat voor het medicijn de formule $C = \frac{8t}{t^2+1}$ zou gelden. Plot nu de grafiek en bepaal voor welke t de concentratie maximaal is.

Opgave 4

Voor een kopieerapparaat bedraagt de maandelijkse huur € 250,00 waarbij nog een bedrag van € 0,06 per kopie komt. Op school staat zo'n apparaat speciaal voor gebruik door leerlingen.

De leerlingen betalen € 0,10 per kopie.

- a Geef een formule voor de prijs per kopie (P) als functie van het aantal kopieën (a).



- b Maak de grafiek van P op de grafische rekenmachine. Welke vensterinstellingen zijn geschikt?
- c Bij welke waarden van a maakt de school winst?

Voorbeeld 2

Als je 360 meter afrastering beschikbaar hebt voor een rechthoekig veld met een oppervlakte van 0,5 ha, dan geldt:

$$l \cdot b = 5000 \text{ en } 2l + 2b = 360$$

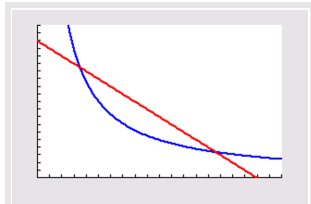
Hierin is l de lengte in meter en b de breedte in meter van de rechthoek. Zoek nu waarden voor l en b die aan beide formules voldoen.

Antwoord

Schrijf de formules als: $l = \frac{5000}{b}$ en $l = 180 - b$.

Voer ze in de grafische rekenmachine in als $Y1=5000/X$ en $Y2=180-X$. Om een goede grafiek te krijgen, kies je verstandige grenzen van de waarden van x (de breedte) en y (de lengte).

