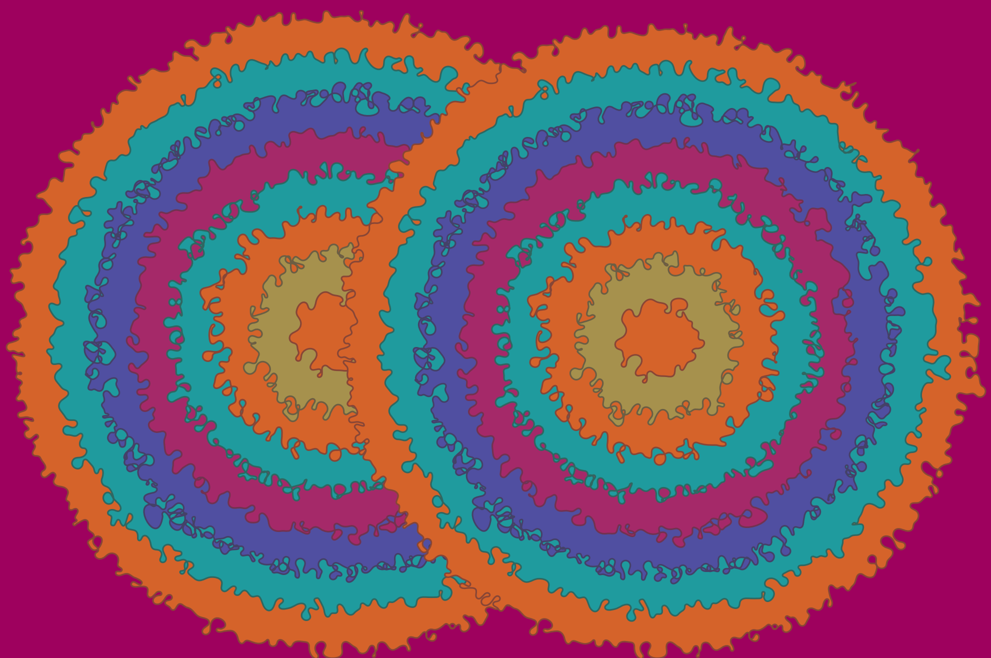
Wiskunde D

4 HAVO

Katern 3

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Modelleren

1.1 Evenredigheden

Inleiding

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$. Hierin is a recht evenredig met een macht van h, want de variabele h moet tot de macht $\frac{1}{2}$ worden verheven. Je kunt ook zeggen dat h een machtsfunctie is van a. Maar wat betekent $h^{\frac{1}{2}}$ nu eigenlijk?

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- wat recht evenredig met een macht is;
- bij een machtsverband heen en terug te rekenen;
- hoe bij een machtsverband de verandering van de éne variabele samenhangt met die van de andere.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen en ongelijkheden oplossen.

Verkennen

Opgave V1

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$. Hierin is a recht evenredig met een macht van h, want de variabele h moet tot de macht $\frac{1}{2}$ worden verheven, op je grafische rekenmachine bereken je de uitkomsten van zo'n macht gewoon met de toets voor machtsverheffen, meestal ^.

Welke van de volgende beweringen is waar?

- Als je op een toren van 100 m hoog staat kun je meer dan 30 km ver kijken.
- Op een hoogte van 100 m kun je twee keer zo ver kijken als op een hoogte van 50 m.
- Als je op een toren van 50 m hoog staat kun je (afgerond) 25 km ver kijken.

Uitleg

De functie $y = x^3$ is een typisch voorbeeld van een machtsfunctie: de variabele x moet tot de derdemacht worden verheven om y te krijgen. Als bijvoorbeeld $x = 4$, dan is $y = 4^3 = 64$.

Je zegt ook wel dat y recht evenredig is met de derdemacht van x. Als x^3 bijvoorbeeld twee keer zo groot wordt, dan wordt y ook twee keer zo groot.

Als gegeven is dat $y = 125$, dan kun je x vinden door terug te rekenen vanuit de derdemacht. Dat heet dan de derdemachtswortel: $x = \sqrt[3]{125} = 5$. Als $y = 200$, dan is $x = \sqrt[3]{200} \approx 5{,}848$.

Een andere schrijfwijze voor de oplossing van $x^3 = 200$ is: $x = 200^{\frac{1}{3}}$. Dit is in lijn met de rekenregel $(x^a)^b = x^{ab}$, want $\left(200^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 200^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 200$. Dus: $\sqrt[3]{200} = 200^{\frac{1}{3}}$.

Een ander voorbeeld van een machtsfunctie is $y = 2{,}5x^4$. De variabele y is nu recht evenredig met de vierdemacht van x. Je moet de variabele x tot de vierdemacht verheffen en de uitkomst daarvan vermenigvuldigen met de constante $2{,}5$. Deze constante wordt de evenredigheidsconstante genoemd.

Omgekeerd, als bijvoorbeeld gegeven is dat $y = 50$, moet je eerst delen door $2{,}5$ en daarna kun je terugrekenen vanuit de vierdemacht. Dit heet de vierdemachtswortel. Je vindt $x = \sqrt[4]{20} \approx 2{,}115$.

De oplossing kun je ook schrijven als $x = 20^{\frac{1}{4}}$.

Opgave 1

Voor de inhoud I van een kubus met ribben van lengte r geldt $I = r^3$.

a Bereken de inhoud van een kubus waarvan de ribben 6 cm zijn.

b Maak de ribbe twee keer zo groot. Wat gebeurt er met de inhoud?

c Bereken hoe groot je de ribbe moet nemen om een kubus te krijgen met een inhoud van 1000 cm^3.

Opgave 2

Als je naar het gewicht van een kubus kijkt, dan moet je rekening houden met de soortelijke massa. Dat is de massa (kg) van 1 dm^3. De soortelijke massa van chroom is $7{,}19$. Voor het gewicht G (kg) van een massieve kubus van chroom met ribben van lengte r (dm) geldt daarom $G = 7{,}19 \cdot r^3$.

a Hoe groot is het gewicht van zo'n kubus als de ribben een lengte van 50 cm hebben?

b Een massieve kubus van chroom heeft een gewicht van 10 kg. Wat is de lengte van een ribbe van deze kubus? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

c Als je de ribben van een massieve kubus 3 keer zo groot maakt, wat gebeurt er dan met het gewicht?

d IJzer heeft een soortelijke massa van $7{,}87$. Welke formule hoort er bij het gewicht G van een massief ijzeren kubus met ribben van lengte r?

Opgave 3

Ook het verband tussen de ribbelengte r en de oppervlakte A van een kubus is een machtsverband.

a Leg uit waarom $A = 6 \cdot r^2$.

b Is de oppervlakte A recht evenredig met de tweedemacht van r? Of is r recht evenredig met de tweedemacht van A?

c Bereken de oppervlakte van een kubus waarvan de ribben 5 cm zijn.

d Als je een kubus wilt krijgen waarvan de oppervlakte twee keer zo groot is. Hoeveel keer zo groot moeten dan de ribben van de kubus worden?

e Leid een formule af die de ribbelengte uitdrukt in de oppervlakte.

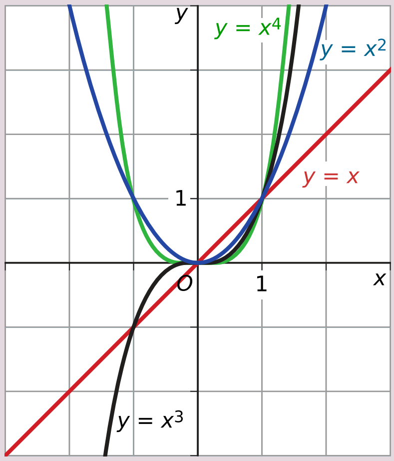
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: machtsfuncties

Als y **recht evenredig met een macht** van x is, dus $y = c \cdot x^p$, dan spreek je van een machtsfunctie. De constante c is de evenredigheidsconstante.

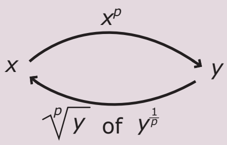
Je ziet voorbeelden van grafieken van machtsfuncties.



Vanuit de machtsfunctie $y = x^p$ (dus als $c = 1$) kun je op twee manieren terugrekenen:

$x = \sqrt[p]{y}$

$x = y^{\frac{1}{p}}$



Figuur 1.3

Afhankelijk van de waarde van p heb je één of twee antwoorden. Als de **evenredigheidsconstante** niet de waarde 1 heeft, deel je eerst door c. Daarna pas je ofwel de p-demachtswortel toe, ofwel je werkt met de omgekeerde macht.

Voor elke x en voor willekeurige reële getallen a en b gelden de volgende

eigenschappen van machten en exponenten

$x^0 = 1$	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ mits $x \neq 0$	$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$ mits $x \geq 0$ en $a > 0$
$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$	$x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$ mits $x \neq 0$	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Voorbeeld 1

Gegeven is dat de variabele Z recht evenredig is met de zesdemacht van de variabele t en dat de evenredigheidsconstante $\frac{5}{8}$ is.

Omgekeerd is t ook recht evenredig met een macht van Z. Welke macht? Geef ook de bijbehorende evenredigheidsconstante in drie decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Uit de gegevens volgt dat $Z = \frac{5}{8} \cdot t^6$. Om antwoord te geven op de vraag ga je terugrekenen:

$$\begin{aligned} \tfrac{5}{8}t^6 &= Z \\ & \qquad \text{delen door } \tfrac{5}{8} \\ t^6 &= \tfrac{8}{5} \cdot Z \\ & \qquad \text{terugrekenen vanuit zesdemacht} \\ t &= \left(\tfrac{8}{5} \cdot Z\right)^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

Je vindt: $t \approx 1{,}081 \cdot Z^{\frac{1}{6}}$. Dus t is recht evenredig met $Z^{\frac{1}{6}}$.
De evenredigheidsconstante is ongeveer $1{,}081$.

Opgave 4

Bij welke van de formules is y recht evenredig met een macht van x? Geef in dat geval de evenredigheidsconstante. Rond indien nodig af op drie decimalen nauwkeurig.

a $y = 0{,}8x$

b $y = 33x^4 - 10$

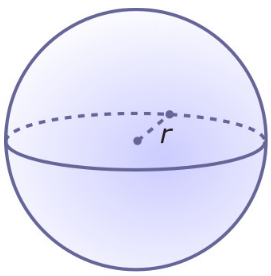
c $y = 0{,}005x^8$

d $x = 20y^5$

e $y = 25x^2 \cdot 3 \cdot x^3$

Opgave 5

De inhoud I van een bol is recht evenredig met de derdemacht van de straal r: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.



Figuur 1.4

a Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b Bereken de inhoud van een bol waarvan de straal 10 cm is.

c Bereken de straal van een bol waarvan de inhoud 1000 cm^3 is. Geef je antwoord in cm, en rond af op één decimaal.

d r is ook recht evenredig met een macht van I. Welke macht? Geef ook de bijbehorende evenredigheidsconstante in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Ook het verband tussen de straal r en de oppervlakte A van een bol is een recht evenredig verband met een macht. De bijbehorende formule is: $A = 4\pi r^2$

a Bereken exact de oppervlakte van een bol met een straal van 6 cm.

b Hoe groot moet de straal worden om een bol te krijgen met een vier keer zo grote oppervlakte?

c Laat zien dat de straal recht evenredig is met een macht van de oppervlakte. Bereken ook de exacte evenredigheidsconstante.

Voorbeeld 2

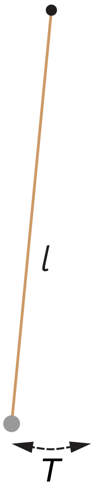
Als je een gewichtje laat slingeren aan een koord met een verwaarloosbare massa, ontstaat er een zuivere slingerbeweging. De slingertijd (of periode) is de tijd waarin de slinger een complete slingerbeweging uitvoert. Daarin beweegt het gewichtje bijvoorbeeld van links naar rechts en weer terug. De slingertijd is niet afhankelijk van de zwaarte van het gewicht dat je aan het koord hangt. Dit betekent dat verschillende gewichten bij eenzelfde lengte van het koord, dezelfde slingertijd hebben.

Als de uitwijking van de slingerbeweging niet te groot is, dan geldt voor de slingertijd bij benadering de formule:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Hierin is T de slingertijd in seconden, l de lengte van het koord in meter en g de valversnelling in m/s^2. Op aarde is de valversnelling gemiddeld ongeveer 9,81 m/s^2.

Bereken de slingertijd bij een koord van 20 cm. Bereken ook de lengte van het koord als de slingertijd 2 seconden is.



Figuur 1.5

Antwoord

Bij een koord van 20 cm geldt: $T = 2\pi\left(\frac{l}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi\left(\frac{0{,}20}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}90$.

De slingertijd is dan ongeveer 0,90 seconde.

Neem je omgekeerd voor de slingertijd $T = 2$, dan geldt: $T = 2\pi\left(\frac{l}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}} = 2$.

Delen door 2π en vervolgens kwadrateren geeft $\frac{l}{9{,}81} \approx 0{,}101$ en dus $l \approx 0{,}99$.

De lengte van het touw is dan ongeveer 1 meter.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** is de formule $T = 2\pi\left(\frac{l}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}}$ gegeven.

a T is recht evenredig met $l^{\frac{1}{2}}$. Toon aan dat de evenredigheidsconstante ongeveer 2,006 is.

b l is ook recht evenredig met T^2. Toon dit aan en geef de evenredigheidsconstante in drie decimalen nauwkeurig.

c Hoeveel bedraagt de slingertijd als de lengte van het koord 10 cm is?

d Hoe groot is de lengte van het koord in meter als de slingertijd 8 seconden is?

Voorbeeld 3

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij het warmteverlies van het dier. Diersoorten met een, in verhouding tot hun inhoud, relatief grote huidoppervlakte zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten. Meeh heeft een formule gevonden die het verband tussen gewicht en huidoppervlakte aangeeft: $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$.

Hierin is H de huidoppervlakte (dm^2) en G het gewicht (kg) van het dier.

Je ziet dat voor dit verschijnsel de huidoppervlakte recht evenredig is met de $\frac{2}{3}$-macht van het lichaamsgewicht.

De factor c is de evenredigheidsconstante en verschilt per diersoort. In de biologie wordt deze evenredigheidsconstante de meeh-coëfficiënt genoemd. In de tabel is voor een aantal diersoorten de meeh-coëfficiënt gegeven.

dier	c
muis	9,0
kat	10,0
konijn	9,8
schaap	8,4
koe	9,0
paard	10,0
mens	11,2
egel	7,5
vleermuis	57,5

Tabel 1.1

Voor elk diersoort kun je een grafiek tekenen. Je ziet dan dat het verband dat Meeh gevonden heeft vooral aangeeft dat hoe zwaarder een dier is, hoe groter de huidoppervlakte is. Dat is logisch, maar je ziet dan ook dat de huidoppervlakte minder snel toeneemt dan het gewicht: de stijging neemt af. Dat komt door de macht in de formule.

Als je de formule die bij een egel hoort, omrekent zodat het lichaamsgewicht uitgedrukt wordt in de huidoppervlakte, wat wordt dan de evenredigheidsconstante?

Antwoord

$H = 7{,}5 \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Voor het omrekenen maak je gebruik van: $\left(G^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = G$.

$$\begin{aligned} 7{,}5 \cdot G^{\frac{2}{3}} &= H \\ G^{\frac{2}{3}} &= \frac{H}{7{,}5} \\ G &= \left(\frac{H}{7{,}5}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Je vindt $G \approx 0{,}049 H^{\frac{3}{2}}$. Dus de evenredigheidsconstante is ongeveer $0{,}049$.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt een verband tussen huidoppervlakte en lichaamsgewicht beschreven.

a Voor elk diersoort is er een constante c. Hoe wordt deze constante genoemd?

In deze tabel zie je een vijftal waarden van G en H van Schotse Hooglanders, een soort koeien.

b Bepaal de meeh-coëfficiënt van de Schotse Hooglander.

c De huid van een bepaalde Schotse Hooglander heeft een oppervlakte van ongeveer 510 dm^2. Hoe zwaar is die koe in kg nauwkeurig?

d Als je deze formule omrekent zodat het lichaamsgewicht van een Schotse Hooglander uitgedrukt wordt in de huidoppervlakte, wat wordt dan de evenredigheidsconstante? Rond af op drie decimalen.

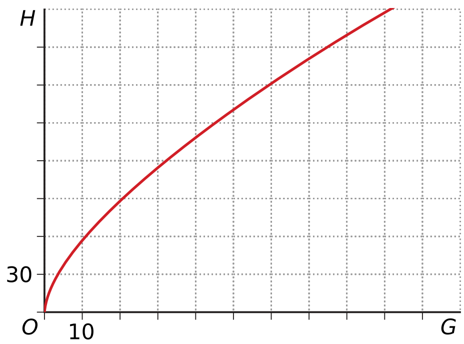
e Als het lichaamsgewicht twee keer zo groot wordt, wordt de huidoppervlakte dan meer of minder dan twee keer zo groot?

Hooglander	
G	H
430	507
450	523
490	553
500	560
420	500

Tabel 1.2

Opgave 9

Je ziet de grafiek die het verband aangeeft tussen de huidoppervlakte H (dm^2) en het gewicht G (kg) van een aap.



Figuur 1.6

Bereken de meeh-coëfficiënt die hoort bij een aap.

Opgave 10

Ook voor een massieve bol beschrijft de formule van Meeh het verband tussen de oppervlakte A en het gewicht G. Ga uit van een massieve ijzeren bol. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

Gebruik de formules voor de inhoud I en oppervlakte A van een bol met straal r: $I = \frac{4}{3}\pi r^3$ en $A = 4\pi r^2$.

a Welke formule geldt voor het gewicht G als functie van de straal r van de bol? Neem r in cm en G in g.

b Door de formules voor het gewicht en de oppervlakte van een bol met straal r te combineren vind je $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de waarde van c in twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 11

Gegeven is de machtsfunctie $y = 64x^7$.

a Is y recht evenredig met een macht van x? Zo ja, geef de evenredigheidsconstante.

b Bereken $y(0{,}5)$.

c Voor welke waarde van x is $y = 15000$? Rond af op drie decimalen.

d Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende y-waarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 12

Voor de inhoud V van een kegel waarvan de hoogte net zo groot is als de straal r van het grondvlak, geldt de formule: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^3$

a V is recht evenredig met r^3. Wat is de exacte evenredigheidsconstante?

b Bereken de inhoud van zo'n kegel waarbij het grondvlak een diameter heeft van 10 cm.

c r is ook recht evenredig met een macht van V. Welke macht? Geef ook de evenredigheidsconstante in drie decimalen nauwkeurig.

d Bereken r als gegeven is dat de inhoud van een kegel 500 cm^3 is. Geef je antwoord in cm, en rond af op één decimaal.

Opgave 13

Bij welke van de formules is y recht evenredig met een macht van x? Geef in dat geval de evenredigheidsconstante. Rond indien nodig af op drie decimalen.

a $y = 125x^{12} + x$

b $x = 0{,}5 \cdot y^{\frac{5}{7}}$

c $y = 525 \cdot x^{0{,}55}$

d $x = 50y^{1{,}5} - 2$

e $y = \frac{30x^7}{3x^3}$

Opgave 14

Er is een verband tussen de snelheid s (km/h) van een auto en de bijbehorende remweg r (m). De remweg is de afstand die de auto nog aflegt als je zo hard mogelijk remt. Een vuistregel op een nat wegdek voor dit verband is: $r = \frac{3s^2}{200}$

a r is recht evenredig met een macht van s. Wat is de evenredigheidsconstante?

In een weg zit een scherpe bocht waarin je maar 12 meter vooruit kunt kijken. Een eis voor veilig rijden is dat je moet kunnen stoppen binnen de afstand die je kunt overzien.

b Wat is volgens deze vuistregel de maximumsnelheid in deze bocht?

c Geef de formule waarmee de snelheid wordt uitgedrukt in de remweg. Wat voor verband is dit?

d Bij c heb je als het goed is een formule gevonden waarbij s recht evenredig is met een macht van r. Wat is de exacte waarde van de evenredigheidsconstante?

e Geef commentaar op de volgende uitspraak: ‘Bij een zicht van 100 meter kun je tweemaal zo hard rijden als bij een zicht van 50 meter.’

Opgave 15

Om elektriciteit op te wekken, worden in gebieden waar het veel waait windmolenparken aangelegd. Windmolens zetten windenergie om in elektrische energie. Steeds vaker worden windmolenparken in zee aangelegd, omdat het boven open zee meestal harder waait dan boven land. Ook boven zee waait het echter niet altijd even hard en dat heeft gevolgen voor de hoeveelheid opgewekte elektrische energie.
De hoeveelheid energie die door wind wordt opgewekt, is evenredig met de derdemacht van de windsnelheid.
Een kleine afname in de windsnelheid levert al een relatief grote afname in de hoeveelheid opgewekte energie op.

a Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid opgewekte energie daalt als de windsnelheid afneemt van $10{,}0$ m/s naar $9{,}5$ m/s. Rond je antwoord af op een geheel getal.

b Bereken met hoeveel procent de windsnelheid moet toenemen om twee keer zo veel energie op te wekken. Rond je antwoord af op een geheel getal.

(bron: pilotexamen wiskunde havo B in 2012, tweede tijdvak)

Toepassen

Opgave 16: De wet van Kleiber

De Amerikaanse veearts en onderzoeker Max Kleiber ontdekte in 1932 dat het zuurstofverbruik Z (L) van verschillende soorten zoogdieren recht evenredig is met een macht van de massa m (kg). In de tabel vind je enkele bijpassende gegevens.

soort	m (kg)	Z (L)
muis	0,20	0,19
rat	1,10	0,75
kat	5,80	2,62
hond	11,5	4,38
mens	76,1	18,0
paard	605,0	85,4

Tabel 1.3

a Stel een formule op voor Z afhankelijk van m. Gebruik daarvoor de gegevens van de muis en het paard.

Kleiber vond de formule: $Z \approx 0{,}7 \cdot m^{0{,}75}$.

b Als je de gegevens van de rat en de mens gebruikt, vind je dan dezelfde evenredigheidsconstante als Kleiber?

c Bereken met de formule van Kleiber het zuurstofverbruik van een koe van 1000 kg. Geef je antwoord in L nauwkeurig.

Opgave 17: Oppervlakte en inhoud cilinder

Van een cilinder is r de straal van het grondvlak. De cilinder is even breed als hoog.

Toon aan dat tussen de oppervlakte A en de inhoud V van zo'n cilinder een machtsverband bestaat van de vorm $A = c \cdot V^{\frac{2}{3}}$. Bereken ook in drie decimalen nauwkeurig de waarde van c.

Testen

Opgave 18

Gegeven is een machtsfunctie door de formule $y = 5 \cdot (3x)^4$.

a y is recht evenredig met een macht van x. Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b Voor welke waarden van x is $y = 120000$?

c Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende functiewaarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 19

Ga uit van een massieve ijzeren kubus met ribbe r in cm. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

a Stel een formule op voor het gewicht G in gram van de kubus als functie van r in cm.

b Een kubus heeft een gewicht van 500 gram. Bereken r in mm nauwkeurig.

c Geef een formule voor r als functie van G.

d r is recht evenredig met $G^{\frac{1}{3}}$. Bereken de bijbehorende evenredigheidsconstante in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 20

Ga weer uit van een massieve ijzeren kubus met straal r in cm. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3. G stelt het gewicht van deze kubus in gram voor.

a Stel een formule op voor de oppervlakte A van de kubus als functie van r in cm.

b Leid een formule af van de vorm $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de evenredigheidsconstante c in twee decimalen nauwkeurig.

c Bereken het gewicht van zo'n kubus als de totale buitenoppervlakte 150 cm^2 is.

d r is recht evenredig met $G^{\frac{1}{3}}$. Bereken de bijbehorende evenredigheidsconstante in twee decimalen nauwkeurig.

1.2 Modelleren

Inleiding

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor het probleem.
Het verband tussen de kijkafstand a (in m) in een aards landschap zonder obstakels en de hoogte h (in m) is daarvan een voorbeeld. De formule $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$ kun je zelf afleiden. Het proces van het bedenken van zo'n rekenmodel voor de situatie noem je ‘modelleren’.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- welke stappen er bij het construeren van een wiskundig model zijn te herkennen;
- hoe je het stellen van goede vragen kunt gebruiken om een model te construeren.

Voorkennis

- werken met formules en recht en omgekeerd evenredige verbanden;
- meetkundige berekeningen met de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid.

Verkennen

Opgave V1

Iemand staat op een toren en heeft een vrij uitzicht. Je wil theoretisch berekenen hoe ver deze persoon kan kijken.
Welke aannames komen hierbij kijken?
Kun je een formule afleiden voor de kijkafstand a afhankelijk van de ooghoogte h?

Uitleg

Probleem: “Iemand staat op een toren en heeft een vrij uitzicht. Hoe ver kan hij (theoretisch) kijken?”

Om zo'n probleem op te kunnen lossen, maak je een bijbehorend model.

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid. Hierin zijn nog alle eigenschappen terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van een bepaald verschijnsel dat je wilt verklaren, of het probleem dat je wilt oplossen. Het bewust opstellen van zo'n model noem je modelleren. Bij het modelleren volg je een aantal vaste stappen. Probeer eerst zelf een oplossing voor het probleem te vinden.

