Wiskunde D

4 HAVO

Katern 1

ConTeXt College

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Kansen en tellen

1.1 Experimenteren

Inleiding

Als je vaak met een zuivere dobbelsteen gooit, komt elk vlakje gemiddeld genomen ongeveer even vaak boven te liggen. In de praktijk blijkt dat dit bij steeds meer herhalingen steeds beter gaat kloppen.
Omdat een dobbelsteen 6 vlakken kent, zeg je dat de kans dat één van die vlakken boven komt 1 op de 6 is. Het is gebruikelijk om dit als breuk te schrijven en te zeggen dat de kans op het gooien van bijvoorbeeld 4 ogen met een zuivere dobbelsteen $\frac{1}{6}$ is.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen op grond van experimenten;
- simulaties van kansexperimenten uitvoeren.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen.

Verkennen

Opgave V1

Of iets gaat gebeuren weet je meestal niet van tevoren. Kun je iets zeggen over de kansen bij de volgende situaties?

a Je gooit met twee dobbelstenen. Je telt het aantal ogen dat boven komt.

b Een voetbalwedstrijd kan beslist worden door het nemen van strafschoppen. Van tevoren weet je niet hoeveel ervan gemist zullen worden.

c Wanneer je iemand aardig vindt, dan kun je met deze persoon een afspraakje maken. Misschien heb je een leuke avond.

d Je doet mee aan de Lotto. Win je de hoofdprijs?

Uitleg

Een paar uitspraken over kansen:

- Als je met twee dobbelstenen gooit, is de kans dat je tien ogen gooit kleiner dan dat je zeven ogen gooit.
- De kans dat een kind van wie de vader en moeder bruine ogen hebben, ook bruine ogen heeft, is groot.

Kansen druk je uit in percentages (tussen 0% en 100%), breuken (tussen 0 en 1) of decimale getallen (tussen 0 en 1). Zo kun je zeggen:

- De kans dat je met een dobbelsteen een even aantal ogen gooit, is $0{,}5$ of $\frac{1}{2}$.
- Op grond van eerdere resultaten schat ik dat Ajax 80% kans heeft om deze wedstrijd te winnen.

Kansen spelen een belangrijke rol. Je neemt vaak aan dat dobbelstenen geen afwijkingen hebben, dat geen van de mogelijke uitkomsten waarschijnlijker is dan een andere. Je zou dat kunnen testen door te proberen.

Als je bijvoorbeeld de kans wilt uitrekenen dat bij het werpen met een dobbelsteen het vlakje met vijf ogen bovenkomt, kun je enkele honderden of meer keren met een dobbelsteen gooien en proefondervindelijk vaststellen welk vlakje bovenkomt.

Je ziet hoe vaak een bepaald aantal ogen is geworpen bij 600 en 6000 keer met een dobbelsteen gooien. Daarbij noem je X het aantal geworpen ogen.

uitkomst *X*	1	2	3	4	5	6
na 600 keer werpen	103	101	96	98	98	104
na 6000 keer werpen	1003	991	1005	997	1003	1001

Tabel 1.1

Bij 600 keer werpen kwam vijf ogen 98 keer voor.

De kans op vijf ogen kun je benaderen door $\frac{98}{600} \approx 0{,}163$.

Bij 6000 worpen is deze benaderde kans $\frac{1003}{6000} \approx 0{,}167$.

De laatste schatting is betrouwbaarder omdat er meer experimenten zijn gedaan.

Opgave 1

Lees de **Uitleg**.

a Waarom is bij het gooien met twee dobbelstenen de kans op tien ogen kleiner dan die op zeven ogen?

b Hoe zou je de kans dat je wiskundeleraar morgen ziek is kunnen vinden?

c Hoe zou je de kans kunnen bepalen dat een ouderpaar dat allebei bruine ogen heeft ook een kind met bruine ogen krijgt?

d Waarom is de kans dat je met een dobbelsteen een even aantal ogen gooit 50%?

e Hoe kom je aan de kans van 80% dat Ajax een bepaalde wedstrijd wint?

Opgave 2

In de tabel in de **Uitleg** zie je de uitkomsten van worpen met een dobbelsteen.

a Hoe groot schat je de kans op vier ogen bij het 600 keer werpen met een dobbelsteen?

b En hoe groot schat je die kans bij het 6000 keer werpen?

c Lijkt de conclusie gerechtvaardigd dat dit een zuivere dobbelsteen is?

Opgave 3

Iemand vraagt zich af hoe groot de kans is dat een punaise, als hij valt, met de punt naar boven komt te liggen.

a Hoe kun je een benadering krijgen van deze kans? Voer dit ook uit.

b Welke kans heb je gevonden?

c Zou je die kans nauwkeuriger kunnen bepalen? Zo ja, hoe dan?

Figuur 1.2

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

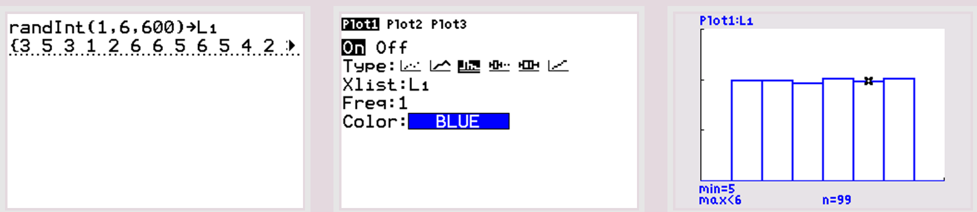
Als je heel vaak met een dobbelsteen gooit, dan voer je een **kansexperiment** uit. Een mogelijke **uitkomst** of gebeurtenis is dan bijvoorbeeld het werpen van vijf ogen.

Een gebeurtenis kan bestaan uit meerdere uitkomsten. De **relatieve frequentie** van die gebeurtenis is:

$$\frac{\text{het aantal keren dat die gebeurtenis voorkomt}}{\text{het aantal herhalingen van het kansexperiment}}$$

Volgens de **wet van de grote aantallen** benadert deze relatieve frequentie (als het kansexperiment eindeloos wordt herhaald) een bepaald getal. Dit getal noem je de **experimentele kans** op die gebeurtenis.

Relatieve frequenties zijn soms ook te bepalen uit statistische diagrammen. Dit staafdiagram geeft de relatieve frequenties bij het 600 keer werpen met een dobbelsteen weer. Het is gemaakt door het werpen met de dobbelsteen na te bootsen, te **simuleren**, met een grafische rekenmachine. Zie het **Practicum**.



Figuur 1.3

De experimentele kans op vijf ogen is in dit geval bij benadering $\frac{99}{600}$.

Voorbeeld 1

Je gooit heel vaak met een dobbelsteen en turft hoe vaak er drie ogen boven komen.
Bepaal zo de experimentele kans op deze gebeurtenis.

Je gooit daarna heel vaak met twee dobbelstenen en turft hoe vaak er bij elkaar drie ogen boven komen.
Bepaal zo ook de experimentele kans op deze gebeurtenis.
In het **Practicum** kun je dit simuleren.

Antwoord

Je gooit bijvoorbeeld 100 keer met die dobbelsteen en er komt zeventien keer drie ogen boven te liggen.
De relatieve frequentie van de gebeurtenis ‘3 ogen liggen boven’ is dan $\frac{17}{100}$.
De kans op drie ogen is volgens dit experiment dus bij benadering $0{,}17$.

Je gooit vervolgens 100 keer met twee dobbelstenen en er komt zes keer drie ogen boven te liggen.
De relatieve frequentie van de gebeurtenis ‘3 ogen liggen boven’ is dan $\frac{6}{100}$.
De kans op de drie ogen is volgens dit experiment dus bij benadering $0{,}06$.

Kun je verklaren waarom de kans op drie ogen bij het werpen met twee dobbelstenen kleiner is dan bij het werpen met één dobbelsteen?

Opgave 4

Je kunt het werpen met één of met twee dobbelstenen zelf uitvoeren.

a Werp 100 keer met één dobbelsteen en houd bij hoe vaak je 1, 2, 3, 4, 5, of 6 ogen krijgt. Welke experimentele kans op zes ogen vind je?

b Werp 100 keer met twee dobbelstenen en houd bij hoe vaak je 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, of 12 ogen krijgt. Welke experimentele kans op zeven ogen vind je?

c Is bij jou bij het werpen met twee dobbelstenen de experimentele kans op zeven ogen ook groter dan die op tien ogen?

d Kun je beredeneren met de wet van de grote aantallen waarom dit (ook als het bij jou niet klopt) toch het geval is?

Voorbeeld 2

Soms kun je experimenten ook nabootsen. Dat heet simulatie. Daarbij maak je gebruik van de random-functie (‘random’ is Engels voor willekeurig) van de grafische rekenmachine: elke gebeurtenis wordt voorgesteld door een getal.

Bij simuleren moet je erop letten dat voor elke gebeurtenis geldt: de werkelijke kans is gelijk aan de kans in de simulatie.

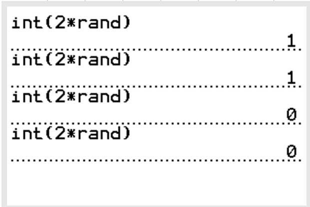
De random-functie genereert een willekeurig decimaal getal tussen 0 en 1. Dat kan bijvoorbeeld $0{,}3958484103$ zijn. De kans op elk van die getallen is gelijk.

De kans op een getal tussen 0 en $0{,}5$ is dus $0{,}5$.

Verdubbel je alle getallen, dan krijg je een getal tussen 0 en 2.
De kans op een getal tussen 0 en 1 is nu dus $0{,}5$.

Laat je vervolgens alle cijfers achter de komma weg, dan blijft er alleen een 0 of een 1 over. De kans op 0 is nu dus $0{,}5$. En omdat er verder alleen een 1 wordt gegenereerd, is de kans daarop ook $0{,}5$.

Het weghalen van de cijfers achter de komma gaat met de integer-functie: int(2 · rand).



Figuur 1.4

Je hebt nu een lijst willekeurige getallen 0 en 1. Als je voor 0 'kop' leest en voor 1 'munt', heb je het werpen met een geldstuk gesimuleerd. Dit experiment kun je gemakkelijk 500 maal uitvoeren met de grafische rekenmachine. Het voordeel is dat dit minder tijd kost dan 500 keer gooien met een geldstuk.

Onderzoek of de kans op 'kop' inderdaad op den duur ongeveer 0,5 wordt.

Doe het voorgaande voorbeeld nog eens, maar nu met behulp van simulatie. Bekijk eventueel het bijbehorende **Practicum: Simulaties en tellen met de GR**.

Opgave 5

Met toevalsgetallen op de grafische rekenmachine kun je het werpen met een dobbelsteen simuleren. Daartoe vermenigvuldig je elk toevalsgetal (die liggen immers tussen 0 en 1) met 6 en laat je de cijfers achter de komma weg.

a Welke mogelijke getallen krijg je?

b Wat moet je doen om de getallen 1 tot en met 6 in beeld te krijgen?

c Leg nu uit hoe je het werpen met een dobbelsteen kunt simuleren met de grafische rekenmachine.

d Simuleer 600 worpen met een dobbelsteen.
Hoe groot schat je de experimentele kans op vijf ogen?

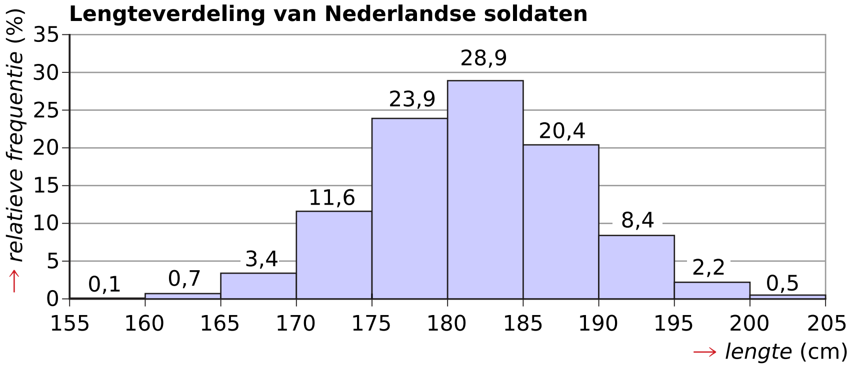
Je kunt ook het werpen met een achtkantige dobbelsteen met ogen 1 t/m 8 simuleren met de grafische rekenmachine.

e Leg uit hoe dat gaat en maak ook nu een staafdiagram van de uitkomsten van 600 worpen met een achtkantige dobbelsteen. Hoe groot schat je de experimentele kans op vijf ogen bij het werpen met een achtkantige dobbelsteen?

Voorbeeld 3

Bekijk de relatieve frequenties van de lichaamslengtes van 500 Nederlandse soldaten. Een fabrikant van truien voor de Nederlandse soldaten maakt deze in een aantal maten. De maat S (small) bijvoorbeeld is bedoeld voor soldaten tot 175 cm lengte.

Welk deel van zijn truien produceert hij in maat S als hij dit diagram ziet?



Figuur 1.5

Antwoord

Met behulp van dit diagram ziet de fabrikant dat $15{,}8\%$ van de gemeten soldaten maat S heeft. Hij kan dit volgens de experimentele wet van de grote aantallen opvatten als de kans dat een willekeurige Nederlandse soldaat die maat heeft. Het is dus een schatting van het percentage truien met maat S dat hij zou moeten laten maken.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 3**. Je ziet het staafdiagram met de lengteverdeling van 500 Nederlandse soldaten. De fabrikant van truien voor het leger heeft ook de maten medium (M) voor soldaten vanaf $1{,}75$ m tot en met $1{,}90$ m en large (L) voor soldaten vanaf 1,90 m.

a Hoe groot schat je de kans dat een Nederlandse soldaat een trui met maat M nodig heeft? Geef de kans als getal tussen 0 en 1.

b Hoe groot schat je de kans dat een Nederlandse soldaat een trui met maat L nodig heeft? Geef de kans als getal tussen 0 en 1.

c De fabrikant bepaalt op grond van deze experimentele kansen hoeveel truien van elke maat hij zal maken als er een grote bestelling binnenkomt. Maar hij krijgt te horen dat maat L niet bevalt: voor soldaten van meer dan $2{,}00$ m lengte zijn deze truien te klein. Hij besluit een maat XL in te voeren voor deze soldaten.
Hoeveel procent van zijn truien zal hij in maat XL laten produceren?

Opgave 7

Bekijk de informatie over het voorkomen van kleurenblindheid:

	man	vrouw	totaal
kleurenblind	479	58	537
niet kleurenblind	5226	4237	9463
totaal	5705	4295	10000

Tabel 1.2

a Je komt een man uit deze groep tegen en wilt de kans schatten dat hij kleurenblind is.
Welk getal beschouw je dan als ‘aantal herhalingen van het kansexperiment’ en welk getal als ‘aantal keren dat die gebeurtenis voorkomt’?

b Hoe groot is die kans? Rond af op gehele procenten.

c Hoe groot is de kans dat de volgende persoon die je tegenkomt een kleurenblinde man is? Rond af op gehele procenten.

d Verklaar waarom het antwoord bij b verschilt van dat bij c.

Verwerken

Opgave 8

Stel je werpt met twee dobbelstenen in de vorm van een regelmatig viervlak met daarop de getallen 1 tot en met 4. Je let op de som van de getallen die onder komen te liggen.

Simuleer met behulp van de grafische rekenmachine 24 worpen met twee van deze dobbelstenen. Hoe groot is je benadering van de experimentele kans op uitkomst 3?

Opgave 9

In welke van de onderstaande gevallen kun je de kans bepalen door een simulatie met de grafische rekenmachine? Verklaar ook steeds waarom.

a De kans op 6 bij het werpen met twee dobbelstenen.

b De kans op 6 bij het werpen met een dobbelsteen die aan één kant zwaarder is.

c De kans op 6 bij het werpen met een dobbelsteen waar op de zijvlakken 1, 1, 3, 4, 4 en 6 stippen voorkomen.

Opgave 10

Twee spelers A en B spelen een spel. Beiden hebben twee lucifers waarvan ze er (zonder dat aan elkaar te laten zien) nul, één of twee in de hand nemen die ze vervolgens dichtgeknepen voor zich op tafel leggen. Tegelijk laten ze elkaar zien hoeveel lucifers ze in de hand hebben. A wint als beide aantallen lucifers precies één verschillen, anders wint B. Ga ervan uit dat het aantal lucifers dat de spelers in de hand nemen uitsluitend van het toeval afhangt.

a Hoe zou je dit spel kunnen simuleren met toevalsgetallen?

b Geef schematisch alle mogelijkheden van het spel weer.

c Denk je dat dit spel eerlijk is? Met andere woorden hebben A en B een gelijke kans om te winnen?

Opgave 11

Je onderzoekt of een gegeven dobbelsteen met zes vlakken al dan niet zuiver is. Je gooit de dobbelsteen twintig keer. De resultaten staan in de tabel.

resultaat	1	2	3	4	5	6
aantal worpen	4	6	2	3	2	3

Tabel 1.3

a Kun je op basis van deze gegevens zeggen of de dobbelsteen wel of niet zuiver is?

b Na nog tachtig keer gooien maak je de volgende tabel.

resultaat	1	2	3	4	5	6
aantal worpen	12	24	11	14	9	10

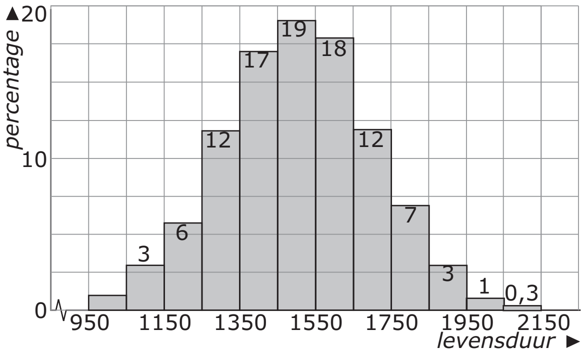
Tabel 1.4

Kun je nu zeggen of de dobbelsteen wel of niet zuiver is?

c Neem de resultaten in de tabel bij b als maatstaf. Je gooit de dobbelsteen 500 keer. Hoe vaak komt 2 boven te liggen?

Opgave 12

Een fabrikant heeft steekproefsgewijs de levensduur in uren van zijn gloeilampen onderzocht. Je ziet de gegevens weergegeven in een tabel en een diagram. Ga ervan uit, dat de gegevens uit de steekproef maatgevend zijn voor alle lampen van deze fabrikant.



Figuur 1.6

levensduur	aantal
950 - < 1050	4
1050 - < 1150	9
1150 - < 1250	19
1250 - < 1350	36
1350 - < 1450	51
1450 - < 1550	58
1550 - < 1650	53
1650 - < 1750	37
1750 - < 1850	20
1850 - < 1950	9
1950 - < 2050	3
2050 - < 2150	1

Tabel 1.5

a Hoeveel lampen zaten er in de steekproef?

b Hoe groot is de kans dat een lamp niet meer dan 1250 uur brandt? Rond af op gehele procenten.

c Hoe groot is de kans dat een lamp minstens 1650 uur mee gaat? Rond af op gehele procenten.

d Schat de kans dat de levensduur van een lamp meer dan 100 uur van het gemiddelde afwijkt.

Opgave 13

In deze tabel worden de resultaten van het schoolexamen (S.E.) en het centraal examen (C.E.) van een bepaalde school vergeleken. De getallen zijn percentages die zijn ontstaan uit gemiddelden over vele jaren.

			S.E.		
C.E.	4	5	6	7	8
5	10	11	8	3	0
6	5	5	14	13	4
7	0	2	7	12	6

Tabel 1.6

a Hoe groot is de kans dat iemand die op het S.E. een 5 scoort, op het C.E. een voldoende haalt? Geef het antwoord als breuk.

b Hoe groot is de kans dat iemand op het C.E. beter scoort dan op het S.E.? Geef het antwoord als breuk.

Toepassen

Opgave 14: Online computerspel

Een online computerspel verdeelt z'n spelers in rangen van 0 tot en met 5: spelers met rang 0 zijn beginners, en die met rang 5 worden gezien als heel ervaren spelers. Bij ieder potje worden door een complex algoritme twee online spelers uitgekozen en tegen elkaar gepit. Als het goed is, hebben de spelers dezelfde rang (om het eerlijk te houden), maar dit lukt niet altijd. In dat geval wordt er gezocht naar een speler met één rang hoger of lager (dus rangverschil 1), en als dat niet lukt, wordt er wéér een rang hoger of lager gekeken (rangverschil 2). Zo gaat het door tot je een tegenstander hebt.

rang	0	1	2	3	4	5
0	458	108	75	35	8	0
1	135	521	159	89	27	5
2	84	121	409	154	92	36
3	34	86	146	388	137	81
4	8	26	98	126	535	101
5	3	7	30	92	123	463

Tabel 1.7

De ontwikkelaars van het spel willen graag weten of hun algoritme goed werkt en houden bij hoe spelers van verschillende rangen uitgekozen worden. Hierbij bekijken ze 5000 gespeelde spelletjes. De resultaten staan in de tabel.

Wat je ziet is hoe vaak een uitdagende speler (verticaal) van een bepaalde rang gepit wordt tegen een ontvangende speler (horizontaal) van een bepaalde rang.

Hoe groot is de kans dat het algoritme twee spelers van een verschillende rang tegen elkaar plaatst? Geef je antwoord in procenten. Rond af op twee decimalen.

Testen

Opgave 15

Bij een bepaald spel horen twee viervlaksdobbelstenen waarop de getallen 1 tot en met 4 staan.

a Stel je voor dat je er niet zeker van bent dat bij deze dobbelstenen elk vlakje een even grote kans heeft om boven te komen. Hoe kun je jezelf ervan overtuigen dat dit toch het geval is?

b Waarom kun je vraag a niet beantwoorden met een simulatie met de grafische rekenmachine?

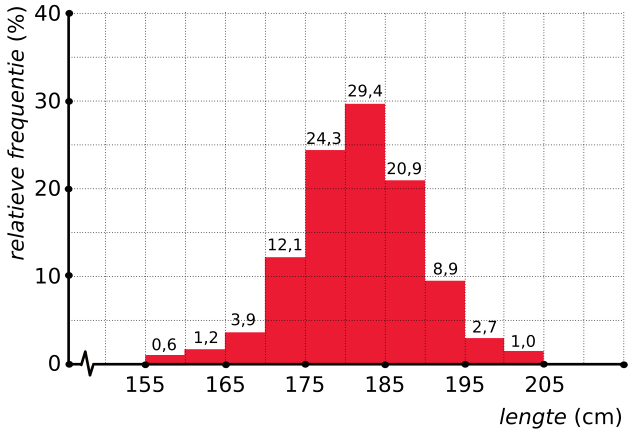
c Neem aan, dat de dobbelsteen eerlijk is. Simuleer nu met behulp van je grafische rekenmachine 80 worpen met deze dobbelsteen. Maak een staafdiagram van de uitkomst.

d Hoe groot is de experimentele kans op in totaal vier ogen?

Opgave 16

Dit histogram laat de relatieve frequenties zien van de lichaamslengtes van 500 soldaten. Een fabrikant van legertruien gaat ervan uit dat deze relatieve frequenties opgaan voor alle soldaten in Nederland. Hij maakt truien in drie maten:

- S (small) voor soldaten tot 180 cm.
- M (medium) voor soldaten van 180 cm tot 190 cm.
- L (large) voor soldaten vanaf 190 cm.



Figuur 1.7

a Een soldaat krijgt een nieuwe trui. Hoe groot is de kans dat hij een trui van maat S moet hebben? Geef je antwoord in procenten.

b Bereken ook voor de andere twee maten de kans (in procenten) dat een trui van die maat nodig is.

c De commandant van een legerplaats bestelt 300 truien. Hoeveel van elke maat kan hij het beste kopen?

Opgave 17

Bij een onderzoek naar linkshandigheid is bij 9000 mensen gevraagd naar hun voorkeurshand. De resultaten vind je in de tabel in percentages. Ga ervan uit, dat deze gegevens maatgevend zijn voor alle Nederlanders.

	linkshandig	rechtshandig
man	11,8	88,2
vrouw	9,6	90,4

Tabel 1.8

a Je komt op straat een Nederlandse man tegen. Hoe groot is de kans dat hij linkshandig is? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.

b Als je daarna een andere willekeurige Nederlander tegenkomt, hoe groot is dan de kans dat die een linkshandige persoon is? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.

c Hoeveel van de ondervraagde mensen waren linkshandig?

Practicum

Bekijk de applet.

Met de volgende practica kun je leren hoe je **simulaties met de grafische rekenmachine** kunt uitvoeren. Je vindt er ook informatie die je verderop bij dit onderwerp nodig hebt. Die kun je nu eerst even laten zitten.

- **Simulaties en de TI84**
- **Simulaties en de TInspire**
- **Simulaties en de Casio fx-CG50**
- **Simulaties en de HPprime**
- **Simulaties en de NumWorks**

Je kunt ook eenvoudig met Excel kansspelen simuleren. Gebruik dit Excel-bestand:
Simulatie van kansspelen.

1.2 Redeneren

Inleiding

Bij het werpen met een zuivere dobbelsteen weet je dat elk vlakje dezelfde kans heeft om boven te komen. Dat hoef je niet meer steeds experimenteel te bevestigen. Als je vooraf weet welke mogelijkheden even waarschijnlijk zijn kun je kansen berekenen door daarmee te redeneren.
Dan is het vooral een kwestie van alle even waarschijnlijke mogelijkheden in kaart te brengen. Op grond daarvan kun je dan een uitspraak doen over de kans op een bepaalde gebeurtenis.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen op grond van redeneren met even waarschijnlijke mogelijkheden;
- alle mogelijkheden in kaart brengen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen;
- werken met experimentele kansen en simulaties.

Verkennen

Opgave V1

Je werpt met twee dobbelstenen. Tel het aantal ogen dat boven komt.

Leg uit waarom de kans op het gooien van 3 ogen kleiner is dan op het gooien van 7 ogen.
Bepaal beide kansen door redeneren.

Uitleg

Stel je voor dat je met een zuivere dobbelsteen gooit en de kans wilt bepalen dat je na eenmaal werpen een 5 gooit. De volgende overwegingen zijn dan belangrijk:

- Het aantal mogelijke uitkomsten is zes, de dobbelsteen heeft immers zes zijkanten;
- Alle uitkomsten zijn even waarschijnlijk: de dobbelsteen is zuiver, dat wil zeggen dat elk vlakje dezelfde kans heeft boven te komen;
- De werper schudt en werpt correct: de steen wordt niet op een bepaald vlak neergelegd.

Figuur 2.2

Je kunt zo redeneren: de kans op het gooien van een 5 is even groot als de kans op het gooien van een 6 of de kans op een 4, een 3, een 2 of een 1. Het werpen is aselect, er wordt vooraf geen vlak uitgekozen. Zo'n kans kun je aangeven met 'een op zes' of met $\frac{1}{6}$.

Opgave 1

Je gooit één keer met twee dobbelstenen.

a Hoe groot is de kans op het gooien van twee zessen?

b Bereken de kans op het gooien van een vijf en een zes.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je (zonder experimenteren) weet dat uitkomsten even waarschijnlijk zijn, kun je kansen berekenen door te redeneren.

Deze kans heet **theoretische kans** en is gelijk aan:

$\frac{\text{het aantal gunstige uitkomsten}}{\text{het aantal mogelijke uitkomsten}}$.

Het aantal gunstige uitkomsten is altijd kleiner dan of gelijk aan het totale aantal mogelijke uitkomsten. De theoretische kans is dus een breuk met een waarde tussen 0 en 1.

De kans (theoretisch of experimenteel) op een uitkomst 5 bij het gooien met een dobbelsteen noteer je zo: P $(X = 5) = \frac{1}{6}$. Spreek uit: de kans op het werpen van vijf ogen is een zesde.

- De hoofdletter P is de afkorting van het Engelse woord probability (van het Latijnse woord probabilitas). Dit betekent waarschijnlijkheid of kans.
- X is de kansvariabele die de ‘waarde’ kan hebben van alle mogelijke uitkomsten van het theoretische of praktische kansexperiment.
- $X = 5$ is de notatie voor een gebeurtenis, in dit geval de gebeurtenis waarbij na het werpen met de dobbelsteen, de vijf boven ligt.

Heb je te maken met bijvoorbeeld meerdere dobbelstenen (of munten, of andere dingen) dan moet je systematisch werken, zodat je geen mogelijkheid over het hoofd ziet. Tabellen en schema's kunnen daarbij helpen.

Stel dat je heel vaak met een dobbelsteen gooit. Volgens de **wet van de grote aantallen** benadert dan de experimentele kans op vijf ogen de theoretische kans op vijf ogen. De experimentele kans komt dus in de buurt van het getal $\frac{1}{6}$.

De wet van de grote aantallen legt het verband tussen experimentele en theoretische kansen. Als je een experiment maar vaak genoeg en op de juiste wijze herhaalt, nadert de relatieve frequentie van een bepaalde gebeurtenis de theoretische kans op die gebeurtenis.

Voorbeeld 1

Wat zijn de mogelijke kansen als je met één dobbelsteen werpt?
Hoe groot is de kans dat je meer dan vier ogen gooit?