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=200
Xscl=10
Ymin=0
Ymax=200
Yscl=10
Xres=1
ΔX=.75757575757576
TraceStep=1.5151515151515
```



Figuur 3.5

Je ziet dat de grafieken twee snijpunten hebben. Om die snijpunten gaat het. Je kunt ze benaderen met de tabel van de grafische rekenmachine.

Je vindt dat $l \approx 34$ en $b \approx 146$ of $l \approx 146$ en $b \approx 34$. Dus het rechthoekig veld is dan ongeveer 146 meter bij 34 meter.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**. Stel dat je 400 meter afrastering beschikbaar hebt voor een rechthoekig stuk land van 0,75 hectare. Hoe groot worden dan de afmetingen van het rechthoekig stuk land?

Opgave 6

Bepaal met de grafische rekenmachine het snijpunt van de grafieken $x + y = 9$ en $y = x^3$ in één decimaal nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Een handelaar verkoopt een bepaald product. Het aantal producten q dat hij verkoopt hangt af van de prijs p die hij vraagt voor een product. Tussen p en q bestaat het verband $q = 240 - 15p$. De opbrengst R wordt gegeven door de formule $R = pq$.

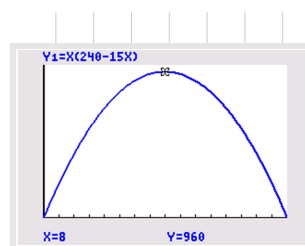
Combineer de formules zo, dat je R uitdrukt in p . Wat moet de handelaar voor prijs vragen voor een zo'n groot mogelijke opbrengst?

Antwoord

Omdat $q = 240 - 15p$ kun je $R = pq$ ook schrijven als $R = p(240 - 15p)$. Nu heb je R uitgedrukt in p en kun je met de grafische rekenmachine een grafiek tekenen.

Voer nu de formule $Y1=X(240-15X)$ in de grafische rekenmachine in. Als vensterinstellingen kun je $0 \leq x \leq 16$ en $0 \leq y \leq 1000$ kiezen. Je krijgt dan de grafiek die je hier ziet. Merk op dat als $q > 16$, dat dan q en R negatief zijn en dat kan niet.

Je ziet dat er bij $p = 8$ een maximum is van 960. Dus de handelaar moet € 8,00 vragen voor een product, dan is zijn opbrengst € 960,00.



Figuur 3.6

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**. Stel dat $q = 200 - 10p$ zou gelden als verband tussen de prijs p en het aantal verkochte producten q . Welke prijs moet de handelaar dan vragen voor een zo'n groot mogelijke opbrengst?

Opgave 8

- Gegeven zijn de formules $R = 2p + 3q + 20$ en $q = 2p - 3$. Druk R uit in p .
- Gegeven zijn de formules $K = -2t - 5v + 22$ en $t = -v - 3$. Druk K uit in v .
- Gegeven zijn de formules $2z = 3x - 4y$ en $z = 2x + 1$. Deze twee formules kun je combineren tot de vorm $y = ax + b$. Welke getallen zijn a en b ?
- Gegeven is de formule $Z = \frac{12x+18}{3y}$. Neem $Z = 2$ en druk y uit in x .

Verwerken

Opgave 9

Breng van de formules de grafieken in beeld. Denk om het gebruik van haakjes en de instellingen van het venster!

- $s = 250t - 4,9t^2$
- $k = 0,04 + \frac{200}{a}$
- $N = \frac{60}{30+0,5d^2}$
- $y = \sqrt{36 - x^2}$

Opgave 10

Een bal wordt omhoog geschoten. Voor de hoogte h in meter na t seconden geldt de formule $h = -3t^2 + 12t + 1,2$.

Plot de grafiek van h en bepaal hoe hoog de bal maximaal komt.

Opgave 11

Gegeven is de formule $4xy + 2x^2 = 100$. Herleid de formule naar de vorm $y = \dots$

Opgave 12

Voor een kopieerapparaat bedraagt de maandelijkse huur € 200,00 waarbij nog een bedrag van 4 eurocent per kopie komt. K stelt de totale kosten voor en a is het aantal kopieën dat er maandelijks (gemiddeld) wordt gemaakt.

- Schrijf de formule op voor K als functie van a .
- Iemand die een kopie maakt, betaalt 10 eurocent per kopie. Schrijf de formule op voor de inkomsten I als functie van a .
- Hoeveel kopieën moeten er per maand worden gemaakt als 10 eurocent per kopie kostendekkend is?

Opgave 13

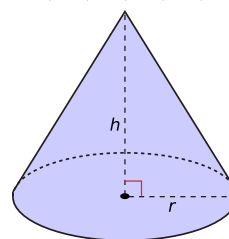
Boer Venema zet voor zijn koeien een rechthoekig stuk weiland af. Hij heeft daarvoor nog 200 meter gaas. Omdat het weiland tegen een brede rivier aan komt te liggen hoeft hij alleen de twee breedtes en de lengte van gaas te voorzien.

- Druk de lengte l van het weiland uit in de breedte b .
- Druk de oppervlakte A van het weiland uit in b .
- Breng met de grafische rekenmachine de grafiek bij de formule die je in b hebt gevonden in beeld. Bedenk van te voren de beste vensterinstellingen.
- Voor welke waarde van b is de oppervlakte van het weiland zo groot mogelijk?

Toepassen**Opgave 14: Een rechte kegel**

Voor de inhoud van een rechte kegel geldt: $V = \frac{1}{3}Gh$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte in centimeter is. Dit grondvlak is een cirkel met straal r in centimeter, dus $G = \pi r^2$.

- Welke formule beschrijft het verband tussen V , r en h ?
Voor een kegel met een inhoud van 1 liter kun je uit de formules een verband afleiden tussen r en h .
- Druk r uit in h en plot de grafiek.
- Bepaal de waarde van r waarvoor geldt: $h = 10$ cm. Benader het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

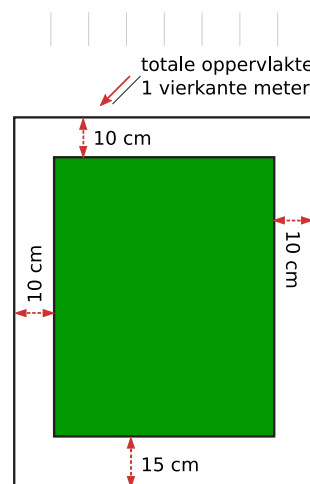


Figuur 3.7

Opgave 15: Affiche

Stel je voor dat een bedrijf affiches wil maken. Om op te vallen moet de oppervlakte van zo'n affiche 1 m^2 worden. Het affiche wordt zo bedrukt, dat er aan de beide zijanten en de bovenkant een witte strook van 10 cm overblijft. Aan de onderkant is die strook 15 cm. De bedrijfsleiding vraagt zich af welke afmetingen het affiche nu nog kan hebben. Ze komen daarbij op de formule: $(l + 25)(b + 20) = 10000$.

- Laat zien hoe ze aan deze formule komen en wat l en b betekenen.
- Herleid de formule en breng de grafiek bij deze formule in beeld.
- Bij nader inzien wil de bedrijfsleiding dat het bedrukte deel een vierkant wordt. Welke maat voor de affiches adviseer je nu?



Figuur 3.8

Testen

Opgave 16

Druk in de volgende formules eerst y uit in x en teken met de grafische rekenmachine de bijbehorende grafiek.

- $2x + 4y = 10$
- $3y(2x + 5) = 6$

Opgave 17

Gegeven zijn de formules $y = 2x - \frac{10}{2z}$ en $z = 2x + 1$. Druk y uit in x en plot de bijbehorende grafiek.

Opgave 18

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die bij een bepaalde temperatuur nodig is om 50% van het zaad van een plant te laten ontkiemen. Proefondervindelijk werd dit verband tussen de tijd t in dagen en de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ gevonden: $t = \frac{89}{T-2}$. Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$.

- Voor welke temperaturen heeft de formule betekenis?
- Plot de grafiek bij deze formule. Schrijf de instellingen van het beeldscherm op.
- Bij welke temperatuur duurt het vijf dagen totdat 50% van het zaad is ontkiemd?

Practicum: Grafische rekenmachine

Met een **grafische rekenmachine** moet je echt leren werken, zo'n machine heeft veel mogelijkheden. Met de volgende practica leer je de basistechnieken.

- [Basistechnieken TI84](#)
- [Basistechnieken TIInspire](#)
- [Basistechnieken Casio fx-CG50](#)
- [Basistechnieken HPprime](#)
- [Basistechnieken NumWorks](#)

Grafieken kun je ook goed maken met Excel. Het **rekenbladprogramma Excel** zit tegenwoordig op bijna elke PC. Met de volgende practica leer je enkele basistechnieken.

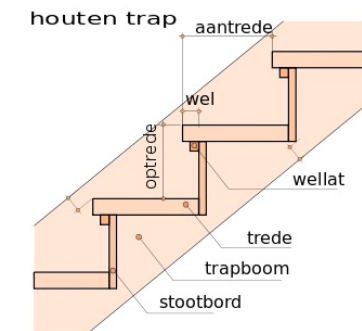
- [Grafieken bij tabellen](#)
- [Formules en grafieken](#)

1.4 Vergelijkingen

Inleiding

Een architect wil een goede trap ontwerpen. Hij gebruikt daarvoor de formule: $2 \cdot \text{optrede} + \text{aantrede} = \text{paslengte}$.

Hij gaat uit van een paslengte van 70 cm. Voor de optrede wil hij 16 cm nemen. Vult hij deze gegevens in de formule in, dan krijgt hij de vergelijking: $32 + \text{aantrede} = 70$. Hij kan dus als aantrede nemen: $\text{aantrede} = 70 - 32 = 38$ cm. Op deze manier heeft hij de vergelijking opgelost. Het getal 38 maakt de vergelijking kloppend: $32 + 38 = 70$.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- systematisch vergelijkingen met één variabele oplossen met al bekende oplossingsmethoden;
- vergelijkingen oplossen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- werken met variabelen (met 'letters');
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt in voorgaande jaren al vergelijkingen opgelost.

- a** Zet even je kennis op een rijtje: welke soorten vergelijkingen ken je en welke oplossingsmethoden ken je?

Een zuiver rechthoekig doosje met een vierkante bodem en een hoogte van 12 cm heeft een buitenoppervlakte (inclusief bodem en deksel) van 512 cm^2 .

- b** Welke afmetingen heeft dat doosje? Beantwoord deze vraag met behulp van een vergelijking.

Uitleg

De formule $4(x + 3) = -6 + x$ is een voorbeeld van een vergelijking. Bij deze vergelijking kun je een getal voor x zoeken dat de vergelijking waar maakt: aan beide zijden van het isgelijktteken komt er hetzelfde uit. Dat kun je doen met de balansmethode.

Je kunt bijvoorbeeld zo te werk gaan:

$$\begin{aligned}
 4(x + 3) &= -6 + x \\
 4x + 12 &= -6 + x && \text{linkerzijde haakjes wegwerken} \\
 4x &= -18 + x && \text{beide zijden } -12 \\
 3x &= -18 && \text{beide zijden } -x \\
 x &= -6 && \text{beide zijden } /3
 \end{aligned}$$

Je kunt dit antwoord nog controleren door aan beide zijden van de gegeven vergelijking voor x het getal -6 in te vullen.

Opgave 1

Los de vergelijkingen op met de balansmethode.

- a $3t - 400 = 700$
 b $3t - 400 = 700 - 2t$
 c $-4x + 5 = 4x - 11$

Opgave 2

Los de vergelijkingen op met de balansmethode. Rond af op twee decimalen.

- a $2300 - 0,15 \cdot p = 1600 + 0,42 \cdot p$
 b $\frac{x-3}{4} = \frac{1}{5}(10 - 2x)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Formules zoals $2x + 3 = 10$, of $x^2 + 5x + 6 = 0$ zijn **vergelijkingen**. Je kunt waarde(n) zoeken die de vergelijking kloppend maken, dat heet het **oplossen van een vergelijking**.

Vergelijkingen kun je systematisch oplossen door herschrijven. Je gebruikt dan algebraïsche methoden, zoals:

- de **balansmethode**, waarbij je aan beide zijden van het 'isgelijktteken'
 - hetzelfde optelt of aftrekt;
 - met hetzelfde vermenigvuldigt of door hetzelfde deelt (maar niet 0).
- de **terugrekenmethode**, waarbij je bewerkingen ongedaan maakt door het tegenovergestelde te doen:
 - optellen maak je ongedaan door aftrekken (en omgekeerd);
 - vermenigvuldigen maak je ongedaan door delen (en omgekeerd);
 - machten maak je ongedaan door worteltrekken (en omgekeerd).
- **ontbinden in factoren**, waarbij je gebruik maakt van het feit dat een vergelijking van de vorm $a \cdot b = 0$ gelijkwaardig is met $a = 0 \vee b = 0$. Het teken $\vee$ betekent dat je deze uitdrukking moet lezen als $a = 0$ en/of $b = 0$ (dus $a = 0$ of $b = 0$ of beide).

Je kunt niet altijd een vergelijking via algebraïsche methoden oplossen. Dan kun je nog denken aan **inklemmen**: je zoekt de oplossing door verschillende waarden te proberen op een steeds kleiner

zoekgebied. De grafische rekenmachine heeft daar diverse routines voor ingebouwd, zie het **Practicum**.

Als er staat bereken **algebraïsch** of los algebraïsch op, dan moet je de opdracht stap voor stap met behulp van algebra oplossen. Inklemmen is dan bijvoorbeeld niet toegestaan.

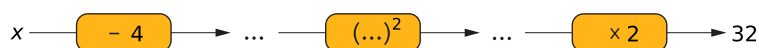
Als er staat bereken **exact** of los exact op, dan moet je de opdracht ook stap voor stap oplossen en mag je niet afronden.

Voorbeeld 1

In de vergelijking $2(x - 4)^2 = 32$ komt de onbekende x maar op één plek voor. Je kunt hem oplossen met terugrekenen.

Antwoord

Je zoekt eerst uit hoe je heen rekt vanuit x :



Figuur 4.2

Vervolgens ga je terugrekenen:



Figuur 4.3

Je vindt: $x = \pm\sqrt{\frac{32}{2}} + 4$ en dus $x = 0 \vee x = 8$. Controleer door in te vullen.

Opgave 3

- Los de vergelijking $2 \cdot \sqrt{x+3} = 4$ op door terugrekenen.
- Probeer ook de vergelijking $3 \cdot \sqrt{x+2} + 5 = 2$ op te lossen met terugrekenen.
- Waarom is het bij wortelvergelijkingen extra belangrijk om je antwoord te controleren?

Opgave 4

Los de vergelijkingen op door terugrekenen.

- $3t - 400 = 700$
- $(3t - 20)^2 = 1600$
- $3 \cdot p^3 = 81$
- $3 \cdot \sqrt{2x - 4} = 9$
- $\sqrt{x - 4} - 2 = -3$

Voorbeeld 2

Los deze twee vergelijkingen op met ontbinden in factoren:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- $x^2 = 2x$

Antwoord

De eerste vergelijking kun je met de somproductmethode oplossen. Je zoekt twee getallen waarvan het product +6 is en de som -5. In de tabel zie je dat de getallen -2 en -3 voldoen.

+6	
1	6
2	3
-2	-3 ← -5
-1	-6

Figuur 4.4

De eerste vergelijking gaat zo:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 5x + 6 &= 0 \\
 (x - 2)(x - 3) &= 0 \\
 x - 2 &= 0 \vee x - 3 = 0 \\
 x &= 2 \vee x = 3
 \end{aligned}$$

De tweede vergelijking gaat zo:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 2x \\
 x^2 - 2x &= 0 \\
 x(x - 2) &= 0 \\
 x &= 0 \vee x - 2 = 0 \\
 x &= 0 \vee x = 2
 \end{aligned}$$

Opgave 5

Los de vergelijkingen op door ontbinden in factoren.

- $0,5x^2 = 4x$
- $k^2 + 5k - 6 = 0$
- $8p - p^2 = 0$
- $x^2 = 4x$
- $x^2 = x + 12$
- $x(x - 2) = 3x - 6$

Voorbeeld 3

Niet alle vergelijkingen kun je met de balansmethode, door terugrekenen of ontbinden in factoren systematisch oplossen. De oplossing vinden door inklemmen werkt daarentegen altijd wel. Je moet dan van tevoren een idee hebben van het gebied waarin de oplossing is te vinden.

De vergelijking $x + x^2 = 10$ kun je bijvoorbeeld oplossen met inklemmen. Maar de rekenmachine beschikt ook over een speciale routine om snijpunten van twee grafieken te vinden. Bekijk het **Practicum**. Bepaal de snijpunten van de vergelijking $x + x^2 = 10$.

Antwoord

Eerst maak je de grafieken van $y_1 = x + x^2$ en $y_2 = 10$ op de grafische rekenmachine. Breng ze zo in beeld dat alle snijpunten zichtbaar zijn. De grafieken snijden elkaar tweemaal. De vergelijking heeft twee oplossingen.

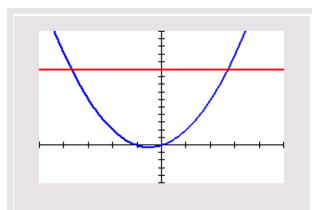


TABLE SETUP
Tb1Start=2
ΔTb1=.1
Indpnt: **Auto** Ask
Depend: **Auto** Ask

TABLE SETUP
Tb1Start=2.7
ΔTb1=.01
Indpnt: **Auto** Ask
Depend: **Auto** Ask

Figuur 4.5

Voor de positieve oplossing moet je zoeken tussen 2 en 3. Stel de tabel in op stappen (voor x) van 0,1. Je ziet dat je verder moet zoeken tussen 2,7 en 2,8. Het zoekgebied wordt kleiner, je klemt de oplossing in.

Stel vervolgens een stapgrootte van 0,01 in en zoek tussen 2,70 en 2,80. Nu zie je dat de oplossing tussen 2,70 en 2,71 ligt, het dichtst bij 2,70. Zo vind je op twee decimalen nauwkeurig: $x \approx 2,70$. Als een nauwkeuriger oplossing wordt verlangd, moet je nog doorzoeken tussen 2,700 en 2,710.

Op dezelfde manier bepaal je de andere oplossing.

Op twee decimalen nauwkeurig is de volledige oplossing: $x \approx 2,70 \vee x \approx -3,70$.

Bekijk in het practicum ook hoe je rekenmachine de snijpunten van twee grafieken kan berekenen.

Opgave 6

Los de vergelijkingen op met de grafische rekenmachine. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

- a $x^3 + 2x = 16$
- b $x + \sqrt{x} = 10$
- c $l + \frac{10}{l} = 10$
- d $\frac{300}{p+4} = 20$

Verwerken

Opgave 7

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

- a $2x - 34 = -x + 2$
- b $5x - 3(x - 5) = 8 + 3x$
- c $(2x - 5)^2 = 64$
- d $\sqrt{x + 4} = 20$
- e $2x^2 = 8x$
- f $x^2 - 4x - 32 = 0$

Opgave 8

Los de vergelijking $\sqrt{x} = 8 - x$ op door inklemmen met behulp van de grafische rekenmachine. Zoek alle oplossingen en geef benaderingen in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 9

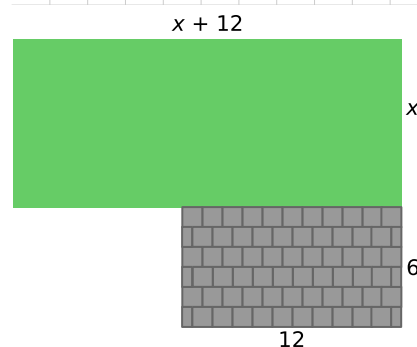
Een bedrijf maakt gebruik van de formules $R = -q^2 + 200q$ en $K = 10q$, waarbij is q het aantal geproduceerde producten, R de opbrengst (in €) en K de kosten (in €).

- De winst W bereken je door de opbrengst te verminderen met de kosten. Geef een formule voor W .
- Het bedrijf heeft € 1000,00 kosten gemaakt. Hoe groot is de winst?
- Bij welke productie maakt het bedrijf geen winst en geen verlies?
- Hoeveel producten kan het bedrijf het beste maken?

Opgave 10

Bekijk het bovenaanzicht van een tuin.

De tuin bestaat uit een rechthoekig terras en een rechthoekig grasveld. Gegeven is dat het terras 12 meter bij 6 meter is en het grasveld $x + 12$ meter bij x meter. De totale oppervlakte van de tuin is 261 m^2 . Bereken algebraïsch x .



Figuur 4.6

Opgave 11

Stel je voor dat iemand van een hoog gebouw een steentje laat vallen. Hij staat 381 m boven de grond. Onder invloed van de zwaartekracht valt een steen eenparig versneld (de luchtweerstand laat je buiten beschouwing). Natuurkundigen hebben daarvoor een rekenmodel bedacht. Daarin hangen de afgelegde weg s (in meter) en de snelheid v (in meter per seconde) af van de tijd t (in seconden) volgens de formules $s = 4,9t^2$ en $v = 9,8t$.

- Geef een formule voor de hoogte h van het steentje boven de grond als functie van t .
- Bereken op één decimaal na hoeveel seconden het steentje op de grond komt.
- Bereken de snelheid waarmee het steentje op de grond komt. Geef je antwoord zowel in m/s als in km/h.

Toepassen

Opgave 12: Probleem met boswal

Een boer wordt door de gemeente gevraagd om een stuk land te voorzien van een boswal van 4 meter breed. Het stuk land is zuiver vierkant. Het grenst aan één kant al aan het bos, zodat er maar aan drie kanten een strook af hoeft voor de boswal. 'Ik houd zo maar de helft van mijn land over,' verzucht de boer. Als dat waar is, hoe groot is dan de oppervlakte van het land dat de boer overhoudt?

Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

Opgave 13: Meewind en tegenwind

Als je in de ochtend van huis naar school fietst en in de middag terugfietst, kan de wind invloed hebben op je totale reistijd. Hoe dat zit, onderzoek je in de rest van deze opgave.

Sylvia woont 10 km van school. Zij gaat altijd op de fiets naar school. We gaan ervan uit dat als er geen wind is, haar snelheid constant 20 km/h is. Haar totale reistijd is op zo'n schooldag dus 1 uur. Meestal waait het echter. We veronderstellen dat Sylvia altijd wind mee heeft op de heenweg en wind tegen op de terugweg en dat de windkracht w de hele dag constant is. Dan is Sylvia's snelheid op de heenweg $20 + w$ km/u en op de terugweg $20 - w$ km/h. Hierbij geldt $0 \leq w \leq 20$. Op een dag geldt $w = 5$. Sylvia's totale reistijd is die dag langer dan 1 uur.

- a** Bereken hoeveel minuten haar totale reistijd die dag langer is dan 1 uur.

Sylvia's totale reistijd t in uren wordt gegeven door de formule:

$$t = \frac{400}{400 - w^2}$$

De formule voor t kan worden gevonden door een formule voor de reistijd voor de heenweg en een formule voor de reistijd voor de terugweg op te stellen en deze formules bij elkaar op te tellen.

- b** Stel deze formules op en toon daarmee aan dat de bovenstaande formule voor T juist is.

Op een dag is Sylvia's totale reistijd 1 uur en 20 minuten.

- c** Bereken de waarde van w op die dag.

Met de formule voor Sylvia's totale reistijd kun je zonder te rekenen beredeneren dat haar totale reistijd op een dag met wind groter is dan op een dag zonder wind.

- d** Geef die redenering.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2014 - II)

Testen

Opgave 14

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

- a $1,25t + 5,50 = 1,85t$
- b $0,15(p - 2)^2 = 1,35$
- c $12 - \sqrt{4 + x^2} = 0$
- d $3g^2 - 6g = 360$

Opgave 15

Los de vergelijking op met behulp van de grafische rekenmachine (eventuele benaderingen in één decimaal nauwkeurig).

$$0,12q + \frac{600}{q} = 30$$

Opgave 16

Voor de totale oppervlakte A van een cilindervormig groenteblik met straal r en hoogte h geldt: $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

- a Leg uit hoe je deze formule zelf kunt afleiden.
- b Bereken in cm^2 nauwkeurig de oppervlakte van een groenteblik met een diameter van 20 centimeter en een hoogte van 30 centimeter.
- c Een groenteblik met een oppervlakte van 1000 cm^2 heeft een hoogte van 20 cm. Bereken de diameter in millimeter nauwkeurig.
- d Van een groenteblik met een oppervlakte van 1000 cm^2 zijn de hoogte en de diameter even groot. Bereken de diameter in millimeter nauwkeurig.

Practicum

Bekijk in de volgende practica hoe je **vergelijkingen kunt oplossen met je grafische rekenmachine**.

- [Basistechnieken TI84](#)
- [Basistechnieken TIInspire](#)
- [Basistechnieken Casio fx-CG50](#)
- [Basistechnieken HPprime](#)
- [Basistechnieken NumWorks](#)

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode, terugrekenen, of ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.5 Ongelijkheden

Inleiding

Als je wilt weten bij welke windsnelheid een windmolen meer dan bijvoorbeeld 20 kW aan vermogen levert, dan moet je een ongelijkheid oplossen. Hetzelfde geldt als je wilt weten vanaf hoeveel gereden kilometers per jaar een auto op benzine duurder is dan een auto op diesel. Over het oplossen van ongelijkheden gaat dit onderdeel.

Je leert in dit onderwerp

- ongelijkheden systematisch oplossen.

Voorkennis

- grafieken maken met de grafische rekenmachine bij formules die het verband tussen twee variabelen beschrijven;
- vergelijkingen systematisch oplossen, zowel algebraïsch als met de grafische rekenmachine.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de wielengte (dat is de halve diameter van de rotor) en van de windsnelheid v .

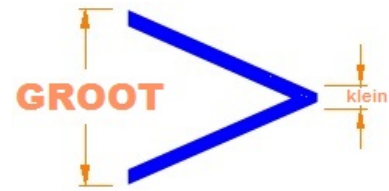
Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en 0,052 een getal dat afhangt van het type molen.

- Stel, je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Welke ongelijkheid hoort daar bij?
- Hoe ga je zo'n ongelijkheid oplossen?

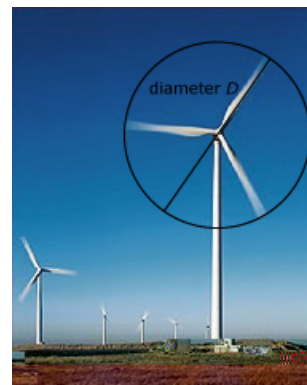
Uitleg

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de wielengte en van de windsnelheid v .

Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en 0,052 een getal dat afhangt van het type molen. Stel, je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Daarbij hoort de ongelijkheid: $0,052v^3 > 20$.



Figuur 5.1

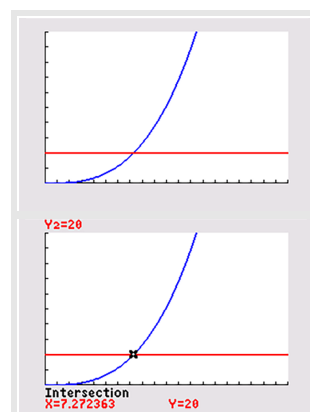


Figuur 5.2

Het oplossen van deze ongelijkheid gaat prima met de grafische rekenmachine:

- Je voert $Y1=0.052X^3$ en $Y2=20$ in en brengt ze goed in beeld.
- Je bepaalt het snijpunt van beide grafieken: $(7,27; 20)$ met je grafische rekenmachine.
- Je leest de oplossing van de ongelijkheid uit de figuur af: $v > 7,27$.

Belangrijk is nog het aantal decimalen waarop je moet afronden. Het gegeven antwoord is op twee decimalen nauwkeurig juist. Moet je echter op één decimaal nauwkeurig afronden, dan is het antwoord: $v > 7,3$. Je weet dan dat je antwoord ergens boven de 7,25 ligt.



Figuur 5.3

Opgave 1

In de uitleg zie je hoe de ongelijkheid $0,052v^3 > 20$ wordt opgelost. Daarbij wordt de grafische rekenmachine gebruikt.

- Voer deze oplossing zelf uit.
Bij een algebraïsche aanpak bereken je eerst de oplossingen van de vergelijking $0,052v^3 = 20$ met behulp van terugrekenen.
- Laat zien dat je dan dezelfde oplossing vindt.
- Wat is het voordeel bij deze formule van een algebraïsche aanpak?

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $y_1 = 0,01x(x^2 - 400)$ en $y_2 = x$. Je wilt oplossen $y_1 > y_2$.

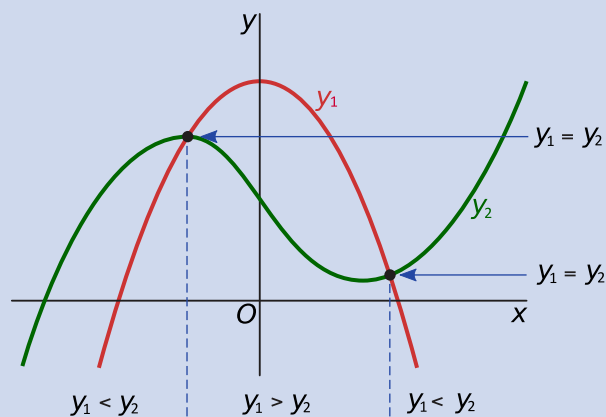
- Hoe moet je het venster van de grafische rekenmachine instellen om goede grafieken bij deze ongelijkheid te krijgen? Hoeveel snijpunten hebben beide grafieken?
- Los nu de ongelijkheid met de grafische rekenmachine op, op twee decimalen nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een uitdrukking zoals $y_1 > y_2$ of $y_1 < y_2$ heet een **ongelijkheid**. Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.

- Eerst voer je beide functies in de grafische rekenmachine in.
- Vervolgens breng je ze goed in beeld. Alle snijpunten moeten zichtbaar zijn!
- Dan bereken je de coördinaten van de snijpunten. Dat kan met de grafische rekenmachine, maar vaak ook door de vergelijking $y_1 = y_2$ algebraïsch op te lossen. En soms is dit veel handiger, of wordt het gewoon zo gevraagd.
- Vervolgens lees je de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af. Let daarbij goed op de gewenste nauwkeurigheid!



Figuur 5.4

Voorbeeld 1

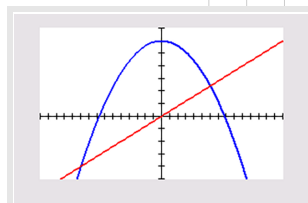
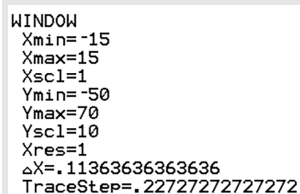
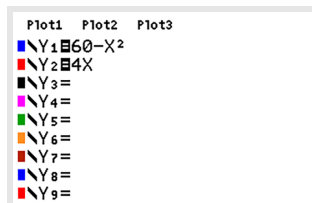
Bekijk de applet

Los op: $60 - x^2 \geq 4x$.

Antwoord

Je bekijkt eerst de grafieken van $y_1 = 60 - x^2$ en $y_2 = 4x$. Bij de meeste waarden van x zijn de functiewaarden verschillend. Alleen bij de snijpunten zijn de functiewaarden gelijk.

De coördinaten van de snijpunten vind je door op te lossen: $60 - x^2 = 4x$. Je vindt: $x = -10 \vee x = 6$. Lees nu uit de figuur af dat de oplossing van de ongelijkheid is: $-10 \leq x \leq 6$.



Figuur 5.5

Opgave 3

In het **Voorbeeld 1** zie je hoe je een ongelijkheid systematisch oplost met de grafische rekenmachine. Je gaat nu zelf de ongelijkheid $60 - x^2 < 4x$ algebraïsch oplossen.

- Los de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ algebraïsch op.
- Schrijf de juiste oplossing van de ongelijkheid op. (Hij bestaat uit twee delen!)

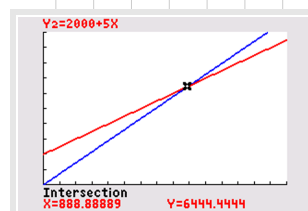
Voorbeeld 2

Een verfhandelaar heeft een mengmachine van € 2000,00 gekocht. De inkoopprijs van de verf en de kosten van het mengproces komen samen op € 5,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 7,25 per liter. Hij maakt winst als de opbrengst TO groter is dan de totale kosten TK . Met voorraadkosten wordt geen rekening gehouden. Bereken algebraïsch vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst gaat maken.

Antwoord

Er geldt: $TK = 2000 + 5q$ en $TO = 7,25q$. Hierin is q de verkochte hoeveelheid liter verf. Er moet gelden dat $TO > TK$, dus $7,25q > 2000 + 5q$. Met de grafische rekenmachine breng je de grafieken van TO en TK goed in beeld. (Het snijpunt moet zichtbaar zijn.) Vervolgens bereken je de coördinaten van dit snijpunt algebraïsch: $7,25q = 2000 + 5q$ geeft $2,25q = 2000$ en dus $q \approx 888,9$.

In de grafiek zie je dat de handelaar winst maakt als $q \geq 889$. Dus als hij 889 liter verf of meer verkoopt, maakt hij winst.



Figuur 5.6

Opgave 4

Een concurrent van de verfhandelaar uit het voorbeeld koopt een mengmachine van € 3000,00. De inkoopprijs en de kosten van het mengproces samen is € 4,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 8,25 per liter.

Bereken algebraïsch vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst maakt.

Voorbeeld 3

Een bedrijf gebruikt de formule $N = -2q^3 + 20q^2$ voor de netto winst N (in duizenden euro) bij de verkoop van een bepaald product. q is het verwachte aantal verkochte producten per maand in honderdtallen.

Hoeveel van deze producten worden er in een bepaalde maand verkocht als de netto winst meer dan € 200000,00 bedraagt?

Antwoord

Je moet de ongelijkheid $-2q^3 + 20q^2 > 200$ oplossen. Daarvoor gebruik je de grafische rekenmachine.

Voer in: $Y1 = -2X^3 + 20X^2$ en $Y2 = 200$. Als venster kun je $0 \leq x \leq 10$ bij $0 \leq y \leq 300$ nemen.

De coördinaten van de twee snijpunten kun je met de grafische rekenmachine uitrekenen. Je vindt dat bij $q \approx 4,126$ en $q \approx 8,670$ de winst 200 duizendtallen is. Dus als er vanaf 413 tot en met 866 van deze producten worden verkocht per maand is er een netto winst van meer dan € 200000,00.



Figuur 5.7

Opgave 5

Bekijk **voorbeeld 3**. Hoeveel van deze producten worden er in een bepaalde maand verkocht als de netto winst meer dan € 100000,00 bedraagt?

Opgave 6

Een bedrijf maakt gebruik van de winstformule

$W = -0,001q^3 + 2q^2 + q$, waarbij W de winst in euro's is en q het aantal geproduceerde producten.

- Plot de grafiek van W . Welke vensterinstellingen gebruik je?
- Is het verstandig van het bedrijf om 2200 producten te maken?
- Het bedrijf wil meer dan een miljoen euro winst maken. Hoeveel producten moet men dan maken?

Verwerken**Opgave 7**

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- $x^3 > x$
- $x^3 \leq 80x - 2x^2$

Opgave 8

Los de ongelijkheid $\frac{t}{t^2+1} < 0,25$ op. Rond af op één decimaal.

Opgave 9

Gegeven is de functie $y = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.

- Los algebraïsch op: $y \leq 0$.
- Los op: $y < 36$.

Opgave 10

Twee kaarsen worden tegelijkertijd aangestoken. Voor kaars I geldt de formule $L_I = 20 - 2\sqrt{10t}$ en voor kaars II de formule $L_{II} = 30 - 4t$. In deze formules is L de lengte van de kaars in centimeters en t de tijd in uren.

- Welke kaars is als eerste opgebrand?
- Stel beide kaarsen worden tegelijk aangestoken. Hoelang is kaars II groter dan kaars I?

Opgave 11

Een bedrijf maakt gebruik van de winstformule

$W = -0,5q^3 + 5q^2 + 12q - 10$. Hierbij is q het aantal geproduceerde producten in honderdtallen en W de winst in duizenden euro.

- Bereken de winst als er 1000 producten worden geproduceerd.
- Het bedrijf wil dat de winst groter is dan € 180000,00. Is dit realistisch?

- c Als het bedrijf een winst wil van meer dan honderdduizend euro, hoeveel producten moet men dan produceren?
- d Bereken bij welke productie er een maximale winst is.

Opgave 12

Twee auto's rijden op de A1, beide met een (ongeveer) constante snelheid. Bestuurder A houdt een snelheid van 110 km/h aan. Bestuurder B rijdt met 120 km/h. Als bestuurder B bij de IJsselbrug bij Deventer komt, ligt hij 24 km achter op bestuurder A. Het tijdstip waarop dat gebeurt, is $t = 0$. De afstand (in kilometers) tot Deventer wordt voorgesteld door $a(t)$.

- a Stel bij beide auto's een lineaire functie voor a op.
- b Bereken na hoeveel minuten auto A door B wordt ingehaald.
- c Bereken algebraïsch hoe lang hun onderlinge afstand minder dan 4 km is.

Toepassen

Opgave 13: Voordelige auto?

Een bedrijf maakt reclame: je rijdt al een bepaalde auto voor € 10,00 per dag! Stel je hebt vanaf 1 januari deze auto en je betaalt hiervoor € 10,00 per dag. Daarnaast heb je onderhoudskosten: voor 1,5 eurocent per gereden kilometer kun je daarvoor een abonnement afsluiten waar vrijwel alle onderhoudskosten mee worden afgedekt. Je hebt dan dus alleen nog benzinekosten. Je kunt met 1 L benzine 15 km rijden en 1 L benzine kost ongeveer € 1,80.

- a Hoeveel eurocent per kilometer ben je kwijt aan benzine en onderhoud samen?
- b Hoeveel kost je deze auto per jaar als je er 16000 km mee rijdt?
- c Stel een ongelijkheid op bij de vraag: hoeveel kilometer per jaar mag je maximaal met deze auto rijden als je minder dan € 6000,00 kwijt wilt zijn dat jaar? Los daarna die ongelijkheid algebraïsch op.
- d Eigenlijk geldt het onderhoudsabonnement van 1,5 eurocent per gereden kilometer pas vanaf 15000 km/jaar. Rijd je minder, dan betaal je alsof je 15000 km/jaar rijdt. Stel het complete functievoorschrift op voor de jaarlijkse kosten K als functie van het aantal gereden kilometers.

Opgave 14: Beleggen

Veel mensen beleggen in aandelen. Daarvoor geven ze een opdracht aan een zogenoemde 'broker'. Die regelt bij een opdracht de aankoop (of de verkoop) van de door de klant gewenste aandelen. Voor het uitvoeren van een opdracht brengt de broker kosten in rekening. Broker Haag hanteert voor een opdracht een tarief volgens de formule: $K = 0,0045 \cdot w + 4$. Hierbij is K de kosten in euro en w de totale waarde van de aandelen in euro op het moment van aankoop of verkoop. De klant moet echter altijd ten minste € 12,00 voor een opdracht betalen.

Een klant koopt via Haag 150 aandelen die per stuk € 19,18 kosten. Een tijd later is de waarde van deze aandelen gestegen naar € 21,44 per stuk. De klant neemt het besluit alle aandelen via Haag te verkopen. Voor de berekening van zijn winst houdt de klant rekening met de kosten van aankoop en verkoop.

- a** Bereken hoeveel winst de klant heeft behaald op de aandelen.

Handelaar Van der Meulen is ook een broker. Hij hanteert als tarief: $K = 0,004 \cdot w + 7$. Hierbij is K weer de kosten in euro en w de totale waarde van de aandelen in euro op het moment van aankoop of verkoop. De klant betaalt bij Van der Meulen per opdracht nooit meer dan € 46,00. Als de totale waarde van de aandelen hoog genoeg is, nemen de kosten die Van der Meulen in rekening brengt, niet verder meer toe.

- b** Bereken hoe groot de totale waarde van de aandelen dan ten minste moet zijn.

Als een klant een aandelenopdracht wil plaatsen waarvan de totale waarde behoorlijk groot is, kan hij dat beter doen bij Van der Meulen dan bij Haag. Immers, bij Van der Meulen is hij nooit meer kwijt dan € 46. In veel andere gevallen is Haag echter goedkoper.

- c** Onderzoek bij welke totale aandelenwaarden de klant met zijn opdracht goedkoper uit is bij Haag dan bij Van der Meulen.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2008, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 15

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- a** $6 - x < x^2$
b $(2x - 6)^2 < 16$

Opgave 16

De afstand Utrecht-Enschede is voor een fietser 144 km. Fietser A gaat met 18 km/h van Utrecht naar Enschede. Fietser B gaat met 24 km/h van Enschede naar Utrecht. Beide fietsers starten tegelijkertijd.

- a** Je wilt weten hoe lang fietser A dichterbij Utrecht is dan fietser B. Welke ongelijkheid hoort daar bij als t de tijd in uren is?
b Los de ongelijkheid algebraïsch op. Rond af op drie decimalen nauwkeurig.
c Beantwoord de vraag in minuten nauwkeurig.

Opgave 17

Gegeven zijn de functies $y_1 = 4 - x^2$ en $y_2 = (x - 1)^2$.

- a** Bereken met de grafische rekenmachine de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van y_1 en y_2 op twee decimalen nauwkeurig.
b Los op: $y_1 \geq y_2$.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Werken met formules**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- formule — variabele — grootheid — eenheid
- herschrijven — uitdrukken in — haakjes wegwerken — ontbinden in factoren
- functie
- vergelijking — vergelijking oplossen — balansmethode — terugrekenen — inklemmen
- ongelijkheid — ongelijkheid oplossen

Activiteitenlijst

- soorten formules herkennen — grafieken maken bij verbanden tussen twee variabelen
- formules herschrijven — de éne variabele uitdrukken in de andere — formules combineren
- formules invoeren in de grafische rekenmachine en grafieken erbij maken
- vergelijkingen oplossen met alle bekende methoden
- ongelijkheden oplossen

Achtergronden

Het gebruik van formules is een betrekkelijk recente 'uitvinding'. De Franse amateurwiskundige **François Viète (1540–1603)** was de eerste die een systematische symbolische notatie voor algebraïsche problemen bedacht. Hij gebruikte letters voor onbekenden: klinkers voor variabelen en medeklinkers voor constanten (die hij als eerste coëfficiënten noemde). Zijn bijdrage aan de theorie van het oplossen van vergelijkingen is mede daardoor heel groot, want voor die tijd moesten alle oplossingsmethoden in woorden worden omschreven...

Al eerder had de theoloog **Nicole d'Oresme (1323–1382)** voor zijn natuurkundige onderzoeken de grafiek uitgevonden. Maar pas nadat **René Descartes (1596–1650)** de beschrijving van rechte en kromme lijnen met behulp van formules bedacht, werd het gebruik van grafieken zoals wij die tegenwoordig kennen langzamerhand gemeengoed. Descartes gebruikte voor variabelen letters achterin het alfabet (vaak x , y en z) en voor constanten letters voor in het alfabet. Dat doen wiskundigen tegenwoordig nog steeds... Daarom weet je dat de formule $y = ax + b$ een (lineair) verband beschrijft tussen x en y , waarin a en b constanten zijn.



Figuur 6.1

Testen

Opgave 1

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen nauwkeurig.

- a $610 + 0,2q = 55 - 0,3q$
- b $2 - 8(x - 2) = 4 + 3(4 - x)$
- c $-0,15(x + 25)^2 + 15 = 0$
- d $2\sqrt{2x - 4} = 10$
- e $k^2 - k = 90$
- f $2x^2 + 10x = 12$

Opgave 2

Los de vergelijking $x^2 + \sqrt{2x} = 20$ op met behulp van de grafische rekenmachine. Geef een benadering in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

- a Gegeven is de formule $\frac{3x-9}{2} = \frac{3y}{4}$. Druk y uit in x .
- b Gegeven zijn de formules $K = 3a - 2b + 22$ en $b = -a + 8$. Druk K uit in a .

Opgave 4

Vanaf een toren wordt een vuurpijl afgeschoten. De hoogte h van de vuurpijl hangt af van de tijd t dat deze onderweg is. Er geldt: $h = 100 + 40t - 5t^2$. Hierin is h in meter en t in seconden gemeten.

- a Breng de grafiek van h in beeld op de grafische rekenmachine.
- b Op welke hoogte boven de begane grond werd de vuurpijl afgeschoten? Na hoeveel seconden was de vuurpijl weer op diezelfde hoogte?
- c Na hoeveel seconden was de vuurpijl op het hoogste punt in zijn baan? Hoeveel meter boven de begane grond was hij op dat moment?
- d Na hoeveel seconden kwam de vuurpijl op de grond terecht?
- e Kun je met deze gegevens de baan van de vuurpijl in beeld brengen? Verklaar je antwoord.

Opgave 5

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in doosjes met een vierkante bodem. Voor een doosje gebruikt hij 800 cm^2 karton. Ga ervan uit dat een doosje precies de vorm van een balk heeft.

- a De hoogte van zo'n doosje wordt aangegeven met h en de zijden van het grondvlak met x . Laat zien dat het verband tussen h en x beschreven wordt door de formule: $4xh + 2x^2 = 800$.
- b De verpakkingmachine laat een maximale hoogte van 12 centimeter toe. Bepaal de waarde van x bij $h = 12 \text{ cm}$. Geef de benadering in mm nauwkeurig.

- c Herleid de formule $4xh + 2x^2 = 800$ tot h een functie is van x en bereken welke h bij $x = 8$ hoort.

Toepassen

Opgave 6: Koolmonoxide-uitstoot

Koolmonoxide (CO) is één van de stoffen die via de uitlaat van een auto de lucht inkomt. De hoeveelheid CO die uitgestoten wordt is afhankelijk van de temperatuur van de motor en van de rijsnelheid.

Voor de CO-uitstoot bij de warme motor geldt: $u = 4,4 + \frac{196,0}{v}$. Bij

een koude motor geldt: $u = 6,9 + \frac{298,5}{v}$. Hierin is u de uitstoot in gram per kilometer en v de snelheid in kilometer per uur.

- a Hoe kun je aan de formules zien dat de uitstoot per kilometer afneemt als de snelheid toeneemt?

- b De uitstoot u van een koude motor bedroeg 14 g/km. Hoe hard reed deze auto?

Iemand is geïnteresseerd in het verschil tussen de uitstoot bij een koude en bij een warme motor. Hij onderzoekt hoeveel procent de uitstoot bij een koude motor meer is dan bij een warme motor. Dat percentage hangt af van de snelheid.

- c Hoe groot is dat percentage bij een snelheid van 30 kilometer per uur?

Er bestaan ook formules waarbij de CO-uitstoot gegeven wordt afhankelijk van de ritlengte en de rijtijd. Voor een warme benzinemotor geldt: $u_{\text{tot}} = 4,4L + 0,054t$. Hierin is u_{tot} de totale hoeveelheid CO in gram uitgestoten tijdens de rit, L de ritlengte in kilometers, t de rijtijd in seconden en 0,054 is afgerond op drie decimalen.

- d Laat zien hoe deze formule kan ontstaan uit de eerste formule voor de CO-uitstoot bij een warme motor.

Opgave 7: Maximaal bakje

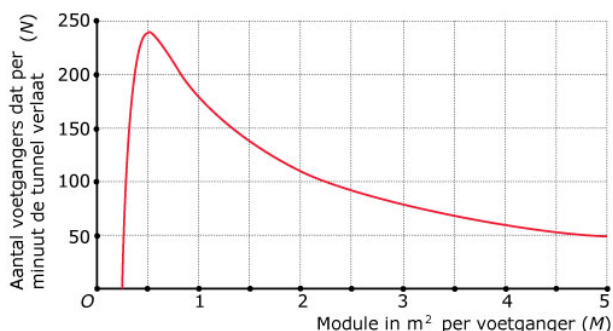
Van een vierkant stuk papier van 20 cm bij 20 cm wordt een bakje gemaakt door uit de hoeken een vierkantje weg te knippen. De randen die ontstaan worden naar boven gevouwen. Stel dat zo'n geknipt vierkantje een zijde heeft van x cm.

- a Maak een formule voor de inhoud I als functie van x .
- b Welke waarden kunnen x en b aannemen?
- c Plot de grafiek van I . Let op de waarden die x kan aannemen en zorg voor een zodanige grafiek dat alle mogelijke waarden van I in beeld komen.
- d Bepaal voor welke waarde van x de inhoud maximaal is.

Examen

Opgave 8: Treinreizigers te U.

Treinreizigers die op het station te U. uitstappen, kunnen de uitgang van het station alleen bereiken via een voetgangerstunnel. De tunnel is 30 meter lang en 3 meter breed. De snelheid van de voetgangersstroom in de tunnel is afhankelijk van de drukte. Een maat voor de drukte is de module, dat is het gemiddelde aantal vierkante meter per voetganger.



Figuur 6.2

- a Op zeker moment bevinden zich 120 mensen in de tunnel, die allen in de richting van de uitgang lopen. Bereken voor deze situatie de module.

Het verband tussen de snelheid van de voetgangersstroom V en de module M wordt gegeven door de formule $V = 87 - \frac{26}{M+0,5}$ met V in meter per minuut en M in m^2 per voetganger.

- b Bereken de module bij een snelheid van 50 m per minuut. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- c Wanneer een voetganger ongehinderd kan lopen, is zijn snelheid ongeveer 5 km/h. Onderzoek of dat in overeenstemming is met de formule.
- d Er bestaat een verband tussen de waarde van M en het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat (N). Het verband tussen M en N staat grafisch weergegeven in de figuur. Schat zo nauwkeurig mogelijk hoeveel mensen er per minuut de tunnel verlaten in het geval dat de snelheid van de voetgangersstroom 70 m per minuut is.
- e Een belangrijk gegeven bij het ontwerpen van een tunnel is het maximale aantal mensen dat in korte tijd kan worden verwerkt. Bij welke snelheid is het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat maximaal? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 1989 - II)

Opgave 9: De valkparkiet

Er wordt veel onderzoek gedaan naar het verband tussen het vermogen (het energieverbruik per seconde) en de vliegsnelheid bij vogels. Het vermogen V wordt gemeten per kg borstspier en uitgedrukt in Watt. Een onderzoek heeft uitgewezen dat de grafiek van het verband tussen de vliegsnelheid en het vermogen U-vormig is. Dat wil zeggen: vliegen met lage of hoge snelheid kost veel vermogen, terwijl vliegen met een snelheid daartussenin minder vermogen kost.

In de figuur is dit verband voor valkparkieten en duiven weergegeven.

Dit onderzoek toont bij valkparkieten een bij benadering kwadratisch verband aan tussen de vliegsnelheid en het vermogen. Voor valkparkieten geldt de volgende formule:

$$V = 0,19s^2 - 8,71s + 169,72$$

Hierbij is V het vermogen in Watt en s de snelheid in kilometer per uur.

- Bereken met behulp van de formule bij welke snelheden in km per uur het vermogen V van een valkparkiet 120 Watt is.
- Bepaal bij welke snelheid in kilometer per uur het vermogen V van een valkparkiet minimaal is.

Ook bij duiven kun je een formule opstellen voor het verband tussen s en V . In de figuur kun je aflezen dat duiven bij een snelheid van 8 kilometer per uur en bij een snelheid van 34 kilometer per uur een vermogen van 150 Watt ontwikkelen.

Voor duiven is het verband tussen de vliegsnelheid en het vermogen dan van de vorm:

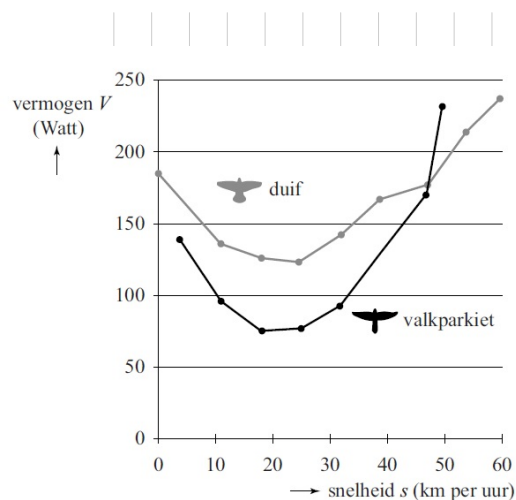
$$V = p \cdot (s - 8)(s - 34) + 150$$

Ook hier is V het vermogen in Watt en s de snelheid in kilometer per uur.

Het is bekend dat duiven die stil in de lucht hangen ($s = 0$) een vermogen van 185 Watt ontwikkelen. Met dit gegeven kun je nu de constante p berekenen.

- Bereken p en herschrijf de formule in de vorm $V = as^2 + bs + c$. Rond a , b en c indien nodig af op één decimaal.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2013 - II)



Figuur 6.3

2

Functies en grafieken

2.1	Het begrip functie	54
2.2	Domein en bereik	62
2.3	Bijzondere functies	71
2.4	Karakteristieken	80
2.5	Verschuiven en vervormen	88
2.6	Totaalbeeld	98

2.1 Het begrip functie

Inleiding

Je hebt al met formules gewerkt. Soms beschrijft een formule een verband tussen twee variabelen. Voer je voor de ene een getal in, dan kun je vaak de andere variabele uitrekenen. Komt er dan telkens precies één uitkomst (en niet meerdere), dan spreek je van een 'functie'. In dit deel zal worden ingegaan op wat een functie precies is en hoe je er een grafiek bij kunt (laten) maken.

Je leert in dit onderwerp

- wat een functie en een functievoorschrift zijn;
- grafieken van functies tekenen/plotten;
- nulpunten berekenen van functies;
- snijpunten van grafieken met behulp van de grafische rekenmachine berekenen.

Voorkennis

- met formules werken: erin invullen en ze herleiden;
- eenvoudige vergelijkingen oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Als je geen topsporter bent, zal een gezond hart overdag ongeveer 60 tot 80 slagen per minuut maken. Dit heet de 'hartslagfrequentie'. Bij inspanning kan die oplopen naar 160 tot 180 slagen.

Voor je maximale hartslagfrequentie geldt ongeveer: $R = 209 - 0,75a$.

Hierin is R de maximale hartslag in hartslagen per minuut en a de leeftijd in jaren. Je ziet dat je maximale hartslag afhangt van je leeftijd.

- Als je hier met een grafische rekenmachine een grafiek van wilt maken, hoe moet je dan het venster instellen om het nuttige deel van de grafiek in beeld te krijgen?
- De maximale hartslag van een twintigjarige kun je weergeven als $R(20)$. Hoe groot is $R(20)$?

Uitleg

Als je geen topsporter bent, zal een gezond hart overdag ongeveer 60 tot 80 slagen per minuut maken. Dit heet de 'hartslagfrequentie'. Bij inspanning kan die oplopen naar 160 tot 180 slagen.

Voor je maximale hartslagfrequentie geldt ongeveer: $R = 209 - 0,75a$.

Hierin is R de maximale hartslag in hartslagen per minuut en a de leeftijd in jaren. Je ziet dat je maximale hartslag afhangt van je leeftijd.

Om dat extra duidelijk te maken schrijf je: $R(a) = 209 - 0,75a$.



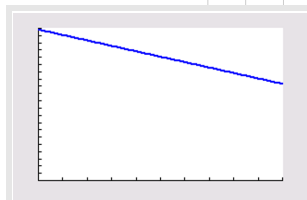
Figuur 1.1

Zoiets heet een functievoorschrift en R is een functie van a . Bij elke waarde van a hoort precies één uitkomst, bijvoorbeeld bij $a = 16$ hoort $R = 197$. Dit kun je korter opschrijven als $R(16) = 197$. In plaats van uitkomst noem je 197 een functiewaarde.

Met de grafische rekenmachine kun je bij de functie met voorschrift $R(a) = 209 - 0,75a$ een tabel en een grafiek maken. Je voert de formule dan in de grafische rekenmachine in als $Y1=209-0.75X$. Daarna stel je de afmetingen van het venster in en maak je de grafiek. Bekijk eventueel nog eens het [Practicum](#).

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=100
Xscl=10
Ymin=0
Ymax=210
Yscl=10
Xres=1
△X=.37878787878788
TraceStep=.75757575757576
```

