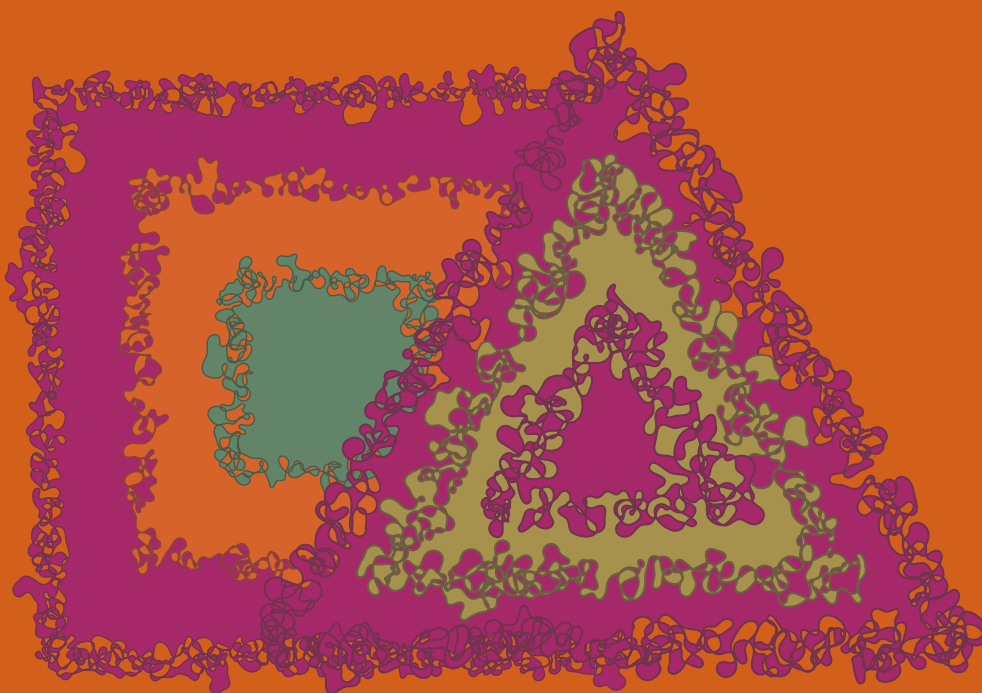


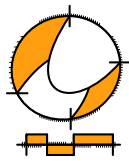
Wiskunde B

4 HAVO

Katern 4

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Exponentiële functies 5

1.1 Exponentiële groei 6

1.2 Reële exponenten 15

1.3 Exponenten en machten 23

1.4 Exponentiële functies 29

1.5 Meer exponentiële functies 37

1.6 Totaalbeeld 45

2 Vectoren en goniometrie 53

2.1 Vectoren 54

2.2 Sin, cos, tan 62

2.3 De sinusregel 70

2.4 De cosinusregel 76

2.5 Totaalbeeld 82

Register 87

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Exponentiële functies

1.1	Exponentiële groei	6
1.2	Reële exponenten	15
1.3	Exponenten en machten	23
1.4	Exponentiële functies	29
1.5	Meer exponentiële functies	37
1.6	Totaalbeeld	45

1.1 Exponentiële groei

Inleiding

Groeiverschijnselen komen veel voor, denk aan het toenemen van geld dat je op de bank zet, het toenemen van de kosten als je meer km in de taxi zit, het groeien van de bevolking, enzovoorts. Soms is er sprake van toename met een vaste hoeveelheid per tijdseenheid, soms is er sprake van toename die afhankelijk is van de hoeveelheid zelf: hoe groter de hoeveelheid, hoe groter ook de toename per tijdseenheid. Bij exponentiële groei is de toename een vast percentage van de totale hoeveelheid.

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
65536	131K	262K	524K	1M	2M	4M	8M
16M	33M	67M	134M	268M	536M	1G	2G
4G	8G	17G	34G	68G	137G	274G	549G
1T	2T	4T	8T	17T	35T	70T	140T
281T	562T	1P	2P	4P	9P	18P	36P
72P	144P	288P	576P	1E	2E	4E	9E

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei en afname;
- bijpassende formules opstellen bij exponentiële groei;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden;
- enkele rekenregels voor het werken met machten.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt een heel groot vel papier (A1-formaat). Het vel papier vouw je dubbel. Het dubbelgevouwen papier is dan twee lagen dik. Vouw je dit papier nogmaals dubbel, dan is het papier vier lagen dik. Een echt vel papier kun je natuurlijk steeds moeilijker dubbelvouwen. Wanneer je je het vel papier voorstelt als een onbegrensd vlak zonder dikte, kun je in principe blijven doorgaan met dubbelvouwen.

- Hoeveel lagen papier zijn er na twintig keer dubbelvouwen?
- Waarom zal dit met een A4'tje in werkelijkheid nooit lukken?
Stel dat een onbegrensd vel papier 0,15 mm dik is.
- Hoe dik is het aantal lagen na twintig keer vouwen?
- Van een ander vel papier is na net zo vaak vouwen het aantal lagen maar 5 centimeter dik. Hoe dik is dat papier?

Uitleg 1

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Elke bacterie brengt twee nieuwe bacteriën voort door zich te delen. Bij een geschikte temperatuur kan de groei van het aantal bacteriën verlopen als in de tabel.

tijd (uur)	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	6	12	24	48	96	192	384

Tabel 1.1

De hoeveelheid bacteriën wordt elk uur twee keer zo groot. Dat zie je door opeenvolgende waarden in de tabel op elkaar te delen.

$$\frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = \frac{192}{96} = 2$$

Je moet dus steeds met factor 2 vermenigvuldigen om de volgende waarde te vinden:

- op tijdstip 0 heb je 6 bacteriën;
- na 1 uur heb je $6 \cdot 2$ bacteriën;
- na 2 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2$ bacteriën;
- na 3 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2^3$ bacteriën, enzovoort.

Je zegt: de hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Voor de hoeveelheid bacteriën B na t uur geldt in dit geval de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$. Je ziet dat er machten worden gebruikt voor het herhaaldelijk vermenigvuldigen. In dit geval zijn het machten met grondtal 2; dit getal is de groeifactor per uur. Omdat de variabele t in de exponent zit, spreek je van exponentiële groei.

Met deze formule kun je gemakkelijk berekenen hoeveel bacteriën je na bijvoorbeeld 10 uur hebt: $B(10) = 6 \cdot 2^{10} = 6144$.

Opgave 1

Bekijk het verhaal van de bacteriegroei in **Uitleg 1**.

- Wat versta je onder de 'groeifactor' per uur van de hoeveelheid bacteriën?
- Hoeveel procent bacteriën komt er elk uur bij?
- Hoeveel bacteriën heb je na 12 uur?

Uitleg 2

Door te denken aan bacteriegroei en de functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ kun je een aantal rekenregels voor machten afleiden.

- Allereerst heb je op $t = 0$ volgens de formule $6 \cdot 2^0$ bacteriën. Omdat je weet dat dit precies 6 moet zijn, is: $2^0 = 1$.
- Na 3 uur heb je $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$. Dit is de *hoeveelheid bacteriën* na 7 uur, dus $6 \cdot 2^7$. Conclusie: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Als je machten vermenigvuldigt, tel je de exponenten op.
- Na 7 uur heb je $6 \cdot 2^7$ en 4 uur eerder $6 \cdot \frac{2^7}{2^4}$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 3 uur, dus $6 \cdot 2^3$. Conclusie: $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$. Als je machten deelt, trek je de exponenten af.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^3$$

$$(2^3)^4 = 2^{12}$$

$$2^0 = 1$$

Figuur 1.2

- De groeifactor per uur is 2. Per 3 uur is die groeifactor $2^3 = 8$. De hoeveelheid bacteriën na 12 uur kun je op twee manieren berekenen: $6 \cdot 2^{12}$ of $6 \cdot 8^4$. Dus moet $(2^3)^4 = 2^{12}$. Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

Deze rekenregels gelden voor alle grondtallen en exponenten. Alleen met grondtal 0 moet je voorzichtig zijn.

Opgave 2

Schrijf als één macht. Gebruik de rekenregels.

- $2^4 \cdot 2^{14}$
- $3^3 \cdot 3^5$
- $\frac{5^9}{5^4}$
- $(6^3)^6$

Opgave 3

- Hoeveel is 0^4 ?
- En hoe zit het met 0^0 ? Welke moeilijkheid doet zich nu voor?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

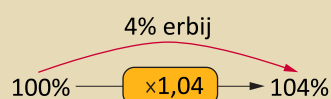
Bij **exponentiële groei** moet je per tijdseenheid een hoeveelheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is dan geldt: $g > 0$. Om vast te stellen of de groei exponentieel is, deel je opeenvolgende waarden van de hoeveelheid op elkaar (let op dat er steeds evenveel tijd verstreken is). Komt daar steeds hetzelfde getal uit, dan is er sprake van exponentiële groei. De hoeveelheid op $t = 0$ noem je de beginwaarde.

Als een hoeveelheid met steeds hetzelfde percentage groeit, is er sprake van exponentiële groei. Bij een groei met p procent hoort de groeifactor: $g = 1 + \frac{p}{100}$.

Voor $p > 0$ neemt de hoeveelheid toe en is $g > 1$: exponentiële toename. Voor $p < 0$ neemt de hoeveelheid af en is $0 < g < 1$: exponentiële afname.

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je n keer hetzelfde getal g , dan schrijf je dat als g^n . Dit is een **macht**. De groeifactor g heet het **grondtal**, n heet de **exponent**, waarbij n (voorlopig) een positief geheel getal is. Voor $n = 0$ is de afspraak: $g^0 = 1$. In het algemeen gelden voor een willekeurig grondtal g en willekeurige positieve gehele n en m een aantal **rekenregels voor machten**:

- $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$
- $\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$
- $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$



Figuur 1.3



Figuur 1.4

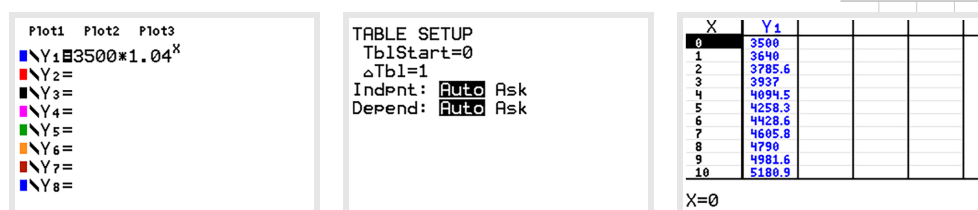
Voorbeeld 1

Op 1 januari 2010 stond een bedrag van € 3500,00 op een spaarrekening. De bank gaf op deze rekening een rente van 4% per jaar. Neem aan dat dit alles vanaf 1 januari 2010 niet verandert en stel een formule op voor het saldo S op deze rekening afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010. Maak ook een tabel die laat zien hoe het saldo zich ontwikkelde.

Antwoord

Bij een toename van 4% per jaar hoort een groeifactor van 1,04. Op $t = 0$ was het saldo € 3500,00. Een passende formule is daarom: $S = 3500 \cdot 1,04^t$.

Als je deze formule invoert op de rekenmachine heb je snel een tabel.



Figuur 1.6

Opgave 4

Iemand zet op 1 januari 2010 € 800,00 op een bankrekening tegen 0,6% rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

- Wat is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?
- Hoeveel geld staat er op de bankrekening op 1 januari 2015?
- Welke formule geldt voor het spaartegoed $S(t)$, waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2010?
- Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipercentage per vijf jaar.
- Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2030 kunt berekenen.
 - $t = 20$ invullen in de formule;
 - het tegoed op 1 januari 2010 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per 4 jaar;
 - het tegoed op 1 januari 2010 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per 5 jaar.

Voorbeeld 2

Een krant ziet in een reeks van jaren het aantal abonnementen dalen.

jaartal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen (x)	970	941	913	885	859	833

Tabel 1.2

Stel op grond van deze tabel een zo goed mogelijk passende formule op die het verloop van het aantal duizenden abonnementen A als functie van de tijd t in jaren beschrijft. Neem $t = 0$ voor 2010. Als het aantal abonnementen onder de 500000 zakt, raakt de krant in problemen. In welk jaar is dat het geval als dit verloop niet wijzigt?

Antwoord

Controleer eerst of je een exponentiële formule mag maken: de jaartallen nemen gelijkmatig toe. Deling van opeenvolgende aantallen abonnementen levert steeds (ongeveer) 0,97 op, dus de daling is een vorm van exponentiële groei.

De groeifactor $g \approx 0,97 < 1$, dus er is sprake van exponentiële afname. Het aantal abonnementen neemt jaarlijks met 3% af.

Een passende formule is daarom: $A(t) = 970 \cdot 0,97^t$.

Maak een tabel van deze functie met de rekenmachine. Op $t = 21$ is de waarde van A ongeveer 512. En op $t = 22$ is de waarde van A ongeveer 496. Dus bij $t = 22$ komt het aantal abonnementen voor het eerst onder de 500000. De krant raakt in 2032 in de problemen.

X	Y1			
16	595.83			
17	577.95			
18	560.61			
19	543.79			
20	527.48			
21	511.66			
22	496.31			
23	481.42			
24	466.97			
25	452.97			
26	439.38			

X=16

Figuur 1.7

Opgave 5

Bekijk de tabel in [Voorbeeld 2](#).

- Controleer dat de groeifactor per jaar inderdaad ongeveer 0,97 is.
- Welke formule vind je voor het aantal abonnementen $A(t)$ als je $t = 0$ neemt in 2017?
- Laat zien dat de krant in 2032 in de problemen raakt.

Opgave 6

Neem de tabel over en vul in.

procentuele toename per ja.	13	-6	0,3				
groeifactor per jaar				1,15	0,98	3,95	0,01

Tabel 1.3

Voorbeeld 3

Bereken $\frac{256^{1000} \cdot 64^{200}}{1024^{919}}$.

Antwoord

Dit kun je met de rekenregels van machten berekenen.

$$256 = 2^8, 64 = 2^6 \text{ en } 1024 = 2^{10}$$

En dus staat hier:

$$\frac{(2^8)^{1000} \cdot (2^6)^{200}}{(2^{10})^{919}} = \frac{2^{8000} \cdot 2^{1200}}{2^{9190}} = \frac{2^{9200}}{2^{9190}} = 2^{10} = 1024.$$

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**. Gebruik de rekenregels voor machten om de uitdrukkingen als een macht te schrijven.

a $3^{83} \cdot (3^{40})^2$

b $\frac{2^{214} \cdot 2^{80}}{(2^{12})^{24}}$

c $\frac{(4^3)^2 \cdot 64^4}{16^2}$

d $\frac{1296^2 \cdot 7776^3}{36}$

Verwerken

Opgave 8

Schrijf als één macht.

a $2^4 \cdot 2^3$

b $(2^3)^2$

c $\frac{2^{512}}{2^{509}}$

d $(5^1)^4 \cdot 5^3$

Opgave 9

In een ondiep meer van 1000 km² begint riet te groeien. Op 1 januari 2014 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 2 km². Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. Op een gegeven moment constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar drie keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

- Geef het functievoorschrift van de met riet begroeide oppervlakte $R(t)$ in km², waarbij t de tijd in jaren is en $t = 0$ op 1 januari 2014.
- Maak een tabel bij deze functie voor de eerste vijf jaar.
- In welk jaar is het hele meer voor het eerst helemaal begroeid met riet?