Antwoord

Noem het aantal ogen op een vlak van de dobbelsteen X. Bij een zuivere dobbelsteen neem je aan dat elk vlakje een even grote kans heeft om boven te komen. Dus elk van de zes mogelijke aantallen ogen is even waarschijnlijk:

$\text{P}(X = 1) = \text{P}(X = 2) = \text{P}(X = 3) = \text{P}(X = 4) = \text{P}(X = 5) = \text{P}(X = 6) = \frac{1}{6}$.

Meer dan vier ogen gooi je als: $X = 5$ of $X = 6$.
Als gunstige uitkomsten heb je: vijf en zes ogen. Het aantal gunstige uitkomsten is twee.
Als mogelijke uitkomsten heb je 1, 2, 3, 4, 5 en 6 ogen. Het totaal aantal uitkomsten is zes.
De kans dat de uitkomst bij één worp meer dan vier ogen is, is twee op zes:

$\text{P}(X = 5 \vee X = 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Opgave 2

Noem X het aantal ogen dat bovenkomt bij een dobbelsteenworp.

a Bereken $\text{P}(X \leq 4)$.

b Bereken $\text{P}(X < 4)$.

c Bereken $\text{P}(X = \text{oneven})$

d Bereken de kans op minstens twee ogen.

Opgave 3

Je hebt een vaas met vier rode en zes witte balletjes. De vaas wordt goed geschud. Jan haalt één balletje uit de vaas zonder te kijken. Hij zegt dat hij een kans van $\frac{1}{2}$ heeft dat het een rood balletje is: er zijn immers twee kleuren, ‘rood’ en ‘wit’, en het balletje heeft één van die twee kleuren.

Waarom is die redenering fout? Hoe groot is de kans op een rode bal wel?

Voorbeeld 2

Wat zijn de mogelijke kansen als je met twee dobbelstenen werpt en je let op het totaal aantal ogen dat bovenkomt? Maak een overzicht.
Hoe groot is de kans dat je minstens 8 ogen gooit?

Figuur 2.3

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figuur 2.4

Antwoord

Het aantal ogen dat in totaal boven kan komen, is 2, 3, 4, ..., 11, 12.
Dat zijn elf mogelijke uitkomsten. Die zijn echter niet even waarschijnlijk.

Bij iedere uitkomst voor de ene dobbelsteen zijn er immers zes mogelijkheden voor de andere; dat geeft in totaal 36 mogelijkheden. Neem X voor het aantal ogen op de ene dobbelsteen en Y voor het aantal ogen op de andere. In de figuur zie je alle 36 mogelijkheden voor $X + Y$, het totaal aantal ogen per worp.

Het aantal gunstige uitkomsten voor een totaal van bijvoorbeeld acht ogen is vijf.

De kans dat het totaal aantal ogen acht is, is $\text{P}(X + Y = 8) = \frac{5}{36}$.

De kans op meer dan acht ogen is: $\text{P}(X + Y > 8) = \frac{10}{36}$.

Opgave 4

Stel je voor dat je met twee dobbelstenen gooit en let op het aantal ogen dat bovenkomt. Het aantal ogen op de ene steen stel je voor door X, dat op de andere steen door Y. Dus $X + Y$ is het totaal aantal ogen dat bovenkomt.

a Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

b Voor hoeveel mogelijkheden geldt: $\text{P}(X + Y = 5)$?

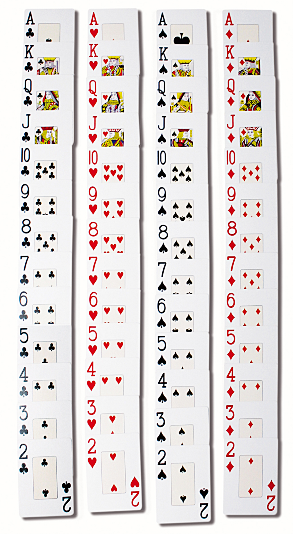
c Hoe groot is dus $\text{P}(X + Y = 5)$?

d Hoe groot is $\text{P}(X + Y = 7)$?

e Schrijf met behulp van de symbolen P, X en Y de kans op minstens negen ogen op. Hoe groot is die kans?

Voorbeeld 3

Ook bij het delen van speelkaarten spelen kansen een grote rol. Een normaal kaartspel telt 52 kaarten. Er zijn vier ‘kleuren’: harten, schoppen, ruiten, klaveren. Iedere kleur kent de kaarten 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer en aas. Als het delen van kaarten eerlijk gebeurt, is er sprake van een aselecte trekking.
Hoe groot is daarbij de kans dat je bij trekking van één kaart een aas krijgt? Hoe groot is de kans dat het harten aas is?



Figuur 2.5

Antwoord

Er zijn vier azen in het spel. De kans op een aas is

P (aas) $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

De kans op harten aas is P (harten aas) $= \frac{1}{52}$.

Opgave 5

Stel je voor dat je aselect één kaart uit een goed geschud spel van 52 kaarten trekt.

a Welke kans heb je op een schoppen tien?

b Hoe groot is de kans op een plaatje?

c Hoe groot is de kans op een ruiten kaart?

Opgave 6

Welke van de volgende kansen kun je door redeneren bepalen? Bereken zo mogelijk de grootte van die kans, of geef aan hoe deze te bepalen is.

a De kans dat je in december minstens één keer te laat op school komt.

b De kans om een meerkeuzevraag met vier keuzemogelijkheden en één goed antwoord bij toeval goed te beantwoorden.

c De kans dat de eerstvolgende baby die wordt geboren, een jongen is.

d De kans dat de eerstvolgende baby die wordt geboren in een gezin met al drie jongens, weer een jongen is.

e De kans dat het morgen zes uur regent in Enschede.

f Je werpt met een dobbelsteen in de vorm van een regelmatig achtvlak met vier rode, twee witte en twee blauwe zijvlakken. Wat is de kans dat bij het werpen met zo’n dobbelsteen, een rood zijvlak bovenkomt te liggen?

Verwerken

Opgave 7

Je trekt aselect een kaart uit een kaartspel van 52 kaarten. Geef je antwoorden op onderstaande vragen als breuk.

a Hoe groot is de kans op een harten kaart?

b Hoe groot is de kans op een tien?

c Stel dat je een harten tien hebt getrokken, en je trekt daarna een tweede kaart uit het spel. Hoe groot is de kans op nog een tien?

Opgave 8

Je hebt een ondoorzichtige doos met daarin tien gekleurde balletjes, zeven groene en drie gele. De groene balletjes zijn genummerd 1 tot en met 7, de gele 1 tot en met 3. Je schudt die doos en haalt er zonder te kijken één balletje uit. Geef antwoorden op onderstaande vragen in een breuk.

a Hoe groot is de kans dat het een geel balletje is?

b Hoe groot is de kans dat het een balletje met nummer 1 is?

c Hoe groot is de kans dat het balletje nummer 4 heeft?

d Hoe groot is de kans dat het een groen balletje met een nummer hoger dan 3 is?

Opgave 9

Er wordt een loterij gehouden. De loten hebben nummers 000 tot en met 999. Alle loten zijn verkocht. Op volkomen aselecte wijze wordt een lotnummer getrokken. Daarop valt de tweede prijs. Geef de antwoorden op onderstaande vragen als breuk, indien van toepassing.

a Jij hebt het nummer 113. Hoe groot is de kans dat je die prijs hebt?

b Je vriendin zegt dat ze een even lotnummer heeft. Hoe groot is de kans dat zij de tweede prijs heeft?

c Hoe groot is de kans dat er een even lotnummer wordt getrokken?

d Waarom zijn de kansen bij b en c verschillend?

De tweede prijs is gevallen op lotnummer 771. Hierna wordt de eerste prijs getrokken, nummer 771 doet niet meer mee.

e Hoe groot is nu jouw kans op de eerste prijs?

f Hoe groot is nu de kans dat er een even lotnummer wordt getrokken?

Opgave 10

Je werpt met twee dobbelstenen en let op het aantal ogen dat bovenkomt. Geef je antwoorden op de onderstaande vragen in een breuk.

a Hoe groot is de kans dat er zeven ogen boven komen te liggen?

b Hoe groot is de kans op hoogstens zeven ogen?

c Hoe groot is de kans op meer dan elf ogen?

d Hoe groot is de kans op een even aantal ogen?

Opgave 11

Je werpt met drie geldstukken.
Bepaal de kans op precies twee keer kop. Geef je antwoord als breuk.

Opgave 12

Bij een voetbaltoernooi wordt aan het begin van elke wedstrijd getosst met een munt om te bepalen welke ploeg mag aftrappen. Tijdens dit toernooi speelt Cambuur vier wedstrijden.

a Hoe groot is de kans dat Cambuur bij de eerste wedstrijd de toss 'wint' en mag aftrappen?

b Hoe groot is de kans dat Cambuur alle vier de wedstrijden mag aftrappen?

c Hoe groot is de kans dat Cambuur minstens drie keer mag aftrappen?

Toepassen

Opgave 13: De familie Dollekamp

Voor een bevolkingsonderzoek worden willekeurige families uitgekozen die twee kinderen hebben van verschillende leeftijd, en waarvan ten minste één kind een jongen is. Familie Dollekamp doet mee met het onderzoek.
Hoe groot is de kans dat beide kinderen van meneer en mevrouw Dollekamp jongens zijn?

Opgave 14: Knipperen met de ogen

Alle mensen knipperen met hun ogen. Daardoor staan op groepsfoto's vaak enkele personen met gesloten ogen. Svenson en Barnes hebben onderzocht hoeveel foto's je moet maken van een groep van n personen om 99% kans te hebben op een foto waarop niemand zijn ogen dicht heeft. Zij hebben bij hun berekeningen de volgende aannames gedaan:

- Het knipperen met de ogen gebeurt met onregelmatige tussenpozen.
- Mensen knipperen gemiddeld tien keer per minuut met de ogen.
- Als iemand knippert, zijn de ogen gedurende $0{,}25$ seconden dicht.

a Op een willekeurig moment wordt één foto genomen van één persoon. Op basis van de aannames van Svenson en Barnes kunnen we de kans berekenen dat deze persoon niet met gesloten ogen op de foto staat.

Bereken deze kans in vier decimalen nauwkeurig.

Ga er van uit dat de kans dat iemand met open ogen op de foto staat gelijk is aan $0{,}96$. Bij een groepsfoto spreken we van een 'geslaagde' foto als alle personen op de foto hun ogen open hebben. Een fotograaf neemt één groepsfoto van een groep van 20 personen.

b Bereken de kans op een geslaagde groepsfoto.

Een fotograaf neemt 5 groepsfoto's van een groep van 25 personen.
De kans dat er minstens één geslaagde foto bij zit is ongeveer $0{,}89$.

c Toon dat met een berekening aan.

Testen

Opgave 15

Je trekt aselect een kaart uit een volledig kaartspel (52 kaarten). Geef bij de onderstaande vragen je antwoorden als breuk.

a Hoe groot is de kans op een harten kaart?

b Hoe groot is de kans op een boer?

c Hoe groot is de kans op een harten boer?

Opgave 16

Bij roulette wordt een balletje aselect in een draaiend rad geworpen. Dit rad bevat 37 even grote vakjes, volgens een bijzonder patroon genummerd van 0 tot en met 36. De vakjes zijn om en om rood en zwart gekleurd, behalve het vakje met 0, dat is groen. Elk fiche die je op het winnend nummer hebt gezet krijg je 36 keer uitbetaald. Je krijgt natuurlijk niet 37 keer uitbetaald, anders verdient het Casino niets. Geef bij de onderstaande vragen je antwoorden als breuk, indien van toepassing.

a Hoe groot is de kans op winst bij één keer spelen met één fiche?

b Verandert die kans als je twee fiches op hetzelfde nummer inzet? En als je twee fiches op verschillende nummers inzet?

c Hoe groot is de kans dat het balletje op een oneven getal komt te liggen?

d Hoe groot is de kans dat het balletje op een rood getal komt te liggen?

e Hoe groot is de kans dat het balletje op een rood getal komt te liggen wanneer al 26 keer achter elkaar een zwart getal is gedraaid?

Opgave 17

Je werpt met twee dobbelstenen. P is het product van het aantal ogen dat boven komt.

Bereken de kans dat P minstens 20 wordt. Geef je antwoord als breuk.

1.3 Systematisch tellen

Inleiding

Bij het beredeneren van kansen speelt het tellen een belangrijke rol. Immers je deelt het aantal ‘gunstige’ mogelijkheden door het totaal aantal mogelijkheden. Maar dan moet je wel weten hoeveel mogelijkheden er zijn en vaak ook nog welke dat zijn. Om daar een goed overzicht over te krijgen moet je systematisch te werk gaan. Boomdiagrammen en tabellen helpen er bij.

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen op grond van redeneren met even waarschijnlijke mogelijkheden;
- mogelijkheden systematisch tellen en in kaart brengen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen;
- werken met kansen.

Verkennen

Opgave V1

Je werpt vier geldstukken op tafel.

Hoe groot is de kans dat je drie keer kop en één keer munt, of drie keer munt en één keer kop krijgt?

Figuur 3.1

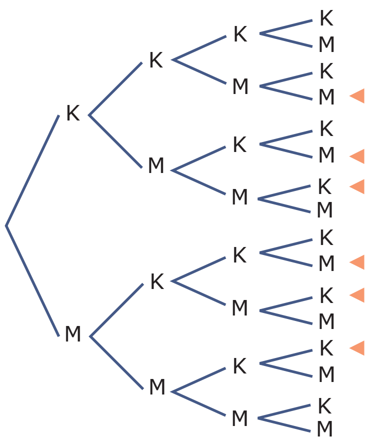
Uitleg 1

Bij tossen wordt er met een geldstuk geworpen. Het werpen met een geldstuk heeft de uitkomsten ‘kop’ of ‘munt’. Bij een zuivere munt zijn beide uitkomsten even waarschijnlijk en hebben ze beiden een kans van $\frac{1}{2}$.

Gooi je met meerdere munten en kijk je naar het aantal keren ‘kop’, dan kun je dat aantal aangeven met X. Gooi je met vier munten dan heeft X de waarden 0, 1, 2, 3 of 4.
Om de bijbehorende kansen te kunnen berekenen, moet je het aantal gunstige en het totaal aantal mogelijkheden overzichtelijk bijhouden. Dat kun je doen met een boomdiagram.
Alle zestien mogelijkheden hebben dezelfde kans.

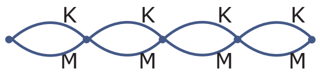
Ga na, dat P $(X = 2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Een boomdiagram maken kan veel werk zijn, maar in veel gevallen hoef je maar een klein stukje te tekenen om te zien hoe je de kansen berekent.



Figuur 3.2

Je kunt een boomdiagram compacter maken door de takken in één punt te laten samenkomen. Dan krijg je een wegendiagram. Daarin zie je snel dat er $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ mogelijkheden in totaal zijn. Alleen zijn de gunstige mogelijkheden nu moeilijker te tellen.



Figuur 3.3

Opgave 1

Bestudeer **Uitleg 1**.

a Wat is het verschil tussen een boomdiagram en een wegendiagram?

b Wanneer is een boomdiagram makkelijker, en wanneer een wegendiagram?

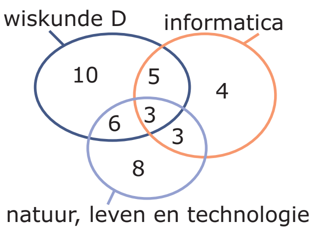
Opgave 2

Je hebt in een hoge hoed vier kaartjes met daarop de letters A, B, C, D. Je haalt die kaartjes er aselect één voor één uit.

Bereken de kans dat je dit in de volgorde A-B-C-D doet.

Uitleg 2

Als leerlingen een vakkenpakket kiezen, kun je dat bekijken als meerdere keren een ja/nee beslissing nemen. Voor 2 of 3 van dat soort beslissingen kan een venndiagram een goed overzicht geven van alle keuzes.



Figuur 3.4

In het voorbeeld is te zien dat van 39 leerlingen die de keuzevakken wiskunde D, informatica, of natuur, leven en technologie (NLT) of een combinatie van deze drie vakken doen, er 10 alleen wiskunde D doen, 6 wiskunde en NLT doen, 5 wiskunde en informatica doen, 3 informatica en NLT doen en 3 alledrie de vakken doen. Er zijn nog 4 die alleen informatica volgen en 8 die alleen NLT hebben.

Wanneer je een venndiagram maakt, is vaak een deel van de aantallen uitkomsten/keuzes gegeven. De andere aantallen keuzes kun je dan berekenen.

Opgave 3

Bestudeer de figuur in **Uitleg 2**.

a Hoeveel leerlingen doen NLT?

b Hoeveel leerlingen doen alleen NLT?

c Hoeveel leerlingen doen twee keuzevakken?

Opgave 4

Gegeven zijn de verzamelingen A tot en met D. Maak een venndiagram dat het aantal elementen per verzameling (al dan niet in de overlappingen met anderen) weergeeft.

$A = \{1,3,5,7,9\}$
$B = \{2,4,6,8,10\}$
$C = \{0,1,2,3,4,5\}$
$D = \{8,10,12\}$

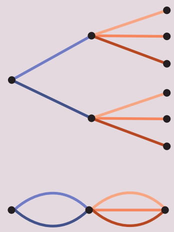
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het berekenen van kansen is meestal een kwestie van systematisch tellen van mogelijkheden die even waarschijnlijk zijn. Daarvoor bestaan grafische hulpmiddelen:

Het **boomdiagram**:

Een schema waarin je alle mogelijkheden weergeeft als vertakkingen vanuit punten. Een boomdiagram kun je altijd maken, maar het kan heel veel werk zijn. Dit boomdiagram heeft twee ‘lagen’ met in de eerste laag twee takken en in de tweede laag drie takken.
In een boomdiagram zie je alle mogelijke uitkomsten. Het totaal aantal mogelijke uitkomsten kun je berekenen door de aantallen in de verschillende lagen met elkaar te vermenigvuldigen.



2 x 3 = 6 mogelijkheden

Figuur 3.5

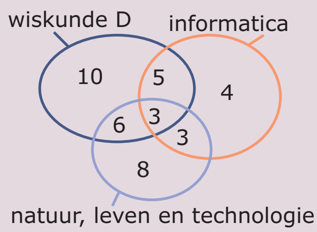
Het **wegendiagram**:
Een schema (ook wel graaf genoemd) waarin je de mogelijkheden als verbindingslijnen tussen punten weergeeft. Een wegendiagram is een samenvatting van een boomdiagram. Het samenvatten gaat alleen goed als de uitkomsten van de lagen niet van elkaar afhangen. Het tekent sneller dan een boomdiagram, maar je kunt er niet alle kansvragen goed mee beantwoorden.
Het totaal aantal mogelijkheden krijg je door de aantallen mogelijkheden om van punt naar punt te komen met elkaar te vermenigvuldigen.

Een **rooster**:
Dit is een andere manier van een boomdiagram tekenen. Het kan alleen als er maar twee lagen zijn en alle uitkomsten staan er in. Dit rooster laat het aantal even waarschijnlijke mogelijkheden bij werpen met twee geldstukken zien.
Het aantal mogelijke uitkomsten is te berekenen door het aantal vakjes te tellen.

	K	M
K	KK	KM
M	MK	MM

Figuur 3.6

Het **venndiagram**:
Een schema dat je gebruikt als verschillende eigenschappen elkaar overlappen, zodat iets meerdere eigenschappen tegelijk kan hebben. Denk maar aan de keuzemogelijkheden voor drie keuzevakken binnen de vrije ruimte van je keuzepakket op school.



Figuur 3.7

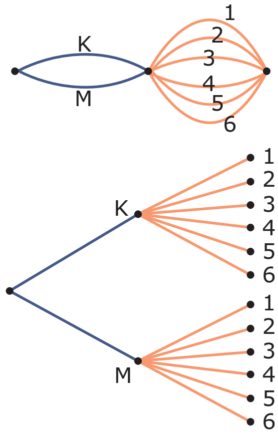
Voorbeeld 1

Iemand gooit tegelijkertijd met een munt en met een dobbelsteen. Hoeveel mogelijke even waarschijnlijke uitkomsten zijn er in totaal? En bij hoeveel daarvan heb je hoogstens vijf ogen en kop?

Antwoord

De mogelijke uitkomsten kun je in een wegendiagram weergeven. Er zijn in totaal $2 \cdot 6 = 12$ verschillende uitkomsten mogelijk, want je kunt in totaal op twaalf verschillende manieren van het beginpunt naar het eindpunt gaan.

Je ziet ook hoe je de mogelijke uitkomsten van het gelijktijdig gooien van een munt en een dobbelsteen in een boomdiagram kunt weergeven. Alle twaalf mogelijkheden zijn afzonderlijk zichtbaar. Er zijn vijf mogelijkheden met hoogstens (niet meer dan) vijf ogen en kop.



Figuur 3.8

Opgave 5

Iemand heeft dobbelstenen in de vorm van een regelmatig viervlak. Op de grensvlakken staan de cijfers 1, 2, 3 en 4. Elk vlak heeft een gelijke kans om ‘onder’ te komen als je met zo'n dobbelsteen gooit. Er wordt geworpen met drie van die dobbelstenen, een rode, een groene en een witte. We letten op de vlakken die ‘onder’ komen na het werpen.

a Geef in een wegendiagram alle mogelijke uitkomsten weer. Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

b Tel het aantal uitkomsten waarbij bij de rode dobbelsteen het cijfer 3 precies één keer onder ligt.

c Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij precies één keer de 3 onder ligt?

d Hoe groot is de kans dat er precies één 3 onder ligt?

Voorbeeld 2

Iemand gooit tegelijkertijd met twee dobbelstenen. Als je van te voren het totaal aantal ogen goed raadt, win je het spelletje. Waarom kun je beter gokken op zeven ogen dan op twee ogen?

Antwoord

Omdat je met twee dobbelstenen werpt, is een rooster een handige manier om alle mogelijkheden in beeld te krijgen.
Je ziet dat er in totaal 36 even waarschijnlijke mogelijkheden zijn.
En zeven ogen komt veel vaker voor dan twee ogen.

Je ziet dat zeven ogen het vaakst voorkomt, dus daar moet je op gokken.

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figuur 3.9

Opgave 6

Bij het werpen met twee dobbelstenen kun je de mogelijkheden overzichtelijk weergeven in een rooster.

a Waarom gaat dat bij het werpen met drie dobbelstenen niet?

b Je werpt met twee dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat er minstens negen ogen boven komen?

Opgave 7

Je hebt vier uiterlijk gelijke briefjes met daarop de namen Paul, Anja, Frits en Elly. De briefjes worden in een vaas gedaan, je moet er twee kiezen. De briefjes gaan na de eerste trekking niet terug in de vaas.

a Teken bij deze situatie een rooster.

b Laat zien dat een boomdiagram dezelfde mogelijkheden geeft.

c Bepaal de kans dat je zowel Paul als Anja kiest.

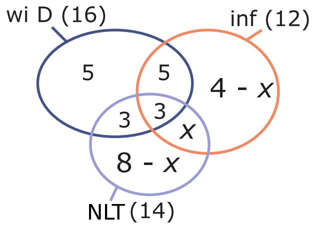
Voorbeeld 3

Op een school kiezen 26 havo4-leerlingen het NT-profiel. In de vrije ruimte kunnen ze één, twee of drie vakken kiezen uit: wiskunde D, informatica en NLT (natuur, leven en technologie).
Zestien leerlingen kiezen wiskunde D, twaalf kiezen informatica en veertien kiezen NLT.
Er zijn dertien leerlingen die maar één van deze drie vakken kiezen.
Drie leerlingen kiezen wiskunde D en NLT, acht leerlingen kiezen wiskunde D en informatica, waarbij de drie leerlingen zitten die alle drie de vakken kiezen.
Hoeveel leerlingen kiezen alleen NLT en informatica?

Antwoord

Een venndiagram kan helpen. Het gevraagde aantal leerlingen dat alleen NLT en informatica kiest stel je voor door x. Daarmee kun je het venndiagram invullen.
Nu zijn er dertien leerlingen die maar een van deze drie vakken hebben, dus: $5 + 8 - x + 4 - x = 13$.

Dit levert op: $x = 2$.
Ter controle kun je het hele diagram invullen.



Figuur 3.10

Opgave 8

Op een school kiezen 38 vwo leerlingen een NG-profiel. In de vrije ruimte kunnen ze één, twee of drie vakken kiezen: natuurkunde, NLT (natuur, leven en technologie) of aardrijkskunde. 27 leerlingen kiezen natuurkunde, 18 kiezen NLT en 24 kiezen aardrijkskunde. Verder kiezen 8 leerlingen natuurkunde en NLT, 11 kiezen natuurkunde en aardrijkskunde en 4 kiezen NLT en aardrijkskunde.

a Hoeveel leerlingen kiezen drie vakken?

b Hoe groot is de kans dat een leerling alleen maar aardrijkskunde heeft gekozen?

Verwerken

Opgave 9

Om het cijferslot van een koffer open te krijgen moet je een code van vier cijfers onthouden, waarbij de getallen 0 tot en met 9 voor elk cijfer mogelijk zijn.

a Je weet alleen het eerste cijfer nog. Hoe groot is de kans dat je de koffer direct open krijgt?

b Je weet alle vier de cijfers nog, maar de volgorde niet meer. De cijfers in de code zijn onderling verschillend. Hoe groot is de kans dat je de koffer direct open krijgt?

Opgave 10

Je werpt met drie gewone dobbelstenen.

a Geef in een wegendiagram alle mogelijke uitkomsten weer.

b Hoe groot is de kans op precies één zes?

c Hoe groot is de kans op twee zessen?

d Hoe groot is de kans op drie zessen?

e Hoe groot is de kans op minstens twee zessen?

f Hoe groot is de kans op hoogstens twee zessen?

Opgave 11

Een deelnemer aan een tv-quiz krijgt vier kaarten met op ieder een naam van een populaire zangeres. Zijn opdracht is om deze kaarten onder de foto's van deze zangeressen te hangen, de juiste naam bij elke foto. Deze deelnemer kent geen van de vier zangeressen en besluit op goed geluk de kaarten op te hangen.

a Geef in een boomdiagram alle mogelijkheden weer.

b Hoe groot is de kans dat hij één kaart goed hangt?

c Hoe groot is de kans dat hij alle kaarten goed hangt?

Opgave 12

Een fabrikant van consumptie-ijs probeert drie smaken uit. Het gaat om de smaken ‘aardbeien’, ‘banaan’ en ‘citroen’. Hij laat een onderzoek instellen onder 170 willekeurig gekozen mensen. Tien ondervraagden waarderen alle drie de smaken positief. Acht mensen waarderen geen enkele smaak positief. De andere positieve oordelen zijn als volgt:

- alleen aardbeien 42
- alleen banaan 49
- alleen citroen 41
- alleen aardbei en banaan 5
- alleen aardbei en citroen 7
- er zijn ook mensen die alleen citroen en banaan lekker vinden.

a Maak een venndiagram van deze gegevens en bereken hoeveel mensen alleen citroen en banaan lusten.

b Hoeveel procent van de ondervraagden had een positief oordeel over banaan of citroen? Rond af op één decimaal.

c Hoeveel mensen hadden een negatief oordeel over zowel aardbeien als banaan?

d Hoe groot is de kans dat een willekeurige ondervraagde niet van aardbeienijs houdt? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1. Rond af op twee decimalen.

Opgave 13

Een toets bestaat uit zes meerkeuzevragen. Op elke meerkeuzevraag kun je uit vier antwoorden kiezen; er is telkens maar één antwoord goed.

a Hoeveel mogelijke series antwoorden zijn er?

b Je was de toets vergeten te leren en vult volkomen willekeurig zes antwoorden in. De docent kijkt de toets na en zegt: Je hebt vier vragen goed beantwoord! Hoeveel mogelijke series antwoorden zijn er, waarbij je er vier goed hebt?

c Als je alleen let op ‘goed’ of ‘fout’ en je moet alle zes vragen beantwoorden, hoeveel series antwoorden zijn dan mogelijk?

Opgave 14

Een fruitautomaat heeft drie vensters waarachter banden met plaatjes draaien. Op elke band staan twintig plaatjes en je brengt ze in beweging door aan een hendel te trekken. Eén druk op de knop en de banden stoppen. Zie je nu drie dezelfde plaatjes dan win je een bepaald bedrag. Van de plaatjes is per band het aantal op die band aangegeven.

plaatje	band 1	band 2	band 3
BAR	1	2	1
bel	8	1	7
pruim	2	7	3
sinaasappel	2	8	4
twee kersen	7	2	0
citroen	0	0	5

Figuur 3.11

a Op hoeveel manieren kun je drie keer ‘sinaasappel’ krijgen?

b Op hoeveel manieren kun je drie keer ‘twee kersen’ krijgen?

c Hoe groot is de kans dat je iets wint?

d Je krijgt de plaatjes ‘bel’, en twee keer ‘pruim’. Op hoeveel manieren kun je deze combinatie van deze plaatjes krijgen?

e Je krijgt de plaatjes ‘bel’, ‘sinaasappel’ en ‘citroen’. Op hoeveel manieren kun je deze combinatie van plaatjes krijgen?

f Hoeveel samenstellingen van drie verschillende plaatjes bestaan er?

