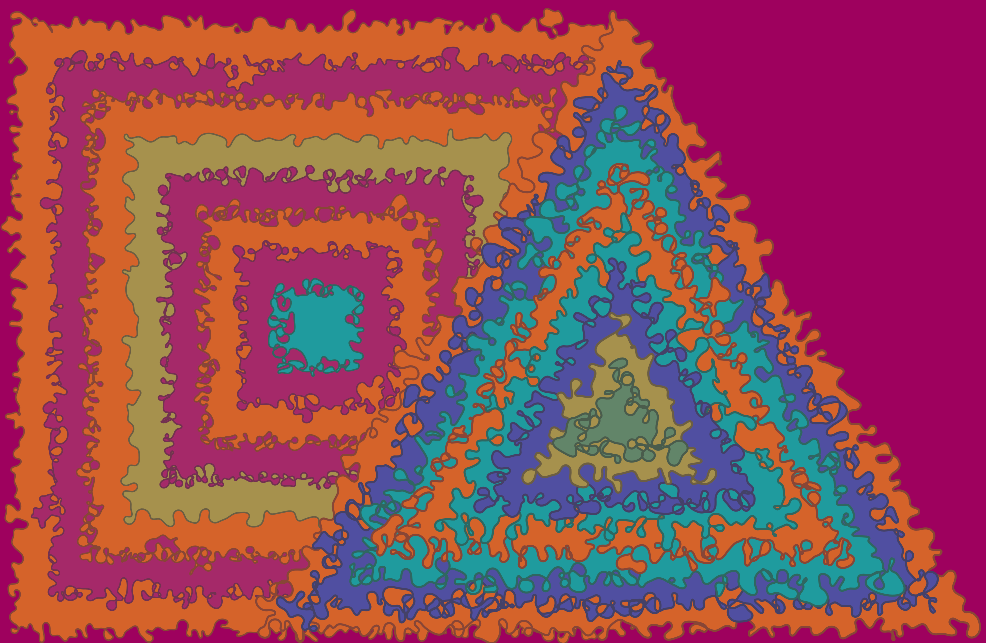
Wiskunde D

4 HAVO

Katern 4

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Discrete kansmodellen

1.1 Stochasten

Inleiding

Er bestaan variabelen waarvan de uitkomst afhangt van het toeval. Voorbeelden te over waarbij je wel telkens goed moet afspreken wat je onder dit toeval (en de grootte van de kansen) moet verstaan. Neem bijvoorbeeld het spel 'darts'. Voor iemand die zonder echt te mikken wel steeds zijn pijltje ergens op het dartbord weet te gooien zou je bij elke score kunnen spreken van toeval. Maar hoe stel je dit toeval vast? Kun je voor elke mogelijke score de kans erop vaststellen? En hoe dan wel?

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip (discrete) stochast (ook wel toevalsvariabele);
- kansverdelingen opstellen;
- werken met de verwachting en de standaardafwijking.

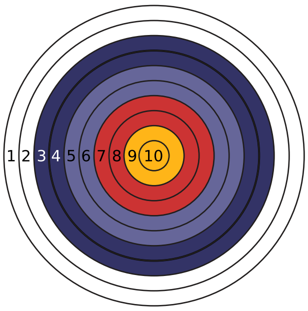
Voorkennis

- werken met frequentieverdelingen;
- werken met gemiddelde en standaardafwijking bij frequentieverdelingen.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de indeling van een schietschijf. Het aantal punten dat je bij een schot met één pijl kunt scoren is vooral voor onervaren boogschutters van het toeval afhankelijk. Neem aan dat het aantal punten D als een toevalsvariabele kan worden opgevat.



Figuur 1.2

a Verzin een manier om hiervoor een kansverdeling op te stellen.

b Is er verschil tussen ervaren of onervaren boogschutters voor wat betreft de kansverdeling?

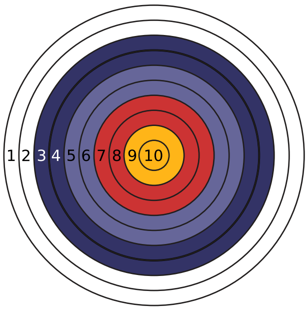
c Hoe bepaal je hoeveel punten je met één schot met een pijl gemiddeld kunt verwachten?

d Hoe zou je een wereldranglijst van beste boogschutters kunnen maken?

Uitleg

De kans dat je bij het handboogschieten de roos raakt is, tenzij je een prof bent, niet zo groot. In feite hangt die kans af van de schutter en kan hij alleen experimenteel worden bepaald.

Het aantal punten dat je met boogschieten met één pijl behaalt, is een toevalsvariabele, ook wel een stochast genoemd. Omdat in dit geval het aantal mogelijke waarden dat de stochast kan aannemen eindig is, spreek je van een discrete stochast.



Figuur 1.3

Bij een bepaalde schutter kun je de relatieve frequentie van elke mogelijke score bepalen. En dit kun je opvatten als kansverdeling van de stochast. Je stelt de stochast vaak voor met een hoofdletter, bijvoorbeeld X.

Een dergelijke kansverdeling ziet er dan zo uit:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 1.1

Als je deze kansverdeling goed bekijkt, zie je dat dit geen hele goede boogschutter is: de roos wordt maar in 8% van de gevallen geraakt en de spreiding is nogal groot.

Door in de tabel telkens de score met de relatieve frequentie te vermenigvuldigen en de uitkomsten bij elkaar op te tellen, krijg je de verwachting van het aantal punten per schot. Je vindt dan dat de verwachting voor deze schutter $6{,}22$ punten per schot is.
De verwachtingswaarde is een maat voor het centrum van de verdeling.

Voor de spreiding gebruik je een maat die standaardafwijking heet:

- Bereken van elke mogelijke score het verschil met de verwachtingswaarde en neem daarvan het kwadraat.
- Vermenigvuldig de gevonden getallen met hun relatieve frequentie.
- Tel alle uitkomsten bij elkaar op. Het getal dat je krijgt heet de variantie.
- Ten slotte trek je de wortel uit de variantie.

Dat geeft de standaardafwijking, een geschikte maat voor de spreiding van de kansverdeling. Voor deze schutter vind je een standaardafwijking van ongeveer $2{,}56$.

Opgave 1

Bekijk de kansverdeling van de boogschutter in de **Uitleg**.

a Beschrijf hoe deze kansverdeling tot stand is gekomen.

b Bereken zelf de verwachtingswaarde. Beschrijf wat dit getal voor de boogschutter precies betekent.

c Deze boogschutter schiet nu 15 keer op de roos. Hoeveel punten verwacht hij te behalen?

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** hoe je de standaardafwijking van de kansverdeling berekent.

a Laat zien dat de standaardafwijking van de kansverdeling van de boogschutter ongeveer $2{,}56$ is.

b Teken een staafdiagram van deze kansverdeling.

c Waarom zal de kansverdeling van een redelijk goede boogschutter niet symmetrisch zijn?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **toevalsvariabele** is een variabele die verschillende waarden kan aannemen. Bij elk van die waarden hoort een kans dat die waarde optreedt. Een toevalsvariabele noem je ook wel een **stochast**. Als het aantal mogelijke waarden dat de stochast kan aannemen eindig is of oneindig veel 'losse' waarden betreft (zoals bijvoorbeeld $0{,}1{,}2{,}...$), spreek je van een **discrete stochast**.
Bij stochast X met waarden x_1, x_2, ..., x_n, hoort een **kansverdeling**, een tabel met kansen $\text{P}(X = x_i)$ waarbij $i = 1, 2, ..., n$. Als de kansen op alle uitkomsten gelijk aan elkaar zijn, zoals bij het gooien van een zuivere dobbelsteen, dan spreek je ook wel van een **uniforme kansverdeling**.

Een kansverdeling kan worden beschreven door:

- de **verwachtingswaarde** van de stochast, notatie $\text{E}(X)$ of $\mu(X)$.
- de **standaardafwijking** (of **standaarddeviatie**) van X, notatie $\sigma(X)$:
  de **variantie** van X is de som van de verwachtingswaarden van de kwadraten van de verschillen $x_i - \text{E}(X)$ maal de kans erop, en de standaardafwijking is de wortel uit de variantie, in formulevorm:

  $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \text{E}(X))^2 \cdot \text{P}(X = x_i)$ en $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Voorbeeld 1

X is het aantal punten dat je bij boogschieten bij elk schot kunt behalen. Bekijk in de tabel voor speler A een kansverdeling van X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 1.2

Bereken bij deze kansverdeling de verwachtingswaarde en de standaardafwijking.

Antwoord

In de figuur staat de uitwerking met behulp van Excel.

Boogschieten: score speler A					
nummer	score	kans			
i	x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$	$(x - E(X))$^2	$(x - E(X))$^2 $\cdot P(X=x)$
1	0	0,02	0,00	38,6884	0,773768
2	1	0,02	0,02	27,2484	0,544968
3	2	0,04	0,08	17,8084	0,712336
4	3	0,10	0,30	10,3684	1,03684
5	4	0,09	0,36	4,9284	0,443556
6	5	0,11	0,55	1,4884	0,163724
7	6	0,12	0,72	0,0484	0,005808
8	7	0,12	0,84	0,6084	0,073008
9	8	0,15	1,20	3,1684	0,47526
10	9	0,15	1,35	7,7284	1,15926
11	10	0,08	0,80	14,2884	1,143072
		$E(X)$ =	6,22	$Var(X)$ =	6,5316
				$\sigma(X)$ =	2,555699513

Figuur 1.4

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Voor boogschutter B is er ook een kansverdeling gemaakt.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathrm{P}(Y = y)$	0,01	0,02	0,03	0,03	0,04	0,06	0,05	0,11	0,20	0,21	0,24

Tabel 1.3

a Bereken de verwachtingswaarde van Y.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de standaardafwijking van Y.

c Vergelijk de twee frequentieverdelingen van de boogschutter uit het voorbeeld en deze boogschutter. Welk van beide boogschutters is de betere schutter? En hoe zie je dat aan de verwachtingswaarden en de standaardafwijkingen?

Voorbeeld 2

Stochast X stelt het aantal ogen voor op het vlak dat boven komt na het werpen met een gewone dobbelsteen. Stel een kansverdeling voor X op en bepaal de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X.

Antwoord

De kansverdeling van X heet uniform, omdat alle kansen gelijk zijn.

x	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

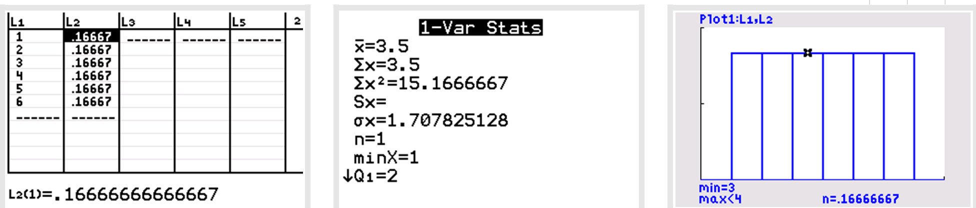
Tabel 1.4

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + ... + 6) = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \frac{1+6}{2} = 3{,}5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{(1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+...+(6-3{,}5)^2}{6}} = \sqrt{\frac{17{,}5}{6}} \approx 1{,}71$$

Je kunt dit ook met de grafische rekenmachine berekenen. Je voert dan de kansverdeling op de grafische rekenmachine in, net als een frequentietabel. Hoe dit gaat, zie je in het **Practicum**.

Met behulp van de rekenmachine vind je ook dat $\mathrm{E}(X) = 3{,}5$ en $\sigma_X \approx 1{,}71$.



Figuur 1.5

Opgave 4

De kansverdeling voor het werpen van één dobbelsteen is uniform. De berekening van de verwachtingswaarde en de standaardafwijking is met de grafische rekenmachine uit te voeren.

a Voer zelf de kansverdeling op de grafische rekenmachine in.

b Controleer de berekende verwachtingswaarde en standaardafwijking.

Voorbeeld 3

Stochast X stelt het aantal ogen voor op het vlak dat boven komt na het werpen met twee dobbelstenen. Stel een kansverdeling voor X op en bepaal de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X.

Antwoord

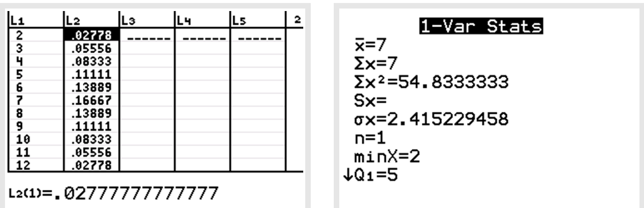
De kansverdeling van X maak je vanuit het overzicht van alle 36 mogelijkheden.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\text{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabel 1.5

Deze kansverdeling voer je op de grafische rekenmachine in, net als een frequentietabel.

Je vindt: $\text{E}(X) = 7$ en $\sigma(X) \approx 2{,}42$. Ga dat na.



Figuur 1.6

Opgave 5

Bekijk de kansverdeling in **Voorbeeld 3**.

a Licht de kansen in deze kansverdeling toe.

b Controleer de berekende verwachtingswaarde en standaardafwijking. Rond zo nodig af op twee decimalen.

c Vergelijk de resultaten met die bij het werpen van één dobbelsteen. Wat valt je op?