Opgave 10

Elk jaar wordt het aantal herten in een natuurgebied geteld op 1 januari. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

- Stel een formule op voor de 'groei' van het aantal herten N als functie van de tijd t in weken, waarbij $t = 0$ op 1 januari 2014.
- Bereken het aantal herten op 1 januari 2024.
- Bereken het groeipercentage per tien jaar.
- In welk jaar is het aantal herten gehalveerd?

Opgave 11

In de herfst 'schieten' de paddenstoelen uit de grond. Dit komt omdat de paddenstoel onder de grond groeit. Hier neemt de paddenstoel vocht op. Als het heeft geregend, schiet de paddenstoel razendsnel omhoog.

Ga uit van een paddenstoel die begint met groeien tijdens een regenbui om 23:00 uur 's avonds. Noem dit tijdstip $t = 0$. De hoogte van de paddenstoel is op dat moment 1 cm en neemt per uur met 14% toe. Deze paddenstoel kan maximaal 12 cm hoog worden.

- Hoe hoog is de paddenstoel om 02:00 uur 's nachts? Geef je antwoord in millimeters nauwkeurig.
- Wat is de groeifactor per drie uur? Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.
- Met hoeveel procent is de hoogte van de paddenstoel toegenomen tussen 23:00 uur 's avonds en 6:00 uur in de ochtend? Geef je antwoord in hele procenten.
- Hoeveel hele uren kan de paddenstoel blijven groeien?

Opgave 12

Schrijf als één macht.

a $\frac{(2^{30})^{12} \cdot 2^{60}}{2^{343} \cdot 2^{77}}$

b $\frac{(3^{16})^{10}}{3^{10} \cdot 2^{724}}$

c $\frac{3^{214}}{3^{211}} \cdot 81^{25}$

d $\frac{(49^8)^{10}}{7^{100} \cdot 343^{20}}$

Opgave 13

Op 1 januari 2010 heeft stad A 250000 inwoners. Het aantal inwoners groeit met 2,5% per jaar. Op 1 januari 2008 heeft stad B 300000 inwoners. Het aantal inwoners groeit in deze stad met 5000 per jaar.

- Stel een formule op van het aantal inwoners N_A van stad A. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010.
- Stel een formule op van het aantal inwoners N_B van stad B. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010.

- c Hoeveel procent inwoners had stad B op 1 januari 2012 meer dan stad A? Geef je antwoord in hele procenten.
- d In welk jaar heeft stad A voor het eerst meer inwoners dan stad B?

Toepassen

Opgave 14: Beleggen in aandelen

Een kapitaal van € 10415,00 wordt gedurende tien jaar belegd in aandelen. In de tabel zie je de groei van het kapitaal in de eerste zes jaar.

tijd (jaar)	0	1	2	3	4	5	6
kapitaal (euro)	10415	10850	11295	11760	12250	12750	13280

Tabel 1.4

Onder rendement wordt hier verstaan de procentuele toename van het belegde kapitaal per jaar.

- a Maak duidelijk dat het kapitaal in de eerste zes jaar bij benadering exponentieel toeneemt.
- b Bereken voor deze periode het rendement (per jaar).
- c Maak een tabel van een kapitaal van € 10000,00 dat tien jaar wordt belegd bij een rendement van 8% per jaar.
- d Na hoeveel jaar is dit kapitaal verdubbeld?
- e Iemand belegt een kapitaal van € 10000,00 gedurende tien jaar. Stel dat hij de eerste vijf jaar een rendement van 14% per jaar haalt en de daarop volgende vijf jaar 4% per jaar. Bereken het kapitaal na vijf jaar en na tien jaar.
- f Laat met een berekening zien of het de belegger meer oplevert in vergelijking met de vorige situatie als het rendement de eerste vijf jaar 4% is en de volgende vijf jaar 14%.

Testen

Opgave 15

Voor een bepaald type woning betaal je een huur van € 950,00 per maand. Er wordt een jaarlijkse huurverhoging verwacht van 4%.

- a Stel een formule op waarmee je voor volgende jaren de huur per maand kunt berekenen.
- b Maak een tabel waarin je kunt zien hoe lang het duurt tot de huur hoger wordt dan € 1300,00 per maand.
- c Hoe groot is de groeifactor van de maandelijkse huur per vier jaar? Rond af op twee decimalen.
- d Bereken met behulp van de groeifactor per vier jaar de groeifactor per twintig jaar.
- e Bereken het groeipercentage per twintig jaar.
- f Na hoeveel jaar is de huur per maand voor het eerst meer dan verdubbeld?

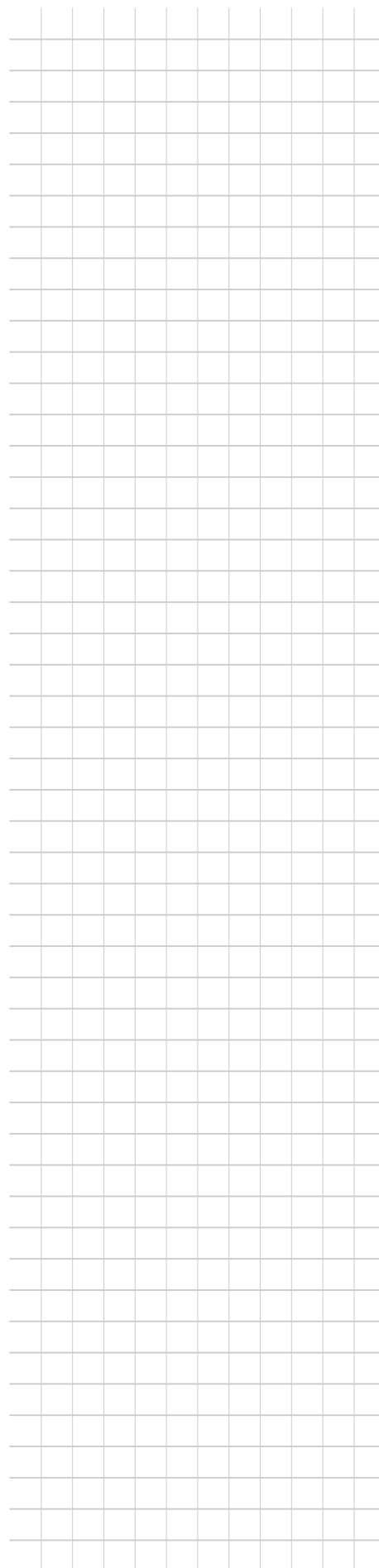
Opgave 16

Schrijf als één macht: $\frac{17^{11} \cdot 17^{54}}{(17^4)^{16}}$.

Opgave 17

Iemand koopt voor € 5000,00 aandelen. In de volgende jaren blijkt dat de aandelen elk jaar 12 procent in waarde dalen.

- a** Stel een functievoorschrift op voor de waarde van de aandelen $W(t)$, waarin t de tijd in jaren sinds de aankoop van de aandelen.
- b** Na hoeveel jaar is de waarde van de aandelen minder dan € 1000,00 geworden?
- c** Bereken het groeipercentage per vijf jaar.
- d** Met welk getal moet je de waarde van de aandelen na vijf jaar vermenigvuldigen om de waarde na tien jaar te krijgen? Bereken de waarde na tien jaar.
- e** Bereken het groeipercentage per tien jaar.



1.2 Reële exponenten

Inleiding

Tot nu toe kun je bij exponentiële groei eigenlijk alleen wat zeggen op tijdstippen die gehele positieve waarden hebben. En dat is natuurlijk niet wenselijk, je wilt weten hoeveel bacteriën er zijn na 1,5 uur, of 2,3 uur voor het begintijdstip. Je gaat nu kijken hoe het met gebroken en/of negatieve exponenten zit. Dat levert weer een paar nieuwe rekenregels voor machten op... In het algemeen zul je leren werken met alle mogelijke reële exponenten.

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken en/of negatieve exponenten;
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden;
- vergelijkingen met exponentiële functies oplossen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

De hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B = 600 \cdot 2^t$. Het startmoment van meten $t = 0$ is om 12:00 uur.

- Hoeveel bacteriën zijn er geweest om 11:00 uur?
- Hoeveel mg bacteriën zijn er geweest om 10:00 uur?
- Hoe bereken je de hoeveelheid bacteriën als je terug gaat in de tijd?
- Kun je ook het aantal bacteriën bepalen om 14:15 uur?

Uitleg 1

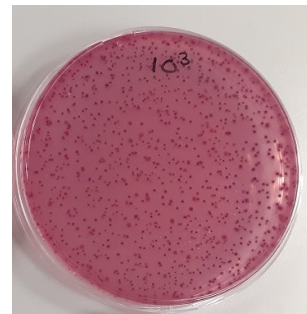
Voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt de formule: $B = 600 \cdot 2^t$.

$t = 0$ komt overeen met 12:00 uur.

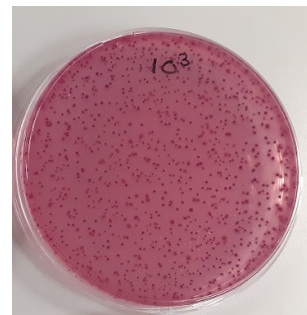
$t = -1$ komt overeen met een uur voor 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën. Als je aanneemt dat dit vóór 12:00 uur ook het geval was, dan zullen er om 11:00 uur: $600 \cdot \frac{1}{2} = 300$ bacteriën in het schaalpje hebben gezeten.

Het aantal bacteriën in voorgaande uren bereken je door telkens te delen door 2 (dus vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$).



Figuur 2.1



Figuur 2.2

tijd (h)	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	150	300	600	1200	2400	4800	9600	19200	38400

Tabel 2.1

Met het functievoorschrift $B(t) = 600 \cdot 2^t$ kun je de hoeveelheid bacteriën t uur na 12:00 uur berekenen voor positieve gehele getallen t . Wil je met deze formule ook het aantal bacteriën 1 uur voor 12:00 uur kunnen berekenen, dan moet: $B(-1) = 600 \cdot 2^{-1} = 300$.

Blijkbaar moet je afspreken dat $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Ook voor andere tijdstippen voor 12:00 uur wil je het functievoorschrift kunnen gebruiken. Dus moet gelden:

- op tijdstip $t = -2$ (10:00 uur): $600 \cdot 2^{-2} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 150$;
- op tijdstip $t = -3$ (9:00 uur): $600 \cdot 2^{-3} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 75$; enzovoort.

Je moet dus ook afspreken dat $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ en $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$, enzovoort.

Je spreekt in het algemeen af, dat $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$. Daarmee kun je met negatieve exponenten rekenen. Let op! Nu mag g niet 0 zijn!

Opgave 1

Bekijk [Uitleg 1](#).

- Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 8:00 uur te berekenen?
- Bereken het aantal bacteriën om 8:00 uur.

Uitleg 2

Voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt $B = 600 \cdot 2^t$. Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën, het aantal groeit met groeifactor 2. Het aantal bacteriën groeit ook met een vaste groeifactor per half uur, per kwartier, enzovoort.

Voor de groeifactor per half uur schrijf je $2^{\frac{1}{2}}$.

Voor de groeifactor per kwartier schrijf je $2^{\frac{1}{4}}$.

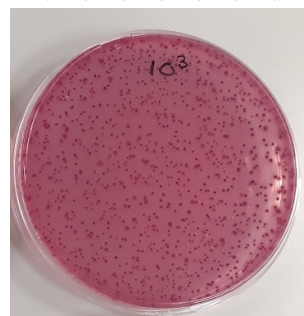
Voor de groeifactor per anderhalf uur schrijf je $2^{1\frac{1}{2}}$.

Welk getal stelt $2^{\frac{1}{2}}$ voor?

De groeifactor per uur kun je vinden door de groeifactor per half uur twee keer toe te passen: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$.

Je weet dat $(\sqrt{2})^2 = 2$. Blijkbaar geldt: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Op dezelfde manier kun je beredeneren dat voor de groeifactor per kwartier geldt: $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$. En daarmee kun je met gebroken exponenten rekenen. Let op! Nu moet g positief zijn om altijd een reële uitkomst op te leveren.



Figuur 2.3

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 2**.

- Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 14:30 uur te berekenen?
- Bereken het aantal bacteriën om 14:30 uur.

Opgave 3

Gebruik de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ uit **Uitleg 2**.

- Hoeveel bedraagt de groeifactor per drie uur?
- Hoeveel bedraagt de groeifactor per vier uur?
- Hoeveel bedraagt de groeifactor per vijf uur?
- Hoeveel bedraagt de groeifactor per half uur?
- Hoeveel bedraagt de groeifactor per kwartier?
- Gebruik de rekenmachine om het aantal bacteriën te berekenen na 5 uur, na 5,5 uur en na 5,75 uur.
- Laat zien dat je het aantal bacteriën na 5,75 uur ook kunt berekenen door het aantal na 5 uur eerst te vermenigvuldigen met de groeifactor per half uur en daarna met de groeifactor per kwartier.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

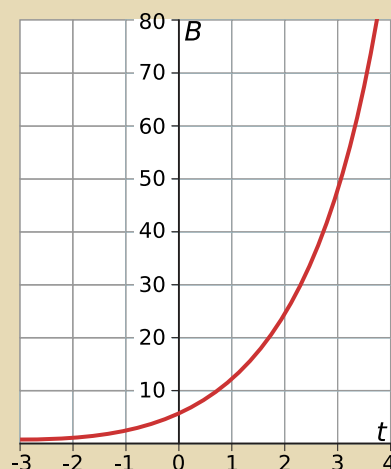
Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid de hoeveelheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de groeifactor die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is, dan geldt: $g > 0$. Om met negatieve exponenten en/of gebroken exponenten te kunnen werken, zijn er afspraken nodig.

- negatieve exponenten:** $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$
- gebroken exponenten:** $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$

Deze afspraken gelden voor $g > 0$ en positieve gehele n .

Beide afspraken passen helemaal in de rekenregels voor machten, bijvoorbeeld: $g^{-n} = g^{0-n} = \frac{g^0}{g^n} = \frac{1}{g^n}$

Je hebt nu gezien dat een macht g^a voor $g > 0$ betekenis heeft als de exponent a een positief getal, 0, een negatief getal of een gebroken getal is. Voor a mag je zelfs elk reëel getal invullen. En daarom kunnen bij exponentiële groei grafieken worden getekend in de vorm van een vloeiende kromme lijn. Je ziet de grafiek van $B = 6 \cdot 2^t$.



Figuur 2.4

Voorbeeld 1

Thomas Robert Malthus leefde in het begin van de negentiende eeuw. Hij vermoedde dat de groei van de wereldbevolking exponentieel was. In de tabel zie je het aantal mensen op aarde in de negentiende eeuw.

jaartal	1800	1820	1840	1860	1880	1900
aantal mensen (mln)	1000	1102	1216	1340	1477	1629

Tabel 2.2

Stel een passend functievoorschrift op voor de bevolking per jaar. Bereken vervolgens hoeveel mensen er in 1600 en in 2000 volgens dit model geweest zouden moeten zijn.

Antwoord

Van 1800 tot 1820 wordt het aantal mensen vermenigvuldigd met: $\frac{1102}{1000} = 1,102$. Controleer dat dit voor elke volgende periode van 20 jaar ook ongeveer zo is. Vanaf 1800 tot 1900 groeide de wereldbevolking met een vrijwel constante groeifactor per 20 jaar van 1,102. De groeifactor per jaar is dan $1,102^{\frac{1}{20}} \approx 1,005$. Neem je de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1800 en het aantal miljoen mensen N , dan is: $N(t) = 1000 \cdot 1,005^t$.

In 1600 zouden er dan $1000 \cdot 1,005^{-200} \approx 369$ miljoen mensen zijn geweest.