Opgave 1

Bekijk het probleem in de **Uitleg**. De volgende vragen kunnen je helpen om de oplossing van dit probleem te vinden. Dergelijke vragen moet je jezelf ook altijd stellen als je de oplossing van een probleem niet meteen ziet. Als eerste ontwerp je een rekenmodel.

a Waarom kan hij niet oneindig ver kijken, ook als er geen obstakels in de weg staan? Maak een schets om je antwoord toe te lichten.

b Hoe heb je in je figuur de afstand die hij kan kijken aangegeven? Welke vereenvoudigingen heb je nu al toegepast?

Waarschijnlijk bestaat je figuur uit een (deel van een) cirkel die een doorsnede van het aardoppervlak voorstelt. En daarop een lijnstukje dat de hoogte van de ogen van de persoon voorstelt die vanaf de toren boven het aardoppervlak kijkt. Als dat niet zo is, maak dan alsnog een dergelijke figuur. Noem het middelpunt van de cirkel M en het lijnstuk (dat degene die kijkt voorstelt) PQ, met Q op het aardoppervlak.
Punt R is een punt op het aardoppervlak dat de persoon die kijkt nog net kan zien. Geef zo'n punt in je figuur aan.

c Waarom moet PQ op het verlengde van MQ liggen?

d Welke eigenschap heeft driehoek MPR? Probeer daar een verklaring voor te vinden.

e De omtrek van de aarde is 40000 km. Van welke lijnstukken kun je nu de lengte berekenen? Bereken deze lengtes.

f Hoe kun je het probleem verder oplossen?

Opgave 2

Iemand doet het volgende voorstel om het probleem in de **Uitleg** op te lossen:

Kies voor de lengte van PQ (de hoogte van de ogen van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak) een bepaalde waarde, bijvoorbeeld 50 m. Verder is de kijkafstand PR en die afstand geef je de letter a. Vervolgens pas je de stelling van Pythagoras toe in ΔMPR.

a Je kunt daarmee a uitrekenen. Doe dat.

De ooghoogte van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak hoeft niet 50 m te zijn.

b Hoe kun je daarmee rekening houden?

c Probeer nu een volledige oplossing van het probleem te beschrijven. Je kunt daarbij werken met variabelen en een formule. Maar je kunt ook werken op de computer met bijvoorbeeld Excel.

Vaak wordt de formule $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$ gebruikt voor de kijkafstand, met a en h in m.

d Probeer die formule af te leiden uit jouw eigen formule.

Opgave 3

Iemand anders vindt dat de kijkafstand de afstand over het aardoppervlak is. Hij doet het volgende voorstel om het probleem in de **Uitleg** op te lossen:
Kies voor de lengte van PQ (de hoogte van de ogen van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak) de letter h (m). Verder is de kijkafstand de lengte van de boog QR en die geef je de letter a. De lengte van die boog wordt bepaald door de grootte van hoek QMR. En die kun je uitrekenen in driehoek MPR.

a Beschrijf nu hoe je a kunt berekenen.

b Waarom is nu het probleem opgelost?

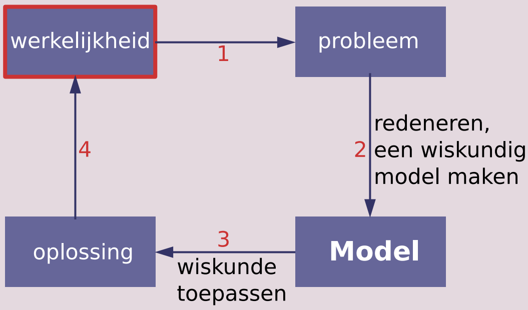
c Welke methode vind je het beste om het vraagstuk op te lossen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van het verschijnsel dat je wilt verklaren. Het bewust opstellen van zo'n model noem je **modelleren**.
Bij het modelleren volg je een viertal vaste stappen.

1. Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een vraag: de probleemstelling. Je bedenkt welke grootheden en variabelen een rol spelen.
2. Je vereenvoudigt de werkelijkheid door aannames te doen en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de probleemstelling past. Je geeft duidelijke definities van de grootheden waartussen je verbanden gaat zoeken. Je moet ook goed bijhouden waarom je bepaalde dingen weglaat.
3. Je zoekt het antwoord op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen. Het antwoord kan de oplossing van het probleem zijn, maar ook een beschrijving van de bepaalde situatie.
4. Je kijkt of je antwoord wel bij de werkelijkheid past. Je moet je antwoord ‘terugvertalen’. Als dat kan, ontwerp je ook een test. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld en doorloop je de cyclus opnieuw.



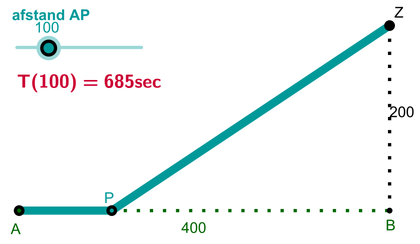
Figuur 2.2

Je doorloopt deze stappen aan de hand van vragen die je jezelf stelt. Bijvoorbeeld of je een schema of tekening kunt maken, of je de verbanden kunt uitdrukken in wiskundige formules, of dat je de uitkomst misschien van tevoren kunt schatten. De **lijst met mogelijke vragen** kan je daarbij helpen. Deze vragenlijst is niet uitputtend, er zijn meer vragen die je jezelf kunt stellen. Het is slechts een eerste aanzet.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Iemand staat aan de (vrijwel rechte) waterlijn van een heel grote waterpartij. Schuin voor zich ziet hij in het water een zwemmer die in nood is. Hoe kan hij zo snel mogelijk bij de zwemmer komen om hulp te bieden? Springt hij meteen in het water of loopt hij eerst een stuk langs het strand?



Figuur 2.3

Antwoord

Je ziet een figuur waarbij punt A de persoon aan de waterlijn voorstelt, punt Z de zwemmer in nood is en ABZ een rechthoekige driehoek is waarvan AB de waterlijn voorstelt. Aangenomen is dat $AB = 400$ m en dat $BZ = 200$ m. Bij punt P gaat de redder het water in. De loopsnelheid is (bij hard lopen) 18 km/h en de zwemsnelheid $5{,}4$ km/h.

Dit is het begin van een rekenmodel. Probeer dit eerst zelf te ontwerpen.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je het probleem van het bepalen van de kortste weg naar een zwemmer. Probeer eerst zelf een oplossing te verzinnen. De volgende vragen leiden je naar een oplossing. Gebruik de aannames in het voorbeeld.

a Hoeveel tijd kost het om de zwemmer te bereiken als er alleen wordt gezwommen?

b Waarom is het waarschijnlijk verstandig om eerst een stuk langs de waterlijn te lopen?

c En hoeveel tijd kost het om de zwemmer te bereiken als het hele stuk AB eerst wordt gelopen en dan BZ wordt gezwommen?

Er wordt een nog kortere tijd bereikt als de persoon bij A niet helemaal van A naar B loopt, maar slechts een deel AP van die afstand.

d Kies $AP = 300$ en bereken dan de tijd die nodig is om de zwemmer te bereiken.

Je kunt ook werken met een variabele voor de lengte van AP. Noem die lengte bijvoorbeeld x.

e Stel een formule op voor de totale tijd $T(x)$ die nodig is om Z te bereiken vanuit A.

f Hoe kun je het probleem verder oplossen?

Opgave 5

Bekijk de vorige opgave over het ‘zwemmer in nood’ probleem nog eens. Bekijk ook de modelleercyclus in de theorie.

a Welke aannames heb je gedaan? Hoe heb je die in de schets van de situatie verwerkt?

b Welke extreme gevallen heb je eerst doorgerekend?

c Welke variabelen heb je ingevoerd? Kon je ook andere variabelen kiezen?

d Welke verbanden tussen de variabelen heb je gevonden?

e Kun je het antwoord controleren? Beschrijf een mogelijke test (zonder dat je een zwemmer in nood moet inschakelen).

Voorbeeld 2

Op diverse plaatsen in Nederland zijn windmolens geplaatst om energie op te wekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van de wieken en de windsnelheid. Je kunt er een wiskundig model voor opstellen. Het opgewekte vermogen (kWh) is recht evenredig met de massa van de hoeveelheid lucht per seconde maal de windsnelheid (m/s) in het kwadraat:
$P = c \cdot m \cdot v^2$

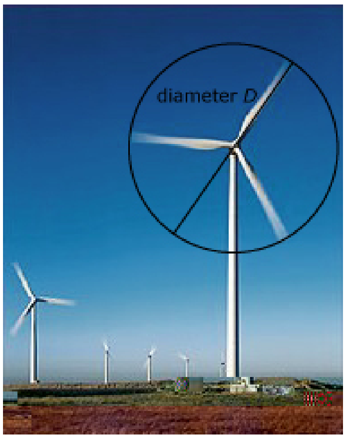
Hierin is P het vermogen in kilowattuur (kWh), m de massa van de hoeveelheid lucht per seconde en v de windsnelheid in meter per seconde (m/s).

De hoeveelheid lucht die per seconde voorbijkomt, is een cilinder met een grondvlak van $\frac{1}{4}\pi D^2$ en een lengte van v.

De massa daarvan is $\frac{1}{4}\pi D^2 \cdot v \cdot \rho$ waarin ρ de dichtheid van de lucht is, het aantal kg per m^3.

Zo vind je: $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$.

De constante C hangt af van de dichtheid van de lucht en onder andere van de eigenschappen van de windmolen. De constante is alleen experimenteel te bepalen, dus door metingen te verrichten.



Figuur 2.4

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 2**. Hierin gaat het om een formule voor het vermogen van een windmolen.

a Welke aannames zijn er gedaan?

b Laat zien hoe je aan de formules $\frac{1}{4}\pi D^2$ en $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$ komt.

c Hoe wordt de modelcyclus doorlopen? Beschrijf bij elke stap wat er gebeurt.

d Kun je een manier bedenken om het model te testen?

Voorbeeld 3

In een straat komen lantaarnpalen, waarbij de kosten zo laag mogelijk moeten zijn. Ontwerp een model voor de straatverlichting. Ga daarbij van de volgende gegevens uit:

- De lichtsterkte S (watt per m^2) is recht evenredig met het vermogen P (watt) van de lichtbron en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand (m) tot de lichtbron. Kun je verklaren waarom dit zo is?
- Je verlicht de weg met straatlantaarns met een bepaald vermogen, een bepaalde hoogte en een bepaalde onderlinge afstand. Neem aan dat die niet variëren.
- Wettelijk is vastgelegd dat de lichtsterkte op elk punt van een weg moet liggen tussen 10 en 320 watt/m^2.

Daarnaast moet je rekening houden met afschrijving en onderhoud van de palen. Die kosten hangen onder andere af van de hoogte h en de onderlinge afstand a. Hogere palen zijn namelijk duurder en een kleinere onderlinge afstand betekent meer palen. Verder zijn er kosten voor de elektriciteit: bijvoorbeeld € 0,15 per kWh. Dit betekent dat een lamp van 1 kW die een uur brandt € 0,15 kost. Neem nu per jaar:

- € 200,00 per lantaarnpaal voor schoonhouden, reparaties, schilderwerk en dergelijke;
- € 50,00 per meter lantaarnpaal voor vervanging, afschrijving, onderhoud;
- elektriciteit kost € 0,15 per kWh.

Antwoord

Om je op weg te helpen even een paar ideeën. De volgende variabelen kunnen een rol spelen:

- P is de lichtsterkte in watt van de lamp in elke straatlantaarn.
- h is de hoogte in meter van de straatlantaarn (en dus van de lamp, neem je aan).
- a is de (vaste) onderlinge afstand in meter van een rij straatlantaarns aan één kant van de weg.
- Aan beide zijden van de weg staan straatlantaarns en wel recht tegenover elkaar.
- b is de breedte in meter van de weg (en dus van de twee rijen straatlantaarns, neem je aan).
- B is de brandtijd (uur per jaar) dat de lampen branden.

De lichtsterkte L (watt per m^2) van elke afzonderlijke lamp is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de lamp. Dit kun je nagaan door te bedenken dat een oppervlak dat twee keer zo ver van de lamp is verwijderd de lichtsterkte moet verdelen over een vier keer zo groot geworden oppervlakte. Het punt met de grootste lichtsterkte zit steeds recht onder de lamp en is:

$$L = \frac{P}{h^2}$$

Het punt met de kleinste lichtsterkte zit op het midden van de weg, midden tussen vier lantaarns in en heeft dus een lichtsterkte van:

$$L = 4 \cdot \frac{P}{h^2+(0{,}5a)^2+(0{,}5b)^2}$$

Er wordt dus aangenomen dat andere lantaarns dan de omliggende geen bijdrage leveren aan de lichtsterkte in dit punt. Dit levert twee voorwaarden op vanwege de maximale en de minimale lichtsterkte op de weg. Het inschakelen van een spreadsheet zoals Excel is nu handig om mogelijke waarden van P, h, a en b door te rekenen. Bijvoorbeeld $P = 1000$, $h = 5$, $b = 8$ en $a = 30$ voldoet aan de twee voorwaarden, maar er zijn veel meer mogelijkheden.

De jaarlijkse kosten per meter weg kun je berekenen met de formule: $K = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(200 + 50h + B \cdot \frac{P}{1000} \cdot 0{,}15\right)$.

Nu moeten de waarden voor P, h, a, b en B zo worden gekozen dat niet alleen aan de twee voorwaarden, maar ook aan K minimaal is voldaan. Ook hier is werken met Excel handig.

Opgave 7

Bekijk het probleem van de goedkoopste straatverlichting in **Voorbeeld 3**.

a Probeer eerst zelf met behulp van de modelcyclus een rekenmodel te ontwerpen.

Het is nuttig om jouw oplossing te vergelijken met de aanpak in het voorbeeld.

b Laat zien hoe je aan de formules $L = \frac{P}{h^2}$ en $L = 4 \cdot \frac{P}{h^2+(0{,}5a)^2+(0{,}5b)^2}$ komt.

c Welke twee voorwaarden leveren die formules op?

d Laat zien hoe je aan de formule $K = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(200 + 50h + B \cdot \frac{P}{1000} \cdot 0{,}15\right)$ komt.

e Probeer nu een oplossing voor het probleem te vinden. Pas eerst de aannames aan op grond van gegevens die je zelf hebt gevonden, bijvoorbeeld via internet.

Verwerken

Opgave 8

Bij de aanschaf van een nieuwe auto heeft iemand de keuze uit twee uitvoeringen: een dieselversie en een benzineversie. Tussen deze versies bestaat een groot prijsverschil. Bovendien is de wegenbelasting verschillend en verschillen de brandstofprijzen.

Ga ervan uit dat de benzineversie een verbruik heeft van 8 L per 100 km en dat de dieselversie een verbruik heeft van 6 L per 100 km.

De dieselversie is jaarlijks € 1200,00 duurder dan de benzineversie.

Neem verder aan dat één liter benzine € 1,60 kost en dat de dieselprijs € 1,24 per liter is.

Welke auto moet hij kiezen? Los dit probleem op volgens de modelcyclus en waar nodig met behulp van de lijst met hulpvragen.

a Beschrijf eerst je rekenmodel met de bijbehorende aannames.

b Welke oplossing vind je?

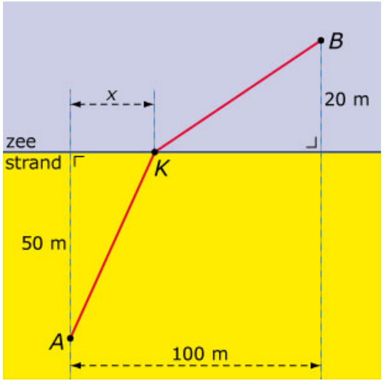
c Hoe zou je kunnen controleren of dit enigszins realistisch is?

Opgave 9

Een zwemmer is in nood voor de kust van Bergen. De tekening geeft een beeld van de situatie. De zwemmer in nood bevindt zich bij punt B in zee. Een lid van de reddingsbrigade ziet de zwemmer in nood en wil in actie komen. Zij bevindt zich in punt A. Ze wil natuurlijk via de snelste weg naar de drenkeling toe. Maar wat is de snelste weg?

Een deel van de weg moet ze rennend afleggen en een deel zwemmend. Ze rent met een gemiddelde snelheid van 6 m/s en ze zwemt met een gemiddelde snelheid van $1{,}5$ m/s. Hoe kan ze het snelst hulp bieden? Noem het punt waar ze in het water stapt K.

Punt K kan overal langs de aangegeven 100 m-lijn liggen. De tijd die ze nodig heeft om in B te komen moet natuurlijk zo klein mogelijk zijn. Noem de totale tijd t, de gemiddelde snelheid over het strand v_s en de gemiddelde snelheid in zee v_z.



Figuur 2.5

a Druk t uit in AK, KB, v_s en v_z.

b Formuleer een verband tussen t en x.

c Bepaal met behulp van de grafische rekenmachine de minimale tijd die ze nodig heeft om de zwemmer te bereiken. Geef je antwoord in seconden in één decimaal nauwkeurig.

d Bepaal de lengte van de snelste weg in m nauwkeurig.

Opgave 10

Om te bepalen welk gewicht een vliegtuig kan dragen geldt bij benadering de formule $W = 0{,}03 \cdot d \cdot V^2 \cdot S$. Hierin is W het gewicht in kg, S het vleugeloppervlak in m^2, V de kruissnelheid in m/s en d de luchtdichtheid in kg/m^3.

a Ga uit van een luchtdichtheid van $0{,}421$ kg/m^3. Welk gewicht kan een vliegtuig dragen waarvan het vleugeloppervlak 350 m^2 en de kruissnelheid 700 km/h is? Geef je antwoord in kg nauwkeurig.

b Een vliegtuig met een kruissnelheid van 250 m/s en een vleugeloppervlak van 100 m^2 moet 12000 kg kunnen dragen. Wat is de minimale luchtdichtheid waarbij het vliegtuig kan vliegen?

c In de luchtvaart wordt vaak gewerkt met de vleugelbelasting, dat is het gewicht in kg per m^2 vleugeloppervlak.

Ga uit van een luchtdichtheid van $0{,}369$ kg/m^3. De vleugelbelasting is recht evenredig met een macht van V. Wat is de evenredigheidsconstante?

d Wat gebeurt er met de vleugelbelasting als de kruissnelheid van een vliegtuig $1{,}4$ keer zo groot wordt?

Opgave 11

De beheerder van een groot communicatienetwerk wil een kabel leggen tussen twee eilanden in de Stille Oceaan die 300 km van elkaar verwijderd liggen (hemelsbreed gerekend over zee). Deze kabel kan op de nagenoeg vlakke zeebodem tussen beide eilanden worden gelegd. Hoeveel kabel moet er minder worden getrokken als daarvoor een rechte tunnel tussen beide eilanden wordt geboord?

a Maak een schets van de situatie en schrijf de aannames op die je moet doen om hier iets zinnigs over te kunnen zeggen.

b Ontwerp een geschikt rekenmodel. Neem hierbij mee dat de aarde een omtrek van 40000 km heeft.

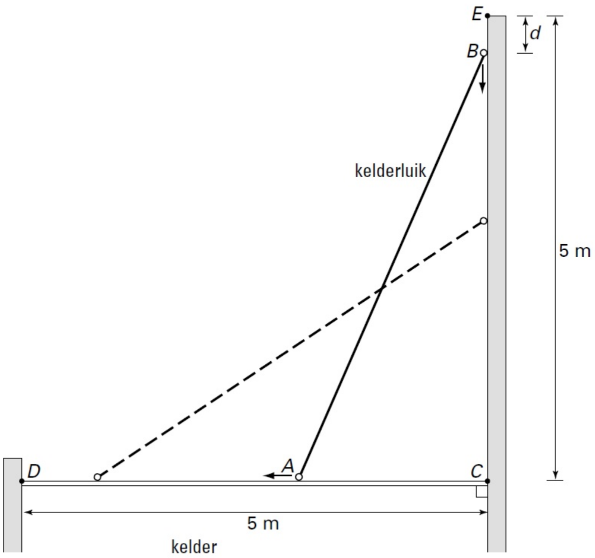
c Probeer de gestelde vraag zo goed mogelijk te beantwoorden. Schrijf ook enkele beperkingen van de kwaliteit van je antwoord op.

Opgave 12

Een grote kelder kan worden afgesloten met een rechthoekig luik. De lengte AB van het luik is 5 meter. Het luik sluit het keldergat precies af. In de figuur is een model van de situatie in een zijaanzicht getekend. De uiteinden van het luik (A en B) lopen over rails CD en EC.

Bij het openen en sluiten wordt A aangedreven door een elektromotor, die A een constante snelheid geeft van $0{,}1$ meter per seconde. Ga er bij de vragen steeds van uit dat deze snelheid onmiddellijk bij het openen en sluiten van het luik optreedt.

Het luik wordt vanuit geheel geopende stand (A valt dan samen met C en B valt dan samen met E) gesloten.



Figuur 2.6

a Bereken hoeveel het punt B is gezakt, 20 seconden nadat het sluiten begonnen is. Geef je antwoord in m en rond af op twee decimalen.

t is de tijd (s) die verstreken is nadat het sluiten van het luik begonnen is. De afstand d (m) die het punt B dan afgelegd heeft, is afhankelijk van t.

b Stel een formule op voor $d(t)$.

Bij het sluiten van het luik is v de snelheid (m/s) van het punt B op tijdstip t.

c Bereken op welk tijdstip deze snelheid gelijk is aan $0{,}05$ meter per seconde. Geef je antwoord in gehele seconden nauwkeurig.

(naar: examen wiskunde B havo in 2000, tweede tijdvak)

Toepassen

Opgave 13: Hoe snel beweeg je als je stilstaat?

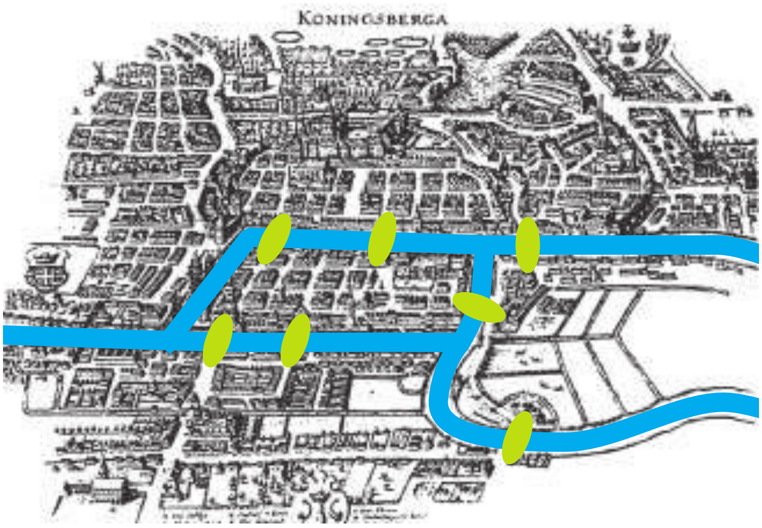
Je staat stil in het centrum van Amsterdam. Hoe snel beweeg je als gevolg van het draaien van de aarde?

Stel hiervoor zelf een model op. Maak daarbij gebruik van de modelcyclus. Probeer een manier te verzinnen om het model te testen.

Voor dit model heb je de breedtegraad van het centrum van Amsterdam nodig, en de omtrek van de aarde. Deze zijn respectievelijk (ongeveer) $52{,}37°$ en 40000 km.

Opgave 14: Het Koningsberger bruggenprobleem

De stad Koningsbergen (tegenwoordig Kalingrad) lag aan de rivier de Pregel. In deze stad bevonden zich twee eilanden die door zeven bruggen met elkaar en met het vaste land verbonden waren. Zie de figuur.



Figuur 2.7

Kun je over de zeven bruggen lopen, zonder tweemaal over eenzelfde brug te lopen?

Als dit lukt, laat dan zien hoe. Als dit niet lukt, toon dan aan waarom het niet lukt.

Testen

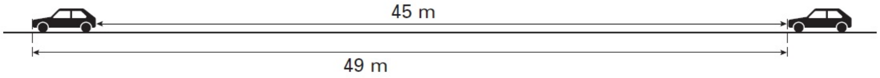
Opgave 15

De Amerikaanse verkeerskundige dr. Bruce Greenshields heeft in 1935 een rekenmodel ontwikkeld voor de verkeersdichtheid op auto(snel)wegen. Het probleem was het berekenen van de snelheid die alle automobilisten zouden moeten aanhouden om met een veilige onderlinge tussenruimte een zo goed mogelijke doorstroming te bewerkstelligen.
Hij bedacht voor de verkeersdichtheid k de formule

$$k = k_{\text{max}} \cdot \left(1 - \frac{v}{v_{\text{max}}}\right)$$

Hierbij is v de snelheid van het verkeer in kilometer per uur, v_{max} de snelheid van het verkeer in kilometer per uur als men niet door andere automobilisten in zijn snelheid belemmerd wordt, k de verkeersdichtheid en k_{max} het maximale aantal auto's per kilometer weg. Hieruit blijkt dat als het drukker wordt op de weg, de auto's langzamer rijden en ook dichter op elkaar. De verkeersdichtheid, dat is het aantal auto's per kilometer weg, neemt dus toe.