Opgave 6

Stel je voor dat je met drie dobbelstenen gooit. Let nu niet op het totaal aantal ogen dat boven komt, maar op het aantal zessen A.

a Stel een bijbehorende kansverdeling op.

b Welke verwachtingswaarde en welke standaardafwijking heeft A? Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 7

Je staat met een sleutelbos met zes verschillende sleutels voor een gesloten deur. Je weet alleen dat precies één van de sleutels gaat passen, maar niet welke dat is. Je probeert een sleutel. Als hij past, dan open je de deur. Past hij niet, dan houd je hem apart en probeer je een andere sleutel.
Noem het aantal sleutels dat je moet proberen totdat de deur opengaat S.

a Bereken de kans dat de deur pas bij de zesde sleutel opengaat: $\text{P}(S = 6)$

b Stel een kansverdeling op voor S.

c Hoeveel sleutels verwacht je te moeten proberen?

Opgave 8

Iemand heeft de tijd (in s) gemeten die een groot aantal proefpersonen nodig had om op een foto een bepaald voorwerp te herkennen. De resultaten staan in deze tabel.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$\text{P}(T = t)$	0,04	0,08	0,15	0,28	0,25	0,17	0,02	0,01

Tabel 1.6

De relatieve frequenties kun je opvatten als de kansen dat het voorwerp na zo veel seconden werd gevonden.

a Hoe groot is de kans dat het voorwerp door een willekeurige proefpersoon na drie seconden wordt herkend? En hoe groot is de kans dat hij er langer over doet?

b Hoeveel tijd verwacht je dat een proefpersoon nodig heeft om het voorwerp te herkennen? Welke standaardafwijking hoort daarbij? Rond af op twee decimalen.

c Hoe groot is de kans dat de herkenningstijd die een proefpersoon nodig heeft meer dan een standaardafwijking van de verwachtingswaarde afwijkt?

Opgave 9

De eigenaar van een ijssalon verdient € 300,00 op een mooie dag. Bij minder goed weer heeft hij een verlies van € 60,00. De kans op een mooie dag is 0,3.

a Bereken algebraïsch de winstverwachting van deze kleine zelfstandige.

b Bereken ook algebraïsch de standaardafwijking van de winst. Rond af op eurocenten.

Opgave 10

Nico bedenkt voor een spellenwebsite een gokspel waarbij je $\frac{1}{5}$ kans hebt op een uitbetaling van € 25,00 en $\frac{2}{5}$ kans op een uitbetaling van € 10,00. Bereken wat voor de beheerders van de website een redelijke minimuminleg is om te vragen.

Opgave 11

Ga ervan uit dat de kans op de geboorte van een meisje even groot is als die van een jongen.

a Hoeveel meisjes mag je in een gezin met twee kinderen verwachten?

b Hoeveel meisjes mag je in een gezin met drie kinderen verwachten?

c Als het goed is, kom je bij b niet op een geheel getal uit. Om niet een geheel aantal mensen te verwachten klinkt natuurlijk best vreemd. Licht dit toe.

Opgave 12

Je gooit met een speciale dobbelsteen. X is het aantal ogen dat je met deze speciale dobbelsteen gooit. Je ziet een gedeelte van de kansverdeling voor X.

x	1	2	3	4	5	6
$\text{P}(X = x)$	0,25		0,2		0,2	

Tabel 1.7

Je weet dat de kans op 2 ogen twee keer zo groot is als de kans op 4 ogen. Je weet ook, door heel vaak gooien, dat je gemiddeld $3{,}2$ ogen gooit.

Neem de tabel over en maak de kansverdeling af.

Toepassen

Opgave 13: Chuck-a-luck

Bij het kansspel ‘Chuck-a-luck’ wordt met drie dobbelstenen gegooid. Stel dat je bij zo'n worp met drie dobbelstenen speelt op het aantal vijven. Komt er één vijf voor, dan krijg je de inleg terug. Komen er twee vijven voor, dan krijg je twee keer je inleg terug. Komen er drie vijven voor, dan krijg je maar liefst tien keer je inleg terug.

a Stochast A is het aantal vijven bij het werpen met drie dobbelstenen. Stel een bijbehorende kansverdeling op.

b Een andere stochast is de uitbetaling U per ingelegde euro per worp. Stel ook een daarbij passende kansverdeling op.

c Welke verwachtingswaarde en welke standaardafwijking heeft U? Rond af op twee decimalen.

d Ga je veel verdienen aan dit spel? Licht je antwoord toe.

Opgave 14: Twee verschillende dobbelstenen

Voor een spelletje gooi je twee dobbelstenen: één normale dobbelsteen en één viervlaksdobbelsteen. Noem X de uitkomst van de worp met de normale dobbelsteen en Y de uitkomst met de viervlaksdobbelsteen.

a Bereken exact de verwachtingswaarden en standaardafwijkingen van X en Y.

b Stel de kansverdeling op van $X+Y$: de som van de uitkomsten van beide dobbelstenen.

c Bereken de verwachtingswaarde en standaardafwijking van $X+Y$, en vergelijk je antwoord met dat van a.

d Een derde stochast Z is afhankelijk van de uitkomst van $X+Y$: als daar een even getal uitkomt, is $Z=0$. Anders is $Z=1$. Bereken algebraïsch de verwachtingswaarde en standaardafwijking van Z.

Testen

Opgave 15

Twee op papier even sterke tennissers hebben de finale van hun clubkampioenschap bereikt. Ze moeten onderling in één partij, waarbij het gaat om drie gewonnen sets, uitmaken wie zich clubkampioen van dat jaar mag noemen. Winnaar van de finale is dus diegene die het eerst drie sets op zijn naam brengt.
Stochast T stelt het aantal te spelen sets voor.

a Stel een kansverdeling voor T op.

b Bereken zonder grafische rekenmachine $\text{E}(T)$ en in twee decimalen nauwkeurig $\sigma(T)$. Wat stellen deze getallen in dit verband voor?

Opgave 16

Je werpt vier keer met een zuivere dobbelsteen. Stochast X stelt het aantal zessen voor dat daarbij bovenkomt.

a Stel de kansverdeling van X op.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X.

Practicum

Met Excel (versie 2013/2016/2019) kun je **het gemiddelde en de standaardafwijking van een frequentieverdeling bepalen**. Bekijk:

- **Data presenteren en vergelijken**

Met de grafische rekenmachine kun je het gemiddelde en de standaardafwijking van een frequentieverdeling bepalen. Bekijk:

- **Statistiek en de TI-84**
- **Statistiek en de TInspire**
- **Statistiek en de Casio**
- **Statistiek en de HPprime**
- **Statistiek en de NumWorks**

1.2 Stochasten optellen

Inleiding

Bij het spel 'darts' is het aantal punten dat je scoort bij het werpen met een pijltje een stochast. Met behulp van statistieken kun je voor een speler een bijpassende kansverdeling maken. Maar in het spel gooi je per beurt met drie darts. Hoe kun je de kansverdeling voor een beurt opstellen vanuit de kansverdeling voor één worp? Op deze manier winstkansen berekenen is nog heel ingewikkeld, want het spel gaat om gewonnen 'sets', waarbij elke 'set' weer bestaat uit 'legs' die elk uit een vooraf onbekend aantal beurten bestaan. Zoek de spelregels maar eens op.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip som van twee of meer stochasten;
- kansverdelingen opstellen voor de som van stochasten;
- regels voor de verwachting en de standaardafwijking van de som van stochasten.

Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij een stochast;
- verwachting en standaardafwijking bij een kansverdeling berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Gooi je met een dobbelsteen dan is het aantal ogen dat bovenkomt een stochast X. Gooi je met twee dobbelstenen, dan heb je voor de som van het aantal ogen dat bovenkomt te maken met een stochast Y.

a Laat zien dat in dit geval $\text{E}(Y) = 2 \cdot \text{E}(X)$.

b Bestaat er een dergelijk verband tussen $\text{Var}(X)$ en $\text{Var}(Y)$?

c Bestaat er ook een dergelijk verband tussen $\sigma(X)$ en $\sigma(Y)$?

Uitleg

Iemand doet aan twee kansspelen mee. Bij het eerste spel kan hij 2, 4 of 6 punten verdienen, bij het tweede spel 0 of 10 punten. X is de stochast voor het aantal punten bij het eerste spel en Y die voor het tweede spel. Op grond van voorgaande resultaten heeft hij deze kansverdelingen opgesteld.

x	2	4	6
$\text{P}(X = x)$	0,20	0,30	0,50

y	0	10
$\text{P}(Y = y)$	0,40	0,60

Tabel 2.1

Voor de wedstrijd moeten de scores van beide spelen worden opgeteld. Daarbij past deze kansverdeling:

$x+y$	2	4	6	12	14	16
$\text{P}(X+Y=x+y)$	0,08	0,12	0,20	0,12	0,18	0,30

Tabel 2.2

Je kunt nu zelf nagaan dat: $\text{E}(X) = 4{,}6$, $\text{E}(Y) = 6$ en $\text{E}(X+Y) = 10{,}6$.

Hier geldt dus dat de verwachtingswaarde van $X+Y$ gelijk is aan de som van de afzonderlijke verwachtingswaarden.

Ook kun je nagaan dat: $\text{Var}(X) = 2{,}44$ en $\text{Var}(Y) = 24$ en $\text{Var}(X+Y) = 26{,}44$.
Ook de variantie van $X+Y$ is gelijk aan de som van de afzonderlijke varianties.
Omdat $(\sigma(X))^2 = \text{Var}(X)$ moet gelden $(\sigma(X+Y))^2 = \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2$.
En dus $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$.

Opgave 1

Bekijk de kansverdelingen in de **Uitleg**.

a Beschrijf hoe de kansverdeling voor $X+Y$ tot stand is gekomen.

b Welke stilzwijgende aanname is daarbij gedaan?

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt het verband besproken tussen de verwachtingswaarden en de standaardafwijkingen van X, Y en $X+Y$.

a Bereken zelf de verwachtingswaarden van X, Y en $X+Y$ en ga na dat $\text{E}(X+Y) = \text{E}(X) + \text{E}(Y)$.

b Bereken zelf de standaardafwijkingen van X, Y en $X+Y$ en ga na dat $(\sigma(X+Y))^2 = (\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2$.

c Waarom wordt deze manier van optellen van standaardafwijkingen wel 'pythagorisch optellen' genoemd?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Vaak heb je met de som van een aantal stochasten te maken. Zo kun je vanuit een kansverdeling voor stochast X met waarden x_1, x_2, ..., x_n en een kansverdeling voor stochast Y met waarden y_1, y_2, ..., y_m ook een kansverdeling maken voor $X+Y$ door kansen te berekenen bij alle waarden $x_i + y_j$.

Beide stochasten zijn **onafhankelijk** als $\text{P}\left(X = x_i \text{ en } Y = y_j\right) = \text{P}(X = x_i) \cdot \text{P}\left(Y = y_j\right)$ voor elke x_i en elke y_j.

Er geldt: $\text{E}(X+Y) = \text{E}(X) + \text{E}(Y)$.

Ook geldt als X en Y onafhankelijk zijn: $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Omdat $(\sigma(X))^2 = \text{Var}(X)$ geldt voor onafhankelijke stochasten X en Y:
$(\sigma(X+Y))^2 = (\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2$.
En dus geldt voor onafhankelijke stochasten: X en Y:
$\sigma(X+Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$.

Voorbeeld 1

Voor boogschutter A is stochast X het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 2.3

Voor boogschutter B is stochast Y het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor Y.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(Y=y)$	0,01	0,02	0,03	0,03	0,04	0,06	0,05	0,11	0,20	0,21	0,24

Tabel 2.4

Beide boogschutters vormen een team en hun scores worden opgeteld.
Bereken de verwachting en de standaardafwijking van $X+Y$.

Antwoord

Beide stochasten zijn onafhankelijk.
Ga met je grafische rekenmachine na dat $E(X) = 6{,}22$ en $\text{Var}(X) = (\sigma(X))^2 = 6{,}5316$.
En verder dat $E(Y) = 7{,}59$ en $\text{Var}(Y) = (\sigma(Y))^2 = 5{,}9419$.
Dan is $E(X+Y) = 6{,}22 + 7{,}59 = 13{,}81$ en
$\sigma(X+Y) = \sqrt{6{,}5316 + 5{,}9419} = \sqrt{12{,}4735} \approx 3{,}53$.

Opgave 3

Voor boogschutter A is stochast X het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x)$	0,02	0,03	0,03	0,06	0,10	0,11	0,13	0,13	0,15	0,12	0,12

Tabel 2.5

Voor boogschutter B is stochast Y het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor Y.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(Y=y)$	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,06	0,11	0,21	0,22	0,23

Tabel 2.6

Beide boogschutters vormen een team en hun scores worden opgeteld.

a Gebruik de grafische rekenmachine om de verwachtingswaarden en standaardafwijkingen van X, Y en $X + Y$ te berekenen. Rond af op twee decimalen.

b Bereken een aantal waarden van de kansverdeling van $X + Y$ met de hand. Licht je antwoord toe.

Voorbeeld 2

Voor boogschutter A is stochast X het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 2.7

Bij elke schotbeurt worden drie pijlen op het doel afgevuurd en de scores opgeteld.
Bereken de verwachting en de standaardafwijking voor elke schotbeurt.

Antwoord

Elke afgeschoten pijl beweegt onafhankelijk van de andere twee, dus bij elke schotbeurt hoort de stochast $S = X + X + X = 3X$.