In 2000 zouden er dan $1000 \cdot 1,005^{200} \approx 2712$ miljoen mensen zijn geweest.

In werkelijkheid waren dat er nog veel meer, namelijk meer dan 6000 miljoen!

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je de groei van de wereldbevolking in de negentiende eeuw.

- Bereken het aantal mensen in 1600 en in 2000 met behulp van de groeifactor per twintig jaar. Ontstaan er verschillen met de antwoorden in het voorbeeld?
- Doe dit nog eens met behulp van de groeifactor per vijf jaar. Rond af op miljoenen per jaar.
- Bereken met behulp van het groeimodel in het voorbeeld het aantal mensen in 2008.
- Wanneer zou volgens dit groeimodel het aantal mensen verdubbeld zijn ten opzichte van het aantal in 1900?

Voorbeeld 2

Een spaartegoed staat uit tegen 0,7% rente per jaar. De bank kan de rente per half jaar bijschrijven of zelfs maandelijks. Met welke rentepercentages moet de bank dan werken? (Geef beide percentages in twee decimalen nauwkeurig.)

Antwoord

De groeifactor van het spaartegoed per jaar is 1,007.

Als g de groeifactor per half jaar is, kun je die op twee manieren uitrekenen:

- uit $g \cdot g = g^2 = 1,007$ volgt $g = \sqrt{1,007} \approx 1,00349$;
- of $g = 1,007^{\frac{1}{2}} \approx 1,00349$.

Het rentepercentage per half jaar is dus ongeveer 0,35%.

Op dezelfde manier is de groeifactor per maand $1,007^{\frac{1}{12}} \approx 1,00058$ of $\sqrt[12]{1,007} \approx 1,00058$. Het rentepercentage per maand is dus ongeveer 0,06%.

Opgave 5

Iemand zet op 1 juli 2014 een bedrag van € 7500,00 op de bank vast tegen een rente van 2,1% per jaar. Hoeveel bedraagt zijn kapitaal op 1 januari 2016?

- Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per jaar.
- Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per half jaar.
- Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per maand.

Opgave 6

Bij een bank krijg je 1,1% rente per jaar. Hoe groot is het rentepercentage per maand? Rond af op twee decimalen.

Voorbeeld 3

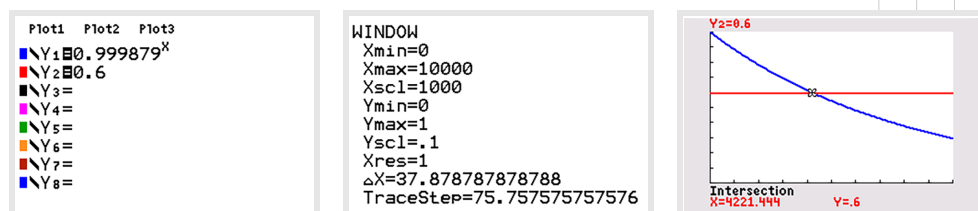
De ouderdom van hele oude voorwerpen wordt bepaald met de zogenaamde C14-methode. C14 is een bepaalde variant van koolstof, een stof die in levende wezens voorkomt en dus ook in mummies, oude houten en leren voorwerpen, en dergelijke. Deze variant neemt exponentieel af nadat een levend wezen is gestorven. Voor dat moment is de concentratie C14 gelijk aan die in onze atmosfeer, na die tijd wordt die concentratie kleiner. De halveringstijd van deze stof is nauwkeurig bekend, namelijk 5736 jaar.

Stel dat bij een bepaalde mummie de concentratie C14 is afgenomen met 40%. Er is dan nog 60% van de oorspronkelijke concentratie over. Hoe bereken je nu de leeftijd van die mummie?

Antwoord

De halveringstijd is 5736 jaar. Als g de groeifactor per jaar is, geldt: $g^{5736} = 0,5$. Hieruit bereken je de groeifactor per jaar: $g = \sqrt[5736]{0,5} \approx 0,999879$. Als t de leeftijd van de mummie is, moet $0,999879^t = 0,6$. Deze exponentiële vergelijking los je op met de

grafische rekenmachine: $t \approx 4221$ jaar.
De mummie is dus ongeveer 4221 jaar.



Figuur 2.5

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** wordt de C14-methode voor het dateren van oude voorwerpen besproken.

- Bereken de groeifactor per eeuw. Rond je antwoord af op drie decimalen.
- Bereken met behulp hiervan de leeftijd van een oud gebruiksvoorwerp waarvan de concentratie C14 nog 38% is.

Opgave 8

Bij een kernsplijting is een hoeveelheid radioactieve stof Cesium-137 vrijgekomen. De halveringstijd van deze stof is dertig jaar.

- Na hoeveel jaar is de hoeveelheid van deze stof afgenomen tot 25%?
- Bereken na hoeveel jaar de hoeveelheid nog maar 11% is.

Verwerken

Opgave 9

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1,1^t$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (jaar) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

- Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 januari 2025?
- Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 augustus 2025?
- Hoe groot is de groeifactor per jaar?
- Hoe groot is het groeipercentage per maand?
- Bereken de hoeveelheid inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

Opgave 10

Op 1 januari 2012 had iemand een kapitaal van € 7969,24 op zijn spaarrekening staan. Het kapitaal stond al jaren vast tegen een rente van 6%. De rente wordt ieder jaar bijgeschreven.

- Bereken de grootte van het kapitaal op 1 januari 2011, 1 januari 2010 en 1 januari 2009.
- In welk jaar heeft het kapitaal een grootte van € 5618,00?
- De spaarder heeft waarschijnlijk een rond bedrag ingelegd toen hij begon met sparen. Wanneer is de spaarder begonnen met sparen en met welk bedrag?

Opgave 11

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel. In drie uur tijd is het aantal gegroeid van 1200 (om 10:00 uur) naar 3000.

- Wat is de groeifactor per drie uur?
- Bereken het groeipercentage per uur.
- Welke formule kun je opstellen voor de groei van deze kolonie als $H(t)$ de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren voorstelt? Neem $t = 0$ op het moment dat er 1200 bacteriën zijn. Rond de groeifactor af op drie decimalen.
- Op welk moment waren er nog 600 bacteriën? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Opgave 12

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in vijftienhonderd jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs 1,2 miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot 2,4 miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking 4,8 miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

- Bereken voor de periodes 1500-1750, 1750-1800 en 1986-1997 het groeipercentage per jaar.
- Vanaf het begin van de jaartelling is de bevolking al meer dan vier keer verdubbeld in aantal. In welke tijdvakken vonden deze verdubbelingen plaats?
- Bereken voor deze periodes het groeipercentage per jaar.

Opgave 13

De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie. Doordat de fall-out op het gras komt, krijgt het hooi een te hoog jodium-131 gehalte. Melk van koeien die met dit hooi gevoerd worden, is niet meer voor consumptie geschikt. Na een ongeluk in een kerncentrale bevat hooi in de omtrek van de centrale zes keer het toegestane gehalte jodium-131. De halveringstijd van jodium-131 is acht dagen.

Hoeveel dagen moet het hooi bewaard blijven, voordat het weer aan koeien gevoerd kan worden?

Toepassen

Opgave 14: Vulkaan op IJsland

Stel je een gebied voor met daarin een vulkaan en twee steden: Árborg en Eyrarbakki. Stel de stad Árborg heeft in 2020 45000 inwoners, dit aantal neemt per jaar toe met een factor 1,03. Het inwonertal van Eyrarbakki is dan 55000 en heeft een verdubbelingstijd van dertig jaar.

- Hoe groot is de groeifactor per jaar van Eyrarbakki? Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

- b** Hoe groot is de verdubbelingstijd van het inwonertal van Árborg?
- c** Geef zowel van Árborg als van Eyrarbakki een formule waarmee je het bevolkingsaantal B kunt berekenen als functie van t (het aantal jaren).

Stel dat in het jaar 2020 de vulkaan uitbarst en een kwart van de bevolking van Árborg om het leven zou komen. Na de uitbarsting groeit de bevolking weer zoals voor de vulkaanuitbarsting.

- d** Wanneer heeft Árborg dan weer het oude aantal inwoners?
- e** Welk van deze twee steden heeft in het jaar 2150 de meeste inwoners als die vulkaanuitbarsting inderdaad zou hebben plaatsgevonden?

Testen

Opgave 15

In een vijver is sterke algengroei. Op het tijdstip dat men begint met meten, zit er in een liter water 10 gram algen. Deze concentratie algen blijkt per week met 15 procent toe te nemen.

- a** Geef een formule waarmee je de concentratie algen A in liter per 10 gram algen kunt berekenen. Neem t voor de tijd in weken, met $t = 0$ het tijdstip waarop men begon met meten.
- b** Neem aan dat ook voor de meting de concentratie algen groeide met 15 procent per week. Hoe hoog was de concentratie algen drie weken voor het begin van de meting? Rond af op één decimaal.
- c** Wat was de concentratie algen twee dagen voor het begin van de meting? Geef het antwoord weer in één decimaal nauwkeurig.
- d** Na hoeveel dagen was de hoeveelheid algen verdubbeld?

Opgave 16

Van een bepaalde soort vlinders daalt het aantal exponentieel. In een zeker seizoen ($t = 0$) zijn er ongeveer 6000 van deze vlinders. Vijf jaar later zijn er nog ongeveer 4300. De vlinders worden door onderzoekers altijd aan het begin van het seizoen geteld.

- a** Bereken de groeifactor per jaar van deze soort vlinders. Rond af op 3 decimalen.
- b** Stel een formule op voor het aantal vlinders van deze soort als functie van t (in jaren).
- c** Met hoeveel procent neemt het aantal vlinders per jaar af?
- d** Hoeveel bedraagt de halveringstijd voor het aantal vlinders van deze soort?
- e** Bereken na hoeveel jaar de onderzoekers voor het eerst minder dan 1000 vlinders zullen tellen.

1.3 Exponenten en machten

Inleiding

Je hebt in het kader van exponentiële groei allerlei rekenregels en eigenschappen van machten en hun exponenten opgebouwd. Deze eigenschappen van exponenten en machten zul je veel moeten toepassen. Daarom moet je die eigenschappen goed 'in de vingers hebben'. Hoog tijd voor algebraïsche vingeroefeningen...

Je leert in dit onderwerp

- werken met de rekenregels voor exponenten en machten;
- herleiden van exponentiële formules tot de standaardvorm.

Voorkennis

- werken met negatieve en gebroken exponenten;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten.

Verkennen

Opgave V1

Bereken: $\frac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}}$

Uitleg

Om $\frac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}}$ te kunnen berekenen, moet je de eigenschappen van machten goed beheersen. Je rekenmachine laat je namelijk (zeer waarschijnlijk) in de steek.

Ga na dat: $\frac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}} = \frac{(19^{220})^{\frac{1}{4}}}{19^{54}} = \frac{19^{55}}{19^{54}} = 19$.

Bekijk stap voor stap welke eigenschappen er zijn gebruikt.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

- Welke eigenschap van machten is er in de eerste stap gebruikt voor het 'wegwerken' van de wortel?
- Welke eigenschap is er vervolgens gebruikt?
- En welke eigenschap als laatste?

Opgave 2

Bereken $\frac{31^{25} \cdot \sqrt[3]{31^{30}}}{(31^{12})^3}$.



Figuur 3.1

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor elk positief grondtal g en voor willekeurige reële getallen a en b gelden **eigenschappen van machten**.

- $g^0 = 1$
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$
- $g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g}$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{g^b} = (\sqrt[a]{g})^b$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$
- $g^{a-b} = \frac{g^a}{g^b}$
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$

Deze rekenregels gelden soms ook voor negatieve grondtallen g , maar hier moet je voorzichtig mee zijn:

Bijvoorbeeld $(-1)^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = -1$, maar $(-1)^{\frac{2}{6}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{6}} = 1^{\frac{1}{6}} = 1$

en $(-1)^{\frac{2}{6}} = \left((-1)^{\frac{1}{6}}\right)^2$ kan niet eens. Voor één uitdrukking betekent dit dus drie verschillende uitkomsten! Daarom moet je er bij exponentiële functies van uitgaan dat het grondtal g positief is.

Denk verder nog aan de eigenschappen: $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ en $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Voorbeeld 1

Je ziet enkele berekeningen met behulp van de eigenschappen van machten.

- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{3^1}\right)^{-4} = (3^{-1})^{-4} = 3^4 = 81$
- $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$
- $16^{1,5} = 16^{1+\frac{1}{2}} = 16^1 \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 16 \cdot \sqrt{16} = 16 \cdot 4 = 64$
- $27^{-\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = (\sqrt[3]{27})^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Opgave 3

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

- 3^{-2}
- $81^{\frac{1}{4}}$
- $(3 \cdot 12)^{\frac{1}{4}}$
- $(2^2)^{-3} \cdot (2^{-2})^{-4}$

e $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

f $125^{\frac{1}{5}} \cdot 5^4 \cdot 5^{-10}$

g $3^{-5} \cdot 9^2$

h $81^{-\frac{1}{4}}$

Voorbeeld 2

Je kunt $x^{-1\frac{1}{2}}$ schrijven zonder negatieve en/of gebroken exponenten:

$$x^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Opgave 4

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a $2x^{2\frac{1}{3}}$

b $\frac{3x^{-1}}{2x}$

c $4x^{-\frac{3}{4}}$

d $2x^{\frac{1}{2}}$

Voorbeeld 3

Je kunt $3x \cdot \sqrt{x}$ schrijven in de vorm ax^b :

$$3x \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3x^{1\frac{1}{2}}$$

Opgave 5

Schrijf in de vorm ax^b .

a $\frac{3}{2x}$

b $\frac{3}{4x\sqrt{x}}$

c $(4\sqrt[3]{x})^2$

d $2x\sqrt{x}$

e $\frac{2}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

f $3x^5 \cdot (2x^3)^2$

Voorbeeld 4

Gegeven is de functie $f(x) = 0,5^{2x-1}$.

Schrijf deze functie in de standaardvorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Antwoord

Met de eigenschappen van machten vind je:

$$f(x) = 0,5^{2x-1} = 0,5^{2x} \cdot 0,5^{-1} = (0,5^2)^x \cdot 2 = 2 \cdot 0,25^x$$

Dit functievoorschrift is nu in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ en dit is een standaardvorm voor formules waarbij sprake is van exponentiële groei. Het begingetal is 2 en de groeifactor is 0,25.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = 12 \cdot 4^{-0,5x+1}$.

Laat zien dat je deze functie in de vorm $y = b \cdot g^x$ kunt schrijven en bereken b en g .

Verwerken

Opgave 7

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

- a $(2^3)^2$
- b $2^3 \cdot 2^2$
- c $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^8$
- d $1000^{\frac{1}{3}}$
- e $2^{-2} \cdot 4^{-1}$
- f $(3^2)^{-1}$

Opgave 8

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

- a x^{-1}
- b $x^{-\frac{1}{2}}$
- c $x^{\frac{3}{4}}$
- d $x^{1\frac{3}{4}}$
- e $3x^{-1,5}$
- f $\frac{1}{2}x^{-2,75}$

Opgave 9

Herleid tot de vorm ax^b .