Eerst maar even wat rekenen. Ga uit van de volgende (denkbeeldige) situatie (zie figuur).
Op een weg rijden auto's met een snelheid van 80 kilometer per uur. De auto's houden een onderlinge afstand van 45 meter. De lengte van een auto is 4 meter. Per auto is dus 49 meter snelweg nodig. Langs deze weg staan borden met daarop de tekst: ‘Houd 2 seconden afstand’.



Figuur 2.8

a Onderzoek of in de gegeven situatie de auto's hieraan voldoen.

Bij een gegeven snelheid is de doorstroming q het aantal auto's dat per uur een bepaald punt passeert als ze zo dicht mogelijk op elkaar rijden. Zo dicht mogelijk betekent hier dat de bestuurders de kleinste onderlinge afstand kiezen die nog voldoende verkeersveiligheid garandeert. Voor q geldt: $q = v \cdot k$.
Ga uit uit van de volgende situatie.
Op een weg is $v_{\text{max}} = 88$. Het verkeer rijdt achter elkaar aan met een snelheid van 72 kilometer per uur. Alle auto's zijn 4 meter lang. Er passen dus maximaal 250 auto's op een kilometer; in dit geval is k_{max} gelijk aan 250.

b Bereken de doorstroming q van deze weg.

De volgende vragen gaan over een snelweg met in beide richtingen twee rijstroken. Op elke rijstrook is $k_{\text{max}} = 250$ en $v_{\text{max}} = 160$.

c Leid hieruit een formule af voor de doorstroming q afhankelijk van de rijsnelheid v. Bereken daarmee de rijsnelheid waarbij de doorstroming maximaal is

(bron: examen havo wiskunde B in 2006, eerste tijdvak)

1.3 Optimaliseringsproblemen

Inleiding

Regelmatig kom je situaties tegen waarbij het om een zo groot mogelijke of een zo klein mogelijke waarde gaat. Bijvoorbeeld bij vragen als: "Welke afmetingen heeft zo een klein mogelijke rechthoekige lap grond waarop een fabriekshal moet komen met een rechthoekig vloeroppervlak van 2400 m^2 en met daar omheen een boswal van 10 m breed aan de zijkanten en de achterkant en 20 m breed aan de voorkant van de fabriekshal?"
Je spreekt dan van een optimaliseringsprobleem, je wilt een optimale (hier: maximale of minimale) oplossing.

Je leert in dit onderwerp

- modelleren gebruiken bij problemen waarbij het gaat om een maximale of een minimale waarde.

Voorkennis

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties, de modelcyclus;
- meetkundige berekeningen met de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid, oppervlakte, inhoud.

Verkennen

Opgave V1

Stel je wilt een rechthoekig raam inbouwen, met breedte b en hoogte h. Je neemt aan dat de hoeveelheid licht die binnenkomt afhankelijk is van de oppervlakte van het raam. Tevens heb je genoeg hout voor een raamkozijn met een omtrek van totaal 10 m. Je wil dat er zoveel mogelijk licht binnenkomt, maar je gaat niet meer materiaal kopen voor je raamkozijn.

a Geef twee vergelijkingen die het bovenstaande probleem omschrijven.

b Welke optimale afmetingen heeft het raam?

Uitleg

Probleem: "Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van 2400 m^2. Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en een parkeerruimte. Aan beide zijden en aan de achterkant worden dit stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?"

Om zo'n probleem te kunnen oplossen, maak je een bijbehorend model.
Aannames: de fabriekshal en het terrein zijn zuivere rechthoeken.

Model ontwerpen: de oppervlakte van het terrein hangt af van de lengte en de breedte ervan. Voor de lengte en de breedte van het terrein, of de lengte en de breedte van de fabriekshal zoek je waarden. De oppervlakte van de fabriekshal is 2400 m^2. Met deze gegevens maak je een figuur.
Neem bijvoorbeeld voor de fabriekshal een breedte van 30 m, dan moet de lengte wel 80 m zijn. Als je de lengte als voorkant neemt, is de oppervlakte van het terrein, inclusief de groenstroken en parkeerruimte die je daarvoor moet aankopen, $60 \cdot 100 = 6000$ m^2. Zo kun je verschillende gegevens in een figuur gebruiken om te kijken wat de beste oplossing is.

Opgave 1

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de **Uitleg**.

a Leg uit waarom bij een keuze van 30 voor de breedte geldt dat de lengte 80 m is. Leg ook uit waarom de oppervlakte van het terrein dan $60 \cdot 100 = 6000$ m^2 is als de lengte de voorkant van het gebouw wordt.

b Waarom kan hij bij a beter de breedte als voorkant van het gebouw nemen?

Voor de voorkant van de fabriekshal kun je verschillende getallen proberen en zo de oplossing van het probleem zoeken. Maar je kunt die voorkant ook variabel maken, bijvoorbeeld x stellen.

c Hoe groot wordt dan de andere afmeting van de fabriekshal? En hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?

d Los nu het probleem verder op.

Opgave 2

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de **Uitleg**. Je kunt de lengte van de voorkant van het totale terrein als variabele x nemen.

a Hoe groot worden dan de afmetingen van de fabriekshal? Hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?

b Los ook nu het probleem verder op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder **optimaliseren** versta je het vinden van een zo gunstig mogelijke (meestal een minimale of een maximale) waarde voor een bepaalde grootheid in een welomschreven situatie. Die welomschreven situatie betekent dat je al aan het modelleren bent: je doet aannames om het probleem dat je wilt oplossen te vereenvoudigen tot zijn essentie. Vervolgens bouw je een rekenmodel op. Meestal schakel je daarna de grafische rekenmachine (of een programma zoals Excel) in om de optimale oplossing te vinden.
De grafische rekenmachine kun je eigenlijk alleen inschakelen als het rekenmodel een verband tussen twee variabelen betreft. In de praktijk heb je vaak met meer dan twee variabelen te maken.

Voorbeeld 1

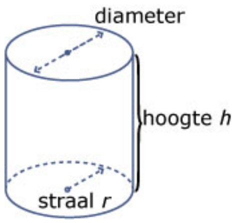
Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.
Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Antwoord

Eerst een rekenmodel opstellen:
Neem aan dat elk blik zuiver cilindrisch is en dat de benodigde hoeveelheid blik gelijk is aan de totale oppervlakte van het blik. De twee bepalende variabelen zijn de straal van (het grondvlak van) het blik r en de hoogte h, neem beide in cm. Het gegeven betreft de inhoud van een blik (1 L = 1000 cm^3), de eis betreft de oppervlakte die minimaal moet zijn.
Voor de inhoud van een cilinder geldt: $I = \pi r^2 h$.
Voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$.

Omdat gegeven is dat $I = 1000$ cm^3 kun je deze formules gebruiken om A uit te drukken in alleen r.

De formule die je krijgt, kun je op de grafische rekenmachine invoeren. Je vindt dat voor $r \approx 5{,}4$ cm en $h \approx 10{,}8$ cm de totale oppervlakte minimaal is.



Figuur 3.1

Opgave 3

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 1**.

a Welke aannames worden er gedaan?

b Hoe kom je aan de formule voor de oppervlakte van het blik?

c Laat zien hoe je de formule voor $A(r)$ kunt afleiden.

d Laat zien hoe je het probleem nu verder oplost.

Opgave 4

Een pakje hagelslag heeft de vorm van een balk met een vierkante bodem. De inhoud is 200 cm^3.

Welke afmetingen heeft het pakje met de kleinste hoeveelheid karton, dus met de kleinste oppervlakte? Geef je antwoord in cm en rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

In een bepaalde supermarkt worden pakken yoghurt verkocht voor € 0,90 per stuk. Er worden elke week ongeveer 1000 pakken yoghurt verkocht. De bedrijfsleider denkt dat hij meer pakken yoghurt kan verkopen als hij de prijs verlaagt. Elke 4 eurocent prijsverlaging kon wel eens een omzetverhoging van 100 pakken betekenen. De pakken yoghurt worden ingekocht voor € 0,60 per stuk.

Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Antwoord

Hierbij past een bekend model uit de economie, namelijk dat van de monopolist. De winkelier neemt hier namelijk aan dat er geen concurrentie van andere aanbieders van deze yoghurt is. Zo kan hij rustig de prijs verlagen zonder dat andere winkeliers hem aftroeven. Zijn prijs wordt niet zo laag mogelijk natuurlijk, maar zo gunstig mogelijk: hij wil zo veel mogelijk winst maken.

Bij dit optimaliseringsprobleem is het slim om variabelen te gebruiken. Je hebt meerdere mogelijkheden, bijvoorbeeld:

- x is het aantal pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal extra pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast.

Bij je keuze hoort een passend rekenmodel, een formule voor de winst afhankelijk van x.
Bedenk daarbij dat de winst W wordt verkregen door de prijs p per stuk te vermenigvuldigen met het aantal pakken yoghurt q dat hij zal verkopen. Trek daar dan weer de kosten K van af: $W = p \cdot q - K$.
Deze variabelen hangen allemaal af van x.

In de opgave bepaal je of het verstandig is om de prijs te verlagen.

Opgave 5

Bekijk het probleem van de winkelier in **Voorbeeld 2**. Kies voor het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast de variabele x.

a Leid een formule af voor W afhankelijk van x.

b Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Je kunt (zie voorbeeld) ook een andere variabele x noemen.

c Doe dat en laat zien dat je dan een vergelijkbaar resultaat krijgt.

Opgave 6

In een kaasmakerij ligt een voorraad van 600 kg kaas. De bedrijfsleider wil die voor een zo hoog mogelijke totale opbrengst verkopen. Er zijn twee mogelijkheden:

- De kaas ineens verkopen voor € 10,00 per kilo, de partij brengt dan € 6000,00 op.
- De kaas een tijdje laten indrogen; deze verliest dan aan gewicht, maar wint aan smaak. Daardoor neemt de prijs per kilo met € 0,25 per 6 kilo gewichtsvermindering toe.

a Bereken de opbrengst van de partij kaas bij 5 procent indrogen.

b Noem het indrogingspercentage p. Stel een formule op voor de totale opbrengst van de partij kaas als functie van p.

c Bereken het gunstigste indrogingspercentage.

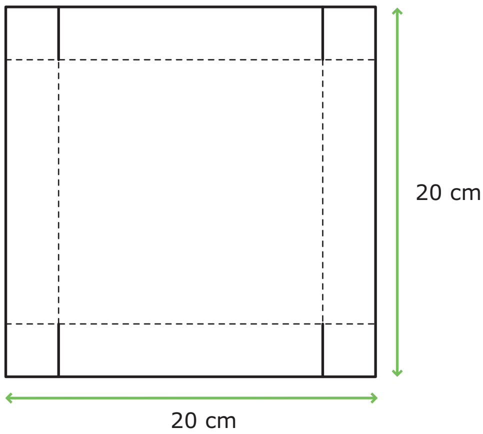
Verwerken

Opgave 7

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

a Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I (cm^3) van dit bakje met x de zijde van het ingeknipte vierkantje?

b Bereken de maximale inhoud van dit bakje in cm^3 nauwkeurig.



Figuur 3.2

Opgave 8

Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoersmiddel in grotere bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt de afzet q ($\times 1000$) uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0{,}1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1{,}5q^3 - 22{,}5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

a Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?

b Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q.

c Stel een formule op voor de winst TW als functie van de afzet q.

d Bepaal de prijs van één autoped bij maximale winst.

e Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q. Bepaal bij welke afzet GTK minimaal is.

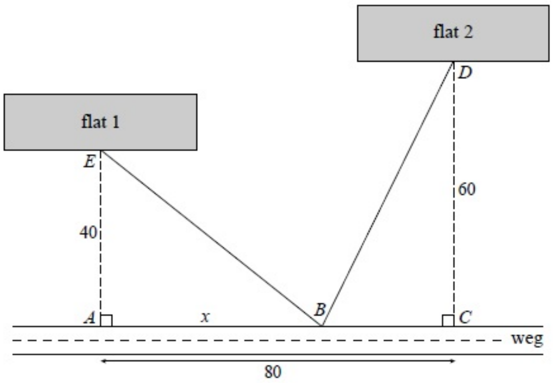
Opgave 9

Iemand bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte en de hoogte van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.) Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Opgave 10

Langs een rechte weg staan twee flatgebouwen. De ingang van flat 1 (punt E) ligt 40 meter van de weg af en de ingang van flat 2 (punt D) ligt 60 meter van de weg af. Men wil een bushalte plaatsen (punt B) en daarna van de bushalte naar de ingang van elk van de twee flats een recht voetpad aanleggen. Punt A is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 1 ligt en punt C is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 2 ligt. De afstand tussen punt A en punt C is 80 meter. In de figuur is van deze situatie een schematisch bovenaanzicht getekend. Hierin is x de afstand tussen punt A en de bushalte B in meter.



Figuur 3.3

Het is mogelijk de bushalte zo te plaatsen dat de twee voetpaden even lang zijn.

a Bereken algebraïsch de waarde van x in deze situatie.

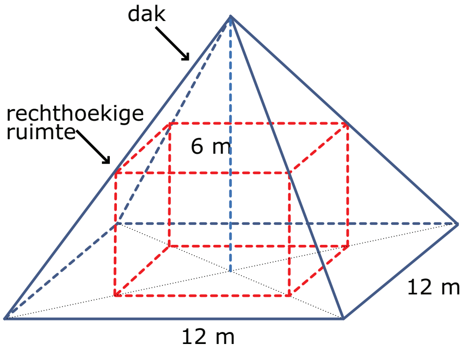
Men wil bij nader inzien de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is.

b Bereken de totale lengte L in meter.

(naar: examen wiskunde B havo in 2011, eerste tijdvak)

Opgave 11

Onder een piramidevormig dak wil je een rechthoekige ruimte bouwen met een zo groot mogelijke inhoud. In de figuur zie je hoe dit eruit komt te zien. Het grondvlak van de ruimte is een vierkant. De hoogte van de piramide is 6 m.



Figuur 3.4

Welke afmetingen krijgt deze ruimte?

Toepassen

Opgave 12: Camping

De eigenaar van een camping wil het aantal plaatsen uitbreiden. Hij koopt een hectare grond en wil daarop zuiver vierkante kampeerplaatsen inrichten. Hij heeft echter een deel van de grond nodig voor wegen, toilet- en wasgelegenheid, en dergelijke. Per kampeerplaats schat hij daarvoor zo'n 20 m^2 te moeten reserveren. Verder gaat hij ervan uit dat het bedrag dat hij per plaats kan rekenen, afhangt van de grootte ervan. In elk geval rekent hij per nacht een prijs van € 4,50. Daarbovenop denkt hij nog zo'n € 2,50 per meter

breedte te kunnen vragen.
Voor plaatsen van 4 m breed kan hij dan € 14,50 per nacht rekenen. Er kunnen dan wel minder plaatsen op zijn nieuwe terrein. De vraag voor deze campingeigenaar is daarom: ‘Hoe breed moet ik mijn kampeerplaatsen maken om zoveel mogelijk aan deze extra hectare grond te verdienen?’

Los dat probleem voor hem op. Schrijf een volledige uitwerking op.

Opgave 13: Kamelen verdelen

Alle 2012 kamelen in Nederland moeten verdeeld worden over 40 weides. Geen twee weides mogen hetzelfde aantal kamelen krijgen. De weide in het centrum van Amsterdam moet het grootste aantal kamelen krijgen.
Hoeveel kamelen moeten daar minimaal komen te staan?

Testen

Opgave 14

Op rechthoekige vellen papier van 1 m^2 worden foto’s afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte.
Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

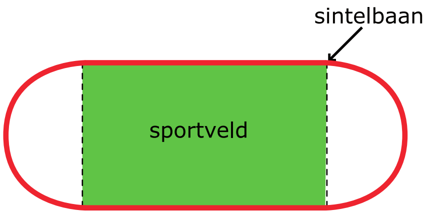
a Maak een schets van de situatie met de gegevens er in.

b Los het geschetste probleem op.

Opgave 15

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen van het veld zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.

Bereken de afmetingen van dit sportveld in meters nauwkeurig.

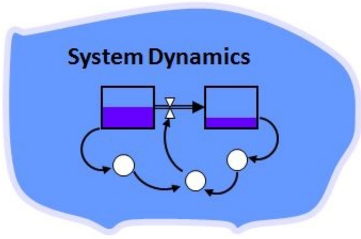


Figuur 3.5

1.4 Dynamische modellen

Inleiding

Een bijzonder type wiskundige modellen dat veel voor komt is het **dynamische model**. Daarbij worden rekenmodellen opgesteld van de veranderingen van de situatie met de tijd. En daarmee wordt dan gerekend, of (als de situatie niet te complex is) er wordt geprobeerd één of meer formules af te leiden waarmee de toestand op elk tijdstip kan worden bepaald.
Een voorbeeld van een situatie waarin een dynamisch model kan worden opgesteld is de ontwikkeling van een griepepidemie.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met dynamische modellen in eenvoudige situaties;
- discrete dynamische modellen doorrekenen;
- enkele handreikingen voor het opstellen van een discreet dynamisch model.

Voorkennis

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties, de modelcyclus;
- werken met formules, veranderingen, toenames en differentiequotiënten.

Verkennen

Opgave V1

Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt is er sprake van gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest maar beter zijn geworden. Alleen zieke mensen steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is 4 dagen, daarna ben je geruime tijd immuun geworden. Je begint op een bepaalde dag met 100.000 personen waarvan er 100 ziek en 500 immuun zijn. Hoe verloopt het aantal zieken per dag, hoeveel is dit maximaal?

Probeer zelf een oplossing te verzinnen.


Figuur 4.2 model griepvirus

Uitleg

Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt, zijn er gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest maar beter zijn geworden. Alleen zieke mensen steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is vier dagen. Daarna ben je voor langere tijd immuun, je kunt deze griep dan niet langer meer krijgen. Je begint op een bepaalde dag met 100000 personen waarvan er 100 ziek zijn en 500 immuun. Hoe verloopt het aantal zieken per dag, hoeveel is dit maximaal?


Figuur 4.3 model griepvirus

Bij het opstellen van een wiskundig model voor het verloop van de griep moet je bedenken met welke factoren je rekening moet houden. In een eenvoudig griepmodel wordt alleen gerekend met:

- $G(t)$ is het aantal gezonde personen op zeker tijdstip t;
- $Z(t)$ is het aantal zieken op dat tijdstip;
- $I(t)$ is het aantal immune personen op dat tijdstip.

Een dag later zit je op tijdstip $t+1$. De modelformules zijn bijvoorbeeld:

- $G(t+1) = G(t) - 0{,}2Z(t)$
- $Z(t+1) = Z(t) - 0{,}25Z(t) + 0{,}2Z(t) = 0{,}95Z(t)$
- $I(t+1) = I(t) + 0{,}25Z(t)$

Er wordt dan aangenomen dat dagelijks 20% van alle zieken een gezond iemand aansteekt (ziek maakt) en dat per dag 25% van alle zieken gezond wordt. Je ziet dat dit rekenmodel afhangt van de tijd. Het is daarom een zogenaamd ‘dynamisch model’. In dit geval wordt de tijd in stappen van telkens $\Delta t = 1$ dag doorlopen.

Opgave 1

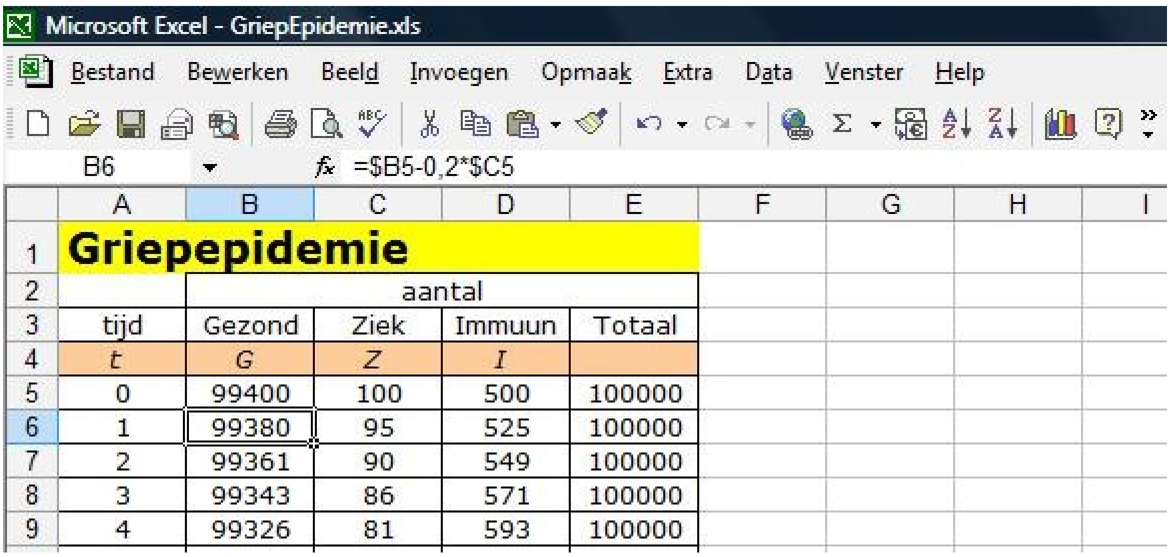
Bekijk het rekenmodel voor een griepepidemie in de **Uitleg**.

a Waarop is de aanname gebaseerd dat gemiddeld elke dag 25% van de zieken weer gezond (en dus immuun) wordt?

Bij het in de uitleg bedachte rekenmodel wordt ervan uitgegaan dat dagelijks 20% van het aantal zieken een nieuwe zieke oplevert door besmetting.

b In welke van de drie modelformules vind je dit (na vereenvoudiging) terug?

De bedenker van het rekenmodel heeft het bestand **Griepepidemie** gemaakt om het verloop van de griepepidemie door te rekenen.



	A	B	C	D	E
1	Griepepidemie				
2		aantal			
3	tijd	Gezond	Ziek	Immuun	Totaal
4	*t*	*G*	*Z*	*I*	
5	0	99400	100	500	100000
6	1	99380	95	525	100000
7	2	99361	90	549	100000
8	3	99343	86	571	100000
9	4	99326	81	593	100000

Figuur 4.4

c In cel B6 staat de formule: =$B5-0,2*$C5
Leg uit dat dit overeenkomt met de formule:
$G(t+1) = G(t) - 0{,}2 \cdot Z(t)$
Wat staat er in cel C6? En in cel D6?

d Hoe gaat de griepepidemie verlopen? Maak een tabel tot $t = 6$.

e Hoe zit het nu met het maximale aantal zieken? Lijkt het model erg realistisch?

Opgave 2

Bij nader inzien lijkt het beschreven model niet goed te zijn: het aantal personen dat ziek wordt gemaakt door iemand die al ziek is, hangt natuurlijk vooral af van het aantal gezonde mensen (alleen die kunnen nog ziek worden). Dat zal geen vast percentage van het aantal zieken zijn. Dit hangt eerder af van het percentage gezonde mensen waarmee een zieke in contact komt en de kans dat dan ook de ziekte wordt overgedragen.

Het rekenblad in Excel wordt daarom wat aangepast. In cel C6 komt nu =$C5-0,25*$C5+0,02*0,5*$B5. Hieruit blijkt dat de kans dat de ziekte wordt overgedragen van een zieke op iemand die gezond is, op 50% is gesteld.

a Hoe groot is het percentage gezonde mensen waarmee een zieke volgens dit model in contact komt?

b Schrijf de drie bijbehorende modelformules op.

Dit verbeterde rekenmodel voor de griepepidemie is vertaald in het bestand **Griepepidemie2**.

c Hoe gaat de griepepidemie nu verlopen? Maak de tabel verder af.

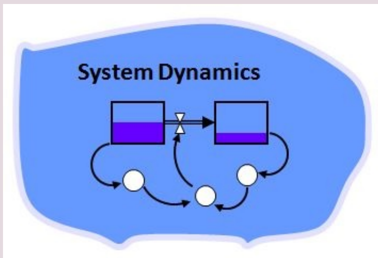
d Lijkt dit model realistischer? Of zou je nog aanpassingen willen aanbrengen? En zo ja, welke dan?

e Kun je een manier verzinnen om het model te testen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder **dynamisch model** versta je een rekenmodel waarin de variabelen afhangen van de tijd. Het beschreven model van een griepepidemie is daarvan een goed voorbeeld. De variabelen G (aantal gezonde personen), Z (aantal zieke personen) en I (aantal personen dat immuun is geworden, dus beter is geworden na de griep te hebben gehad) hangen alle drie af van de tijd t.
De tijd wordt in stappen van telkens $\Delta t = 1$ dag doorlopen. Daarom heet dit wel een discreet dynamisch model. In dit model loopt de tijd dus niet in vaste stappen door. Dit in tegenstelling tot een continu dynamisch model, waarin de tijd vloeiend doorloopt.



Figuur 4.5

Voorbeeld 1

In een zwembad is op zeker moment de chloorconcentratie 1 L/m^3.
Dat is te hoog en dus wordt het water ververst. Elk uur wordt 60 m^3 badwater vervangen door 60 m^3 schoon water. Er zit in totaal 1000 m^3 water in het zwembad.
Na hoeveel uur is de chloorconcentratie gehalveerd?