X	Y1
0	209
1	208.25
2	207.5
3	206.75
4	206
5	205.25
6	204.5
7	203.75
8	203
9	202.25
10	201.5



Figuur 1.2

Opgave 1

In de [Uitleg](#) zie je de functie $R(a) = 209 - 0,75a$.

- Bereken $R(20)$ betekent (kies de juiste letter):
 - Bereken de functiewaarde bij invoerwaarde $a = 20$.
 - Bereken de invoerwaarde bij functiewaarde $a = 20$.
 - Bereken de functiewaarde als $R = 20$.
 - Bereken de invoerwaarde als $R = 20$.
- Bereken $R(20)$.
- Deze formule geldt voor jongeren tussen de 13 en de 24 jaar. Breng het deel van de grafiek van R dat daarbij hoort in beeld op de grafische rekenmachine. Welke (functie)waarden voor R horen daarbij?
- Voor welke waarde van a geldt: $R(a) = 0$? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 6x$.

- Bereken $f(-4)$.
- Teken de grafiek met de grafische rekenmachine en schrijf de vensterinstellingen op die je gekozen hebt.
- Noem drie waarden voor x waarvan de functiewaarden negatief zijn.
- Voor welke b geldt: $f(b) = 24$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

y is een **functie** van x als je bij een formule zoals $y = -x^3 + 4x$ bij elke ingevoerde waarde van x hoogstens één waarde van y vindt. Je schrijft dan: $y(x) = -x^3 + 4x$.

Bij een functie kun je een tabel maken en een grafiek tekenen. De **invoerwaarden** komen op de horizontale as.

De uitkomsten zoals $y(1)$ heten **functiewaarden**.

$y(1) = -1^3 + 4 \cdot 1 = 3$ is de functiewaarde bij $x = 1$.

Functiewaarden komen op de verticale as.

Als er meerdere functies tegelijk worden gebruikt, kun je functies een naam geven. $y(x)$ wordt dan bijvoorbeeld $f(x)$. De functiewaarde is dan een functie van x die f heet. In dit geval is f dus géén variabele!

In praktijksituaties gebruik je vaak afkortingen die verwijzen naar de betekenis van de variabelen. Bijvoorbeeld t voor tijd, v voor snelheid. $v(t)$ is dan de snelheid als functie van de tijd.

De grafische rekenmachine werkt met alleen x voor invoerwaarden en y of $f(x)$ voor functiewaarden.

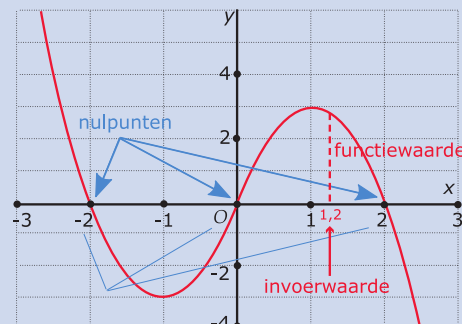
De **nulpunten** van een functie zijn de invoerwaarden waarbij de functiewaarde (de uitkomst dus) 0 is.

Dan geldt: $y(x) = 0$.

De nulpunten vind je in dit geval door op te lossen: $-x^3 + 4x = 0$.

De nulpunten van deze functie zijn $x = 0, x = -2$ en $x = 2$.

Let op: Een nulpunt is een getal (en dus geen punt met coördinaten).



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 2x - 15$.

- Bereken de functiewaarde van f als de invoerwaarde -2 is.
- Bereken de nulpunten van f .

Antwoord

- $f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 15 = -7$
- Voor het berekenen van de nulpunten moet de vergelijking $f(x) = 0$ worden opgelost.
Dit geeft: $x^2 - 2x - 15 = 0$.
Ontbinden in factoren geeft $(x + 3)(x - 5) = 0$ en dus $x = -3 \vee x = 5$.
De nulpunten zijn $x = -3$ en $x = 5$.

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 + 4x$.

- Welke functiewaarde van f hoort bij een invoerwaarde van 5?
- Bereken $f(-6)$.
- Bereken de nulpunten van f .

Opgave 4

Gegeven is de functie $g(x) = -10 + 5\sqrt{x-2}$.

- Bereken $g(2)$.
- Bereken $g(11)$.
- Bereken het nulpunt van g .

Voorbeeld 2

Je ziet twee formules bij verbanden tussen x en y .

- $y = \sqrt{x}$
- $y^2 = x$

Verder zie je de grafieken bij deze verbanden, gemaakt met GeoGebra.

Is y een functie van x in de formule $y = \sqrt{x}$?

Is y een functie van x in de formule $y^2 = x$?

Antwoord

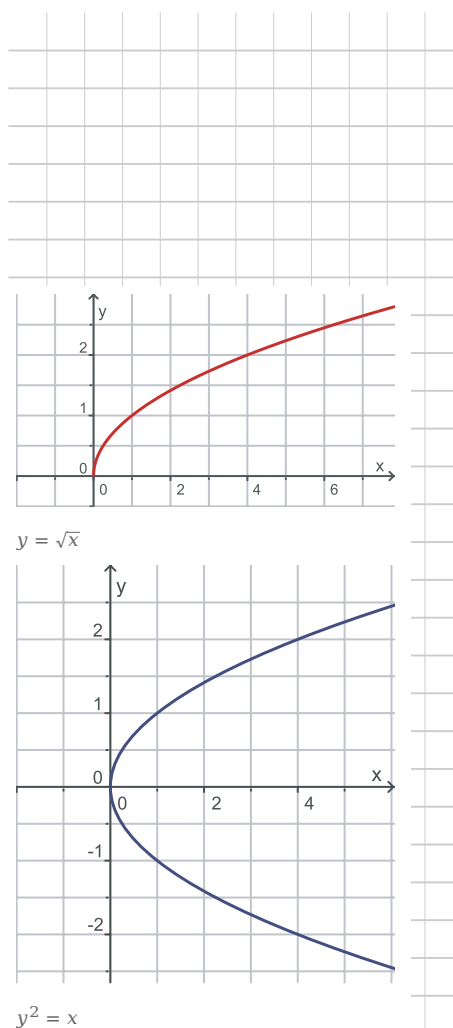
Kies bijvoorbeeld: $x = 4$.

Bij formule $y = \sqrt{x}$ vind je: $y = 2$.

Bij formule $y^2 = x$ vind je: $y = 2$ v $y = -2$.

Bij de formule $y = \sqrt{x}$ vind je bij elke waarde voor x precies één waarde van y . Als x negatief is vind je geen waarden van y . Dus bij de formule $y = \sqrt{x}$ is y een functie van x .

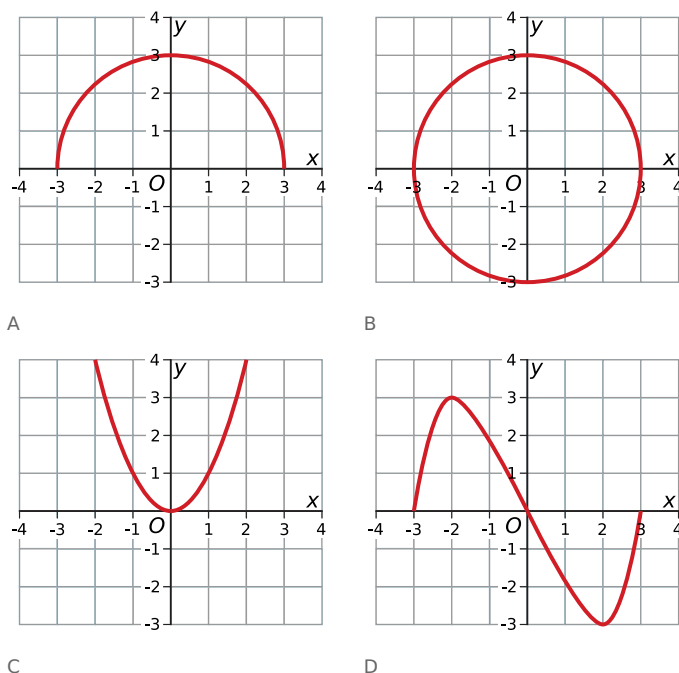
Bij de formule $y^2 = x$ vind je bij vrijwel alle x -waarden twee waarden van y . Alleen bij $x = 0$ vind je er maar één. Bij negatieve x -waarden vind je geen uitkomsten. Dus bij de formule $y^2 = x$ is y geen functie van x .



Figuur 1.4

Opgave 5

Je ziet vier grafieken. Bij welke van deze grafieken is y een functie van x ?



Figuur 1.5

Opgave 6

De posttarieven voor het binnenland zijn in 2014:

- tot 20 gram: € 0,64;
- van 20 tot 50 gram: € 1,28;
- van 50 tot 100 gram: € 1,92;
- van 100 tot 250 gram: € 2,56.

- Is het tarief een functie van het gewicht?
- Is het gewicht een functie van het tarief?

Opgave 7

Gegeven is de formule $x^2 + y^2 = 100$.

- Geef een getallenvoorbeeld waaruit blijkt dat de gegeven formule geen functie is.
- Druk y uit in x . Let op: je krijgt twee formules.
- Teken beide formules met de grafische rekenmachine. Welke vorm hebben de grafieken?
- Hoe kun je aan de grafieken zien dat de gegeven formule geen functie is?

Voorbeeld 3

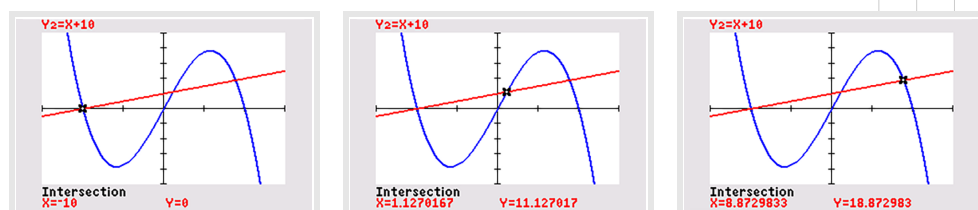
Gegeven zijn de functies $f(x) = 10x - 0,1x^3$ en $g(x) = x + 10$.
Bepaal de coördinaten van de snijpunten van de grafieken.

Antwoord

Om de coördinaten van de snijpunten te achterhalen, moet je de vergelijking $f(x) = g(x)$ oplossen, dus $10x - 0,1x^3 = x + 10$.

Je kunt dat met de grafische rekenmachine doen door beide functies in te voeren: $Y1=10X-0.1X^3$ en $Y2=X+10$. Daarna heb je goede vensterinstellingen nodig zodat je de snijpunten goed in beeld hebt. Je kunt snel zien dat -10 een nulpunt is van g . Omdat je in ieder geval dat nulpunt in beeld wilt hebben, kies je voor de x -waarden als venster $-15 \leq x \leq 15$. In de tabel op de grafische rekenmachine kun je zien dat de functiewaarden liggen tussen -50 en 50 ; daarom kies je voor de y -waarden als venster $-50 \leq y \leq 50$. De drie snijpunten zijn dan goed in beeld.

Met de grafische rekenmachine kun je de snijpunten uitrekenen. Hoe dat gaat, zie je in het **Practicum**.



Figuur 1.6

Opgave 8

Bereken zelf de coördinaten van de snijpunten in **Voorbeeld 3** met behulp van de grafische rekenmachine. Rond waar nodig af op twee decimalen.