- a $\frac{2}{\sqrt{x}}$
- b $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

c $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[4]{x}}$

d $\frac{1}{2} \sqrt{x}$

e $\frac{1}{2x \cdot \sqrt{x}}$

f $(3x \cdot \sqrt{x})^3$

Opgave 10

Bereken.

a $\frac{17^{110}}{17^{23}} \cdot 17^{-85}$

b $\left(\frac{1}{2}\right)^{219} \cdot 8^{72}$

c $\left(\frac{3}{4}\right)^{231} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{230} \cdot 3^{233}$

d $\frac{7^{102}}{(49^{10})^5}$

e $\left(\frac{4}{9} \cdot \sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}}$

f $\frac{5^3 \cdot (3^5)^{15}}{25 \cdot \sqrt[3]{3^{225}}}$

Opgave 11

Je kunt de rekenregels gebruiken om bepaalde uitdrukkingen in x te herleiden tot macht van x . Laat zien hoe het herleiden in zijn werk gaat.

a $(2x^3)^4 \cdot -3x^5 = -48x^{17}$

b $\frac{2x \cdot x^2}{x^4} = 2x^{-1}$

c $4x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 4x^{2\frac{1}{3}}$

d $\frac{2}{x \cdot \sqrt{x}} = 2x^{-1\frac{1}{2}}$

e $\frac{1}{2x \sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2} x^{-1\frac{1}{3}}$

f $\frac{(2\sqrt{x})^3}{x^2 \cdot \sqrt[3]{8x}} = 4x^{-\frac{5}{6}}$

Opgave 12

Schrijf de functievoorschriften in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

a $f(x) = 3 \cdot 2^{0,5x}$

b $f(x) = 0,5^{-x+2}$

c $f(x) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2x}$

d $f(x) = 7 \cdot 5^{2x+1} + 2 \cdot (\sqrt{5})^{4x}$

Toepassen

Opgave 13: Puzzel met machten

Als het getal $\left(\left(\left((7^6)^5\right)^4\right)^3\right)^2$ wordt uitgeschreven, wat is dan het laatste cijfer?

Testen

Opgave 14

Bereken zonder rekenmachine.

- a $3^{-5} \cdot 9^2$
- b $2^{-10} \cdot (2^3)^5$
- c $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
- d $81^{-\frac{1}{4}}$

Opgave 15

Herleid de volgende uitdrukkingen tot de vorm ax^n .

- a $3x^5 \cdot (2x^3)^2$
- b $\frac{x^2 \cdot 3x^4}{x^7}$
- c $4x \cdot \sqrt[4]{x^2}$

Opgave 16

Schrijf het functievoorschrift $f(x) = 6 \cdot (\sqrt{2})^{4x-2}$ in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het rekenen met machten en variabelen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.4 Exponentiële functies

Inleiding

De formules die je typisch bij exponentiële groei tegenkomt zijn voorbeelden van exponentiële functies. Je gaat daarom nu dit type functies nader bestuderen. In plaats van 'groefactor' zal nu vaak 'grondtal' worden gezegd, nog steeds is dit grondtal een positief getal.

Je leert in dit onderwerp

- wat een exponentiële functie is;
- de karakteristieken van exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen.
- opstellen van een exponentiële functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $f(x) = 6 \cdot 2^x$.

- Welke snijpunten heeft de grafiek van f met de assen?
- Zijn er extremen?
- Zijn er asymptoten?
- Welke karakteristieken hebben functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$? En hoe hangen die af van de waarden van g ?

Uitleg

Bekijk de applet: exponentiële functies

Met de grafische rekenmachine kun je grafieken bekijken van functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Deze functies komen onder andere voor bij exponentiële groei en heten exponentiële functies. Voor positieve waarden van b geldt:

- Als $g > 1$ is de grafiek voortdurend toenemend stijgend.
- Als $g = 1$ is de grafiek constant.
- Als $0 < g < 1$ is de grafiek voortdurend afnemend dalend.
- Er zijn geen nulpunten, de x -as is een horizontale asymptoot.
- Er zijn geen extremen.

Je moet dit zorgvuldiger beredeneren dan alleen op grond van een grafiek. Dan bedenk je dat door vermenigvuldigen met een getal

dat groter is dan 1, elk positief getal alleen maar groter kan worden. Neemt x toe, dan wordt $f(x)$ dus groter. Neemt x af, dan wordt $f(x)$ kleiner, maar nooit negatief of 0. Vandaar dat er geen nulpunt is, maar wel een asymptoot. Een vergelijkbare redenering geldt voor $0 < g < 1$. Bedenk zelf wat er geldt bij een negatieve b .

Opgave 1

Met de grafische rekenmachine kun je de grafieken van functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ bekijken.

- a Neem $b = 1$ en $g = 2$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ? Is de grafiek stijgend of dalend?
- b Neem $b = 1$ en $g = 1$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Waarom heeft de grafiek van f nu geen asymptoot?
- c Neem $b = 1$ en $g = 0,5$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ? Is de grafiek stijgend of dalend?
- d Neem $b = 2$ en $g = 1,5$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ? Is de grafiek stijgend of dalend?
- e Neem $b = -2$ en $g = 1,5$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ? Is de grafiek stijgend of dalend?

Opgave 2

Welke eigenschappen heeft een functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ als $b < 0$? Maak ook nu weer verschil tussen $g > 1$, $g = 1$ en $0 < g < 1$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

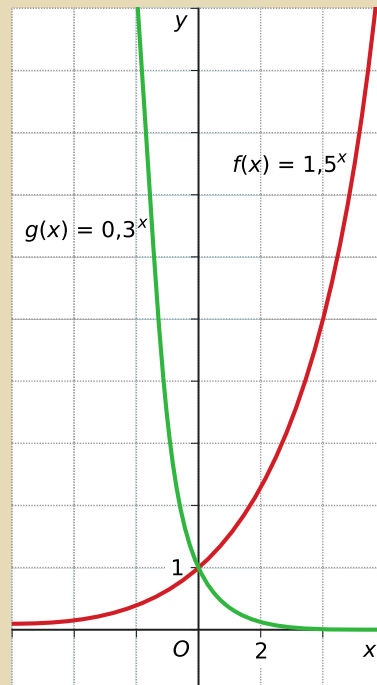
Bekijk de applet: exponentiële functies

De grafiek van de **exponentiële functie** $f(x) = b \cdot g^x$ heeft een aantal karakteristieken.

- De grafiek snijdt de y -as in het punt $(0, b)$.
- Als $b > 0$ en $g > 1$, is de grafiek stijgend. Naar links (voor afnemende x) benadert de grafiek de x -as. Je kunt de functiewaarde zo dicht bij 0 krijgen als je wilt door x voldoende klein te kiezen. De x -as is de horizontale asymptoot.
- Als $b > 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek dalend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek de x -as, de horizontale asymptoot.
- Als $b < 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek stijgend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek de x -as, de horizontale asymptoot.
- Als $b < 0$ en $g > 1$, is de grafiek dalend. Naar links (voor afnemende x) nadert de grafiek de x -as, de horizontale asymptoot.
- Als $g = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = b$.

De **exponentiële vergelijkingen** zoals $b \cdot g^x = a$ los je op met de grafische rekenmachine.

Bij **exponentiële ongelijkheden** kun je deze eigenschappen gebruiken.



Figuur 4.1

Voorbeeld 1

In een stedelijk gebied liggen twee steden: stad A met 750000 inwoners en stad B met 620000 inwoners op 1 januari 2013. In stad A groeide het aantal inwoners de laatste jaren gemiddeld met 2,5% per jaar, in stad B was dat 3,1%.

Na hoeveel jaren heeft stad B meer inwoners dan stad A als deze ontwikkeling zo doorgaat?

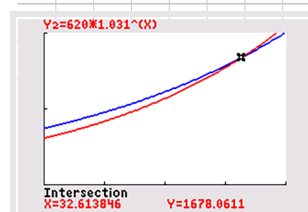
Antwoord

De groeifactor van het aantal inwoners van A is 1,025. Die van het aantal inwoners van B is 1,031. Dat B harder groeit dan A is duidelijk. Als A het aantal inwoners van stad A voorstelt, en B dat van stad B, beide in duizendtallen, en t de tijd in jaren vanaf 1 januari 2013, dan zijn beide groeifuncties:

- $A(t) = 750 \cdot 1,025^t$;
- $B(t) = 620 \cdot 1,031^t$.

De bijbehorende grafieken maak je op de grafische rekenmachine en je bepaalt het snijpunt. Ga na dat je $t \approx 32,6138$ vindt.

Conclusie: 33 jaar na 1 januari 2013 heeft stad B meer inwoners dan stad A als je ervan uitgaat dat er steeds op 1 januari wordt geteld.



Figuur 4.2

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Waarom zie je dat B harder groeit dan A?
- Ga na dat je voor het snijpunt van beide grafieken inderdaad $t \approx 32,6138...$ vindt.
- Een derde stad C is op 1 januari 2013 kleiner dan zowel A als B, maar deze stad groeit met 8,3% per jaar. Op 1 januari 2021 heeft C even veel inwoners als B. Wanneer is C even groot als A?

Voorbeeld 2

In het water van een meer is verontreiniging ontdekt. Er wordt op een bepaald moment 40 mg/L (milligram per liter) van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Deze stof wordt op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan niet worden gemeten onder een concentratie van 1 mg/L. Het blijkt dat de concentratie exponentieel vervalt met 20% per dag.

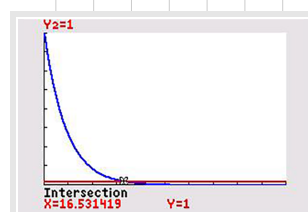
Na hoeveel dagen is deze stof uit het meer 'verdwenen'?

Antwoord

De 'groefactor' per dag is 0,80. Op $t = 0$ is er 40 mg/L gemeten. Voor de concentratie C (mg/L) geldt dus: $C(t) = 40 \cdot 0,80^t$.

Omdat de groefactor tussen 0 en 1 ligt, is dit een dalende exponentiële functie. Zo'n exponentiële functie komt nooit op 0 uit, hoe groot je t ook kiest. Er is sprake van een horizontale asymptoot met vergelijking $C = 0$. Is de stof dan nooit verdwenen? Theoretisch inderdaad niet, maar in de praktijk is de stof niet meer meetbaar als de concentratie onder de 1 mg/L zakt. Om te bepalen na hoeveel dagen de stof is 'verdwenen', moet je daarom de ongelijkheid $40 \cdot 0,80^t < 1$ oplossen.

Dat doe je met de grafische rekenmachine. Je vindt: $t > 16,5$.



Figuur 4.3

Opgave 4

In een meer is op een bepaald moment een schadelijke stof aanwezig met een concentratie van 40 mg/L. De concentratie vervalt exponentieel met 20% per dag.

- Leg uit waarom de groefactor per dag 0,80 is.
- Breng de grafiek van $C(t)$ in beeld op de grafische rekenmachine.
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig vanaf welk tijdstip de concentratie niet meer meetbaar is, dus $C(t) < 1$.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $A(-2,6)$ en $B(4,2)$.

Stel het bijpassende functievoorschrift op. Rond b en g af op twee decimalen.

Antwoord

Er zijn twee algebraïsche methodes om dit te doen:

Methode 1:

Eerst de groeifactor g bepalen.

Als x van -2 naar 4 gaat, wordt $f(x)$ vermenigvuldigd met $\frac{1}{3}$.

Voor g geldt daarom $g^6 = \frac{1}{3}$ en dus $g = \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \approx 0,83$.

Nu kun je b berekenen.

$$f(4) = 2$$

$$b \cdot 0,83^4 = 2$$

$$b \cdot 0,4746 = 2$$

$$b = \frac{2}{0,4746} \approx 4,21$$

Conclusie: $f(x) \approx 4,21 \cdot 0,83^x$.

Methode 2:

Uit $f(4) = 2$ volgt: $b \cdot g^4 = 2$. Uit $f(-2) = 6$ volgt: $b \cdot g^{-2} = 6$.

De laatste vergelijking geeft: $b = \frac{6}{g^{-2}} = 6g^2$.

En dus: $6 \cdot g^2 \cdot g^4 = 2$.

Hiermee bereken je g en dan ga je verder zoals bij de eerste methode.

Opgave 5

Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $(10,200)$ en $(14,350)$. Stel het functievoorschrift van f op. Rond g af op twee decimalen en b op een geheel getal.

Verwerken

Opgave 6

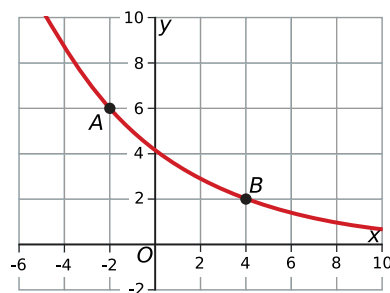
Iemand zet € 10000,00 op een spaarrekening. De rente is 5% per jaar en wordt jaarlijks bijgeschreven op de spaarrekening.

- Stel een bijpassend functievoorschrift op voor het saldo $S(t)$ met t in jaren na het moment waarop het startbedrag op de spaarrekening is geplaatst.
- Hoelang duurt het voordat het spaartegoed is gegroeid tot minstens € 15000,00?
- Hoelang duurt het voordat het spaartegoed zich verdubbeld heeft?

Opgave 7

Een saldo van € 4000,00 kan ontstaan zijn doordat iemand ooit € 1,00 op een spaarrekening zette tegen 5% rente.

- Hoeveel jaar geleden moet die € 1,00 dan op de spaarrekening gezet zijn? Geef je antwoord tot op een jaar nauwkeurig.
- Kun je dit antwoord ook vinden door een geschikte grafiek van $S(t) = 4000 \cdot 1,05^t$ te tekenen?



Figuur 4.4

- c Stel je voor dat je de grafiek van S steeds verder naar links door trekt. Zal de grafiek ooit de horizontale as snijden? Licht je antwoord toe. Wat betekent dit voor de grafiek van S ?

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 210 \cdot 2,5^x$.

- Bereken $f(3)$ en $f(-5)$.
- Geef de formule van de asymptoot van de grafiek van f .
- Los op: $f(x) = 1200$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- Los op: $f(x) < 2345$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 9

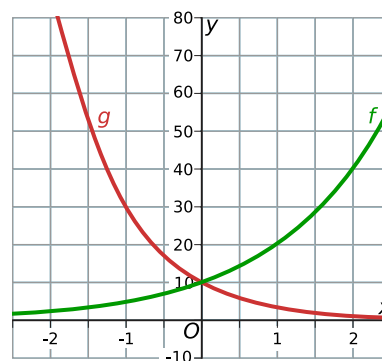
Op 1 januari 2010 zet persoon A € 2000,00 op de bank tegen 4% rente per jaar. Persoon B zet op dezelfde dag € 1500,00 op de bank tegen 6% rente per jaar.

- Geef de functievoorschriften van het banktegoed $a(t)$ van persoon A en het banktegoed $b(t)$ van persoon B, waarbij t de tijd in jaren is na 1 januari 2010.
- Maak met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies a en b . Bij welke vensterinstellingen komen de grafieken zo in beeld dat ook het snijpunt zichtbaar is?
- Vanaf welke maand van welk jaar is het banktegoed van persoon B groter dan dat van persoon A?

Opgave 10

Bekijk de grafieken van deze twee exponentiële functies. Beide grafieken gaan door $(0,10)$.

Geef van beide functies het functievoorschrift.



Figuur 4.5

Opgave 11

Een huurder betaalt € 650,00 huur en vindt de jaarlijkse huurverhoging van 5,5% te veel. Hij herinnert zich nog dat exponentiële groei veel harder gaat dan lineaire groei. Hij stelt zijn verhuurder daarom voor om de huur elk jaar met € 50,00 te verhogen.

Na hoeveel jaar gaat dit de huurder voordeel opleveren?