De verwachting per schotbeurt is daarom:
$\text{E}(3X) = \text{E}(X + X + X) = \text{E}(X) + \text{E}(X) + \text{E}(X) = 3 \cdot \text{E}(X)$
De standaardafwijking per schotbeurt is:

$$\sigma(3X) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(X))^2 + (\sigma(X))^2} = \sqrt{3} \cdot \sigma(X)$$

Dit betekent dat voor elke schotbeurt geldt:
$\text{E}(3X) = 3 \cdot 6{,}22 = 18{,}66$ en $\sigma(3X) = \sqrt{3} \cdot \sigma(X) \approx 4{,}43$ punten.

Opgave 4

Voor boogschutter A is stochast X het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 2.8

Bij elke schotbeurt worden drie pijlen op het doel afgevuurd en de scores opgeteld.

a Geef een paar voorbeelden van hoe je de kansverdeling van het aantal behaalde punten in een schotbeurt opstelt.

b Hoe kun je nagaan dat $\text{E}(3X) = 3 \cdot \text{E}(X)$ en $\sigma(3X) = 3 \cdot \sigma(X)$ zonder van de optelregels gebruik te maken?

Opgave 5

Voor boogschutter A is stochast X het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 2.9

Hier geldt $\text{E}(X) = 6{,}22$ en $\sigma(X) \approx 2{,}56$.

a Stel je voor dat het aantal punten van elke ring 2 hoger is. Welke stochast heb je dan?

b Welke verwachtingswaarde heeft de stochast bij a?

c Welke standaardafwijking hoort bij de stochast bij a?

Voorbeeld 3

Iemand gooit met 20 geldstukken. Hoeveel maal ‘kop’ verwacht je en hoe groot is de standaardafwijking van de kansverdeling voor het aantal keren ‘kop’?

Antwoord

Per geldstuk is het aantal keren ‘kop’ 0 of 1. Daarbij hoort deze kansverdeling:

x	0	1
$\text{P}(X = x)$	0,5	0,5

Tabel 2.10

En daarbij hoort: $\text{E}(X) = 0{,}5$ en $\sigma(X) = 0{,}5$.

De 20 geldstukken stuiteren onafhankelijk van elkaar over tafel. De stochast is dus $X + X + ... + X + X = 20X$.
Je verwacht dus $\text{E}(20X) = 20 \cdot 0{,}5 = 10$ keer kop en een variantie $\text{Var}(20X) = 20 \cdot \text{Var}(X)$. Hiermee is de standaardafwijking van $\sigma(20X) \approx \sqrt{20 \cdot 0{,}5^2} = \sqrt{20} \cdot 0{,}5 \approx 2{,}24$ keer kop.

Opgave 6

Iemand gooit met tien dobbelstenen. Hoeveel ogen verwacht hij in totaal? Met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op één decimaal.

Verwerken

Opgave 7

Je ziet twee kansverdelingen. De stochasten X en Y zijn onafhankelijk van elkaar.

x	0	1	2
$\text{P}(X = x)$	0,15	0,30	0,55

y	1	2
$\text{P}(Y = y)$	0,35	0,65

Tabel 2.11

a Maak een kansverdeling voor $Y - X$.

b Laat zien dat $\text{E}(Y - X) = \text{E}(Y) - \text{E}(X)$.

c Laat zien dat $\sigma(Y - X) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$.

Opgave 8

Als je een lot in een loterij koopt, is de kans dat er op dat lot een prijs valt $0{,}14$. Stel je voor dat je tien loten hebt gekocht.

a Bereken op hoeveel loten je een prijs kunt verwachten.

b Bereken de standaardafwijking op dit aantal loten. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 9

Stel dat je aan de muntzijde van een geldstuk iets hebt afgeslepen. De kans op munt is daardoor p geworden. Er wordt met deze munt geworpen. Op de lange duur blijft in ongeveer één op de drie keer gooien munt boven komen.

a Je werpt nu 100 keer met dit geldstuk. Bereken hoe vaak munt boven komt.

b Bereken ook exact welke standaardafwijking daarbij hoort.

Opgave 10

Iemand ontwerpt een simulator die het werpen met dobbelstenen nabootst. De simulator zorgt ervoor, niet zichtbaar, dat de tweede dobbelsteen altijd precies 1 oog meer aangeeft dan de eerste. Behalve als de eerste 6 ogen heeft, dan heeft de tweede 1 oog. Noem X het aantal ogen op de eerste dobbelsteen en Y dat op de tweede.

a Stel een kansverdeling op voor $X + Y$.

b Bereken de waarden van $\text{E}(X + Y)$ en $\sigma(X + Y)$. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

c Waarom geldt hier niet $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$?

Opgave 11

Bij een dobbelspel moet Charlotte om een ronde te winnen met een dobbelsteen een 5 of 6 gooien. Noem X de uitkomst, met $X = 0$ als ze de ronde niet wint, en $X = 1$ als ze de ronde wel wint.

a Bereken exact de verwachtingswaarde en standaardafwijking van X.

b Er worden vijf rondes gespeeld. Geef de exacte verwachtingswaarde en standaardafwijking van hoeveel van deze rondes Charlotte wint.

c Charlotte wint het spel als ze van de vijf rondes er minstens vier wint (in wat voor volgorde dan ook). Bereken de kans op deze gebeurtenis, in vier decimalen nauwkeurig.

d Hoeveel rondes moet Charlotte spelen zodanig dat de standaardafwijking van het aantal rondes dat ze wint, gelijk is aan $\sqrt{32}$?

Toepassen

Opgave 12: Schoolexamen

Voor een bepaald onderdeel uit het schoolexamen moeten twee practicumtoetsen gemaakt worden. De toetsen zijn op die school door de jaren heen zodanig met elkaar te vergelijken, dat de school van het cijferbeeld betrouwbaar statistisch materiaal heeft verkregen.

De tabel laat zien dat bijvoorbeeld $\frac{13}{100} = 13\%$ van alle deelnemers aan beide toetsen voor de eerste toets een 7 haalde en voor de tweede een 6. Stochast A is het cijfer dat een willekeurige leerling op grond van deze statistiek voor de eerste toets behaalt. Stochast B is het cijfer dat diezelfde leerling voor de tweede toets behaalt. Stochast $C = \frac{1}{2}(A + B)$.

	2e toets		
1e toets	5	6	7
4	10	5	0
5	11	5	2
6	8	14	7
7	3	13	12
8	0	4	6

Figuur 2.2

a Stel de kansverdelingen voor A en B op.

b Welke betekenis heeft stochast C?

c Bereken de verwachtingswaarde van stochast C. Rond af op één decimaal.

d Bereken $\sigma(C)$. Rond af op twee decimalen. Leg uit waarom je in dit geval de standaardafwijking niet met de somregel voor twee stochasten kunt berekenen.

Opgave 13: Kaartspel

Bij een kaartspel geldt de volgende puntentelling:

- alle kaarten zonder plaatjes zijn ieder 0 punten waard
- een boer is 1 punt waard
- een vrouw is 2 punten waard
- een heer is 3 punten waard
- een aas is 4 punten waard

Bij dit spel pak je met terugleggen kaarten van de stapel en tel je de punten bij elkaar op. De verwachtingswaarde van het aantal punten is 10. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de standaardafwijking van het aantal punten.

Figuur 2.3

Testen

Opgave 14

Je werpt met een zuivere dobbelsteen en een zuivere viervlaksdobbelsteen. X is het aantal ogen op de gewone dobbelsteen, Y dat op de viervlaksdobbelsteen.
Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $X + Y$. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 15

Als je met twee geldstukken gooit, dan kun je 0, 1 of 2 maal kop gooien.

a Bereken de kans op elk aantal. Je mag aannemen dat de munten zuiver zijn.

b Bereken de verwachting van het aantal keren kop.

c Bereken de standaardafwijking van het aantal keren kop in twee decimalen nauwkeurig.

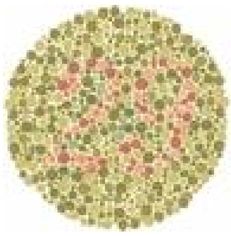
d Bereken het verwachte aantal keren kop als je tien keer met twee geldstukken gooit.

e Bereken de standaardafwijking van het verwachte aantal keren kop als je tien keer met twee geldstukken gooit, in twee decimalen nauwkeurig.

1.3 Binomiale stochasten

Inleiding

Plaatjes zoals dit worden gebruikt om te onderzoeken of iemand kleurenblind is. Kleurenblindheid komt voor bij 8% van de westerse mannen en $0{,}4\%$ van de westerse vrouwen. Je kunt meer over dit verschijnsel lezen via **www.kleurenblindheid.nl**



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip Bernoulli-experiment;
- binomiale stochasten en de bijbehorende kansverdelingen opstellen;
- rekenen met binomiale kansen;
- regels voor de verwachting en de standaardafwijking van een binomiale stochast.

Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij stochasten;
- verwachting en standaardafwijking bij een kansverdeling berekenen;
- de regels voor de verwachting en de standaarddeviatie van de som van meerdere stochasten.

Verkennen

Opgave V1

Onder westerse mensen komt kleurenblindheid voor bij 8% van de mannen en $0{,}4\%$ van de vrouwen. Geef het kleurenblind zijn aan met 1 en niet kleurenblind zijn met 0. De kansvariabele voor jongens is dan J en voor meisjes M.

a Hoe groot is de kans dat er in een klas van de 15 meisjes er 2 kleurenblind zijn?

b Hoe groot is de kans dat er in een klas van 10 jongens en 15 meisjes 2 leerlingen kleurenblind zijn?

Uitleg

Kleurenblindheid komt voor bij 8% van de westerse mannen.
Of iemand kleurenblind is, kun je niet aan zijn uiterlijk zien. Dus iedere westerse man die je tegenkomt, en verder niet kent, heeft voor jou een kans van $0{,}08$ om kleurenblind te zijn. Vraag je een willekeurige westerse man of hij kleurenblind is of niet, dan doe je een kansexperiment met precies twee uitkomsten: X is 0 als hij niet kleurenblind is en 1 als dit wel het geval is. Zo'n kansexperiment heet een Bernoulli-experiment naar de Zwitserse wiskundige **Jakob Bernoulli (1654–1705)**.

De bijbehorende kansverdeling is:

x	0	1
$\mathrm{P}(X = x)$	0,92	0,08

Tabel 3.1

Je kunt nagaan dat $\mathrm{E}(X) = 0{,}08$ en $\sigma(X) \approx 0{,}271$.

Vraag je tien westerse mannen naar kleurenblindheid, dan voer je het Bernoulli-experiment tien keer uit: je herhaalt tien keer hetzelfde experiment. De bijbehorende stochast is $K = 10X$ en de kans dat er twee kleurenblinden bij zijn, is:

$$\mathrm{P}(K = 2) = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8 \cdot \binom{10}{2}$$

waarin $\binom{10}{2}$ het aantal mogelijke combinaties van twee uit tien voorstelt.
Dit getal is het aantal mogelijke takken in de bijbehorende kansboom van tien lagen met twee kleurenblinden en acht niet-kleurenblinden.

De kansverdeling voor K kun je als volgt berekenen:

- $\mathrm{P}(K = 0) = 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{10} \cdot \binom{10}{0}$
- $\mathrm{P}(K = 1) = 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^9 \cdot \binom{10}{1}$
- $\mathrm{P}(K = 2) = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8 \cdot \binom{10}{2}$
- ...
- $\mathrm{P}(K = 10) = 0{,}08^{10} \cdot 0{,}92^0 \cdot \binom{10}{10}$

Bij deze kansverdeling kun je snel de verwachting en de standaardafwijking berekenen:
$\mathrm{E}(K) = \mathrm{E}(10X) = 10\,\mathrm{E}(X) = 10 \cdot 0{,}08 = 0{,}8$
en
$\sigma(K) = \sigma(10X) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X) \approx \sqrt{10} \cdot 0{,}271 \approx 0{,}86$.

Opgave 1

Bekijk de stochast X in de **Uitleg**.

a Laat zien dat $\mathrm{E}(X) = 0{,}08$ en $\sigma(X) \approx 0{,}27$.

b Leg uit waarom $K = 10X$ de som van 10 onafhankelijke Bernoulli-experimenten is.

c Bereken $\mathrm{P}(K = 4)$.

d Leg uit waarom $\sigma(K) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X)$.

Opgave 2

Onder de westerse vrouwen is $0{,}4\%$ kleurenblind. De stochast Y hoort bij de kleurenblindheid van één westerse vrouw.

a Bereken de verwachtingswaarde en standaardafwijking van Y in drie decimalen nauwkeurig.

b Je vraagt aan 100 westerse vrouwen of ze kleurenblind zijn of niet. Hierbij hoort de stochast $L = 100Y$.

Bereken $\text{E}(L)$ en $\sigma(L)$. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 3

Je werpt met twee dobbelstenen en bepaalt na de worp de som van het aantal bovenliggende ogen. De stochast X geeft aan of het aantal ogen zeven is of niet:

- $X = 0$ betekent dat je geen zeven ogen gooit.
- $X = 1$ betekent dat je zeven ogen gooit.

a Stel een kansverdeling voor X op.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X exact.