Antwoord

Noem de chloorconcentratie $C(t)$ waarin t de tijd in uur is en C in L/m^3.
Ga ervan uit dat telkens het schone water zich onmiddellijk met al het badwater vermengt, zodat $C(t)$ in het hele zwembad steeds op een bepaald tijdstip hetzelfde is, waar je ook meet.
Elk uur wordt de chloorconcentratie met $\Delta C(t) = 0{,}060 \cdot C(t)$ verminderd.

Dus geldt de modelvergelijking:
$C(t+1) = C(t) - 0{,}060 \cdot C(t) = 0{,}940 \cdot C(t)$.

De chloorconcentratie op $t = 0$ (als het verversen van het water begint) is $C(0)$.
Je vindt dan: $C(1) = 0{,}940 \cdot C(0)$, $C(2) = 0{,}940 \cdot C(1) = 0{,}940^2 \cdot C(0)$, $C(3) = 0{,}940 \cdot C(2) = 0{,}940^3 \cdot C(0)$, enzovoort. Door steeds maar door te blijven rekenen bepaal je na hoeveel minuten C is gehalveerd.
De halveringstijd is ongeveer $11{,}2$ uur.

Zie het bestand **Modelzwembad**.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** wordt beschreven hoe het water van een groot zwembad wordt ververst, omdat de chloorconcentratie te hoog is. Hier dient een discreet dynamisch model als benadering van het voortdurende verversingsproces (uitstromen van vuil water en instromen van schoon water).

a Waarom is dit geen discreet model?

b Stel je kijkt om het uur naar het verversingsproces. Leg uit waarom er het eerste uur 60 liter chloor verdwijnt. Verklaar waarom er het tweede uur $56{,}4$ liter chloor verdwijnt.

c Leg uit waarom $\Delta C(t) = -0{,}060 \cdot C(t)$.

d Maak handmatig een tabel voor de afname van de chloorconcentratie voor de eerste vier uur.

e Na hoeveel uur is C met meer dan 60% afgenomen?

f Je kunt op het werkblad de chloorconcentratie aanpassen.

Wat gebeurt er als de chloorconcentratie twee keer zo groot wordt?

Opgave 4

Bekijk opnieuw het verversen van het water in het zwembad uit **Voorbeeld 1**. Neem nu aan dat elke minuut badwater wordt vervangen door $0{,}8$ m^3 schoon water. Neem $\Delta t = 1$ minuut.

a Hoeveel chloor verdwijnt er de eerste minuut? En de tweede minuut?

b Hoe ziet je modelvergelijking er in deze situatie uit?

c Maak een nieuwe tabel voor de afname van de chloorconcentratie voor de eerste 5 minuten.

d Na hoeveel tijd is de chloorconcentratie gehalveerd?

Voorbeeld 2

Je verwarmt water tot 100 °C. Als je het in een kopje overgiet, begint het af te koelen. Volgens de warmtewet van Newton is de temperatuurverandering recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving. Stel dat het kopje in een kamer staat met een temperatuur van 20 °C, hoe kun je dit afkoelingsproces dan beschrijven?

Antwoord

Noem de temperatuur $T(t)$ met T in °C en t in minuten.
Het temperatuurverschil met de omgeving is dan $T(t) - 20$.
Volgens de warmtewet van Newton is dan:
$T(t+1) = T(t) - c \cdot (T(t) - 20)$
c is een parameter van het afkoelingsproces die je alleen door meten in een echt experiment kunt bepalen. Eigenlijk is ook de begintemperatuur een parameter, want waarschijnlijk is het water al bij overgieten niet meer precies 100 °C.

In het bestand **ModelAfkoelen** kun je nagaan hoe het afkoelen verloopt als c is gemeten.

Opgave 5

In het voorbeeld wordt het afkoelingsproces van kokend water beschreven.

Daarin zie je de modelformule: $T(t+1) = T(t) - c \cdot (T(t) - 20)$.

a Neem $c = 0{,}15$. Maak een tabel met de temperaturen van het water in het kopje voor de eerste 5 minuten.

b Als het kopje in een kamer staat met een temperatuur van 19°C, wat wordt dan de modelformule?

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt het afkoelingsproces van kokend water beschreven.

a Probeer te beschrijven hoe het afkoelingsproces verloopt. Misschien ben je in de gelegenheid om metingen te verrichten aan het afkoelen van kokend water.

b Als je metingen hebt kunnen verrichten, dan heb je een tabel waar een grafiek van T bij past. Probeer door aanpassen van c die grafiek met je Excelwerkblad te benaderen. Waarvan zal c afhangen?

c Je kunt (afhankelijk van je metingen) de stapgrootte aanpassen naar bijvoorbeeld 2 minuten. Dan moet wel de factor c kleiner worden genomen. Experimenteer daarmee. Welke waarden voor c passen bij deze stapgrootte?

Voorbeeld 3

Onder verstedelijking wordt de trek van de bevolking van een bepaalde regio van het platteland naar de steden verstaan.
De tabel geeft daarover informatie voor deze regio (S = stedelijk gebied, P = platteland). Daarin zie je bijvoorbeeld dat 30% van de plattelandsbevolking jaarlijks naar de stad trekt.
Onderzoek of er een evenwichtstoestand ontstaat voor wat betreft de verdeling van de bevolking van deze regio over stad en platteland.

		van	
		S	P
naar	S	0,8	0,2
	P	0,2	0,7

Tabel 4.1

Antwoord

Er zijn nu twee variabelen $S(t)$ (het percentage mensen in stedelijke gebieden in deze regio) en $P(t)$ (het percentage plattelanders in deze regio). Daarbij neem je aan dat er geen mensen van buiten de regio een rol spelen en dat de bevolking constant blijft. (Je kunt ook wel met één variabele werken, want $P(t) = 100 - S(t)$.)
Mogelijke modelformules zijn:

- $S(t+1) = S(t) + \Delta S(t) = S(t) - 0{,}20 \cdot S(t) + 0{,}30 \cdot P(t) = 0{,}80S(t) + 0{,}30P(t)$
- $P(t+1) = P(t) + \Delta P(t) = P(t) - 0{,}30 \cdot P(t) + 0{,}20 \cdot S(t) = 0{,}20S(t) + 0{,}70P(t)$

Hiermee kun je het bestand **ModelMigratie** opstellen.
De startpercentages zijn nog te kiezen. Ga na dat ze geen invloed hebben op het evenwicht dat ontstaat.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** wordt een sterk vereenvoudigd model van een migratieproces beschreven.

a Hoeveel procent van de bevolking in de stad trekt jaarlijks naar het platteland?

b Teken een graaf (figuur met pijlen) bij dit migratieproces.

c In de tekst van het antwoord staat dat je ook met één modelformule zou kunnen werken voor dit migratieproces. Welke?

d Ga ervan uit dat in 1980 45% van de bevolking in de stad woonde. Welk evenwicht lijkt er te gaan ontstaan?

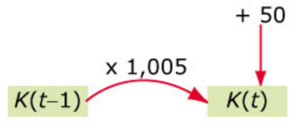
e Ga er nu van uit dat in 1980 40% van de bevolking in de stad woonde. Welk evenwicht lijkt er nu te ontstaan? Wat valt op?

f In werkelijkheid moet je ook rekening houden met mensen die buiten de regio toestromen of wegstromen. Kun je een model ontwerpen waarbij je ook daarmee rekening houdt?

Verwerken

Opgave 8

Je hebt op 1 januari 2015 een saldo van € 1240,00. En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten. Verder maak je aan het begin van elke maand € 50,00 naar die spaarrekening over, te beginnen op 1 februari 2015. Je krijgt aan het eind van elke maand 0,5% rente over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.



Figuur 4.6

a Bereken het saldo op 1 april 2015.

b Leg uit dat het saldo K van je bankrekening t maanden na 1 januari 2015 kan worden berekend door $K(t+1) = K(t) \cdot 1{,}005 + 50$ met $K(0) = 1240$.

c Bereken het saldo op 1 juli 2015.

Opgave 9

Staatsbosbeheer heeft een bepaald perceel waarop ongeveer 6000 bomen van een bepaalde soort kunnen staan. Dit perceel is bedoeld als productiebos: na een aantal jaren zijn de eerste bomen groot genoeg om te kunnen worden gekapt. Om een stabiele jaarlijkse opbrengst te hebben wordt er jaarlijks maar 18% van de bomen gekapt en worden er 1000 aangeplant. Het eerste jaar zijn er 5000 bomen geplant.

Stel een dynamisch model op voor het aantal bomen op dit perceel en maak een tabel van het verloop van de eerste zes jaren ervan.

Opgave 10

In 2005 leefden er in een natuurgebied 5000 konijnen. Hun aantal is in de jaren daarna telkens met 5% toegenomen.

a Ontwerp een dynamisch groeimodel voor het aantal konijnen K waarin t het aantal jaren na 2005 is.

b Maak een tabel van de groei van het aantal konijnen in de loop van de tijd. Van wat voor soort groei is er sprake?

c Na hoeveel jaar zullen er voor het eerst meer dan 15000 konijnen zijn?

Deze groei van het aantal konijnen kan niet onbeperkt doorgaan. In dit natuurgebied is slechts plaats voor een beperkt aantal konijnen. Een onderzoeker heeft een aangepast groeimodel opgesteld. Daarin is $K(t+1) = c \cdot K(t)(8000 - K(t))$, waarin $K(0) = 5000$. Dit model blijkt in 2006 precies hetzelfde geschatte aantal konijnen op te leveren als het model dat je bij a hebt ontworpen en ook in de daarop volgende jaren redelijk bij dat model te passen.

d Welke waarde moet c dan hebben?

e Maak voor dit aangepaste groeimodel een tabel van het aantal konijnen in de loop van de tijd.

Opgave 11

Als je melk uit de koelkast haalt en in een glas schenkt, loopt de temperatuur op vanaf $T(0) = 6$ °C (de temperatuur binnen de koelkast) naar de kamertemperatuur van 20 °C. De toename van de temperatuur per minuut is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

a Leg uit dat hieruit deze modelformule is af te leiden: $T(t+1) = T(t) + c \cdot (20 - T(t))$, waarin t het aantal minuten is.

Neem aan dat $c = 0{,}1$.

b Bepaal na hoeveel minuten de temperatuur van de melk minder dan 1 °C verschilt van de kamertemperatuur.

c Laat zien hoe de grenswaarde uit de gegeven modelformule is af te leiden.

Opgave 12

In het begin van het internettijdperk was er een tijdje een concurrentiestrijd tussen twee populaire internetbrowsers, noem ze bijvoorbeeld 'Discoverer' en 'Landscape'. De gebruikers van deze internetbrowsers zagen jaarlijks reikhalzend uit naar de nieuwste versie van de Discoverer of Landscape. Maar sommige gebruikers wisselden ook nogal eens van browser. In deze graaf zie je de wisselingen voor een bepaald jaar. In dat jaar werd onderzocht wat er zou gebeuren als deze vervangingen en wisselingen elk jaar zo zouden doorgaan.

Figuur 4.7

a Stel bij deze situatie een rekenmodel op. Noem het aantal gebruikers van de Discoverer $D(t)$ en dat Landscape $L(t)$ en neem $\Delta t = 1$ jaar. Ga ervan uit dat $D(0) = 0{,}5$ en $L(0) = 0{,}5$.

b Bepaal hoeveel procent van de gebruikers uiteindelijk de Discoverer zal gebruiken als dit rekenmodel geldig zou zijn gebleven.

Toepassen

Opgave 13: Prooi-roofdiercyclus

In veel natuurgebieden is er sprake van een wisselwerking tussen de roofdieren en hun prooi, zoals vossen en konijnen. Modellen die zo'n wisselwerking bestuderen, heten prooi-roofdiermodellen. De Italiaanse wiskunde **Vito Volterra** en de Amerikaanse wiskundige **Alfred J. Lotka** ontwierpen in 1925/1926 een dynamisch model voor dergelijke wisselwerkingen. Als $P(t)$ het aantal prooidieren en $R(t)$ het aantal roofdieren op tijdstip $t+1$ is, zien hun vergelijkingen er in discrete vorm zo uit:

$$P(t+1) = P(t) \cdot (a - b \cdot R(t))$$
$$R(t+1) = R(t) \cdot (c + d \cdot P(t))$$

Hierin zijn a, b, c en d positieve getallen.

a Verklaar hoe je in dit model kunt zien dat roofdieren voor minder prooidieren zorgen.

b Stel $a < 1$, wat zou er dan met het aantal prooidieren gebeuren?

c Neem $a = 1{,}08$, $b = 0{,}0015$, $c = 0{,}8$, $d = 0{,}00048$, $P(0) = 600$ en $R(0) = 50$.

Hoeveel prooi- en roofdieren zijn er op $t = 3$?

Opgave 14: Konijnenraadsel van Fibonacci

Leonardo van Pisa, beter bekend als Fibonacci (ongeveer 1180—1250) geeft in zijn boek 'Liber Abaci' uit 1202 het volgende raadsel weer:
"In een afgesloten gebied zet ik één paar konijnen. Dit paar werpt elke maand één paar jongen. Al die jongen krijgen op hun beurt ook weer jonge konijntjes, maar pas vanaf hun tweede levensmaand en dan ook weer elke maand één paar jongen. Hoeveel paren konijnen zijn er nu na één jaar?"

a Stel een dynamisch rekenmodel op voor het aantal paren konijnen A na n maanden.

b Beantwoord de vraag die Leonardo van Pisa in zijn raadsel stelt.

c Hoeveel paren konijnen (die meteen elke maand één paar jongen krijgen) zijn er in het begin in het afgesloten gebied gezet, als er na een jaar 1131 paren konijnen zijn?

Testen

Opgave 15

Iemand heeft een miljoen op de bank gezet tegen een rente van 0,30% per maand. Hij gaat er van leven en haalt maandelijks € 1500 van deze rekening voor zijn levensonderhoud.

a Stel hierbij een dynamisch rekenmodel op.

b Teken een bijpassende grafiek en bepaal daarmee of zijn saldo $S(t)$ naar een grenswaarde toegroeit.

Opgave 16

Figuur 4.8

Een viskwekerij heeft een bepaald bassin waarin maximaal 5000 meervallen kunnen leven. De kweker zet daarin 1000 meervallen uit. Het aantal meervallen zal dan gaan groeien, maar omdat er maximaal 5000 meervallen in het bassin kunnen leven, zal de groei gaan afnemen naarmate het aantal meervallen dichter bij de 5000 komt.
De kweker veronderstelt daarom dat de toename van het aantal meervallen per jaar recht evenredig is met het verschil tussen het aantal meervallen en het maximale aantal van 5000:
$\Delta N_t = c \cdot (5000 - N_t)$,
waarin N_t het aantal meervallen na t jaar is.

a Toon aan dat de veronderstelling van de kweker leidt tot een groeimodel met als bijbehorende formule: $N_t + 1 = (1 - c) \cdot N_t + 5000 \cdot c$.

b Na een jaar zijn er ongeveer 1600 meervallen in het bassin. Bereken c.

c Teken een grafiek van N_t. Vanaf welk moment gaat het aantal meervallen minder snel toenemen?

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Modelleren** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- recht evenredig (met een macht van) — evenredigheidsconstante — rekenregels voor machten
- modelleren — modelcyclus — vragen die je helpen bij modelleren
- optimaliseren
- dynamisch model — vaste stapgrootte — discreet dynamisch model

Activiteitenlijst

- machtsfuncties herkennen — heen- en terugrekenen bij machtsfuncties
- modelleren als activiteit herkennen en de stappen in de modelcyclus herkennen — zelf rekenmodellen opstellen door goede vragen te stellen
- rekenmodellen bij optimaliseringsproblemen opstellen en toepassen
- discrete dynamische modellen opstellen en doorrekenen met Excel

Achtergronden

Modelleren is in feite een heel breed begrip: het wordt gebruikt om het op schaal bouwen van voorwerpen, het tekenen van objecten met de computer, het ontwerpen van rekenmodellen voor allerlei processen, enzovoorts, aan te duiden. In dit onderdeel beperken we ons tot het **wiskundig modelleren**: het opstellen van een wiskundig rekenmodel om een bepaald probleem op te lossen. En dat is een vaardigheid die je bij vrijwel alle wetenschappen toepast.

Testen

Opgave 1

Een rechthoek van 6 bij 2 cm past precies in een gelijkbenige driehoek. Een zijde van 6 cm ligt op de basis van de driehoek, dus de bijbehorende hoekpunten van de rechthoek ook. De andere twee hoekpunten liggen elk op één van de gelijke benen van de driehoek. Hoe groot is de minimale oppervlakte van deze driehoek?

Opgave 2

Een kalkoen braden is lastig, omdat het enige tijd duurt voordat ook het binnenste van de kalkoen op temperatuur komt. Hoelang dat duurt, hangt af van het gewicht. Het is de kunst om de kalkoen zo lang te braden dat het binnenste net gaar is. Je kunt dat niet controleren zonder de kalkoen aan te snijden. De optimale braadtijd is daarom moeilijk vast te stellen. Gelukkig geven kookboeken vaak aanwijzingen voor de braadtijd, die afhankelijk is van het gewicht van de kalkoen. Onderzoekers hebben vastgesteld dat met de volgende formule het beste resultaat wordt verkregen:

$t = 11g^{\frac{2}{3}}$

Hierin is g het gewicht van de kalkoen in kg en t de tijd in minuten die nodig is om het binnenste van de kalkoen op een temperatuur van 85 °C te brengen.

a t is recht evenredig met een macht van g. Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b g is ook recht evenredig met een macht van t. Bereken de evenredigheidsconstante in drie decimalen nauwkeurig.

c Bereken hoelang het bij een kalkoen van 3 kg duurt voor het binnenste op een temperatuur van 85 °C is. Verwacht je dat een kalkoen van 6 kg daarvoor twee keer zo veel tijd nodig heeft?

Als het binnenste van de kalkoen een temperatuur heeft van 85 °C, dan duurt het nog een tijd voordat de kalkoen gaar is. Ga ervan uit dat die tijd 80 minuten is.

d Geef de formule voor de totale braadtijd T van een kalkoen afhankelijk van het gewicht. Is de totale braadtijd recht evenredig met een macht van het gewicht?

Opgave 3

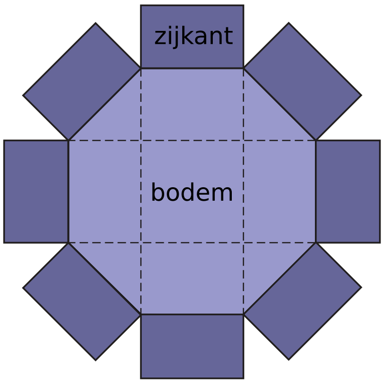
Een locomotief is op een schaal van $1 : 87$ nagebouwd. Neem aan dat een echte locomotief met een snelheid van 60 km/h rijdt. Hoe snel moet de fabrikant het schaalmodel laten rijden om het 'echt' te laten lijken?

Los dit probleem op volgens de modelcyclus.

Figuur 5.1

Opgave 4

Een kartonnen snoepdoosje heeft de vorm van een regelmatige achthoek. Je ziet een uitslag van het doosje zonder deksel, de dikte van het karton wordt verwaarloosd. Deze uitslag moet precies passen op een vierkant van $18{,}0$ bij $18{,}0$ cm. Het doosje heeft een volkomen vlakke deksel. Dus als je deze uitslag in elkaar vouwt, krijg je een figuur die de volledige inhoud van het doosje bepaalt. x stelt de zijde van de achthoek voor, h is de hoogte van het doosje, beide worden in cm uitgedrukt.



Figuur 5.2

a Leid een formule af voor de inhoud van dit doosje.

b Bereken de maximale inhoud van dit doosje. Geef je antwoord in gehele cm^3.

Opgave 5

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 g toeneemt. Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo ververst worden dat de wettelijke norm van 2 g ureum per m^3 water niet overschreden wordt. In het model wordt ervan uitgegaan dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken en dat de verversing van het water 's nachts plaatsvindt. Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 m^3 ververst wordt (dus 3% van het totaal). De eerste dag is er 0 g ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 g ureum in het water. Na het verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 g ureum over.

a Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 g ureum in het water zit.

b In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

c Toon aan dat voor de hoeveelheid ureum (U) aan het begin van de n-de dag geldt: $U(n) = 0{,}8 \cdot U(n-1) + 400$.

De hoeveelheid ureum aan het begin van de eerste dag is weer 0 g.

d Laat zien dat aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm wordt voldaan.

e In de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden. Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(naar: examen wiskunde A havo in 1991, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 6: Prooidier-roofdier modellen

In veel natuurgebieden is er sprake van een wisselwerking tussen de roofdieren en hun prooi, zoals vossen en konijnen. Modellen die zo'n wisselwerking bestuderen heten **prooi-roofdiermodellen**. De Italiaanse wiskunde **Vito Volterra** en de Amerikaanse wiskundige **Alfred J. Lotka** ontwierpen in 1925/1926 een dynamisch model voor dergelijke wisselwerkingen. Als $P(t)$ het aantal prooidieren en $R(t)$ het aantal roofdieren op tijdstip $t+1$ is, zien hun vergelijkingen er in discrete vorm zo uit:

Figuur 5.3

- $P(t+1) = P(t) \cdot (a - b \cdot R(t))$
- $R(t+1) = -R(t) \cdot (c - d \cdot P(t))$

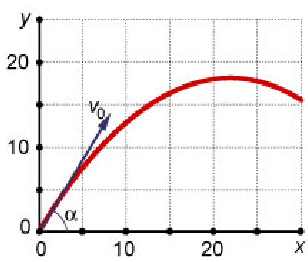
Hierin zijn a, b, c en d positieve getallen. Bekijk maar eens met behulp van een rekenblad in Excel of je grafische rekenmachine hoe dit model zich gedraagt.

De eerste vergelijking laat zien dat de prooidieren bij afwezigheid van de roofdieren ($b = 0$) toenemen. De uitdrukking $a - b \cdot R(t-1)$ laat echter zien, dat de toename vermindert afhankelijk van het aantal roofdieren R dat een periode eerder op ze heeft kunnen jagen.
De vergelijking voor de roofdieren kent een vergelijkbare interpretatie.

Kies waarden voor a, b, c en d en reken een prooi-roofdiermodel door. Onderzoek of er een evenwichtssituatie ontstaat waarin de aantallen stabiliseren. Het beste kun je een rekenblad in Excel maken waarin deze vier parameters instelbaar zijn zodat je wat realistische resultaten krijgt...
Tegenwoordig bestaan er diverse aangepaste prooi-roofdiermodellen en animaties ervan op internet. Bekijk bijvoorbeeld dit **artikel uit de Scholarpedia**.

Opgave 7: Kogelbaan

De **kogelbaan** is een model voor de baan die een in vacuüm (om luchtweerstand te kunnen verwaarlozen) onder een bepaalde hoek en met een bepaalde snelheid afgeschoten massapunt aflegt.
Noem de beginsnelheid v_0 en de hoek waaronder het massapunt wordt afgeschoten α.



Figuur 5.4

De snelheid in de x-richting is $v_0 \cos(\alpha)$.
De snelheid in de y-richting is $v_0 \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee.

Dus is: $x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$.

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9{,}81$ m/s^2.
Hiermee maak je een model in Excel: **Model kogelbaan**.

Laat zien dat bij de baan de formule $y = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{g}{2v_0 \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$

hoort.
Kun je de gunstigste afschiethoek α bepalen als je de kogel zo ver mogelijk van het afschietpunt weer op de grond wilt laten komen?

Zie ook deze **simulatie van de kogelbaan**.

a Leid zelf de vergelijking van de baan van deze parabool af.

b Druk het punt waar de kogel weer op de grond komt uit in v_0, α en g.

c Bij welk waarde voor α komt de kogel zo ver mogelijk? Druk de hoogte die de kogel dan haalt uit in v_0 en g.

2

Oppervlakte en inhoud

2.1 Oppervlakte vlakke figuren

Inleiding

Dit is een foto van ‘Le Kinémax’, één van de spectaculaire gebouwen in het multimedia themapark Parc du Futuroscope bij Poitiers in Frankrijk.
Hoeveel m^2 glas is er wel niet in dit gebouw verwerkt? Daarvoor moet je de oppervlakte van allerlei vlakke figuren kunnen berekenen...

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de oppervlakteformules van allerlei vlakke figuren;
- de oppervlakte berekenen van samengestelde vlakke figuren.

Voorkennis

- de oppervlakte van rechthoek, driehoek en cirkel berekenen;
- vlakke figuren opdelen in driehoeken, rechthoeken, delen van cirkels, etc.

Verkennen

Opgave V1

De oppervlakte van een figuur vind je door hem te verdelen in rechthoeken en halve rechthoeken, dat geldt zelfs (als benadering) voor een cirkel. Van een rechthoek weet je de oppervlakte: $opp(rechthoek) = lengte \times breedte$. Leid nu zelf een formule af voor de oppervlakte van de volgende figuren.

a Een willekeurige driehoek.

b Een gelijkzijdige driehoek.

c Een willekeurig parallellogram.

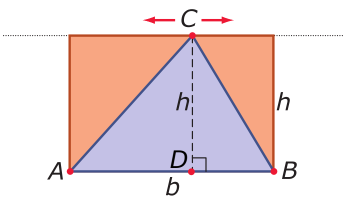
d Een willekeurig trapezium, dat is een vierhoek waarvan twee overstaande zijden evenwijdig zijn.

e Een cirkel (uitgaande van de omtrekformule $omtrek(cirkel) = 2\pi r$ waarin r de straal van de cirkel is).