Toepassen

Opgave 12: Radioactief afval

Op een afgelegen terrein wordt op 6 januari 2014 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval daar al tien jaar ligt. De straling blijkt 2000 becquerel (Bq) te zijn. Vier maanden later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt nu ongeveer 1630 Bq te zijn. De straling neemt exponentieel af.

- Hoeveel Bq was de straling een jaar geleden?
- Hoe groot was de straling 2,5 jaar na 6 januari 2014?
- Stel een functievoorschrift op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in maanden. Neem $t = 0$ op 6 januari 2014. Rond de groeifactor af op drie decimalen.
- Wat is het bereik van de functie bij c vanaf 6 januari 2014?
- In welk jaar en welke maand is de straling voor het eerst minder dan 1000 Bq?

Opgave 13: Waterzuivering

Een waterzuiveringsinstallatie reinigt het afvalwater van een stad in een drietal fases:

In fase 1 wordt al het grof afval uit het water gehaald. 20% van het afval is dan weg. Al het water stroomt door naar fase 2.

In fase 2 wordt 30% van het overgebleven afval weggehaald door middel van roosters. Dit water gaat vervolgens naar fase 3.

In fase 3 doen bacteriën hun werk: 50% van het afval wordt daarmee verwijderd.

- $20 + 30 + 50 = 100$ dus deze percentages optellen levert op dat het water na deze drie fases schoon is. Waarom is deze conclusie onjuist?
- Bereken hoeveel procent van het afval daadwerkelijk verwijderd wordt door middel van deze waterzuivering.

Testen

Opgave 14

Iemand betaalt op 1-1-2000 een huur van € 850,00 per maand. Jaarlijks wordt de huur in januari met 5,5 procent verhoogd.

- Stel het functievoorschrift op voor de huur per maand $H(t)$ afhankelijk van de tijd t in jaren na 2000.
- Vanaf welke datum is de huur hoger dan € 1000 per maand?

Opgave 15

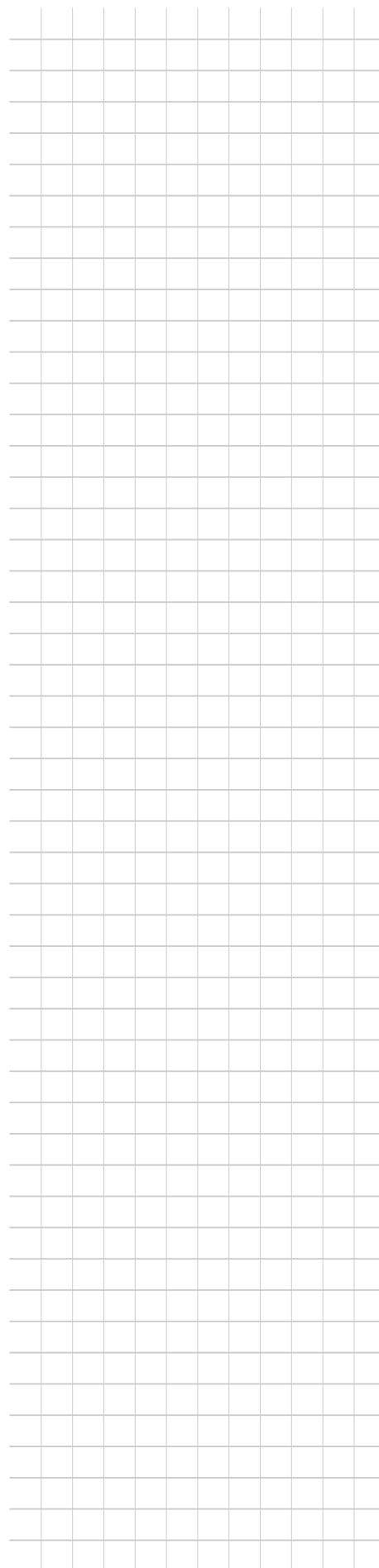
Een bepaalde hoeveelheid H kan berekend worden met de functie $H(t) = 200 \cdot 1,03^t$.

- Hoe zie je aan het functievoorschrift dat er sprake is van toename?
- Vanaf welke waarde van t (in drie decimalen nauwkeurig) is de hoeveelheid H 200 procent groter geworden dan op $t = 0$?
- Voor welke waarden van t is de hoeveelheid H kleiner dan 0,01?

Opgave 16

De grafiek van een exponentiële functie f van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ gaat door de punten $(2,80)$ en $(8,200)$.

Stel een bijpassend functievoorschrift op. Rond g af op drie decimalen en rond b af op helen.



1.5 Meer exponentiële functies

Inleiding

De standaardfunctie van alle exponentiële functies is $f(x) = g^x$ met $g > 0$. Alle andere exponentiële functies kunnen uit f ontstaan door transformatie. Ze hebben allemaal de vorm $y = b \cdot g^x + d$. Je zult zien dat deze exponentiële functies wel degelijk nulpunten kunnen hebben...

Je leert in dit onderwerp

- werken met transformaties van de functie $f(x) = g^x$ met $g > 0$;
- de karakteristieken van deze exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

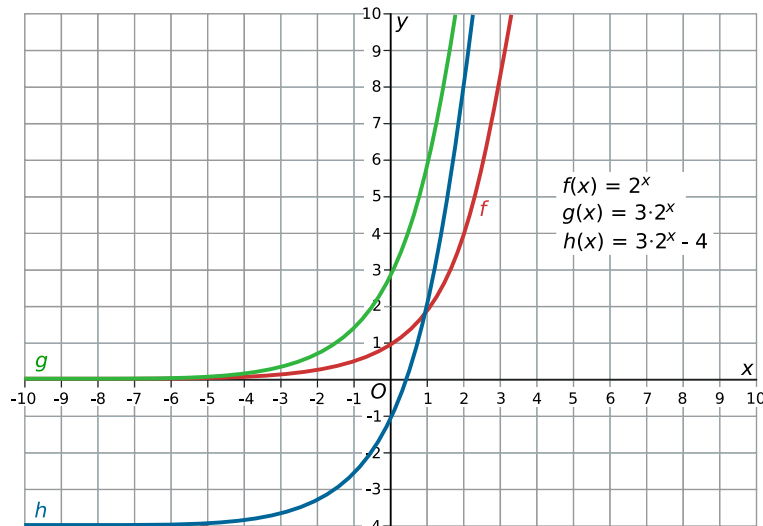
Schrijf de volgende functies in de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

- a $y_1 = 1 - 3 \cdot 0,5^x$
- b $y_2 = -3 \cdot 0,5^{2x} - 4$
- c Waarom zou je dergelijke herleidingen willen?

Uitleg

Bekijk de applet

De standaardfunctie van alle exponentiële functies is $y = g^x$ met $g > 0$. Je ziet de grafiek met $g = 2$.



Figuur 5.1

Alle functies die hieruit door vermenigvuldiging ten opzichte van de assen of een translatie kunnen ontstaan, hebben de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

- $f(x) = 3 \cdot 2^x$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = 0$ in te vullen.
De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door ten opzichte van de x -as met 3 te vermenigvuldigen;
- $f(x) = 3 \cdot 2^x - 4$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = -4$ in te vullen.
De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door ten opzichte van de x -as met 3 te vermenigvuldigen en vervolgens de grafiek -4 eenheden in de y -richting te verschuiven (een translatie van -4 ten opzichte van de x -as);
- $f(x) = 3 \cdot 2^{2x-1} + 4$ kun je herleiden tot
 $f(x) = 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-1} - 4 = 1,5 \cdot 2^{2x} - 4$.

Dat wordt $f(x) = 1,5 \cdot (2^2)^x - 4$ en dus $f(x) = 1,5 \cdot 4^x - 4$.

De grafiek ontstaat door $b = 1,5$, $g = 4$ en $d = -4$ in te vullen. Dus ontstaat de grafiek uit die van $y = 4^x$ door ten opzichte van de x -as met 1,5 te vermenigvuldigen en vervolgens een translatie ten opzichte van de x -as van -4 eenheden uit te voeren.

Opgave 1

Het gaat in de **Uitleg** over exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

- a Neem $b = 3$, $g = 2$ en $d = 1$. Welk functievoorschrift $f_1(x)$ krijg je? Door welke transformaties ontstaan uit de grafiek van f_1 die van $y = 2^x$?

- b** Neem $b = 3$, $g = \frac{1}{2}$ en $d = -1$. Welk functievoorschrift $f_2(x)$ krijg je? Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f_2 door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?
- c** Neem $b = -10$, $g = 1,5$ en $d = 100$. Welk functievoorschrift $f_3(x)$ krijg je? Bij welke vensterinstellingen krijg je alle karakteristieken van de grafiek van f_3 goed in beeld?

Opgave 2

Bekijk de functie met voorschrift $f(x) = 6 \cdot 2^{-2x-1} - 12$.

- a** Herleid het functievoorschrift tot de vorm $y = b \cdot g^x + d$.
- b** Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?
- c** Bereken met behulp van de grafische rekenmachine het nulpunt van de grafiek van f .
- d** Dit nulpunt kun je ook algebraïsch vinden. Laat zien hoe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Elke verschoven of ten opzichte van de assen vermenigvuldigde exponentiële functie heeft een functievoorschrift dat kan worden geschreven in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

Hierbij moet je soms gebruikmaken van de rekenregels voor machten. De grafiek van f is te tekenen door op die van $y = g^x$ een aantal transformaties toe te passen:

- vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor b ;
- verschuiving ten opzichte van de x -as met d eenheden.

De grafiek van f heeft daarom als **horizontale asymptoot** de lijn $y = d$. Het eventuele nulpunt vind je door $b \cdot g^x + d = 0$ op te lossen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 60 \cdot 2^x - 480$. Breng de grafiek in beeld met de grafische rekenmachine en bepaal de vergelijking van de asymptoot. Los vervolgens op $f(x) < 0$.

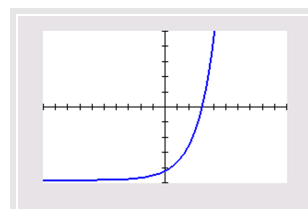
Antwoord

De grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = 2^x$ door:

- vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 60;
- verschuiving ten opzichte van de x -as met -480 eenheden.

De horizontale asymptoot is daarom $y = -480$. Bij een venster van $[-10, 10] \times [-500, 500]$ komt de grafiek goed in beeld.

$f(x) = 0$ als $60 \cdot 2^x - 480 = 0$, dus als $60 \cdot 2^x = 480$. Als je beide zijden van deze vergelijking door 60 deelt, vind je $2^x = 8$. Omdat $8 = 2^3$ is, kun je de oplossing zonder rekenmachine vinden: $x = 3$. Uit de grafiek volgt nu de oplossing van de ongelijkheid: $x < 3$.



Figuur 5.2

Opgave 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en

$$h(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5.$$

- Hoe kun je de grafiek van g door transformatie laten ontstaan uit die van f ?
- Hoe kun je de grafiek van h krijgen door transformatie van de grafiek van f ?
- Welke lijn is asymptoot van de grafiek van h ?
- Geef het domein en het bereik van de functie h .
- Vereenvoudig de vergelijking $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 50 = 1000$ en los hem op in drie decimalen nauwkeurig.
- Los op in drie decimalen nauwkeurig: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 50 > 1000$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie g met voorschrift $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$.

Laat zien hoe deze functie door transformatie ontstaat uit een standaardfunctie van de vorm $y = g^x$ en los algebraïsch op: $g(x) > 0$.

Antwoord

Eerst herleiden: $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$

$$g(x) = -2 \cdot 2^{-x} \cdot 2^1 + 16$$

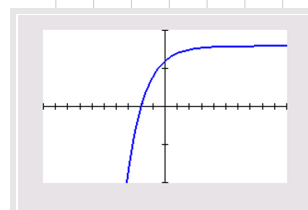
$$g(x) = -4 \cdot (2^{-1})^x + 16, \text{ dus } g(x) = -4 \cdot 0,5^x + 16.$$

De grafiek van de functie $g(x) = -4 \cdot 0,5^x + 16$ ontstaat door transformatie van $y = 0,5^x$ in twee stappen.

- vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met -4 ;
- translatie ten opzichte van de x -as met 16 eenheden.

Voor het oplossen van $g(x) = 0$ is het oorspronkelijke voorschrift handiger: $16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = 0$ geeft: $16 = 2 \cdot 2^{-x+1}$. Nu is $16 = 2^4$ en $2 = 2^1$, dus: $2^4 = 2^{-x+2}$. Dit betekent dat: $4 = -x + 2$, zodat $x = -2$.

Uit de grafiek volgt de oplossing van de ongelijkheid: $x > -2$



Figuur 5.3

Opgave 4

De grafiek van de functie $f(x) = 2 \cdot 2^{x+1} - 1$ kun je door transformatie uit de grafiek van de functie $g(x) = 2^x$ laten ontstaan.

- Je kunt dit doen door drie transformaties toe te passen. Welke drie? Schrijf ze in de juiste volgorde op.

Je kunt ook eerst het functievoorschrift van f herleiden tot $f(x) = 4 \cdot 2^x - 1$.

- b** Laat zien hoe deze herleiding gaat.
- c** Beschrijf nu hoe je door transformatie in twee stappen de grafiek van f kunt laten ontstaan uit die van g .
- d** Het punt $(0,1)$ op de grafiek van g wordt na de transformaties een punt op de grafiek van f . Geef de coördinaten van dit punt.
- e** Schrijf de horizontale asymptoot en het domein en het bereik van f op.

Opgave 5

Je hebt allerlei technieken geleerd om vergelijkingen algebraïsch op te lossen. Je werkt in dit hoofdstuk met de rekenregels voor machten. Bekijk dit voorbeeld van een algebraïsche oplossing.

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 8\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 2\sqrt{2}$$

$$(2^{-1})^{1-x} = 2^{1\frac{1}{2}}$$

$$2^{x-1} = 2^{1\frac{1}{2}}$$

$$x - 1 = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

- a** Loop de uitwerking na en leg uit wat er elke stap gebeurt.
- b** Los algebraïsch op: $4 \cdot 3^x + 6 = 330$.
- c** Los algebraïsch op: $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 27\sqrt{6}$

Opgave 6

Los op: $40 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 100 = 110$. Vereenvoudig de vergelijking eerst zover mogelijk en gebruik daarna de grafische rekenmachine. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cdot 2^x - 60$.

- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardfunctie $g(x) = 2^x$?
- b** Bereken het nulpunt van f in één decimaal nauwkeurig.
- c** Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ?
- d** Los algebraïsch op $f(x) = 20$.

Opgave 8

Los de vergelijkingen en ongelijkheden op. Vereenvoudig eerst zo ver mogelijk en geef daarna de oplossing met behulp van de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig.

- a $5^x = 10$
- b $5^x \leq 10$
- c $3 \cdot 5^x + 5 = 10$
- d $3 \cdot 5^x + 5 > 10$

Opgave 9

Los algebraïsch op.

- a $2^x = 2\sqrt{2}$
- b $4^x = 8^{x+2}$
- c $9^{2x} = \sqrt{3}$
- d $2^{2x-1} = 32$
- e $2^{\frac{1}{2}x+1} = 4\sqrt{2}$

Opgave 10

Los algebraïsch op.

- a $5 \cdot 10^x = 5000$
- b $3 \cdot 2^p - 2 = 46$
- c $6 \cdot (5^t + 5) = 180$
- d $162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > 2$
- e $7 + 16 \cdot 1,5^x \leq 43$
- f $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 160$

Opgave 11

Een patiënt krijgt via een infuus een vloeibaar medicijn toegediend. De formule $A(t) = 540 - 540 \cdot 0,95^t$ geeft de hoeveelheid $A(t)$ in milligram van het medicijn dat na t minuten in het bloed aanwezig is.