Je gooit nu twaalf keer met twee dobbelstenen. Je let op het aantal keren A dat je zeven ogen gooit.

c Hoe groot is de kans dat je drie keer zeven ogen gooit, dus hoe groot is $\text{P}(A = 3)$? Rond af op vier decimalen.

d Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van A. Rond af op twee decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **Bernoulli-experiment** is een kansexperiment met precies twee uitkomsten: 'succes' of 'mislukking'. Daarbij hoort een stochast B die de waarde 0 of 1 heeft. Je kunt er daarom de volgende kansverdeling bij opstellen:

b	0	1
$\text{P}(B = b)$	$q = 1 - p$	p

Tabel 3.2

Als je een Bernoulli-experiment n keer herhaalt en stochast X stelt het aantal successen daarbij voor, dan heeft X een **binomiale kansverdeling**. Een binomiaal kansexperiment bestaat dus uit n gelijke onafhankelijke experimenten met elk precies twee uitkomsten.

De kans op k successen is: $\text{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Ook nu is p de kans op 'succes' en verder is $0 \leq k \leq n$.
De variabelen n en p noem je de **parameters** van de binomiale verdeling.

Voor een binomiaal verdeelde stochast met parameters n en p geldt:

- de **verwachtingswaarde** is: $\text{E}(X) = n \cdot p$
- de **variantie** is: $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$
- de **standaardafwijking** is: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Voorbeeld 1

Je gooit met tien dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat er vier zessen boven komen te liggen?
En hoe groot is de kans dat er hoogstens vier zessen boven komen te liggen?

Antwoord

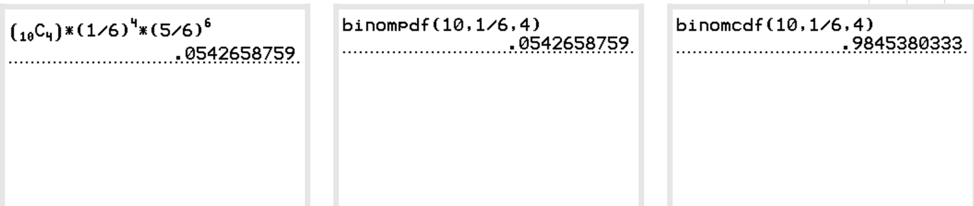
Het aantal zessen dat boven komt, is een binomiale stochast X met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.

De gevraagde kans is: $\text{P}\left(X = 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right)$.

Je kunt deze kans zelf berekenen:

$\text{P}\left(X = 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right) =$

$= \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}0543.$



Figuur 3.2

De grafische rekenmachine kan deze kans ook in één keer voor je berekenen, zie het **Practicum**.
Dat is zeker handig als je de kans op hoogstens 4 zessen wilt weten. Want in plaats van de kansen voor $X = 0,1,2,3,4$ afzonderlijk te berekenen en dan op te tellen, kan de grafische rekenmachine dit in één keer.

De kans op hoogstens 4 zessen is: $\text{P}\left(X \leq 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}9845$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt met tien dobbelstenen geworpen en let je op het aantal zessen X dat boven komt.

a Waarom is X een binomiale stochast?

b Bereken $\text{P}(X = 6)$. Bereken deze kans met de hand en met behulp van de grafische rekenmachine. Rond in beide gevallen af op vier decimalen.

c Bereken de kans dat er hoogstens zes zessen boven komen te liggen. Rond af op vier decimalen.

Opgave 5

Er wordt dertig keer met een zuivere dobbelsteen gegooid. Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat er:

a precies vijf keer een zes wordt geworpen.

b bij hoogstens tien worpen een 1 of 2 boven komt.

Voorbeeld 2

Je gooit met tien dobbelstenen. Stochast X geeft het aantal zessen aan dat boven komt te liggen.
Stel een kansverdeling op voor X en bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking.

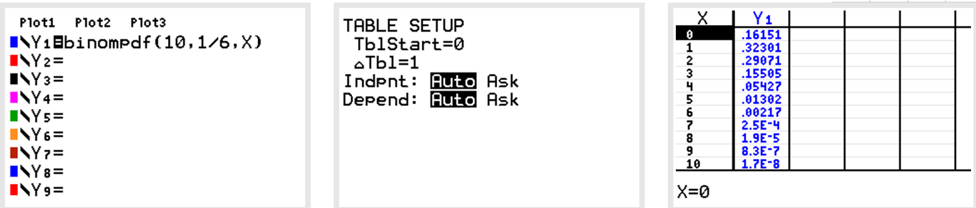
Antwoord

X is een binomiale stochast met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.

Je moet nu de kansen bepalen voor $X = 0,1,2,3,...,10$.

Het gaat om kansen van de vorm $\text{P}\left(X = x | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right)$.

Voer je dit op de grafische rekenmachine als functie in, dan kan de grafische rekenmachine de kansverdeling voor je maken.



Figuur 3.3

De verwachtingswaarde is: $\text{E}(X) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{6} = 1\frac{2}{3}$ zessen.

De standaardafwijking is: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 1,2$ zessen.

Opgave 6

Een willekeurig schot van een ervaren boogschutter komt één van de vijf keer in de roos terecht. Jozef, een ervaren boogschutter, schiet vijftien keer op een doelwit. Stochast X is het aantal keren dat Jozef in de roos schiet.

a Stel een kansverdeling op voor X.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van stochast X. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Voorbeeld 3

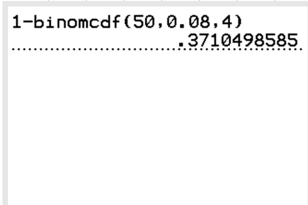
Uit onderzoek blijkt dat 8% van de westerse mannen kleurenblind is.
Je vraagt 50 willekeurig gekozen westerse mannen of ze kleurenblind zijn.
Hoeveel kleurenblinde mannen verwacht je in jouw steekproef aan te treffen?
Hoe groot is de kans dat je meer dan vier kleurenblinde mannen in je steekproef aantreft?

Antwoord

Stel stochast K is het aantal kleurenblinde mannen in de steekproef.
K is binomiaal verdeeld met parameters $n = 50$ en $p = 0{,}08$.

De verwachtingswaarde is: $\mathrm{E}(K) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}08 = 4$ mannen

De kans op $K > 4$ kun je zo opschrijven:
$\mathrm{P}(K > 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08)$.
Deze kans is gelijk aan: $1 - \mathrm{P}(K \leq 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08)$.
De grafische rekenmachine kan die kans voor je berekenen:
$\mathrm{P}(K > 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08) =$
$1 - \mathrm{P}(K \leq 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08) \approx 0{,}3710$



Figuur 3.4

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je dat 8% van de westerse mannen kleurenblind is en dat er een steekproef van 50 willekeurige westerse mannen wordt genomen.

a Bereken de kans op precies zes kleurenblinden in de groep van 50.

b Bereken de kans op hoogstens zes kleurenblinden in de groep van 50.

c Bereken de kans op minstens zes kleurenblinden in de groep van 50.

Opgave 8

Een aantal mensen wordt ieder jaar ingeënt tegen griep. Van een bepaalde entstof weet men dat acht van de tien mensen geen griep krijgen. Een huisarts vaccineert vier patiënten (A, B, C en D) met deze entstof.

a Hoeveel patiënten zullen naar verwachting geen griep krijgen?

b Bepaal de kans dat geen van de vier patiënten griep krijgt.

c Bepaal de kans dat de patiënten A en B geen griep krijgen en C en D wel.

d Bepaal de kans dat twee van de vier patiënten griep krijgen.

e Bepaal de kans dat hoogstens twee van de vier patiënten griep krijgen.

Opgave 9

Neem aan dat stochast X binomiaal verdeeld is. Bepaal de kansen in vier decimalen nauwkeurig.

a $\text{P}(X \leq 8 | n = 15 \text{ en } p = 0{,}15)$

b $\text{P}(X \leq 9 | n = 55 \text{ en } p = 0{,}35)$

c $\text{P}(42 \leq X \leq 54 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}45)$

d $\text{P}\left(X \leq 2 \text{ of } X \geq 5 | n = 8 \text{ en } p = \frac{1}{3}\right)$

e $\text{P}(X > 8 | n = 16 \text{ en } p = 0{,}15)$

Verwerken

Opgave 10

Iemand vult bij een meerkeuzetoets volkomen willekeurig 32 keer een van de vier antwoordmogelijkheden in. Er is telkens maar één van deze keuzemogelijkheden juist. De toets wordt met een voldoende beoordeeld als er meer dan 16 vragen juist zijn ingevuld.

a Bepaal het aantal verwachte correcte antwoorden van de gokker.

b Bepaal de kans dat de gokker een voldoende haalt, in vier decimalen nauwkeurig.

c Bepaal de standaardafwijking van het aantal goed gegokte antwoorden, in vier decimalen nauwkeurig.

Opgave 11

Neem aan dat stochast X binomiaal verdeeld is. Bepaal de kansen in vier decimalen nauwkeurig.

a $\text{P}(X \leq 6 | n = 20 \text{ en } p = 0{,}45)$

b $\text{P}(X > 8 | n = 15 \text{ en } p = 0{,}35)$

c $\text{P}(X \geq 46 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}85)$

d $\text{P}(X \leq 5 | n = 25 \text{ en } p = 0{,}25)$

e $\text{P}(X < 16 | n = 30 \text{ en } p = 0{,}45)$

Opgave 12

Een volledig kaartspel bestaat uit 52 kaarten, van elke soort (ruiten, harten, klaveren en schoppen) evenveel. Uit zo'n kaartspel wordt zes keer een kaart getrokken. De kaart die je trekt, wordt steeds in het spel teruggestopt alvorens een nieuwe kaart te nemen. Het spel kaarten wordt voor elke trekking geschud.

a Hoe groot is dan de kans op hoogstens drie hartenkaarten? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

b Hoe groot is de kans dat je meer dan drie hartenkaarten trekt? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

c Hoe groot is de kans dat je hoogstens twee zwarte kaarten trekt? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

d Je hebt de voorgaande kansen kunnen opvatten als een binomiaal kansmodel. Waarom kan dat niet als je de getrokken kaarten niet teruglegt?

Opgave 13

X is een binomiaal verdeelde toevalsvariabele. Bepaal telkens de waarde(n) van x waarvoor deze ongelijkheden gelden. Rond zo nodig af op drie decimalen.

a $\text{P}(X \leq x | n = 18 \text{ en } p = 0{,}45) < 0{,}7473$

b $\text{P}\left(X > x | n = 12 \text{ en } p = \frac{1}{3}\right) < 0{,}0188$

c $\text{P}(X \geq 4 | n = x \text{ en } p = 0{,}20) < 0{,}04$

d $\text{P}(X = 3 | n = x \text{ en } p = 0{,}25) < 0{,}25$

e $\text{P}(X \geq 10 | n = 50 \text{ en } p = x) < 0{,}2$

f $\text{P}(X = 4 | n = 9 \text{ en } p = x) > 0{,}2$

Opgave 14

Neem aan dat 80% van de Nederlandse bevolking elke week aardappels eet.

a Hoe groot is de kans dat bij een groep van 20 Nederlanders hoogstens 2 personen zijn die niet elke week aardappels eten? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

b Stel dat de kans dat in een groep Nederlanders minder dan 2 personen zijn die niet elke week aardappels eten, kleiner is dan $12{,}5\%$. Hoe groot kan die groep dan zijn?

Opgave 15

Van een binomiaal verdeelde stochast X is de verwachtingswaarde $2\frac{2}{3}$. De variantie is $1\frac{7}{9}$.

Bereken $\text{P}(X = 4)$ in vier decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 16: Meerkeuzetoets

Een meerkeuzetoets bestaat uit 50 vragen, elk met vier mogelijke antwoorden, waarvan er slechts één juist is.

De docente die deze toets heeft gemaakt, wil de normering ervan vaststellen. De cijfers worden tot op één decimaal nauwkeurig berekend; het laagst mogelijke cijfer is $1{,}0$ en het hoogst mogelijke cijfer een $10{,}0$. Zij wil bij het vaststellen van het cijfer het gokken van antwoorden zo min mogelijk belonen.

a Ze zou er daarom voor kunnen kiezen om het aantal verwachte goede antwoorden bij zuiver gokken niet te belonen. Verder werkt ze met een vast aantal punten per vraag. Welke normering zou ze dan het beste kunnen hanteren?

b Zij kan ook besluiten dat bij willekeurig invullen de kans op het cijfer $4{,}0$ of hoger bij benadering niet meer dan 3% mag zijn. Voor hoeveel goede antwoorden wordt dan het cijfer $4{,}0$ gegeven?

c Is de tweede methode soepeler dan de eerste? Licht je antwoord toe.

Ga er nu van uit dat er een lineaire puntenverdeling wordt gehanteerd:

- bij 0 tot 5 vragen goed krijg je een $1{,}0$;
- bij 6 vragen goed krijg je een $1{,}2$;
- bij 7 vragen goed krijg je een $1{,}4$;
- ...;
- bij 50 vragen goed een $10{,}0$.

d Mara weet op 30 vragen het goede antwoord en besluit de rest van de vragen op goed geluk in te vullen. Welk cijfer kan ze verwachten?

e Bereken de kans dat Mara een $7{,}6$ of meer scoort. Rond af op vier decimalen.

f Bij n zeker goede antwoorden en de overige vragen willekeurig invullen is de kans op minstens $7{,}0$ groter dan 90%. Bereken n.

Testen

Opgave 17

Je werpt 10 keer met een zuiver geldstuk. Stochast K geeft het aantal keren kruis bij deze worpen.

a Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van stochast K.

Stochast L geeft het aantal keren kruis als je 1000 keer gooit.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van L.