Opgave 9

Los de vergelijking $x^3 - 5x + 2 = -x + 1$ op met behulp van de grafische rekenmachine. Rond af op twee decimalen.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 8 - 4x + x^3$.

- Bereken $f(3)$.
- Bereken de x -waarden waarvoor $f(x) = 8$.
- Bij welke vensterinstellingen krijg je de nulpunten en de toppen van de grafiek van f in beeld?
- Hoort bij elke waarde van x precies één waarde van y ? Of kun je tegenvoorbeelden vinden?
- Hoort bij elke waarde van y precies één waarde van x ? Of kun je tegenvoorbeelden vinden?

Opgave 11

Voor het gebruik van drinkwater betaal je jaarlijks € 35,00 en nog € 0,77 per verbruikte m^3 water. De jaarlijkse kosten K (in euro) hangen af van het aantal m^3 (a) dat je verbruikt.

- Waarom is K een functie van a ?
- Bereken $K(100)$.
- Stel het functievoorschrift $K(a)$ op.
- De meeste gezinnen betalen minder dan € 500,00 per jaar voor hun waterverbruik. Hoeveel kubieke meter water gebruiken die gezinnen op zijn hoogst?

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100 - x^2$ en $g(x) = x^2$.

- Bereken de nulpunten van f en geef de coördinaten van de top van de grafiek van f .
- Breng de grafieken van f en g in beeld met de grafische rekenmachine. Schrijf op bij welke vensterinstellingen de nulpunten en toppen van beide functies goed zichtbaar zijn.
- Bereken op twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de snijpunten van beide grafieken.

Opgave 13

Je ziet hier vier functievoorschriften. Bepaal telkens eerst de nulpunten van de functie. Schrijf vervolgens de vensterinstellingen op waarbij de grafiek van de functie goed in beeld komt.

- a $f(x) = 100x - x^2$
- b $g(x) = 10x(x - 50)$
- c $h(x) = (x - 10)^2 - 1600$
- d $k(x) = 200 + 1,6x$

Opgave 14

Gegeven zijn de functies $y_1 = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$ en $y_2 = -x^2 - x + 6$.

- a Bereken van beide functies de nulpunten.
- b Breng beide grafieken in beeld. Schrijf op welke vensterinstellingen je gebruikt om alle nulpunten en toppen in beeld te krijgen.
- c Bepaal de snijpunten van beide grafieken op twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 15: Water in de wastafel

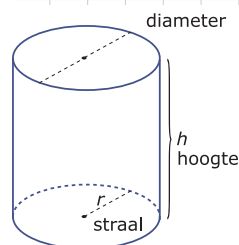
De stop van een met water gevulde wastafel wordt eruit getrokken. De hoogte h in centimeter van het water wordt gegeven door de formule $h = (4 - 0,36t)^2$. Hierbij is t de tijd in seconden met $t = 0$ op het moment dat de stop eruit wordt getrokken.

- a Hoe hoog stond het water voordat de stop eruit werd getrokken?
- b Plot de grafiek van h . Hoe kun je aan de grafiek zien dat het water in het begin sneller leegloopt dan aan het eind?
- c Hoelang duurt het leeglopen van de wastafel? Rond af op twee cijfers achter de komma.
- d Na hoeveel seconden is de waterhoogte 8 cm? Rond af op twee cijfers achter de komma.

Opgave 16: Cilindrisch blikje

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Van een bepaalde serie blikjes is bekend dat de hoogte even groot is als de diameter.

- a Voor deze serie blikjes is V een functie van r . Schrijf het bijpassende functievoorschrift op.
- b Neem aan dat $0 < r < 20$. Breng nu de grafiek van de functie $V(r)$ in beeld. Schrijf de geschikte vensterinstellingen op.
- c Bij welke r geldt: $V = 1000 \text{ cm}^3$?



Figuur 1.7

Testen

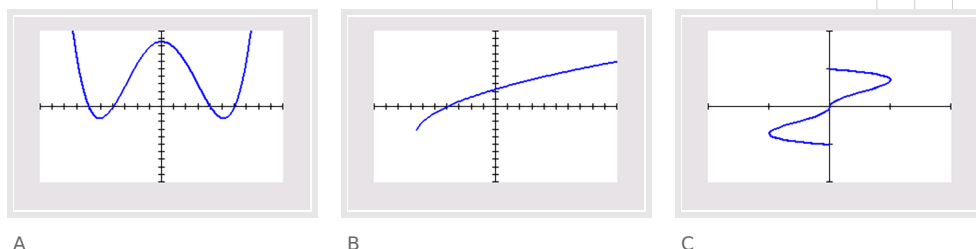
Opgave 17

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x(x - 10)^2$ en $g(x) = 8x$.

- Bereken $f(5)$ en $f(-5)$.
- Bepaal de nulpunten van f . Schrijf op bij welke vensterinstellingen de grafieken van beide functies goed in beeld komen.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van beide grafieken.

Opgave 18

Bekijk de drie grafieken in het Oxy -assenstelsel van een grafische rekenmachine.



Figuur 1.8

Bij welke van deze grafieken is y een functie van x ?

- A
- B
- C

Practicum: Grafische rekenmachine

Vergelijkingen en ongelijkheden kun je snel met de grafische rekenmachine oplossen. Hij heeft een speciale routine voor het vinden van **snijpunten van twee grafieken van functies**. In het volgende practicum kun je nalezen hoe dat gaat. Bekijk alleen het stukje 'Snijpunten van twee grafieken'.

- [Basistechnieken TI84](#)
- [Basistechnieken TIInspire](#)
- [Basistechnieken Casio fx-CG50](#)
- [Basistechnieken HPprime](#)
- [Basistechnieken NumWorks](#)

2.2 Domein en bereik

Inleiding

Bij veel functies kun je niet zomaar elk getal invoeren. Denk aan functies die wortels bevatten. In praktische situaties hebben waarden soms geen nut. Een negatieve grootte van een oppervlak bijvoorbeeld, is betekenisloos. Ook als uitkomst is vaak niet alles mogelijk, regelmatig moet een uitkomst binnen bepaalde grenzen vallen. Om die beperkingen aan te geven is een speciale notatie nodig.

Je leert in dit onderwerp

- de intervalnotatie gebruiken om te kunnen aangeven dat waarden beperkt zijn;
- het begrip 'domein' gebruiken voor de mogelijke invoerwaarden;
- het begrip 'bereik' gebruiken voor de mogelijke uitkomsten;
- coördinaten van toppen van grafieken berekenen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- het begrip 'functie' en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken van functies goed in beeld brengen.

Verkennen

Opgave V1

Iedere Nederlander kent ze: de windmolens die elektrische energie opwekken. Het vermogen van een windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windsnelheid en van de bouw van de molen. Als de diameter van de cirkel die de ronddraaiende wieken maken 32 m is, dan kan het vermogen P in kW (kilowatt) van een bepaalde molen berekend worden met de formule: $P = 0,52 \cdot v^3$.

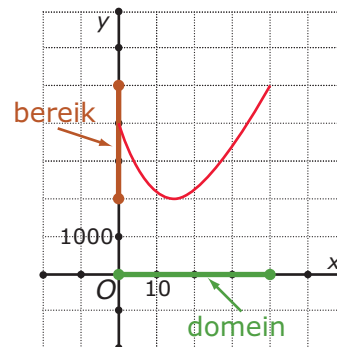
Hierin is v de windsnelheid in m/s. Bij hoge windsnelheden slaan de turbines van deze windmolens af.

- Welke waarden denk je dat v kan aannemen?
- Schat welke vermogens een windmolen zoals deze kan leveren.

Opgave V2

Gegeven is de functie f met $f(x) = \sqrt{x}$.

- Welke waarden kan x aannemen?
- Maak een grafiek bij deze functie.
- Welke functiewaarden heeft deze functie?



Figuur 2.1



Figuur 2.2

Uitleg 1

Het vermogen van een windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windsnelheid en van de bouw van de molen. Als de diameter van de cirkel die de ronddraaiende wieken maken 32 m is, dan kan het vermogen P in kW (kilowatt) van een bepaalde molen berekend worden met de formule: $P(v) = 0,52 \cdot v^3$.

Hierin is v de windsnelheid in m/s. Bij hoge windsnelheden slaan de turbines van deze windmolens af.

Bij windsnelheden van boven de 30 m/s is dat het geval.

Dit betekent dat bij deze functie alle invoerwaarden liggen in een interval vanaf $v = 0$ tot en met $v = 30$ m/s. Deze invoerwaarden vormen het domein (D_P) van de functie. Je schrijft: $D_P = [0, 30]$.

Bij deze windsnelheden horen vermogens vanaf $P(0) = 0$ tot en met $P(30) = 14040$ kW.

Vanwege het beperkte domein van de functie $P(v)$ zullen ook de uitkomsten beperkt zijn. Het interval waarbinnen alle uitkomsten liggen, heet het bereik (B_P) van de functie. Bekijk je de grafiek op de grafische rekenmachine, zie je dat het bereik loopt van $P = 0$ tot en met $P = 14040$. Het bereik van P schrijf je als $B_P = [0, 14040]$.

In **Uitleg 2** lees je meer over de notatie van domein en bereik.

Opgave 1

In **Uitleg 1** lees je over het vermogen van een bepaalde windmolen afhankelijk van de windsnelheden.

- Plot de grafiek van $P(v)$ en geef de vensterinstellingen.
- Reken zelf na welke waarden B_f kan aannemen.
Besloten wordt om de windmolen uit te schakelen bij windsnelheden onder de 4 m/s en boven de 25 m/s.
- Welke waarden kunnen domein en bereik van de functie $P(v)$ dan aannemen?
Bekijk nu de functie $f(x) = 0,52x^3$.
- Zijn er bij deze functie beperkingen voor de invoerwaarden en voor de functiewaarden? Welke waarden kunnen domein en bereik van de functie $f(x)$ aannemen?

Opgave 2

Gegeven is de functie f door $f(x) = 3 + \sqrt{x}$.

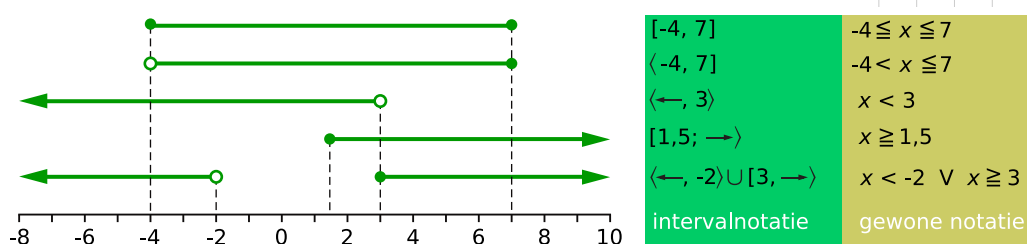
- Uit welke getallen bestaat het domein van deze functie? En waarom?
Het domein van deze functie wordt wel geschreven als $D_f = [0, \rightarrow)$.
- Wat zou de pijl betekenen? En waarom zou het rechterhaakje een andere vorm hebben gekregen als het linkerhaakje?
- Reken enkele functiewaarden uit, maak eventueel een tabel. Welke functiewaarden kunnen voorkomen?
- Schrijf het bereik van deze functie op. Gebruik dezelfde notatie als voor het domein.

Uitleg 2

Een interval is niets anders dan een aaneengesloten verzameling reële getallen, een stukje van een getallenlijn. Bij de notatie ervan schrijf je de grenswaarden (de kleinste en de grootste waarden, de kleinste eerst) van het interval op tussen twee haakjes. Daarbij horen twee afspraken:

- de vorm van de haakjes bepaalt of de grenswaarde nog wel bij het interval hoort of juist niet meer - de haken $[$ en $]$ geven aan dat de grenswaarden nog bij het interval horen, de haken $<$ en $>$ geven aan dat de grenswaarden niet bij het interval horen;
- voor intervallen die aan één kant geen grenswaarde hebben gebruik je een pijltje.

Je ziet voorbeelden van intervallen met het bijbehorende deel van de getallenlijn.



Figuur 2.3

Je ziet in de figuur het teken $\cup$. Dit teken wordt gebruikt om aan te geven dat je alle getallen van twee (of meer) afzonderlijke intervallen samen bedoelt. Als het domein of het bereik uit alle reële getallen bestaat schrijf je $D_f = \mathbb{R}$ of $B_f = \mathbb{R}$.

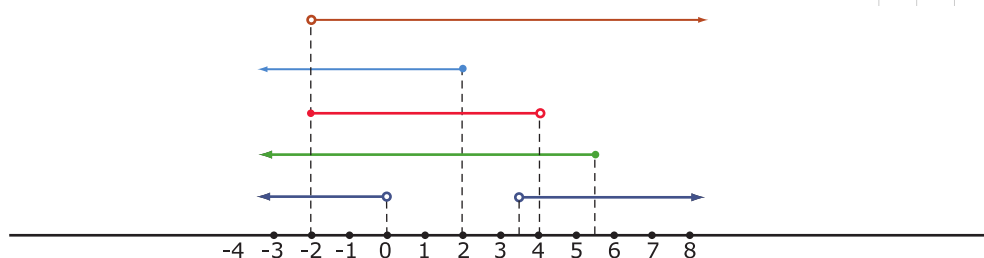
Opgave 3

Bekijk de intervallen in **Uitleg 2**. Let goed op de open en gesloten rondjes en op de bijpassende vorm van de haakjes.

Teken de intervallen $\langle -2,4]$, $[2, \rightarrow \rangle$, $[1; 3,5]$, $\langle \leftarrow, 0]$ en $\langle \leftarrow, 4 \rangle \cup \langle 6, \rightarrow \rangle$.

Opgave 4

Bekijk de getekende intervallen.

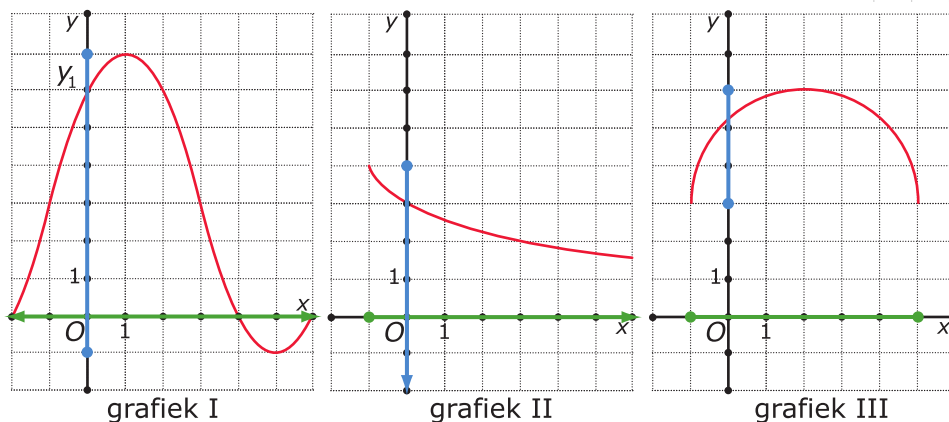


Figuur 2.4

Schrijf ze in intervalnotatie.

Opgave 5

Bekijk de grafieken van drie functies. Het domein en het bereik van de functie zijn bij de grafiek aangegeven (met de kleuren blauw en groen). De pijltjes betekenen dat het interval oneindig in die richting door loopt.



Figuur 2.5

Schrijf het domein en bereik van deze drie functies in intervalnotatie.

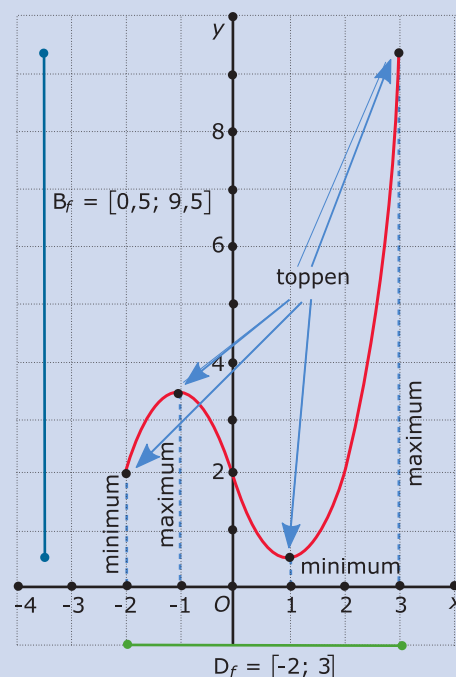
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Alle toegestane invoerwaarden samen vormen het **domein** van een functie. Het domein heeft te maken met beperkingen van de invoervariabele en die kunnen worden ingegeven door de situatie, maar ook wel door de aard van de functie. Bijvoorbeeld de wortel uit een negatief getal heeft geen reële waarde en delen door 0 kan niet. Het domein van functie f wordt aangegeven door D_f .

Alle mogelijke functiewaarden samen vormen het **bereik** van een functie. Om het bereik van een functie f te kunnen bepalen heb je een goed beeld van de grafiek van f nodig. Daarbij zijn de toppen van een grafiek vaak van belang. In een top heeft de functie een **maximum** (grootste functiewaarde) of een **minimum** (kleinste functiewaarde). Hoe je die met behulp van de grafische rekenmachine kunt vinden, lees je in het **Practicum**. Het bereik van functie f wordt aangegeven door B_f .

Voor domein en bereik van een functie wordt meestal de intervalnotatie gebruikt. Een **interval** is een aaneengesloten verzameling reële getallen, een stukje getallenlijn dus. Alle reële getallen noteer je als $\mathbb{R}$.



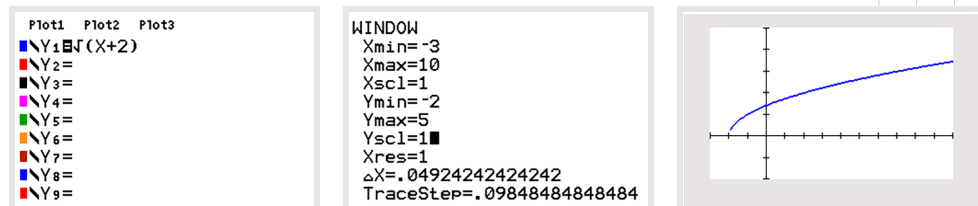
Figuur 2.6

Voorbeeld 1

Met de grafische rekenmachine kun je (een deel van) de grafiek van $f(x) = \sqrt{x+2}$ goed in beeld brengen. Geef het domein en het bereik van f .

Antwoord

Je weet dat de functiewaarden groter worden naarmate je een groter getal voor x kiest. Je kunt niet de wortel nemen van een negatief getal. Dus er moet gelden dat $x+2 \geq 0$ en hieruit volgt dat $x \geq -2$. Het kleinste getal dat mogelijk is als invoerwaarde is $x = -2$. Je krijgt dan als functiewaarde: $f(-2) = \sqrt{-2+2} = 0$.



Figuur 2.7

Hier bepaalt het functievoorschrift wat het domein en het bereik zijn:

- de wortel uit een negatief getal is niet reëel, dus: $D_f = [-2, \rightarrow)$;
- de functiewaarden zijn 0 of groter, dus: $B_f = [0, \rightarrow)$.

De gebruikte vensterinstellingen zijn $-3 \leq x \leq 10$ en $-2 \leq y \leq 5$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**. Gegeven is de functie f met $f(x) = 4 - \sqrt{x}$.

- Welke waarden kan x aannemen? Schrijf het domein van f op.
- Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de assen.
- Bekijk de grafiek van f . Schrijf het bereik van f op.

Opgave 7

Gegeven is de functie f met $f(x) = \sqrt{2x+4}$.

Geef het domein en het bereik van f .

Voorbeeld 2

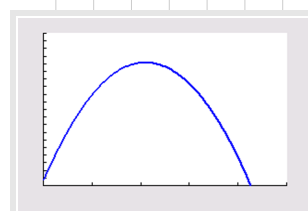
Een keeper schopt de bal in de lucht. Voor de hoogte van de bal h in meter na t seconden geldt $h(t) = -3,5t^2 + 14,7t + 0,8$. Benader het domein en bereik van h in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De grafiek van h is een bergparabool en het domein en bereik daarvan wordt bepaald door de situatie.

Je weet dat $t \geq 0$. Verder snijdt de grafiek de horizontale as bij $t \approx 4,25$. Dus het domein (afgerond op twee decimalen) is $[0; 4,25]$.

Voor het bereik moet je de top van de grafiek bepalen. Met de grafische rekenmachine vind je dat er een maximum is van 16,235. Omdat de bal op de grond komt is de minimale waarde 0. Dus het bereik is $[0; 16,235]$.



Figuur 2.8

Opgave 8

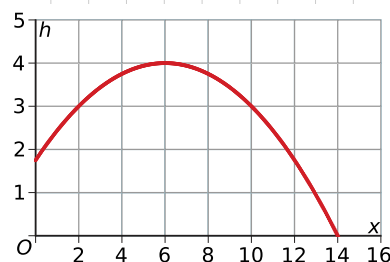
Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Maak zelf de grafiek van de gegeven functie en laat je grafische rekenmachine de twee nulpunten berekenen.
- Bepaal ook het maximum van deze functie met behulp van de grafische rekenmachine.
- Bereken hoeveel seconden de bal meer dan 10 meter boven de grond is.
Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- Schrijf nu ook het domein en het bereik op van de functie $f(x) = -3,5x^2 + 14,7x + 0,8$ zonder beperkingen voor x .

Opgave 9

Bekijk de baan van een kogel die door een kogelstoter zo ver mogelijk wordt gestoten. De kogel komt 14 meter ver. Het hoogste punt van de baan zit 4 meter boven de grond. De baan van de kogel kan worden beschreven met de formule $h(x) = -0,0625(x - 6)^2 + 4$ waarin h de hoogte van de kogel boven de grond is en x de afstand is die het punt op de grond recht onder de kogel heeft afgelegd vanaf het moment van loslaten.

- Laat zien dat de kogel inderdaad 14 meter ver komt.
- Welke invoerwaarden zijn hier zinlijk? Schrijf het domein van $h(t)$ op.
- Laat zien dat het hoogste punt van de baan inderdaad 4 meter boven de grond zit.
- Welke functiewaarden zijn hier zinlijk? Schrijf het bereik van deze functie op.



Figuur 2.9

Verwerken

Opgave 10

Bepaal van de functies het domein en het bereik. Noteer ze als interval. (Eventuele benaderingen op twee decimalen.)

- $f(x) = x^2 - x - 6$
- $g(x) = x^2(x - 2)(x - 3)$
- $h(x) = -3 + 3\sqrt{2 + 6x}$
- $i(x) = 2 - \sqrt{9 - 2x}$

Opgave 11

Gegeven is de functie f met $f(x) = -2(x - 10)^2 + 60$ en domein $[0, 40]$.

Bepaal het bereik van f .

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 2x^4$.

- De standaardinstellingen zijn niet erg gelukkig als je de toppen van de grafiek van f wilt zien. Kies andere instellingen en bepaal de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .
- Geef D_f en B_f .

Opgave 13

Een vuurpijl wordt vanaf de grond afgeschoten. De hoogte boven de grond hangt daarna tot hij uit elkaar spat af van de tijd. Er geldt: $h(t) = 40t - 5t^2$. Hierin is h de hoogte boven de grond in meter en t de tijd in seconden.