- a Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van $A(t)$ stijgend is?
- b Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $A(t)$.
- c Maak duidelijk dat $A(t)$ niet exponentieel toeneemt.
- d Na hoeveel minuten is 75% van de maximale hoeveelheid medicijn in het bloed opgenomen? Geef je antwoord in hele minuten.

Toepassen

Een kop koffie komt uit een automaat. De koffie koelt af tot kamertemperatuur. De **afkoeling** gaat in het begin snel. Naarmate het temperatuurverschil tussen de koffie en de omgeving kleiner wordt, gaat de afkoeling trager. De temperatuur hangt af van de tijd waarin de koffie afkoelt. De functie $T(t) = 60 \cdot 0,998^t + 20$ beschrijft de temperatuur van de koffie in een omgeving van 20 °C.

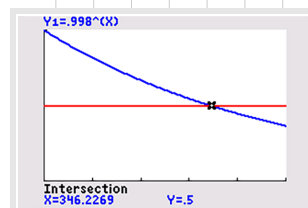
Hierin is t de tijd in seconden nadat de koffie uit de automaat komt. Veel mensen vinden koffie niet lekker als de temperatuur is gedaald tot beneden de 50°C . Na hoeveel seconden is dat het geval?

Op $t = 0$ is de $T(0) = 80^\circ\text{C}$.

De temperatuur daalt langzaam richting 20°C .

De vergelijking $60 \cdot 0,998^t + 20 = 50$ kun je met de grafische rekenmachine oplossen. Je kunt er ook eerst $0,998^t = 0,5$ van maken. Ga na dat je vindt: $t \approx 346$.

Conclusie: na ongeveer 346 seconden (5 minuten en 46 seconden) is de koffie voor veel mensen niet lekker meer.



Figuur 5.4

Opgave 12

Een thermoskan wordt 's morgens om 8:00 uur gevuld met koffie van 80°C . De koffie in de thermoskan koelt af volgens de formule: $T(t) = 20 + 60 \cdot 0,83^t$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t het aantal uren na 8:00 uur.

- Ga ervan uit dat de koffie niet lekker meer is als de temperatuur beneden de 50°C komt. Tot hoe laat is de koffie nog te drinken? Bereken dit tot op de minuut nauwkeurig.
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de koffie bij het vullen van de thermoskan een temperatuur had van 80°C ?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de temperatuur van de koffie daalt?
- Hoe kun je de grafiek van T uit die van $T = 0,83^t$ laten ontstaan door transformatie?
- Hoelang duurt het voordat de koffie de temperatuur van 21°C bereikt?
- Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van $T(t)$?
- De koffie staat in een woonkamer. Kun je aan het functievoorschrift van $T(t)$ zien hoe hoog de temperatuur in de woonkamer is?

Testen

Opgave 13

Gegeven is de functie $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren om de grafiek van de functie $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$ te krijgen uit de functie van g .
- Hoe kun je aan het functievoorschrift van f zien dat de grafiek stijgt?
- Welke lijn is asymptoot van de grafiek van f ? Wat is het bereik van f ?
- Bereken het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- Los op: $f(x) \leq 0$.

Opgave 14

Los algebraïsch op.

- a $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{18}$
- b $5 \cdot 2^{-x+2} > 40$
- c $0,5 \cdot 0,25^x - 4,5 \geq 3,5$
- d $3 \cdot 0,5^{2x-1} - 4 < -3,25$

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Exponentiële functies**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- exponentiële groei en groefactor — macht, grondtal, exponent
- negatieve exponenten — gebroken exponenten
- eigenschappen van machten
- exponentiële functie — exponentiële vergelijking/ongelijkheid
- transformaties — horizontale asymptoot van een exponentiële functie

Activiteitenlijst

- bij exponentiële groei de groefactor bepalen en een formule maken — rekenregels voor machten gebruiken
- eigenschappen van machten met negatieve en/of gebroken exponenten gebruiken — grafieken maken bij exponentiële groei
- werken met de eigenschappen en rekenregels van machten
- de karakteristieken van een exponentiële functie bepalen — exponentiële vergelijkingen/ongelijkheden oplossen
- werken met de algemene gedaante van elke exponentiële functie

Achtergronden

Thomas Robert Malthus (1766—1834) was een Brits geestelijke die zich veel bezighield met demografische en economische vraagstukken. In 1798 publiceerde hij 'An Essay on the Principle of Population', waarin hij aannam dat de totale bevolking exponentieel groeit, terwijl de middelen van bestaan lineair toenemen. Dit leidt tot de beschikbaarheid van steeds minder grond (voedsel/energie) per mens en dus een daling in welvaart, de 'Malthusiaanse catastrofe'. Op grond hiervan meende hij dat de totale bevolking een maximale omvang zou hebben, het 'Malthusiaans plafond'. Hij veronderstelde dat de mensheid deze maximale omvang binnen afzienbare tijd zou bereiken en dat alleen middels hongersnood, epidemieën en oorlogen het aantal mensen binnen de grenzen van het Malthusiaans plafond zou kunnen blijven. Malthus geldt als één der eerste economen.

In de tweede helft van de negentiende eeuw werd deze opinie fel bestreden, onder andere door Karl Marx en Friedrich Engels die in Malthus' catastrofe slechts een gevolg was van de kapitalistische samenleving zagen. Ook economen als John Maynard Smith en Ronald Fisher trokken Malthus' pessimistische kijk in twijfel. In de twintigste eeuw heeft niets van een Malthusiaanse catastrofe plaatsgevonden. Wel verscheen in 1972 het 'De grenzen aan de



Figuur 6.1

groei'. Dit is een geschrift van de **Club van Rome** die als doelstelling heeft de wereld bekend te maken met problemen als bevolkingsgroei, voedselproductie, industrialisatie, uitputting natuurlijke hulpbronnen, vervuiling. Ook zij maakten veel gebruik van exponentiële groeimodellen.

Testen

Opgave 1

Los algebraïsch op.

- a $-35 + 5 \cdot 3^{x-5} = 100$
- b $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 50 < 14$
- c $300 \cdot 1,5^{2x-4} > 675$

Opgave 2

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld, groeit de laatste jaren met 2% per jaar. In 2010 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

- a Hoeveel bedraagt de groeifactor g per jaar?
- b Geef een formule voor het aantal passagiers p op tijdstip t in jaren na 2010.
- c Hoelang duurt het voor het huidige aantal passagiers verdubbeld is als de groei zo doorgaat?
- d Hoeveel passagiers waren er in 2007?
- e Hoeveel bedraagt de groeifactor per tien jaar? Rond af op drie decimalen.
- f Hoeveel bedraagt de groeifactor per kwartaal? Rond af op drie decimalen.

Opgave 3

Geef het domein, bereik en de asymptoot van elk van deze functies.

- a $f(x) = 400 + 50 \cdot 2^{x-10}$
- b $g(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 40$

Opgave 4

Een doorzichtig kunststof absorbeert een deel van het licht dat erdoorheen valt. Elke laag van 1 cm absorbeert 20% van het licht.

- a Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per centimeter kunststof?
- b Hoeveel procent van het licht wordt geabsorbeerd door een laag van 2,5 cm dikte? Rond af op een decimaal.
- c Hoe dik moet de laag kunststof zijn om 90% van het licht te absorberen? Rond af op één decimaal.
- d Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per mm kunststof? Rond af op drie decimalen.

Opgave 5

Iemand haalt een fles melk uit de koelkast en zet er een fles cola voor in de plaats. De fles cola stond in de kamer. De temperatuur van de fles melk neemt hierdoor langzaam toe tot kamertemperatuur, de temperatuur van de fles cola neemt juist af tot koelkasttemperatuur. De formules voor de temperaturen T_1 en T_2 (°C) in de flessen, afhankelijk van de tijd t (min), zijn: $T_1 = 19 - 13 \cdot 0,78^t$ en $T_2 = 6 + 13 \cdot 0,78^t$.

- Plot de grafieken van deze formules. Geef de vensterinstellingen.
- Welke formule hoort bij de fles melk en welke bij de fles cola? Licht je antwoord toe.
- Welke vergelijking heeft de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles cola?
- Welke vergelijking heeft de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles melk?
- Hoe hoog is de kamertemperatuur?
- Vanaf welk tijdstip is de cola kouder dan de melk?

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = -128 \cdot 4^{2x-3} + 12$.

- Schrijf de functie in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.
- Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je toepassen?
- De grafiek van de exponentiële functie $h(x) = b \cdot g^x$ snijdt de grafiek van f in $A(-1, y)$ en gaat door het punt $(2, 5)$. Stel de formule op van h . Rond g af op drie decimalen en b op één decimaal nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 7: Radioactief verval

Een natuurkundige toepassing van exponentiële functies vind je bij radioactiviteit.

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven. Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α -deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4,468 \cdot 10^9$ jaar. Het verval van U-238 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t . Begin je met 1 kg U-238, dan heb je na 4,468 miljard jaar nog 0,5 kg over (plus 0,5 kg Th-234). Je kunt dus het beste de tijd in miljarden jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer 0,8563. En $A = 1000 \cdot 0,8563^t$ gram.

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2001 1000 mg radium-228.

- Geef een formule van R , de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.
- Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.
- Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.
- Als je de halveringstijd weet kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot 750 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

Opgave 8: Wereldbevolking

Omstreeks 1970 bedroeg de wereldbevolking ongeveer 3,6 miljard en zij groeide per jaar met 2,1%.

- Hoe groot was toen de groeifactor?
- Er van uitgaande dat die groeifactor door de jaren heen gelijk is gebleven, hoeveel mensen leefden er dan in 1971, 1988, 1990 en het jaar 0?
- B is de bevolking na t jaren, gerekend vanaf 1970 ($t = 0$). Geef B als functie van t door een formule.
- Je hebt nu een model van de bevolkingsgroei gemaakt, gebaseerd op gegevens uit 1970. Volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 is in 2050 het aantal mensen op aarde nog geen 9 miljard. Klopt dat met de formule die je bij b hebt gevonden?
- Waaraan kun je zien dat de bevolkingsgroei dan niet meer exponentieel loopt? Kun je daar redenen voor geven?

Opgave 9: Vissen in het Grevelingenmeer

De afsluiting van de Grevelingen had voor de visstand grote gevolgen. Om die gevolgen in kaart te brengen werden wiskundige modellen ontwikkeld. Onder andere voor de ontwikkeling van de scholpopulatie. Hiervoor werd o.a. het volgende model opgesteld:

- jaarlijks komen er 5 miljoen larven het Grevelingenmeer binnen;
- jaarlijks komen 200.000 volwassen schollen (één jaar of ouder) het Grevelingenmeer binnen;
- 90% van die larven sterven als jonge vissen (dus voordat ze 1 jaar zijn);
- 33% van de volwassen vissen sterven jaarlijks.

Op grond hiervan kun je een tabel maken van het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer:

tijd t in jaar	0	1	2	3	4	5
aantal volwassen schollen N	200.000	833.333	1.255.556	1.537.037	1.724.691	1.849.794

Tabel 6.1

Zet je deze tabel voort, dan zul je zien dat het aantal volwassen schollen in dit model naar 2100000 nadert. Bij de tabel past de



Figuur 6.2

formule: $N(t) = 2,1 - 1,9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$ met N in miljoenen. Dat kun je zelf afleiden...

- a Laat zien hoe uit het model de gegeven tabel kan worden afgeleid.
- b Zet die tabel voort en laat zien dat het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer volgens dit model de 2.100.000 gaat benaderen.
- c Leid nu zelf de gegeven groeifunctie af.
- d Waarom wordt in dit geval wel gesproken van geremde groei?

Examen

Opgave 10: Ureumgehalte

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 gram toeneemt. Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo verversd worden dat de wettelijke norm van 2 gram ureum per cm^3 water niet overschreden wordt. In een model gaan we er van uit dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken. Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 m^3 verversd wordt (dus 3% van het totaal). We beginnen de eerste dag met 0 gram ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 gram ureum in het water. Na verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 gram ureum over.

- a Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 gram ureum in het water zit.
- b In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

- c Stel U is de hoeveelheid ureum aan het begin van een zekere dag. Toon aan dat de hoeveelheid ureum aan het begin van de daaropvolgende dag gelijk is aan $0,8U + 400$.

We starten in het model weer met 0 gram ureum aan het begin van de eerste dag. De hoeveelheid ureum in gram (U_n) aan het begin van de n -de dag kan rechtstreeks berekend worden met de formule: $U_n = 2000 - 2500 \cdot 0,8^n$

- d Leg uit met behulp van deze formule dat aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm voldaan wordt.
- e In de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden. Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(bron: examen wiskunde A havo 1989, tweede tijdvak)

Opgave 11: Sparen, sparen en sparen

Nederland is een echt spaarland. Jaarlijks worden er miljarden euro's gestort op spaarrekeningen. Er zijn verschillende soorten spaarrekeningen. In deze opgave bekijken we er drie: de groeirekening, de depositorekening en de renteklimrekening. We storten op elk van de drie spaarrekeningen een bedrag van € 10000 dat voor een periode van 10 jaar op de spaarrekening blijft staan.

Groeirekening De groeirekening is de bekendste soort. Het rentepercentage op deze rekening is 3,5% per jaar. Het is een 'rente op rente'-rekening: na een jaar wordt de rente bijgeschreven op de rekening, zodat het volgende jaar rente wordt berekend over een hoger bedrag G . Na elk jaar wordt het bedrag op de rekening dus hoger. Het bedrag G dat na t jaar op de groeirekening staat kun je berekenen met de formule: $G = 10000 \cdot 1,035^t$. Het bedrag op de groeirekening is na 10 jaar nog niet verdubbeld. Maar als je de rekening nog langer laat doorlopen, komt er een jaar dat het bedrag op de rekening voor het eerst twee keer zo hoog is. Het bedrag is zelfs nog hoger dan € 20000.

- a Bereken na hoeveel jaar dat is.

Depositorekening De depositorekening is een spaarrekening met een rentepercentage van 4,0% per jaar. De rente over elk jaar is € 400. Dat bedrag wordt steeds bijgeschreven op een aparte betaalrekening. Op de betaalrekening krijg je geen rente, zodat het bedrag op de betaalrekening lineair toeneemt. De rente van 4,0% lijkt gunstiger dan een rente van 3,5%. Toch heb je na tien jaar bij de depositorekening in totaal minder rente gekregen dan bij de groeirekening. Een bank introduceert een nieuwe depositorekening die in tien jaar evenveel rente oplevert als de groeirekening.

- b Bereken het rentepercentage per jaar van die nieuwe depositorekening. Geef je antwoord in één decimaal.

Renteklimrekening De renteklimrekening is een soort depositorekening. Ook hier wordt jaarlijks de rente bijgeschreven op een aparte betaalrekening die geen rente oplevert. Bij de renteklimrekening wordt het rentepercentage elk jaar hoger. In deze tabel kun je aflezen welke bedragen er na t jaar sparen op de renteklimrekening R en op de betaalrekening B staan.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
B	0	300	615	950	1310	1700	2130	2615	3165	3775	4475

Tabel 6.2

In de volgende tabel staan de rentepercentages voor het t -de jaar.

t -de jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rentepercentage	3,00	3,15	3,35	3,60	3,90	4,30				

Tabel 6.3

- c Bereken het rentepercentage voor het zevende jaar. Geef je antwoord in twee decimalen.
- d De renteklimrekening geeft in tien jaar € 4475 rente. Wat dit betreft is het de beste van de drie spaarrekeningen. De groeirekening is de op één na beste. Bereken het rentepercentage per jaar dat een groeirekening moet hebben om in 10 jaar € 4475 rente te geven. Geef je antwoord in twee decimalen.