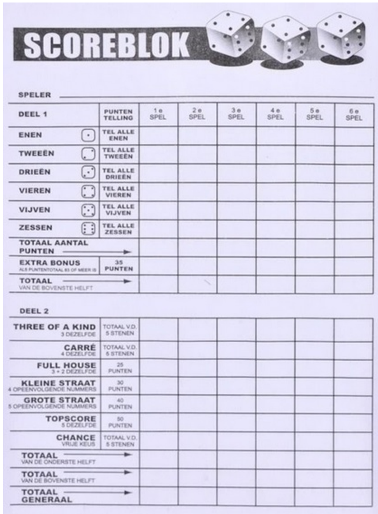
Toepassen

Opgave 15: Yahtzee

Bij het dobbelspel Yahtzee gooi je met vijf dobbelstenen. Bij dit spel kun je afhankelijk van het aantal ogen op de dobbelstenen op een scoreformulier een puntentotaal noteren.

a Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er bij het gooien met vijf dobbelstenen?

b Eén van de worpen die punten oplevert, is Grote Straat. Bij deze worp gooi je vijf opeenvolgende nummers. Hoeveel manieren zijn er om in één worp met vijf dobbelstenen Grote Straat te gooien?



SCOREBLOK

SPELER

DEEL 1	PUNTEN TELLING	1e SPEL	2e SPEL	3e SPEL	4e SPEL	5e SPEL	6e SPEL
ENEN	TEL ALLE ENEN						
TWEEËN	TEL ALLE TWEEËN						
DRIEËN	TEL ALLE DRIEËN						
VIEREN	TEL ALLE VIEREN						
VIJVEN	TEL ALLE VIJVEN						
ZESSEN	TEL ALLE ZESSEN						
TOTAAL AANTAL PUNTEN →							
EXTRA BONUS ALS PUNTENTOTAAL 63 OF MEER IS	35 PUNTEN						
TOTAAL → VAN DE BOVENSTE HELFT							

DEEL 2

THREE OF A KIND 3 DEZELFDE	TOTAAL V.D. 5 STENEN						
CARRÉ 4 DEZELFDE	TOTAAL V.D. 5 STENEN						
FULL HOUSE 3 + 2 DEZELFDE	25 PUNTEN						
KLEINE STRAAT 4 OPEENVOLGENDE NUMMERS	30 PUNTEN						
GROTE STRAAT 5 OPEENVOLGENDE NUMMERS	40 PUNTEN						
TOPSCORE 5 DEZELFDE	50 PUNTEN						
CHANCE VRIJE KEUS	TOTAAL V.D. 5 STENEN						
TOTAAL → VAN DE ONDERSTE HELFT							
TOTAAL → VAN DE BOVENSTE HELFT							
TOTAAL → GENERAAL							

Figuur 3.12

Testen

Opgave 16

Op vakantie naar de zon neem je vooral luchtige kleding mee. Bijvoorbeeld: twee paar schoenen, zes paar sokken, vier korte broeken en vijf shirts.

a Teken een wegendiagram van alle mogelijke combinaties van schoenen, sokken, broek en shirt.

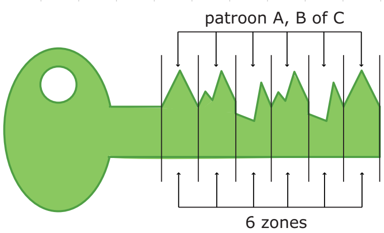
b Op hoeveel verschillende manieren kun je je zomers kleden?

c Op het strand heb je geen sokken en schoenen aan. Op hoeveel verschillende manieren kun je daar luchtig gekleed vertoeven?

Opgave 17

Voor cilindersloten worden verschillende soorten sleutels gemaakt. De sleutel die je hier ziet bestaat uit zes gedeelten. Voor elk gedeelte wordt één van de patronen A, B of C gekozen.

Hoe groot is de kans dat een willekeurige sleutel voor zo'n slot ook echt past?



Figuur 3.13

1.4 Machten en faculteiten

Inleiding

Bij het systematisch tellen heb je tot nu toe vooral gewerkt met diagrammen. Eigenlijk gaat dat alleen als het aantal mogelijkheden niet al te groot is. Want als je bijvoorbeeld met drie of meer dobbelstenen gaat gooien, dan wordt het aantal even waarschijnlijke uitkomsten al snel zo groot, dat een boomdiagram niet meer te maken is. Wegendiagrammen zijn dan nog wel te maken, maar daarin kun je weer niet zo gemakkelijk de afzonderlijke gunstige mogelijkheden tellen. Kortom: tijd voor het werken aan telsystemen. Daarbij is als eerste belangrijk om onderscheid te maken tussen situaties waarin herhaling optreedt en situaties waarin dat niet zo is.

Je leert in dit onderwerp

- werken met machten als je mogelijkheden telt in situaties waarin herhaling optreedt;
- werken met faculteiten als je mogelijkheden telt in situaties waarin steeds een mogelijkheid wordt afgestreept.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- werken met kansen.

Verkennen

Opgave V1

Het laatste deel van bankrekeningnummers bestaat uit 10 cijfers. Neem eens aan dat op elk van deze 10 posities elk cijfer kan voorkomen.

a Hoeveel bankrekeningnummers kun je zo maken?

b Het eerste cijfer mag geen 0 zijn. Hoeveel bankrekeningnummers kun je nu nog maken?

c Hoeveel bankrekeningnummers zijn er met allemaal verschillende cijfers in het laatste deel?

Uitleg

Bekijk het aantal ‘getallen’ dat bestaat uit twee eventueel gelijke cijfers: XY. Je weet dat er 100 zulke getallen bestaan (00 tot en met 99).

Iets meer in detail bekeken, kun je zeggen: voor ieder van de 10 keuzes op de X-positie (de tientallen) heb je 10 keuzes op de Y-positie (de eenheden). Het aantal mogelijke uitkomsten voor XY is dus $10 \cdot 10 = 100$.

Wil je het aantal getallen die bestaan uit drie cijfers berekenen, waarbij je alleen de cijfers 2 tot en met 9 mag gebruiken, dan kan dat op die manier snel: $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.

Stel je wilt het aantal getallen dat bestaat uit vier verschillende cijfers bepalen.

Als bij het getal van 4 cijfers herhaling van cijfers niet is toegestaan dan ziet het wegendiagram met alle mogelijkheden er zo uit:

Figuur 4.1

Het aantal mogelijkheden is: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Een boomdiagram tekenen neemt in deze situatie te veel tijd in beslag.

Opgave 1

Je hebt zes verschillende gekleurde kaartjes. Op die kaartjes wil je de letters A, B, C, D, E of F zetten.

a Op hoeveel manieren kan dat als je op meerdere kaartjes dezelfde letter toelaat?

b Op hoeveel manieren kan dat als elk kaartje een verschillende letter moet krijgen?

Opgave 2

Je hebt zes verschillende gekleurde kaartjes. Op elk kaartje wil je één van de letters van het alfabet zetten.

a Op hoeveel manieren kun je er letters op zetten als je op meerdere kaartjes dezelfde letter toelaat?

b Op hoeveel manieren kun je er letters op zetten als elk kaartje een andere letter moet krijgen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Trekking met terugleggen houdt in dat er bij elke keer een waarde trekken dezelfde aantallen mogelijke uitkomsten zijn. De kans op gebeurtenissen wijzigt dus ook niet.

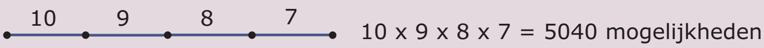
Trekking zonder terugleggen houdt in dat een waarde maar één keer getrokken kan worden. De aantallen mogelijke uitkomsten veranderen dus. De kans op een gebeurtenis wijzigt dus ook.

Bekijk het trekken van 4 elementen uit 10 verschillende elementen met terugleggen, waarbij je let op de uiteindelijke volgorde van het resultaat:

Figuur 4.2

Dan (met teruglegging) heb je $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$ mogelijke uitkomsten.
Hier bereken je het aantal uitkomsten dus met behulp van **machten** (dat is immers herhaald hetzelfde getal vermenigvuldigen!).

Bekijk het trekken van 4 elementen uit 10 verschillende elementen zonder herhaling, waarbij je let op de uiteindelijk volgorde van het resultaat:



Figuur 4.3

Dan (zonder terugleggen) heb je $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ mogelijke uitkomsten.
Een **permutatie** is een volgorde waarbij zonder terugleggen verschillende elementen worden gekozen. In dit geval gaat het om 4 uit 10 permutaties en je noteert ${}_{10}\text{P}_4$. Uiteraard is de volgorde van het resultaat hier belangrijk.

De vermenigvuldiging van de aflopende rij opeenvolgende getallen $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ wordt 10-**faculteit** genoemd.

10 faculteit schrijf je als $10!$ en $10! = 10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 3628800$.

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ is dus te berekenen als $\frac{10!}{6!}$.

Afgesproken is dat $0! = 1$. Deze afspraak valt misschien het beste te verklaren met de gedachte dat er maar 1 manier is om 0 dingen te trekken.

Je rekenmachine heeft een speciale functie om faculteiten en het aantal permutaties te berekenen. Bekijk daarvoor het **Practicum: Simulaties en tellen met de GR**.

Het aantal permutaties van 4 uit 10 is dan: ${}_{10}\text{P}_4 = 5040$.

Figuur 4.4

Voorbeeld 1

In Nederland bestaat een categorie kentekenplaten (op auto's) uit twee cijfers gevolgd door drie letters en daarna nog één cijfer. Alle letters en cijfers mogen worden gebruikt.
Hoeveel kentekens kun je maken als herhaling van letters en cijfers is toegestaan? En hoeveel als herhaling niet is toegestaan?

Figuur 4.5

Antwoord

Voor elk kenteken heb je drie cijfers nodig en er zijn tien verschillende cijfers. Je hebt dan totaal $10^3 = 1000$ verschillende mogelijkheden.
Voor elk kenteken heb je drie letters nodig en er zijn 26 verschillende letters. Je hebt $26^3 = 17576$ verschillende mogelijkheden voor de letters.
In totaal zijn er dus $10^3 \cdot 26^3 = 17576000$ mogelijke kentekenplaten. Dat is meer dan 17 miljoen. Als de tekens niet worden herhaald, zijn er $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 = 11232000$ mogelijkheden.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Er bestaan ook al nummerborden die er uitzien als X-123-XX. Neem weer aan dat alle letters en alle cijfers zijn toegestaan op elke positie.

a Heb je nu meer of minder of evenveel mogelijke nummerborden als herhaling is toegestaan? En als herhaling niet is toegestaan?

b Wat verandert er als je alleen maar letters zou gebruiken?

Opgave 4

Nummerborden van een bepaalde generatie auto's bestaan uit twee letters, weer twee letters en ten slotte twee cijfers. Bijvoorbeeld DB-TR-69. De letters I, O en Q worden niet gebruikt. Ga ervan uit dat verder alle letters en alle cijfers kunnen worden gebruikt.

a Hoeveel van deze nummerborden zijn er dan mogelijk?

b Hoeveel van deze nummerborden zijn er mogelijk als je geen letters en cijfers mag herhalen?

Opgave 5

Uit een aanbod van veertig boeken moet een jury nummer 1, nummer 2 en nummer 3 kiezen.

Wanneer de jury op goed geluk deze boeken uitkiest, zonder verder naar de inhoud te kijken, hoeveel verschillende keuzes zijn er dan mogelijk?

Voorbeeld 2

Tijdens de finale van de 100 meter hardlopen op de Olympische Spelen strijden acht lopers om drie medailles. De lopers zijn allemaal topatleten. Je neemt aan dat ze volkomen gelijkwaardig zijn. Op hoeveel manieren kunnen de medailles worden verdeeld?

Antwoord

Stel je een wegendiagram voor. Voor de eerste positie zijn acht mogelijke kandidaten, voor de tweede dan nog zeven en voor de derde nog zes.

Er zijn $8 \cdot 7 \cdot 6 = {}_8\text{P}_3 = 336$ mogelijke uitslagen.

Dit is het aantal mogelijke permutaties van drie elementen uit acht elementen.
De grafische rekenmachine kent hiervoor een speciale functie.

Figuur 4.6

Opgave 6

Bekijk goed wat je verstaat onder ‘permutaties’.

a Omschrijf wat je verstaat onder het aantal permutaties van tien elementen en bereken dit aantal.

b Wat versta je onder het aantal permutaties van drie uit tien elementen? Bereken dit aantal.

c Hoeveel permutaties van vijf uit honderd elementen zijn er mogelijk?

Opgave 7

Aan de herenfinale op de steeple-chase doen bij de Olympische Spelen vijftien mannen mee. De nummers 1, 2 en 3 komen op het erepodium.

a Op hoeveel manieren kunnen die ereplaatsen theoretisch worden verdeeld?

b Hoe groot is de theoretische kans op één van deze volgordes?

Verwerken

Opgave 8

In Nederland bestaat de postcode uit vier cijfers, gevolgd door twee letters. Op de eerste plaats van de cijfers staat nooit een 0. Neem aan dat verder alle andere cijfers mogelijk zijn. Neem ook aan dat elke letter op elk van die twee plaatsen mogelijk is.

Hoeveel postcodes zijn er dan in Nederland in totaal mogelijk?

Opgave 9

De tekens van een grafische rekenmachine bestaan uit puntjes: elk teken past in een rechthoekje van vijf bij zeven puntjes. Een teken wordt gemaakt door deze puntjes ‘aan’ of ‘uit’ te zetten.

Hoeveel tekens zijn er zo in principe mogelijk?

Opgave 10

Een groep van acht personen heeft kaartjes voor een concert gekocht. Ze zitten alle acht naast elkaar op één rij.

a Hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk?

b Eén van de acht wil per se de buitenste van de groep zijn.
Op hoeveel verschillende manieren kunnen ze nu nog zitten?

c Twee personen willen per se naast elkaar zitten.
Hoeveel verschillende volgordes zijn er nu nog mogelijk?

Opgave 11

Je werpt met vier dobbelstenen. Je let op het totaal aantal ogen.

Bereken de kans dat het totaal aantal ogen 23 of meer is.

Opgave 12

Een toets bestaat uit dertig meerkeuzevragen. Op elke meerkeuzevraag kun je uit vier antwoorden kiezen; er is telkens maar één antwoord goed.

a Hoeveel mogelijke series antwoorden zijn er?

b Je hebt de toets goed voorbereid en je weet de eerste 24 antwoorden zeker; de rest moet je gokken. Hoeveel mogelijke series antwoorden zijn er dan nog?

c De docent die de toets afneemt, is schappelijk en geeft iedere leerling drie ‘jokers’ om te gebruiken. Dit betekent dat als een leerling een vraag niet (of niet zeker) weet, deze leerling één van de jokers kan gebruiken op deze vraag. De vraag hoeft dan niet verder ingevuld te worden en wordt automatisch goed gerekend.

Je gebruikt je jokers in de situatie van b. Op hoeveel manieren kan dit?

d De vragen die je niet zeker weet, vul je op goed geluk in.
Hoe groot is de kans dat je alle antwoorden goed hebt?

Opgave 13

Je maakt getallen en gebruikt hierbij de cijfers 4, 5, 6, 7 en 8.

a Je maakt getallen van vijf cijfers.
Hoeveel getallen zijn er mogelijk als herhaling van cijfers is toegestaan?

b Je maakt getallen van vijf verschillende cijfers.
Hoeveel getallen zijn er mogelijk?

c Je maakt getallen van drie cijfers.
Hoeveel getallen zijn er mogelijk als herhaling van cijfers is toegestaan?

d Je maakt getallen van drie verschillende cijfers.
Hoeveel getallen zijn er mogelijk?

e Je maakt getallen boven de 65000 van vijf cijfers.
Hoeveel kun je er maken als je de cijfers meerdere malen kunt gebruiken?

f Je maakt getallen van vijf verschillende cijfers boven de 65000.
Hoeveel kun je er maken?

Toepassen

Opgave 14: Bingo

Bingo is een populair kansspel. Om te spelen moet een speler een Bingokaart kopen. Deze kaart bevat 5 rijen en 5 kolommen met willekeurige getallen. In het midden van de kaart is geen getal aanwezig. In de figuur zie je een voorbeeld van een Bingokaart.

De kolom onder de letter B bevat 5 getallen uit de reeks 1 tot en met 15. De kolom onder de letter I bevat 5 getallen uit de reeks 16 tot en met 30. De kolom onder de letter N bevat 4 getallen uit de reeks 31 tot en met 45. De kolom onder de letter G bevat 5 getallen uit de reeks 46 tot en met 60. De kolom onder de letter O bevat 5 getallen uit de reeks 61 tot en met 75. Elk getal komt niet vaker dan één keer per Bingokaart voor. Op elke Bingokaart staan dus 24 verschillende getallen. In elke kolom staan de getallen niet noodzakelijk op volgorde van grootte. Dus als je in Bingokaart 1 bijvoorbeeld de getallen 4 en 11 verwisselt, krijg je een andere Bingokaart.

B	I	N	G	O
4	18	32	48	71
11	25	45	54	62
13	19		51	67
8	24	39	49	74
1	27	36	59	63

Figuur 4.7 Bingokaart 1

a Toon aan dat er ongeveer $5{,}5 \cdot 10^{26}$ verschillende Bingokaarten mogelijk zijn.

Bij Bingo heeft de spelleider een bak met daarin 75 balletjes waarop de getallen 1 tot en met 75 staan. Tijdens een spel Bingo wordt telkens een balletje getrokken. Het getal op dat balletje wordt aan de spelers hardop voorgelezen. Als dat getal op een Bingokaart van een speler staat, kan de speler dat getal doorstrepen. Het getrokken balletje wordt niet teruggedaan in de bak. Zodra een speler alle 24 getallen op een kaart heeft doorgestreept, mag hij “BINGO!” roepen. De speler die als eerste “BINGO!” roept, wint een prijs. Dan is het spel afgelopen en kan een nieuw spel beginnen. Voor het spel maakt het dus niet uit hoe de getallen in de kolommen staan. In figuur 2 zie je Bingokaart 2 die is ontstaan door de getallen in elke kolom van de Bingokaart 1 in een andere volgorde te zetten.

B	I	N	G	O
11	18	39	49	47
4	25	45	51	67
1	19		54	63
8	27	32	48	71
13	24	36	59	62

Figuur 4.8 **Bingokaart 2**

De speler met Bingokaart 2 kan op precies hetzelfde moment “BINGO!” roepen als de speler met Bingokaart 1. We zeggen daarom dat Bingokaart 2 niet wezenlijk verschilt van Bingokaart 1.

b Bereken hoeveel verschillende Bingokaarten er kunnen bestaan die wezenlijk van elkaar verschillen.

Testen

Opgave 15

Je maakt getallen van vijf cijfers, die je kiest uit 0 tot en met 9.

a Hoeveel verschillende getallen zijn er mogelijk als ieder cijfer op elke positie is toegestaan?

b Hoeveel verschillende getallen zijn er mogelijk als de getallen niet met 0 mogen beginnen?

c Hoeveel van die getallen (als bij b) zijn er nog mogelijk als alle cijfers verschillend moeten zijn?

d Hoeveel getallen zijn er met vijf verschillende cijfers en boven de 43000?

Opgave 16

In de lottomachine zitten balletjes met de nummers 1 tot en met 41. Er worden één voor één zes balletjes uitgehaald. Het eerst getrokken balletje valt in het eerste bakje, het tweede in het tweede bakje, enzovoort.

a Hoeveel verschillende trekkingen zijn er mogelijk?

b Hoeveel van deze trekkingen leveren zes getrokken ballen met dezelfde nummers op?

c Je hebt op je lottoformulier aangekruist 1, 13, 17, 19, 31 en 41. Hoe groot is de kans dat die getallen in die volgorde worden getrokken?

d Hoe groot is de kans dat de getallen bij c worden getrokken, als de volgorde niet uitmaakt?

Practicum

Met de volgende practica kun je leren hoe je met de grafische rekenmachine met faculteiten kunt werken. Verder wordt er beschreven hoe permutaties en combinaties snel kunnen worden berekend, dat hoort vooral bij het volgende onderdeel.

- **Simulaties en de TI84**
- **Simulaties en de TInspire**
- **Simulaties en de Casio fx-CG50**
- **Simulaties en de HPprime**
- **Simulaties en de NumWorks**

1.5 Permutaties en combinaties

Inleiding

Je hebt kennis gemaakt met systematisch tellen, zowel met behulp van diagrammen als met behulp van machten en faculteiten. De term ‘permutaties’ is al voorbij gekomen. Het aantal permutaties van 3 uit 8 is het aantal manieren om drie verschillende elementen uit een totaal van 8 te halen. Maar vaak heb je niet allemaal verschillende elementen, maar groepjes dezelfde elementen. Daar gaat het nu over.

Je leert in dit onderwerp

- onderscheid maken tussen permutaties en combinaties;
- het aantal combinaties van r uit n elementen berekenen;
- werken met de driehoek van Pascal.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- machten en faculteiten toepassen bij telproblemen met of zonder herhaling;
- het aantal permutaties van r uit n elementen berekenen;
- werken met kansen.

Verkennen

Opgave V1

Acht hardlopers doen mee aan een wedstrijd over 100 meter. Ga ervan uit dat hun volgorde van aankomst uitsluitend van het toeval afhangt.

a Op hoeveel manieren kunnen deze acht hardlopers als eerste, als tweede en als derde aankomen?

b De eerste drie gaan door naar de volgende ronde. Hoeveel mogelijke drietallen zijn dat?

Uitleg

Bij de Olympische Spelen is de 100 m hardlopen een vast onderdeel. In de finale starten 8 lopers, zeg A, B, C, D, E, F, G en H. Ze strijden om goud, zilver of brons. Ga er vanuit dat alle lopers gelijkwaardig zijn. Je weet het aantal volgordes waarin alle hardlopers over de finish kunnen komen, permutaties dus: $8!$.
Hoeveel mogelijke lijstjes met drie medaillewinnaars kun je maken?

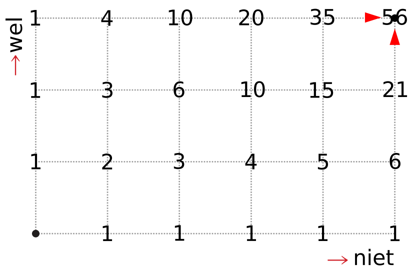
Het gaat hier om het aantal volgordes van 3 uit 8 waarbij de uiteindelijke volgorde van belang is: $8 \cdot 7 \cdot 6 = {}_8\text{P}_3 = 336$ mogelijkheden.

Maar in de voorrondes van de Spelen is het niet belangrijk of je nummer 1, nummer 2 of nummer 3 bent: de eerste drie gaan door naar de volgende ronde. De lijstjes BDG, BGD, DBG, GBD, DGB en GDB hebben dan allemaal hetzelfde resultaat. Dat zijn er 6 in totaal. Die tellen dan dus niet als afzonderlijke mogelijkheden, maar vormen samen één mogelijkheid. En dat geldt ook voor alle andere drietallen: de volgorde binnen die drietallen is niet belangrijk en die 6 (dus 3!) volgordes tellen telkens maar als één mogelijkheid mee. Dit betekent dat er geen 336 mogelijke lijstjes zijn, maar slechts 336 gedeeld door 3!, dus 56.

Dat kun je weergeven in een rooster van 3 bij 5. Elk element van de groep van 8 hoort dan wel of niet bij het uitverkoren drietal, je beweegt in het rooster alleen naar rechts (niet gekozen) of omhoog (wel gekozen).

Als je alle 8 hardlopers bij langs loopt en beslist of je hem/haar uitkiest, waarbij je er 3 kiest en 5 niet, krijg je een route in dit rooster. Op hoeveel manieren kun je dit doen?

Bedenk dat het aantal routes dat in elk punt bij elkaar komt telkens het aantal routes is, dat in het punt eronder en in het punt er links naast bij elkaar komt, bij elkaar opgeteld. Het is de som van de routes van de twee voorgangers.
Het aantal mogelijke (kortste) routes van linksonder naar rechtsboven is gelijk aan het aantal groepjes van 3 uit 8. En dat zijn inderdaad 56 combinaties.



Figuur 5.1

Opgave 1

Bestudeer in het **Practicum** hoe je je grafische rekenmachine kunt gebruiken bij telproblemen.

a Bereken zelf met de hand het aantal combinaties van 3 uit 8.

b Controleer het antwoord met de rekenmachine.

c Bereken eerst met de hand het aantal combinaties van 3 uit 100. Controleer het antwoord met de rekenmachine.

Opgave 2

Bekijk weer de **Uitleg**.

a Maak zelf een rooster voor het aantal besturen van 4 leden dat je uit 6 kandidaten kunt samenstellen.

b Bereken het aantal besturen van 4 leden uit 6 kandidaten met faculteiten.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je 3 elementen *zonder terugleggen* trekt uit 8 *verschillende* elementen en van de getrokken elementen is de *volgorde belangrijk*, dan heb je

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!} = {}_8\text{P}_3 = 336$$

mogelijke uitkomsten.

Korter gezegd: Het aantal **permutaties** van r uit n elementen is:

$${}_n\text{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Als de volgorde van de getrokken elementen er niet toe doet, zijn er minder mogelijke uitkomsten. Bij 2 getrokken elementen is het aantal mogelijke uitkomsten een factor 2 kleiner, bij 3 getrokken elementen een factor $3! = 6$, bij 4 getrokken elementen een factor $4! = 24$, en zo voort.

Als je 3 elementen *zonder terugleggen* trekt uit 8 *dezelfde of (gedeeltelijk) verschillende* elementen en van de getrokken elementen is de *volgorde niet belangrijk*, dan heb je

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8!}{5!} \cdot \frac{1}{3!} = 336 \cdot \frac{1}{6} = 56$

mogelijke uitkomsten.

Korter gezegd: Het aantal **combinaties** van r uit n elementen is: ${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{1}{r!}$.

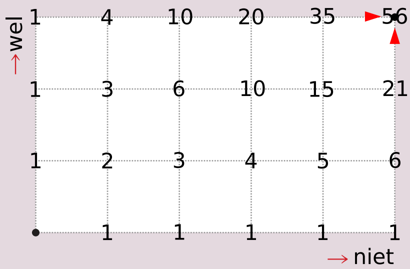
Het aantal combinaties van 3 uit 8 wordt ook geschreven als $\binom{8}{3}$ en uitgesproken als ‘ 8 boven 3’.

Combinaties kun je ook anders bekijken. Bij het aantal combinaties van 3 uit 8 gaat het er eigenlijk om de groep van 8 te verdelen in twee subgroepen, één van 3 en één van 5. Er geldt dus ${}_8\mathrm{C}_3 = {}_8\mathrm{C}_5$ en algemener: ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$.

Je kunt het aantal combinaties ook berekenen met een wel/niet rooster. Het aantal kortste routes naar het punt $(5,3)$ tel je vanuit het punt linksonder naar het punt rechtsboven door het aantal routes vanaf ieder eerder gepasseerd punt op te tellen: 56.

Berekening geeft: ${}_8\mathrm{C}_3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!} \cdot \frac{1}{3!} = 56$.

Bekijk in het **Practicum** hoe dit met je grafische rekenmachine gaat.



Figuur 5.2

Voorbeeld 1

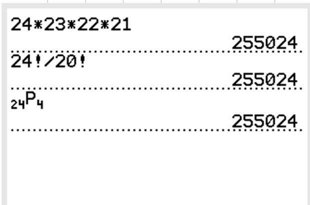
In een klas van 24 personen wordt door loting een groep van vier personen samengesteld. Deze vier personen krijgen elk een andere taak.
Op hoeveel manieren kan dit als er per taak wordt geloot?

Antwoord

Nu is de volgorde in de groep die wordt geloot van belang: ben je als eerste ingeloot dan heb je een andere taak dan wanneer je als tweede, of derde of vierde wordt ingeloot.

Het gaat nu dus om het aantal permutaties van 4 uit 24.

Er zijn daarom $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = \frac{24!}{(24-4)!} = \frac{24!}{20!} = 255024$ mogelijkheden.



Figuur 5.3

Opgave 3

Je hebt een groep van twintig personen; acht mannen en twaalf vrouwen.

a Uit de groep van twintig worden door loting vijf personen aangewezen. Elk van hen krijgt een andere opdracht.
Op hoeveel manieren kunnen de opdrachten verdeeld worden?

b Nu worden de vijf opdrachten (genummerd 1 tot en met 5) verdeeld tussen de mannen en vrouwen: drie van de vrouwen doen opdracht 1, 2 en 3, en twee van de mannen doen 4 en 5. De opdrachten worden willekeurig toegewezen.
Op hoeveel manieren kan dat?

Voorbeeld 2

In een klas van 24 personen wordt door loting een groep van vier personen gekozen. Deze vier personen krijgen elk een andere taak. Op hoeveel manieren kan dit als deze vier personen pas na de loting hun taken onderling verdelen?

Antwoord

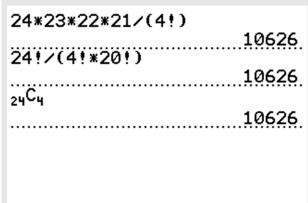
Nu is de volgorde in de groep die wordt geloot niet van belang: ze verdelen pas na de loting onderling hun taken.

Het gaat nu dus om het aantal combinaties van 4 uit 24.

Er zijn daarom

$$\binom{24}{4} = \frac{24!}{4! \cdot (24-4)!} = \frac{24!}{4! \cdot 20!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4!} = 23 \cdot 22 \cdot 21 = 10626$$

mogelijkheden.