- De vuurpijl spat na 6 seconden uit elkaar. Hoe hoog komt hij maximaal?
- Schrijf het domein en het bereik van deze functie op, rekening houdend met de beschreven situatie.
- Op welke hoogte spat de vuurpijl uit elkaar?
- Hoeveel seconden is de vuurpijl hoger dan 40 meter?
- Waarom is de getekende grafiek niet de baan van de vuurpijl?



Figuur 2.10

Opgave 14

Een handelaar heeft wekelijks 400 exemplaren van een bepaald product in de verkoop. Hij heeft geen concurrentie, dus de hoeveelheid q die hij verkoopt, hangt alleen af van de prijs p die hij per exemplaar vraagt. Er geldt: $q = 400 - 0,5p$.

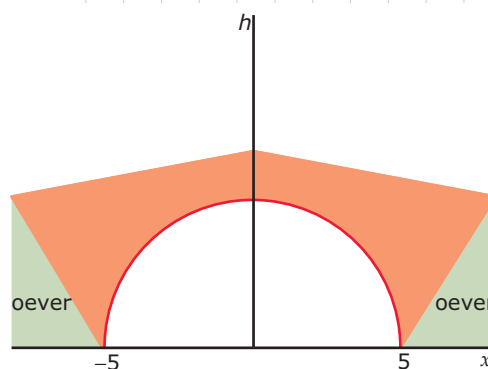
- Geef een formule voor de opbrengst R als functie van de prijs p .
- Welke waarden kan p aannemen?
- Welke waarden kan R aannemen?

Opgave 15

De boog onder een brug heeft de vorm van de grafiek van

$$h(x) = \sqrt{25 - x^2} \text{ (met } x \text{ en } h \text{ in meter).}$$

- Welke waarden voor x kun je hier invullen?
- Wat zijn de maximale en de minimale waarden van h ?



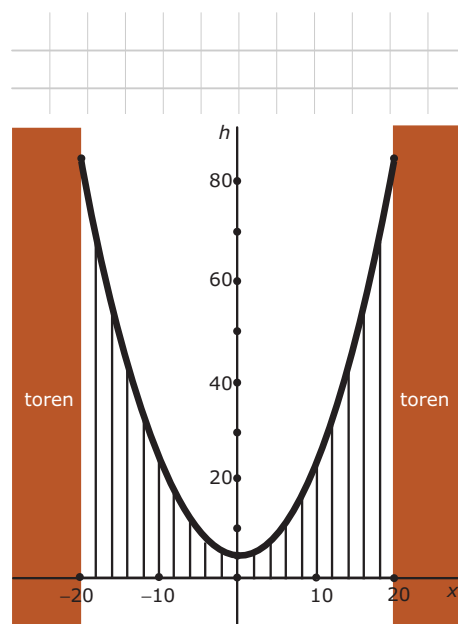
Figuur 2.11

Toepassen

Opgave 16: Hangbrug

Hangbruggen zijn bruggen die zijn opgehangen aan zware spankabels. Die spankabels hangen op hun beurt aan stalen masten of stenen torens. Hier zie je een spankabel hangen tussen twee torens die 40 meter uit elkaar staan. Er geldt: $h(x) = \frac{9}{50} \cdot x^2 + 5$. Aan die spankabels hangen tuidraden waar de brug aan is opgehangen.

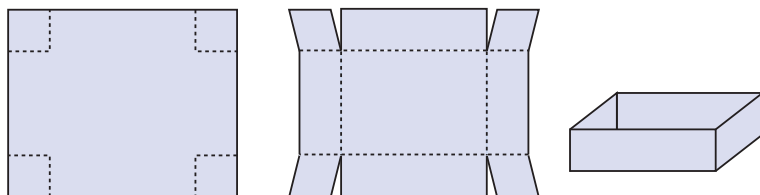
- Welke waarden voor x zijn in deze situatie zinlijk?
- Hoe lang zijn de kortste en de langste tuidraden?
- Er zijn twee tuidraden met een lengte van 45,5 meter. Hoe ver hangen deze twee tuidraden van elkaar?



Figuur 2.12

Opgave 17: Bakje van karton

Van een rechthoekig stuk karton van 12 cm bij 20 cm kun je een bakje maken. Daarvoor teken je in iedere hoek een vierkantje. Je knipt van elk vierkantje één zijde helemaal in en plakt het doosje in elkaar zoals je in de figuren kunt zien.



Figuur 2.13

Als je er op dezelfde wijze een deksel bij maakt, krijg je een doosje waarvan de inhoud I wordt bepaald door de afmetingen van het vierkantje.

- Noem de lengte en de breedte van het vierkantje x . Stel een formule op voor $I(x)$.
- Bepaal het domein en het bereik van $I(x)$. Rond af op twee decimalen.
- Hoe groot moet het vierkantje zijn om een maximale inhoud te krijgen?

Testen

Opgave 18

Breng de grafiek van deze functies in beeld met de standaardinstellingen van het venster. Schrijf het domein en het bereik van deze functies op.

- $f(x) = 4 - (x - 2)^2$
- $g(x) = 2x^3 - 4$
- $h(x) = 2 + \sqrt{4 - x}$

Opgave 19

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 8x^2$.

- Bepaal met behulp van de grafische rekenmachine de toppen van de grafiek.
- Geef het domein en bereik van deze functie.

Opgave 20

Hangbruggen zijn bruggen die zijn opgehangen aan zware spankabels. Die spankabels hangen op hun beurt bijvoorbeeld aan een stalen boog. Op de foto zie je 'De oversteek', een brug over de Waal in Nijmegen, die in 2014 in gebruik is genomen.



Figuur 2.14

Voor deze brug geldt (bij benadering): $h(x) = -0,003x(x - 285)$ met $h(x)$ de hoogte van een punt van de boog boven het punt van de brug dat daar recht onder zit en x de afstand van het punt op de brug tot de pilaar, beide in meters. De brug is symmetrisch.

- Welk domein heeft de functie h in de beschreven situatie?
- Welk bereik heeft de functie h in de beschreven situatie? Rond af op een gehele getallen.
- Er zijn twee punten op de brug waar de hoogte van de boog 30,5 m is. Hoe ver liggen deze punten van elkaar in meters nauwkeurig?

Practicum: Grafische rekenmachine

Als je met functies werkt, wil je alle karakteristieken (nulpunten, toppen en asymptoten) in beeld. In het volgende practicum kun je nalezen hoe dat gaat. Bekijk alleen het stukje 'Functiewaarden, nulpunten en toppen'. De rest heb je pas later nodig.

- [Functies en de TI83/TI84](#)
- [Functies en de TIInspire](#)
- [Functies en de Casio fx-CG50](#)
- [Functies en de HPprime](#)
- [Functies en de NumWorks](#)

2.3 Bijzondere functies

Inleiding

Je kent al diverse functies. Alleen sprak je tot nu toe vaak over verbanden en formules. Denk nog even terug aan de lineaire verbanden, de kwadratische verbanden en de hyperbolische verbanden. Het gaat daarbij eigenlijk steeds over functies. In dit onderdeel komen enkele veelgebruikte functies voorbij.

Je leert in dit onderwerp

- werken met lineaire functies;
- werken met kwadratische functies.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- het domein en het bereik van een functie vinden;
- de intervalnotatie gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Je staat op een viaduct over de snelweg A1. Je ziet een auto rijden met een snelheid van 90 km/h. Precies 6 minuten later zie je een tweede auto onder het viaduct uitkomen. Deze tweede auto rijdt 120 km/h en in dezelfde richting als de eerste auto.

- Teken bij elk van deze auto's de grafiek van de afstand tot het viaduct. Zet beide grafieken in één figuur en kies geschikte eenheden.
- Na hoeveel minuten heeft de tweede auto de eerste ingehaald? (Gebruik je grafieken of geef een berekening.)

Uitleg

Twee auto's rijden met een constante snelheid over dezelfde weg. A en B liggen aan deze weg 50 km van elkaar.

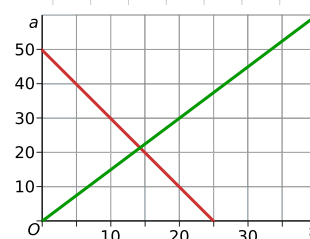
Auto 1 gaat van A naar B met een constante snelheid van 90 km/h en auto 2 rijdt van B naar A met een constante snelheid van 120 km/h. Beide auto's zijn op hetzelfde moment vertrokken. Als je wilt berekenen op welk tijdstip ze elkaar tegenkomen, neem je (bijvoorbeeld) voor de afstand tot A de variabele a . Neem voor de tijd in minuten de variabele t .

Omdat auto 1 met 1,5 km per minuut rijdt, geldt: $a_1 = 1,5t$.

Omdat auto 2 met 2 km per minuut rijdt, geldt: $a_2 = 50 - 2t$.

Bij beide formules is er een lineair verband tussen a en t : a_1 en a_2 zijn lineaire functies. Beide grafieken zijn rechte lijnen.

De auto's komen elkaar tegen wanneer $1,5t = 50 - 2t$. Als je deze vergelijking oplost, vind je $t \approx 14,3$ minuten.

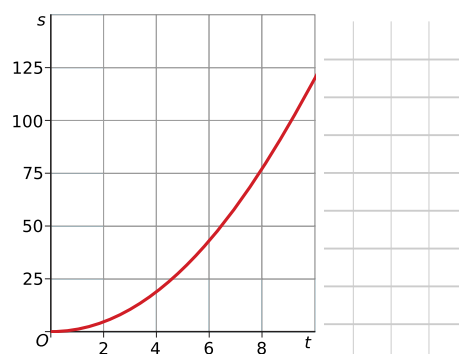


Figuur 3.1

Vaak kun je de afgelegde afstand van een auto berekenen door aan te nemen dat hij voortdurend met dezelfde (gemiddelde) snelheid heeft gereden. Maar als een auto optrekt, neemt zijn (gemiddelde) snelheid tijdens het optrekken toe. De afgelegde afstand neemt dan niet lineair toe.

In de grafiek zie je de afgelegde afstand van s (in meter) van een auto die vanuit stilstand optrekt, waarbij t de tijd (in seconden) is. Hier is een kwadratisch verband gekozen, waarbij de functie: $s(t) = 1,2t^2$ hoort.

Na 5 seconden heeft de auto 30 meter afgelegd. De gemiddelde snelheid is 6 m/s, dus ongeveer 22 km/h. Na 10 seconden heeft de auto 120 meter afgelegd. De gemiddelde snelheid is 12 m/s, dus ongeveer 44 km/h. Je ziet dat de gemiddelde snelheid toeneemt.



Figuur 3.2

Opgave 1

In de **Uitleg** rijden twee auto's met een constante snelheid over dezelfde weg. Auto 1 gaat van A naar B met een constante snelheid van 90 km/h en auto 2 van B naar A met een constante snelheid van 120 km/h.

- De afstand van beide auto's tot A wordt bekeken. Bekijk die afstand nu vanuit B . Schrijf de twee bijpassende formules op.
- Bereken na hoeveel seconden de auto's elkaar tegenkomen.
- Voor welke twee waarden van t bedraagt de onderlinge afstand van beide auto's 20 km?

Opgave 2

In het tweede deel van de **Uitleg** zie je de kwadratische formule: $s = 1,2t^2$.

Deze formule gaat over een vanuit stilstand optrekkende auto, waarbij s de afgelegde afstand (in meter) en t de tijd (in seconden) is.

- Hoe zie je aan de grafiek dat de snelheid steeds toeneemt?
- Na hoeveel seconden heeft de auto 100 meter afgelegd?
- Na hoeveel seconden is de gemiddelde snelheid ongeveer 60 km/h?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: lineaire functies

Een verband tussen y en x van de vorm $y = ax + b$ is een **lineair verband**. x en y zijn dan (veranderende) variabelen, terwijl a en b (vaste) getallen zijn.

Omdat er bij elke waarde voor x niet meer dan één y -waarde hoort, is $f(x) = ax + b$ een **lineaire functie**.

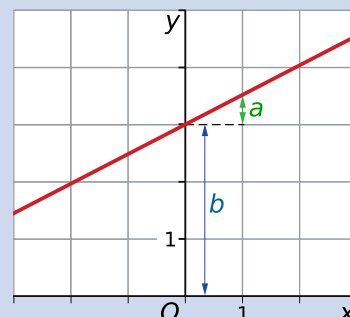
- a noem je de **richtingscoëfficiënt**;
- b is de functiewaarde bij $x = 0$. En dat is weer de y -coördinaat van het snijpunt $(0, b)$ van de grafiek met de y -as.

Lineair komt van “linéaire” (Frans) en “linearis” (Latijn) en betekent lijnvormig. De grafiek van een lineaire functie is een rechte lijn. Een ander woord voor lineaire functie is **eerstegraadsfunctie**.

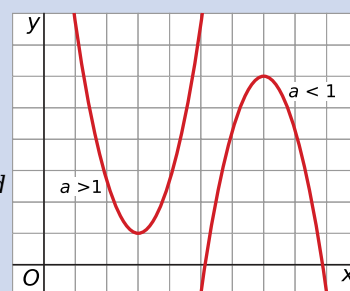
Bekijk de applet: kwadratische functies

Een functie van de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$ is een **tweedegraadsfunctie** of **kwadratische functie**. Als a hier een positief getal is, dan is de bijbehorende grafiek een dalparabool en als a een negatief getal is, dan is de bijbehorende grafiek een bergparabool.

Opmerking: Op deze manier kun je doorgaan: $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ is een derdegraadsfunctie, enzovoort. Er bestaan dus veel verschillende functies.



Figuur 3.3



Figuur 3.4

Voorbeeld 1

Soms gaan economen uit van een lineair verband tussen het aantal producten q dat wordt verkocht en de prijs p die ervoor wordt gevraagd. q is dan een lineaire functie van p . Een voorbeeld daarvan is een functie met voorschrift $q = 4000 - 200p$.

Welke prijzen kan de fabrikant volgens dit model vragen? En welke aantallen kan hij verkopen?

Antwoord

Zowel p als q moeten positieve waarden hebben. Neem je $p = 0$, dan is $q = 4000$. Neem je $q = 0$, dan is $p = 20$ (vergelijking oplossen). Dit betekent dat p van 0 tot 20 kan lopen en q van 0 tot 4000. Handig om van tevoren te bedenken als je de grafiek op de grafische rekenmachine in beeld wilt brengen.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je de formule $q = 4000 - 200p$ van een economisch model.

- Plot de grafiek van de formule. Welke vensterinstellingen gebruik je?
- Hoe kun je aan de grafiek zien dat er sprake is van een lineair verband en wat is de richtingscoëfficiënt?
- Bij welke prijs verkoopt hij 1500 exemplaren?

Opgave 4

Voor een rit in een taxi betaal je voorrijkosten en een bedrag per gereden kilometer:

- voorrijkosten € 3,20;
- per gereden kilometer € 1,20.

De ritprijs (R) hangt af van het aantal gereden kilometers (a).

- Laat zien dat $R(10) = 15,2$.
- Stel een voorschrift op voor de functie $R(a)$.
- Dit is een voorbeeld van een lineaire functie. Teken de grafiek van deze functie op de grafische rekenmachine.
- Waar vind je de twee getallen 3,20 en 1,20 in je grafiek terug?

Opgave 5

Elke lineaire functie f heeft een functievoorschrift van de vorm $f(x) = ax + b$. Neem aan dat de grafiek door $(0,3)$ en $(1; 3,5)$ gaat.

- Welke betekenis heeft a voor de grafiek van f ? Welke waarde heeft a in dit geval?
- Welke betekenis heeft b voor de grafiek van f ? Welke waarde heeft b in dit geval?
- Welke waarden voor a en b moet je nemen om als grafiek een rechte lijn door $A(1,2)$ en $B(5,3)$ te krijgen?
- Hoe kun je het bijbehorende functievoorschrift afleiden uit de coördinaten van A en B ?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Je ziet de punten $P(10,210)$ en $Q(30,300)$. Stel een functievoorschrift op voor de functie waarvan de grafiek een rechte lijn is die door de punten P en Q gaat.

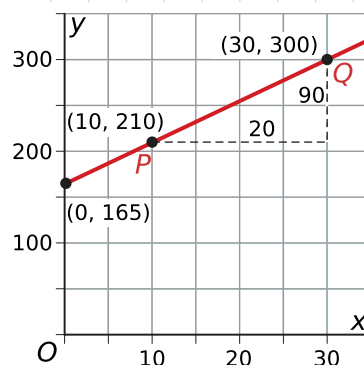
Antwoord

Er is sprake van een lineaire functie f met $f(x) = ax + b$.

Je zoekt daarom het hellingsgetal (a) en het begingetal (b). b is de functiewaarde bij $x = 0$.

Vergelijk de twee gegeven punten van de grafiek.

Bij een toename van x met $30 - 10 = 20$ hoort een toename van y met $300 - 210 = 90$. Dus bij een toename van x met 1 hoort een toename van y met $\frac{90}{20} = 4,5$. Daarom is het hellingsgetal 4,5.



Figuur 3.5

De functiewaarde bij 0 is niet bekend.

De functie heeft een voorschrift als $f(x) = 4,5x + b$.

Omdat $f(10) = 210$ geldt: $210 = 4,5 \cdot 10 + b$. En dit geeft $b = 165$.

Dus het functievoorschrift is $f(x) = 4,5x + 165$.

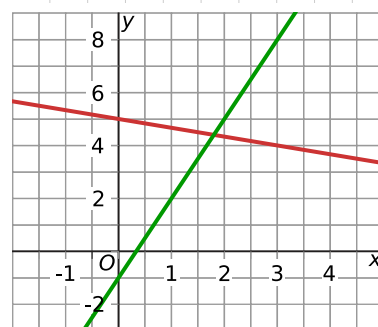
Opgave 6

Stel een functievoorschrift op voor de functie waarvan de grafiek een rechte lijn is die door de punten $P(-2,10)$ en $Q(6,82)$ gaat.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je het voorschrift opstelt van een lineaire functie als twee punten van de grafiek zijn gegeven. Je ziet twee grafieken van lineaire functies.

Stel voor elk van deze functies een passend voorschrift op en bereken algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.



Figuur 3.6

Voorbeeld 3

Het aantal exemplaren q dat een fabrikant verkoopt, hangt af van de prijs p volgens een lineaire functie: $q = 4000 - 200p$. De totale opbrengst TO bereken je met de formule: $TO = p \cdot q = p \cdot (4000 - 200p)$. TO is een kwadratische functie van p . Bij welke prijs is de opbrengst maximaal en wat is dan de maximale opbrengst?

Antwoord

De nulpunten van TO bereken je door de vergelijking $p \cdot (4000 - 200p) = 0$ op te lossen. Dat levert op: $p = 0 \vee p = 20$. Voor het bepalen van het maximum van TO kun je de grafiek plotten en de grafische rekenmachine het maximum laten bepalen. Je vindt dan dat er een maximum is bij $p = 10$. Maar je kunt dit ook als volgt beredeneren: de grafiek van TO is een parabool en dus lijnsymmetrisch. Door de vergelijking $p \cdot (4000 - 200p) = 0$ op te lossen, vind je dat de parabool door de punten $(0,0)$ en $(20,0)$ gaat. Het maximum zit in het midden van die punten, dus bij $p = 10$.

Voor de maximale opbrengst, vul je $p = 10$ in de functie $TO(p)$ in. Je vindt $TO(10) = 20000$. Dus bij een prijs van € 10,00 is er een maximale opbrengst van € 20000,00.

Opgave 8

Voorbeeld 3 gaat over een kwadratische functie.

- Laat door het uitwerken van de haakjes zien dat TO inderdaad een kwadratische functie is.
- Waarom is het uitwerken van de haakjes hier niet erg nuttig?
- Breng de grafiek van TO in beeld. Welke vensterinstellingen gebruik je?
- Ga met de rekenmachine na dat de maximale opbrengst inderdaad bij $p = 10$ wordt gevonden. Hoeveel bedraagt die maximale opbrengst?

Opgave 9

Gegeven is $f(x) = 3x(2 - 5x)$.

- Plot de grafiek en geef de vensterinstellingen.
- Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
- Geef de coördinaten van de top van de grafiek van f .

Verwerken

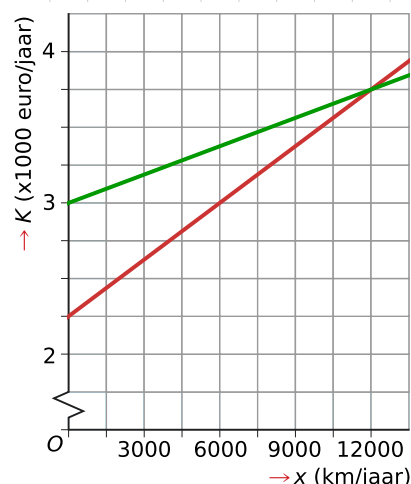
Opgave 10

- Stel een voorschrift op van de lineaire functie f waarvan de grafiek door de punten $P(2,80)$ en $Q(8,140)$ gaat.
- Stel een voorschrift op van de lineaire functie g waarvan de grafiek door de punten $R(-5,15)$ en $S(10,-25)$ gaat.

Opgave 11

Je ziet de grafieken van de jaarlijkse kosten van twee verschillende auto's. Auto A (groene grafiek) was duurder in de aanschaf en heeft mede daarom hogere vaste kosten per jaar, maar is per gereden kilometer iets goedkoper.

Stel voor beide auto's een passende formule op voor de jaarlijkse kosten als functie van het aantal gereden kilometers. Vanaf welk aantal gereden kilometers per jaar is het voordeliger om auto A aan te schaffen?



Figuur 3.7

Opgave 12

Twee cilindervormige kaarsen worden tegelijkertijd aangestoken. Ze branden gelijkmatig op. Een uur na het aansteken heeft kaars I een lengte van 75 cm en is kaars II nog 71 cm lang. 3,5 uur na het aansteken worden beide kaarsen opnieuw gemeten: kaars I is dan 62,5 cm en kaars II is dan nog 61 cm lang.

- Stel voor elk van deze kaarsen een formule op voor de lengte l in centimeter als functie van de brandtijd t in uren.
- Hoeveel uur na het aansteken zijn beide kaarsen even lang?
- Hoeveel uur na het aansteken verschillen ze 1 cm in lengte?

Opgave 13

Een verfhandelaar heeft een mengmachine van € 300,00 aangeschaft. Het mengen van verf kost hem naast deze vaste kosten nog € 6,00 per liter.

- Geef een formule voor de kosten K als functie van het aantal liter verf q dat hij verkoopt.
- Welke waarden kan q aannemen? Welke waarden kan K aannemen?

Hij verkoopt zijn gemengde verf voor € 8,25 per liter. Zijn opbrengst R is ook een functie van q .

- c Welke formule geldt voor R ?
- d Breng beide functies in beeld op de grafische rekenmachine. Bereken het snijpunt van beide grafieken. Welke betekenis heeft dit snijpunt voor de verhandelaar?