Opgave 18

Een test bestaat uit 15 vierkeuzevragen. Slechts bij 5 van deze vragen kun je met zekerheid het goede antwoord aangeven. Je besluit de 10 andere vragen op goed geluk een antwoord aan te geven.

a Hoe groot is de kans dat je 12 vragen van de test het goede antwoord hebt gegeven?

b Hoe groot is de kans dat je meer dan 5 vragen goed beantwoordt?

c Hoeveel vragen van de test mag je verwachten goed te beantwoorden?

Opgave 19

In het casino mag je voor € 10,00 met tien zuivere dobbelstenen werpen. Voor iedere dobbelsteen waar je minder dan 4 ogen mee gooit krijg je € 2,00 uitbetaald.
Hoe groot is de kans dat je winst maakt bij dit spel?

Practicum

Met de grafische rekenmachine kun je **kansen bepalen bij een binomiaal verdeelde stochast**. Bekijk:

- **Kansverdelingen met de TI84**
- **Kansverdelingen met de TInspire**
- **Kansverdelingen met de Casio**
- **Kansverdelingen met de HP-prime**
- **Kansverdelingen met de NumWorks**

1.4 Niet-binomiaal

Inleiding

Het binomiale kansmodel is erg overzichtelijk: er zijn maar twee mogelijkheden ‘succes’ of ‘mislukking’ en het gaat om herhaling van steeds dezelfde kanssituatie. Maar natuurlijk bestaan er heel veel discrete stochasten waarbij er meer dan twee mogelijkheden zijn en/of er geen herhaling plaatsvindt. Denk bijvoorbeeld in het vaasmodel aan een trekking zonder teruglegging.
Je zult in dit onderdeel een paar discrete niet-binomiale stochasten tegenkomen.

Je leert in dit onderwerp

- werken met niet-binomiale discrete stochasten en de bijbehorende kansverdelingen opstellen;
- regels voor de verwachting en de standaardafwijking van niet-binomiale discrete stochasten;
- een binomiale stochast gebruiken bij een kleine steekproef uit een grote populatie.

Voorkennis

- het vaasmodel;
- een kansverdeling opstellen bij een vaasmodel;
- de regels voor de verwachting en de standaarddeviatie van de som van meerdere stochasten.

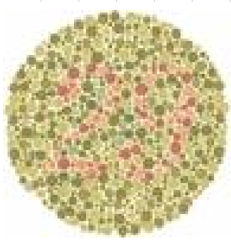
Verkennen

Opgave V1

In een groep van 25 mannen zijn 2 leden van die groep kleurenblind.
Je trekt aselect een steekproef van vier mannen uit deze groep.

a Hoe groot is de kans dat daarbij één kleurenblinde man zit?

b Hoe groot is de kans dat daarbij twee kleurenblinde mannen zitten?



Figuur 4.1

Uitleg 1

In een groep van dertig personen hebben tien mensen een bepaalde eigenschap en de rest niet. Uit die groep wordt aselect een steekproef van vijf getrokken.
Stochast M is het aantal mensen met deze eigenschap in deze steekproef.

Wil je nu een kansverdeling voor M opstellen, dan bedenk je dat het hier gaat om trekking zonder terugleggen. Dit betekent dat de kansen afhankelijk van elkaar zijn en dat een binomiaal kansmodel niet mogelijk is.
De kans op bijvoorbeeld $M = 2$ kun je zo berekenen:

$$\text{P}(M = 2) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{20}{28} \cdot \frac{19}{27} \cdot \frac{18}{26} \cdot \binom{5}{2} \approx 0{,}3600$$

Dit kun je ook met behulp van combinaties berekenen.

$$\text{P}(M=2)=\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{20}{3}}{\binom{30}{5}}\approx 0{,}3600$$

Ga na dat je de volgende kansverdeling krijgt.

m	0	1	2	3	4	5
$\text{P}(M=m)$	0,1088	0,3400	0,3600	0,1600	0,0295	0,0018

Tabel 4.1

Je kunt met behulp van de tabel de verwachting en de standaardafwijking berekenen.
Je vindt $\text{E}(M)\approx 1{,}667$ en $\sigma(M)\approx 0{,}979$.

Kennelijk gaat $\text{E}(M)=5\cdot\frac{10}{30}=1\frac{2}{3}$ ook hier op, maar dit geldt niet voor de formule die bij de binomiale verdeling voor de standaardafwijking geldt.

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** de kansverdeling voor stochast M die het aantal mensen met een bepaalde eigenschap in een steekproef uit een kleine populatie van 30 personen weergeeft.

a Bereken $\text{P}(M=3)$.

b Bereken $\text{E}(M)$ en $\sigma(M)$ in vier decimalen nauwkeurig.

c Waarom is hier geen sprake van een binomiale kansverdeling?

Uitleg 2

In een groep van 30000 personen hebben 10000 mensen een bepaalde eigenschap en de rest niet. Uit die groep wordt aselect een steekproef van 5 getrokken.
Stochast M is het aantal mensen met deze eigenschap in deze steekproef.

Wil je nu een kansverdeling voor M opstellen, dan bedenk je opnieuw dat het hier gaat om trekking zonder terugleggen. Dit betekent dat de kansen afhankelijk van elkaar zijn en dat een binomiaal kansmodel niet mogelijk is.
De kans op $M=2$ is:

$$\text{P}(M=2)=\frac{10000}{30000}\cdot\frac{9999}{29999}\cdot\frac{20000}{29998}\cdot\frac{19999}{29997}\cdot\frac{19998}{29996}\cdot\binom{5}{2}\approx 0{,}3292$$

Nu verschilt een breuk als $\frac{9999}{29999}$ vrijwel niet van $\frac{10000}{30000}=\frac{1}{3}$.

Daarom kun je als je een kleine steekproef uit een heel grote populatie trekt, toch het binomiale kansmodel gebruiken. Hoewel het eigenlijk niet om onafhankelijke kansen gaat.

$$\text{P}(M=2)\approx\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\binom{5}{2}\approx 0{,}3292$$

Je ziet dat beide kansen bij benadering gelijk zijn aan elkaar. Daarom wordt in de praktijk bij een steekproef uit een veel grotere populatie waarbij het gaat om het wel of niet hebben van een bepaalde eigenschap, gewoon het binomiale kansmodel gebruikt.

Opgave 2

Bekijk in **Uitleg 2** de kansverdeling voor stochast M die het aantal mensen met een bepaalde eigenschap in een steekproef uit een grote populatie van 30000 personen weergeeft.

a Bereken $\text{P}(M = 3)$ en $\text{P}(M = 4)$. Benader deze kansen ook met behulp van het binomiale kansmodel. Rond in beide gevallen af op vier decimalen nauwkeurig.

b Bereken $\text{E}(M)$ en $\sigma(M)$ in vier decimalen nauwkeurig.

c Waarom kun je de kansverdeling van M heel goed benaderen door een binomiale kansverdeling?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Heel vaak is in een bepaalde kanssituatie helemaal geen sprake van een binomiale stochast. Dan is er geen sprake van een herhaling van onafhankelijke Bernoulli-experimenten (succes of mislukking).

Een belangrijk geval is de **hypergeometrische stochast**.
Daarbij gaat het om een **populatie** van N elementen waarvan er a een bepaalde eigenschap hebben. Je trekt daaruit zonder teruglegging een **steekproef** van n elementen. De hypergeometrische stochast X is dan het aantal elementen in de steekproef dat deze eigenschap heeft. De kans op $X = x$ is:

$$\text{P}(X = x) = \frac{a}{N} \cdot \frac{a-1}{N-1} \cdot \ldots \cdot \frac{N-a}{N-x} \cdot \frac{N-a-1}{N-x-1} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{x}$$

Met behulp van combinaties kun je dit ook uitrekenen:

$$\text{P}(X = x) = \frac{\binom{a}{x} \cdot \binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Voor de verwachtingswaarde geldt: $\text{E}(X) = n \cdot \frac{a}{N}$.
De standaardafwijking van X kun je nu alleen uit de kansverdeling zelf halen. Daarom bepaal je in de praktijk zowel $\text{E}(X)$ als $\sigma(X)$ met behulp van de grafische rekenmachine.

Bij een **kleine steekproef uit een heel grote populatie** kun je toch wel het binomiale kansmodel gebruiken, hoewel het eigenlijk niet om onafhankelijke kansen gaat. Dat komt omdat dan breuken als $\frac{a}{N}$ en $\frac{a-1}{N-1}$ vrijwel gelijk zijn.
In de praktijk wordt vaak bij een steekproef uit een veel grotere populatie waarbij het gaat om het wel of niet hebben van een bepaalde eigenschap, gewoon het binomiale kansmodel gebruikt.

Voorbeeld 1

In een klas zitten acht jongens en twaalf meisjes. Daaruit wordt een aselecte steekproef van vier personen getrokken. Stochast M is het aantal meisjes in de steekproef.
Stel een kansverdeling op voor M en bepaal de verwachting en de standaardafwijking van M.

Antwoord

Bij de steekproef gaat het om trekking zonder terugleggen van vier elementen uit een populatie van twintig. M is een hypergeometrische stochast.
De kans op bijvoorbeeld $M = 3$ is:

$\text{P}(M = 3) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{8}{17} \cdot 4 \approx 0{,}3633$

De complete kansverdeling wordt:

m	0	1	2	3	4
$\text{P}(M = m)$	0,0145	0,1387	0,3814	0,3633	0,1022

Tabel 4.2

Met de grafische rekenmachine vind je dan: $\text{E}(M) = 2{,}4$ en $\sigma(M) \approx 0{,}899$.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Stochast J is het aantal jongens in de steekproef.

a Waarom is J geen binomiale stochast?

b Bereken zelf de kansen in de kansverdeling J. Rond af op vier decimalen.

c Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van J in vier decimalen nauwkeurig.

d Bereken de kans dat er minstens drie jongens in de steekproef voorkomen. Rond af op drie decimalen.

Opgave 4

In een vaas zitten twee witte en drie rode balletjes. Uit deze vaas worden zonder teruglegging balletjes getrokken, totdat er een wit balletje wordt getrokken.
Wat is de verwachting en de variantie van het aantal benodigde trekkingen?

Voorbeeld 2

Op een scholengemeenschap zitten 800 jongens en 1200 meisjes. Daaruit wordt een aselecte steekproef van 4 personen getrokken. Stochast M is het aantal meisjes in de steekproef. Stel een kansverdeling op voor M en bepaal de verwachting en de standaardafwijking van M. Laat zien dat je kansen vrijwel hetzelfde zijn als je een binomiaal kansmodel gebruikt.

Antwoord

Bij de steekproef gaat het om trekking zonder terugleggen van 4 elementen uit een populatie van 2000. M is een hypergeometrische stochast.

De kans op bijvoorbeeld $M = 3$ is:

$$\text{P}(M = 3) = \frac{1200}{2000} \cdot \frac{1199}{1999} \cdot \frac{1198}{1998} \cdot \frac{800}{1997} \cdot 4 \approx 0{,}3458$$

Als je M benadert als binomiale stochast is deze kans gelijk aan:

$$\text{P}(M = 3) = \left(\frac{1200}{2000}\right)^3 \cdot \frac{800}{2000} \cdot 4 \approx 0{,}3456.$$

Je ziet dat je de kansen met een binomiaal kansmodel goed kunt benaderen:

m	0	1	2	3	4
$\text{P}(M = m)$	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

Tabel 4.3

Nu vind je: $\text{E}(M) = 4 \cdot \frac{1200}{2000} = 2{,}4$ en

$$\sigma(M) = \sqrt{4 \cdot \frac{1200}{2000} \cdot \frac{800}{2000}} \approx 0{,}980.$$

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** gaat het om een steekproef van 4 uit een populatie van 2000 personen. M is het aantal meisjes in de steekproef.

a Waarom is M nog steeds geen binomiale stochast? Maar waarom kun je M nu wel goed benaderen met een binomiale stochast?

b Bereken zelf de kansen in de kansverdeling M.

c Reken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van M na.

d Bereken de kans dat er minstens 3 meisjes in de steekproef voorkomen.

Opgave 6

Een gezelschap bestaat uit drie mannen, vier vrouwen en vijf kinderen. Op een buurtfeest moet, om aan een spel deel te nemen, op aselecte wijze een team van vier personen uit de groep worden samengesteld.

a Welk kansmodel moet je gebruiken om de kans te berekenen dat in de groep twee kinderen zitten? Waarom?

b Hoe groot is de kans bedoeld in a? Rond af op vier decimalen.

c Hoe groot is de kans dat in de groep van vier minstens twee vrouwen zitten? Rond af op vier decimalen.

d Hoe groot is de kans dat de groep alleen uit vrouwen en kinderen bestaat? Rond af op vier decimalen.

e Hoeveel kinderen mag je in de groep verwachten?

Voorbeeld 3

Je hebt ergens gelezen dat op dit moment 23% van alle Nederlandse meisjes van 12 tot en met 18 jaar rookt. Je weet dat deze groep meisjes uit ongeveer 450000 personen bestaat. Je vraagt 50 voor jou onbekende Nederlandse meisjes uit die leeftijdscategorie of ze roken.
Hoe groot is de kans dat minstens 15 daarvan roken?

Antwoord

Hier is sprake van een steekproef uit een veel grotere populatie. Hoewel er in feite sprake is van een hypergeometrische stochast, kun je het aantal rokende meisjes M in de steekproef opvatten als binomiale stochast.