Figuur 5.4

Opgave 4

Je hebt een groep van twintig personen, acht mannen en twaalf vrouwen.

Uit de groep van twintig worden door loting vijf personen gehaald. Elk van hen krijgt een bepaalde opdracht.
Op hoeveel manieren kan dat als ze de opdrachten na de loting onderling verdelen?

Voorbeeld 3

Uit een groepje van vijf meisjes en vier jongens kies je door loting een drietal.
Hoe groot is de kans dat daar minstens twee meisjes bij zijn?

Antwoord

Dit rooster laat het totaal aantal combinaties van 3 uit 9 zien.

Dat zijn er $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 84$.

(Je kunt dit ook uittellen is het rooster.)

Als er precies 2 meisjes bij moeten zijn, dan kun je bijvoorbeeld eerst 2 van de 5 meisjes kiezen en vervolgens 1 van de 4 jongens. Het aantal (kortste) routes gaat dan via A.

Van O naar A zijn er $\binom{5}{2} = 10$ mogelijke routes en bij elk van deze routes zijn er van A naar P nog eens $\binom{4}{1} = 4$ mogelijke routes.

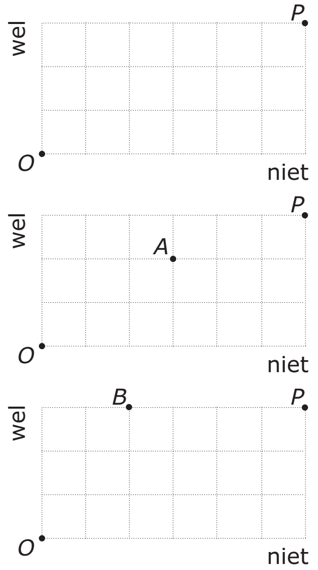
Dat zijn in $10 \cdot 4 = 40$ mogelijke routes.

Als er precies 3 meisjes bij moeten zijn, dan kun je bijvoorbeeld eerst 3 van de 5 meisjes kiezen en vervolgens geen van de 4 jongens.
Het aantal (kortste) routes gaat dan via B.

Van O naar B zijn er $\binom{5}{3} = 10$ mogelijke routes en bij elk van deze routes is er van B naar P nog maar 1 mogelijke route.
Dat zijn $10 \cdot 1 = 10$ mogelijke routes.

In totaal zijn er $40 + 10 = 50$ routes met 2 of 3 gekozen meisjes van de 84 mogelijke routes.

De gevraagde kans is dus $\frac{50}{84}$.



Figuur 5.5

Opgave 5

Gegeven is een groep van twintig mensen: acht mannen en twaalf vrouwen.

a Op hoeveel manieren kun je door loting een groep van vijf samenstellen die bestaat uit drie mannen en twee vrouwen?

b Hoe groot is de kans op een groep van vijf, bestaande uit drie mannen en twee vrouwen?

c Op hoeveel manieren kun je door loting een groep van vijf samenstellen die bestaat uit hoogstens drie mannen?

Opgave 6

Ga uit van een systeem met zeven schakelaars die allemaal 'aan' of 'uit' kunnen staan. Je ziet hier in een roosterdiagram alle mogelijkheden weergegeven.

a Op hoeveel manieren kun je nul van de zeven schakelaars aanzetten?

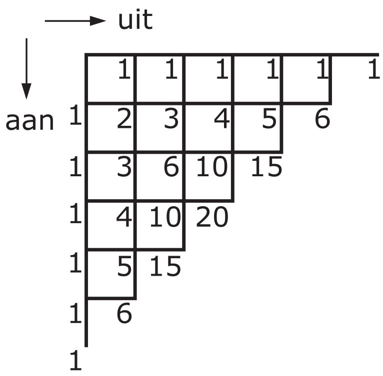
b Op hoeveel manieren kun je één van de zeven schakelaars aanzetten?

c Op hoeveel manieren kun je twee van de zeven schakelaars aanzetten?

d Het aantal manieren om drie van de zeven schakelaars aan te zetten is gelijk aan het aantal manieren om er vier van de zeven aan te zetten. Leg uit waarom dat zo is.

e Hoeveel mogelijkheden om zeven schakelaars aan of uit te zetten zijn er in totaal?

f Waarom is $\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7$?



Figuur 5.6

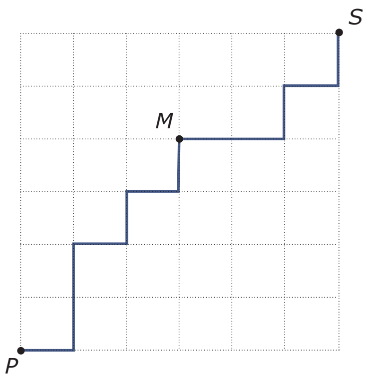
Opgave 7

Gebruik dit roosterdiagram.

a Hoeveel kortste routes zijn er van P naar M?

b Hoeveel kortste routes zijn er van M naar S?

c Hoeveel kortste routes zijn er van P naar S via M?

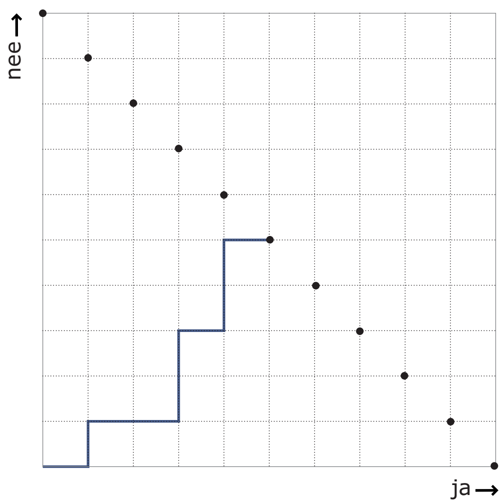


Figuur 5.7

Verwerken

Opgave 8

Iemand moet 10 vragen met 'ja' of 'nee' beantwoorden. In de figuur is een mogelijke lijst antwoorden in een rooster weergegeven met behulp van een lijn. Je ziet dat op vraag 1 'ja' gezegd is, de lijn is horizontaal.



Figuur 5.8

a Wat is bij die lijst het antwoord op vraag 6?

b Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er mogelijk met precies drie keer 'ja'?

c Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er in totaal mogelijk?

d Hoe groot is de kans dat je alle vragen goed beantwoordt als je dat volledig op de gok doet?

Opgave 9

Voor een schaaktoernooi hebben zich 24 deelnemers gemeld. Ze spelen een halve competitie, dus elke deelnemer speelt precies één maal tegen iedere andere deelnemer. Het aantal wedstrijden kan nu worden berekend met behulp van combinaties.

Leg uit waarom dat zo is en bereken het aantal te spelen wedstrijden.

Opgave 10

Je gooit met vijf verschillende geldstukken en je let op het aantal keren 'kop'.

a Hoeveel uitkomsten zijn er mogelijk?

b Hoeveel mogelijke worpen met precies twee keer 'kop' zijn er?

c Hoe groot is de kans op precies twee keer 'kop'?

Je gooit nu met 50 geldstukken.

d Hoe groot is de kans op 20 keer 'kop'?

Opgave 11

Een groep bestaat uit veertien meisjes en twaalf jongens. Er wordt een groepje van vier door loting uitgekozen.

a Als het groepje uitsluitend uit meisjes moet bestaan, hoeveel verschillende groepjes zijn er dan mogelijk?

b Beantwoord dezelfde vraag als het groepje uit twee jongens en twee meisjes moet bestaan.

Opgave 12

Je wilt acht verschillende boeken op een boekenplank sorteren. Op hoeveel manieren kun je de boeken neerzetten als geldt:

a Iedere volgorde is toegestaan.

b De drie wiskundeboeken moeten bij elkaar staan.

c De twee woordenboeken moeten op het rechtereind van de rij naast elkaar staan.

d Er worden drie boeken uitgekozen om te worden gekaft en dan naast elkaar aan een uiteinde gezet. (Gekafte boeken beschouwen we niet als onderling verschillend.)

Opgave 13

Je werpt met drie dobbelstenen en let op het aantal ogen dat boven komt.

a Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er mogelijk?

b Je kunt op verschillende manieren 12 ogen gooien. Bijvoorbeeld door driemaal 4 te gooien, maar ook door een 6 en tweemaal 3 te gooien.
Bereken bij elke mogelijkheid de bijbehorende kans.

Toepassen

Opgave 14: Filmavond

Een groep vrienden houdt een filmavond. Ze zijn fans van drie genres films, en hebben uit die genres aardig wat films om te kiezen. Om precies te zijn: 29 Godzillafilms, vijf comedies, en twaalf tekenfilms.
Ze kiezen drie films uit. Bij de vragen staan verschillende voorwaarden. Bereken telkens het aantal mogelijke drietallen.

a Het maakt niet uit uit welk van de drie groepen de films komen, of in welke volgorde ze gekeken worden, er worden er gewoon drie gekozen.

b Er wordt uit ieder genre een film gekeken, maar het maakt niet uit in welke volgorde.

c Er worden twee Godzillafilms gekeken en een willekeurige derde van een ander genre, en het maakt wel uit in welke volgorde.

d Er worden ofwel drie Godzilla films, ofwel drie comedies, ofwel drie tekenfilms gekeken, maar in ieder geval wordt dan wel het willekeurige drietal gesorteerd op volgorde van jaartal. Ga er hier van uit dat er per groep niet meerdere films uit hetzelfde jaar komen.

Testen

Opgave 15

Een volleybalteam bestaat uit twaalf spelers. De coach bepaalt welke spelers worden opgesteld en welke van de zes posities in het veld zij innemen.

a Als alle spelers even sterk zijn en op elke positie kunnen spelen, op hoeveel manieren kan de coach dan een team van zes samenstellen?

b Als hij dat team heeft samengesteld, hoeveel verschillende beginopstellingen kan hij dan nog maken?

Opgave 16

Een klas bestaat uit 26 leerlingen.

a Op hoeveel manieren kun je al die leerlingen op een rij zetten?

b Op hoeveel manieren kun je vijf van de 26 leerlingen op een rij zetten?

c Op hoeveel manieren kun je een groepje van vijf uit de 26 kiezen?

d Er zitten tien meisjes in deze klas. Op hoeveel manieren kun je een groepje van vijf leerlingen kiezen als daar precies twee meisjes in moeten voorkomen?

Practicum

Met de volgende practica kun je leren hoe je met de grafische rekenmachine met faculteiten kunt werken. Verder wordt er beschreven hoe permutaties en combinaties snel kunnen worden berekend.

- **Simulaties en de TI84**
- **Simulaties en de TInspire**
- **Simulaties en de Casio fx-CG50**
- **Simulaties en de HPprime**
- **Simulaties en de NumWorks**

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Kansen en tellen**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- kansexperiment — gebeurtenis — experimentele kans — relatieve frequentie — simulatie
- aselect — theoretische kans — wet van de grote aantallen
- wegendiagram — boomdiagram — venndiagram
- *n*-faculteit — permutaties
- permutaties — combinaties — driehoek van Pascal

Activiteitenlijst

- kansen bepalen op grond van kansexperimenten en/of simulaties
- kansen bepalen op grond van redeneringen met even waarschijnlijke mogelijkheden
- diagrammen gebruiken om mogelijkheden te tellen
- machten en faculteiten gebruiken om mogelijkheden te tellen
- mogelijkheden tellen met behulp van permutaties en combinaties en de driehoek van Pascal

Achtergronden

Al heel lang beproeft de mens zijn geluk bij zogenaamde ‘kansspelen’. In de prehistorie gokte men op de uitkomsten van het gooien met het ‘sprongbeen’, een vroege vorm van onze dobbelsteen. Bij opgravingen in Ur (een stad in het Oude Mesopotamië) is een bordspel teruggevonden en zijn dobbelstenen in de vorm van een viervlak aangetroffen. Later (veertiende eeuw na Christus) ontstonden kaartspelen. En natuurlijk konden verwoede gokkers inzetten op uitslagen van wedstrijden.

Het duurde echter tot de veertiende eeuw voordat wiskundigen zich met het gokken gingen bezighouden. Een eerste vraagstuk (wat voor het eerst in een Italiaans geschrift uit 1380) was het **partijenvraagstuk**. Dat luidde als volgt:

> Twee partijen spelen een balspel om punten. Ze hebben beide een even grote kans om een punt te scoren. Er is geen tijdsduur voor het spel vastgelegd en de partij die als eerste 6 punten gescoord heeft, wint de pot van 60 dukaten. Het spel moet (vanwege het weer) bij de stand 5-3 worden gestaakt. Er wordt besloten de pot te verdelen. De vraag is nu: hoe moet dat gebeuren?

De Italiaanse wiskundige **Luca Pacioli (1445—1517)** bedacht in 1494 dat de pot moest worden verdeeld in de verhouding 5:3 (de stand bij afbreken), maar zijn collega **Girolamo Cardano (1501—1576** vond dat je rekening moest houden met de nog te scoren punten. In die tijd konden de wiskundigen geen bevredigende oplossing verzinnen.

Testen

Opgave 1

Iemand werpt met twee viervlaksdobbelstenen. Dergelijke dobbelstenen hebben de vorm van een regelmatig viervlak met daarop de getallen 1, 2, 3 en 4. Er wordt gelet op de som van de getallen die onder komen te liggen.

a Simuleer met behulp van toevalsgetallen veertig worpen met twee van die dobbelstenen. Hoe groot is de experimentele kans op 4?

b Hoe groot is de theoretische kans op 4?

Opgave 2

De Toto is een spel waarbij je voetbaluitslagen voorspelt. Bij Toto13 voorspel je van dertien wedstrijden of de thuisclub wint, verliest of gelijkspeelt.

a Hoe groot is de kans dat je een wedstrijd juist voorspelt als je geen enkel verstand van voetbal hebt?

b Hoeveel verschillende Toto13 uitslagen zijn er in totaal mogelijk?

c Hoe groot is de kans dat je alle dertien wedstrijden goed voorspelt? Geef je antwoord in wetenschappelijke notatie.

d Hoeveel Toto13 uitslagen zijn er met slechts twee foute voorspellingen?

e Hoeveel Toto13 uitslagen zijn er met hoogstens twee foute voorspellingen?

f Hoe groot is de kans dat je hoogstens twee wedstrijden fout voorspelt? Geef je antwoord in wetenschappelijke notatie.

Opgave 3

Een gezin bestaat uit vier personen: vader Jan, moeder Jannie, kinderen Wim en Maria. Twee van hen moeten de afwas doen. Wie dat zijn wordt bepaald door loting.

a Hoe groot is de kans dat beide kinderen de afwas moeten doen?

b Hoe groot is de kans dat beide mannelijke gezinsleden moeten afwassen?

Opgave 4

Het dominospel bestaat uit 28 stenen. Elke steen bestaat uit twee helften. Op elke helft komen 0, 1, 2, 3, 4, 5, of 6 ogen voor. Je kiest aselect één steen.

a Laat zien waarom er 28 verschillende dominostenen zijn.

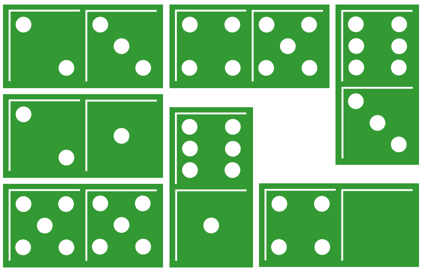
b Hoe groot is de kans dat je een ‘dubbele’ kiest (aan beide kanten evenveel ogen)?

c Hoe groot is de kans dat de som van het aantal ogen minstens 10 is?

d Hoe groot is de kans dat het verschil van het aantal ogen hoogstens 2 is?

e Hoe groot is de kans dat het grootste aantal ogen op een steen 3 is?

f



Figuur 6.1

Je speelt met Petra een spelletje domino. Jullie krijgen allebei zeven stenen. In de figuur zie je de stenen die je hebt gekregen.

Jij begint het spel met de 'dubbel-vijf'. Hoe groot is de kans dat Petra kan aanleggen? Geef je antwoord in procenten.

Opgave 5

Als je twee opeenvolgende verkiezingen voor de Tweede Kamer met elkaar vergelijkt, dan zie je dat mensen regelmatig van partij veranderen. Aan 415 Nederlanders die beide keren hebben gestemd, is gevraagd op welke partij dat was. De gegevens staan in de tabel. De categorie 'overige' wordt opgevat als één partij.
Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat een willekeurig gekozen ondervraagde:

		vorige keer				
		CDA	PvdA	VVD	D'66	Overigen
deze keer	CDA	55	2	0	3	5
	PvdA	3	71	6	3	8
	VVD	20	5	68	2	4
	D'66	4	9	10	57	5
	Overigen	11	17	12	8	27

Figuur 6.2

a de vorige keer op het CDA stemde.

b deze keer op de PvdA stemt.

c weer op zijn eigen partij stemt.

d die de vorige keer op de PvdA stemde nu op het CDA stemt.

e die de vorige keer op D'66 stemde nu op een andere partij stemt.

Opgave 6

De leerlingenraad bestaat uit 22 personen, verdeeld over diverse jaargroepen. Er zitten acht leerlingen uit de bovenbouw en veertien leerlingen uit de onderbouw in. Er moet een dagelijks bestuur worden gekozen van vijf personen (voorzitter, secretaris, penningmeester, vice-voorzitter en vice-secretaris).

a Op hoeveel manieren kun je dit dagelijks bestuur kiezen als men pas achteraf de functies onderling verdeelt?

b Op hoeveel manieren kun je dit dagelijks bestuur samenstellen als de leden in functie worden gekozen?

c Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als het moet bestaan uit twee leerlingen uit de onderbouw en drie uit de bovenbouw?

d Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als er minstens één onderbouwleerling deel van moet uitmaken?

e Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als de voorzitter uit de bovenbouw moet komen?

Opgave 7

Er worden voor Sinterklaas in een gezin van vier personen lootjes getrokken. Als iemand zijn eigen naam trekt moet er opnieuw worden geloot.

Hoe groot is de kans dat dit het geval is?

Toepassen

Opgave 8: Mantoux-reactie

Ongeveer $0{,}02\%$ van alle mensen lijdt aan TBC (tuberculose). Om te onderzoeken of iemand met TBC is besmet wordt er vlak onder de huid een stof ingebracht waarop 98% van de mensen die aan TBC lijden positief reageert. Echter ook ongeveer 1% van de mensen die niet aan TBC lijden reageert er positief op. Deze test heet de Mantoux-test.

a Maak van de gegevens een tabel. Ga uit van $1.000.000$ mensen.

b Iemand ondergaat deze Mantoux-test en reageert positief. Hoe groot is de kans dat hij niet aan TBC lijdt?

Opgave 9: Erfelijkheidsleer

Een bekende toepassing van de kansrekening in de biologie is de **erfelijkheidsleer**. Een leeuwenbekje is een plantje dat zowel in de kleuren rood, wit als roze voorkomt. Het is verbazingwekkend dat witte en rode planten alleen roze nakomelingen krijgen, en dat van roze planten de nakomelingen wit, rood of roze zijn. Om dit te begrijpen moet je het een en ander weten van chromosomen, genen en celdeling en de **wetten van Mendel**. Maar ook van kansrekening.

Op chromosomen worden de erfelijke eigenschappen vastgelegd in de genen. Bij veel levende wezens horen bij iedere eigenschap twee genen, een gen van de moeder en een gen van de vader. Voor het leeuwenbekje bijvoorbeeld geldt:

- De kleur wordt bepaald door de genen R en r.
- Een rood leeuwenbekje heeft twee R-genen, is dus van het type RR.
- Een wit leeuwenbekje heeft twee r-genen, is dus van het type rr.
- Een roze leeuwenbekje is van het type Rr.

In een kruisingstabel kun je zien wat er gebeurt als je een rood met een wit leeuwenbekje kruist. En zo kun je ook laten zien wat

wit \ rood	R	R
r	rR	rR
r	rR	rR

roze \ roze	r	R
r	rr	rR
R	rR	RR

Figuur 6.3

er gebeurt als je twee roze leeuwenbekjes kruist: de helft van de nakomelingen wordt weer roze, maar $\frac{1}{4}$ deel wordt rood en $\frac{1}{4}$ deel wordt wit.

Cavia's komen voor in drie kleuren, bruingeel, lichtgeel en wit. Die kleuren worden bepaald door een gen dat in twee typen voorkomt, te weten B en b. Een cavia van het type BB is bruingeel, een cavia van het type bb is wit, een cavia van het type Bb is lichtgeel.

a Een bruingele cavia wordt gekruist met een witte cavia. Stel de bijbehorende kruisingsmatrix op.

b Lichtgele cavia's worden onderling gekruist. Dit levert 134 bruingele, 265 lichtgele en 137 witte cavias op. Verklaar deze aantallen met behulp van een kruisingsmatrix.

c Wat kun je verwachten van de nakomelingen bij de kruising van een lichtgele en een witte cavia?

Opgave 10: Het binomium van Newton

Het ‘binomium van Newton’ is een belangrijke stelling die zegt dat iedere term van de vorm $(a+b)^n$ geschreven kan worden als:

$$\binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n.$$

Dus bijvoorbeeld is $(a+b)^1 = \binom{1}{0} \cdot a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} \cdot a^0 \cdot b^1 = a+b$;

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} \cdot a^2 \cdot b^0 + \binom{2}{1} \cdot a^1 \cdot b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^0 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

enzovoort.
In deze opgave ga je Newton's binomium onderzoeken.

a Schrijf $(a+b)^3$ uit op de ‘oude’ manier (door haakjes weg te werken).

b Gebruik nu het binomium van Newton om $(a+b)^3$ uit te schrijven.

Je gaat nu de algemene stelling een beetje aannemelijk maken. Je hebt drie muntjes, ieder met de letters a en b aan weerszijden. Je werpt alle muntjes en bekijkt wat er boven komt.

c Hoeveel mogelijkheden zijn er?

d Ervan uitgaande dat de volgorde niet uitmaakt, welke mogelijkheden zijn er?

e Bij de mogelijkheden van c, hoeveel volgordes zijn er per mogelijkheid?

f Formuleer op grond van je antwoorden bij c, d en e een verklaring voor het binomium van Newton voor algemene n.

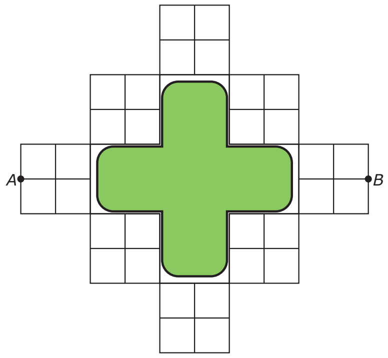
Examen

Opgave 11: Vijver

Hier zie je een plattegrond van paden rond een kruisvormige vijver. Een route van A naar B moet zo kort mogelijk zijn en mag niet buiten de paden leiden.

Hoeveel routes van A naar B zijn er mogelijk?

(bron: examen wiskunde A havo 1989, eerste tijdvak)



Figuur 6.4

2

Ruimtelijke figuren

2.1 Projecties

Inleiding

Je ziet een foto van een gebouw. Het bovenste deel kun je je voorstellen als een wiskundige balk (dus met rechte hoeken). Zo'n balk heeft drie groepen evenwijdige lijnen. Een foto is een weergave ervan op een plat vlak. Je ziet dat evenwijdige lijnen nu niet langer evenwijdig zijn, er vindt dus vertekening plaats. Hoe krijg je er een afbeelding van, waarbij deze vertekening van evenwijdigheid niet optreedt?

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- wat bedoeld wordt met een parallelprojectie;
- met behulp van parallelprojectie ruimtelijke figuren tekenen (kubus, piramide)
- de belangrijke eigenschappen van de parallelprojectie.

Voorkennis

- ruimtelijke figuren en hun eigenschappen (lichamen), zoals balk, kubus, bol en piramide;
- eigenschappen van ruimtelijke figuren gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

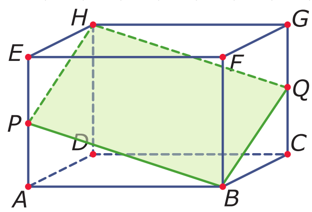
Je ziet een afbeelding van een balk. Er is een vlak $PBQH$ in getekend, P en Q zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.

a Welke drie groepen lijnstukken zijn in werkelijkheid evenwijdig?

b Welke vorm heeft het zijvlak $BCGF$ in werkelijkheid?

c Welke vorm heeft het diagonaalvlak $ACGE$ in werkelijkheid?

d Welke vorm heeft het vlak $PBQH$ in werkelijkheid?



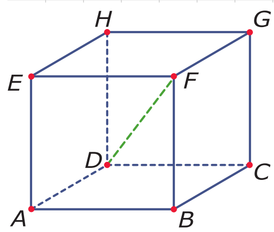
Figuur 1.2

Uitleg

Bij het afbeelden van ruimtelijke figuren op een plat vlak, kunnen niet alle eigenschappen van de ruimtelijke figuur behouden blijven. Bekijk deze projectie van een kubus op een plat vlak. De hoekpunten worden aangegeven met de letters A tot en met H. De afbeelding is op een speciale manier gemaakt, zo zie je bijvoorbeeld:

- Ribben die in werkelijkheid parallel zijn, zijn in de afbeelding ook evenwijdig.
- Ribben die in werkelijkheid evenwijdig en even lang zijn, zijn in de afbeelding ook evenwijdig en even lang.
- Niet alle hoeken in de afbeelding zijn even groot als ze in werkelijkheid zijn. Zo is $\angle BAD$ in de afbeelding niet recht, terwijl dat in werkelijkheid wel zo is.

Opmerking: de niet evenwijdige, maar wel even lange ribben van de kubus kunnen in de afbeelding toch ook even lang zijn. Of dat zo is, hangt af van de manier waarop de kubus wordt afgebeeld.



Figuur 1.3

Omdat niet alle eigenschappen van de kubus in deze afbeelding goed te zien zijn, moet je soms een andere vlakke figuur maken. Zo zie je in de afbeelding lichaamsdiagonaal DF. Wil je die op ware grootte zien, dan kun je diagonaalvlak $DBFH$ als een rechthoek en op ware grootte tekenen.

Opgave 1

Bekijk de afbeelding van de kubus $ABCD.EFGH$ in de **Uitleg**. Neem aan dat alle ribben van de kubus 4 cm lang zijn.

a Welke vorm heeft vlak $ABFE$ in werkelijkheid?

b Welke ribben zijn evenwijdig met ribbe AD?

c Teken vlak $ABCD$ op ware grootte en in de juiste vorm. Je kunt nu de lengte van BD opmeten. Controleer jouw antwoord met een berekening.

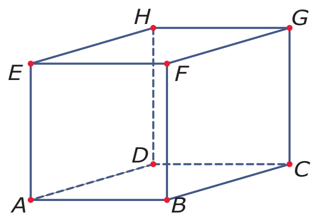
d Teken diagonaalvlak $DBFH$ op ware grootte (en in de juiste vorm). Bepaal de lengte van lichaamsdiagonaal DF in één decimaal nauwkeurig. Controleer jouw antwoord met behulp van een berekening.

e Maak zelf een afbeelding van deze kubus. Zorg ervoor dat $ABFE$ op ware grootte wordt getekend en dat parallelle en even lange ribben in de afbeelding evenwijdig en even lang zijn.

Opgave 2

Bekijk deze afbeelding van een balk. In deze figuur geldt: Alle lijnstukken in de projectie zijn even lang, $ABFE$ en $DCGH$ zijn beide een vierkant en AB en DC zijn evenwijdig.

In werkelijkheid kunnen AB, BC, en CG drie verschillende lengtes hebben.



Figuur 1.4

a Voldoet de afbeelding aan de regel: ‘Ribben die in werkelijkheid parallel en even lang zijn, zijn in de afbeelding evenwijdig en even lang.’?

b Als alle ribben van een balk even lang zijn, is het een kubus. Kan de afbeelding bij deze vraag de afbeelding van een kubus zijn?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De afbeelding van een ruimtelijke figuur op een plat vlak heet een **projectie** van dit lichaam. De hoekpunten van het lichaam worden dan door kijklijnen geprojecteerd op het tekenvlak.

Omdat dit een vereenvoudiging van het lichaam is, heeft de afbeelding niet meer alle eigenschappen van het lichaam. Soms wordt dit vertekening genoemd.

Bij **parallelprojectie** lopen de kijklijnen parallel. Deze projectie wordt in het onderwijs veel toegepast. Eigenschappen van de parallelprojectie zijn:

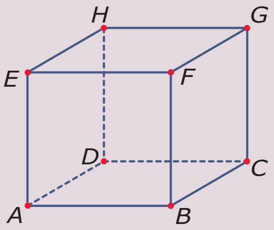
- ribben evenwijdig aan het tekenvlak worden op ware grootte afgebeeld;
- ribben die parallel zijn, worden evenwijdig aan elkaar afgebeeld;

- ribben die parallel en even lang zijn, worden ook even lang afgebeeld (dit betekent onder andere dat het midden van een lijnstuk ook in de figuur in het midden zit).

Eigenschappen die niet (altijd) behouden blijven bij parallelprojectie zijn bijvoorbeeld hoeken en lengtes van lijnstukken die niet evenwijdig aan het tekenvlak lopen.

Bekijk deze parallelprojectie van een kubus $ABCD.EFGH$.