Uitleg 1

Bekijk de applet: principe van Cavalieri

De oppervlakte van een figuur kun je vinden door hem te verdelen in rechthoeken en halve rechthoeken. Van een rechthoek ken je de formule voor de oppervlakte:
$opp(rechthoek) = lengte \cdot breedte$.



Figuur 1.2

In de figuur zie je hoe de oppervlakte van een driehoek de helft is van de oppervlakte van de rechthoek waarvan de lengte gelijk is aan de basis b en de breedte gelijk is aan de hoogte h van de driehoek:

$opp(driehoek) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

De basis staat altijd loodrecht op de hoogte.

Uit de figuur kun je ook opmaken dat zolang de basis en hoogte niet veranderen, de oppervlakte van de driehoek niet verandert. Je kunt dus de vorm van de driehoek veranderen door C evenwijdig aan de basis te verschuiven zonder de oppervlakte te veranderen. Dit heet het principe van Cavalieri.

Als de hoogte van een driehoek niet is gegeven, maar er is wel een hoek bekend, moet je die hoogte eerst berekenen om de oppervlakte te vinden.

Op vergelijkbare wijze vind je oppervlakteformules voor een parallellogram, een trapezium, een vlieger, een gelijkzijdige driehoek, een ruit, enzovoort.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

a Neem aan dat $AB = 5$, $AD = 1$ en $h = 4$ en laat zien dat de oppervlakte van ΔABC inderdaad 10 is door hem in twee halve rechthoeken te verdelen.

b Doe hetzelfde als $AD = 2$.

c Teken zelf een willekeurige scherphoekige driehoek ABC. Neem aan dat $AD = p$, $BD = q$, $AB = b$ en $CD = h$. Toon aan dat $opp(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$.

d Neem aan dat $AB = 5$, $AD = 1$ en $h = 4$. Nu ligt echter punt D links van A. Laat zien dat de oppervlakte van ΔABC inderdaad 10 is door hem in twee halve rechthoeken te verdelen.

e Teken zelf een willekeurige stomphoekige driehoek ABC met D links van A. Neem aan dat $AD = p$, $AB = b$ en $CD = h$. Toon aan dat *oppervlakte (ΔABC)* $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$.

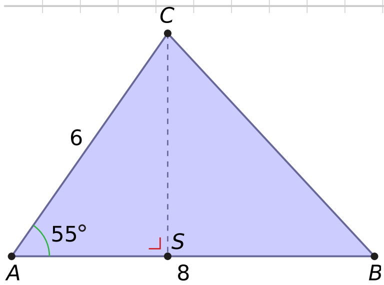
Opgave 2

Je ziet ΔABC met $\angle A = 55°$, $AC = 6$ en $AB = 8$.

Je moet nu eerst de hoogte van de driehoek berekenen met behulp van goniometrie.

a Bereken de hoogte CS loodrecht op AB.

b Bereken hiermee de oppervlakte van ΔABC.

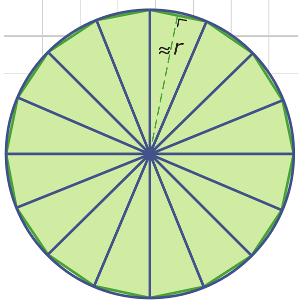


Figuur 1.3

Uitleg 2

Bekijk de applet: oppervlakte cirkel

De oppervlakte van een cirkel met straal r kun je vinden door hem op te delen in n gelijkbenige driehoekjes met het middelpunt als tophoek en de twee andere hoekpunten op de cirkel. Als n groot genoeg is, ontstaan er n driehoeken met een hoogte van (ongeveer) r en een basis van (ongeveer) $\frac{\text{omtrek cirkel}}{n}$.



Figuur 1.4

De omtrek van een cirkel met straal r is $2\pi r$. De oppervlakte van zo'n driehoek is dan gelijk aan:

$opp(driehoek) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{n} \cdot r$

De oppervlakte van de cirkel is dan:

$opp(cirkel) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{n} \cdot r = \pi r^2$

En uit de formule voor de oppervlakte van een cirkel kun je dan weer de oppervlakte van een cirkelsector afleiden.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

Leg uit hoe daarin de formule voor de oppervlakte van de cirkel wordt afgeleid uit die voor de omtrek.
Welke aannames worden er gedaan?

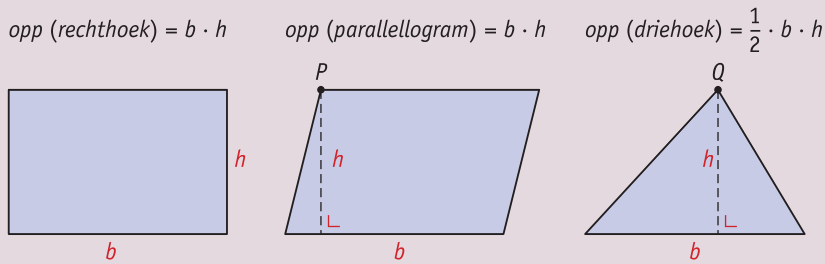
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De oppervlakte van een figuur kun je vinden door hem te verdelen in rechthoeken en halve rechthoeken, dat geldt zelfs (als benadering) voor een cirkel. Van een rechthoek met lengte l en breedte b weet je de oppervlakte: *oppervlakte (rechthoek)* $= l \cdot b$.

De volgende **oppervlakteformules** zijn handig om te onthouden:

Bekijk de applet.



Figuur 1.5

Door de punten P dan wel Q evenwijdig aan de basis te verplaatsen verandert de oppervlakte niet. Dit heet het **principe van Cavalieri**.

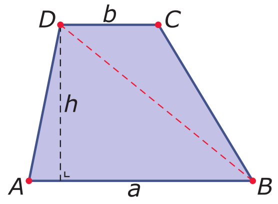
De **omtrek van een cirkel** met straal r is: *omtrek (cirkel)* $= 2\pi r$.
De **oppervlakte van een cirkel** met straal r is: *oppervlakte (cirkel)* $= \pi r^2$.

Met behulp van deze formules kun je ook exact de oppervlakte van bepaalde samengestelde vlakke figuren uitrekenen. Zoals bijvoorbeeld een figuur die bestaat uit halve cirkels en driehoeken.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: trapezium

Stel een formule op voor de oppervlakte van een trapezium $ABCD$, waarvan de evenwijdige zijden een lengte hebben van a en b en de hoogte h is.



Figuur 1.6

Antwoord

Trek diagonaal BD.

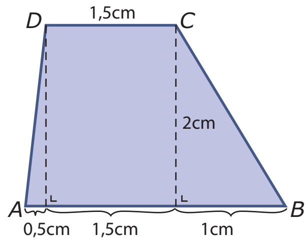
Deze diagonaal verdeelt het trapezium in twee driehoeken met dezelfde hoogte h:

- $opp(\Delta ABD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$
- $opp(\Delta CDB) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

En dus is de oppervlakte van het trapezium: $opp(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h$

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt het berekenen van de oppervlakte van een trapezium besproken.



Figuur 1.7

a Bekijk het trapezium. Bereken de oppervlakte door het te verdelen in een rechthoek en twee halve rechthoeken.

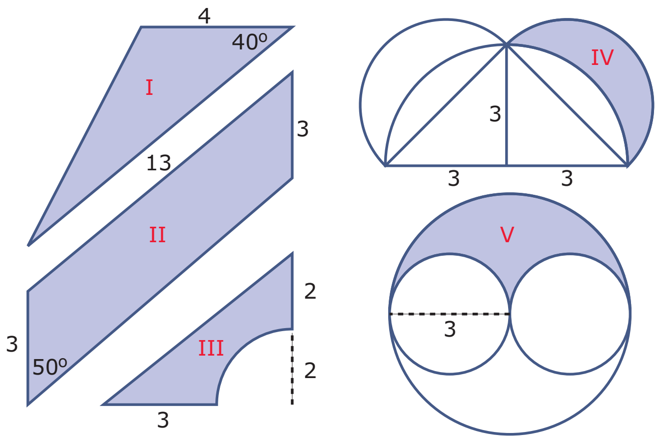
b Bereken de oppervlakte nog eens door het trapezium met behulp van een diagonaal in twee driehoeken te verdelen.

c Bereken ten slotte de oppervlakte met behulp van de oppervlakteformule die in het voorbeeld wordt afgeleid.

Opgave 5

Je hebt een overzicht gekregen van de oppervlakteformules van een rechthoek, een parallellogram, een driehoek en een cirkel.

Gebruik deze formules om van deze vijf gekleurde gebieden de oppervlakte te berekenen. Ga ervan uit dat alle cirkelbogen precies hele, halve of kwart cirkels zijn en dat figuur II een parallellogram is. Rond indien nodig af op twee decimalen.



Figuur 1.8

Opgave 6

Van elke vlieger $ABCD$ staan de diagonalen AC en BD loodrecht op elkaar. Neem verder aan dat $AB = AD$.

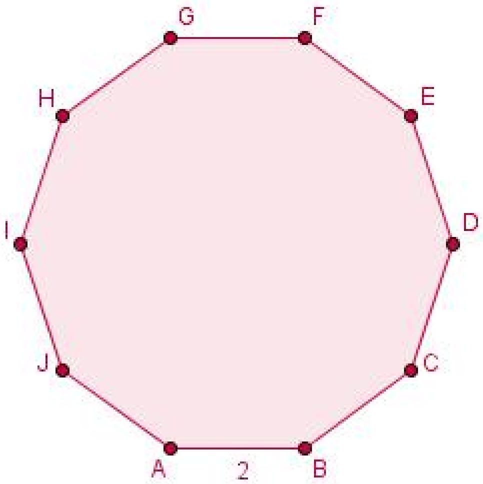
a Neem aan dat $AC = 6$ en $BD = 4$. Hoe groot is dan de oppervlakte van $ABCD$?

b Waarom maakt het voor de oppervlakte van deze vlieger niet uit waar het snijpunt van beide diagonalen precies zit? En klopt dat ook als het snijpunt van beide diagonalen niet op lijnstuk AC ligt, maar op het verlengde ervan? (Je hebt dan een pijlpuntvlieger.)

c Noem $AC = p$ en $BD = q$. Geef een formule voor de oppervlakte van een vlieger uitgedrukt in p en q.

Voorbeeld 2

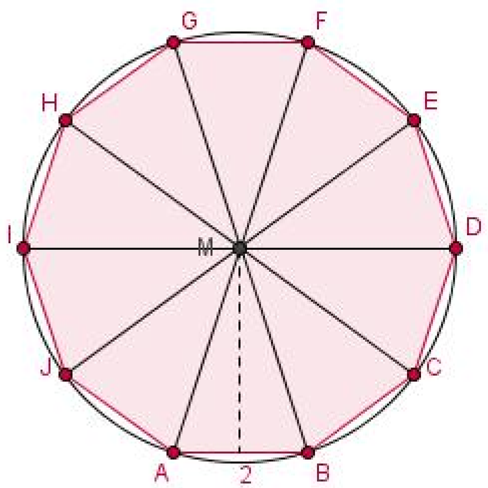
Bereken de oppervlakte van deze regelmatige tienhoek $ABCDEFGHIJ$ met zijden die een lengte hebben van 2.



Figuur 1.9

Antwoord

Van een regelmatige tienhoek zijn alle zijden en hoeken gelijk. Zo'n tienhoek past precies in een cirkel waarvan het middelpunt M in het midden van de tienhoek ligt. De tienhoek bestaat daarom uit tien congruente gelijkbenige driehoeken met tophoeken van $\frac{360°}{10} = 36°$.



Figuur 1.10

Eén van die driehoeken is bijvoorbeeld ΔABM.

De hoogte h van die driehoek kun je berekenen: $\tan(18°) = \frac{1}{h}$ en dus $h = \frac{1}{\tan(18°)}$.

De oppervlakte van ΔABM is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\tan(18°)} = \frac{1}{\tan(18°)}$.

De oppervlakte van de tienhoek is daarom $\frac{10}{\tan(18°)} \approx 30{,}8$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** wordt de oppervlakte van een regelmatige tienhoek berekend.

a Bereken de oppervlakte van een regelmatige zeshoek met zijden van 5 cm. Geef je antwoord in cm^2 in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de oppervlakte van een regelmatige vijfhoek met zijden van 5 cm. Geef je antwoord in cm^2 in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** wordt de oppervlakte van een regelmatige tienhoek berekend.

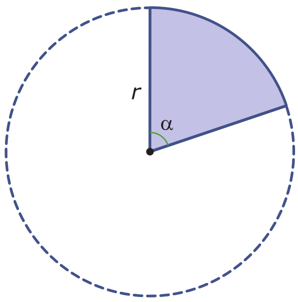
a Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van een regelmatige twintighoek die precies past binnen een cirkel met een diameter van 10.

b Hoeveel is de oppervlakte van het gebied binnen de cirkel, maar buiten de regelmatige twintighoek bedoeld bij a?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: cirkelsector

Stel een formule op voor de oppervlakte van een cirkelsector met straal r en sectorhoek α in graden.



Figuur 1.11

Antwoord

De oppervlakte van een cirkelsector is een deel van de oppervlakte van de hele cirkel. De grootte van de sectorhoek bepaalt met welk deel van de oppervlakte van de cirkel je te maken hebt.

Bij een sectorhoek van α heb je het $\frac{\alpha}{360}$ deel van de oppervlakte van de hele cirkel.

Dus: $opp(cirkelsector) = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2$.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de oppervlakte van een cirkelsector berekent.

a Stel dat je een sectorhoek hebt van $60°$ en een straal van 2.

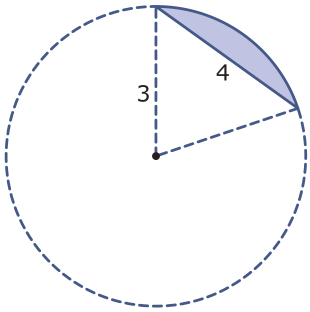
Leg uit waarom de oppervlakte van deze sector $\frac{1}{6}$ deel is van die van de cirkel.

b Bereken de oppervlakte van de cirkelsector in a in twee decimalen nauwkeurig en controleer je antwoord met de applet.

c Bereken nu de oppervlakte van een sector met een sectorhoek van $75°$ en een straal van $1{,}5$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 10

Bereken de oppervlakte van het cirkelsegment dat hier is ingekleurd. Rond af op twee decimalen.

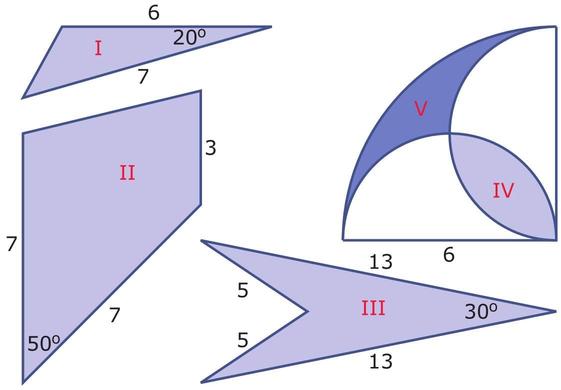


Figuur 1.12

Verwerken

Opgave 11

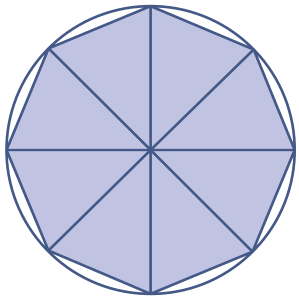
Bereken de oppervlaktes van de volgende figuren. Figuur II is een trapezium en figuur III een pijlpuntvlieger. De cirkelbogen die de vlakken IV en V begrenzen, zijn halve dan wel kwart cirkels. Rond zo nodig af op twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 1.13

Opgave 12

Van de regelmatige achthoek liggen alle hoekpunten op een cirkel met een straal van 5 cm.



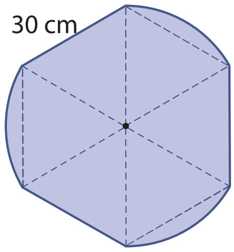
Figuur 1.14

Bereken de oppervlakte van het gebied dat buiten de achthoek en binnen de cirkel ligt. Geef je antwoord in cm^2 in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 13

Iemand maakt een driepotig krukje, waarvan je het bovenaanzicht ziet. De figuur bestaat uit een regelmatige zeshoek, waaraan op drie zijden een segment zit van de cirkel die door de hoekpunten van de zeshoek gaat.

Bereken zowel de oppervlakte als de omtrek van deze zitting. Geef de oppervlakte in cm^2 en de omtrek in centimeters.

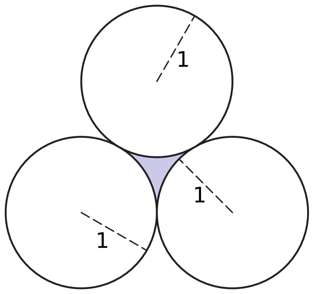


Figuur 1.15

Opgave 14

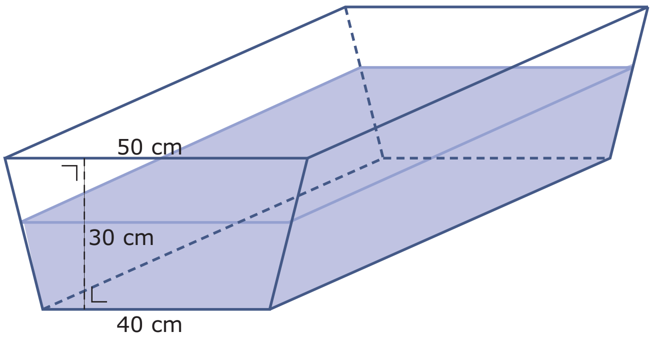
De straal van de drie cirkels in deze figuur is gelijk aan 1.

Bereken de exacte oppervlakte van de figuur die deze drie cirkels insluiten.



Figuur 1.16

Opgave 15



Figuur 1.17

Deze symmetrische bak staat precies half vol met water. De bak is 2 meter lang. De voorkant en de achterkant staan loodrecht op de bodem van de bak.

a Hoe hoog staat de waterspiegel gerekend vanaf de bodem van de bak? Geef je antwoord in centimeters.

b Hoe groot is de oppervlakte van de waterspiegel? Geef je antwoord in cm^2.

Toepassen

Een van de vele grote wiskundigen uit de Griekse Oudheid was **Heron van Alexandrië**. Hij leefde ongeveer van 10 tot 70 na Christus. Hij heeft een groot aantal formules bedacht, waaronder een formule om de oppervlakte van een driehoek te berekenen aan de hand van de lengtes van de drie zijden.
Deze formule staat ook wel bekend als de formule van Heron.
Stel dat een driehoek zijden a, b en c heeft, dan luidt de formule:

oppervlakte $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Daarbij staat s voor de helft van de omtrek van de driehoek.

Opgave 16

Bekijk de formule van Heron.

a Waarom geldt $s = \frac{a+b+c}{2}$?

Gegeven is een rechthoekige driehoek met zijden van 3 cm, 4 cm en 5 cm.

b Bereken de oppervlakte van deze driehoek met de bekende formule met basis en hoogte.

c Bereken de oppervlakte met de formule van Heron. Ga na dat je dezelfde uitkomst krijgt.

d Bereken de oppervlakte van een driehoek met zijden van $12{,}9$ cm, $9{,}3$ cm en $11{,}8$ cm. Rond af op twee decimalen.

Opgave 17: Bewegingssnelheid van aarde en maan

De planeten bewegen ongeveer in cirkels om de zon. De maan draait ongeveer in een cirkel om de aarde. Je kunt opzoeken hoe groot de straal van die banen (ongeveer) is en hoelang de planeten en de maan over één omwenteling doen.

De maan draait in ongeveer $27{,}32$ dagen om de aarde en staat ongeveer 384450 km van de aarde af (gemiddeld).

a Met welke snelheid (in km/h) beweegt de maan om de aarde? Rond af op twee decimalen.

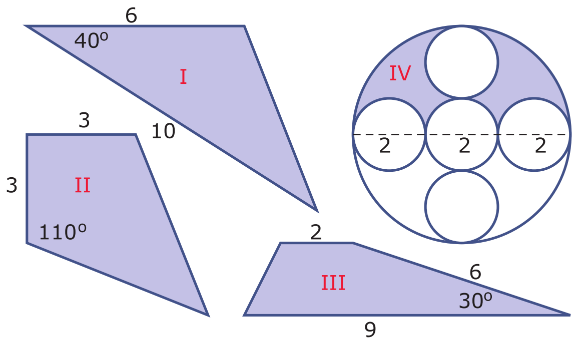
De aarde draait in ongeveer $365{,}25$ dagen om de zon en staat ongeveer $149{,}6 \times 10^6$ km van de zon af (gemiddeld).

b Met welke snelheid (in km/h) beweegt de aarde om de zon? Rond af op twee decimalen.

Testen

Opgave 18

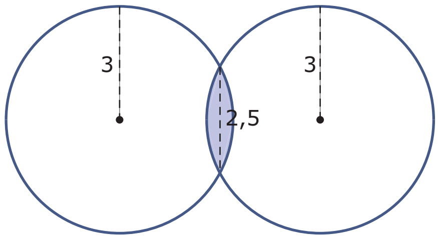
Bereken de oppervlaktes van de volgende figuren. Figuur II is een vlieger en figuur III een trapezium. Figuur IV is alleen het gekleurde gebied binnen een grote cirkel met daarin vijf kleinere cirkels. Rond zo nodig af op twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 1.18

Opgave 19

Bereken de oppervlakte van het gebied binnen beide cirkels in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 1.19

2.2 Oppervlakte lichamen

Inleiding

Nu je de oppervlakte van allerlei vlakke figuren kunt berekenen is het tijd om te kijken naar de oppervlakte van ruimtelijke objecten. Als je er een uitslag van kunt maken is het bepalen van de oppervlakte eenvoudig: het is de oppervlakte van de uitslag. Maar hoe zit het dan met een kegel, een cilinder, een bol? Of kun je daar ook een uitslag van maken?

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de oppervlakteformule van de bol;
- de oppervlakte berekenen van ruimtelijke figuren waar je een uitslag van kunt maken.

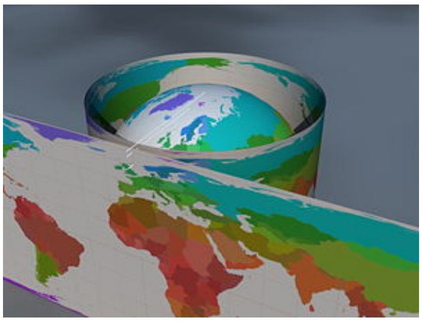
Voorkennis

- de oppervlakte van de belangrijkste vlakke figuren berekenen;
- de oppervlakte van daaruit samengestelde vlakke figuren berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bij het maken van een wereldkaart gaat het om een projectie van de Aardbol op een plat vlak. In 1772 bedacht de wiskundige **Johann Heinrich Lambert** (1728—1777) de zogenaamde **orthografische cilinderprojectie** waarbij de Aarde vanuit een punt op zijn as wordt afgebeeld op een cilinder om de evenaar. De projectielijn is loodrecht op de aardas.



Figuur 2.2

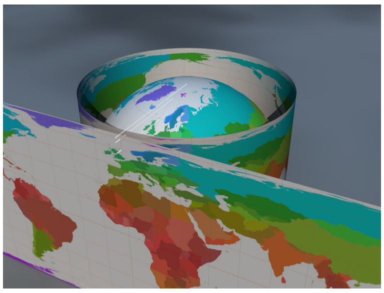
Deze projectie heeft als voordeel dat hij oppervlaktegetrouw is: de oppervlakte van elk deel van de Aarde houdt na projectie dezelfde oppervlakte. En dit betekent dat je zo een bol met straal r afbeeldt op een cilinder met straal r en hoogte $2r$, terwijl de oppervlakte van beide hetzelfde is.

a Hoe bereken je de oppervlakte van een cilinder met straal r en hoogte h?

b Leid hieruit een formule voor de oppervlakte van een bol af.

Uitleg 1

Bij het maken van een wereldkaart gaat het om een projectie van de aardbol op een plat vlak. In 1772 bedacht de wiskundige **Johann Heinrich Lambert** (1728—1777) de zogenaamde **orthografische cilinderprojectie** waarbij de aarde vanuit een punt op zijn as wordt afgebeeld op een cilinder om de evenaar. De projectielijn is loodrecht op de aardas.



Figuur 2.3

Deze projectie heeft als voordeel dat het oppervlaktegetrouw is: de oppervlakte van elk deel van de aarde houdt na projectie dezelfde oppervlakte. En dit betekent dat je zo'n bol met straal r afbeeldt op een cilinder met straal r en hoogte $2r$, terwijl de oppervlakte van beide hetzelfde is.