De gevraagde kans is $\text{P}(M \geq 15) = 1 - \text{P}(M \leq 14) \approx 0{,}1565$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** gaat het om het berekenen van kansen dat een bepaald aantal meisjes in een steekproef van 50 uit een populatie van 450000 meisjes rookt.

a Geef aan hoe je $\text{P}(M = 15)$ zou berekenen.

b Waarom kun je in dit geval heel goed met een binomiaal kansmodel werken?

c Benader M nu als binomiale stochast en bereken $\text{P}(M = 15)$ in vier decimalen nauwkeurig.

d Controleer dat $\text{P}(M \geq 15) \approx 0{,}1565$.

Opgave 8

Van alle leerlingen uit het basisonderwijs is bekend dat 90% rechtshandig is. Hoe groot is de kans dat je in een willekeurig gekozen groep van 20 kinderen minder dan 16 rechtshandigen aantreft? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 9

In een klas zitten 8 jongens en 12 meisjes. Daaruit wordt een aselecte steekproef van 3 personen getrokken. Stochast J is het aantal jongens in de steekproef.

a Stel de kansverdeling voor J op. Rond de kansen af op vier decimalen.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van J. Rond af op één decimaal.

Opgave 10

Het bestuur van een politieke partij bestaat uit 20 personen, waarvan 40% jonger is dan 28 jaar. Door het lot worden 4 personen aangewezen om deel te nemen aan een buitenlandse reis.

a Hoeveel personen van de groep van 4 zijn naar verwachting jonger dan 28 jaar?

b Bepaal in vier decimalen nauwkeurig de kans dat 3 van de 4 personen jonger zijn dan 28 jaar.

c Benader deze kans ook met behulp van een binomiaal kansmodel. Hoe groot is de afwijking met de juiste kans?

Tijdens een regionale bijeenkomst van diezelfde partij zijn 100 leden aanwezig. Van deze leden is 40% jonger dan 35 jaar. Door het lot worden 4 personen aangewezen om deze regionale groepering op het landelijk congres van de partij te vertegenwoordigen.

d Bepaal in vier decimalen nauwkeurig de kans dat 3 van de 4 afgevaardigden jonger zijn dan 35 jaar.

e Benader ook deze kans binomiaal. Vind je nu een groot verschil? Licht je antwoord toe.

Opgave 11

In een doos zitten 30 uiterlijk allemaal dezelfde bonbons. Vijf bonbons hebben echter een roomvulling, de andere een caramelvulling. Uit de doos worden vier bonbons genomen.

a Hoe groot is de kans dat er precies één bonbon met een roomvulling uit de doos wordt gehaald? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

b Hoe groot is de kans dat er twee of meer bonbons met roomvulling uit de doos worden gehaald? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

c Hoe groot is de kans dat van de vier uitgenomen bonbons op één na allemaal een roomvulling hebben? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Een partij van 1000 blikken met groente heeft lange tijd in een magazijn gelegen. Je mag aannemen dat van 10% van de blikken de uiterste verkoopdatum verstreken is. Je kiest aselect 8 blikken uit de partij en controleert de verkoopdatum. Je vraagt je af hoe groot de kans is dat je in die steekproef 3 blikken aantreft die te oud zijn.

a Hoe groot is de genoemde kans? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

b Bereken deze kans ook met het binomiale kansmodel in vier decimalen nauwkeurig. Hoe groot is het verschil tussen beide berekeningen?

c Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat je maximaal 3 blikken gekozen hebt waarvan de uiterste verkoopdatum verstreken is.

Opgave 13

Een grote partij wijnflessen wordt gekeurd door uit de partij een aselecte steekproef van 20 flessen te nemen. Elke fles wordt nauwkeurig onderzocht op gebreken. Wordt er in de steekproef meer dan één fles met gebreken gevonden, dan wordt de gehele partij afgekeurd. Als er maximaal één fles wordt gevonden die niet voldoet, dan wordt de gehele partij goedgekeurd.

a Hoe groot is de kans dat de partij wordt goedgekeurd als 5% van de gehele partij flessen gebreken vertoont? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

b Hoe groot is de kans dat de partij wordt goedgekeurd als $\frac{1}{5}$ van de totale partij gebreken heeft? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

Ondanks de controle blijkt uiteindelijk 2% van de goedgekeurde wijnflessen alsnog gebreken te hebben. Dit komt helaas pas aan het licht als het te laat is.
Een groot restaurant heeft 250 wijnflessen op voorraad. Op een dag wordt een bedrijfsdiner in het restaurant geserveerd. Hiervoor worden acht flessen wijn opzij gelegd.

c Bereken de kans dat één van deze flessen een gebrek heeft, in vier decimalen nauwkeurig.

Niels gaat over de boekhouding bij het restaurant. Omdat het sneller is, gebruikt Niels als het kan liever een binomiaal verdeelde benadering dan een hypergeometrische verdeling. De baas van Niels is echter niet zo optimistisch over de situatie en laat een andere boekhouder de getallen nog eens nakijken. Als de kans van de benadering binnen $0{,}5\%$ van de eigenlijke kans komt, is de baas tevreden.

d Onderzoek of dit bij de situatie bij c het geval is.

Toepassen

Opgave 14: Steekproefgrootte berekenen

Van een grote populatie is bekend dat 35% een bepaalde eigenschap bezit. Uit deze populatie wordt een willekeurige groep van 100 mensen gekozen.

a De kans dat in deze steekproef minder mensen aangetroffen worden met die eigenschap is 15%. Bepaal het maximale aantal mensen in de steekproef met die eigenschap.

Van een andere populatie is bekend dat $\frac{1}{6}$ een bepaalde eigenschap bezit. Uit deze populatie wordt een steekproef getrokken. De kans dat in deze steekproef hoogstens drie elementen worden aangetroffen met die eigenschap is $0{,}75$.

b Bepaal de grootte van de steekproef.

Opgave 15: Steaks

Van een lading van meer dan 20 steaks is bekend dat er twee bedorven zijn. Er worden willekeurig vijf steaks uit de lading gekozen. Twee ervan blijken bedorven. Wat is de minimale grootte van de lading steaks zodanig dat de kans op deze hypergeometrisch verdeelde gebeurtenis hooguit $0{,}25$% verschilt met de binomiale benadering?

Testen

Opgave 16

In een vaas zitten vijf balletjes genummerd 2, 4, 6, 8 en 10. Er worden zonder teruglegging twee balletjes uit de vaas getrokken. Stochast V is het verschil van de nummers van de twee balletjes.

a Stel de kansverdeling voor V op.

b Bereken zonder grafische rekenmachine de verwachtingswaarde, de variantie en de standaardafwijking.

Opgave 17

Bij een experiment heb je de beschikking over vijf vrouwelijke en vijf mannelijke proefpersonen. Je verdeelt ze willekeurig in twee groepen A en B van elk vijf personen.

a Hoe groot is de kans dat in groep A minstens vier vrouwen terechtkomen? Bereken deze kans met een hypergeometrisch kansmodel en benader de kans daarna met een binomiaal kansmodel. Rond indien nodig af op vier decimalen nauwkeurig.

b Welk van beide antwoorden op de vraag in a is juist? Licht je antwoord toe.

Opgave 18

Op zaterdagavond zit Jos, die elke week in de Lotto meespeelt, gespannen voor de tv om de trekking van de zes getallen mee te maken. (Het zogenaamde reservegetal wordt buiten beschouwing gelaten.) Er zitten 41 balletjes met daarop de getallen 1 tot en met 41 in een ronddraaiende trommel waaruit telkens één balletje wordt getrokken. Als de zes getrokken getallen overeenkomen met de getallen op zijn lot, ongeacht de volgorde, heeft Jos de hoofdprijs gewonnen.

a Hoe groot is de kans dat er zes even nummers worden getrokken? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

b Als er twee even nummers zijn getrokken, hoe groot is dan nog de kans dat de volgende vier balletjes ook een even nummer hebben? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

c Hoe groot is de kans, dat elk van de zes getrokken getallen kleiner is dan 15? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

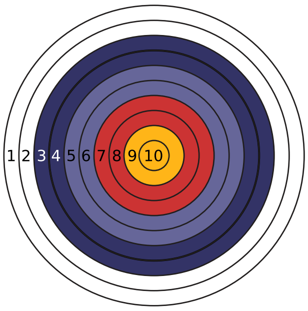
Jos heeft de nummers 5, 10, 15, 20, 25 en 30 op zijn lot aangekruist.

d Hoe groot is de kans dat hij de hoofdprijs wint?

1.5 Wortel-n-wet

Inleiding

Je hebt al eerder gezien dat je een kansverdeling kunt opstellen voor het boogschieten met één pijl op dit bord. Maar vaak schiet je vaker, bijvoorbeeld 20 keer, en kijk je naar het totaal aantal punten of het gemiddelde aantal punten. En hoe zit het dan met de verwachting en de standaarddeviatie?



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met een herhaling van steeds dezelfde stochast;
- regels voor de verwachting en de standaardafwijking van een herhaling van stochasten.

Voorkennis

- een kansverdeling opstellen bij een stochast;
- de regels voor de verwachting en de standaarddeviatie van de som van twee stochasten.

Verkennen

Opgave V1

Je schiet 10 keer op een rond bord (0, 1, 2, ..., 10 punten te behalen)
Je kansverdeling per schot is:

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(Y = y)$	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,06	0,11	0,21	0,22	0,23

Tabel 5.1

Je kent de regels voor de verwachting en de standaardafwijking van de som van twee stochasten.

a Hoeveel punten T verwacht je in totaal te scoren? En welke standaardafwijking hoort er bij dit totaal? Rond af op twee decimalen.

b Hoeveel punten G verwacht je bij deze tien schoten gemiddeld per schot te scoren? En welke standaardafwijking hoort daar bij? Rond af op twee decimalen.

Uitleg

Een boogschieter schiet 20 keer op een rond bord (0, 1, 2, ..., 10 punten te behalen).
Zijn kansverdeling per schot is:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 5.2

De verwachting per schot is 6,22 punten met een standaardafwijking van ongeveer 2,56 punten.

De stochast X is het aantal punten dat de boogschutter behaalt met één keer schieten. De stochast T is het totaal aantal punten bij 20 herhalingen. Omdat elk schot onafhankelijk is van het voorgaande, kun je zowel de optelregel voor verwachtingswaarden als die voor varianties toepassen:

$\text{E}(T) = \text{E}(X + X + ... + X) = \text{E}(X) + \text{E}(X) + ... + \text{E}(X) = 20 \cdot \text{E}(X)$

en

$\text{Var}(T) = \text{Var}(X + X + ... + X) = \text{Var}(X) + \text{Var}(X) + ... + \text{Var}(X) = 20 \cdot \text{Var}(X)$

Dus bij het totaal van 20 schoten is:

- de verwachtingswaarde $\text{E}(T) = 20 \cdot 6{,}22 = 124{,}4$ punten
- de standaardafwijking

  $\sigma(T) = \sqrt{20 \cdot \text{Var}(X)} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{(\sigma(X))^2} = \sqrt{20} \cdot \sigma(X) \approx 11{,}45$ punten

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de stochast X, die staat voor het aantal punten dat de boogschutter haalt per schot op een rond bord. Schiet hij twaalf keer op dit bord, dan heb je het over de stochast $12X$.

a Controleer dat $\text{E}(X) = 6{,}22$ en $\sigma(X) \approx 2{,}56$.

b Hoeveel punten verwacht je dat de boogschutter haalt als hij twaalf keer op dit bord schiet? En wat is dan de standaardafwijking?

c Hoeveel punten verwacht je dat de boogschutter gemiddeld per schot haalt als hij twaalf keer op het bord schiet? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

d Ligt het voor de hand dat de standaardafwijking kleiner wordt naarmate de boogschutter vaker op dit bord schiet?

Opgave 2

In een doos zitten vijf balletjes met daarop de getallen 2, 3, 5, 7 en 12.

a Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het getal dat je krijgt bij het aselect trekken van één balletje.

b Je trekt twee balletjes met teruglegging. Bepaal van de gemiddelden van de tweetallen de verwachtingswaarde en de standaardafwijking.

c Welk verband bestaat er tussen de verwachtingswaarden die je bij a en b hebt berekend?

d Laat zien dat je de standaardafwijking bij b ook had kunnen vinden door de standaardafwijking van a te delen door $\sqrt{2}$. Geef hiervoor een verklaring.

Opgave 3

X stelt het aantal ogen op een dobbelsteen voor.

a T stelt het aantal ogen voor als je met twee dobbelstenen werpt. Bereken $\text{E}(T)$ en $\sigma(T)$.

b Welk verband is er tussen $\text{E}(X)$ en $\text{E}(T)$ en tussen $\sigma(X)$ en $\sigma(T)$?

c $\overline{X}$ is het gemiddelde aantal ogen per worp als je met twee dobbelstenen werpt. Bereken $\text{E}(\overline{X})$ en $\sigma(\overline{X})$.

d Welk verband is er tussen $\text{E}(X)$ en $\text{E}(\overline{X})$ en tussen $\sigma(X)$ en $\sigma(\overline{X})$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Heb je te maken met n onafhankelijke gelijke kansexperimenten, elk met dezelfde stochast X, dan geldt voor het totaal T van deze n stochasten:

- $\text{E}(T) = n \cdot \text{E}(X)$
- $\sigma(T) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

Voor het bewijs hiervan kun je zowel de optelregel voor verwachtingswaarden als die voor varianties toepassen:

- $\text{E}(T) = \text{E}(X + X ... + X) = \text{E}(X) + \text{E}(X) + ... + \text{E}(X) = n \cdot \text{E}(X)$
- $\text{Var}(T) = \text{Var}(X + X + ... + X) = \text{Var}(X) + \text{Var}(X) + ... + \text{Var}(X) = n \cdot \text{Var}(X)$

Omdat de standaardafwijking gelijk is aan de wortel van de variantie geldt dat:
$\sigma(T) = \sqrt{\text{Var}(T)} = \sqrt{n \cdot \text{Var}(X)} = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

Je noemt deze stelling de **wortel-n-wet**.