(bron: examen wiskunde A havo 2004, tweede tijdvak)

Opgave 12: Wet van Moore

Het Amerikaanse bedrijf Intel is een producent van computerchips. Gordon Moore was in 1968 één van de oprichters van het bedrijf. Deze opgave gaat over het aantal transistoren in een computerchip. (Een transistor is een onderdeel van een elektronische schakeling.) In 1965 deed Moore daar een voorspelling over: 'Het aantal transistoren in een computerchip zal tussen 1965 en 1975 exponentieel groeien'. Moore heeft meer dan gelijk gekregen: de voorspelling is zelfs tot het jaar 2000 uitgekomen! Zijn voorspelling is men de Wet van Moore gaan noemen. In de tabel zie je hoeveel transistoren er in de chips van Intel zitten. Ook zie je in welk jaar die chips op de markt zijn gebracht.

In de tabel zie je dat het aantal transistoren tussen 1971 en 1972 met 250 toeneemt. Stel dat het aantal transistoren in de jaren daarna lineair zou toenemen met 250 per jaar.

- a In welk jaar zou dan het aantal van 5000 transistoren per chip zijn bereikt?

In werkelijkheid is de toename dus exponentieel. Zo is in de periode van 1971 tot 2000 het aantal transistoren per chip toegenomen van 2250 tot 42 miljoen.

- b Bereken hiermee de groeifactor per jaar in vier decimalen nauwkeurig.

De Wet van Moore in formulevorm is: $A = 2250 \cdot 1,404^t$. Hierin is A het aantal transistoren per chip en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1971. In de Pentium II-chip zitten volgens de tabel 7500000 transistoren. Dat aantal transistoren wijkt nogal af van de voorspelling volgens de Wet van Moore.

- c Bereken hoeveel procent dit aantal afwijkt van de voorspelling volgens de formule van de Wet van Moore. Rond je antwoord af op hele procenten.

(bron: examen havo wiskunde A in 2005, eerste tijdvak)

jaar van introductie	naam chip	aantal transistoren
1971	4004	2250
1972	8008	2500
1974	8080	5000
1978	8086	29000
1982	286	120000
1985	386	275000
1989	486 DX	1180000
1993	Pentium I	3100000
1997	Pentium II	7500000
1999	Pentium III	24000000
2000	Pentium IV	42000000

Tabel 6.4

2

Vectoren en goniometrie

- 2.1 Vectoren 54
- 2.2 Sin, cos, tan 62
- 2.3 De sinusregel 70
- 2.4 De cosinusregel 76
- 2.5 Totaalbeeld 82

2.1 Vectoren

Inleiding

Bij schepen en vliegtuigen speelt naast de snelheid ook de koers een belangrijke rol. Die koers wordt vastgelegd door de hoek ten opzichte van het noorden. In feite heb je het bij beide over een snelheidsvector, een combinatie van snelheid (de lengte van de pijl) en koers (de richtingshoek).

Je leert in dit onderwerp

- wat een vector is;
- de begrippen draaihoek en lengte van een vector;
- vectoren in componenten ontbinden;
- werken met componenten van vectoren.

Voorkennis

- werken met coördinaten;
- meetkundige begrippen zoals: loodrecht, evenwijdig, hoek, afstand en dergelijke (eventueel sinus, cosinus, tangens), gebruiken;
- werken met lijnen, hun richtingscoëfficiënten en richtingshoeken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

De koers van een vliegtuig is de hoek die zijn vliegrichting maakt met het noorden. Zo'n hoek wordt rechtsonder (met de wijzers van de klok mee) gemeten. De verplaatsing van het vliegtuig heeft een richtingshoek (de koers) en een lengte (de afstand). Hij is op te splitsen in een noordelijke component en een oostelijke component.

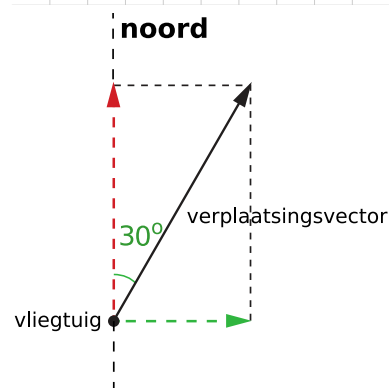
- a** Als de verplaatsing een grootte heeft van 500 km en een richtingshoek van 30° , hoe groot zijn dan de noordelijke component en de oostelijke component? (Maak een tekening en meet de lengtes van de componenten, waarbij $100 \text{ km} = 2 \text{ cm}$).

Je kunt de hoek van de verplaatsing aanpassen. Vergroot de hoek.

- b** Bij welke hoek wordt de noordelijke component een zuidelijke component?
- c** Bij welke hoek is de zuidelijke component even sterk als de noordelijke component bij 30° ?
- d** Bij welke hoek wordt de oostelijke component een westelijke component?



Figuur 1.1



Figuur 1.2

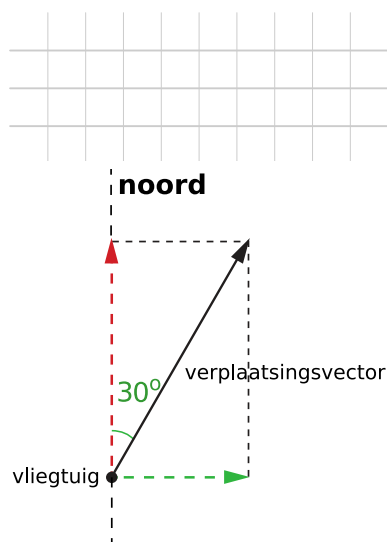
Uitleg

Bekijk de applet

Wanneer zowel grootte als richting een rol speelt, gebruik je een vector. Bijvoorbeeld om de verplaatsing van een vliegtuig weer te geven. De lengte van de verplaatsingsvector is de afstand in km, de richting is de richtingshoek ten opzichte van het noorden. Bekijk de verplaatsingsvector $(30^\circ, 500)$.

- 30° is de hoek met het noorden;
- 500 is de afstand in km.

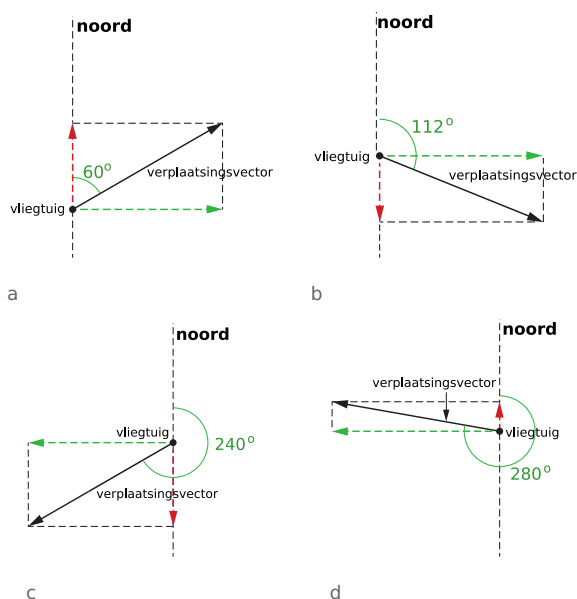
De vector heeft twee componenten: een noordelijke component en een oostelijke component. Die componenten kunnen ook negatief zijn, afhankelijk van hun richting. De noordelijke component is negatief als hij naar het zuiden wijst. De oostelijke component is negatief als hij naar het westen wijst. Deze twee componenten kun je bepalen door de vector te ontbinden in de twee richtingen (noord en oost) en ze te meten. Het punt waar de vector begint, heet het aangrijpingspunt. Als er meerdere vliegtuigen op verschillende plaatsen vertrekken, zijn de aangrijpingspunten verschillend. Toch kunnen de verplaatsingsvectoren wel gelijk zijn.



Figuur 1.3

Opgave 1

Je ziet vier keer een verplaatsingsvector getekend. Ga er van uit dat elke verplaatsingsvector een lengte heeft van 400 m. Teken zelf de figuren op schaal 1 : 10000, dus elke 100 m wordt 1 cm. Bepaal bij elke situatie de lengtes van de noordelijke component en de oostelijke component. Geef met behulp van mintekens de richting aan.



Figuur 1.4

Opgave 2

Van een verplaatsingsvector zijn de componenten gegeven. Bereken de lengte van deze vector en maak er eventueel een tekening van. Bepaal ook de grootte van de bijbehorende richtingshoek α (door opmeten of met behulp van tangens).

- a noordelijke component: 200 km, oostelijke component: 100 km.
- b noordelijke component: -300 km, oostelijke component: 400 km.
- c noordelijke component: -200 km, oostelijke component: 300 km.
- d noordelijke component: -200 km, oostelijke component: -150 km.
- e noordelijke component: 0 km, oostelijke component: -100 km.
- f noordelijke component: -200 km, oostelijke component: 0 km.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **vector** $\vec{v}$ is een grootte met lengte en richting. Je kunt hem beschrijven door:

- de **lengte** r van de vector, en
- de **richtingshoek** α , de hoek die de vector met de gekozen hoofdrichting maakt.

In een assenstelsel is de hoofdrichting altijd de positieve x -as en wordt de richtingshoek linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten. De vector kun je dan beschrijven door aan te geven hoe groot de **x -component** v_x en de **y -component** v_y zijn. De x -component is positief als hij in de positieve x -richting wijst, anders negatief. De y -component is positief als hij in de positieve y -richting

wijst, anders negatief. Je noteert de vector als $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

De lengte van deze vector is $|\vec{v}| = r = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

De getekende vector heeft de oorsprong O als **aangrijpingspunt**. Er zijn echter gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben.

In de wiskunde zijn twee vectoren gelijk als hun lengtes en hun richtingshoeken gelijk zijn.

De vector die van de oorsprong O naar punt A wijst, schrijf je als $\vec{OA}$.



Figuur 1.5

Voorbeeld 1

In een cartesisch assenstelsel zijn de punten $A(-5,2)$, $B(-28,16)$ en $C(-23,14)$ gegeven.

Laat zien dat de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{CB}$ gelijk zijn.
Bereken hun lengtes en hun richtingshoeken.

Antwoord

In een assenstelsel is de hoofdrichting de positieve x-richting.

De componenten van $\overrightarrow{OA}$ zijn daarom -5 en 2, dus $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De componenten van $\overrightarrow{CB}$ zijn $-28 - (-23) = -5$ en $16 - 14 = 2$, dus $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Je ziet meteen dat beide vectoren gelijk zijn, hun kentallen zijn immers gelijk.

De lengte van $\overrightarrow{OA}$ is: $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

De richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$ wordt bepaald door de hellingshoek α van lijn OA en daarvoor geldt: $\tan(\alpha) = \frac{2}{5}$. Die hoek is ongeveer

$21,8^\circ$. De richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$ is $180^\circ - 21,8^\circ = 158,2^\circ$.

$\overrightarrow{CB}$ heeft dezelfde kentallen en dus dezelfde lengte en richtingshoek.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Gegeven zijn in een cartesisch assenstelsel de punten $A(-2,1)$, $B(1,6)$, $C(-28,17)$ en $D(-31,12)$. Bereken $|\overrightarrow{AB}|$ en $|\overrightarrow{DC}|$ en de richtingshoeken van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$. Laat zien dat beide vectoren gelijk zijn.

Opgave 4

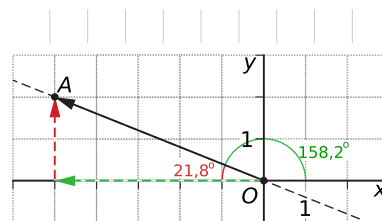
Bepaal de lengte en richtingshoek α van de vectoren.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

b $\vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 7 \end{pmatrix}$

c $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

d $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$



Figuur 1.6

$$\mathbf{e} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Een blok hout ligt op een hellend vlak. Het ondervindt een zwaartekracht van 500 N. (In de figuur zijn alle krachten in eenheden van 100 N uitgedrukt.)

Bij welke hellingshoek begint het blok te glijden als de maximale wrijvingskracht 200 N is?

Antwoord

Het blok begint te glijden als de component van de zwaartekracht langs het hellende vlak net iets groter is dan de wrijvingskracht, dus net iets meer is aan 200 N. Bij precies 200 N is de component van de zwaartekracht loodrecht op het hellende vlak $\sqrt{500^2 - 200^2} \approx 458$ N. De hellingshoek van het hellende vlak is gelijk aan de hoek tussen de component loodrecht op het hellende vlak en de zwaartekracht. Dit betekent: $\tan(\alpha) \approx \frac{200}{458}$ dus de gevraagde hoek is $23,6^\circ$. Om α te berekenen, gebruik je de arc-tan-functie. Op sommige rekenmachines is dat de functie $\tan^{-1}$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2** voor een toepassing van het werken met vectoren in de natuurkunde.

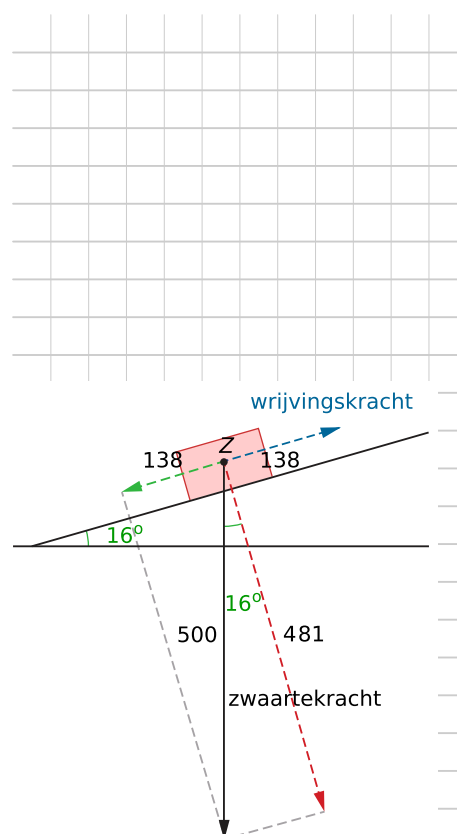
- Bekijk de beginsituatie in de figuur. In feite is 200 N de maximale wrijvingskracht. Hoe groot zal in dit geval de component langs het hellende vlak zijn?
- Reken zelf na bij welke hellingshoeken het gewicht blijft liggen.
- Licht toe waarom de hoek tussen de component loodrecht op het hellende vlak en de zwaartekracht altijd gelijk is aan de hellingshoek van het vlak.
- Hoe groot zou de maximale hellingshoek zijn waarbij het gewicht nog blijft liggen op het hellende vlak, als de maximale wrijvingskracht 300 N is?

Verwerken

Opgave 6

Een vector $\vec{v}$ heeft een gegeven lengte en een gegeven richtingshoek α ten opzichte van de positieve x-as. Teken deze vector en bepaal door meting de x-component en de y-component. Rond zo nodig af op één decimaal.

- $|\vec{v}| = 4$ en $\alpha = 225^\circ$



Figuur 1.7

- b $|\vec{v}| = 5$ en $\alpha = 150^\circ$
- c $|\vec{v}| = 6$ en $\alpha = 330^\circ$
- d $|\vec{v}| = 3$ en $\alpha = 270^\circ$

Opgave 7

Gegeven is telkens een vector $\vec{v}$ door zijn x- en y-componenten. Bereken de lengte en de richtingshoek α van deze vector. Rond zo nodig af op één decimaal.