Nu is een cilinder met straal r en hoogte h niets anders dan een opgerolde rechthoek met lengte $2\pi r$ (de omtrek van de grondcirkel) en breedte h. Je hebt dan alleen de cilindermantel, niet de oppervlaktes van de grondcirkel en de bovencirkel. Zo'n cilindermantel heeft een oppervlakte van:
$opp(cilindermantel) = 2\pi r \cdot h$

Omdat een bol met straal r dezelfde oppervlakte heeft als een cilinder met straal r en hoogte $2r$ geldt:
$opp(bol) = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$

Opgave 1

In **Uitleg 1** staan enkele oppervlakteformules.

a Bereken exact de oppervlakte van een cilinder met een straal van 10 cm en een hoogte van 20 cm. Reken behalve de cilindermantel ook het grondvlak en het bovenvlak mee.

b Stel een formule op voor de oppervlakte van een cilinder als ook grondvlak en bovenvlak meetellen.

c In de cilinder bij a past precies een bol. Bereken de oppervlakte van die bol.

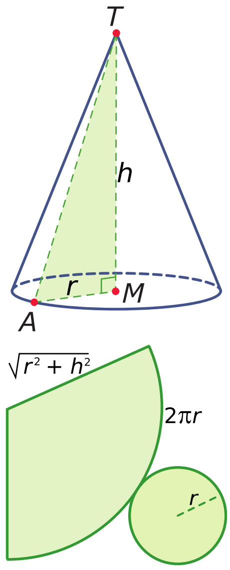
Opgave 2

Onze aarde is bij ruwe benadering een bol met een omtrek van 40000 km.
Hoe groot is de oppervlakte van de aarde? Geef je antwoord in miljoenen km^2.

Uitleg 2

Je ziet een rechte kegel met top T en als grondvlak een cirkel met straal $MA = r$. Het lijnstuk TM dat het midden van het grondvlak verbindt met de top, staat loodrecht op de grondcirkel. Dus de hoogte h van de kegel is TM.
Voor deze kegel is $r = 2$ en $h = 6$.

De uitslag van zo'n kegel bestaat uit de grondcirkel en de opengevouwen kegelmantel. Deze kegelmantel is een cirkelsector met straal $AT = \sqrt{r^2 + h^2}$ en middelpunt T.



Figuur 2.4

De omtrek van de bijbehorende cirkel is $2\pi \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$.
De omtrek van de grondcirkel van de kegel is $2\pi r$.

De kegelmantel is daarom het $\frac{2\pi r}{2\pi\sqrt{r^2+h^2}}$ deel van een cirkel met een oppervlakte van $\pi\left(\sqrt{r^2 + h^2}\right)^2$.

De oppervlakte van de kegelmantel is dus gelijk aan

$$\frac{2\pi r}{2\pi\sqrt{r^2+h^2}} \cdot \pi\left(\sqrt{r^2 + h^2}\right)^2 = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}.$$

Er geldt: $opp(kegelmantel) = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.

De oppervlakte van het grondvlak is $\pi \cdot r^2$.

De totale oppervlakte van een kegel is dan $\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2$.

Met $r = 2$ en $h = 6$ wordt de oppervlakte van deze kegel: $2\pi\sqrt{40} + 4\pi$.

Opgave 3

In **Uitleg 2** wordt een formule afgeleid voor de oppervlakte van een kegelmantel.

a Bereken in twee decimalen nauwkeurig met behulp van die formule de oppervlakte van een kegel met een straal van 5 en een hoogte van 8. Reken het grondvlak mee.

De gegeven formule kun je ook schrijven als $opp(kegelmantel) = \pi r R$, waarin $r = AM$ (de straal van de grondcirkel) en $R = AT$ (de straal van de grotere cirkel waar de kegelmantel een sector van is).

b Licht dit toe.

c Bereken de tophoek (de hoek bij top T) van deze kegel in graden.

Opgave 4

De oppervlakte van een ruimtelijke figuur (een lichaam) is gelijk aan de som van de oppervlaktes van de grensvlakken van die figuur.

a Bereken de oppervlakte van een kubus met ribben van 6 cm.

b Bereken exact de oppervlakte van een regelmatige vierzijdige piramide met ribben van 6 cm.

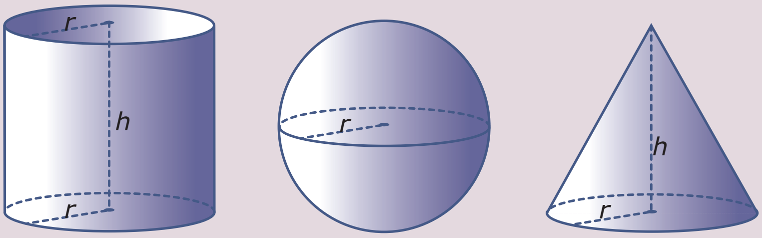
c Bereken exact de oppervlakte van een regelmatig viervlak met ribben van 6 cm.

d Bereken exact de oppervlakte van een regelmatig driezijdig prisma met ribben van 6 cm.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **oppervlakte van een lichaam** is gelijk aan de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam. Vaak bestaat zo'n uitslag uit eenvoudige vlakke figuren waarvan je de oppervlakte kunt berekenen. De oppervlakte van het lichaam is dan de som van de oppervlaktes van die vlakke figuren.



Figuur 2.5

De **oppervlakte van een cilindermantel** met straal r en hoogte h is: $2\pi \cdot r \cdot h$.

Deze formule geldt alleen voor een rechte cilinder: dit betekent dat h loodrecht op de grondcirkel en bovencirkel staat.

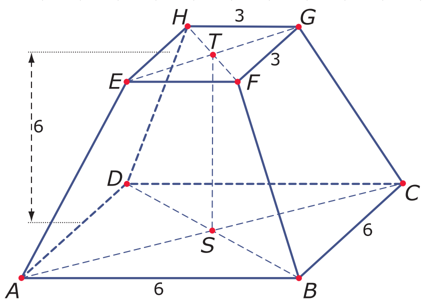
De **oppervlakte van een bol** met straal r is: $4\pi \cdot r^2$.

De **oppervlakte van een kegelmantel** met straal r en hoogte h is: $\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$.
Deze formule geldt alleen voor een rechte kegel: dit betekent dat hoogte h loodrecht op de grondcirkel staat.

Voorbeeld 1

Je ziet een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. Dit betekent dat het grondvlak een vierkant is, evenals het bovenvlak. Bovendien staat het lijnstuk ST, dat het midden van het grondvlak verbindt met het midden van het bovenvlak loodrecht op beide vlakken.
Gegeven is: $AB = 6$, $EF = 3$ en $ST = 6$

Bereken de totale oppervlakte van de afgeknotte piramide.



Figuur 2.6

Antwoord

De uitslag van zo'n afgeknotte piramide bestaat uit een vierkant van 6 bij 6 en een vierkant van 3 bij 3 en vier gelijke trapezia. De hoogte van zo'n trapezium kun je berekenen door bijvoorbeeld vanuit F een loodlijn naar het grondvlak te tekenen. Je vindt dan dat die hoogte gelijk is aan $\sqrt{6^2 + 1{,}5^2}$. De hoogte van het trapezium is dus $\sqrt{38{,}25}$ en heeft twee evenwijdige zijden van 6 en 3.

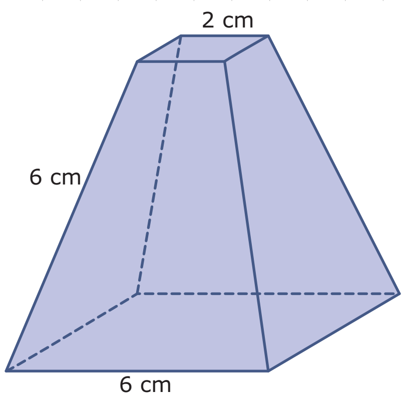
$opp(ABCD.EFGH) = 6^2 + 3^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (6 + 3) \cdot \sqrt{38{,}25} \approx 156{,}3$

Opgave 5

Leg uit waarom de hoogte van het trapezium uit **Voorbeeld 1** gelijk is aan $\sqrt{38{,}25}$.

Opgave 6

Bereken exact de oppervlakte van deze afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide.



Figuur 2.7

Voorbeeld 2

Dit is een ‘amsterdammertje’, een paaltje in Amsterdam om onder andere wildparkeren tegen te gaan. In grote lijnen is zo'n paaltje een afgeknotte rechte kegel met een hoogte van 90 cm, een grondcirkel met een straal van 10 cm en een bovencirkel met een straal van 6 cm waar bovenop een halve bol ligt. De rand aan de bovenkant en de drie kruisen worden niet meegerekend.
Ga ervan uit dat er 5 liter verf nodig is voor een oppervlakte van 40 m^2. Hoeveel liter verf is er dan nodig om alle 6500 amsterdammertjes in een bepaalde wijk te schilderen?

Figuur 2.8

Antwoord

Geschilderd worden de (afgeknotte) kegelmantel en de halve bol. De afgeknotte kegel is het verschil van een grote kegel met straal 10 en hoogte $90 + h$ en een kleinere kegel met straal 6 en hoogte h. Met verhoudingen bereken je h: $\frac{h}{90+h} = \frac{6}{10}$. Dit levert op: $h = 135$ cm.

De (afgeknotte) kegelmantel heeft een oppervlakte van
$\pi \cdot 10 \cdot \sqrt{10^2 + 225^2} - \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{6^2 + 135^2} \approx 4528{,}4$ cm^2.
De halve bol heeft een oppervlakte van $0{,}5 \cdot 4\pi \cdot 6^2 \approx 226{,}2$ cm^2.

De te schilderen oppervlakte is ongeveer
$6500 \cdot (4258{,}4 + 226{,}2) = 30904900$ cm^2.
Dat is ongeveer 3090,5 m^2 en daar is ongeveer 386,3 liter verf voor nodig.

Opgave 7

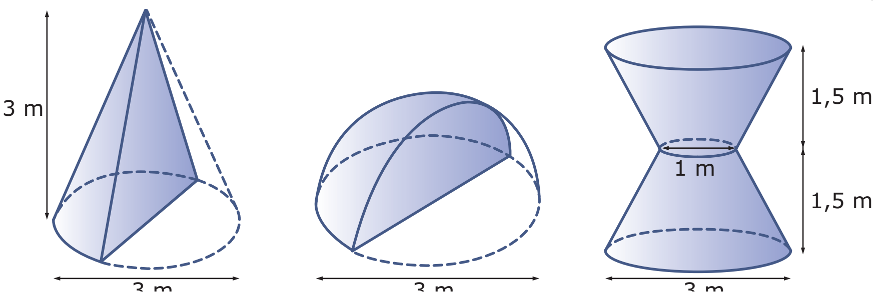
Je hebt gezien hoe je de oppervlakte van een figuur kunt berekenen die is samengesteld uit een afgeknotte kegel en een halve bol. Heel vaak is een lichaam op te vatten als een samenstelling van (delen van) andere lichamen.
Een surprise zit in een cilinder met een diameter van 10 cm en een hoogte van 20 cm met daarop een kegelvormige punt met een hoogte van 5 cm.

Bereken in cm^2 de totale buitenoppervlakte van de verpakking. Maak eventueel zelf een schets van de situatie.

Verwerken

Opgave 8

Bereken de oppervlaktes van de volgende figuren. Geef je antwoord in m^2 in twee decimalen nauwkeurig.

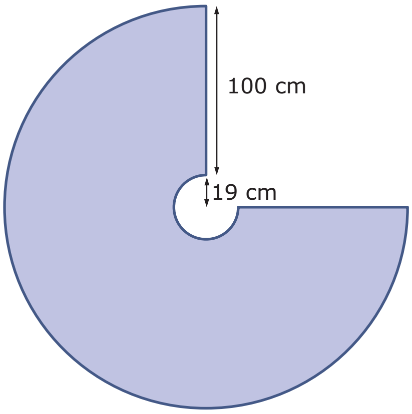


Figuur 2.9

Opgave 9

Arabische dansende derwisjen dragen vaak een zogenaamde kegelrok. Dat is een wijd uitlopende rok die, als de stof stijf zou zijn, de vorm heeft van een afgeknotte kegel. Je ziet het patroon (de uitslag) van zo'n kegelrok.

Figuur 2.10

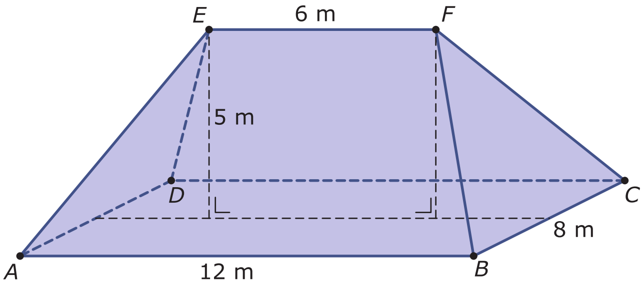


Figuur 2.11

Bereken in dm^2 de hoeveelheid stof die er voor deze rok nodig is.

Opgave 10

Je ziet een zogenaamd schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$, waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkzijdige driehoeken en twee symmetrische trapezia.



Figuur 2.12

Bereken de exacte oppervlakte van dit schilddak.

Opgave 11

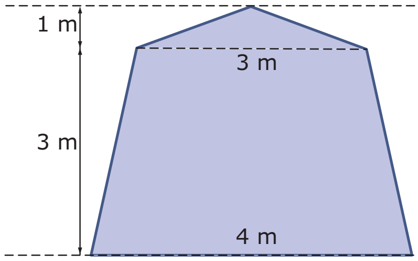
Een piramide $T.ABCDE$ heeft als grondvlak een regelmatige vijfhoek $ABCDE$. De hoogte van de piramide is TS, waarin punt S het middelpunt is van de cirkel waar de hoekpunten van het grondvlak op liggen. Alle ribben van deze piramide hebben een lengte van 4.

Bereken de oppervlakte van deze piramide in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Je ziet het zijaanzicht van een zuiver cirkelvormige tent.

Bereken de oppervlakte van deze tent, dus de hoeveelheid tentdoek die je ervoor nodig hebt, in m^2 in twee decimalen nauwkeurig.

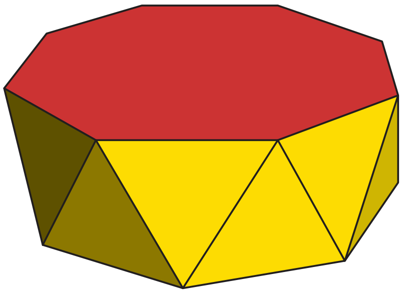


Figuur 2.13

Opgave 13

Deze figuur is een regelmatig achthoekig antiprisma. Een antiprisma onderscheidt zich van een gewoon prisma doordat het boven- en ondervlak verbonden zijn door driehoekjes die om en om $180°$ gedraaid zijn. Het boven- en ondervlak zijn daardoor ten opzichte van elkaar verschoven en gedraaid. Alle ribben van dit antiprisma zijn 4 cm.

Bereken de oppervlakte van dit antiprisma in cm^2.



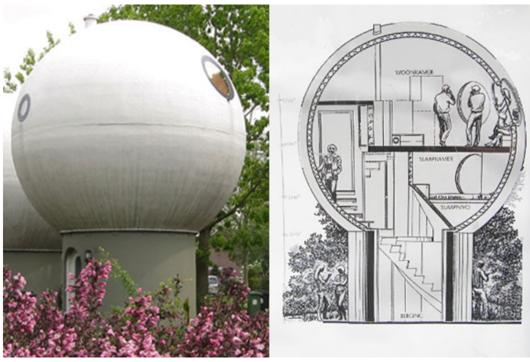
Figuur 2.14

Toepassen

De welbekende vijftig bolwoningen met hun opvallende architectuur staan in ’s-Hertogenbosch. De **bolwoning** is ontworpen door de beeldhouwer, ontwerper en architect Dries Kreijkamp geboren in 1937 te Tegelen. Ze zijn gebouwd in 1984, met het doel om de bewoners te laten verbinden met de natuur, mede door de diverse ronde ramen die in de woningen aanwezig zijn. Tevens zijn de woningen milieuvriendelijk. Door de bolvorm heeft de wind er namelijk bijna geen greep op en daarnaast zijn ze zo ontworpen dat ze energiezuinig en goedkoop zijn. Het zijn huurwoningen voor één of twee personen.

Voor het berekenen van de oppervlakte van de buitenkant van deze bolwoningen tel je de oppervlakte van een bol bij die van een cilinder op. Je ziet echter dat je dan een bolsegment (of bolkap) te veel meetelt.

De beroemde Griekse wiskundige Archimedes (287—212 v.Chr.) ontdekte dat de oppervlakte van een bol gelijk is aan de oppervlakte van diens omgeschreven cilinder. Bovendien ontdekte hij dat dit ook geldt voor een bolsegment. Dit betekent dat voor de oppervlakte van een bolsegment met hoogte h geldt $2\pi r h$, waarbij r de straal van de bol is.



Figuur 2.15

Opgave 14

Bekijk het verhaal van de bolwoningen.

a De formule die Archimedes vond voor de oppervlakte van een bolsegment met hoogte h was $opp(bolsegment) = \pi\left(a^2 + h^2\right)$. Hierbij is a de straal van het bolsegment.

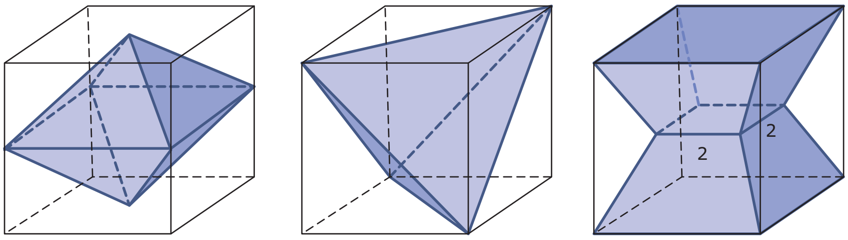
Leid deze formule zelf af.

b Welke oppervlakte hebben deze bolwoningen als de diameter van de bol 8 meter en die van de cilinder 6 meter is, terwijl de hoogte van de cilinder 3 meter is? Geef je antwoord in m^2.

Testen

Opgave 15

Bereken de oppervlakte van de volgende lichamen die precies passen in een kubus met ribben van 6 cm.



Figuur 2.16

Opgave 16

De Constanzina schemerlamp is meer bedoeld als een sfeerbrenger dan als een optimale werkplekverlichter. Dat neemt niet weg dat deze lamp het kantoor een sfeervol aanzien geeft of het nu met de witte kap is of met een mengeling van kleuren. Deze lamp heeft een kapje in de vorm van een afgeknotte kegel. De hoogte van die afgeknotte kegel is 20 cm, de bovencirkel heeft een diameter van 15 cm en de ondercirkel een diameter van 30 cm.

Hoe groot is de oppervlakte van het materiaal van het kapje? Rond af op gehele cm^2.

Figuur 2.17

Opgave 17

De Waura indianen wonen in het Amazonegebied in Brazilië. Hun dorpen bestaan uit een aantal grote huizen. Je ziet een afbeelding van zo'n huis. Je kunt het wiskundig beschrijven als een halve (liggende) cilinder waarop aan weerszijden een kwart bol zit. Neem aan dat dit huis zo'n 6 m hoog is en dat de halve cilinder een lengte heeft van 8 m.

Figuur 2.18

Bereken de oppervlakte van dit huis in m^2.

2.3 Inhoud

Inleiding

Dit is een foto van 'Le Kinémax', één van de spectaculaire gebouwen in het multimedia themapark Parc du Futuroscope bij Poitiers in Frankrijk.
De inhoud van dit gebouw is nog niet zo gemakkelijk te berekenen. Je moet daarvoor het object kunnen verdelen in herkenbare vormen zoals kubus, balk, piramide, e.d.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- formules voor de inhoud van allerlei basislichamen;
- de inhoud berekenen van enkele afgeknotte basislichamen;
- de inhoud berekenen van ruimtelijke figuren die bestaan uit een samenstelling van die (afgeknotte) basislichamen.

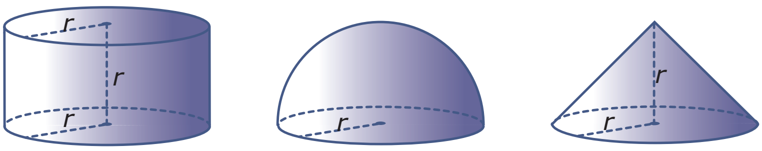
Voorkennis

- de inhoud van een balk en een rechte cilinder berekenen;
- de inhoud van een rechte piramide en een rechte kegel berekenen.

Verkennen

Opgave V1

De beroemde Griekse wiskundige **Archimedes** (287—212 v.Chr.) hield zich veel bezig met het berekenen van de inhoud van lichamen. Hij ontdekte dat de inhouden van een (rechte) cilinder, een halve bol en een (rechte) kegel met dezelfde straal en hoogte zich verhouden als $3 : 2 : 1$.



Figuur 3.2

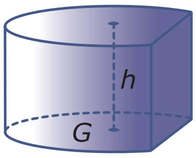
a Hoe bereken je de inhoud van een (rechte) cilinder met straal r en hoogte r?

b Welke inhoud heeft de (rechte) kegel?

c Leid hieruit een formule voor de inhoud van een bol af.

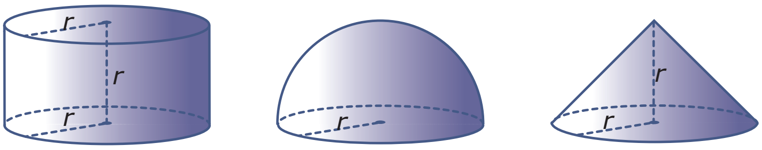
Uitleg

Je weet dat de inhoud (het volume) van alle figuren die de vorm hebben van een prisma of een cilinder met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte, gelijk is aan $G \cdot h$. Volgens het principe van Cavalieri geldt dit zelfs als het een scheef prisma of een scheve cilinder betreft, zolang h maar loodrecht op grondvlak (en bovenvlak) wordt gemeten.



Figuur 3.3

De inhoud (het volume) V van een rechte cilinder is daarom $V_{\text{cilinder}} = \pi r^2 h$.



Figuur 3.4

De beroemde Griekse wiskundige **Archimedes** (287—212 v.Chr.) hield zich veel bezig met het berekenen van de inhoud van lichamen. Hij ontdekte dat de inhouden van een (rechte) cilinder, een halve bol en een (rechte) kegel met dezelfde straal en hoogte zich verhouden als $3 : 2 : 1$.
De inhoud van deze cilinder is: $\pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3$.

De inhoud van de halve bol is daar $\frac{2}{3}$ deel van en de inhoud van de kegel is daar $\frac{1}{3}$ deel van.

Hiermee vind je voor de inhoud van een hele bol:
$V_{\text{bol}} = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Opgave 1

Je ziet in de **Uitleg** verschillende inhoudsformules voor de cilinder, bol en kegel.

a Bereken exact de inhoud van een cilinder met een straal van 10 cm en een hoogte van 20 cm.

b In de cilinder bij a past precies een bol. Bereken exact de inhoud van die bol.

Opgave 2

Onze aarde is bij ruwe benadering een bol met een omtrek van 40000 km.
Hoe groot is de inhoud van de aarde? Geef je antwoord in km^3 in de wetenschappelijke notatie met vier significante cijfers.

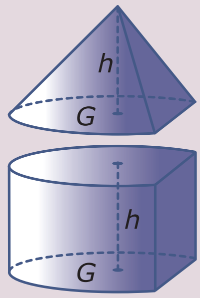
Opgave 3

Stel, je hebt een object met een vorm waarvan je de inhoud niet met behulp van formules kunt berekenen. Kun je een praktische manier bedenken om toch de inhoud van het lichaam te bepalen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je weet dat de **inhoud (het volume)** van alle figuren die de vorm hebben van een prisma of een cilinder met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte, gelijk is aan $G \cdot h$.
De **inhoud van een balk** is daarom
$V_{\text{balk}} = G \cdot h = l \cdot b \cdot h$.
De **inhoud van een rechte cilinder** is daarom
$V_{\text{cilinder}} = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$.



Figuur 3.5

Je weet dat de inhoud (het volume) van alle figuren die de vorm hebben van een piramide of een kegel met G als oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte, gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

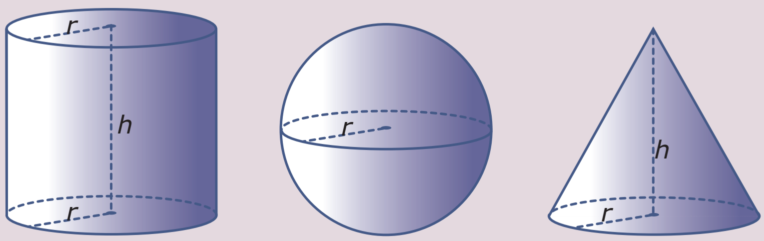
De **inhoud van een rechte piramide** is daarom

$V_{\text{piramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

En de **inhoud van een rechte kegel** is daarom

$V_{\text{kegel}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$.

Volgens het principe van Cavalieri geldt dit alles ook voor scheve prisma's, piramides, cilinders of kegels, zolang h maar loodrecht op grondvlak (en bovenvlak) staat.

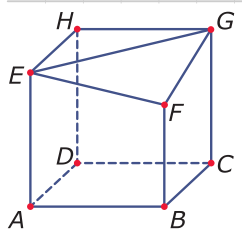


Figuur 3.6

De **inhoud van een bol** is: $V_{\text{bol}} = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Voorbeeld 1

Je ziet een afgeknotte kubus. $AB = 6$ cm en $BF = 4$ cm.
Bereken de inhoud van deze afgeknotte kubus.