Voor de kansverdeling die hoort bij het gemiddelde $\overline{X}$ van n onafhankelijke gelijke kansexperimenten elk met stochast X geldt daarom:

- $\text{E}\left(\overline{X}\right) = \frac{\text{E}(T)}{n} = \frac{n \cdot \text{E}(X)}{n} = \text{E}(X)$
- $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma(T)}{n} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma(X)}{n} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Voorbeeld 1

Op de doosjes paperclips van een bepaald merk staat: circa 100 stuks.
Door tellingen is gebleken dat er in deze doosjes gemiddeld 104,3 paperclips zitten met een standaardafwijking van 3,5. Je haalt 10 doosjes van die paperclips. Hoeveel paperclips mag je dan in totaal verwachten en met welke standaardafwijking? En wat is de standaardafwijking van het gemiddeld aantal paperclips per doosje?

Figuur 5.2

Antwoord

Neem aan dat het aantal paperclips X in elk doosje niet afhangt van het aantal in de andere doosjes. Dan geldt voor het totaal T van 10 doosjes:

- $\text{E}(T) = 10 \cdot \text{E}(X) = 10 \cdot 104{,}3 = 1043$
- $\sigma(T) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X) = \sqrt{10} \cdot 3{,}5 \approx 11{,}1$

Je mag daarom 1043 paperclips verwachten met een standaardafwijking van ongeveer 11,1.

Voor het gemiddelde aantal per doosje $\overline{X}$ geldt:

- $\text{E}\left(\overline{X}\right) = 104{,}3$
- $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma(T)}{10} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sigma(X)}{10} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{10}} \approx 1{,}1$

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** gaat het over doosjes paperclips, waarin gemiddeld per doosje $104,3$ paperclips zitten met een standaardafwijking van $3,5$. Je koopt vijf van die doosjes paperclips.

a Hoeveel paperclips mag je in totaal in de vijf doosjes samen verwachten?

b Hoeveel paperclips mag je gemiddeld per doosje in deze steekproef van vijf doosjes verwachten?

c Welke standaardafwijking heeft het aantal paperclips in deze vijf doosjes samen? Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

d Welke standaardafwijking heeft het gemiddelde aantal paperclips per doosje in deze steekproef van vijf doosjes? Rond af op twee decimalen nauwkeurig

Opgave 5

In een fabriek worden zakken met 1 kg meel gevuld. De zakken hebben een verwacht gewicht van 1002 g met een standaardafwijking van 4 g. De zakken worden op hun beurt verpakt met een plastic folie in pakketten van 10 zakken.

a Bereken het gemiddelde gewicht van deze pakketten.

b Welke standaardafwijking geldt voor het gewicht van deze pakketten? Geef je antwoord in g in twee decimalen nauwkeurig.

c Welke verwachtingswaarde en standaardafwijking geldt voor het gemiddelde gewicht $\overline{X}$ van één zak meel uit zo’n pakket? Rond zo nodig af op g in twee decimalen nauwkeurig.

Op een pallet worden 100 pakketten geplaatst.

d Welk gewicht verwacht je dat op het pallet geplaatst is en welke standaardafwijking geldt hiervoor? Rond zo nodig af op g in twee decimalen nauwkeurig.

e Welke verwachtingswaarde en standaardafwijking gelden voor het gemiddelde gewicht van één zak meel van zo'n pallet?

Verwerken

Opgave 6

Jenna en Iris spelen een zelfbedacht spel met knikkers. Ze pakken het wetenschappelijk aan: op basis van heel vaak spelen hebben ze berekend dat de volgende kanstabel bij het spel hoort:

k	-2	-1	0	2	3
$P(K = k)$	0,0032	0,1634	0,3456	0,2473	0,2405

Tabel 5.3

Stochast K is het aantal knikkers winst/verlies per keer dat het spel gespeeld wordt.

a Hoe groot is het verwachte aantal knikkers winst/verlies na 35 keer spelen? Welke standaardafwijking hoort daarbij? Rond af op twee decimalen.

b Hoeveel knikkers per spel verwacht je na 35 keer spelen?

Geef ook de bijbehorende standaardafwijking. Rond af op twee decimalen.

Opgave 7

Een bepaald type dvd-recorder wordt in dozen verpakt die een gemiddelde hoogte van 10 cm hebben met een standaardafwijking van 4 mm. Bij een groothandel wordt een aantal van deze dozen in een magazijn opgeslagen.

a Er worden 15 dozen op elkaar geplaatst. Bereken de verwachtingswaarde van de hoogte en geef de bijbehorende standaardafwijking in mm in één decimaal nauwkeurig.

b Bij het vervoer van deze dozen gebruikt men een vrachtwagen met een gemiddelde laadhoogte van $2{,}5$ m en een standaardafwijking van $1{,}9$ cm. Bij het beladen van deze vrachtwagen maakt men stapels van 25 dozen. Welke standaardafwijking mag de hoogte van een doos hebben als de standaardafwijking van de hoogte van de stapel dozen kleiner of gelijk moet zijn aan $1{,}9$ cm?

Opgave 8

Vierkante postzegels kunnen gekocht worden op rollen van 500 zegels. Een rol heeft een lengte van 15 m met een standaardafwijking van 5 mm.

a Welke afmetingen hebben de zegels gemiddeld?

b Hoe groot is de standaardafwijking van de lengte van één zegel in mm? Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Dezelfde zegels zijn ook verkrijgbaar op vellen van gemiddeld 60 bij 30 cm.

c Welke standaardafwijkingen hebben de zijden van dit soort vellen in mm? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 9

Een tuinder heeft 10000 jonge preiplanten geteeld voor de verkoop. Uit ervaring weet hij dat de kans dat zo'n plantje bij de klant begint te groeien en geoogst kan worden $0{,}8$ is.

a Hoe groot is de kans dat minstens 40 van de 50 planten, die iemand bij deze tuinder voor zijn tuin heeft gekocht, ook echt geoogst kunnen worden? Rond af op drie decimalen nauwkeurig.

b Welk aantal planten mag deze klant verwachten te oogsten? Met welke standaardafwijking? Rond af op twee decimalen.

c Welk aantal planten verwacht de tuinder dat uiteindelijk van zijn totale hoeveelheid kan worden geoogst? Met welke standaardafwijking moet hij rekening houden?

Opgave 10

In een bak met 10000 balletjes is 60% van de balletjes rood, de rest is wit. Laat X de uitkomst van een blinde trekking van een balletje uit de bak zijn, waarbij $X = 0$ als het getrokken balletje wit is en $X = 1$ als het getrokken balletje rood is.

a Er worden in één keer 16 balletjes uit de bak getrokken. Bereken $\text{E}(\overline{X})$ en $\sigma(\overline{X})$. Rond zo nodig af op vier decimalen. Welke aanname mag je hier doen?

b Hoeveel balletjes moet je trekken zodanig dat $\sigma(\overline{X}) = 0{,}2$?

Toepassen

Opgave 11: Vaste telefoonlijn ouderwets?

Iemand voert een onderzoek uit naar de leeftijd van mensen die privé een vaste telefoonverbinding hebben.

Hij maakt een binomiale stochast X voor wanneer iemand een vaste telefoon heeft. Hierbij is $X = 0$ als de persoon jonger dan 50 jaar is, en $X = 1$ als de persoon 50 jaar of ouder is. Na een enquête van 500 mensen die een telefoon met een kiesschijf hebben, en wat rekenwerk, komt hij op $\sigma(\overline{X}) = 0{,}0179$.

a Bereken de kans dat een willekeurige persoon die een vaste telefoonverbinding gebruikt, 50 jaar of ouder is. Rond af op één decimaal. (Als het goed is, krijg je twee antwoorden: beredeneer uit de context welke de juiste is.)

De onderzoeker maakt een wat meer verfijnde stochast Y. Hierbij is $Y = 0$ als de ondervraagde persoon jonger dan 40 jaar is, $Y = 1$ als de persoon tussen de 40 en 60 jaar is, en $Y = 2$ als de persoon 60 jaar of ouder is. Hiermee krijgt hij na wat nieuwe berekeningen $\text{E}(\overline{Y}) = 1{,}7$ en $\text{Var}(\overline{Y}) = 0{,}00062$.

b Stel de kansverdeling op voor Y.

Testen

Opgave 12

In een doos zitten vijf kaartjes met daarop de getallen 3, 7, 11 en 15. Er zitten twee kaartjes met een 7 in.

a Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het getal bij het trekken van één kaartje uit de doos. Rond indien nodig af op twee decimalen.

b Er worden nu met terugleggen twee kaartjes getrokken. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som van de getallen van de twee getrokken kaartjes. Rond indien nodig af op twee decimalen.

c Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het gemiddelde van de getallen op de twee getrokken kaartjes. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 13

In de maand december zijn er kerstzegels verkrijgbaar. Ze worden in een bepaald jaar aangeboden op een velletje van vier bij vijf zegels. De afmetingen (zonder de randen) van de velletjes zijn $15{,}5$ bij $15{,}5$ cm met een standaardafwijking van $0{,}75$ mm in beide richtingen.

a Bereken de afmetingen van een gemiddelde zegel.

b Bereken de standaardafwijkingen van de afmetingen van een gemiddelde zegel in mm. Rond af op drie decimalen nauwkeurig.

Figuur 5.3

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Discrete kansmodellen** doorgewerkt.
Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- stochast = toevalsvariabele — discrete stochast — kansverdeling — verwachtingswaarde — variantie — standaardafwijking
- onafhankelijke stochasten
- Bernoulli-experiment — binomiale stochast — parameters van een binomiale stochast
- hypergeometrische stochast
- wortel-n-wet

Activiteitenlijst

- bij een discrete stochast een kansverdeling karakteriseren door verwachtingswaarde en standaardafwijking
- verwachting en standaardafwijking van de som en het product van twee stochasten bepalen
- binomiale kansen berekenen — een binomiale kansverdeling opstellen
- kansen berekenen bij trekking zonder terugleggen — deze kansen benaderen met binomiale kansen
- de wortel-n-wet voor de som van n dezelfde stochasten toepassen.

Achtergronden

De 'Ars Conjectandi' van **Jakob Bernoulli (1654—1704)** was één van de eerste leerboeken over kansrekening. Daarin zette Bernoulli het kansbegrip en de hele basiskansrekening helder op een rijtje. En hij voegt er zijn eigen bijdragen zoals Bernoulli-experimenten, wet van de grote aantallen, etc., aan toe. Het boek werd in 1712 gepubliceerd.

In 1718 verscheen van **Abraham de Moivre (1667—1754)** 'The Doctrine of Chance', een boek over kansrekening waarin de eerste definitie van statistische onafhankelijkheid verschijnt, naast de aanpak van allerlei problemen op het gebied van dobbelen en andere kansspelen. Hij bestudeerde ook sterftetabellen en werkte aan de theorie van de wiskunde rond levensverzekeringen.

Vanaf 1720 onderzocht De Moivre problemen zoals hieronder beschreven.

> Uit een vaas met uitsluitend zwarte en witte schijven trek je 1000 keer een schijf die je telkens teruglegt. De kans op een zwarte schijf is $\frac{1}{5}$. De verwachting is dat je $1000 \cdot \frac{1}{5} = 200$ keer een zwarte schijf trekt. Hoe groot is nu de kans dat het aantal zwarte schijven dat je trekt maximaal 1 (of 2, of 3, of ...) van de verwachte 200 verschilt?

Dit zijn typisch problemen die een binomiale kansverdeling betreffen.
Bij de bestudering van het geval dat de kans op een zwarte en een witte schijf even groot is ontdekte De Moivre dat een bijpassende kansverdeling een histogram heeft dat netjes klokvormig is. De kansverdeling waarbij zo'n klokvormige grafiek past is later de 'normale verdeling' genoemd.

Testen

Opgave 1

Je werpt met twee zuivere dobbelstenen.
De stochast X is de som van de aantallen ogen die met de twee stenen gegooid worden.
De stochast Y is het product van deze aantallen.

a Toon aan dat $\text{P}(X = 6) = \frac{5}{36}$ en $\text{P}(Y = 6) = \frac{4}{36}$.

b Je gooit 15 keer met de twee dobbelstenen. V is het aantal keren dat de som van de ogen 6 is en W is het aantal keren dat het product 6 is.

Welke kans is groter, $\text{P}(V < 3)$ of $\text{P}(W > 8)$?

Opgave 2

Bij het spel darten mag je per beurt drie pijltjes naar het dartboard gooien. A wordt de stochast die het aantal keren voorstelt dat de roos per beurt is geraakt. Je ziet de kansverdeling voor Mischa.

a	0	1	2	3
$\text{P}(A = a)$	$0{,}45$	$0{,}31$	$0{,}18$	$0{,}06$

Tabel 6.1

a Bereken $\text{E}(A)$ en $\sigma(A)$. Rond indien nodig af op twee decimalen.

b Mischa gooit 10 keer 3 pijltjes. Bereken $\text{E}(\overline{A})$ en $\sigma(\overline{A})$. Rond indien nodig af op twee decimalen.

c Wat is de kans dat van de 10 beurten die Mischa heeft, er precies 8 beurten tussen zitten waarbij hij minder dan 2 keer de roos raakt.