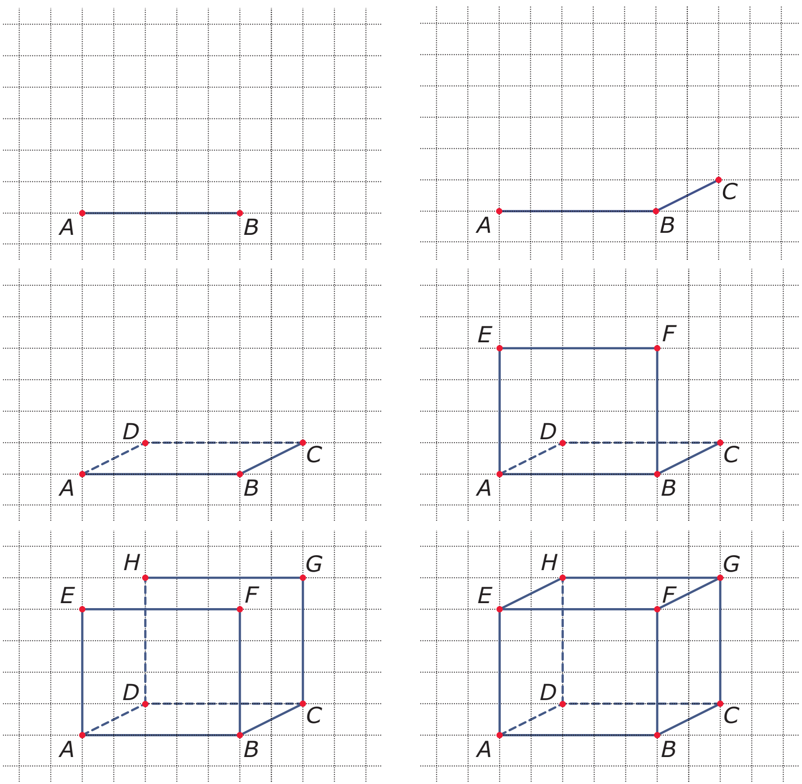
De ribben AB, BF, FE, AE en DC, CG, GH, DH zijn evenwijdig aan het tekenvlak en dus op ware grootte. De vierkanten $ABFE$ en $DCGH$ zijn ook in de tekening vierkant. De ribben BC, FG, AD, EH zijn ook in de tekening evenwijdig. Ze zijn iets korter gemaakt om de figuur echt op een kubus te laten lijken. Op een blanco tekenblad werk je met een **wijkhoek** (bijvoorbeeld de hoek tussen BC en het verlengde van AB) en een **verkortingsfactor** (de vergrotingsfactor van de lengte van BC ten opzichte van die van AB).



Figuur 1.5

Voorbeeld 1

Je ziet hoe je zelf op roosterpapier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$, $AD = 4$ en $AE = 4$ kunt tekenen. Merk op dat $BC = AD = 4$ korter wordt getekend. Op een rooster is het handig om de ribben schuin naar achteren te tekenen als '2 naar rechts 1 omhoog'.



Figuur 1.6

Opgave 3

Je ziet in **Voorbeeld 1** hoe je op een rooster een parallelprojectie van een balk maakt. Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 4$, $BC = 4$ en $AE = 6$.

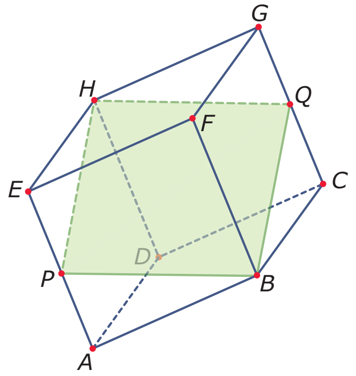
Teken hiervan een parallelprojectie waarbij het vlak $ABEF$ op ware grootte te zien is.

Opgave 4

Maak op een cm-rooster een parallelprojectie van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ waarvan het grondvlak een vierkant is met $AB = 4$ cm en de hoogte $TS = 6$ cm, waarbij S het snijpunt van de diagonalen AC en BD van het grondvlak is.

Voorbeeld 2

Bekijk de kubus $ABCD.EFGH$. Alle ribben hebben in werkelijkheid een lengte van 4 cm. P is het midden van AE en Q is het midden van CG.
Welke vorm heeft de vierhoek $PBQH$ in werkelijkheid?



Figuur 1.7

Antwoord

De zijden van vierhoek $PBQH$ zijn allemaal even lang. Immers ze zijn allemaal de schuine zijde in een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 2 cm en 4 cm.

De diagonalen van vierhoek $PBQH$ zijn niet even lang, want $PQ < BH$.

De hoeken van $PBQH$ zijn niet recht. De hoeken bij B en H zijn scherp (kleiner dan een rechte hoek). Bijvoorbeeld is $\angle PBQ < \angle ABC$. De hoeken bij P en Q zijn stomp (groter dan een rechte hoek).

Vierhoek $PBQH$ is daarom een ruit. Je kunt dat zien als je de figuur zo zou kunnen draaien dat je loodrecht op vierhoek $PBQH$ kijkt. Je moet hem dan draaien tot punt F recht boven het midden van vlak $ABCD$ ligt.

Opgave 5

Bekijk nog eens kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 4 cm uit **Voorbeeld 2**.

a Bepaal de lengte van BP in één decimaal nauwkeurig.

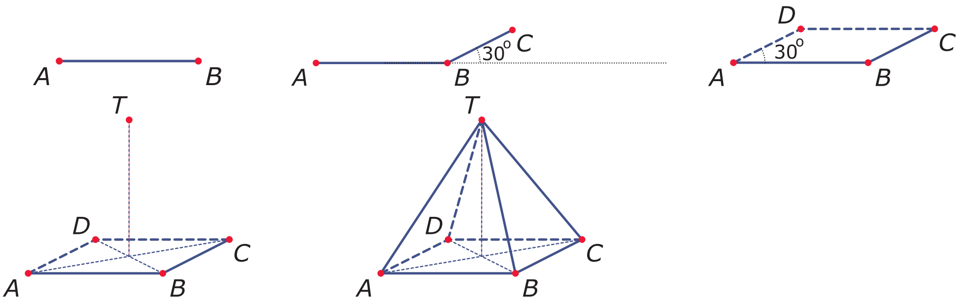
b Leg uit waarom $PBQH$ een ruit is.

c Om die ruit op ware grootte te kunnen tekenen, moet je behalve de lengte van zijde BP nog de lengte van een diagonaal bepalen. Bepaal de lengte van diagonaal PQ in één decimaal nauwkeurig door een geschikt vlak op ware grootte te tekenen.

d Teken nu ruit $PBQH$ op ware grootte.

Voorbeeld 3

Bekijk hoe je een parallelprojectie maakt van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ op een blanco tekenblad. Je gebruikt een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van $0{,}5$.



Figuur 1.8

Het grondvlak van een piramide is vierkant $ABCD$ met ribben van 4. De hoogte TS is 5. De constructie gaat zo:

- Teken eerst lijnstuk $AB = 4$ en teken bij B een hoek van 30°.
- Teken BC maar nu met een verkorte lengte: $0{,}5 \cdot 4 = 2$.
- Vervolgens teken je met behulp van evenwijdige lijnen punt D.
- Omdat de piramide regelmatig is, zit de top T recht boven het snijpunt S van de diagonalen AC en BD. Je tekent dus eerst S en dan 5 recht daarboven punt T.
- Ten slotte teken je de opstaande ribben en de figuur is klaar.

Opgave 6

Je hebt gezien hoe je een parallelprojectie tekent op een blanco papier met behulp van een wijkhoek en een verkortingsfactor.

a Teken een parallelprojectie van een kubus met ribben van 4 cm. Neem een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van $0{,}5$.

b Teken een parallelprojectie van een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 4$, $BC = 8$ en $AE = 2$. Neem een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van $0{,}5$.

c Teken een parallelprojectie van een regelmatige vierzijdige piramide $T \cdot ABCD$ met $AB = 4$, $BC = 4$ en hoogte $TS = 2$ waarbij S het snijpunt van de diagonalen AC en BD van het grondvlak is. Neem een wijkhoek van 60° en een verkortingsfactor van $0{,}5$.

Opgave 7

Van een driehoekig prisma $ABC.DEF$ is het grondvlak ABC een gelijkzijdige driehoek met zijden van 4. De hoogte AD van het prisma is ook 4.

a Teken dit driehoekige prisma $ABC.DEF$ in parallelprojectie op een rooster.

P is het midden van DE, Q is het midden van EB en R is het midden van EF.

b Teken de driehoek PQR in de figuur en op ware grootte.

Verwerken

Opgave 8

Gegeven is een piramide $T.ABCD$ met een vierkant grondvlak en top T boven het midden van het grondvlak.
Welke zijden van deze piramide worden bij iedere parallelprojectie evenwijdig getekend?

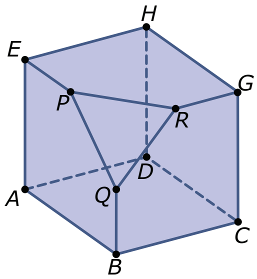
Opgave 9

Bekijk de afgeknotte kubus met ribben van 6 cm. De punten P, Q en R zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.

a Teken een parallelprojectie van deze afgeknotte kubus met een wijkhoek van $30°$ en een verkortingsfactor van $0{,}5$. Gebruik $ABQPE$ als voorvlak.

b Teken ΔPQR op ware grootte.

c Het diagonaalvlak $DBQSH$ is een vijfhoek. Teken dit diagonaalvlak van de afgeknotte kubus op ware grootte.



Figuur 1.9

Opgave 10

Gegeven is een regelmatige piramide $T.ABCD$ waarvan het vierkant $ABCD$ het grondvlak is. De zijden van $ABCD$ zijn 6 cm en de hoogte TS van de piramide is 10 cm. S is het snijpunt van AC en BD.

a Teken een parallelprojectie van deze piramide op een rooster.

b Verdeel alle zijden van het grondvlak in drie gelijke delen. Licht je werkwijze toe.

c Verbind de getekende punten in het grondvlak, zodat je een achthoek krijgt.

d Is deze achthoek het grondvlak van een regelmatige achtzijdige piramide? Licht je antwoord toe.

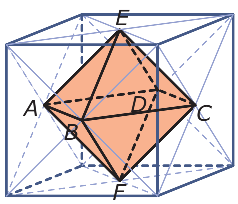
Opgave 11

Als je de middens van de grensvlakken van een kubus met elkaar verbindt, dan krijg je een octaëder (regelmatig achtvlak) $ABCDEF$. Van dit octaëder is $AC = BD = EF = 8$ cm.

a Teken een parallelprojectie van het octaëder.

b Welke vorm hebben alle grensvlakken van het octaëder? Teken één ervan op ware grootte.

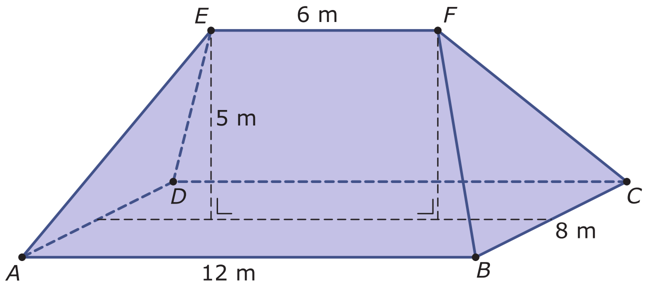
c Welk lichaam heeft als hoekpunten de middens van de zijden van het octaëder?



Figuur 1.10

Opgave 12

Je ziet een zogenaamd schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit.



Figuur 1.11

a Teken een parallelprojectie van dit schilddak op schaal $1 : 100$.

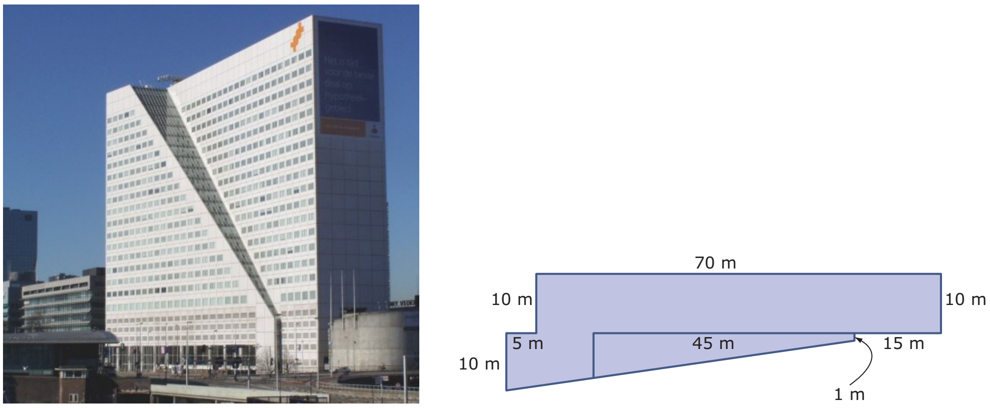
b Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische trapezia. Bepaal door meten in een geschikte figuur de hoogte van die twee gelijkvormige driehoeken in dm nauwkeurig en teken vervolgens zo'n driehoek op schaal $1 : 100$.

c Bepaal door meten in een geschikte figuur de hoogte van de twee trapezia in dm nauwkeurig en teken vervolgens zo'n trapezium op schaal $1 : 100$.

Toepassen

Opgave 13: Willemswerf

Bekijk de foto van het gebouw 'Willemswerf' in Rotterdam. Je ziet een bovenaanzicht van een sterk vereenvoudigde versie ervan. Deze sterk vereenvoudigde versie is 80 m hoog. De knik in het gebouw begint op 10 m boven het grondvlak.



Figuur 1.12

a Teken een parallelprojectie van de vereenvoudigde versie van het gebouw 'Willemswerf' op een rooster op schaal $1 : 500$.

b De knik in het gebouw heeft een grensvlak in de vorm van een trapezium. Teken dat grensvlak op schaal $1 : 1000$.

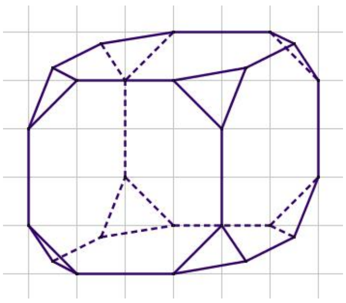
Testen

Opgave 14

Bekijk de afgeknotte kubus. De oorspronkelijke kubus was 4 bij 4 bij 4 cm. Van die ribben van 4 cm zijn nu alleen nog de middenstukken van 2 cm over.

a Bepaal de lengte van de zijden van de driehoekige grensvlakken in mm nauwkeurig. Teken zo'n driehoekig grensvlak op ware grootte.

b Teken een parallelprojectie van deze afgeknotte kubus. Gebruik nu een verkortingsfactor van $0{,}5$ en een wijkhoek van $60°$.



Figuur 1.13

2.2 Berekeningen

Inleiding

Ruimtelijke figuren geven vaak aanleiding tot het berekenen van afstanden, lengtes van lijnstukken en grootte van hoeken. Je hebt al gezien dat als je een lichaam tekent in parallelprojectie de vorm en lengte van de figuren nogal eens kunnen afwijken van de werkelijke vorm en/of grootte. Bij het berekenen van de lengte van een lijnstuk of de grootte van een hoek is het daarom vaak handig om de figuur als vlakke figuur in de 'juiste' vorm te tekenen. Maak in ieder geval altijd een schets!

Je leert in dit onderwerp

- berekeningen uitvoeren bij ruimtefiguren met de stelling van Pythagoras;
- berekeningen uitvoeren bij ruimtefiguren met behulp van sinus, cosinus en tangens;
- gebruikmaken van gelijkvormigheid en de vergrotingsfactor van vlakke figuren die onderdeel zijn van ruimtefiguren.

Voorkennis

- de (omgekeerde) stelling van Pythagoras;
- zijden en hoeken berekenen in rechthoekige driehoeken met de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens;
- de oppervlakte berekenen van driehoeken;
- gelijkvormigheid gebruiken bij het berekeningen in vlakke figuren.

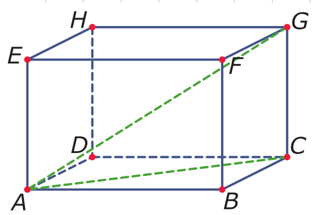
Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is dat $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm en $AE = 2$ cm.

a Hoe groot zijn de lijnstukken AC en AG?

b Hoe groot is $\angle CAG$ (de hoek bij A met benen AC en AG)?



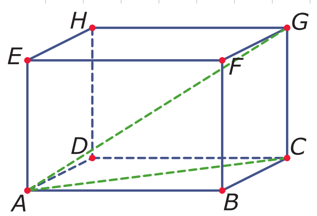
Figuur 2.1

Uitleg

Bekijk de balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is dat $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm en $AE = 2$ cm.

Om zijvlaksdiagonaal AC te berekenen, merk je op dat ΔABC rechthoekig is. In deze driehoek kun je de stelling van Pythagoras toepassen: $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
Dus is: $AC^2 = 5^2 + 3^2$.

Zo vind je: $AC = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.



Figuur 2.2

Lichaamsdiagonaal AG reken je op dezelfde wijze uit. Nu is ΔACG de rechthoekige driehoek waarin je de stelling van Pythagoras toepast: $AC^2 + CG^2 = AG^2$.
Dus is: $AG^2 = 34 + 2^2$.

Zo vind je: $AG = \sqrt{\left(\sqrt{34}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$.

Een hoek als $\angle CAG$ (hoekpunt A en benen AC en AG) bereken je met behulp van sinus, cosinus of tangens in een rechthoekige driehoek.

Neem daarvoor ΔACG, dan is bijvoorbeeld $\tan(\angle CAG) = \frac{2}{\sqrt{34}}$.

Dus is $\angle CAG \approx 19°$.

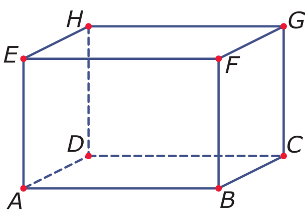
Opgave 1

Bekijk de balk $ABCD.EFGH$.

a Welke vorm heeft vlak $AFGD$ in werkelijkheid?

b Bereken de lengte van zijvlaksdiagonaal AF.

c Bereken de grootte van $\angle AGF$ in graden nauwkeurig.



Figuur 2.3

Opgave 2

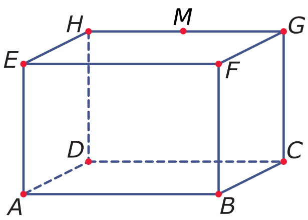
Bekijk de balk $ABCD.EFGH$.
Gegeven is dat $AB = 6, BC = 4$ en $AE = 3$. Punt M is het midden van ribbe HG.

a Bereken de lengte van AM en BM.

b Bereken de grootte van $\angle AMH$ in graden nauwkeurig.

c Bereken de grootte van $\angle AMD$ in graden nauwkeurig.

d Bereken de grootte van $\angle AMB$ in graden nauwkeurig.



Figuur 2.4

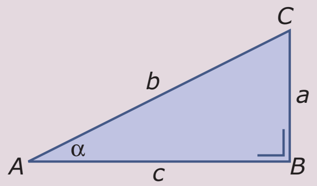
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor het berekenen van de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken zoek je in de ruimtefiguur geschikte vlakke figuren. Teken deze vlakke figuren (eventueel op ware grootte). Zet de gegevens erbij en bereken de gevraagde lengte en/of grootte.

Meestal zoek je geschikte **rechthoekige driehoeken**, want daarin gelden:

- De **stelling van Pythagoras**: $c^2 + a^2 = b^2$.
- De **goniometrische verhoudingen**:
  - $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$
  - $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$
  - $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$



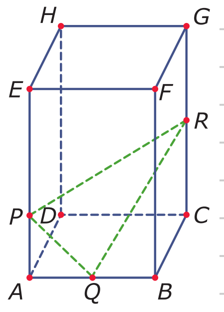
Figuur 2.5

Merk op dat in dit geval b de schuine zijde (hypothenusa) is, a de voor hoek α overstaande rechthoekszijde en c de voor hoek α aanliggende rechthoekszijde is.

Verder maak je vaak gebruik van **gelijkvormigheid**. Twee figuren zijn gelijkvormig als hun overeenkomende paren hoeken gelijk zijn en de lengtes van de overeenkomende paren zijden recht evenredig met elkaar zijn. Alle lengtes van de zijden van de ene figuur kunnen dan door vermenigvuldiging met een vaste **vergrotingsfactor** uit de lengtes van de zijden van de andere figuur worden berekend.

Voorbeeld 1

Bekijk de balk $ABCD.EFGH$ van 4 bij 4 bij 6. Punt P ligt op AE zodat $AP = 2$, Q ligt op het midden van AB en R ligt op het midden van CG.
Bereken exact de lengte van PQ, van QR en van PR.



Figuur 2.6

Antwoord

Je zoekt geschikte driehoeken of rechthoeken om in te rekenen. Teken waar nodig deze figuren zelf in de juiste vorm.

- In de rechthoekige ΔAQP geldt: $PQ = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
- In de rechthoekige ΔBCR geldt: $BR = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

  En in de rechthoekige ΔQBR geldt dan: $QR = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

  Tip: deze berekening kan ook sneller $QR = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.
- In de rechthoek $ACGE$ is $AC = \sqrt{32}$ en dus $PR = \sqrt{32 + 1^2} = \sqrt{33}$.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken de lengte van AC en AG.

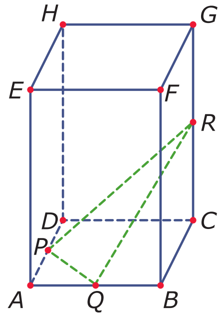
b Laat zien, hoe je AG met de uitgebreide stelling van Pythagoras kunt berekenen.

c Laat zien, dat ΔPQR niet rechthoekig is.

d Bereken de lengte van PG.

Voorbeeld 2

Bekijk de balk $ABCD.EFGH$ van 4 bij 4 bij 6. Punt P ligt op het midden van AD, Q ligt op het midden van AB en R ligt op het midden van CG.
Bereken de grootte van de hoeken RQC en PRQ in graden nauwkeurig.



Figuur 2.7

Antwoord

Je zoekt geschikte driehoeken of rechthoeken om in te rekenen. Teken waar nodig deze figuren zelf in de juiste vorm.

- Voor hoek RQC kijk je naar de rechthoekige ΔRQC, waarvan $QC = \sqrt{20}$ en $CR = 3$.

  Je ziet dat $\tan(\angle RQC) = \frac{3}{\sqrt{20}}$ en dus is $\angle RQC \approx 34°$.

- Hoek PRQ bereken je in de gelijkbenige ΔPQR, waarvan $PR = QR = \sqrt{29}$ en $PQ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, met behulp van een hoogtelijn RS.

  Dan is: $\sin(\angle PRS) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{29}}$. Ga na dat $\angle PRQ \approx 30°$.

Opgave 4

Gebruik de balk met de punten P en Q uit **Voorbeeld 2**.

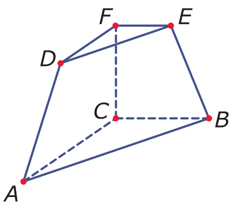
a Bereken de grootte van $\angle AFD$.

b Bereken de grootte van $\angle QAC$.

c Welk probleem doet zich voor als je $\angle HPQ$ zou willen berekenen?

Voorbeeld 3

Bekijk de afgeknotte piramide $ABC.DEF$. Het grondvlak ΔABC is rechthoekig met een rechte hoek bij hoekpunt C. De ribbe CF staat loodrecht op het grondvlak ABC en het bovenvlak DEF. $AC = 4$ en $BC = CF = DF = 3$.
Bereken de lengte van ribbe CT van de oorspronkelijke piramide $ABC.T$.



Figuur 2.8

Antwoord

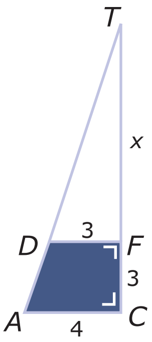
Schets ΔACT met daarin lijnstuk DF. Omdat CF loodrecht op zowel AC als DF staat, is $AC//DF$ en hebben de driehoeken ACT en DFT gelijke hoeken. Beide driehoeken zijn gelijkvormig.

Omdat $DF = \frac{3}{4}AC$ is ook $TF = \frac{3}{4}TC$.

Noem je $TF = x$, dan is $TC = x + 3$.

En dus is $x = \frac{3}{4}(x + 3)$. Hieruit volgt $x = 9$.

En dus is $CT = 12$.



Figuur 2.9

Opgave 5

Bekijk de afgeknotte piramide in **Voorbeeld 3**.

a Laat zien, dat $CT = 12$.

b Bereken de lengte van EF.

c Bereken de grootte van $\angle CBE$.

Opgave 6

Van een driehoekig prisma $ABC.DEF$ is het grondvlak ABC een gelijkzijdige driehoek met zijden van 4. De hoogte AD van het prisma is ook 4. P is het midden van DE, Q is het midden van EF.

a Bereken de lengte van de zijden van ΔBPQ.

b Bereken de grootte van de hoeken van deze driehoek.

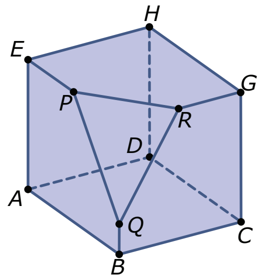
Verwerken

Opgave 7

Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = BC = 4$ cm en $AE = 6$ cm. Punt P is het midden van GH. Maak een schets en bereken exact de lengte van de zijden van ΔABP en de hoeken van ΔABP.

Opgave 8

Bekijk de afgeknotte kubus met ribben van 6 cm. De punten P en R zijn de middens van de ribben waar ze op liggen. $BQ = 1$ cm.



Figuur 2.10

a Bereken de lengtes van de zijden van ΔPQR.

b Teken ΔPQR op ware grootte en bereken de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.

c Het diagonaalvlak $DBQSH$ is een vijfhoek. Teken dit diagonaalvlak van de afgeknotte kubus op ware grootte en bereken de hoeken ervan in graden nauwkeurig.

Opgave 9

Gegeven is een regelmatige piramide $T.ABCD$ waarvan het vierkant $ABCD$ het grondvlak is. Alle ribben van deze piramide zijn 6 cm. P is het midden van AT en Q is het midden van DT. Het snijpunt van AC en BD is S.

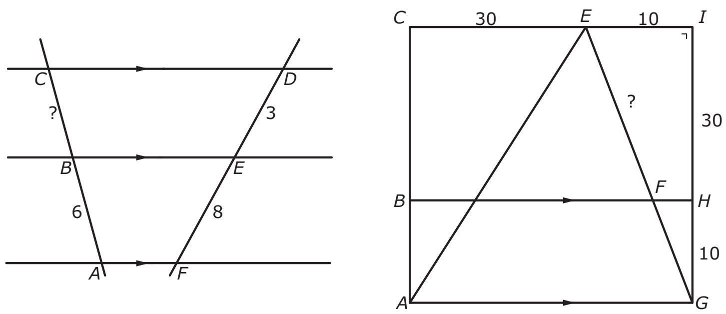
a Bereken de hoogte TS van deze piramide.

b Leg uit waarom vierhoek $BCQP$ een gelijkbenig trapezium is en bereken de lengtes van de zijden van deze vierhoek. Maak eerst een schets van de situatie.

c Teken $BCQP$ op ware grootte en bereken alle hoeken van dit trapezium in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 10

Bekijk de twee vlakke figuren. Er geldt: $\angle G = 90°$.

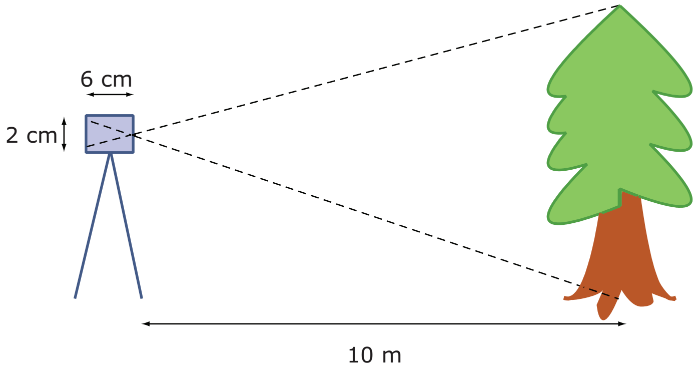


Figuur 2.11

Bereken steeds exact de lengte van het lijnstuk waar het vraagteken bij staat.

Opgave 11

Marianne is een paar dagen in New York. Ze maakt een foto van een boom. Ze staat 10 meter van de boom vandaan. Op de foto is de boom 2 cm groot. De afstand van de lens tot het negatief in het fototoestel is 6 cm.



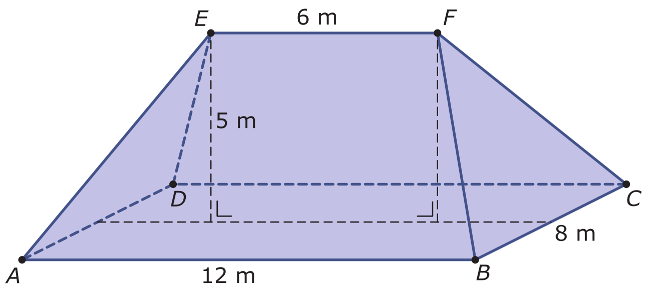
Figuur 2.12

a Bereken in cm nauwkeurig hoe hoog de boom is.

b Na het ontwikkelen van de foto blijkt het vrijheidsbeeld ook op de foto te staan. Toevallig is op de foto het vrijheidsbeeld precies even groot als de boom. Het vrijheidsbeeld is 93 m hoog. Hoe ver stond Marianne van het vrijheidsbeeld vandaan?