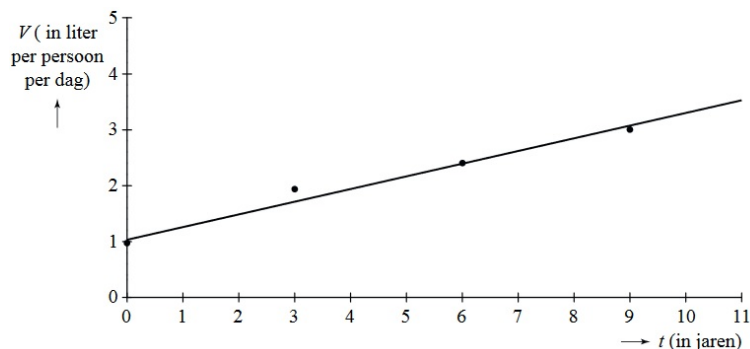
Opgave 14

Tussen de prijs p en het aantal producten dat een fabrikant verkoopt bestaat het verband $q = 300 - 10p$. Bij welke prijs is de opbrengst maximaal?

Toepassen

Opgave 15: Waterverbruik bij vaatwasmachines

Lang niet al het drinkwater wordt gebruikt om te drinken. Een gedeelte van het drinkwater wordt gebruikt voor de vaatwasmachine. Gegevens daarvan staan in de grafiek, waarbij geldt dat 1995 overeenkomt met $t = 0$. In deze grafiek kun je bijvoorbeeld aflezen dat er in 2001 ($t = 6$) gemiddeld over alle Nederlanders ongeveer 2,4 liter water per persoon per dag wordt gebruikt voor vaatwasmachines. Het lijkt erop dat V , het waterverbruik van de vaatwasmachine in liter per persoon per dag, bij benadering lineair toeneemt. Daarom is een lijn getekend die zo goed mogelijk bij de gegevens past. De formule van de lijn is $V = a \cdot t + b$, waarbij t de tijd is in jaren na 1995.



Figuur 3.8

Bereken a en b . Gebruik getallen met één cijfer achter de komma.

(bron: examen havo wiskunde A in 2010, tweede tijdvak)

Opgave 16: Paraboolvlucht

Op aarde kun je gewichtloosheid ervaren tijdens zogenaamde ‘paraboolvluchten’ met een vliegtuig. Deze vluchten worden onder andere gebruikt om astronauten te trainen. Een dergelijke paraboolvlucht verloopt als volgt. Eerst versnelt de piloot het vliegtuig, waarna het steil omhoog stuurt. Op een hoogte van 7600 meter schakelt de piloot de motoren zo ver terug dat alleen nog maar de luchtweerstand wordt overwonnen. Op dat moment begint de werkelijke paraboolvlucht en de toestand van gewichtloosheid. Zie de figuur.

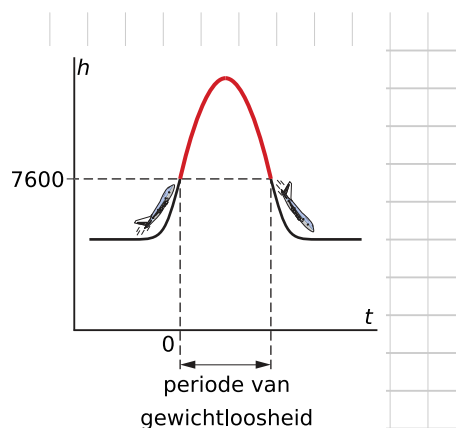
Het vliegtuig gaat, vanwege de hoge snelheid, eerst nog omhoog. Als de top van de paraboolbaan is bereikt, duikt het vliegtuig omhoog totdat het weer op dezelfde hoogte is als aan het begin van de paraboolvlucht. Op dat moment schakelt de piloot de motoren weer op vol vermogen en is de toestand van gewichtloosheid voorbij. De hoogte van het vliegtuig tijdens de paraboolvlucht wordt gegeven door de formule:

$$h = -9,81 \cdot t^2 + 0,38 \cdot v \cdot t + 7600.$$

Hierin is h de hoogte in meter, t de tijd in seconden en v de snelheid van het vliegtuig in km/h bij de start van de paraboolvlucht, dat is bij $t = 0$. Om zinvol te kunnen trainen is het belangrijk dat de toestand van gewichtloosheid minimaal 20 seconden achtereen duurt.

Onderzoek bij welke snelheden v van het vliegtuig de toestand van gewichtloosheid minimaal 20 seconden duurt.

(bron: examen havo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak)



Figuur 3.9

Testen

Opgave 17

De grafiek van een lineaire functie gaat door de punten $A(-24,42)$ en $B(30,16)$. Stel een formule van deze lijn op. Indien nodig rond af op twee cijfers achter de komma.

Opgave 18

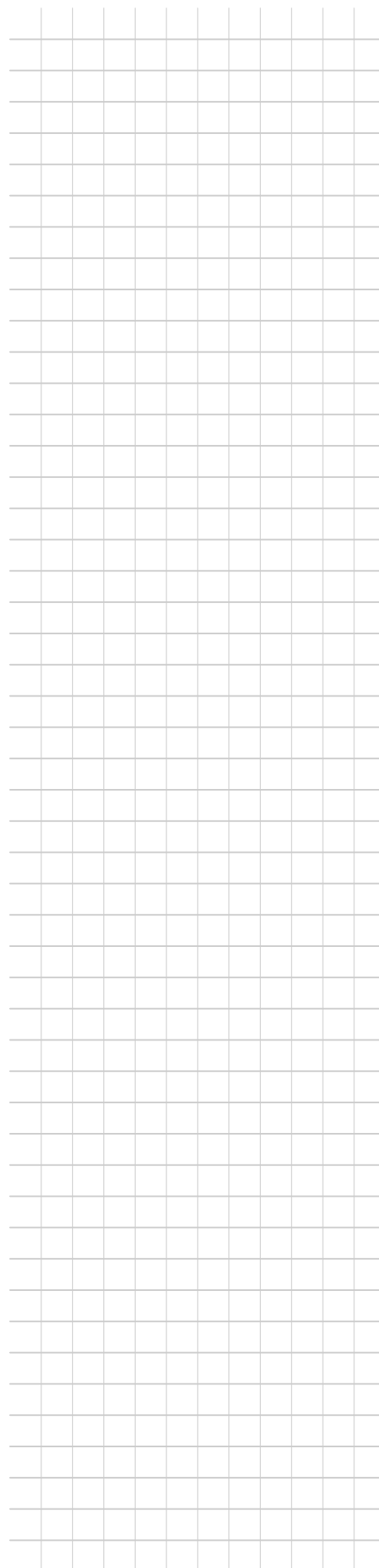
Een echtpaar wil vanaf het station met de taxi naar huis. Ze kunnen kiezen tussen een vaste ritprijs of een kilometer/tijdtarief. De vaste ritprijs is onafhankelijk van tijd en afstand en je spreekt deze van tevoren af met de taxichauffeur. De taxirit bestaat volgens het kilometer/tijdtarief uit drie delen: een instaptarief van € 2,83, een kilometertarief van € 2,00 en een tijdtarief van € 0,34 (per minuut). Het echtpaar weet dat de afstand van station naar huis 5 km is.

- Bij de taxi is de ritprijs (R) nu bij een afstand van 5 km afhankelijk geworden van de tijd (a) dat het echtpaar in de auto zit. Stel het bijbehorende functievoorschrift $R(a)$ op.
- De taxichauffeur heeft voor 5 km een vaste ritprijs van € 17,50. Bij welke reistijd is het voordeliger om dit aanbod aan te nemen?
- Taxi's rijden in de stad gemiddeld 30 km/h. Wat raad je dit echtpaar aan als ze 5 km van het station wonen?

Opgave 19

Een bedrijf verkoopt een bepaald product. Bij een prijs van € 7,00 verkoopt het bedrijf 1450 van die producten en bij een prijs van € 10,00 verkopen zij er 1300. Tussen de prijs p en het aantal verkochte producten q bestaat een lineair verband.

- a Stel de formule op voor q als functie van p .
- b Bij welke prijs is de opbrengst maximaal?



2.4 Karakteristieken

Inleiding

Om functies te kunnen bestuderen is het vaak handig als je bijbehorende grafieken kunt bekijken. Je wilt dan alle snijpunten met de assen, toppen etcetera kunnen zien. Je leert deze karakteristieken vinden.

Je leert in dit onderwerp

- wat asymptoten zijn;
- de karakteristieken van (de grafiek van) een functie te bepalen.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken en tabellen van functies maken (ook met de grafische rekenmachine);
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

De huurprijs van een kopieerapparaat bedraagt € 250,00 per maand. Het maken van een kopie kost € 0,06. Op school staat zo'n apparaat voor de leerlingen. Zij betalen € 0,10 per kopie.

- Geef een formule voor de kosten per kopie (K) als functie van het aantal kopieën (a).
- Welke waarde benaderen de functiewaarden als a heel groot wordt?
- En als a dicht bij 0 komt?

Uitleg

Voor een rit in een taxi betaal je:

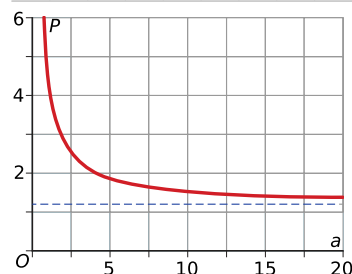
- voorrijkosten € 3,20
- per gereden kilometer € 1,20

De prijs P per gereden km hangt af van het aantal gereden km a .

Er geldt: $P = 1,20 + \frac{3,20}{a}$.

De grafiek van deze functie heeft geen nulpunten of extremen, maar wel geldt:

- Als a (het aantal gereden kilometers) heel groot wordt, benaderen de functiewaarden het getal 1,20. Met de grafische rekenmachine kun je een tabel maken en dan zie je dat hoe groter a is hoe dichter je bij 1,20 komt. Dit betekent dat de grafiek steeds dichter bij de lijn $P = 1,20$ komt te liggen, maar deze niet raakt. Deze lijn heet de horizontale asymptoot van de grafiek van P .



Figuur 4.1

- Aan de functie zie je dat je het getal 0 niet voor a mag invullen: delen door 0 kan niet. Waarschijnlijk is daar dus ook iets bijzonders. Als a dicht bij 0 komt, worden de functiewaarden steeds groter: $P(0,1) = 33,20$; $P(0,01) = 321,20$; $P(0,001) = 3201,20$; $P(0,0001) = 32001,20$ enzovoort. Dit betekent dat de grafiek steeds dichterbij de lijn $a = 0$ (de verticale as) komt te liggen. Dit is de verticale asymptoot van de grafiek van P .

Als je de grafiek van de functie tekent, zorg je ervoor dat ook dit soort karakteristiek gedrag zichtbaar wordt, net als snijpunten met de assen en toppen (als ze er zijn).

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Voor een taxirit van taxicentrale Bob betaal je € 5,00 voorrijkosten en € 1,10 per gereden kilometer a .

- Stel de formule op voor de kosten K (in euro) per gereden kilometer voor deze taxirit.
- Wat zijn de asymptoten van de grafiek van K ?
- Bij taxicentrale Alice kun je alleen maar ritten maken die langer zijn dan 2 km. Bij deze taxicentrale wordt de formule $K = 1,15 + \frac{5}{a-2}$ gehanteerd. Wat zijn de asymptoten van de grafiek van deze formule?

Opgave 2

Van een bepaald type kopieerapparaat worden de kosten per kopie gegeven door $K(a) = \frac{200}{a} + 0,075$. Hierin is a het aantal kopieën per maand en K zijn de kosten in euro.

- Bereken de kosten per kopie als er 10000 kopieën per maand met deze machine worden gemaakt.
- Welke waarde benaderen de kosten per kopie als het aantal kopieën heel erg groot is?
- Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van K ?
- Als er een bepaalde maand geen kopieën worden gemaakt, kun je niet spreken van de kosten per kopie. Het minimale aantal kopieën waarbij dit nog wel kan, is één. Hoeveel bedragen de kosten per kopie maximaal?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij grafieken komt regelmatig **asymptotisch gedrag** voor: als je ver genoeg van de oorsprong komt, gaat de grafiek steeds dichterbij een lijn lopen.

Een **verticale asymptoot** in een grafiek kun je vaak goed in de functie herkennen: een invoerwaarde waarbij je door 0 moet delen, veroorzaakt vaak zo'n asymptoot.

Een **horizontale asymptoot** in een grafiek ontstaat als de functiewaarden een vast getal naderen naarmate de invoerwaarden heel groot of heel klein (erg negatief) worden.

De functie f met voorschrift $f(x) = \frac{1}{x}$ heeft een grafiek met asymptoten. Deze grafiek heeft:

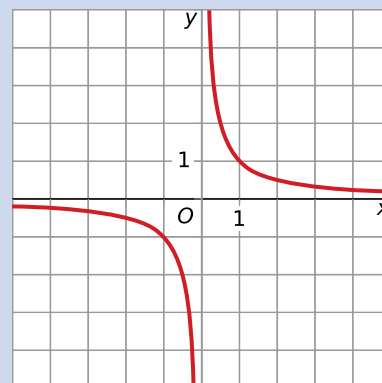
- als horizontale asymptoot de lijn $y = 0$, want voor grote en kleine (erg negatieve) waarden van x naderen de functiewaarden naar 0;
- als verticale asymptoot de lijn $x = 0$, want dit getal heeft geen functiewaarde (je kunt niet door 0 delen) en vlak in de buurt van 0 worden de functiewaarden heel groot of heel klein (erg negatief).

Het domein van f zijn alle getallen behalve 0: $D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

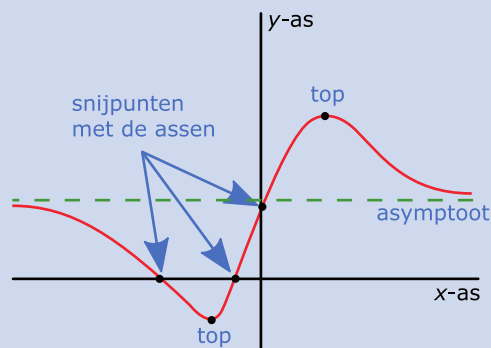
Het bereik van f zijn alle getallen behalve 0: $B_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Als je de grafiek van een functie goed in beeld hebt, zijn alle **karakteristieken** zichtbaar (op het gewenste domein). Dat kunnen zijn:

- de **snijpunten met de assen**;
- de **asymptoten**;
- de **toppen**.



Figuur 4.2



Figuur 4.3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

De grafiek van $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ heeft twee asymptoten. Welke twee? Schrijf het domein en bereik van f op.

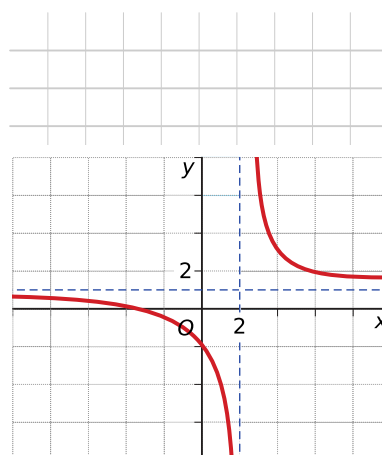
Antwoord

Aangezien je niet door 0 kunt delen is er iets bijzonders als $x-2=0$ en dus als $x=2$. $f(2)$ bestaat niet, maar x -waarden vlak bij 2 kun je wel invullen: $f(2,001) = 6001$ en $f(2,0001) = 60001$, enzovoort. Verder is $f(1,999) = 5999$ en $f(1,9999) = 59999$.

De grafiek van f komt steeds dichters langs de lijn $x=2$ te lopen. $x=2$ is de vergelijking van de verticale asymptoot.

Voor de horizontale asymptoot ga je anders te werk. Kies x -waarden als 1000, 10000, 100000, enzovoort. Bereken de bijbehorende functiewaarden. Doe hetzelfde met -1000, -10000, -100000, enzovoort. Je ziet dan dat de functiewaarden steeds dichters in de buurt van $y=1$ liggen. Hoe verder je van 0 af zit, hoe beter die benadering. De lijn $y=1$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van f .

Het domein van f is: $\langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$. Het bereik van f is: $\langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$.



Figuur 4.4

Opgave 3

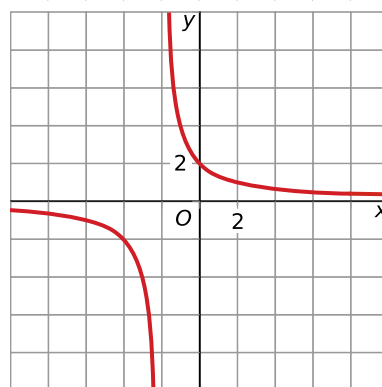
Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{4}{x} + 2$.

- Maak de grafiek van f met de grafische rekenmachine. Gebruik de standaardinstellingen van het venster.
- Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek? Hoe zie je dat aan de tabel van f ?
- Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt?
- Welk getal naderen de functiewaarden als x heel klein wordt?
- Wat is de vergelijking van de horizontale asymptoot?
- Schrijf het domein en het bereik van f op.

Opgave 4

Je ziet de grafiek van de functie f met $f(x) = \frac{4}{x+2}$.

- Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek?
- Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt?
- Welk getal naderen de functiewaarden als x heel klein wordt?
- Welke vergelijking heeft de horizontale asymptoot?
- Schrijf het domein en het bereik van f op.



Figuur 4.5

Opgave 5

Gegeven is de functie $g(x) = \frac{x-5}{x+10}$.

- Welke asymptoten heeft de grafiek van g ?
- Geef het domein en bereik van g .

Voorbeeld 2

Dit is een grafiek van de functie $f(x) = \frac{4x^2-16}{x^2-100}$.

Hij is gemaakt met de grafische rekenmachine met het standaardvenster.

Bepaal alle karakteristieken en het bereik van f .

Antwoord

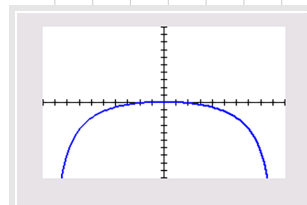
Op grond van dit plaatje zou je verkeerde conclusies kunnen trekken. Bijvoorbeeld dat het maximum $f(0) = 0$ is. En dat de grafiek een soort afgeplatte bergparabool is. Dat is niet goed.

Eerst kijk je of er nulpunten en asymptoten zijn:

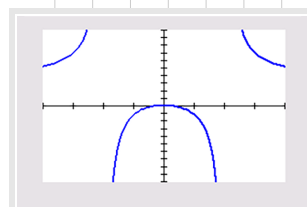
- $f(x) = 0$ levert op: $\frac{4x^2-16}{x^2-100} = 0$ en dus: $4x^2 - 16 = 0$.
Er zijn daarom twee nulpunten: $x = -2$ en $x = 2$.
- Je deelt door $x^2 - 100$ en dus ontstaan er problemen als $x^2 - 100 = 0$.
Dit betekent dat $x = 10$ en $x = -10$ misschien verticale asymptoten zijn. Door getallen dicht in de buurt van 10 dan wel -10 in te vullen, merk je dat dit echt twee verticale asymptoten zijn.
- Als je grote getallen (of grote negatieve getallen) invult naderen de functiewaarden 4. Dus $y = 4$ is de horizontale asymptoot.

Pas nu de vensterinstellingen aan en breng alle karakteristieken van de grafiek in beeld. Bij $x = 10$ blijkt een maximum te zitten: $f(0) = 0,16$. (Laat de rekenmachine een maximum zoeken tussen bijvoorbeeld de nulpunten.)

Het bereik van f lees je uit de grafiek af, rekening houdend met het maximum en de horizontale asymptoot: $B_f = \langle \leftarrow; 0,16 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$.



Figuur 4.6



Figuur 4.7

Opgave 6

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{2x^2-12}{x^2-25}$.

- Plot de grafiek van f . Welke vensterinstellingen heb je gebruikt?
- Geef de karakteristieken van f .
- Geef het domein en het bereik van f .

Opgave 7

Gegeven is de functie g met $g(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

- Waarom heeft de grafiek van deze functie geen verticale asymptoot?
- Welk nulpunt heeft de grafiek van g ?
- Onderzoek of de grafiek van g een horizontale asymptoot heeft.
- Geef het domein en het bereik van g .

Verwerken

Opgave 8

Geef het domein, het bereik en de asymptoten van de volgende functies.

a $f(x) = 4 - \frac{4}{x}$

b $g(x) = \frac{4-x}{x}$

c $h(x) = \frac{x}{x^2-4}$

d $k(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

Opgave 9

In een natuurgebied zijn er herten uitgezet. Het aantal herten kan bepaald worden met de formule $N = 150 - \frac{60}{1+0,1t}$. Hierin is N het aantal herten en t het aantal jaar na het uitzetten van de herten.

- a** Hoeveel herten zijn er uitgezet?
- b** Welke asymptoot hoort bij de grafiek van deze formule?
- c** Wat is de betekenis van de asymptoot in deze praktijksituatie?
- d** Na hoeveel jaar zijn er 120 herten?

Opgave 10

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{-5x^2}{(x-10)^2}$.

- a** Bereken de nulpunten van deze functie.
- b** Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?
- c** Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van f goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?
- d** Bepaal het bereik van f .

Opgave 11

Voor de totale kosten (TK) bij de productie van een bepaald artikel geldt: $TK = 100 + 0,1q^2$ waarin q het aantal exemplaren voorstelt.

- a** Bereken de gemiddelde kosten per exemplaar bij een productie van 120 stuks op twee decimalen nauwkeurig.
- b** Leg uit waarom de gemiddelde kosten het hellingsgetal zijn van de lijn door $(0,0)$ en (q,TK) .
- c** Stel een functie op voor de gemiddelde kosten per exemplaar (GK) als functie van q .
- d** Welke asymptoot heeft de functie GK ? Schrijf het domein en het bereik van GK op.

Toepassen

Opgave 12: Toonhoogte

De toonhoogte van geluid wordt bepaald door de frequentie. Hoe hoger de frequentie, hoe kleiner de golflengte wordt. De frequentie wordt uitgedrukt in hertz (Hz) en geeft het aantal trillingen per seconde aan. Weet je de frequentie f , dan kun je de golflengte W berekenen: $W = \frac{330}{f}$. 330 is de zogenaamde voortplantingssnelheid van de golf in meter per seconde. Een geluidsinstallatie kan geluiden van 15 Hz tot 30000 Hz produceren.

- Als je $[15, 30000]$ als domein kiest, welk bereik heeft W dan?
- Vleermuizen kunnen soms wel geluiden met een frequentie van 120000 Hz horen. Is dit een hoog of juist laag geluid?
- Welke golflengte heeft dat geluid?
- Mensen kunnen geluiden onder de 20 Hz nauwelijks horen. Gaat het dan om bassen of hoge tonen?
- Welke golflengte heeft zo'n geluid?
- Tot welke waarde nadert W als f heel groot wordt?

Opgave 13: Zuurstofgehalte

Door een technische storing in de airconditioning van een groot gebouw neemt het zuurstofgehalte in de lucht tijdelijk af. De technische staf heeft het verloop van het zuurstofgehalte beschreven met de formule: $Z(t) = 200 \left(1 - \frac{10}{t+10} + \frac{100}{t+10^2} \right)$.