Figuur 3.7

Antwoord

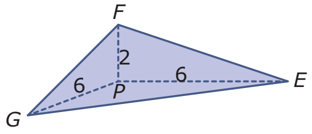
De complete kubus $ABCD.EPGH$ heeft een inhoud van $6^3 = 216$ cm^3.

Daarvan is een piramide afgesneden waarvan (bijvoorbeeld) F de top is en ΔEPG het (rechthoekige) grondvlak. Punt P is het van de kubus afgesneden achtste hoekpunt. De inhoud van deze piramide kun je berekenen met $V(F.EPG) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Met $G = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ cm^2.

En dus is de inhoud van de piramide

$V(F.EPG) = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 2 = 12$ cm^3.



Figuur 3.8

De afgeknotte kubus heeft daarom een inhoud van
$216 - 12 = 204$ cm^3.

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 1** hoe je de inhoud van een afgeknotte kubus berekent. Van kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 10 cm wordt het deel dat hoekpunt F bevat, afgezaagd. Het zaagvlak is vlak EBG.

Bereken exact de inhoud van de overblijvende afgeknotte kubus.

Opgave 5

Je kunt de inhoud van lichamen die de vorm hebben van een prisma of een cilinder berekenen, door de oppervlakte van het grondvlak met de hoogte te vermenigvuldigen. Dit principe geldt heel algemeen voor lichamen waarvan elke doorsnede evenwijdig aan het grondvlak precies hetzelfde is als dat grondvlak.

a Bereken de exacte inhoud van een regelmatig driezijdig prisma met ribben van 6 cm.

b Bereken de exacte hoeveelheid plastic (cm^3) die nodig is voor een holle cilindervormige buis met een lengte van $1{,}5$ m, een binnendiameter van 14 mm en een buitendiameter van 18 mm.

c Je ziet een houten voorwerp. De oppervlakte van het zijaanzicht is ongeveer 55 cm^2. Bereken uit hoeveel cm^3 hout 1 meter van dit voorwerp bestaat.

Figuur 3.9

Voor de inhoud van lichamen die de vorm hebben van een piramide of een kegel neem je $\frac{1}{3}$ van de oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte.

d Bereken de exacte inhoud van een regelmatige vierzijdige piramide met ribben van 6 cm.

e Bereken de exacte inhoud van een regelmatig viervlak met ribben van 6 cm. Je mag gebruiken dat de hoogte van dit regelmatige viervlak gelijk is aan $\sqrt{24}$.

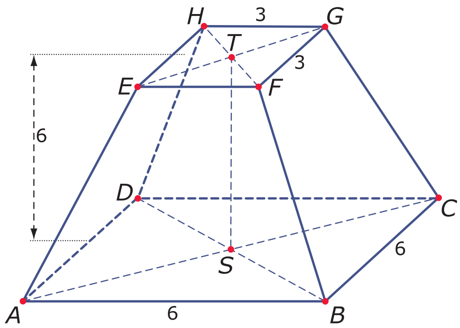
f De inhoud van dit ijshoorntje heeft een kegelvorm. De hoogte van de kegel is 10 cm, de diameter 4 cm.

Hoeveel is de inhoud exact?

Figuur 3.10

Voorbeeld 2

Je ziet een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. Dit betekent dat het grondvlak een vierkant is, evenals het bovenvlak. Bovendien staat het lijnstuk ST, dat het midden van het grondvlak verbindt met het midden van het bovenvlak loodrecht op beide vlakken.
Gegeven is: $AB = 6$, $EF = 3$ en $ST = 6$,
Bereken de inhoud van de afgeknotte piramide.



Figuur 3.11

Antwoord

De afgeknotte piramide is het verschil van een grote piramide met grondvlak 6 bij 6 en hoogte $x + 6$ en een kleinere piramide met grondvlak 3 bij 3 en hoogte van x.

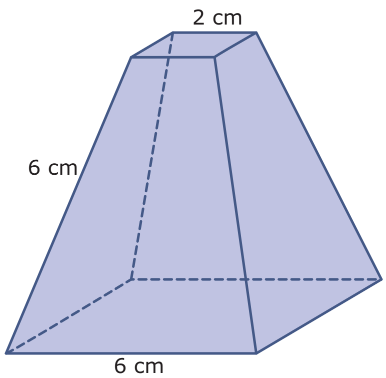
Nu is: $\frac{x}{x+6} = \frac{3}{6}$ en dus is $x = 6$.

De inhoud van de afgeknotte piramide is:

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 126.$

Opgave 6

Bereken de inhoud van deze afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide. Geef je antwoord in cm^3 in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 3.12

Voorbeeld 3

Je ziet een paaltje dat ook wel een ‘amsterdammertje’ wordt genoemd. In grote lijnen is zo'n paaltje een afgeknotte rechte kegel met een hoogte van 90 cm, een grondcirkel met een straal van 10 cm en een bovencirkel met een straal van 6 cm waar bovenop een halve bol ligt. De rand aan de bovenkant en de drie kruisen worden niet meegerekend.
Als zo'n metalen paaltje massief is, hoeveel cm^3 metaal is er dan voor nodig?

Figuur 3.13

Antwoord

De afgeknotte kegel is het verschil van een grote kegel met straal 10 en hoogte $90 + h$ en een kleinere kegel met straal 6 en hoogte h. Met verhoudingen bereken je h: $\frac{h}{90+h} = \frac{6}{10}$. Dit levert op: $h = 135$ cm

De (afgeknotte) kegelmantel heeft een inhoud van
$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 225 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 135 \approx 18472{,}6$ cm^3.

De halve bol heeft een inhoud van $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 \approx 452{,}4$ cm^3.

De totale inhoud is ongeveer $18473 + 452 = 18925$ cm^3.

Opgave 7

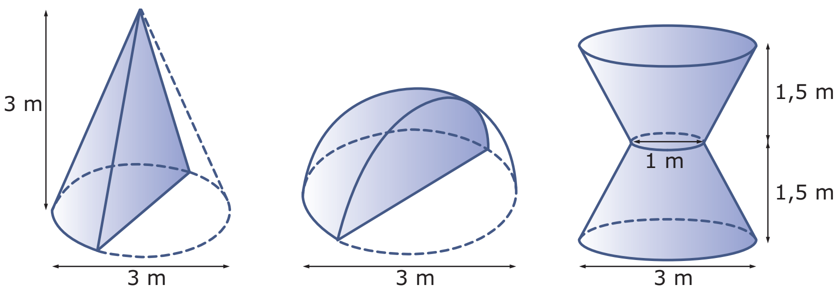
Je hebt gezien hoe je de inhoud van het amsterdammertje uit het voorbeeld berekent. Stel je voor dat het amsterdammertje van binnen hol is en dat het metaal overal een dikte heeft van 2 mm.

Hoeveel metaal is er dan voor nodig? Geef je antwoord in gehele cm^3.

Verwerken

Opgave 8

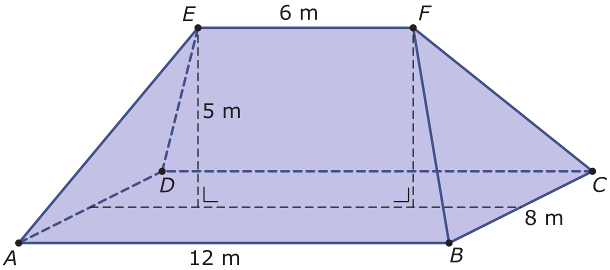
Bereken de exacte inhoud van de volgende figuren.



Figuur 3.14

Opgave 9

Je ziet een zogenaamd schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$, waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkzijdige driehoeken en twee symmetrische trapezia.



Figuur 3.15

Bereken het volume onder dit schilddak.

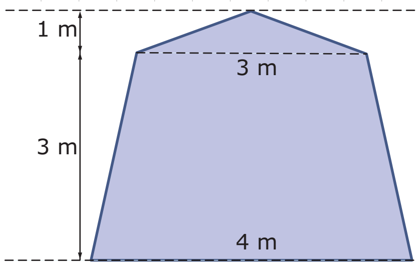
Opgave 10

Een piramide $T.ABCDE$ heeft als grondvlak een regelmatige vijfhoek $ABCDE$. De hoogte van de piramide is TS, waarin punt S het middelpunt is van de cirkel waar de hoekpunten van het grondvlak op liggen. Alle ribben van deze piramide hebben een lengte van 4.

Bereken de inhoud van deze piramide in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 11

Je ziet het zijaanzicht van een zuiver cirkelvormige tent.
Bereken de exacte inhoud van deze tent.



Figuur 3.16

Opgave 12

Je ziet een L-vormige cilindrische holle buis van staal. Het vierkante grondplaatje van 150 mm bij 150 mm wordt aan de muur bevestigd. De buis steekt dan 450 mm naar voren en 250 mm omhoog. De binnendiameter van de buis is 48 mm en het staal is 1 mm dik. Staal weegt $7{,}8$ g/cm^3.

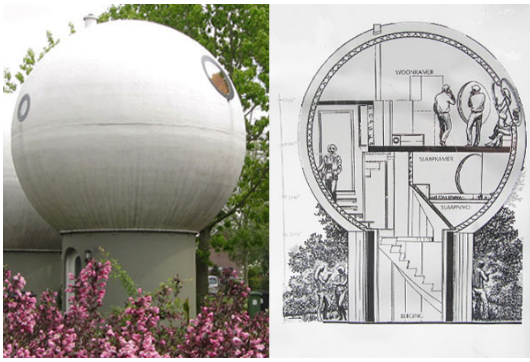
Hoe zwaar is deze buis inclusief het grondplaatje? Rond af op een geheel aantal grammen.


Figuur 3.17

Toepassen

Je ziet hier weer de zogenaamde **bolwoningen** met daarbij een afbeelding van de doorsnede van zo'n woning.

Voor het berekenen van de inhoud van de bolwoning moet je rekening houden met de inhoud van een bolsegment (of bolkap). De inhoud van een bolsegment met hoogte h, waarbij de bol straal r heeft, wordt gegeven door $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.



Figuur 3.18

Opgave 13

Bekijk het verhaal van de bolwoningen.

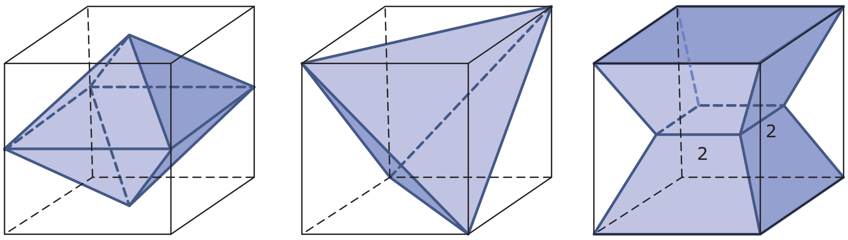
a Een equivalente (gelijke) formule voor de inhoud van een bolsegment is $\frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$. Hierbij is a de straal van het bolsegment. Vind een geschikte uitdrukking voor a en leid deze formule uit de eerder gegeven formule af.

b Welke inhoud hebben deze bolwoningen als de diameter van de bol zelf 8 meter en die van de cilinder 6 meter is, terwijl de hoogte van de cilinder 3 meter is? Geef je antwoord exact.

Testen

Opgave 14

Bereken de inhoud van de volgende lichamen die precies passen in een kubus met ribben van 6 cm.



Figuur 3.19

Opgave 15

De binnenkant van dit drinkglas heeft de vorm van een afgeknotte kegel. De diameter van de bovencirkel van deze kegel is 100 mm, die van de grondcirkel is 80 mm. De hoogte deze afgeknotte kegel is 200 mm.

Hoeveel bedraagt de inhoud van dit glas in mm^3 nauwkeurig?

Figuur 3.20

Opgave 16

Je ziet een huis van De Waura indianen. Zo'n huis kun je wiskundig beschrijven als een halve (liggende) cilinder waarop aan weerszijden een kwart bol zit. Neem aan dat dit huis zo'n 6 m hoog is en dat de halve cilinder een lengte heeft van 8 m.

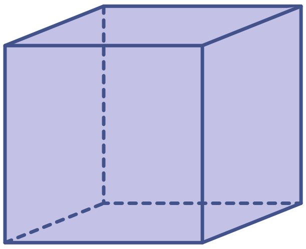
Figuur 3.21

Bereken de inhoud van dit huis in m^3.

2.4 Schaalvergroting

Inleiding

Stel je maakt een vergroting van deze kubus. Alle ribben worden 3 keer zo lang. Hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte? Hoeveel keer zo groot wordt de inhoud?



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de lengtevergrotingsfactor;
- werken met de oppervlaktevergrotingsfactor;
- werken met de inhoudsvergrotingsfactor.

Voorkennis

- de oppervlakte en de inhoud van vlakke en ruimtelijke figuren berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Een beroemd probleem uit de Oudheid was dat van de ‘verdubbeling van de kubus’. Een kubus met ribben van 1 m lengte heeft een inhoud van 1 m^3. Hoe groot moet je een kubus maken (welke lengte krijgen de ribben) om hem een inhoud van 2 m^3 te geven?

a Kun je dit probleem oplossen?

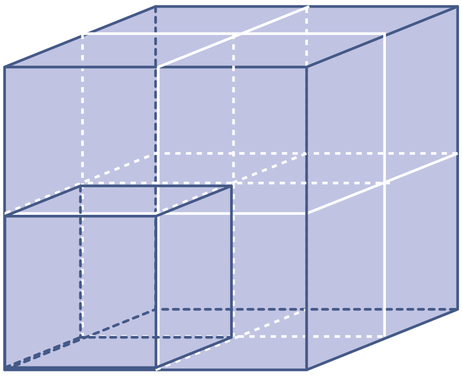
b Wat zegt dit over oppervlaktevergroting en lengtevergroting?

Uitleg

Je ziet wat er gebeurt als je van een kubus alle ribben 2 keer zo groot maakt:

- Alle lengtes worden 2 keer zo groot.
- Alle oppervlaktes worden $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ keer zo groot.
- De inhoud wordt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ keer zo groot.

Omdat een inhoud niet meer is dan de som van een (niet altijd geheel) aantal eenheidskubussen, geldt dit voor elk lichaam. Bovendien kun je het veralgemeniseren tot een lengtevermenigvuldiging met factor k. Als alle lengtes k keer zo groot worden, worden alle oppervlaktes k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot.



Figuur 4.2

Opgave 1

Van een bepaald lichaam zijn alle afmetingen bekend. Je maakt precies zo'n lichaam, maar met alle afmetingen 2 keer zo groot.

a Hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte van het lichaam?

b Hoeveel keer zo groot wordt de inhoud van het lichaam?

Opgave 2

Van een bepaald lichaam is de inhoud bekend. Je maakt precies zo'n lichaam, maar met een twee keer zo grote inhoud.

a Hoeveel keer zo groot worden de afmetingen van het lichaam?

b Hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte van het lichaam?

Opgave 3

Van een bepaald lichaam is de oppervlakte bekend. Je maakt precies zo'n lichaam, maar met een twee keer zo grote oppervlakte.

a Hoeveel keer zo groot worden de afmetingen van het lichaam?

b Hoeveel keer zo groot wordt de inhoud van het lichaam?

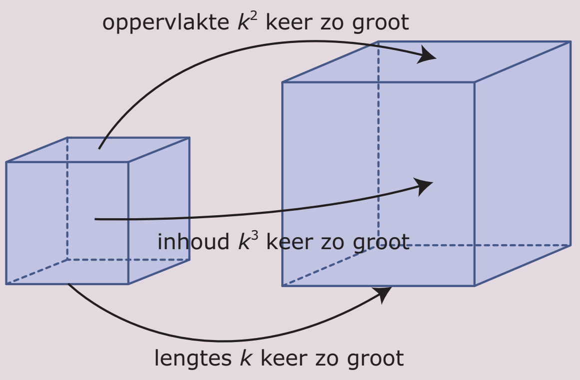
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Wanneer van een ruimtelijke figuur alle lengtes met eenzelfde factor k worden vermenigvuldigd, dan geldt:

- de **lengtevergrotingsfactor** is k.
- de **oppervlaktevergrotingsfactor** is k^2.
- de **inhoudsvergrotingsfactor** is k^3.

Bij twee gelijkvormige figuren kan de ene figuur uit de andere ontstaan door zo'n vermenigvuldiging met een vaste vergrotingsfactor (of verkleiningsfactor).



Figuur 4.3

Voorbeeld 1

Bij een schaalmodel van een voorwerp worden alle lengtes met een vaste vergrotingsfactor verkleind. Dit model van een Smart ForTwo heeft een schaal van $1:18$.
De afmetingen van een echte Smart ForTwo van deze versie zijn: lengte 250 cm, breedte 152 cm en hoogte 155 cm. De cilinderinhoud van de motor is 698 cm^3 en in de tank gaat 33 liter benzine. De totale glasoppervlakte is ongeveer $3{,}2$ m^2. Bereken de afmetingen van het schaalmodel, het glasoppervlak van het schaalmodel en hoeveel liter benzine verhoudingsgewijs in de tank zou passen.

Figuur 4.4

Antwoord

Schaal 1 : 18 betekent dat de lengtevergrotingsfactor van de werkelijke auto naar schaalmodel $\frac{1}{18}$ is. Dus de lengte van het schaalmodel is $\frac{1}{18} \cdot 250 \approx 13{,}9$ cm, de breedte $\frac{1}{18} \cdot 152 \approx 8{,}4$ cm en de hoogte $\frac{1}{18} \cdot 155 \approx 8{,}6$ cm.

De oppervlaktevergrotingsfactor is $\left(\frac{1}{18}\right)^2$, dus de glasoppervlakte van het schaalmodel is $\left(\frac{1}{18}\right)^2 \cdot 3{,}2 \approx 0{,}00988$ m^2. En dit is ongeveer 98,8 cm^2.

De inhoudsvergrotingsfactor is $\left(\frac{1}{18}\right)^3$, dus de cilinderinhoud van het schaalmodel is $\left(\frac{1}{18}\right)^3 \cdot 698 \approx 0{,}12$ cm^3.

In de tank van het schaalmodel gaat $\left(\frac{1}{18}\right)^3 \cdot 33 \approx 0{,}0057$ liter en dat is ongeveer 5,7 cm^3.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je dat het schaalmodel van de Smart ForTwo een schaal heeft van 1 : 18.

a Hoeveel bedraagt de vergrotingsfactor van het schaalmodel ten opzichte van de werkelijke auto?

b Het stuur van een Smart is cirkelvormig met een diameter van 40 cm. Hoe groot is de diameter van het stuurwiel van het schaalmodel? Geef je antwoord in centimeters.

c Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de carrosserie van de auto (romp zonder wielen) ten opzichte van het schaalmodel?

d Als de inhoud van het schaalmodel ongeveer 0,35 liter is, hoeveel is dan de inhoud van een Smart ForTwo?

Opgave 5

Een voetbal heeft een diameter van 22 cm en een tennisbal van 6,5 cm.

a Hoe groot is de exacte lengtevergrotingsfactor van de voetbal ten opzichte van de tennisbal? Rond af op twee decimalen.

b Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de voetbal? Rond af op twee decimalen.

c Hoeveel keer zo groot is de inhoud van de voetbal? Rond af op twee decimalen.

Voorbeeld 2

Je hebt twee gelijkvormige cilindrische maatbekers I en II. Maatbeker I heeft een inhoud van 300 mL en maatbeker II heeft een inhoud van 500 mL.
Hoe verhouden zich de hoogtes en de diameters van beide maatbekers?

Antwoord

Beide maatbekers zijn gelijkvormig, maatbeker II heeft een inhoud die $\frac{500}{300} = \frac{5}{3}$ keer zo groot is als die van maatbeker I. De inhoudsvergrotingsfactor is $\frac{5}{3}$.

Als k de lengtevergrotingsfactor is, dan moet gelden dat $k^3 = \frac{5}{3}$.

Dit betekent, dat $k = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} \approx 1{,}186$.

De diameter en de hoogte van maatbeker II zijn dus ongeveer $1{,}186$ keer zo groot als die van maatbeker I.

Opgave 6

Je ziet een aantal wijnflessen. De Bouteille is een normale wijnfles van $0{,}75$ liter. Neem aan dat al deze flessen gelijkvormig zijn.

Figuur 4.5

a Hoeveel keer zo hoog is een Magnum in vergelijking met een Fillette? Geef de factor in één decimaal nauwkeurig.

b Voor een Magnum wordt even dik glas gebruikt als voor een Bouteille. Hoeveel keer zo veel glas is er voor nodig? Geef de factor in één decimaal nauwkeurig.

c Een Bouteille heeft een hoogte van 36 cm. Hoe hoog is een Melchior? Geef je antwoord in centimeters.

Opgave 7

Dit glas heeft de vorm van een omgekeerde kegel op een voet. De hoogte van deze kegel is (gerekend aan de binnenkant van het glas) 10 cm.

Hoe hoog staat de vloeistofspiegel onder de bovenrand als het glas half vol is? Geef je antwoord in centimeters.

Figuur 4.6

Verwerken

Opgave 8

Een kunstenaar maakt van een groot bronzen beeld eerst een model op schaal $1 : 20$. Het schaalmodel heeft een oppervlakte van 1400 cm^2 en een inhoud van 3000 cm^3.

Bereken de oppervlakte en de inhoud van het bronzen beeld.

Opgave 9

Je kunt een bepaalde soort verf kopen in blikken van 1 liter en in blikken van 5 liter. Deze blikken zijn gelijkvormig.

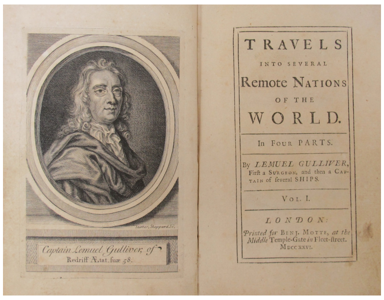
a Hoeveel keer zo hoog is het 5 liter blik vergeleken met het 1 liter blik? Rond af op twee decimalen.

b Als beide blikken worden gemaakt uit een even dikke metaalplaat, hoeveel keer zo veel metaal is er dan voor het 5 liter blik nodig? Rond af op twee decimalen.

c En hoe zit dat als het metaal ook in dezelfde verhouding dikker wordt?

Opgave 10

Jonathan Swift bedacht in zijn boek ‘Gulliver's travels’ het volk uit Lilliput. De bewoners van Lilliput zijn verkleiningen van echte mensen met een factor 10. Ga eens uit van een Lilliputter die een perfecte verkleining is van jouzelf.



Figuur 4.7

a Hoeveel weegt die Lilliputter ten opzichte van jou?

b Hoeveel keer zo weinig huidoppervlakte heeft die Lilliputter in vergelijking met jijzelf?

c De voedselbehoefte van zoogdieren is ongeveer recht evenredig met de huidoppervlakte omdat dit vooral nodig is om de lichaamstemperatuur op peil te houden en het temperatuurverlies vooral afhangt van de huidoppervlakte. Schat hoeveel gram voedsel jij per dag zelf nodig hebt en bereken hoeveel dat voor de Lilliputter zou moeten zijn.

d Hoeveel procent van je eigen lichaamsgewicht moet jij dagelijks eten? En de Lilliputter? In deze opgave wordt uitgegaan van een lichaamsgewicht van 80 kg.

e Waarom geldt voor zoogdieren dat de benodigde hoeveelheid voedsel recht evenredig is met het kwadraat van de lengte?

f Leg uit dat voor zoogdieren de benodigde hoeveelheid voedsel per kg lichaamsgewicht recht evenredig is met $l^{\frac{2}{3}}$, waarin l de lichaamslengte is.

Opgave 11

In een kubusvormige bak $ABCD.EFGH$ met ribben van 6 cm staat een massieve kegel op het grondvlak $ABCD$. Deze kegel raakt alle ribben van het grondvlak en de top T zit recht boven het midden van het grondvlak. De bak is van boven open en de kegel steekt zo ver boven de kubus uit, dat nog $\frac{3}{4}$ deel zich binnen de kubus bevindt.

Hoe hoog is deze kegel? Geef je antwoord in centimeters.

Opgave 12

Een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ heeft een grondvlak van 6 bij 6 en een hoogte van 8. Door vlak $EFGH$ dat evenwijdig aan het grondvlak van de piramide loopt, wordt hij verdeeld in twee delen met dezelfde inhoud.

Wat is de hoogte van de afgeknotte piramide $ABCD.EFGH$? Rond af op twee decimalen.

Toepassen

In de **modelbouw** willen mensen het liefst dat de eigenschappen van bijvoorbeeld de voertuigen en gebouwen op werkelijke grootte in hun modellen behouden blijven. Dit geldt niet alleen voor hobbyisten, maar ook bijvoorbeeld voor ontwerpers van vliegtuigen die de aerodynamische eigenschappen van hun ontwerp willen uittesten op een model.

Figuur 4.8

Opgave 13

In de luchtvaart wordt de vorm van de vleugels in een getal uitgedrukt met het begrip slankheid. De formule voor slankheid is $\lambda = \frac{b^2}{A}$. Hierbij is b de spanwijdte en A de oppervlakte van de vleugels. Ga er voor het gemak van uit uit dat de vleugels rechthoekig zijn.

a Een modelvliegtuig heeft een vleugeloppervlak dat 900 keer zo klein is dan die van het werkelijke vliegtuig. Wat gebeurt er met de slankheid?