Opgave 12

Bekijk het schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische trapezia.



Figuur 2.13

a Bereken de lengte van de ribben AE, DE, BF en CF.

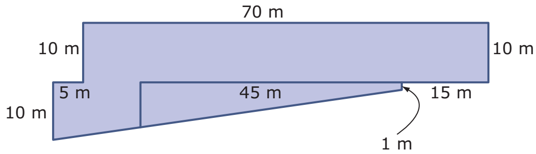
b Bereken de grootte van $\angle ABF$ en $\angle BCF$.

c Op 3 meter boven de zoldervloer $ABCD$ wordt een rechthoekige verdiepingsvloer aangebracht. Bereken de oppervlakte van die verdiepingsvloer.

Toepassen

Opgave 13: Willemswerf (II)

Hier zie je een foto van het gebouw ‘Willemswerf’ in Rotterdam. Daarnaast zie je een bovenaanzicht van een sterk vereenvoudigde versie ervan. Deze sterk vereenvoudigde versie is 80 m hoog. De knik in het gebouw begint op 10 m boven het grondvlak. De knik in het gebouw heeft een grensvlak in de vorm van een trapezium.



Figuur 2.14

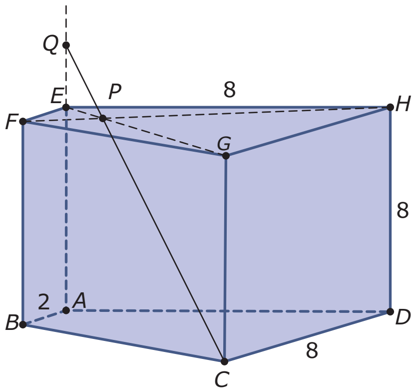
a Bereken de lengtes van de zijden van dat trapezium.

b Bereken de grootte van de hoeken van dat trapezium.

Opgave 14: Afgeknotte kubus

Bekijk de aan de voorkant afgeknotte kubus $ABCD.EFGH$. $\angle BAD = \angle ADC = 90°$. De afmetingen staan in de figuur.

Bereken de lengte van AQ.



Figuur 2.15

Testen

Opgave 15

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijde 4. S is het snijpunt van de diagonalen AC en BD en $TS = 10$. Punt M is het midden van TS.

a Teken deze piramide in parallelprojectie. Teken een lijn door M evenwijdig aan BD. Noem de snijpunten met TB en TD respectievelijk P en Q.

b Bereken de lengte van AP en PQ.

c Teken ΔAPQ op ware grootte en bereken de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.

2.3 Aanzichten en uitslagen

Inleiding

Je kunt ruimtelijke figuren ook afbeelden op een plat vlak door het tekenen van verschillende aanzichten. Je tekent wat je ziet vanuit verschillende kijkrichtingen, bijvoorbeeld het vooraanzicht, het rechter zijaanzicht en het bovenaanzicht. Daarnaast kun je van lichamen uitslagen maken. Je kunt dit opvatten als een ‘bouwplaat’ zonder plakrandjes. Bij het tekenen van een uitslag of van aanzichten heb je vaak berekeningen nodig.

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen aanzicht en uitslag;
- aanzichten tekenen vanuit verschillende kijkrichtingen en aanzichten interpreteren;
- uitslagen tekenen van ruimtelijke figuren.

Voorkennis

- eigenschappen van een groot aantal ruimtelijke figuren gebruiken;
- uitslagen maken van bekende lichamen zoals een kubus of een balk.

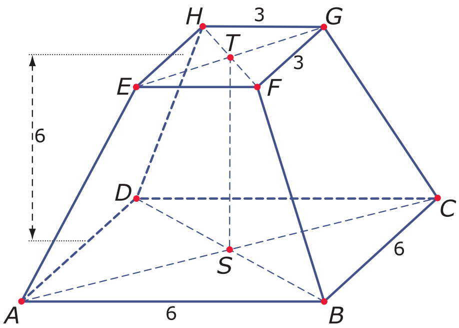
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. Dit betekent dat het grondvlak een vierkant is, evenals het bovenvlak. Bovendien staat het lijnstuk ST, dat het midden van het grondvlak verbindt, met het midden van het bovenvlak loodrecht op beide vlakken.
Gegeven is: $AB = 6$ cm, $EF = 3$ cm en $ST = 6$ cm.

a Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht op ware grootte.

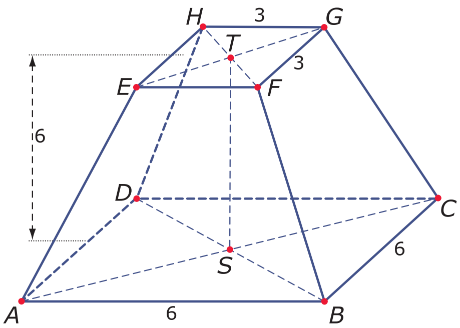
b Teken een uitslag van deze afgeknotte piramide op ware grootte.



Figuur 3.1

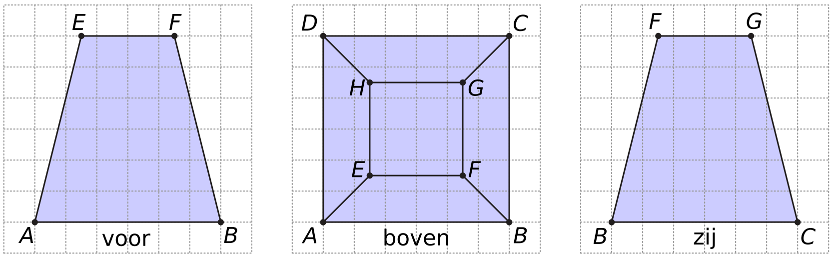
Uitleg

Bekijk de afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. Dit betekent dat het grondvlak een vierkant is, evenals het bovenvlak. Bovendien staat het lijnstuk ST, dat het midden van het grondvlak verbindt met het midden van het bovenvlak, loodrecht op beide vlakken.
Gegeven is: $AB = 6$ cm, $EF = 3$ cm en $ST = 6$ cm.



Figuur 3.2

Er zijn verschillende aanzichten mogelijk. Meestal zet je daarvoor de figuur zo voor je neer dat je hem recht van boven, recht van voren, of recht van een zijkant ziet. Meestal volsta je met deze drie aanzichten:



Figuur 3.3

Een uitslag is een 'opengevouwen' versie van de ruimtelijke figuur waarin alle grensvlakken op ware grootte zijn getekend en aan elkaar vastzitten.
Om zelf een uitslag van deze afgeknotte piramide te kunnen tekenen, moet je eerst (bijvoorbeeld) de hoogte van een zijvlak berekenen met behulp van de stelling van Pythagoras. Die hoogte is bijvoorbeeld het lijnstuk vanuit E en loodrecht op AB. De lengte daarvan is $\sqrt{6^2 + 1{,}5^2} \approx 6{,}18$ cm.

Opgave 1

Je ziet in de **Uitleg** hoe je aanzichten tekent van een afgeknotte piramide. Neem aan dat niet $ST = 6$, maar dat alle vier de opstaande ribben 6 cm lang zijn. De andere lengtes zijn niet veranderd.

a Welk aanzicht verandert daardoor niet?

b Bereken nu de hoogte van de figuur. Rond af op één decimaal.

c Teken de twee andere aanzichten.

Opgave 2

Je ziet in de **Uitleg** wat je nodig hebt om een uitslag van de afgeknotte piramide te kunnen tekenen.

a Teken de uitslag van de afgeknotte piramide.

Neem aan dat niet $ST = 6$, maar dat alle vier de opstaande ribben 6 cm lang zijn.

b Waarom is het voor de uitslag nog steeds nodig om de hoogte van een opstaand zijvlak te berekenen? Bereken deze hoogte.

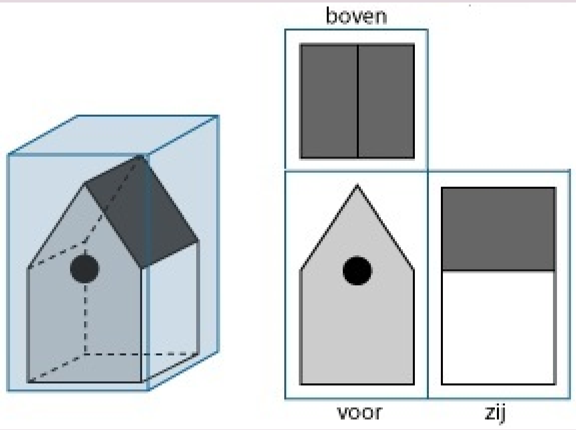
c Teken weer de uitslag van de bij b aangepaste figuur.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een aanzicht is een vlakke weergave van een ruimtelijke figuur vanuit een (zover mogelijk) loodrechte richting. Meestal teken je drie **aanzichten**: het vooraanzicht, het rechter zijaanzicht en het bovenaanzicht. Deze aanzichten staan dus meestal ook loodrecht op elkaar. Soms zet je ze in één figuur die dan **drieaanzicht** wordt genoemd.

Aanzichten zijn een bijzonder geval van parallelprojectie. Het bijzondere is dat de verbindende lijnen zoveel mogelijk loodrecht staan op de voor-, zij-, boven- en ondervlakken van het origineel. De eigenschappen van de parallelprojectie gelden dus ook voor aanzichten. Er blijven bijvoorbeeld veel (verhoudingen van) lengtes hetzelfde.



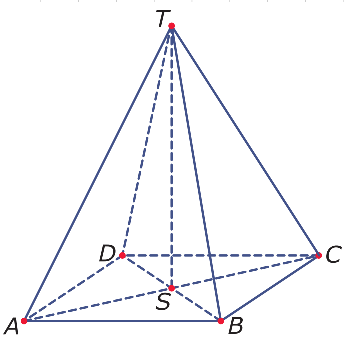
Figuur 3.4

Bekijk de daklengte in het bovenaanzicht en de dakbreedte in het vooraanzicht op 'ware grootte'.

Een **uitslag** van een lichaam dat bestaat uit vlakken krijg je door het 'open te vouwen' via de ribben, zo, dat er een vlakke figuur ontstaat. Je kunt ook zeggen dat een uitslag een 'bouwplaat' is, maar dan zonder plakrandjes en uit één stuk. Een uitslag is dus een combinatie van parallelprojecties die allemaal loodrecht zijn. Dus alle (verhoudingen van) lengtes kloppen.

Voorbeeld 1

Bekijk de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$. Dit betekent dat het grondvlak een vierkant is en dat het lijnstuk ST, dat het midden van het grondvlak verbindt met de top, loodrecht op het grondvlak staat.
Gegeven is: $AB = 4$ cm en $AT = 6$ cm.
Teken een bovenaanzicht en een vooraanzicht.



Figuur 3.5

Antwoord

Het bovenaanzicht is een vierkant van 4 cm bij 4 cm met de ribben AT, BT, CT en DT zichtbaar als halve diagonalen van het vierkant. T is het snijpunt van die diagonalen.

Het vooraanzicht is een driehoek met hoogte TS. Die kun je tekenen door $AB = 4$ cm te tekenen en dan op het midden daarvan een hoogtelijn met de lengte van TS te tekenen. Eerst moet je TS berekenen, bijvoorbeeld met de stelling van Pythagoras in ΔAST. Daarvan is $AT = 6$ cm en $AS = 2\sqrt{2}$.

Dus is: $TS = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{28} \approx 5{,}3$ cm.

Teken zelf de aanzichten.

Opgave 3

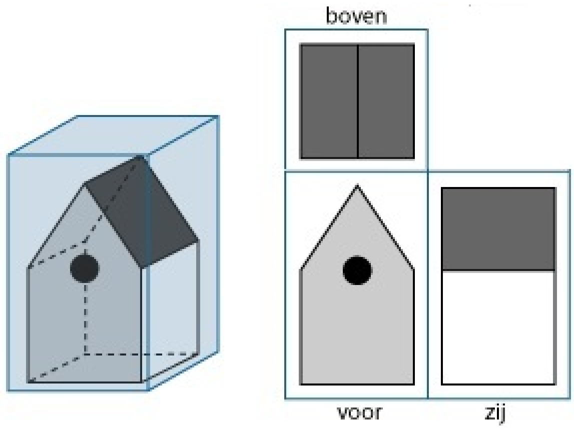
Bestudeer **Voorbeeld 1**.

a Teken de aanzichten van de regelmatige vierzijdige piramide uit het voorbeeld.

b Teken de aanzichten van een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 6 cm zijn.

Opgave 4

Bekijk het plaatje van een vogelhuisje. Hierin zie je ook de aanzichten van het vogelhuisje.
Neem aan dat alle ribben van dit vogelhuisje 4 dm lang zijn.



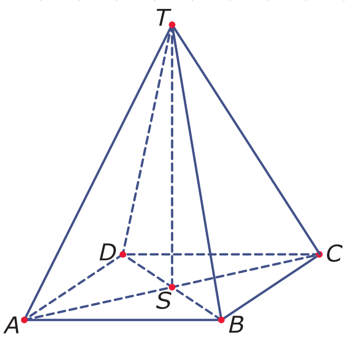
Figuur 3.6

a Teken de aanzichten op schaal $1 : 10$.

b Teken de uitslag op schaal $1 : 10$.

Voorbeeld 2

Bekijk de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$. Het grondvlak is een vierkant. Het lijnstuk ST verbindt het midden van het grondvlak met de top loodrecht op het grondvlak.
Gegeven is: $AB = 4$ cm en $AT = 6$ cm.
Teken een uitslag van deze piramide.



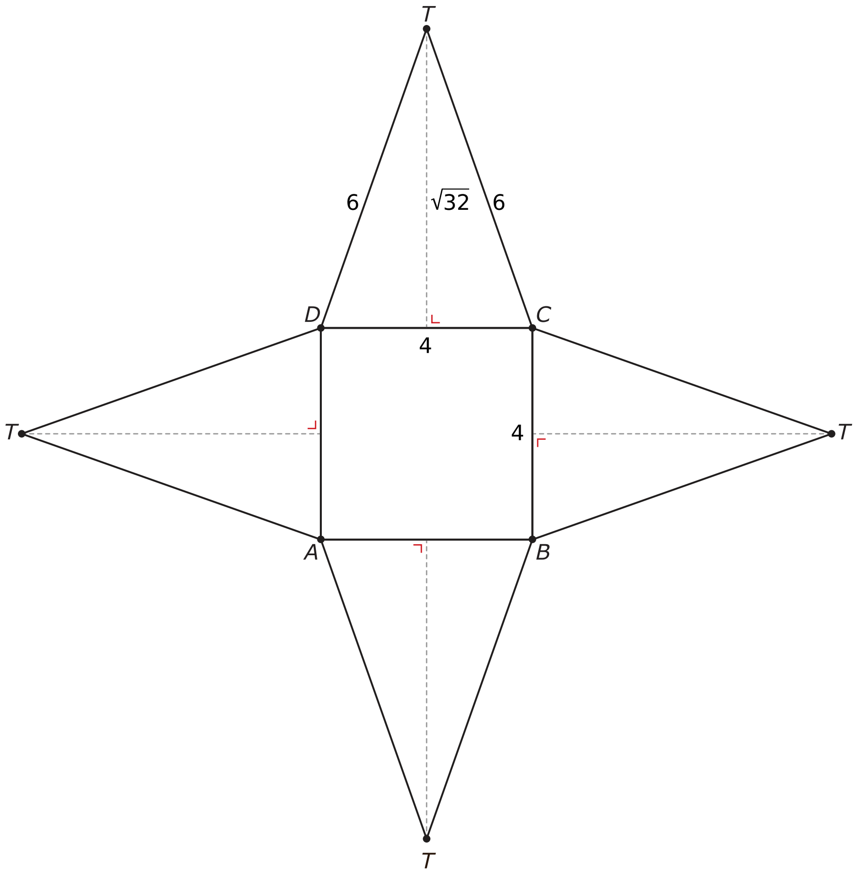
Figuur 3.7

Antwoord

De uitslag bestaat uit het grondvlak van 4 cm bij 4 cm en de vier opstaande driehoekige grensvlakken met een basis van 4 cm en zijden van 6 cm. Je kunt deze zijden met behulp van een passer vanuit de hoekpunten afpassen en zo de driehoeken maken.
Je kunt ook hoogte TM met M het midden van bijvoorbeeld AB uitrekenen.

$TM = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} \approx 5{,}7$ cm.

Nu kun je elke driehoek tekenen door een hoogtelijn op elk midden van een zijde van het grondvlak te zetten en zo vier keer punt T te vinden.



Figuur 3.8

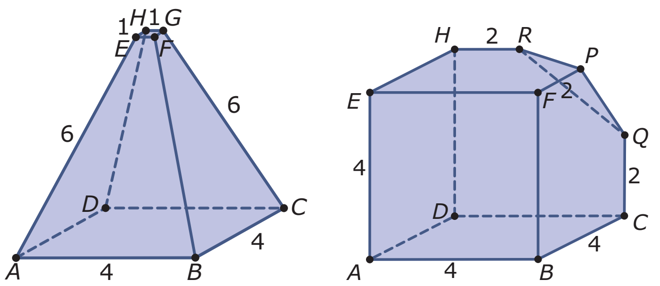
Opgave 5

Je hebt gezien hoe je van een piramide, waarvan alle ribben zijn gegeven, een uitslag maakt.

Teken de uitslag van een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 6 cm zijn.

Opgave 6

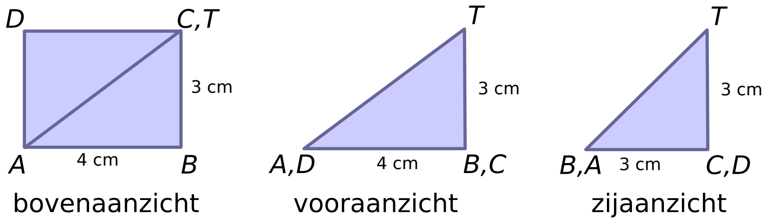
Teken van de volgende twee lichamen de drie aanzichten en een uitslag.



Figuur 3.9

Opgave 7

Teken een parallelprojectie van het lichaam waarvan je hier de drie aanzichten ziet.



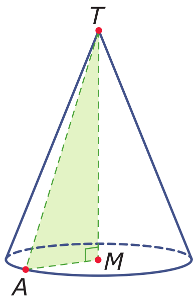
Figuur 3.10

Voorbeeld 3

Bekijk de rechte kegel met top T en grondvlak cirkel c. Het lijnstuk TM, dat het midden van het grondvlak verbindt met de top, staat loodrecht op de grondcirkel.

A is een punt op de grondcirkel. Gegeven is: $AM = 2$ cm en $TM = 6$ cm.

Teken een uitslag van deze kegel.



Figuur 3.11

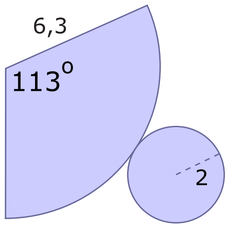
Antwoord

De uitslag van zo'n kegel bestaat uit de grondcirkel en de opengevouwen kegelmantel. Deze kegelmantel is een deel van een cirkel (een cirkelsector) met straal $AT = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$ en middelpunt T.

De omtrek van deze cirkel is $2\pi \cdot \sqrt{40}$.

De omtrek van de grondcirkel van de kegel is $2\pi \cdot 2$.

De sectorhoek van de opengevouwen kegelmantel is daarom $\frac{4\pi}{2\pi \cdot \sqrt{40}} = \frac{2}{\sqrt{40}} \cdot 360 \approx 114°$.



Figuur 3.12

Opgave 8

Je ziet in **Voorbeeld 3** hoe je de uitslag tekent van een kegel met een hoogte van 6 cm en een grondcirkel met straal 2 cm. De kegelmantel is een sector van een cirkel.

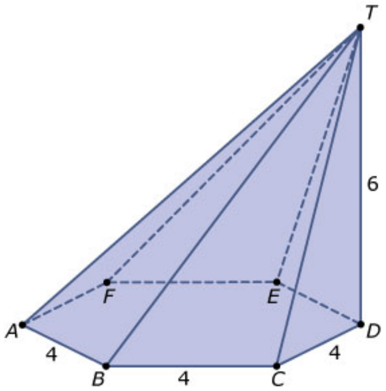
a Leg uit hoe de sectorhoek van die cirkelsector wordt berekend. Leg vervolgens uit hoe nu de uitslag wordt getekend.

b Teken zelf een uitslag van een kegel met een hoogte van 4 cm en een grondcirkel met een straal van 3 cm.

c Teken ook een uitslag van een cilinder met een straal van 3 cm en een hoogte van 4 cm.

Opgave 9

Bekijk de scheve piramide $T.ABCDEF$ waarvan het grondvlak een regelmatige zeshoek is en DT de hoogte is. Dit betekent dat DT loodrecht staat op alle lijnen door D in het grondvlak. Je wilt van deze figuur de drie aanzichten en een uitslag tekenen. Daarvoor moet je weten hoe je een regelmatige zeshoek tekent. Daarbij maak je gebruik van het feit dat de hoekpunten van elke regelmatige veelhoek op een cirkel liggen en dat hij is opgebouwd uit even veel gelijkbenige driehoeken als er zijden zijn.



Figuur 3.13

a Uit hoeveel gelijkbenige driehoeken is een regelmatige zeshoek opgebouwd? Bereken de hoeken en de lengtes van de zijden van elk van die driehoeken.

b Leg uit hoe je nu een regelmatige zeshoek tekent.

c Teken de drie aanzichten van de gegeven piramide.

d Bereken de lengtes van de ribben van deze piramide.

e Teken een uitslag van deze piramide.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 6 cm. Punt P is het midden van ribbe AE en punt Q is het midden van ribbe CG. Het vlak $PBQH$ verdeelt de kubus in twee lichamen, waarvan het lichaam $ABCD.PBQH$ er één is.

a Teken de drie aanzichten van $ABCD.PBQH$.

b Teken een uitslag van het lichaam $ABCD.PBQH$.

c Bereken de grootte van de hoeken van vlak $PBQH$ in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 11

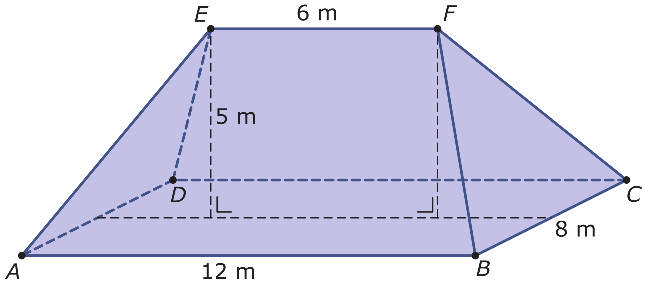
Een piramide $T.ABCDE$ heeft als grondvlak een regelmatige vijfhoek $ABCDE$. De hoogte van de piramide is TS, waarin punt S het middelpunt is van de cirkel waar de hoekpunten van het grondvlak op liggen. Alle ribben van deze piramide zijn 4 cm.

a Teken de aanzichten van piramide $T.ABCDE$. Laat alle noodzakelijke berekeningen zien. Boven- en vooraanzicht is voldoende.

b Teken een uitslag van deze piramide. Laat ook nu alle noodzakelijke berekeningen zien.

Opgave 12

Bekijk het schilddak met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkzijdige driehoeken en twee symmetrische trapezia.



Figuur 3.14

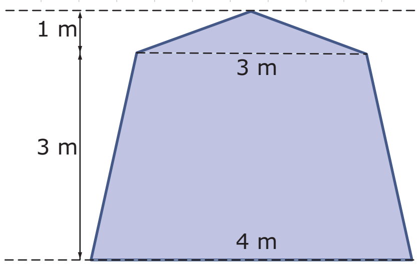
a Teken de drie aanzichten van dit schilddak.

b Teken een uitslag van dit schilddak.

Opgave 13

Bekijk het zijaanzicht van een zuiver cirkelvormige tent.

Maak een schets van de uitslag van deze tent met daarin de juiste afmetingen.

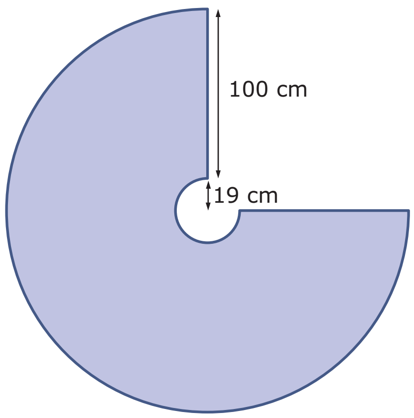


Figuur 3.15

Opgave 14

Arabische dansende derwisjen dragen vaak een zogenaamde kegelrok. Dat is een wijd uitlopende rok die - als de stof stijf zou zijn - de vorm heeft van een afgeknotte kegel. Hier zie je het patroon (de uitslag) van zo'n kegelrok.

Figuur 3.16



Figuur 3.17

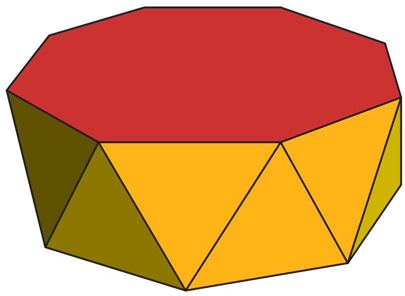
Teken een vooraanzicht en een bovenaanzicht van de afgeknotte kegel die erbij hoort. Laat alle noodzakelijke berekeningen zien.

Toepassen

Opgave 15: Antiprisma

Deze figuur is een regelmatig achthoekig antiprisma.
Alle ribben van dit antiprisma zijn 5 cm.

Teken een uitslag van dit antiprisma.



Figuur 3.18

Testen

Opgave 16

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant. Alle ribben van deze piramide zijn 6 cm. Punt P is het midden van AT en punt Q is het midden van DT. Het vlak $BCQP$ verdeelt de piramide in twee delen. Eén van die delen is het lichaam $ABCD.PQ$.

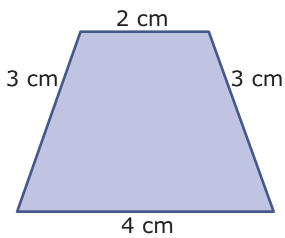
a Teken drie aanzichten van het lichaam $ABCD.PQ$. Laat de noodzakelijke berekeningen zien.

b Teken een uitslag van dit lichaam en laat ook nu de berekeningen zien.

Opgave 17

Bekijk het zijaanzicht van een afgeknotte kegel.

Teken een uitslag van deze kegel.



Figuur 3.19

2.4 Doorsneden

Inleiding

Om lengtes en hoeken te berekenen werk je in één vlak. Zo'n vlak doorsnijdt de ruimtelijke figuur. De vlakke figuur die wordt gevormd door de snijlijnen noem je een doorsnede. Als je er lengtes en hoeken in wilt berekenen, construeer je die doorsnede met de ware vorm en grootte. Je krijgt dan een goed idee hoe de figuur er in werkelijkheid uitziet. Je kunt deze tekeningen uiteraard ook op schaal maken, als in de figuur maar de juiste verhoudingen worden weergegeven.

Je leert in dit onderwerp

- de doorsnede van een ruimtelijke figuur met een vlak herkennen;
- doorsneden uit een ruimtelijke figuur halen en in de werkelijke vorm tekenen;
- doorsneden in een ruimtelijke figuur tekenen.

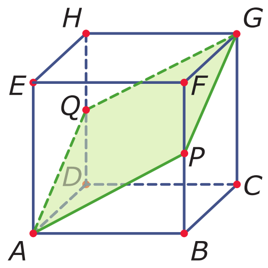
Voorkennis

- driehoeken construeren;
- lengtes van zijden en de grootte van hoeken berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de doorsnede $APGQ$ getekend in een kubus met ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.



Figuur 4.1

a Kun je uitleggen waarom dit de doorsnede van de kubus met een plat vlak is? Weet je zeker dat het een vlakke figuur is? En zo ja, waarom?

b Vanuit welke richting moet je de kubus bekijken om $APGQ$ als een lijnstuk te zien?

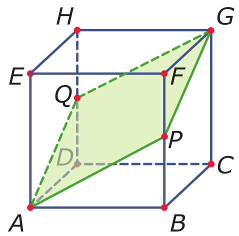
c Welke vlakke figuur is doorsnede $APGQ$?

d Bereken de zijden en de hoeken van die figuur.

e Bereken de oppervlakte van die figuur.

Uitleg

Bekijk de doorsnede $APGQ$ getekend in een kubus met ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.



Figuur 4.2

Je kunt (in gedachten) de figuur zo draaien dat je de punten A, G, P en Q op één lijn ziet liggen. En daarom weet je zeker dat ze in één vlak liggen. Je kunt het ook zo zien: de snijlijnen in twee overstaande evenwijdige grensvlakken van de kubus (bijvoorbeeld AP en QG) zijn evenwijdig en dus is $APGQ$ een plat vlak.

Als je $APGQ$ op ware grootte wilt zien, moet je de kubus zo draaien dat je er loodrecht op kijkt. Dit is het geval als (bijvoorbeeld) punt

E recht boven het midden van grondvlak $ABCD$ ligt. Dat kun je aantonen door rechthoek $ACGE$ op ware grootte te tekenen en te laten zien dat EM loodrecht staat op AG als M het midden van AC is.