Hierin is t de tijd in minuten gerekend vanaf het moment dat de storing begon. Verder is Z het aantal cm^3 zuurstof per liter lucht op het tijdstip t . Op $t = 0$ is het zuurstofgehalte normaal.

- Bereken $Z(0)$. Schets de grafiek van $Z(t)$ voor $0 \leq t \leq 100$.
- Welke asymptoten heeft de grafiek van $Z(t)$? Welke betekenis hebben ze?
- Op welk tijdstip is het zuurstofgehalte minimaal?
- De medische staf vindt een zuurstofgehalte van 80% van het normale niveau, nog juist toelaatbaar. Bereken gedurende hoeveel minuten het zuurstofgehalte ontoelaatbaar laag is.

Testen

Opgave 14

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{4+2x}{x-1}$.

- Bereken $f(100)$ en $f(-100)$ op vier decimalen nauwkeurig.
- Bereken de nulpunten van de grafiek van f .
- Breng de grafiek van f in beeld.
- Schrijf de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f op.
- Schrijf het domein en het bereik van f op.

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x^2}{x^4+10}$.

- a** Bereken de nulpunten van de grafiek van deze functie.
- b** Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?
- c** Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van f goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?
- d** Bepaal het bereik van f . (Benaderingen op twee decimalen nauwkeurig.)

Opgave 16

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die zaden nodig hebben om voor 50% te ontkiemen. Proefondervindelijk is een verband tussen temperatuur en kiemtijd gebleken. De kiemtijd K is geteld in dagen en de temperatuur T is gemeten in °C. Dit verband wordt gegeven door: $K = \frac{89}{T-2}$.

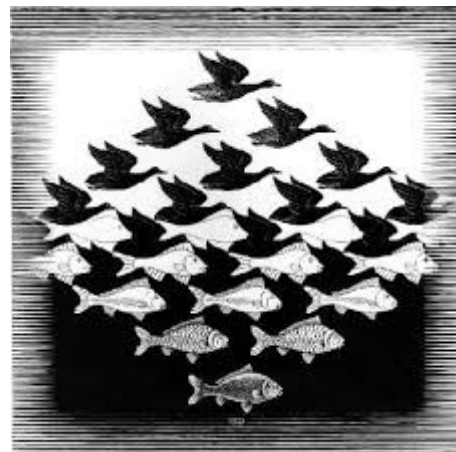
- a** Boven welke temperatuur is de helft van de zaden al binnen 10 dagen ontkiemd?
- b** Wat is een zinvol domein voor K als functie van T ?
- c** Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?
- d** Welk bereik hoort bij het gekozen domein?

2.5 Verschuiven en vervormen

Inleiding

Veel functies ontstaan uit een standaardfunctie door bij de functie een getal op te tellen en/of door de functie met een getal te vermenigvuldigen. De grafieken lijken dan op elkaar. De karakteristieken van die grafiek zijn dan uit die van de standaardfunctie af te leiden. Zo zijn alle functies van de vorm $y = ax + b$ af te leiden uit de standaardfunctie $y = x$. Ze hebben bijvoorbeeld dezelfde vorm: een rechte lijn.

Bij dit onderdeel heb je bij enkele opgaven een computer nodig!



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- grafieken verschuiven en herschalen;
- karakteristieken van verschoven of herschaalde grafieken van standaardfuncties bepalen.

Voorkennis

- de karakteristieken van een functie bepalen en zo de grafiek goed in beeld krijgen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven;
- werken met de belangrijkste basisfuncties.

Verkennen

Opgave V1

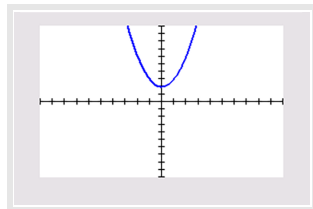
De grafiek van $f(x) = x^2$ kun je vervormen en/of verschuiven.

Bekijk de applet

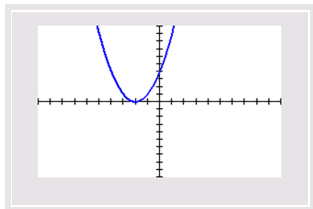
- Maak de grafiek van $g_1(x) = (x - 4)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f .
- Maak de grafiek van $g_2(x) = x^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_2 ontstaat uit die van f .
- Maak de grafiek van $g_3(x) = 1,5 \cdot x^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_3 ontstaat uit die van f .
- Maak de grafiek van $g_4(x) = (3 \cdot x)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_4 ontstaat uit die van f .
- Maak de grafiek van $g_5(x) = 1,5(x - 4)^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_5 ontstaat uit die van f .

Uitleg

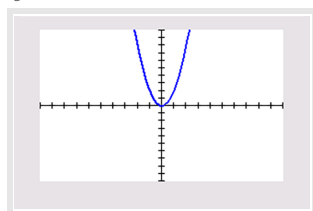
Je ziet de grafiek van de kwadratische standaardfunctie $f(x) = x^2$ op de grafische rekenmachine met de standaardinstellingen. Door de functie te vermenigvuldigen met een getal of door er een getal bij op te tellen, vervorm je de grafiek van deze standaardfunctie.



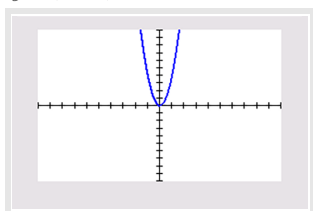
$$y = x^2 + 2$$



$$y = (x + 2)^2$$



$$y = 2 \cdot x^2$$



$$y = (2 \cdot x)^2$$

Figuur 5.3

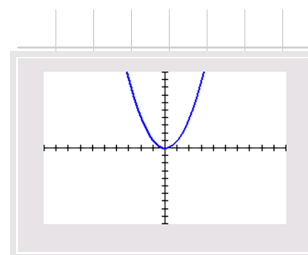
Je moet vier van die vervormingen kennen:

- De grafiek van $y = x^2 + 2$ ontstaat door van alle punten van de standaardgrafiek de y -coördinaat met 2 te verhogen. De grafiek schuift dus 'omhoog'.
- De grafiek van $y = (x + 2)^2$ ontstaat door van alle punten van de standaardgrafiek de x -coördinaten te vervangen door de x -coördinaat van het punt dat 2 verder naar rechts ligt. De grafiek verschuift dus naar 'links'.
- De grafiek van $y = 2 \cdot x^2$ ontstaat door van alle punten van de standaardgrafiek de y -coördinaat met 2 te vermenigvuldigen. De punten van de grafiek komen daarom 2 keer zo ver van de x -as af te liggen. Dit heet 'herschalen' in de y -richting.
- De grafiek van $y = (2 \cdot x)^2$ ontstaat door van alle punten van de standaardgrafiek de x -coördinaten te vervangen door de x -coördinaat van het punt dat 2 keer zo ver naar rechts ligt. De punten van de grafiek komen daarom een $\frac{1}{2}$ keer zo ver van de y -as te liggen. Dit heet 'herschalen' in de x -richting.

Opgave 1

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^2$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door verschuiven en herschalen van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke vervormingen dat zijn.

- $y_2 = 0,5 \cdot x^2$
- $y_3 = (x - 4)^2 + 2$
- $y_4 = 2 - x^2$
- $y_5 = (3x)^2 + 2$



Figuur 5.2

Opgave 2

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^3$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door verschuiven en/of herschalen van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke vervormingen dat zijn.

- a $y_2 = 3 \cdot x^3$
- b $y_3 = (x + 4)^3 + 2$
- c $y_4 = 5 - 2x^3$
- d $y_5 = (0,5x)^3 + 1$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Ga uit van een functie $y = f(x)$, de rode grafiek in de figuur.

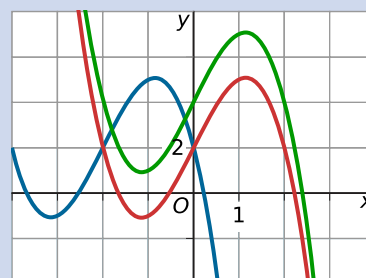
Je kunt deze grafiek vervormen. Bijvoorbeeld:

- De groene grafiek, $y = f(x) + 2$, is ontstaan door de grafiek van f 2 naar 'boven' te verschuiven. Je noemt dat ook **verschuiven in de y-richting** over 2.
- De blauwe grafiek, $y = f(x + 2)$, is ontstaan door de grafiek van f 2 naar 'links' te schuiven. Je noemt dat ook **verschuiven in de x-richting** over -2.

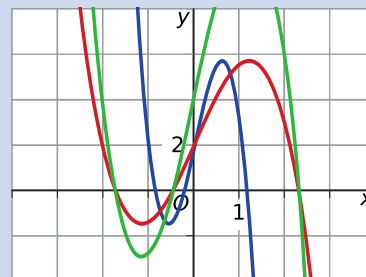
Ga weer uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

- De groene grafiek, $y = 2 \cdot f(x)$, is ontstaan door de grafiek van f ten opzichte van de x -as met factor 2 te vermenigvuldigen. Dit noem je ook **herschalen in de y-richting** met factor 2.
- De blauwe grafiek, $y = f(2 \cdot x)$, is ontstaan door de grafiek van f ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{2}$ te herschalen. Dit noem je ook **herschalen in de x-richting** met factor $\frac{1}{2}$.

Verschuivingen en herschalingen kunnen ook worden gecombineerd.



Figuur 5.4

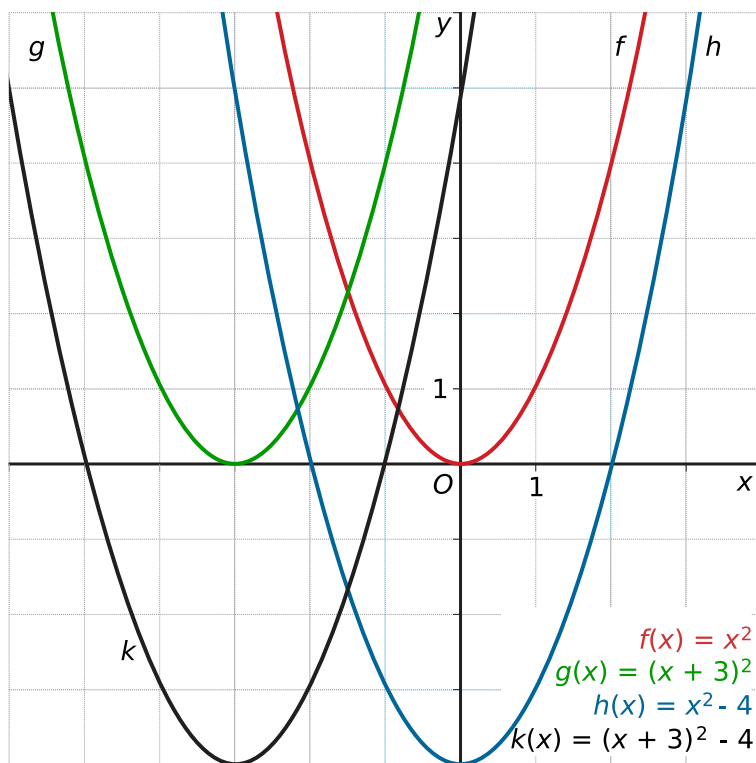


Figuur 5.5

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Grafieken verschuiven

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$, met als top $(0,0)$.



Figuur 5.6

De grafiek van g ontstaat uit die van f door f te verschuiven in de x -richting over -3 . Het functievoorschrift van g wordt $g(x) = (x + 3)^2$. Let op de haakjes! De top verschuift mee en komt te liggen op $(-3,0)$.

De grafiek van h ontstaat door die van $f(x)$ te verschuiven in de y -richting over -4 . Het functievoorschrift wordt $h(x) = x^2 - 4$. De top verschuift weer mee en komt te liggen op $(0, -4)$.

De grafiek van k ontstaat door die van f 3 naar 'links' en 4 'omlaag' te verschuiven. Het functievoorschrift wordt $k(x) = (x + 3)^2 - 4$. Let op de haakjes! De top verschuift weer mee en komt te liggen op $(-3, -4)$.

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = x^3$.

- Plot de grafiek van f .
- Schrijf het functievoorschrift van $y_2 = f(x + 4)$ op. Plot de grafiek van y_2 . Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van f ?
- Schrijf het functievoorschrift van $y_3 = f(x) + 5$ op. Plot de grafiek van y_3 . Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van f ?
- Schrijf het functievoorschrift van $y_4 = f(x + 4) + 5$ op. Plot de grafiek van y_3 . Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van f ?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Grafieken herschalen

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$.

De grafiek van $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2x^2$ ontstaat uit die van f door herschalen in de y -richting met factor 2. Je ziet in de grafiek dat de y -coördinaat van punt B gelijk is aan 8 en dat is twee keer zo groot als de y -coördinaat van punt A .

Stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan geldt:

$$g(x) = 2 \cdot f(x) = 2(x^2 - 2x).$$

Je vermenigvuldigt de hele formule met 2 en je moet dus soms met haakjes werken. Eventueel kun je de haakjes daarna weer wegwerken:

$$2(x^2 - 2x) = 2x^2 - 4x$$

Algemeen geldt: de grafiek van $g(x) = d \cdot f(x)$ ontstaat uit die van f door herschalen in de y -richting met factor d .

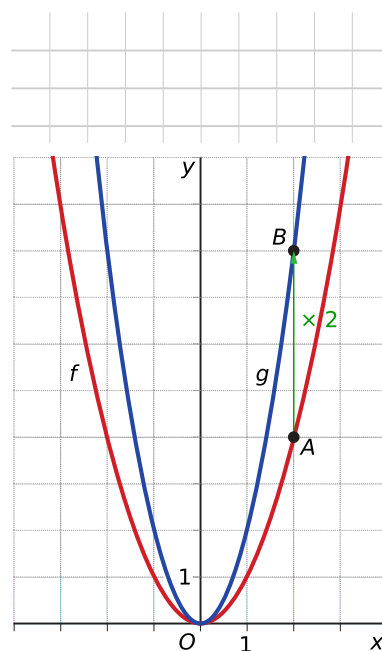
De grafiek van $g(x) = f(2x) = (2x)^2$ ontstaat uit die van f door herschalen in de x -richting met factor $\frac{1}{2}$.

Je ziet in de grafiek bijvoorbeeld dat de x -coördinaat van punt B 1 is en dat is een $\frac{1}{2}$ keer zo groot als de x -coördinaat van punt A .

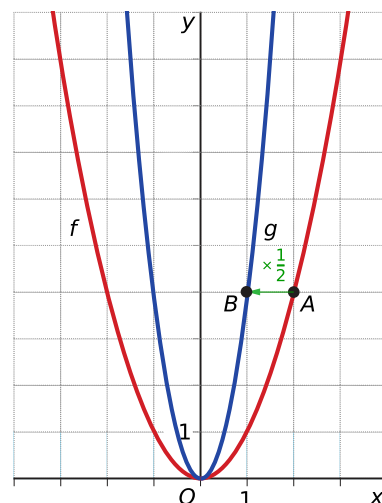
Stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan geldt:

$g(x) = f(2x) = (2x)^2 - 2 \cdot 2x$. Let op de haakjes! Je vervangt dus elke x in de formule door $2x$. Eventueel kun je daarna de haakjes weer wegwerken: $(2x)^2 - 2 \cdot 2x = 4x^2 - 4x$.

Algemeen geldt: de grafiek van $g(x) = f(c \cdot x)$ ontstaat uit die van f door herschalen in de x -richting met factor $\frac{1}{c}$.



Figuur 5.7



Figuur 5.8

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = x^3$.

- Plot de grafiek van f .
- Schrijf het functievoorschrift van $y_2 = f(2x)$ op. Plot de grafiek van y_2 . Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van f ?
- Schrijf het functievoorschrift van $y_3 = 2 \cdot f(x)$ op. Plot de grafiek van y_3 . Hoe ontstaat de grafiek van y_3 uit die van f ?

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 4x$.

- Plot de grafiek van f .
- Schrijf het functievoorschrift van $y_2 = f(2x)$ op. Plot de grafiek van y_2 . Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van f ?
- Schrijf het functievoorschrift van $y_3 = 2 \cdot f(x)$ op. Plot de grafiek van y_3 . Hoe ontstaat de grafiek van y_3 uit die van f ?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: Verschuiven en herschalen

Door welke verschuivingen en/of herschalingen is de functie $g(x) = 3 \cdot (x - 7)^2 + 4$ ontstaan uit de standaardfunctie $f(x) = x^2$?

Opgave 6

Geef bij elk van de volgende functies aan welke verschuivingen en/of vervormingen je moet toepassen om de grafiek uit die van f te laten ontstaan. (Let op de volgorde!)

- a $g(x) = 2 \cdot f(x) + 3$
- b $h(x) = f(x - 4) + 2$
- c $k(x) = -f(x) + 2$
- d $l(x) = f(3x) + 2$
- e $m(x) = 2 \cdot f(x - 1) + 4$

Opgave 7

Schrijf het functievoorschrift op van g als de grafiek uit die van f ontstaat door:

- a herschalen in de y -richting met -2 en dan 1 in de y -richting verschuiven;
- b herschalen in de x -richting met factor 2 en dan -3 in de y -richting verschuiven;
- c verschuiven in de x -richting met 4 en verschuiven in de y -richting met -2 ;
- d herschalen in de x -richting met factor $\frac{1}{2}$ en dan een verschuiving in de x -richting van 4 ;
- e verschuiving van 4 in de x -richting, dan herschalen in de y -richting met factor $0,5$ en ten slotte verschuiving van -2 in de y -richting.

Voorbeeld 4

Als je een grafiek op de grafische rekenmachine wilt maken, dan moet je geschikte vensterinstellingen geven. Dan kan het nuttig zijn om te zien dat een bepaalde functie door verschuiven en/of herschalen kan ontstaan uit een veel eenvoudiger standaardfunctie. Zeker als je van die standaardfunctie alle karakteristieken weet.

Hoe breng je de grafiek van $f(x) = 200 - 5(x - 30)^2$ goed in beeld?

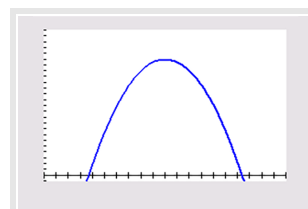
Antwoord

Je herkent dan de functie als $f(x) = -5(x - 30)^2 + 200$ met als bijbehorende standaardfunctie $y = x^2$. Die basisfunctie heeft als grafiek een dalparabool met top $(0,0)$. De grafiek van f ontstaat uit die van $y = x^2$ door:

- een verschuiving van 30 ten opzichte van de y -as;
- een herschaling met factor -5 ten opzichte van de x -as;
- een verschuiving van 200 ten opzichte van de x -as.

De top van de grafiek van f is daarom $(30, 200)$ en de grafiek is een bergparabool.

De grafiek van $y = x^2$ is goed in beeld met venster $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 10$. Op dit venster kun je ook de beschreven verschuivingen toepassen. De grafiek van f is daarom goed in beeld als $20 \leq x \leq 40$ en $-10 \leq y \leq 250$.



Figuur 5.9

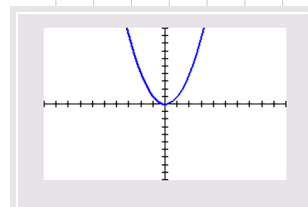
Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 0,25(x - 5)^4 - 10$. De grafiek van deze functie kan door verschuiven en/of herschalen ontstaan uit die van de bijbehorende standaardfunctie.

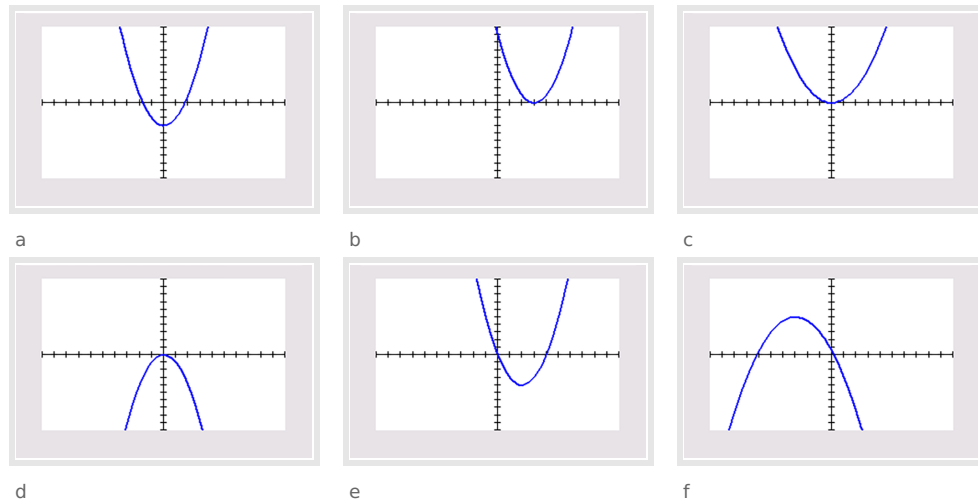
- Welke standaardfunctie is dat?
- Welke verschuivingen en/of vervormingen moeten er dan achtereenvolgens worden toegepast?
- Bepaal nu het minimum van de grafiek van de gegeven functie. Voor welke waarde van x treedt dit minimum op?

Opgave 9

Je ziet hier de grafiek van $y_1 = x^2$ in de standaardinstellingen van het venster van de rekenmachine. Bekijk de zes grafieken in de standaardinstellingen van het venster van de grafische rekenmachine. Ze zijn allemaal ontstaan uit vervorming van de grafiek van y_1 .



Figuur 5.10



Figuur 5.11

Geef bij elke grafiek aan welke transformatie er is toegepast. Schrijf ook het juiste functievoorschrift op.

Opgave 10

De grafiek van de functie f met $f(x) = (x - 20)^2 + 200$ komt met de standaardinstellingen van het venster op de grafische rekenmachine niet in beeld.

Leg uit hoe je door het toepassen van verschuivingen de vensterinstellingen in één keer zo kunt maken, dat die grafiek wel goed in beeld komt.

Verwerken

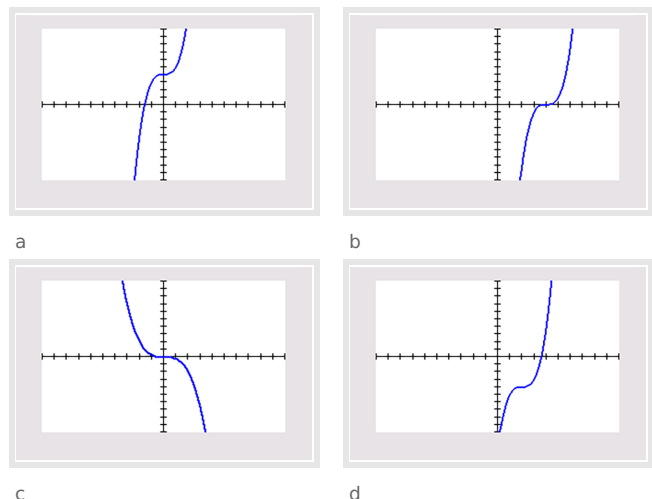
Opgave 11

Ga uit van de standaardfunctie $f(x) = 2x^2$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door verschuiven en/of herschalen van deze standaardfunctie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke verschuivingen en/of herschalingen dat zijn en geef de bijbehorende formules.