Opgave 3

Uit onderzoek blijkt dat ongeveer $46{,}7\%$ van de West-Europeanen bloedgroep O heeft. Je bekijkt de gegevens van een aselecte steekproef van 50 West-Europeanen.

a Hoe groot is de kans dat in deze steekproef minstens 30 personen bloedgroep O hebben? Rond af op vier decimalen.

b Hoeveel personen met bloedgroep O verwacht je in deze steekproef? Met welke standaardafwijking? Rond de standaardafwijking af op twee decimalen.

Je bekijkt nu de gegevens van 10 aselecte steekproeven van 50 West-Europeanen.

c Hoeveel personen met bloedgroep O verwacht je in totaal in deze 10 steekproeven? Met welke standaardafwijking? Rond de standaardafwijking af op twee decimalen.

d Hoeveel personen met bloedgroep O verwacht je gemiddeld per steekproef in deze 10 steekproeven? Met welke standaardafwijking? Rond de standaardafwijking af op twee decimalen.

Opgave 4

Een verzekeringsmaatschappij legt zich toe op het verzekeren van inboedels. Uit intern onderzoek is komen vast te staan dat de maatschappij kan verwachten dat één op de 10000 verzekerden een claim van (gemiddeld) € 200000,00 zal indienen; dat één op de 1000 verzekerden een claim zal indienen van € 50000,00; dat één op de 50 een claim zal indienen van € 2500,00 en dat de andere verzekerden alleen premie zullen betalen.

a Wat moet de maatschappij gemiddeld per polis uitbetalen?

Het gemiddelde verzekerde bedrag per polis is € 80000,00 en de maatschappij wil ongeveer 10% winst maken.

b Welke premie per € 1000,00 verzekerd bedrag moet de maatschappij vragen?

Opgave 5

Bij een loterij die elke week gehouden wordt, krijgt elke deelnemer één formulier. Op dit formulier staan de getallen 1 tot en met 19. De deelnemer moet drie getallen aankruisen en vervolgens zijn formulier inleveren. Als alle formulieren ingeleverd zijn, worden aselect drie winnende getallen gekozen. Een deelnemer ontvangt een prijs als hij ten minste twee winnende getallen aangekruist heeft.

a Toon aan dat, afgerond op twee decimalen, de kans op een prijs gelijk is aan $0{,}05$.

Het loterijbestuur neemt aan dat deze kans precies gelijk is aan $0{,}05$. Het laat zo veel deelnemers toe dat de kans op vier of meer prijzen per week kleiner is dan $0{,}01$.

b Hoe groot is het maximaal toelaatbare aantal deelnemers?

Opgave 6

De directie van een hotel wil inzicht krijgen in de kwaliteit van de bediening. Zij besluit om gasten die het hotel verlaten hun mening hierover te vragen. De mogelijke antwoorden zijn: ‘goed’, ‘redelijk’ en ‘slecht’. De manager heeft ontdekt dat 70% van de gasten ‘goed’ opgeeft, dat 20% ‘redelijk’ zegt en dat 10% de bediening ‘slecht’ noemt. Een groot deel van de gasten bestaat uit tweetallen die samen één kamer hebben bewoond. Van zo’n tweetal kunnen beiden hetzelfde antwoord hebben gegeven, maar dat hoeft natuurlijk niet.

a Hoe groot is de kans dat van zo’n tweetal gasten beiden ‘slecht’ antwoorden?

b Hoe groot is de kans dat bij zo’n tweetal het antwoord ‘slecht’ niet voorkomt?

c De directie wil de uitspraak van zo’n tweetal tot één uitspraak samenvoegen, waarbij uitsluitend de kwalificaties ‘goed’, ‘redelijk’ en ‘slecht’ worden gebruikt. Bedenk een manier om dit te doen en bereken dan de bijbehorende kansen.

d Als 60% van de gasten van dit hotel tot zo’n tweetal behoort en de uitspraken van zo’n tweetal worden op de door jou beschreven wijze tot één uitspraak verwerkt, hoe beïnvloedt dit dan het percentage van 10 dat ‘slecht’ heeft geantwoord?

e Noem X de score die bij de kwalificaties hoort, met $X = 0$ bij ‘slecht’, $X = 5$ bij ‘redelijk’ en $X = 10$ bij ‘goed’. Wat is de verwachte score, uitgaande van de kansen berekend bij deelvraag d? En de standaardafwijking? Rond af op twee decimalen.

Opgave 7

Van een pijnstiller is bekend dat, wanneer je er één pil van inneemt, de kans dat je binnen een half uur geen pijn meer voelt 0,6 is. Het middel wordt door 50 mensen met pijn gebruikt, ze nemen allen één pil.

a Wat is de kans dat binnen een half uur van deze 50 mensen er minstens 40 geen pijn meer voelen? Rond af op vier decimalen.

b Hoe groot is de kans dat 25 tot 45 mensen binnen een half uur geen pijn meer voelen? Rond af op vier decimalen.

c Het blijkt dat van de 50 personen er 35 zijn die na een half uur geen pijn meer voelen. Er wordt uit deze groep van 50 een steekproef van 5 personen genomen. Wat is de kans dat van die 5 personen er 3 na een half uur geen pijn meer voelen? Rond af op vier decimalen.

Een andere fabrikant van pijnstillers maakt via een landelijke reclameactie bekend een betere pijnstiller gevonden te hebben. Deze fabrikant beweert dat de kans om binnen een half uur geen pijn meer te voelen 0,8 is. De reclamecodecommissie wil die bewering onderzoeken. Het middel wordt daartoe aan 50 willekeurig gekozen mensen met pijn gegeven. De reclamecodecommissie besluit geen actie tegen de fabrikant te ondernemen als van de 50 mensen die het nieuwe middel kregen, er 37 binnen een half uur geen pijn meer voelen.

d Bereken de kans dat de commissie geen actie tegen de fabrikant zal ondernemen terwijl hun pijnstiller in feite helemaal niet beter is. De kans dat pijn dankzij dit middel verdwijnt, is dus, net als voor het concurrerende medicijn, $0{,}6$. Rond af op vier decimalen.

Opgave 8

In de laatste week voor Sinterklaas staat bij de ingang van een groot winkelbedrijf een grote draaiende trommel. Daarin zitten 1000 onderling niet te onderscheiden pakjes. De goede Sint heeft in een aantal een cadeautje ter waarde van € 1,00 gestopt. Alle andere pakjes bevatten een cadeautje van € 9,00. De totale inhoud van 1000 pakjes is € 3000,00 waard. Er is een ingenieus systeem bedacht dat ervoor zorgt dat wanneer er een pakje uit de trommel genomen wordt, er onmiddellijk weer een pakje met dezelfde cadeauwaarde in terugkomt.

a Je neemt één pakje. Toon aan dat de kans dat daarin een cadeautje van € 1,00 zit $0{,}75$ is.

b Bereken de kans dat een greep van 20 pakjes minstens 14 pakjes met een cadeau van € 1,00 bevat. Rond af op vier decimalen.

c Hoeveel pakjes moet je uit de trommel halen, wil de kans dat één van die pakjes er een van € 9,00 is, 35,6% zijn?

Bij de trommel staat iemand die de bezoekers aanspoort om tegen betaling van € 5,00 één pakje uit de trommel te nemen.

d Stel je voor dat je 50 pakjes koopt. Bereken de kans dat je 52% van het betaalde bedrag in de vorm van cadeautjes terugverdient. Rond af op vier decimalen.

e Bereken de kans dat de waarde van je pakjes kleiner is dan het bedrag dat je hebt betaald als je drie pakjes koopt. Rond af op vier decimalen.

Toepassen

Opgave 9: Kansspelen

Gokken is ‘in’. Er bestaat tegenwoordig een grote hoeveelheid **kansspelen**. Het aanbod loopt van simpele Krasloten tot de keurige Staatsloterij en de spelen in het chique Casino. Verder kan er meegespeeld worden aan de Postcodeloterij, de Bankgiroloterij, de Duitse Lotto, etc. Allemaal mogelijkheden om in één klap binnen te zijn.

Belangrijk bij kansspelen is ‘de verwachte winst’. Om dat getal exact te bepalen moet je de kansverdeling weten. Soms kun je die beredeneren, maar je kunt ook het spel vele keren spelen en de gemiddelde winst bepalen. Dat getal is een schatting voor de verwachting. Dat vele malen spelen van een spel kun je simuleren. Je werkt dan met toevalsgetallen, getallen die volstrekt aselect uit een bepaald interval worden gekozen. Ze hebben dus alle dezelfde kans om gekozen te worden. Je weet al hoe je die met je grafische rekenmachine kunt genereren. Maar je kunt daarvoor ook een spreadsheetprogramma gebruiken.

Bekijk eerst een paar kleine kansspelen.

a Het gooispel:
Je geeft iemand € 10,00. Die ben je kwijt. Vervolgens werp je met een dobbelsteen tot je een 6 gooit. Je ontvangt € 0,00 als je meteen een 6 gooit; € 1,00 als dat bij de tweede worp lukt, € 2,00 bij de derde worp, € 4,00 bij de vierde worp, enzovoort.

b Het knipspel:
Dit keer moet je vooraf € 25,00 betalen. Daarna wordt een touwtje van 10 cm lengte volstrekt willekeurig in drie stukken geknipt. Als je met die drie stukken een scherphoekige driehoek kunt vormen dan ontvang je € 100,00. Lukt dat niet dan ontvang je niets. Het knippen kun je simuleren met toevalsgetallen.

Bekijk vervolgens één of meer van de grotere kansspelen en analyseer ze. De spelregels zijn vaak via internet te vinden. Die heb je nodig voor een goede analyse van het spel. Zie:

- **De Staatsloterij**
- **De Postcodeloterij**
- **De Lotto**
- **De Vriendenloterij**
- **Roulette**
- etc.

c Bepaal ook nu je winstkansen.

Examen

Opgave 10: Verscheidenheid van achternamen

In Engeland krijgen kinderen die uit een huwelijk worden geboren van oudsher de achternaam van de vader. Dit betekent dat in een gezin zonder trouwende zoons de achternaam niet aan een volgende generatie wordt doorgegeven. Dit kan tot gevolg hebben dat een achternaam uitsterft.
Men wil de invloed van het bovenstaande op de verscheidenheid van achternamen nagaan door middel van een computersimulatie. Omdat vooral de effecten op de langere termijn van belang zijn, besluit men te kijken naar het aantal getrouwde zoons per gezin.
Indien bijvoorbeeld Henry Streamer en Jane Woolf drie getrouwde zoons krijgen, rekent de computer in de volgende generatie verder met drie gezinnen onder de naam Streamer.
De kansen op $0, 1, 2, ...$ trouwende zoons ontleent men aan een uitgebreid onderzoek naar de stambomen van Engelse families. Men komt tot de conclusie dat de kans op 7 of meer trouwende zoons per gezin verwaarloosbaar klein is.
In de tabel zijn de overige kansen af te lezen. Hierbij is X het aantal trouwende zoons per gezin:

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,3172	0,3643	0,2093	0,0801	0,0234	0,0048	0,0009

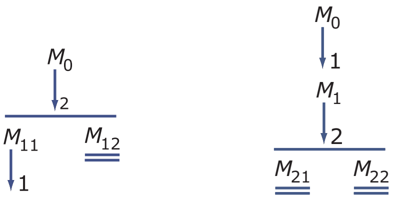
Tabel 6.2

Een programmeur maakt een computerprogramma waarin hij deze kansverdeling verwerkt en wel zo dat voor elk gezin de kans op bijvoorbeeld drie trouwende zoons gelijk is aan $0{,}0801$. Men maakt verder gebruik van de onderstaande symbolen met de daarbij vermelde betekenis.

$M \downarrow x$	man M trouwt en krijgt x trouwende zoons ($1 \leq x \leq 6$).
$\underline{\underline{M}}$	man M krijgt geen trouwende zoons.

Tabel 6.3

In de linkerfiguur hieronder zie je dat man M_0 twee trouwende zonen krijgt: M_{11} en M_{12}; M_{11} (de oudste van de twee) krijgt één trouwende zoon en M_{12} geen trouwende zoon.



Figuur 6.1

a Toon aan dat de kans op het optreden van de situatie van de linkerfiguur ongeveer gelijk is aan $0{,}024$.

b Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans op het optreden van de situatie van de rechterfiguur.

Neem aan dat tijdens de simulatie een zekere generatie precies twee gezinnen voorkomen met de naam ‘Wendling’.

c Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat de naam ‘Wendling’ in de volgende generatie als gezinsnaam verdwenen zal zijn.

d Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat in de volgende generatie meer dan één gezin met de naam ‘Wendling’ voorkomt.

Als proef start men de computersimulatie met een beginpopulatie van 20 gezinnen met allemaal verschillende namen en stopt men zodra de eerstvolgende generatie gevonden is. X is het aantal namen dat in de eerstvolgende generatie niet terug komt.

e Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat dan in de eerstvolgende generatie precies 15 verschillende gezinsnamen zullen voorkomen.

f Bereken in drie decimalen nauwkeurig de verwachtingswaarde van X.

(bron: examen wiskunde A vwo 1989, tweede tijdvak, opgave 3)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 4

www.math4all.nl