Je ziet nu dat $APGQ$ een ruit is met zijden van $\sqrt{5^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{31{,}25}$ cm en een diagonaal PQ van $\sqrt{50}$ cm. Je tekent hem zelf op ware grootte door eerst PQ te tekenen en dan de zijden vanuit P en Q te omcirkelen.

Opgave 1

Bekijk kubus $ABCD.EFGH$ in de **Uitleg**. M is het midden van AC.

- **a** Waarom zijn de twee ribben AP en QG evenwijdig?
- **b** Teken diagonaalvlak $ACGE$ op ware grootte en laat zien dat AG en EM loodrecht op elkaar staan.
- **c** Waarom zie je $APGQ$ op ware grootte als je in de richting EM op dat vlak kijkt?
- **d** Bereken zelf de lengte van de twee diagonalen van ruit $APGQ$.
- **e** Teken de ruit op ware grootte en bereken de hoeken ervan in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 2

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$. P is het midden van BF. Teken zelf die kubus als een schets. Door A, P en H gaat een vlak. Dat vlak kun je binnen de kubus nog groter maken.

- **a** Licht toe waarom het midden R van FG ook in dit vlak ligt. Denk aan evenwijdigheid!
- **b** Teken vierhoek $APRH$ in de kubus.
- **c** Leg uit dat alle punten van het vlak door A, P en H die binnen de kubus liggen binnen, of op vierhoek $APRH$ liggen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur is de figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen van de ruimtelijke figuur met een vlak. (Een vlak is plat.)

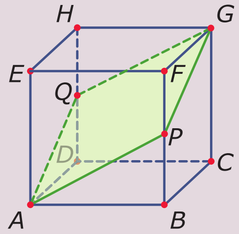
Moet je zelf een doorsnede tekenen, dan maak je gebruik van de volgende eigenschappen:

- Als een vlak twee (of meer) evenwijdige vlakken snijdt, dan zijn de snijlijnen evenwijdig.
- Door twee verschillende evenwijdige lijnen bestaat één vlak.
- Als twee lijnen evenwijdig zijn, liggen alle lijnen, die een punt van de ene lijn verbinden met een punt van de andere lijn, in het vlak waarin de twee evenwijdige lijnen liggen.
- Door een lijn en een punt niet op die lijn bestaat één vlak.
- Als er een lijn en een punt niet op die lijn gegeven zijn, liggen alle lijnen, die het punt en een punt van de lijn verbinden, in het vlak door het punt en de lijn.

Bekijk de kubus. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen. Er is een vierhoek $APGQ$ in de kubus getekend.

Deze vierhoek is een doorsnede van de kubus, want de vier zijden (snijlijnen van de vierhoek met de kubus) van de vierhoek liggen in één vlak. Immers: AP en QG zijn evenwijdig, want ze liggen in evenwijdige vlakken en hebben in die vlakken dezelfde helling. Er is dus één vlak door beide lijnstukken. De andere twee lijnstukken verbinden punten op AP en QG, dus alle zijden liggen in één vlak.

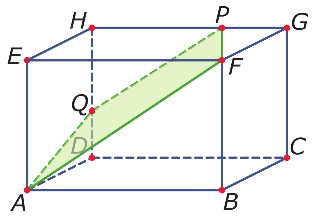
Om in de doorsnede berekeningen te kunnen uitvoeren, teken je de doorsnede op ware grootte of op schaal. Daarmee wordt bedoeld dat alle hoeken hun werkelijke grootte hebben en alle zijden hun werkelijke lengte of lengte op schaal. Teken hulpfiguren waarvan je de afmetingen al kent om onbekende lengtes en hoeken te vinden.



Figuur 4.3

Voorbeeld 1

Bekijk doorsnede $AFPQ$ van een plat vlak met een balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is $AB = 6$, $BC = 4$, $CG = 3$ en $GP = 2$. Teken doorsnede $AFPQ$ op ware grootte.



Figuur 4.4

Antwoord

De ware lengte van AF kun je halen uit rechthoek $ABFE$: $AF = \sqrt{45}$.
De ware lengte van FP kun je halen uit rechthoekige ΔFGP: $FP = \sqrt{20}$. De ware lengte van AP kun je halen uit rechthoekige ΔAHP: $AP = \sqrt{41}$. Nu teken je eerst ΔAFP met behulp van passer en lineaal.

Omdat $AFPQ$ een plat vlak is, moet $AF//PQ$. Dus zijn de driehoeken AFE en QPH gelijkvormig. Omdat $PH = \frac{4}{6}EF$ is ook $PQ = \frac{4}{6}AF$.
Hiermee kun je het trapezium $AFPQ$ afmaken.

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** de doorsnede $AFPQ$ van een plat vlak met een balk $ABCD.EFGH$.

a Laat zien hoe de lengtes van de zijden van vierhoek $AFPQ$ kunnen worden berekend.

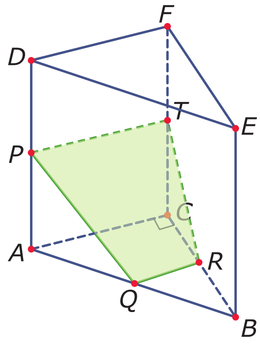
b Bereken zelf de lengte van de diagonalen van vierhoek $AFPQ$.

c Waarom weet je zeker dat vierhoek $AFPQ$ een trapezium is?

d Teken nu dit trapezium op ware grootte.

Voorbeeld 2

In het rechte prisma $ABC.DEF$ ligt P op het midden van AD, Q op het midden van AB, R op het midden van BC en T op het midden van CF. Hoek BCA is recht, $BC = BE = 4$ en $AC = 3$.
Teken doorsnede $PQRT$ op ware grootte.



Figuur 4.5

Antwoord

Van vierhoek $PQRT$ zijn hoek PTR en hoek TRQ recht. Verder is $TP = 3$, $TR = \sqrt{8}$ en $QR = 1{,}5$ (gelijkvormigheid). De figuur is nu eenvoudig te tekenen.
Ga na hoe je de hoeken en de oppervlakte van trapezium $PQRT$ berekent.

Opgave 4

Bekijk het rechte prisma $ABC.DEF$ in **Voorbeeld 2**.

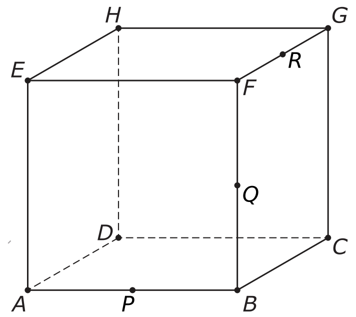
a Teken zelf de doorsnede $PQRT$ op ware grootte. Controleer alle berekende lengtes.

b Bereken de hoeken en de oppervlakte van het trapezium.

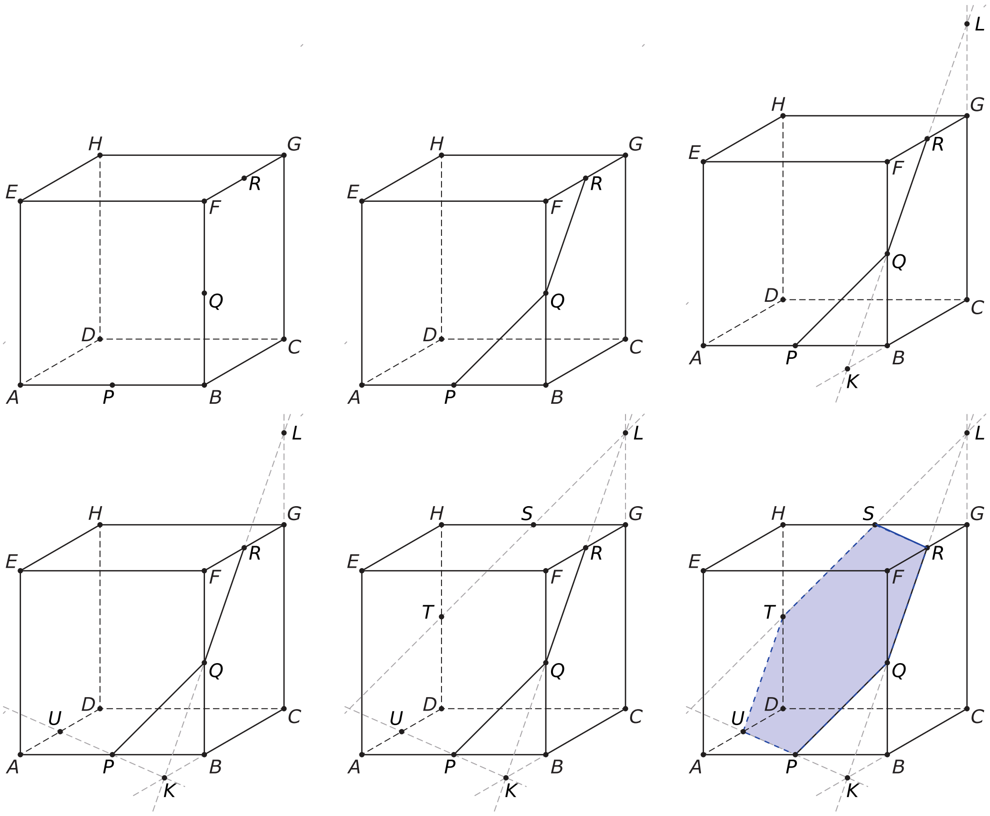
Voorbeeld 3

Een kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribben van 8 cm. P is het midden van AB, Q dat van BF en R dat van FG.

1. Teken de doorsnede van het vlak door deze drie punten met de kubus.
2. Teken die doorsnede ook op ware grootte en bereken de oppervlakte ervan.

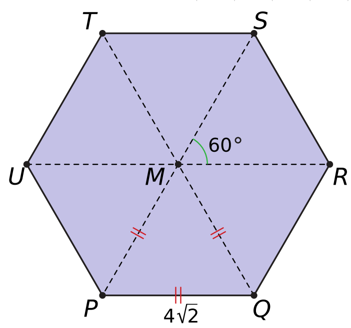


Antwoord



Figuur 4.7

- Bij het tekenen van de lijn door L die de punten S en T oplevert, is gebruikgemaakt van de evenwijdigheid van de snijlijnen in twee evenwijdige vlakken. Je krijgt een regelmatige zeshoek $PQRSTU$ met alle zijden $4\sqrt{2}$.
- Zeshoek $PQRSTU$ bestaat uit zes gelijkzijdige driehoeken, want de hoeken bij punt M zijn allemaal 60°.
  Een gelijkbenige driehoek met een tophoek van 60° is gelijkzijdig.
  De hoogte van één van die gelijkzijdige driehoeken is te berekenen met behulp van de stelling van Pythagoras. En daarmee bereken je de oppervlakte van zo'n driehoek.
  Ga na dat de zeshoek een oppervlakte heeft van $48\sqrt{3}$ cm^2.



Figuur 4.8

Opgave 5

Bekijk de kubus $ABCD.EFGH$ met de punten P, Q en R in **Voorbeeld 3**.

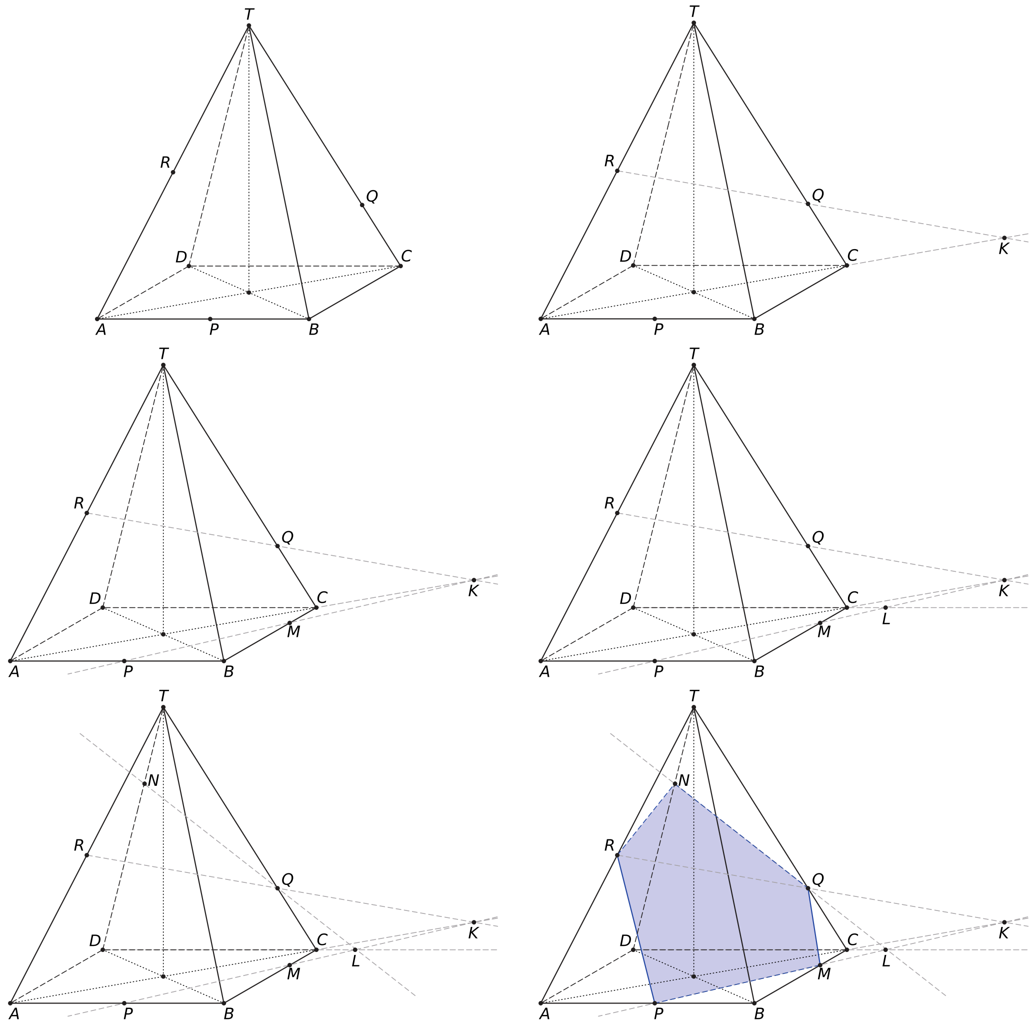
a Teken zo'n kubus met de punten P, Q en R. Voer daarna zelf de constructie van de doorsnede door deze punten stap voor stap uit. Leg bij elke stap uit hoe en waarom hij wordt gezet.

b Toon aan dat de oppervlakte van de doorsnede inderdaad $48\sqrt{3}$ cm^2 is.

c Teken de kubus nog eens. Het midden van GH is punt S, het midden van BF is punt Q. Teken de doorsnede van het vlak door E, Q en S met de kubus. Geef ook nu een uitgebreide beschrijving van je constructie.

Voorbeeld 4

Bekijk de constructie van de doorsnede van het vlak door P, Q en R met de piramide $T.ABCD$.



Figuur 4.9

Opgave 6

In **Voorbeeld 4** wordt de doorsnede van het vlak door P, Q en R in een gegeven regelmatige vierzijdige piramide geconstrueerd wordt.

a Waarom weet je zeker dat de lijnen RQ en AC elkaar snijden? Waarom ligt dit snijpunt K in het grondvlak $ABCD$ van de piramide?

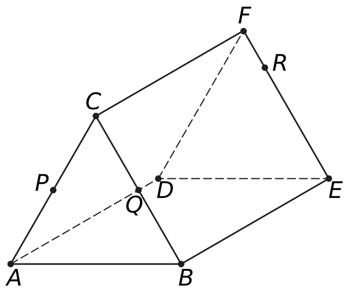
b Geef een nauwkeurige beschrijving van de constructie.

c Teken zelf deze piramide en daarin de doorsnede van het vlak door R, B en Q.

Verwerken

Opgave 7

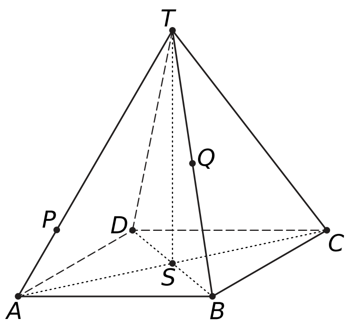
Neem het regelmatige driezijdige prisma $ABC.DEF$ over en teken de doorsnede van het vlak door P, Q en R. Punt Q is het midden van BC. Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 4.10

Opgave 8

Neem de piramide over en teken de doorsnede van het vlak door P, Q en C en de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$. Geef een beschrijving van de constructie.



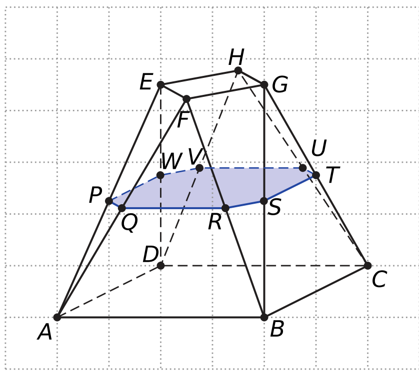
Figuur 4.11

Opgave 9

Van de achtkanter $ABCD.EFGH$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant van 4 bij 4, de hoogte 4 en het bovenvlak $EFGH$ een vierkant met diagonalen van 2 eenheden. In deze achtkanter is een horizontale doorsnede getekend door het midden van alle opstaande ribben.

a Teken deze doorsnede op ware grootte. Laat zien hoe je daarbij te werk gaat.

b Bereken de totale omtrek van deze doorsnede.



Figuur 4.12

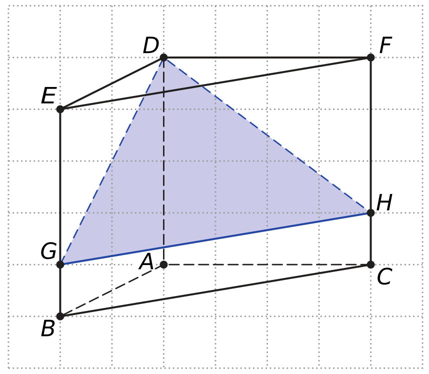
Opgave 10

Bekijk prisma $ABC.DEF$ waarvan twee grensvlakken vierkant zijn. Deze vierkanten hebben zijden van 4 cm. Verder is gegeven: $\angle BAC = 90°$, $BG = 1$ en $CH = 1$.

a Teken de doorsnede van vlak GHD en het prisma op ware grootte.

b Bereken de grootte van de hoeken van driehoek GHD in één decimaal nauwkeurig.

c Neem de figuur over en teken de snijlijn van vlak GHD met het vlak waarop het grondvlak ABC ligt.

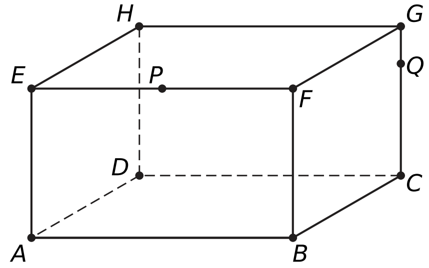


Figuur 4.13

Opgave 11

In deze balk $ABCD.EFGH$ is P het midden van EF en ligt Q op CG zo, dat $CQ : QG = 4 : 1$.

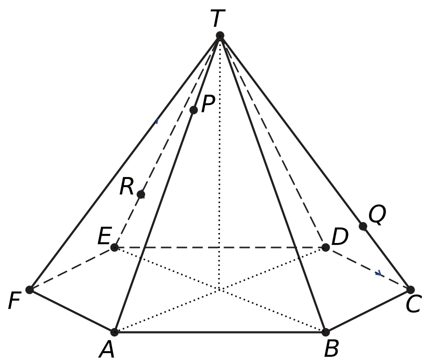
Neem de balk over en teken de doorsnede van het vlak APQ en de balk. Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 4.14

Opgave 12

Gegeven is een piramide $ABCDEF.T$ met een regelmatige zeshoek als grondvlak. Zie ook de figuur. Punt P ligt op AT, punt Q ligt op TC en punt R op TE. Teken de doorsnede door de punten P, Q en R. Licht je antwoord toe.

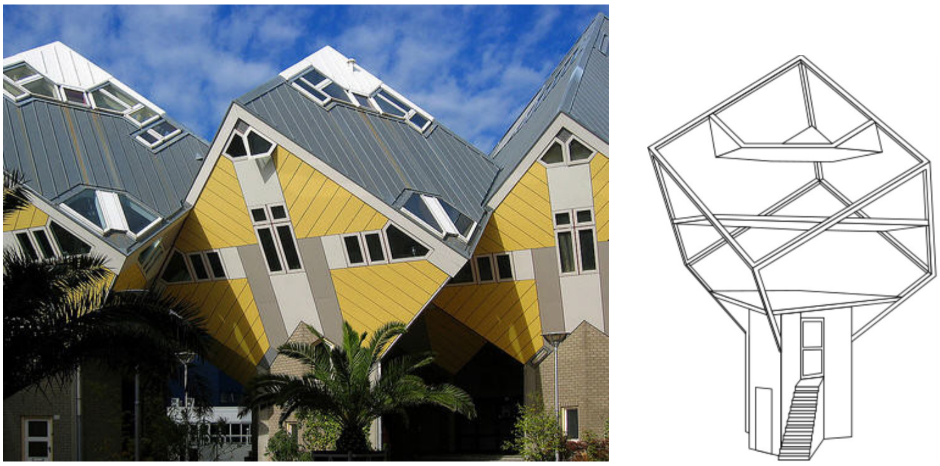


Figuur 4.15

Toepassen

Opgave 13: Kubuswoningen

Het ontwerp van de kubuswoningen door architect Piet Blom is beroemd. In Helmond en in Rotterdam zijn dergelijke kubuswoningen gebouwd.



Figuur 4.16

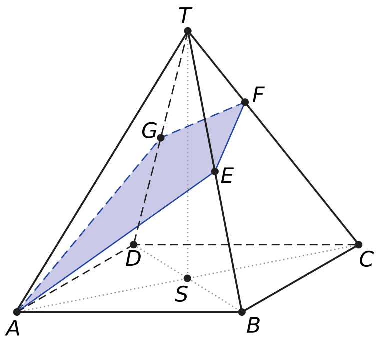
a Teken zo'n kubus die op zijn punt staat: één van de lichaamsdiagonalen is verticaal.

b Teken de vloeren van de drie verdiepingen in de kubus. Deze drie vloeren verdelen de verticale lichaamsdiagonaal in vier gelijke delen.

Testen

Opgave 14

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijden van 4 cm. De hoogte van deze piramide is 5 cm. Punt E is het midden van BT en punt G is het midden van DT. De doorsnede $AEFG$ heeft de vorm van een vlieger. S is het snijpunt van de diagonalen AC en BD. M is het snijpunt van TS en GE.



Figuur 4.17

a Leg uit waarom deze doorsnede de vorm van een vlieger heeft.

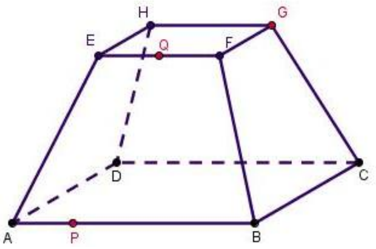
b Teken doorsnede $AEFG$ op ware grootte. Licht je antwoord met berekeningen toe.

c Bereken de grootte van $\angle EAG$.

Opgave 15

In GeoGebra is een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$ getekend. P ligt zo op AB dat $AP : PB = 1 : 3$ en Q is het midden van EF.

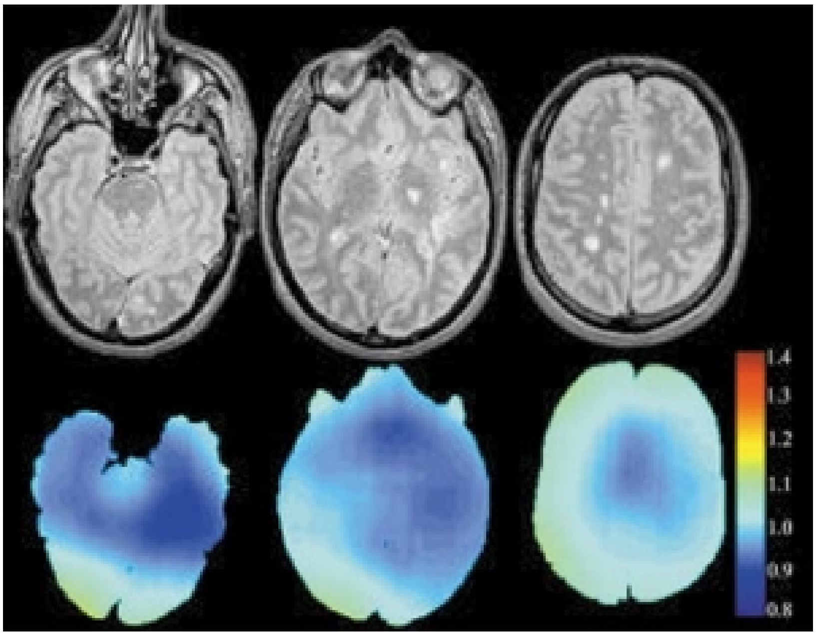
Teken de doorsnede van het vlak PQG en de afgeknotte piramide. Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 4.18

2.5 Series doorsneden

Inleiding



Figuur 5.1

Een MRI-scan van de hersenen levert een serie evenwijdige doorsneden op. De gebruikte techniek is **Magnetic Resonance Imaging** (beelden maken door magnetische resonantie).
Zo'n serie evenwijdige doorsneden geeft een beeld van iemands organen en ook van eventuele afwijkingen aan die organen.

Je leert in dit onderwerp

- een serie parallelle doorsneden tekenen.
- vanuit een serie evenwijdige doorsneden de ruimtelijke figuur opbouwen.

Voorkennis

- eenvoudige doorsneden tekenen in parallelprojectie;
- doorsneden op ware grootte tekenen.

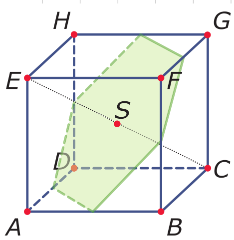
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de kubus die wordt doorsneden door een vlak loodrecht op EC en door punt S. Als je S zou kunnen bewegen, dan zou je een serie doorsneden van het vlak met de kubus zien.

a Welke vormen doorsneden zijn allemaal mogelijk?

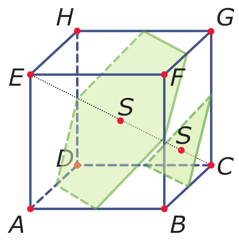
b Welke eigenschappen hebben alle doorsneden?



Figuur 5.2

Uitleg

Bekijk de kubus die wordt doorsneden door een vlak loodrecht op EC en door punt S. Als je S zou kunnen bewegen, dan zou je een serie doorsneden van het vlak met de kubus zien. In de figuur is bij twee posities van punt S de doorsnede getekend.



Figuur 5.3

De mogelijke doorsneden zijn: een punt, een gelijkzijdige driehoek en een zeshoek. Op één plek is er zelfs sprake van een regelmatige zeshoek.

De zijden van de verschillende doorsneden in hetzelfde vlak zijn evenwijdig.
De zijden van dezelfde doorsnede in evenwijdige vlakken zijn ook evenwijdig.

Opgave 1

De kubus $ABCD.EFGH$ in de **Uitleg** heeft ribben van 4 cm.

a Hoe zien alle doorsneden evenwijdig aan vlak $ABCD$ eruit?

b Teken een serie doorsneden evenwijdig aan vlak $BFHD$ in de kubus. Teken alle doorsneden die door een hoekpunt of het midden van een ribbe van de kubus gaan.

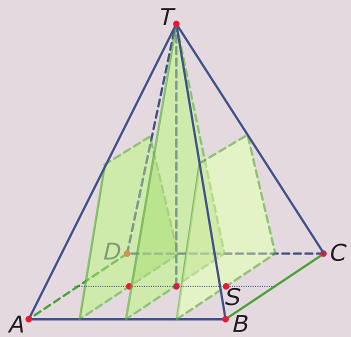
Opgave 2

Teken een kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 4 cm. Teken een serie doorsneden loodrecht op lichaamsdiagonaal EC in de kubus. Teken alle doorsneden die door een hoekpunt of het midden van een ribbe van de kubus gaan.

Theorie en voorbeelden

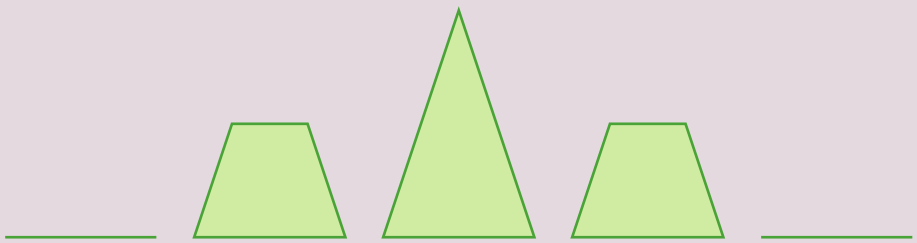
Om te onthouden

Een **serie evenwijdige doorsneden** bestaat uit doorsneden van een lichaam met een aantal evenwijdige vlakken. Zo'n serie geeft vaak een goed beeld van de vorm van een lichaam. Soms teken je de doorsneden in de oorspronkelijke figuur, soms teken je ze los van de figuur.
Bekijk de serie parallelle doorsneden van een piramide en een vlak loodrecht op en evenwijdig aan twee zijden van het grondvlak.