- a $y_2 = 0,5 \cdot f(x)$
- b $y_3 = f(x - 4) + 2$
- c $y_4 = 2 - f(x)$
- d $y_5 = f(3x) - 4$

Opgave 12

Hier zie je vijf keer het venster van de grafische rekenmachine in de basisinstellingen. Deze basisgrafiek is die van $y_1 = x^3$. De overige grafieken zijn door verschuiven en/of herschalen van die grafiek ontstaan.



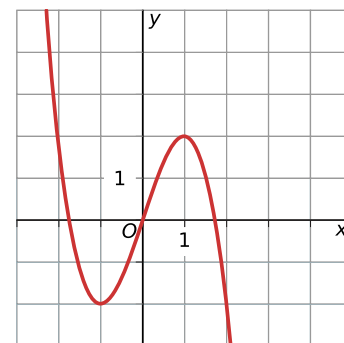
Figuur 5.13

Geef bij elke functie het juiste voorschrift.

Opgave 13

Hier en op het [werkblad](#) zie je de grafiek van $y_1 = f(x)$. Teken de grafieken van de volgende functies. Schrijf erbij welke verschuivingen en/of herschalingen je toepast.

- a $y_2 = f(x - 2)$
- b $y_3 = -2 \cdot f(x)$
- c $y_4 = f(x) - 2$
- d $y_5 = f(2x) - 1$



Figuur 5.14

Opgave 14

Een weggeslingerde kogel beschrijft ten opzichte van een xy -assenstelsel de volgende baan: $y = -0,02(x - 10)^2 + 4$. Het moment van loslaten ligt op $y = 2$. Dit is bij $x = 0$. y en x zijn beide in meter uitgedrukt.

- Geef geschikte vensterinstellingen zodat je de volledige baan van de kogel op de grafische rekenmachine in beeld kunt krijgen.
- Bereken hoe ver deze kogelstoter met zijn kogel komt. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.
- Na hoeveel meter is de kogel weer even hoog als op het moment van loslaten?

Opgave 15

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = \sqrt{x}$.

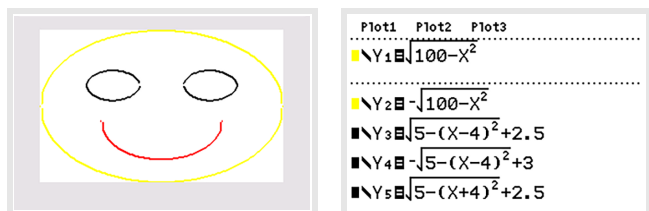
- De grafiek van y_1 ontstaat door op de grafiek van f een verschuiving van 2 'omlaag' en verschuiving van 5 naar 'rechts' toe te passen. Geef het functievoorschrift van y_1 en het domein en bereik daarvan.
- De grafiek van y_2 ontstaat door de grafiek van f eerst te herschalen met factor 2 in de y -richting, vervolgens een verschuiving van 3 in de x -richting en tot slot verschuiving van -4 in de y -richting toe te passen. Geef het functievoorschrift van y_2 en het domein en bereik daarvan.
- De grafiek van y_3 ontstaat door de grafiek van f eerst te herschalen met factor $-\frac{1}{2}$ in de x -richting, vervolgens verschuiving van 2 in de x -richting toe te passen en tot slot verschuiving van 4 in de y -richting toe te passen. Geef het functievoorschrift van y_3 en het domein en bereik daarvan.

Toepassen

Opgave 16: Smiley maken

Door gebruik te maken van de juiste functies (en vervormingen en verschuivingen) kun je smiley's maken op je grafische rekenmachine. Dat is best een aardige sport en nog leerzaam ook... De smiley hieronder bestaat uit een aantal (soms vervormde en verschoven) halve cirkels. Omdat voor elk punt (x, y) op een cirkel om de oorsprong $O(0,0)$ met straal 10 geldt: $x^2 + y^2 = 100$, noem je dit wel de vergelijking van deze cirkel. Om de grafische rekenmachine te kunnen gebruiken zet je de vergelijking om in een functievoorschrift, eigenlijk in twee functievoorschriften. Ga na, dat: $y = \pm\sqrt{100 - x^2}$. Deze formules zijn gebruikt om de buitenste cirkel (twee halve cirkels) van de smiley te maken, zoals je ziet. De andere halve cirkels krijg je door de straal kleiner te maken en verschuiven en herschalen toe te passen. Ten slotte zet je het assenstelsel uit.

Maak zelf een smiley en laat een medeleerling bedenken welke formules je hebt gebruikt (voordat je het assenstelsel uitzet). Doe daarna het omgekeerde.



Figuur 5.15

Opgave 17: Winstfunctie

In een bepaald economisch model komt de winstfunctie $TW = -0,01q^2 + 4q$ voor. Hierin is q het aantal verkochte exemplaren van een bepaald artikel en TW de winst in duizenden euro. Gebruik de nulpunten om het maximum van deze functie te bepalen. Beredeneer daarna welke vensterinstellingen geschikt zijn om de grafiek van TW te plotten.

Testen

Opgave 18

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$.

Welke verschuivingen en/of herschalingen moet je toepassen om de grafiek te krijgen van de volgende functies? Schrijf ook het bijbehorende functievoorschrift op.

- a $y_2 = f(x - 3)$
- b $y_3 = 0,5 \cdot f(x) + 1$
- c $y_4 = f(3x)$

Opgave 19

Om de grafiek van $f(x) = 10\sqrt{x} + 50$ goed in beeld te krijgen op de grafische rekenmachine, moet je weten hoe deze ontstaat door verschuiving en/of herschalen van de bijbehorende standaardfunctie.

- a Welke standaardfunctie is dat?
- b Welke verschuiving en/of herschaling moet je op de grafiek van de standaardfunctie toepassen?
- c Schrijf op bij welke vensterinstellingen de grafiek van f goed in beeld komt.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Functies en grafieken**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- functie — invoerwaarde — functiewaarde — functievoorschrift
- domein — bereik — nulwaarden/nulpunten — extremen/toppen
- lineaire functie — kwadratische functie — familie van functies, parameters
- asymptoten — karakteristieken (nulpunten, toppen, asymptoten)
- ongelijkheid

Activiteitenlijst

- functies herkennen — de notaties bij het functiebegrip gebruiken
- het domein en het bereik van een functie bepalen — de intervalnotatie gebruiken
- werken met lineaire functies en kwadratische functies
- asymptoten bepalen — karakteristieken van een functie bepalen
- ongelijkheden oplossen

Achtergronden

René Descartes (1596–1650) – een Franse geleerde die een groot deel van zijn leven in De Nederlanden woonde – bedacht dat je lijnen en krommen kunt beschrijven met formules in x en y als je een assenstelsel invoert. Maar in die tijd werden deze lijnen en krommen als statische meetkundige objecten beschouwd, waaraan je, door ze in algebraïsche taal om te vormen, gemakkelijk kunt rekenen.

Pas nadat **Isaac Newton (1642–1727)** de natuurkundige bewegingswetten in wiskunde omzette, werden formules gebruikt om verbanden tussen variabelen te beschrijven. Daarmee ontstond langzamerhand het functiebegrip: bij een bepaald tijdstip hoorde een bepaalde afgelegde afstand, die afstand was een functie van de tijd.

De wiskundige **Leonhard Euler (1707–1783)** voerde de notatie $f(x)$ in. In 1748 schreef Euler het boek 'Introductio in analysin infinitorum', waarin de fundamenteën van de analyse van functies systematisch uiteen werden gezet. Daarmee is hij de grondlegger van de functietheorie.



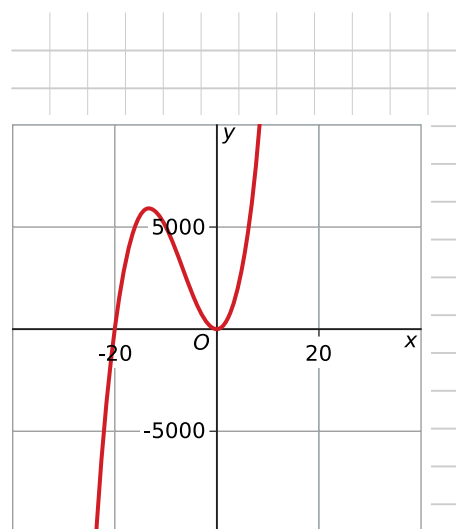
Figuur 6.1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = 5x^2(x + 20)$ en $g(x) = 50x^2$. De grafiek van f zie je hier.

- Bereken algebraïsch de nulpunten van f en breng de grafiek in beeld. Pas de vensterinstellingen zo aan, dat je hetzelfde beeld krijgt als in de gegeven grafiek. Zet nu ook de grafiek van g er bij.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
- Los op: $f(x) < g(x)$.



Figuur 6.2

Opgave 2

Bereken bij deze functies eerst de nulpunten. Bepaal vervolgens het domein en het bereik.

- $f(x) = x^2(x^2 - 400)$
- $g(x) = \sqrt{20 - x} - 40$

Opgave 3

Gegeven is de functie $y(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$.

- Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?
- Schrijf het domein en het bereik op.
- Los op: $y \geq 2$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0,25(x - 10)^2 - 16$.

- Door welke herschalingen en/of verschuivingen kan de grafiek van f ontstaan uit die van de standaardfunctie $y = x^2$?
- Bepaal de top en de nulpunten van de grafiek van f .
- Los algebraïsch op: $f(x) < 10$.

Opgave 5

In een steenkolenmijn wordt het steenkolengruis via een transportband omhooggevoerd. Het verband tussen de hoogte h (in meter) en de tijd t (in seconden) is lineair. Na 10 seconden is het gruis op een hoogte van 30 meter onder zeeniveau. Na 20 seconden is het gruis op 5 meter onder zeeniveau. Het gruis wordt uiteindelijk gestort op 22 meter boven zeeniveau.

- Stel het functievoorschrift op voor h als functie van t .
- Na hoeveel seconden komt het gruis boven de grond?
- Geef het domein en het bereik van h in de intervalnotatie.

Opgave 6

Een sneeuwbal wordt van een hele lange besneeuwde helling geroold. De sneeuwbal wordt daardoor bij elke omwenteling dikker. Stel dat die sneeuwbal op het moment van loslaten een diameter van 10 cm heeft en zuiver rond is. Neem aan dat de sneeuwbal telkens zuiver rond blijft en dat bij elke omwenteling de diameter met 1 cm toeneemt. Het volume V van een bol kun je berekenen met de formule $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ waarin r de straal van de bol is. De hoeveelheid sneeuw S waaruit de sneeuwbal bestaat, is een functie van het aantal omwentelingen a .

- Stel een functievoorschrift voor $S(a)$ op.
- Breng de grafiek in beeld. Schrijf op bij welke vensterinstellingen een bij de situatie passend deel van de grafiek in beeld komt.
- Na hoeveel omwentelingen heeft de sneeuwbal een volume van ongeveer 1000 dm^3 ?

Toepassen

Opgave 7: Economisch model

Functies worden regelmatig gebruikt om economische modellen te beschrijven. Bijvoorbeeld hangt de hoeveelheid q die per week van een product verkocht wordt af van de prijs p . Dat verband kan onder bepaalde economische omstandigheden lineair zijn, bijvoorbeeld: $q = 4000 - 200p$ met p in euro's en q in eenheid product. Met de grafische rekenmachine is van deze formule een grafiek te maken. Omdat zowel p als q positieve getallen zijn varieert p van 0 tot 20 en q van 0 tot 4000.

In dit model heeft elke euro prijsverhoging een daling van de verkoop met 200 stuks tot gevolg. Maar zo'n prijsverhoging hoeft niet ongunstig voor de opbrengst R (R van resultaat) te zijn: R hangt niet alleen van de verkochte hoeveelheid q af, maar ook van de prijs p per stuk. De opbrengst is de verkochte hoeveelheid maal de prijs per eenheid. In formulevorm: $R = p \cdot q$.

Door beide formules te combineren kun je R uitdrukken in p : $R = p \cdot (4000 - 200p)$. Met de GR vind je dat de opbrengst maximaal is als $p = 10$. Reken na, dat de maximale opbrengst € 20000,00 is.

Een bedrijf is meer geïnteresseerd in de maximale winst. Om die te berekenen moet je ook iets weten over de kosten K die worden gemaakt voor de verkoop van het product. Vaak zijn die afhankelijk van de hoeveelheid q . Stel je voor dat elk product het bedrijf € 6,00 kost. Dan geldt: $K = 6q$.

De winst is nu: $W = R - K = p \cdot (4000 - 200p) - 6q$.

Dus: $W = p \cdot (4000 - 200p) - 6(4000 - 200p) = -200p^2 + 5200p - 24000$.

Met de GR bepaal je de waarde van p waarbij de winst maximaal is.

- Leid zelf de winstformule af.
- Bereken de maximale winst die dit bedrijf per week kan maken.

Een levensmiddelenbedrijf heeft 30000 blikken bonen ingekocht voor € 0,90 per stuk. Men wil die blikken bonen binnen 30 werkdagen als aanbieding verkopen. Uit ervaring weet de handelaar dat zijn prijs bepaalt hoeveel blikken bonen hij per dag kan verkopen en dat hij daarvoor uit kan gaan van de volgende formule: $p = 2,5 - \frac{q}{1000}$ waarin p de verkoopprijs in € per blik is en q het aantal blikken dat hij per dag verkoopt.

- c Als hij deze blikken bonen verkoopt voor € 1,60 per stuk, raakt hij ze dan binnen de gestelde termijn kwijt? En maakt hij winst op de partij?
- d Bij welke verkoopprijs per blik is zijn winst maximaal als hij de termijn van 30 werkdagen om alles te verkopen laat vallen?

Examen

Opgave 8: Toltunnel

Het aantal personenauto's (A) dat per dag van een nieuw aan te leggen toltunnel gebruik zal maken, is volgens een verkeersdeskundige te berekenen met de formule: $A = 400T^2 - 9150T + 46800$. Hierbij is T het toltarief in euro. Toltarieven hoger dan € 7 blijven buiten beschouwing. Met het oog op een snelle doorstroming zal de betaling op elektronische wijze geschieden. Hierdoor is het mogelijk om een toltarief van € 2,67 in rekening te brengen omdat dat niet op praktische bezwaren stuit.

- a Bereken de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's bij een toltarief van € 2.
- b Bereken in centen nauwkeurig bij welk toltarief de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's maximaal is.
- c Bereken met hoeveel procent het aantal personenauto's afneemt als bij een tarief van € 2,40 een tariefsverhoging van 5% wordt toegepast.

(bron: examen vwo wiskunde A in 1992, eerste tijdvak)

Opgave 9: Wielrennen

Bij wielrennen gaat het er meestal om in een zo kort mogelijke tijd een gegeven afstand af te leggen. Daarnaast kent men het werelduurrecord. Daarbij gaat het erom in precies één uur een zo groot mogelijke afstand af te leggen. Op 2 september 1994 reed Miguel Indurain op de wielersbaan van Bordeaux in één uur 53,040 km. Hij vestigde daarmee het wereld-uurrecord. Kort daarna raakte hij zijn record kwijt aan Toni Rominger, die op 5 november 1994 op dezelfde baan in één uur 55,291 km reed. De afgelegde afstand bestaat uit een groot aantal rondes op de wielersbaan. Elke ronde is 250 meter. Stel dat Indurain en Rominger deze ritten tegelijkertijd hadden gereden, en naast elkaar waren gestart en dat ieder met constante snelheid reed.

- a Hoeveel keer zou Rominger na de start in de loop van het uur Indurain hebben ingehaald? Licht je antwoord toe.

Om te voorspellen of een wielrenner een bepaalde snelheid kan halen, kijkt men naar het daarvoor benodigde vermogen (W), dat is de energie die de wielrenner per seconde moet leveren. Daarbij speelt de luchtweerstand een belangrijke rol. De luchtweerstand kan onder andere verkleind worden door de stroomlijn van fietser en fiets te verbeteren. Men gebruikt vaak de volgende formule voor W : $W = (k \cdot v^2 + 4) \cdot v$. Hierbij geldt:

- v is de snelheid (in m/sec);
- W is het vermogen (in joule/sec) dat de wielrenner moet leveren;
- k is een getal dat onder andere te maken heeft met de luchtweerstand.

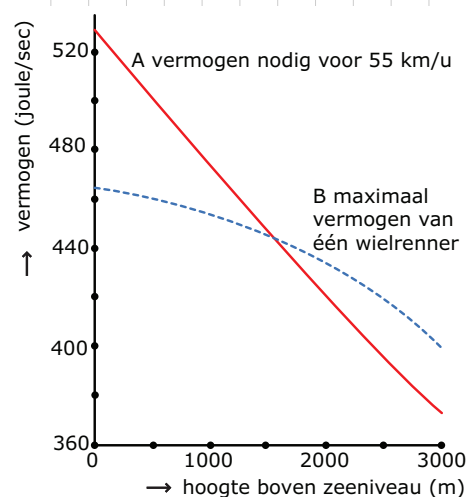
Daan wil zich op de wielersport gaan toeleggen. Van een medische keuring weet hij dat hij gedurende enige tijd een vermogen kan leveren van 190 joule/sec. Op zijn huidige fiets haalt hij een snelheid van 33 km/uur, dus ruim 9 m/sec. Met behulp van bovenstaande formule leidt hij hieruit af dat $k = 0,2$. Door veel te trainen hoopt Daan een vermogen te kunnen leveren van 300 joule/sec. Om er achter te komen wat de maximale snelheid is die hij dan kan halen, tekent hij voor $k = 0,2$ de grafiek van W als functie van v . Hij kan nu aflezen dat zijn maximale snelheid dan bijna 11 m/sec zal zijn (ongeveer 39 km/uur). Daan is ook van plan een nieuwe fiets en nieuwe fietskleding te kopen. Volgens kenners kan hij daarmee k verlagen tot $k = 0,15$. Daan vraagt zich af welke snelheid hij dan kan behalen. Om de vraag te kunnen beantwoorden, moet hij een nieuwe grafiek tekenen.

- b** Welke snelheid (in km/uur) zal Daan kunnen behalen met een vermogen van 300 joule/sec, bij $k = 0,15$? Licht je antwoord toe met behulp van een grafiek.

De wielersbaan van Bordeaux ligt op zeeniveau. Voordat Indurain en Rominger hun eerder genoemde recordritten reden, beweerde iemand dat de magische grens van 55 kilometer in één uur slechts op grote hoogte boven zeeniveau bereikt zou kunnen worden. (Daar is de lucht ijler en dus de luchtweerstand kleiner. Daardoor is k kleiner.) Om zijn bewering te illustreren maakte hij deze figuur. Hierin is grafiek A als volgt tot stand gekomen.

Bij een officieel record moeten fiets en berijder aan allerlei voorschriften voldoen. De mogelijkheden om binnen deze voorschriften de stroomlijn te verbeteren leken optimaal benut. Daarmee lag voor elke hoogte de waarde van k vast. Met behulp van de formule voor W kon hij dus berekenen hoeveel vermogen een wielrenner nodig had om 55 km/uur (15,3 m/sec) te fietsen. Zo is bijvoorbeeld, volgens de maker van deze figuur, op zeeniveau $k = 0,13$.

- c** Bereken hoe groot k is op 2000 meter hoogte volgens de maker van de figuur.

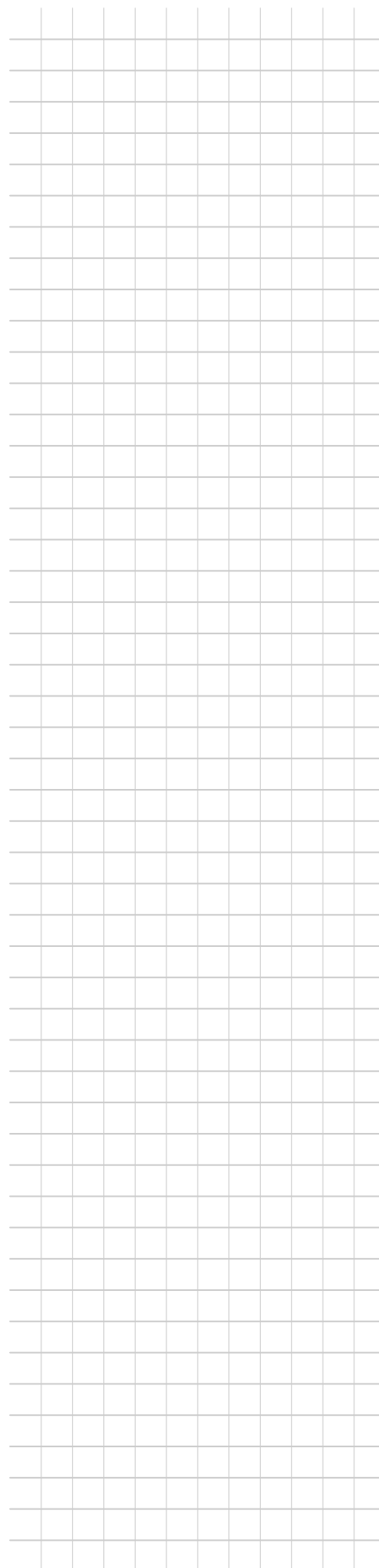


Figuur 6.3

In grafiek B van de figuur is het maximale vermogen te zien dat een ideale wielrenner een uur lang zou kunnen leveren. (Ook dat neemt af naarmate men hoger komt, doordat de ijlere lucht minder zuurstof bevat.) Volgens de maker van de figuur zou de prestatie van Rominger (55,291 km) op zeeniveau onmogelijk zijn. Het record van Indurain was 53,040 km.

- d** Onderzoek met behulp van de formule voor W of het record van Indurain volgens de maker van de figuur op zeeniveau wel mogelijk is.

(bron: examen vwo wiskunde A in 1999, tweede tijdvak)



a

algebraïsch 33
asymptoot 82
asymptotisch gedrag 82

b

balansmethode 32
bereik 65
breuken delen 15
breuken optellen/afrekken 15
breuken vermenigvuldigen 15

d

domein 65

e

eenheid 8
eerstegraadsfunctie 73
exact 33

f

formule 8
functie 24, 56
functiewaarde 56

g

gelijkwaardig 15
gelijkwaardige formules 15
grootheid 8

h

haakjes wegwerken 15
herleiden 15
herschalen in de x-richting 90
herschalen in de y-richting 90
herschrijven 15
horizontale asymptoot 82

i

inklemmen 32
interval 65
invoerwaarde 56

isgelijktaken 8

k

karakteristieken 82
kwadratische functie 73

l

lineair verband 73
lineaire functie 73

m

maximum 65
minimum 65

n

nulpunt 56

o

ongelijkheid 41
ontbinden in factoren 15, 32
oplossen van een vergelijking 32

p

plotten 25

r

rekenregel 8
richtingscoëfficiënt 73

s

snijpunten met de assen 82

t

terugrekenmethode 32
top 82
tweedegraadsfunctie 73

v

variabele 8
verband 8
vergelijking 8, 32
verschuiven in de x-richting 90
verschuiven in de y-richting 90
verticale asymptoot 82

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern I

- 1. Werken met formules**
- 2. Functies en grafieken**



www.math4all.nl