Een modeltrein weegt $1{,}5$ kg. Het is gemaakt van hetzelfde materiaal als de werkelijke trein. De werkelijke trein weegt 768 ton.

De snelheid van de modeltrein moet de werkelijkheid zo goed mogelijk nabootsen. De werkelijke trein heeft een topsnelheid van 100 km/h.

b Hoe groot moet de topsnelheid van de modeltrein zijn?

Een raket bestaat grofweg uit een cilinder met een kegel erop. Een amateur-raketwetenschapper heeft een modelraket van 125 kg gebouwd die, wanneer afgevuurd, 250 m hoog in de lucht komt. Hij heeft berekend dat een raket met de verhoudingen van zijn model een hoogte h (m) behaalt die evenredig is met het verschil van de massa van de cilinder en de massa van de kegel. Dus $h = c \cdot (m_1 - m_2)$, waarbij c een constante is, m_1 de massa van de cilinder en m_2 de massa van de kegel.

c Stel dat de kegel en de cilinder van een raket op werkelijke grootte van precies dezelfde materialen gemaakt worden als het model. Je wilt dat een raket 100 km de lucht in gaat. Hoe zwaar moet de werkelijke raket worden?

Testen

Opgave 14

Baboesjka's zijn poppetjes die in elkaar passen. Je ziet hier een set van vijf baboesjka's, nummer ze van klein naar groot I, II, III, IV en V. Ga er van uit de vier kleinste baboesjka's gelijkvormig zijn.

Figuur 4.9

a Waaraan zie je dat de grootste baboesjka (nr. V) niet gelijkvormig is met de kleinste (nr. I)?

b Baboesjka nr. III is precies twee keer zo hoog als nr. I. Hoeveel keer zo groot is het volume van nr. III?

c Baboesjka nr. IV heeft een twee keer zo grote inhoud als baboesjka nr. III. Hoeveel keer zo hoog is baboesjka nr. IV?

Opgave 15

De spoorlijn van Arnhem naar Leeuwarden was in september 1868 geheel klaar. De lengte van deze spoorlijn is 166 km. Op een kaart is deze spoorlijn $8{,}3$ cm lang.

Hoeveel bedraagt de schaal van die kaart?

Opgave 16

Een ringslang met een lengte van 1 m heeft een gewicht van 240 gram en een huidoppervlakte van 483 cm^2. Een boa constrictor is een slang die veel groter is. Een bepaalde boa weegt $51{,}84$ kg. Beide soorten slangen hebben dezelfde verhoudingen.

Hoe groot is de huidoppervlakte van deze boa constrictor?

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Oppervlakte en inhoud**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

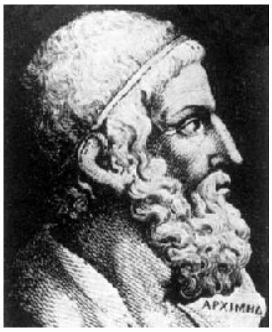
- oppervlakte van een vlakke figuur — oppervlakteformules van rechthoek, driehoek, parallellogram, trapezium, cirkel
- oppervlakte van een lichaam — oppervlakteformule van een bol
- inhoud van een lichaam — inhoudsformules van prisma, cilinder, piramide, kegel, bol
- schaalvergroting — lengte-, oppervlakte- en inhoudsvergrotingsfactor

Activiteitenlijst

- de oppervlakte van de meeste vlakke figuren berekenen m.b.v. de oppervlakteformules
- de oppervlakte van veel lichamen berekenen
- de inhoud van veel lichamen berekenen
- verband tussen lengte-, oppervlakte- en inhoudsvergrotingsfactor toepassen

Achtergronden

Al in de vroege Oudheid hield men zich bezig met het berekenen van oppervlakte en inhoud. Veel berekeningsmethoden waren al aan de Babyloniërs en de Oude Egyptenaren bekend en zijn ook op kleitabletten en in hiëroglyfen beschreven. Een belangrijk probleem was de **kwadratuur van de cirkel**: de vraag of het mogelijk is om een vierkant te construeren met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel.
Als dit mogelijk zou zijn, was ook de oppervlakte van de cirkel als een exacte breuk te schrijven. Benaderingsmethoden voor die oppervlakte kende men al wel, een heel bekende is de **uitputtingsmethode van Eudoxus**.



Figuur 5.1

De afgebeelde Griekse wetenschapper **Archimedes (287—212 v.Chr.)** hield zich veel met berekening van oppervlakte en inhoud bezig. Bijvoorbeeld in zijn boek: 'Over de bol en de cilinder.'.
In het eerste gedeelte laat Archimedes zien dat de oppervlakte van een bol vier keer de omtrek van een grootcirkel op die bol is, bepaalt hij de oppervlakte van een bolsegment en laat hij zien dat de inhoud van een bol $\frac{2}{3}$ is van de inhoud van de omhullende cilinder.
In het tweede gedeelte wordt getoond hoe een bol door een plat vlak in twee delen met een vooraf gegeven verhouding kan worden verdeeld. Bij deze berekeningen gebruikte Archimedes de uitputtingsmethode van Eudoxus.

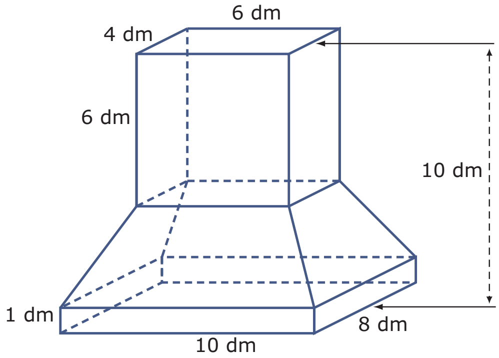
Testen

Opgave 1

Je ziet een stalen afzuigkap. Het bovenste deel is een balk, het onderste gedeelte ook. De vier schuine vlakken hebben allemaal de vorm van een symmetrisch trapezium.

a Bereken exact de totale oppervlakte van deze afzuigkap.

b Bereken de inhoud van deze afzuigkap. Merk op dat het middenstuk geen afgeknotte piramide is.



Figuur 5.2

Opgave 2

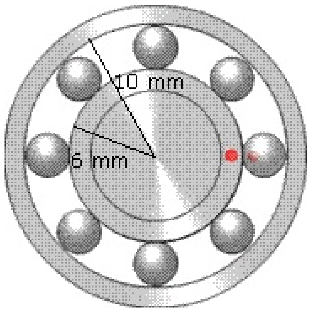
Een regelmatige vierzijdige piramide van hout wordt evenwijdig aan het grondvlak doorgezaagd. De oorspronkelijke hoogte van de piramide was 12 cm, het afgezaagde topje (ook een piramide) heeft een hoogte van 8 cm. Je hebt nu twee nieuwe ruimtelijke objecten: het afgezaagde topje en de onderkant (een afgeknotte piramide).

Hoe verhouden zich hun gewichten?

Opgave 3

Je ziet een doorsnede van een kogellager. In je fiets zitten om de as van elk wiel dergelijke kogellagers om ervoor te zorgen dat de draaibeweging van elk wiel met weinig wrijving kan worden uitgevoerd. De kogeltjes van dit lager zijn zuivere bollen en hebben een diameter van 4 mm. De kogeltjes zitten in een cilindervormige ring met een buitenstraal van 10 mm en een binnenstraal van 6 mm. De hoogte van die ring is gelijk aan de diameter van elk kogeltje. De ruimte tussen de kogeltjes is opgevuld met vet.

Hoeveel procent van de inhoud van de ring waarbinnen de kogeltjes zitten, bestaat uit vet? Geef een exact antwoord.



Figuur 5.3

Opgave 4

Een plastic koffiebekertje heeft (ongeveer) de vorm van een afgeknotte kegel. Van een bepaald koffiebekertje is de diameter van de bodem 46 mm, die van de bovencirkel 64 mm en de hoogte 90 mm.

a Bereken de inhoud van dit koffiebekertje in cL.

b Bereken de oppervlakte aan plastic in mm^2.

Een fabrikant heeft nog een hoeveelheid aan plastic waarmee 1000 van deze koffiebekertjes gemaakt kunnen worden. De klant wil alleen grotere koffiebekers hebben, waar twee keer zo veel koffie in kan. Zo'n grote koffiebeker moet een vergroting zijn van het kleinere koffiebekertje, alleen de dikte van het plastic blijft hetzelfde.

c Hoeveel van dit soort grote koffiebekers kan de fabrikant maken?

Opgave 5

In een cilindervormige koker passen precies drie tennisballen boven elkaar.
Hoeveel procent van de inhoud van de koker bestaat uit lucht (de lucht in de tennisballen niet meegerekend)?

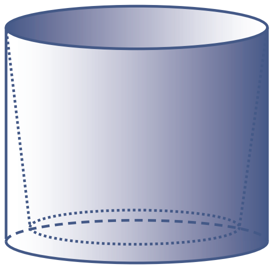
Figuur 5.4

Opgave 6

Een warenhuis heeft een nieuwe plastic vaas op de markt gebracht. Je ziet een afbeelding. Hij bestaat uit een massieve cilinder met een diameter van 40 cm en een hoogte van 41 cm waaruit een afgeknotte kegel is weggeboord. De bodem van deze afgeknotte kegel is 1 cm dik en de diameter van de grondcirkel van de afgeknotte kegel is 30 cm. De vaas is behoorlijk zwaar hoewel de soortelijke massa van het plastic maar $0{,}5$ gram/cm^3 is.

a Bereken de hoeveelheid plastic van de vaas in cm^3.

b Bereken het gewicht van de vaas in grammen.



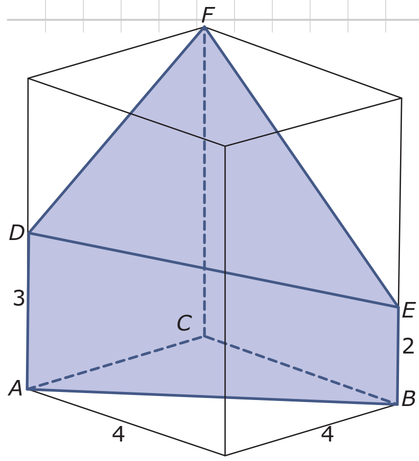
Figuur 5.5

Opgave 7

Het lichaam $ABC.DEF$ past in een balk van 4 bij 4 bij 6 dm. Punt D ligt op 3 dm hoogte en punt E op 2 dm hoogte.

a Bereken exact de inhoud van het lichaam $ABC.DEF$.

b Teken een uitslag van het lichaam $ABC.DEF$.



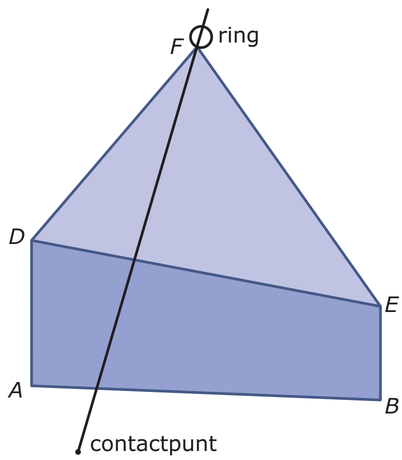
Figuur 5.6

In het punt F bevindt zich een draaibare ring. Door deze ring wordt een stang gestoken. Deze stang rust op ribbe DE en wordt doorgeschoven totdat het uiteinde de grond raakt. Bij verschillende standen van de stang horen verschillende contactpunten met de grond.

c Teken in de uitslag het lijnstuk dat wordt gevormd door alle mogelijke contactpunten.

d Punt P is het contactpunt dat het dichtst bij F ligt. Onderzoek door berekening of een stang met een lengte van 75 cm lang genoeg is om F en P te verbinden.

(naar: examen havo wiskunde B in 1990, tweede tijdvak)



Figuur 5.7

Toepassen

Opgave 8: De Meeh-coëfficiënt

De Duitse bioloog Carl Meeh legde een verband tussen het lichaamsgewicht en de huidoppervlakte bij dieren. Meeh kwam voor het verband tussen lichaamsgewicht G (in kg) en de huidoppervlakte H (in dm^2) van dieren van een bepaalde soort tot een formule van de vorm:

$$H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$$

De constante c heet de Meeh-coëfficiënt. Die Meeh-coëfficiënt verschilt per diersoort. In de tabel zie je een aantal van die Meeh-coëfficiënten.

Meeh-coëfficiënten	
egel	7,5
schaap	8,4
muis	9,0
varken	9,0
koe	9,0
rat	9,1
marmot	9,3
konijn	9,8
vis	10,0
kat	10,0
paard	10,0
mens	11,2
slang	12,5
vleermuis	57,5

Tabel 5.1

Je kunt zelf vergelijkbare formules opstellen voor de buitenoppervlakte en het gewicht van een massieve kubus en een bol...
Neem bijvoorbeeld een massieve kubus, een massieve bol en een massieve cilinder. Alle drie zijn ze gemaakt van materiaal dat $1{,}5$ gram/cm^3 weegt. Het gewicht noem je G en de buitenoppervlakte H.

a Bereken G en H van een kubus met ribben van r cm.
Stel een formule op voor H uitgedrukt in G.

b Bereken G en H van een bol met een straal van r cm.
Stel een formule op voor H uitgedrukt in G.

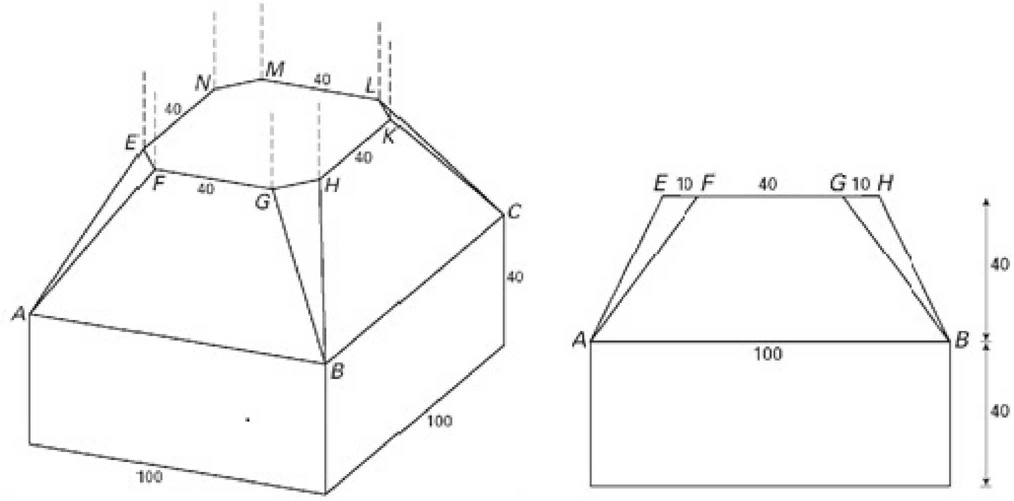
c Bereken G en H van een cilinder met een straal van r cm en een hoogte van r cm.
Stel een formule op voor H uitgedrukt in G.

d Welke Meeh-coëfficiënten hebben deze kubus, deze bol en deze cilinder?

Examen

Opgave 9: Voetstuk

Een pijler onder een brug rust op een betonnen voetstuk. Het voetstuk staat op de grond en bestaat uit twee delen. Het onderste deel heeft de vorm van een balk, het bovenste deel $ABCD.EFGHKLMN$ zorgt voor de overgang naar de pijler die achtzijdig is. Zie de linker figuur. De rechter figuur is een vooraanzicht van het voetstuk. In beide figuren zijn de afmetingen gegeven in centimeters.



Figuur 5.8

a Met behulp van dit vooraanzicht kan de hoek berekend worden die het schuine vlak $BCKH$ met het vlak $ABCD$ maakt. Bereken die hoek. Rond je antwoord af op gehele graden.

b Teken een bovenaanzicht van dit voetstuk op schaal $1 : 10$. Zet de letters erbij.

Er wordt een lint evenwijdig aan vlak $ABCD$ om het voetstuk gespannen. Het lint is 500 cm lang. Als het lint om het balkgedeelte wordt gespannen, is er 100 cm over. Gaat het lint door de punten E, F, G, H, K, L, M en N, dan is er ongeveer 283 cm over.

c Toon met een berekening aan dat er dan inderdaad ongeveer 283 cm over is.

d Het lint wordt nu op een hoogte van 50 cm (gerekend vanaf de grond) om het voetstuk gespannen. Bereken hoeveel cm van het lint op deze hoogte over is. Rond je antwoord af op een geheel getal.

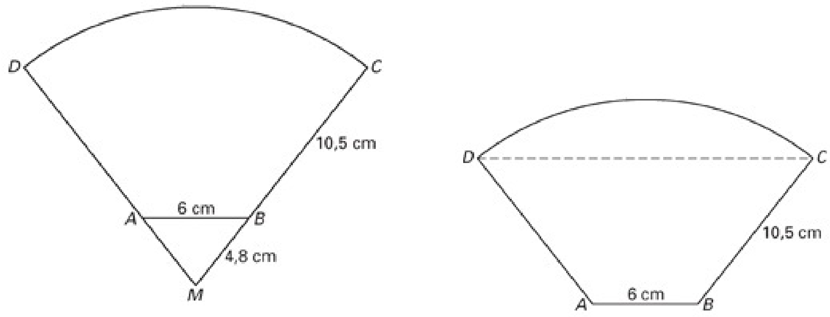
Het gedeelte van het voetstuk tussen de vlakken $ABCD$ en $EFGHKLMN$ wordt geschilderd: de vier vierhoekige zijvlakken worden rood en de vier driehoekige zijvlakken worden zwart. Om te weten hoeveel verf nodig is, moet men de oppervlakte weten.

e Bereken de totale oppervlakte van de delen die rood geschilderd worden. Rond je antwoord af op gehele cm^2.

(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2003, opgave 1)

Opgave 10: Koffiefilter en koffiefilterhouder

In platgedrukte toestand (in de verpakking) heeft een filterzakje een vorm die ontstaat door uit een cirkelsector DMC de gelijkbenige driehoek AMB weg te laten (bekijk de figuren hieronder). We gaan uit van de volgende afmetingen: $AB = 6$ cm, $MB = 4{,}8$ cm en $BC = 10{,}5$ cm. Plakrandjes laten we buiten beschouwing.



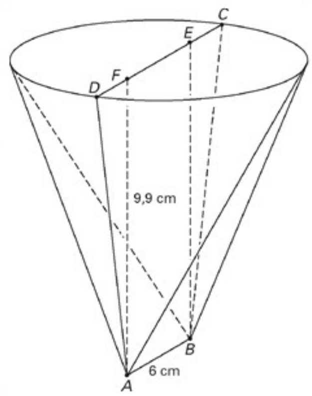
Figuur 5.9

a $\angle CMD$ is, afgerond op een geheel aantal graden, gelijk aan $77°$. Toon dat aan.

b Een koffiefilter (zie figuur) wordt opengeknipt langs de zijden CB en BA en daarna opengevouwen om de zijde AD. Zo ontstaat er een uitslag van het koffiefilter. Teken deze uitslag op schaal $1 : 3$.

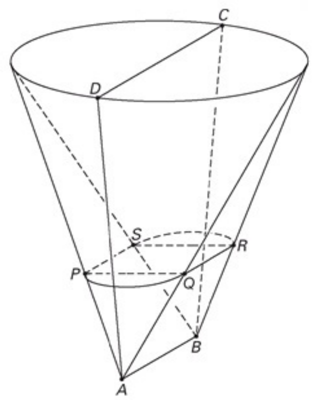
In de figuur hiernaast is een model van een koffiefilterhouder getekend. De hoogte AF is 9,9 cm. De onderkant is het lijnstuk AB met een lengte van 6 cm. De bovenrand van de houder heeft de vorm van een cirkel.
Een filter wordt opengevouwen in de koffiefilterhouder geplaatst. We nemen aan dat daarbij de bovenste rand van het filter precies samenvalt met de bovenste rand van de filterhouder. De afstand tussen de punten C en D van het filter wordt bij het openvouwen natuurlijk kleiner.

c Bereken de middellijn CD van de filterhouder. Geef je antwoord in centimeters, afgerond op één decimaal.



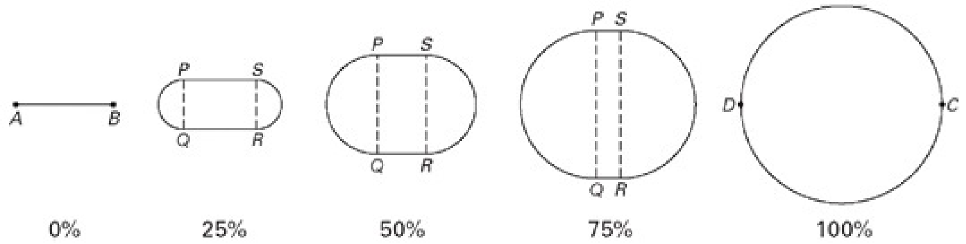
Figuur 5.10

In de figuur hiernaast is op een bepaalde hoogte de dwarsdoorsnede van de koffiefilterhouder getekend. Deze dwarsdoorsnede is een figuur die bestaat uit een rechthoek $PQRS$ en twee halve cirkels met middellijnen PQ en RS. We nemen aan dat CD exact gelijk is aan 13 cm.



Figuur 5.11

Hieronder zijn (op schaal) parallelle doorsneden getekend van de houder op 0%, 25%, 50%, 75% en 100% van de hoogte.



Figuur 5.12

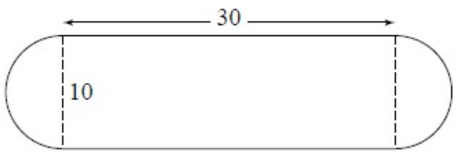
d Bereken de oppervlakte van de dwarsdoorsnede op eenderde deel van de hoogte. Geef je antwoord in cm^2.

(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2004)

Opgave 11: Kaas

Op de foto hiernaast zie je drie stukken kaas. Het zijn delen van een hele, ronde kaas. Het grootste stuk is precies de helft van een hele kaas. Deze halve kaas heeft een vlakke zijkant. De vorm van de vlakke zijkant bestaat bij benadering uit een rechthoek van 30 cm bij 10 cm en twee halve cirkels met een diameter van 10 cm.

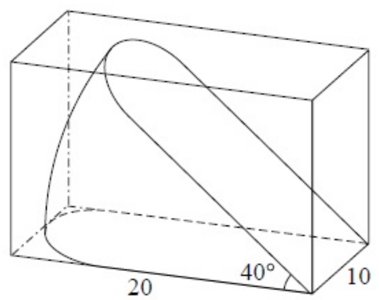
Figuur 5.13



Figuur 5.14

a Bereken de oppervlakte van de vlakke zijkant. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm^2.

Als je verticaal door het midden van de kaas snijdt, kun je stukken kaas maken zoals die ook op de foto hierboven te zien zijn. Bij een van de stukken kaas op die foto maken de snijvlakken een hoek van 40° met elkaar. Zo'n stuk wordt met een snijvlak op de bodem van een balkvormig doosje gelegd. De binnenmaten van het grondvlak van het doosje zijn 20 cm bij 10 cm. Zie de figuur hiernaast.



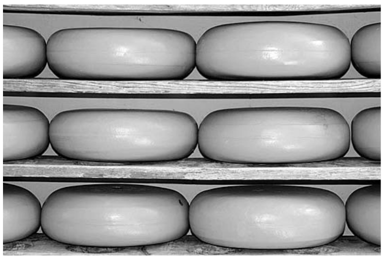
Figuur 5.15

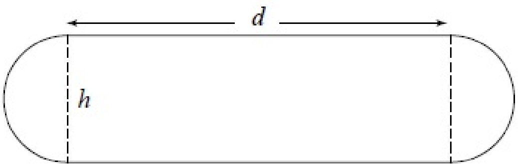
b Bereken hoe hoog de binnenkant van dit doosje minimaal moet zijn om dit stuk kaas er in te laten passen. Geef je antwoord in een geheel aantal centimeters.

Het volume van hele kazen die de vorm hebben van de kaas op de foto hierboven, kan worden berekend met behulp van de volgende formule:

$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{8}\pi^2 d h^2 + \frac{1}{4}\pi d^2 h$

Hierin is V het volume in cm^3, h is de hoogte van de kaas in cm en d is de zogeheten binnendiameter van de kaas in cm.





Figuur 5.16

Iemand wil kazen maken met deze vorm. Het volume van een hele kaas moet 5000 cm^3 zijn en de hoogte moet 8 cm zijn. De kaas wordt gerijpt in een kamer van $3{,}50$ m lang. Over de hele lengte van de kamer zijn planken tegen de muur aan gemaakt waarop de kazen naast elkaar kunnen liggen.

c Bereken hoeveel van deze kazen er maximaal naast elkaar op een plank kunnen liggen als ze worden neergelegd zoals de foto hiernaast.

d Als de binnendiameter 0 wordt, ontstaat een bolvormige kaas. De inhoud van deze bolvormige kaas kun je ook uitrekenen met bovenstaande formule van V. Vul $d = 0$ in de formule van V in en werk de formule die hierbij ontstaat om tot de bekende formule voor de inhoud van een bol met straal r.

(bron: herexamen wiskunde B havo 2009, opgave 1)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

www.math4all.nl