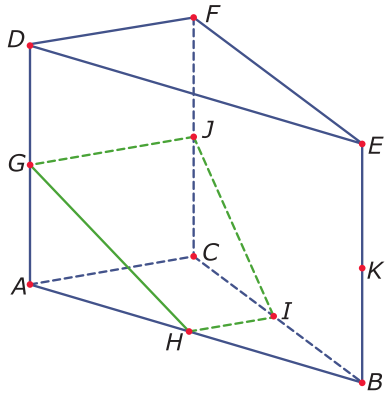
Figuur 5.4

Om een serie evenwijdige doorsneden van een lichaam te tekenen, maak je gebruik van een eigenschap van het snijden van vlakken: Snijlijnen zijn evenwijdig als je één vlak snijdt met meerdere onderling evenwijdige vlakken.


Figuur 5.5

Voorbeeld 1

Je ziet een recht prisma $ABC.DEF$ met daarin een doorsnede $GHIJ$. De punten G, H, I, J en K zijn de middens van de ribben waar ze op liggen. Hoe teken je de doorsnede door D die evenwijdig aan $GHIJ$ loopt? En de evenwijdige doorsnede die door K gaat?



Figuur 5.6

Antwoord

Bij de doorsnede door D evenwijdig aan $GHIJ$ loopt de snijlijn uit D in het vlak $ABED$ evenwijdig aan GH. Ga na dat die snijlijn precies door B gaat. De snijlijn door D in het vlak $ACFD$ loopt evenwijdig aan GJ en dat geeft dan de lijn door DF.

Er loopt een snijlijn door K van de doorsnede evenwijdig aan $GHIJ$ die evenwijdig is aan GH in vlak $ABED$ en er loopt een snijlijn door K evenwijdig aan IJ in het vlak $CBEF$. Als je die snijlijnen tekent, levert je dit ook twee snijpunten op, waar een snijlijn evenwijdig aan GJ en DF doorloopt.

Opgave 3

Bekijk het prisma in **Voorbeeld 1**. $ACFD$ is een vierkant met ribben van 4 cm en $AB = BC = 6$ cm.

a Teken het prisma met daarin de doorsnede $GHIJ$.

b Teken in je figuur de doorsneden die evenwijdig zijn met $GHIJ$ en gaan door punt D dan wel punt K.

c Teken de doorsnede door punt K op ware grootte.

Opgave 4

Van de balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 4$, $BC = 8$ en $AE = 3$.
Verder is P het midden van EF en Q het midden van EH.

a Teken deze balk en de doorsnede van het vlak PBQ met die balk erin. Beschrijf hoe de constructie wordt uitgevoerd.

b Teken de doorsnede van het vlak door H en evenwijdig aan PBQ met de balk.

c Teken de doorsnede van het vlak door C en evenwijdig aan PBQ met de balk.

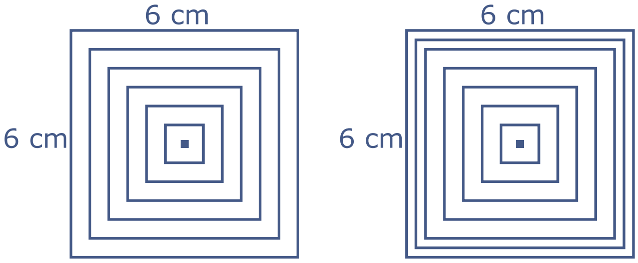
Opgave 5

Gegeven is piramide $T.KLMN$. Ga ervan uit dat $KLMN$ een vierkant is met zijden van 4 cm en dat de piramide een hoogte heeft van $TS = 6$ cm als S het snijpunt is van KM en LN.

Teken een serie van vijf doorsneden van deze piramide die evenwijdig zijn met $KLMN$.
De doorsneden zitten op gelijke afstanden van elkaar.

Voorbeeld 2

Je ziet een serie evenwijdige doorsneden van twee verschillende voorwerpen. De doorsneden zijn allemaal gemaakt evenwijdig aan het grondvlak, te beginnen met het grondvlak zelf en steeds 1 cm hoger.
Teken beide voorwerpen.



Figuur 5.7

Antwoord

Beredeneer eerst hoe beide voorwerpen eruitzien:

- De linker serie bestaat uit zeven doorsneden, die gelijkmatig kleiner worden, de laatste doorsnede is een punt. Hier gaat het kennelijk om een piramide met als grondvlak een vierkant van 6 cm bij 6 cm en een hoogte van 6 cm. De top ligt recht boven het midden van het grondvlak. Zo'n piramide kun je gemakkelijk tekenen.
- De rechter serie bestaat uit acht doorsneden met als laatste een punt. De eerste drie worden minder snel kleiner dan de volgende vijf. Het gaat daarom om een knikpiramide, waarvan het onderste deel (tot een hoogte van 2 cm) steiler is dan de rest (van 2 cm tot 7 cm). Misschien teken je liever eerst een vooraanzicht? Opnieuw zit de top van de piramide recht boven het midden van het grondvlak. Nu kun je hem vast wel tekenen.

Opgave 6

Bekijk nu de series doorsneden uit **Voorbeeld 2**.

a Teken de twee bijbehorende ruimtelijke figuren.

Je hebt al een serie horizontale doorsneden van een piramide $T.KLMN$ gemaakt. Ga ervan uit dat $KLMN$ een vierkant is met zijden van 4 cm en dat de piramide een hoogte heeft van $TS = 6$ cm als S het snijpunt is van KM en LN.

b Teken een serie van vijf parallelle doorsneden van de piramide en een vlak loodrecht op en evenwijdig aan twee zijden van het grondvlak . De middelste doorsnede bevat TS, de hoogte van de piramide.

Verwerken

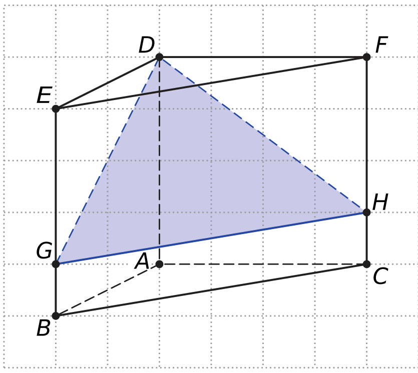
Opgave 7

Bekijk prisma $ABC.DEF$ waarvan twee grensvlakken vierkant zijn. Deze vierkanten hebben zijden van 4 cm. Verder is gegeven: $\angle BAC = 90°$, $BG = 1$ en $CH = 1$.

a Teken een doorsnede door punt B en evenwijdig met vlak GHD.

b Teken een doorsnede door het midden M van BE en evenwijdig met vlak GHD.

c Hoe ziet de doorsnede eruit van een vlak door punt E en evenwijdig met vlak GHD?

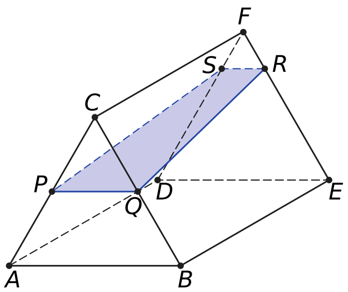


Figuur 5.8

Opgave 8

Bekijk de doorsnede van het vlak door P, Q en R en het regelmatige driezijdige prisma $ABC.DEF$.

Teken door A een doorsnede evenwijdig aan het vlak door P, Q, en R. En teken een doorsnede door het midden M van ribbe BE evenwijdig aan het vlak door P, Q en R.

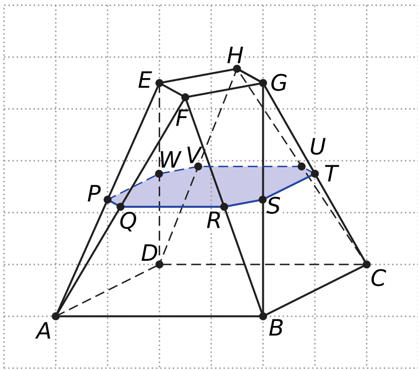


Figuur 5.9

Opgave 9

Van de achtkanter $ABCD.EFGH$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant van 4 bij 4, de hoogte 4 en het bovenvlak $EFGH$ een vierkant met diagonalen van 2 eenheden. In deze achtkanter is een horizontale doorsnede getekend door de middens van alle opstaande ribben.

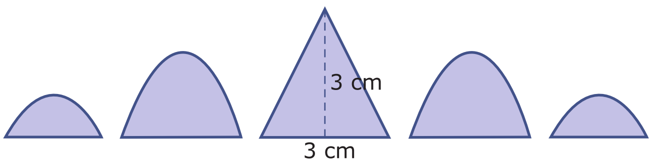
Teken van deze achtkanter een serie van vijf doorsneden evenwijdig aan het getekende vlak op ware grootte. De doorsneden liggen steeds op een afstand van 1 eenheid van elkaar en het getekende vlak zelf is één van die doorsneden.



Figuur 5.10

Opgave 10

Bekijk de serie verticale doorsneden van een lichaam. De afstand tussen de doorsneden is telkens $0{,}5$ cm.



Figuur 5.11

Teken een parallelprojectie van dit lichaam.

Opgave 11

Teken een serie parallelle doorsneden van een kegel, evenwijdig aan de as van de kegel. De afstand tussen de doorsneden is 1 cm. De kegel is 5 cm hoog en de straal van de grondcirkel is 3 cm. Laat zien hoe je dit aanpakt, geef eventuele berekeningen.

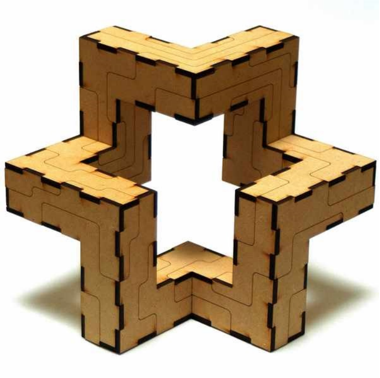
Opgave 12

Teken een serie parallelle doorsneden van een bol met een straal van 3 cm. De afstand tussen de doorsneden is 1 cm. Laat zien hoe je dit aanpakt, geef eventuele berekeningen.

Toepassen

Opgave 13: De Step Star

Dit is de ‘Step Star’, een 3D puzzle. Als alle puzzelstukjes op hun plaats zitten, krijg je een figuur die precies in een kubus past en ribben heeft van 1 cm, 2 cm en 3 cm. De figuur lijkt een doorlopende balk die steeds onder een rechte hoek een knik maakt.



Figuur 5.12

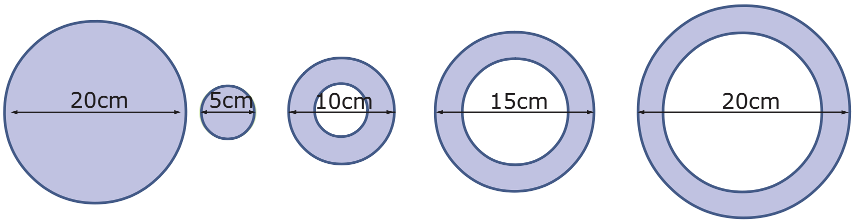
a Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van de ‘Step Star’. Je hoeft niet te letten op de afzonderlijke puzzelstukjes en de zwarte randjes.

b Teken een serie doorsneden van de ‘Step Star’ die evenwijdig zijn aan het grondvlak, het vlak waarop hij in de foto staat. Maak doorsneden die steeds 1 cm boven elkaar liggen, te beginnen met het grondvlak zelf.

Testen

Opgave 14

Hier zie je een aantal evenwijdige doorsneden van een vaas. De doorsneden zijn steeds op een onderlinge afstand van 10 cm genomen. De wanddikte van de vaas is 2,5 cm. Een mogelijke vaas heeft de vorm van twee afgeknotte kegels op elkaar.



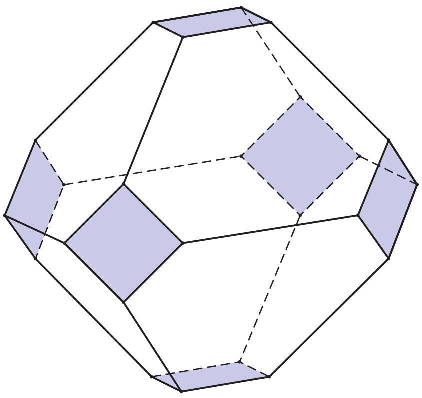
Figuur 5.13

Teken een vaas van die vorm met de kleinste inhoud die bij deze doorsneden past. Zet de afmetingen er bij.

Opgave 15

Bekijk de afgeknotte octaëder (regelmatig achtvlak). Het oorspronkelijke achtvlak had zes hoekpunten die allemaal 4 cm af lagen van het snijpunt M van de drie lichaamsdiagonalen van het achtvlak. De gekleurde vlakjes geven aan hoe de octaëder is afgeknot. Deze vlakjes liggen allemaal 3 cm van M verwijderd.

Teken een serie van zeven horizontale doorsneden van deze afgeknotte octaëder die steeds op 1 cm afstand van elkaar liggen.



Figuur 5.14

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Ruimtelijke figuren**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- lichaam — projectie — parallelprojectie, wijkhoek en verkortingsfactor
- de stelling van Pythagoras — goniometrische verhoudingen: sinus, cosinus en tangens — gelijkvormigheid — vergrotingsfactor
- aanzicht — drieaanzicht — uitslag
- doorsnede
- serie parallelle doorsneden

Activiteitenlijst

- een lichaam tekenen in parallelprojectie
- meetkundige berekeningen met de stelling van Pythagoras, goniometrie en gelijkvormigheid
- aanzichten en uitslagen tekenen en interpreteren
- doorsneden tekenen in een ruimtelijke figuur en op ware grootte
- een serie parallelle doorsneden tekenen en interpreteren

Achtergronden

Een duidelijk begin kent de meetkunde natuurlijk niet. Al vanaf de prilste oudheid kon de mens voorwerpen herkennen en benoemen. Dat er bepaalde wetmatigheden waren zoals:

- de verhouding van de omtrek en de diameter van een cirkel is een vast getal,
- een driehoek van 3 bij 4 bij 5 is rechthoekig,

etc., ontdekte de mens zo'n 5000 jaar geleden. Wellicht voor het eerst in Egypte, waar de leidende klasse (priesters en farao's) behoefte hadden aan metingen en berekeningen om vast te kunnen stellen wanneer de Nijl overstroomde, hoe een piramide werd gebouwd, een tijdrekening te organiseren, de oppervlakte van landerijen te bepalen om belastingen te kunnen heffen, e.d. Uit de Rhind papyrus blijkt dat de Egyptenaren al zo'n 4000 jaar geleden een behoorlijk meetkundige kennis bezaten. Uiteraard ontstonden ook in Mesopotamië, India en China (om alleen de belangrijkste culturen uit de oudheid te noemen) vergelijkbare inzichten.

Figuur 6.1 **Rhind-papyrus**

Meer over de geschiedenis van de meetkunde.

Testen

Opgave 1

Een plastic koffiebekertje heeft (ongeveer) de vorm van een afgeknotte kegel. Van een bepaald koffiebekertje is de diameter van de bodem 46 mm, die van de bovencirkel 64 mm en de hoogte 90 mm.

Teken een uitslag van dit koffiebekertje. Schrijf alle noodzakelijke berekeningen op.

Opgave 2

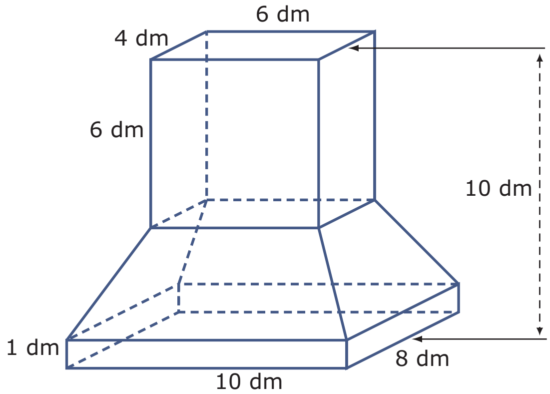
Je ziet een stalen afzuigkap in een keuken. Het bovenste deel is een balk, het onderste gedeelte ook. De vier schuine vlakken hebben allemaal de vorm van een symmetrisch trapezium.

a Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van de afzuigkap.

b Bereken de hoeken in graden nauwkeurig en bereken exact de lengte van de zijden van de trapezia.

c Is het middelste deel van deze afzuigkap een afgeknotte piramide? Licht je antwoord toe.

d Teken een uitslag op schaal 1 : 20 van de afzuigkap.



Figuur 6.2

Opgave 3

Bekijk de foto van de toren van de Walfriduskerk in Bedum. Deze toren is ongeveer 35,70 meter hoog en heeft vier gelijke ruitvormige dakdelen. Iemand maakt een papieren model van deze torenspits. Daarbij maakt hij als grondvlak van de toren een vierkant van 6 cm bij 6 cm. De totale hoogte van het bouwsel wordt 36 cm. De vier onderste punten van deze ruiten komen 30 cm boven het grondvlak.

a Teken de drie aanzichten van de torenspits.

b Bereken exact de lengtes van de zijden van zo'n ruitvormig dakdeel. Bereken ook de hoeken daarvan.

c Teken een parallelprojectie van de torenspits met daarin een serie horizontale doorsneden op 2 meter, 4 meter en 6 meter onder de top.

Figuur 6.3

Opgave 4

Van een regelmatige zeszijdige piramide $T.ABCDEF$ zijn de ribben van het grondvlak 4 cm. De hoogte ervan is TS, waarbij S het middelpunt is van de cirkel die door de hoekpunten van het grondvlak kan worden getrokken.

a Welke lengte heeft ribbe AT minimaal? Licht je antwoord toe.

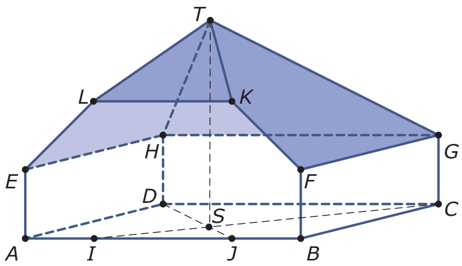
b Gegeven is dat $TS = 6$ cm. Hoe lang is AT?

c Op de helft van de totale hoogte van de piramide wordt een doorsnede gemaakt evenwijdig met het grondvlak. Teken deze doorsnede op ware grootte.

d De punten M, S en N verdelen diagonaal AD in vier gelijke delen. Teken een serie van drie doorsneden evenwijdig aan TS en loodrecht op diagonaal AD door de genoemde punten.

Opgave 5

Bekijk de vereenvoudigde weergave van een boerenschuur. Grondvlak $ABCD$ is een rechthoek met $AB = 8$ m en $BC = 6$ m. De zijvlakken $BCGF$ en $ADHE$ zijn rechthoeken van 6 m bij 2 m. Verder is $AI = BJ = 2$ m, $KL = IJ$ en $TS = 6$ m. Punt L zit recht boven I, punt K zit recht boven J en punt T zit recht boven S. Verder is gegeven dat $KJ = 4$ m.



Figuur 6.4

a Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van de schuur.

b Teken het grensvlak $FGTK$ op schaal 1:100 en bereken alle hoeken ervan in graden nauwkeurig.

c Teken in de figuur de doorsnede van een vlak door C, L en K met de schuur.

Toepassen

Opgave 6: De vijf regelmatige lichamen

Al in de Oudheid was bekend dat er precies vijf **regelmatige lichamen** zijn. Dat zijn lichamen waarvan alle ribben en alle vlakken en alle hoeken gelijk zijn. Hier zie je er fraaie animaties van, die zijn gemaakt door **Rüdiger Appel**. Bekijk zijn website maar eens, je vind er deze figuren onder de naam ‘Platonic Solids’ (dat is Engels voor ‘Platonische lichamen’).
Je ziet hier (van links naar rechts) het tetraëder (regelmatig viervlak), de kubus (hexaëder, of regelmatig zesvlak), het octaëder (regelmatig achtvlak), het dodecaëder (regelmatig twaalfvlak) en het icosaëder (regelmatig twintigvlak).

Bekijk de applet.

Figuur 6.5

Als je hun hoekpunten, hun ribben en hun grensvlakken telt, kom je tot:

aantal grensvlakken + aantal hoekpunten = aantal ribben + 2

Is dat toeval? Of kun je het verklaren?
En waarom zijn er niet meer dan vijf?

a Neem $r = 4$ en teken van het regelmatig viervlak, de kubus en het regelmatig achtvlak een dwarsdoorsnede waar minstens één ribbe een zijde van is en die door de draaias van de figuur gaat. Als je er zin in hebt moet je vooral ook proberen om dit in het regelmatig twaalfvlak en het regelmatig twintigvlak te doen!

b Druk bij het regelmatig viervlak, de kubus en het regelmatig achtvlak de hoogte uit in r.
De andere twee zijn erg moeilijk, een echte uitdaging!

c Kun je verklaren waarom er niet meer dan vijf regelmatige lichamen zijn? (Tip: Denk aan de hoeken die in een hoekpunt bij elkaar komen.)

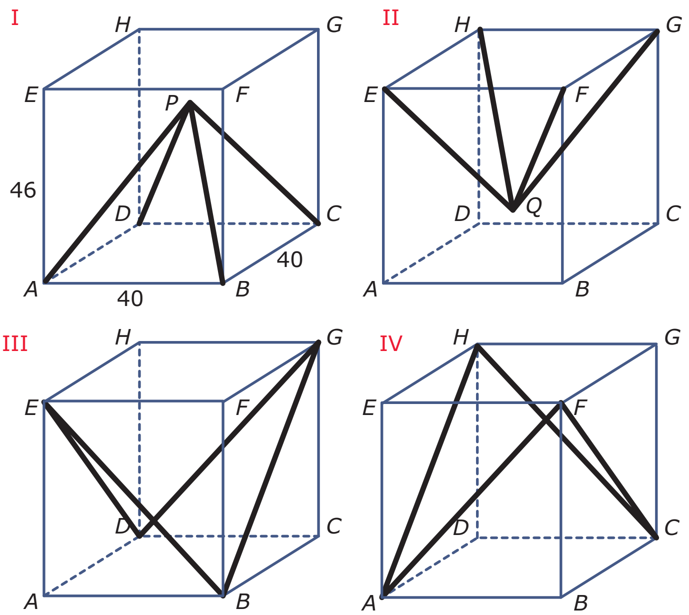
d Probeer een verklaring te vinden voor de formule van Euler:
aantal grensvlakken + aantal hoekpunten = aantal ribben + 2

Examen

Opgave 7: Tafeltje

Op de foto hiernaast staat de afbeelding van een tafeltje. Het tafeltje bestaat uit een aluminium onderstel met daarop een glazen plaat. De vragen gaan over het onderstel. Dit bestaat uit een aantal staven. Uit de foto is moeilijk op te maken hoe het onderstel precies in elkaar zit. De figuur hieronder geeft hierover meer duidelijkheid door het verdelen van de staven over de figuren I, II, III en IV.

Figuur 6.6



Figuur 6.7

Het onderstel past in zijn geheel precies in een denkbeeldige balk $ABCD.EFGH$. Als de vier figuren in elkaar worden geschoven, ontstaat een tekening van het volledige onderstel. Bij de punten E, F, G en H van het onderstel kan de glazen plaat worden vastgemaakt.
In de volgende vragen wordt de dikte van de staven verwaarloosd.

De afmetingen van de balk $ABCD.EFGH$ zijn $40 \times 40 \times 46$ cm. Zie de figuren I en II.
Punt P ligt 13 cm onder het midden van het bovenvlak van de balk; punt Q ligt 13 cm boven het midden van het grondvlak.

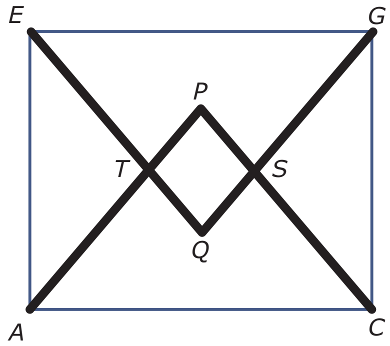
a Teken het bovenaanzicht van het volledige onderstel op schaal $1:10$. Zet alle letters erbij.

b Bereken de totale lengte aluminium staaf die in het onderstel verwerkt is. Geef je antwoord in gehele centimeters nauwkeurig.

Hiernaast is het diagonaalvlak $ACGE$ getekend met de vier staven die in dit vlak liggen. In het snijpunt S van de lijnen PC en QG zijn in werkelijkheid de twee staven door middel van een pennetje met elkaar verbonden. Om dit mogelijk te maken moest er in iedere staaf een gaatje geboord worden op een bepaalde afstand van de eindpunten.

c Bereken de afstand QS. Geef je antwoord in gehele millimeters nauwkeurig.

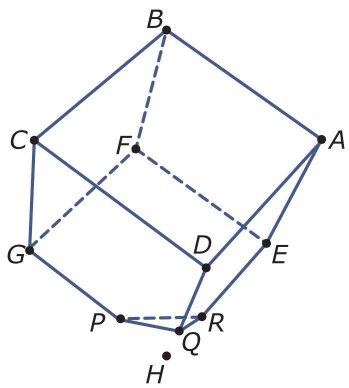
(bron: examen wiskunde B1,2 havo in 2000, opgave 5, tweede tijdvak)



Figuur 6.8

Opgave 8: Showmodel

In een Doe-Het-Zelf-winkel staat een showmodel om verschillende soorten vloerbedekking te laten zien: parket, laminaat en vinyl. Zie de foto.
Het showmodel is een kubus $ABCD.EFGH$ (met de diagonaal BH verticaal) die bij hoek H is afgeknot. De kubus staat met het afgeknotte gedeelte PQR op een rechthoekig blok, een zogenaamde sokkel. Zo zijn er zes grensvlakken waarop men een vloerbedekking kan laten zien.



Figuur 6.9

De niet-afgeknotte ribben zijn 100 cm lang; de ribben GP, DQ en ER zijn 80 cm lang.

a Bereken de oppervlakte van dat deel van de afgeknotte kubus dat gebruikt kan worden om vloerbedekking te laten zien.

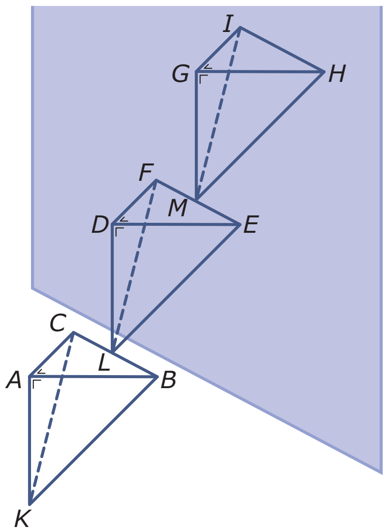
b Teken een bovenaanzicht van de afgeknotte kubus. Zet de letters van de hoekpunten erbij. Teken met stippellijnen de ribben die je van bovenaf niet kunt zien.

c De sokkel heeft een hoogte van 20 cm. Onderzoek door middel van een berekening of de totale hoogte van het showmodel (inclusief sokkel) minder dan 185 cm is.

(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2001, opgave 5, aangepast)

Opgave 9: Etagère

In een advertentie van een tuincentrum staat een foto van een etagère. Dezelfde foto is hiernaast afgebeeld. Hieronder is de etagère getekend.



Figuur 6.11

Figuur 6.10

De etagère is opgebouwd uit drie gelijke piramiden. Hij steunt met het punt K op de grond en met de ribbe HI tegen de muur. De bovenste piramide is aan de middelste vastgelast in het midden M van ribbe EF en de middelste piramide is aan de onderste vastgelast in het midden L van ribbe BC.
Het punt K en de ribben BC, EF en HI liggen in één vlak. De driehoeken KAB, KAC en ABC zijn zowel rechthoekig als gelijkbenig. $KA = AB = AC = 25$ cm. De vlakken ABC, DEF en GHI lopen evenwijdig aan het grondvlak.

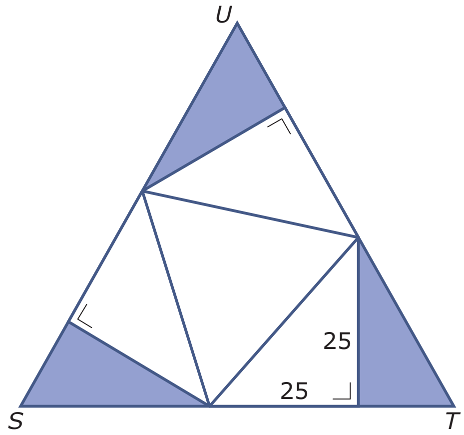
a Teken een bovenaanzicht van deze etagère op schaal $1 : 5$. Zet de letters erbij.

b Bereken de afstand van punt K tot de muur. Rond je antwoord af op een geheel aantal centimeters.

De drie piramiden van de etagère worden uit ijzeren platen gemaakt. Zo'n ijzeren plaat heeft de vorm van een gelijkzijdige driehoek STU. Hiernaast is de uitslag van een piramide in de ijzeren plaat getekend. De grijze driehoekjes zijn afval.

c Bereken de lengtes van de zijden van driehoek STU. Rond je antwoord af op een geheel aantal centimeters.

(bron: herexamen wiskunde B1,2 havo 2004, opgave 3, aangepast)



Figuur 6.12

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

Math4all

www.math4all.nl