- a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
- b $\vec{v} = \begin{pmatrix} -30 \\ -50 \end{pmatrix}$
- c $\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix}$
- d $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix}$

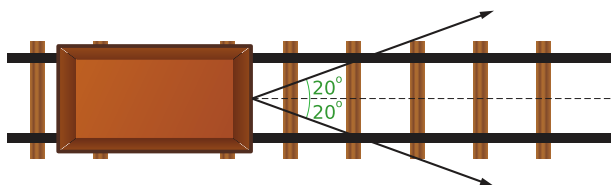
Opgave 8

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met hoekpunten $A(-23,61)$, $B(7,51)$, $C(-3,91)$ en $D(-33,101)$. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van $ABCD$.

- a Bepaal de componenten van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$. Toon met behulp van deze twee vectoren aan dat vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.
- b Het snijpunt van de diagonalen is $S(-13,76)$. Toon met behulp van de vectoren $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{BS}$ en $\overrightarrow{SD}$ aan dat vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.

Opgave 9

Een lorrie is een karretje dat op rails loopt. Twee personen trekken de lorrie met dezelfde kracht van 8 N, elk aan een touw.



Figuur 1.8

- a Geef een schatting van de kracht waarmee beide personen samen aan het karretje in de richting van de rails trekken. Licht je antwoord toe.
- b Beantwoord dezelfde vraag als de éne persoon met een kracht van 8 N trekt en de andere met een kracht van 6 N. De hoeken blijven gelijk.

Opgave 10

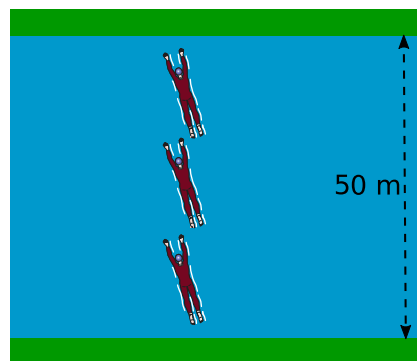
Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met de hoekpunten $A(5,9)$ en $B(8,8)$. Verder is de x -coördinaat van C 14. En is $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en

$\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, waarbij S het snijpunt is van de diagonalen AC en BD van vierhoek $ABCD$.

Toon aan dat deze vierhoek een vlieger is en bepaal de y -coördinaat van C .

Toepassen**Opgave 11: Zwemmer (1)**

Iemand zwemt met een snelheid van 2 km/h schuin tegen de stroom van een rivier in met een stroomsnelheid van 0,6 km/h. Daardoor steekt hij de rivier precies loodrecht op de oevers (en de stroomrichting) in de breedte over. De rivier is 50 meter breed. Hoelang doet hij over de overtocht? Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.

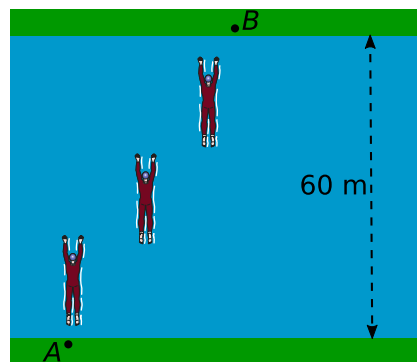


Figuur 1.9

Opgave 12: Zwemmer (2)

Een zwemmer probeert een rivier met een breedte van 60 meter recht over te steken, maar heeft last van de stroming. Daardoor komt hij niet recht tegenover zijn startpunt A op de andere oever aan, maar op een punt B dat verder stroomafwaarts ligt. De stroomsnelheid is 0,6 km/h en de zwemmer bereikt in vijf minuten de overkant van de rivier.

Bereken de snelheid waarmee hij AB aflegt in km/h. Rond af op drie decimalen.



Figuur 1.10

Opgave 13: Sportvliegtuig

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt drie uur met een constante snelheid van 140 km/h in een koers van 30° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na anderhalf uur moet hij een noodlanding maken.

- Maak van deze vlucht een tekening op schaal.
- Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bepaal de verplaatsingsvector van de helikopter. Reken daarmee ook de koershoek (ten opzichte van het noorden) en de lengte van de verplaatsingsvector uit.

Testen

Opgave 14

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- Bereken de lengte van beide vectoren in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken de richtingshoek van beide vectoren in graden nauwkeurig.

Opgave 15

Gegeven zijn de punten $P(2,12)$, $Q(10,2)$ en $R(15,6)$.

- Bereken $|\overrightarrow{PQ}|$ en de richtingshoek van $\overrightarrow{PQ}$.
- Laat zien dat $\angle PQR = 90^\circ$.

Practicum: GeoGebra IV

Je kunt GeoGebra heel goed gebruiken om rechten en krommen met een gegeven vergelijking in beeld te brengen. Je ziet dan meteen of er snijpunten zijn. En met GeoGebra kun je gemakkelijk snijpunten van twee (rechte of kromme) lijnen in de figuur aangeven. Ook kun je in GeoGebra met **vectoren** werken:

- Vector tussen twee punten: Maakt een vector van het eerst aangeklikte punt naar het tweede punt.
- Vector met beginpunt: Maakt een vector vanuit een aangeklikt punt die gelijk is aan de aangeklikte vector. Dit gebruik je vooral om gelijke vectoren te maken.
- Algebraïsche invoer van een vector met gegeven kentallen:

$v = (-5, 2)$ geeft de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ vanuit de oorsprong van het

assenstelsel. Merk op dat GeoGebra vectoren en coördinaten op dezelfde manier noteert!

2.2 Sin, cos, tan

Inleiding

Een vliegtuig legt 500 km af met een koers van 30° ten opzichte van het noorden. Hoeveel km verplaatst het vliegtuig zich in Noordelijke richting? Dit kun je nauwkeurig berekenen met behulp van goniometrie. Er is immers sprake van een rechthoekige driehoek. Maar wat als de windrichting bijvoorbeeld 120° is?

Je leert in dit onderwerp

- sinus, cosinus en tangens gebruiken om componenten van vectoren te berekenen;
- sinus, cosinus en tangens van hoeken boven de 90° gebruiken.

Voorkennis

- werken met goniometrische verhoudingen in rechthoekige driehoeken;
- vectoren met gegeven richting en lengte tekenen en de componenten bepalen door meting;
- van vectoren gegeven door hun x - en y -componenten de lengte en de richtingshoek berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

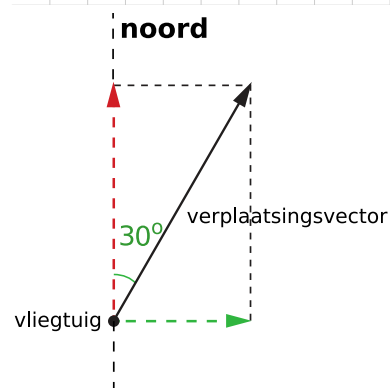
Je ziet een vliegtuig met een gegeven verplaatsingsvector. Kun je nu nauwkeurig vaststellen hoeveel het in noordelijke dan wel oostelijke richting is verplaatst? Met andere woorden, kun je de noordelijke component en de oostelijke component berekenen?

Stel je voor dat de verplaatsing 500 km bedraagt en de richtingshoek 30° is.

- Bereken de noordelijke component en de oostelijke component met behulp van sinus en/of cosinus.
- Bereken ook de noordelijke component bij een richtingshoek van 120° . Waarom is hij negatief?



Figuur 2.1



Figuur 2.2

Uitleg

Bekijk de applet

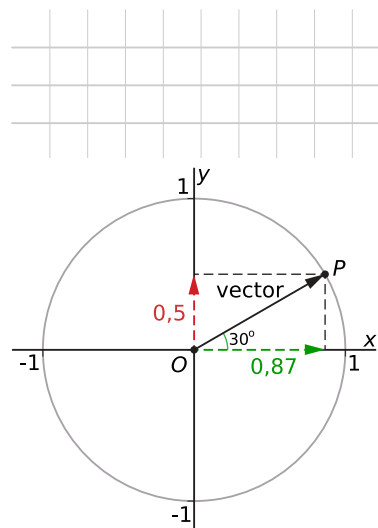
Je hebt al eerder leren werken met sinus, cosinus en tangens van allerlei hoeken.

Bekijk de eenheidscirkel (de cirkel met middelpunt O en straal 1) met een vector met een lengte van 1 en aangrijpingspunt O in een assenstelsel. Met behulp van de richtingshoek α kun je de componenten van deze vector berekenen met goniometrie.

$$v_x = 1 \cdot \cos(30^\circ) \text{ dus } v_x = \cos(30^\circ) \approx 0,87$$

$$v_y = 1 \cdot \sin(30^\circ) \text{ dus } v_y = \sin(30^\circ) \approx 0,5$$

$v_x = \cos(\alpha)$ en $v_y = \sin(\alpha)$ geldt voor alle richtingshoeken van eenheidsvectoren. Je ziet in de eenheidscirkel dat voor hoeken tussen 90° en 270° de cosinus negatief is en ook dat voor hoeken tussen 180° en 360° de sinus negatief is.



Figuur 2.3

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

- Leg uit dat voor hoeken tussen 90° en 180° de cosinus van de hoek negatief is en de sinus van de hoek positief is.
- Doe hetzelfde voor de tangens van de hoek.

Opgave 2

Leg uit.

- $\sin(100^\circ) = \sin(80^\circ)$
- $\cos(100^\circ) = -\cos(80^\circ)$
- $\sin(253^\circ) = -\sin(73^\circ)$
- $\cos(290^\circ) = \cos(70^\circ)$

Opgave 3

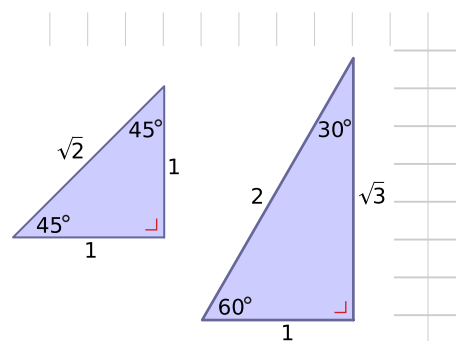
Bereken met je rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig de componenten v_x en v_y van een verplaatsingsvector met lengte 1 bij de volgende richtingshoeken.

- 40°
- 140°
- 240°
- 340°

Opgave 4

Van een paar hoeken kun je de sinus, de cosinus en de tangens exact berekenen. Omdat die hoeken regelmatig voorkomen, is het handig om die exacte waarden te weten. Bekijk daartoe deze twee bijzondere tekendriehoeken. De rechter is een halve gelijkzijdige driehoek en de linker is een geodriehoek.

- Bereken exact sinus, cosinus en tangens van 60° en van 30° .
- Bereken exact sinus, cosinus en tangens van 45° .
- Maak een tabel met de exacte waarden van sinus, cosinus en tangens van 0° , 30° , 45° , 60° en 90° .



Figuur 2.4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

In de **eenheidscirkel** (de cirkel om O met straal 1) zie je een vector met aangrijpingspunt O en met een lengte van 1 in een assenstelsel. Alfa is de hoek van de vector met de x -as. De componenten van zo'n vector zijn:

$$v_x = \cos(\alpha)$$

$$v_y = \sin(\alpha)$$

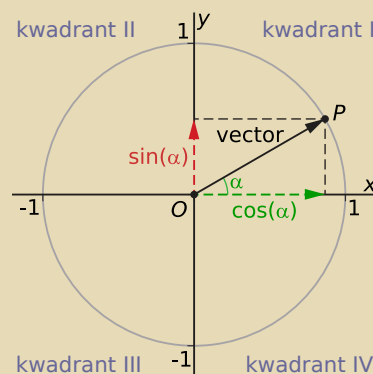
Dit geldt voor alle mogelijke hoeken α .

α kan dus groter zijn dan 180° , maar ook negatief zijn.

Het assenstelsel verdeelt het vlak in vier **kwadranten**. Voor hoeken in het tweede kwadrant (linksboven) is de cosinus negatief en de sinus positief. Voor hoeken in het derde kwadrant (linksonder) zijn de cosinus en de sinus beide negatief. Voor hoeken in het vierde kwadrant (rechtsonder) is de cosinus positief en de sinus negatief.

$$\text{Verder geldt: } \tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x}$$

Is de lengte van de vector niet 1, maar bijvoorbeeld r , dan worden beide componenten ook r keer zo groot. De **componenten van een vector** met lengte r en **richtingshoek** α zijn: $v_x = r \cos(\alpha)$ en $v_y = r \sin(\alpha)$.



Figuur 2.5

Exacte waarden sinus, cosinus en tangens

hoek	0°	30°	45°	60°	90°
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Tabel 2.1

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Bereken exact de sinus, cosinus en tangens van hoeken van 60° , 120° , 240° en 300° . Gebruik eventueel een schets van een eenheidscirkel.

Antwoord

Bekijk de eenheidscirkel, een vector met lengte 1 en richtingshoek α . Als $\alpha = 60^\circ$ dan is de x -component van deze vector precies $\frac{1}{2}$ (als je spiegelt in de lijn PQ zie je dat $\triangle OPQ$ de helft van een gelijkbenige driehoek is). Met de stelling van Pythagoras bereken je dan de lengte van de y -component:

$$v_y = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Daarom is } \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan(60^\circ) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Voor de andere hoeken gebruik je spiegeling in de x - en y -as. Zo is:

$$\sin(120^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos(120^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(120^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\sqrt{3}$$

En op dezelfde manier vind je sinus, cosinus en tangens van 240° en 300° .

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de exacte waarden van de sinus, de cosinus en de tangens van 120° kunt afleiden uit die van 60° . Bepaal nu zelf de exacte waarden van $\sin$, $\cos$ en $\tan$ van 240° en 300° .

Opgave 6

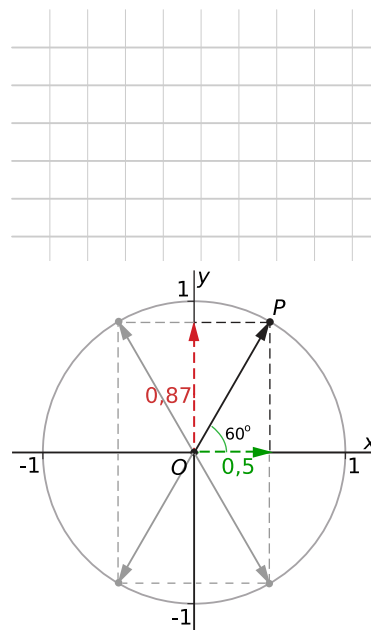
Teken in een assenstelsel een vector met lengte 1 en richtingshoek 45° .

- Bepaal de exacte waarden van $\sin(135^\circ)$, $\cos(135^\circ)$ en $\tan(135^\circ)$.
- Bepaal de exacte waarden van $\sin(225^\circ)$, $\cos(225^\circ)$ en $\tan(225^\circ)$.
- Bepaal de exacte waarden van $\sin(315^\circ)$, $\cos(315^\circ)$ en $\tan(315^\circ)$.

Opgave 7

Teken in een assenstelsel een vector met lengte 1 en richtingshoek 30° .

- Bepaal de exacte waarden van $\sin(150^\circ)$, $\cos(135^\circ)$ en $\tan(150^\circ)$.



Figuur 2.6

- b Bepaal de exacte waarden van $\sin(210^\circ)$, $\cos(210^\circ)$ en $\tan(210^\circ)$.
 c Bepaal de exacte waarden van $\sin(330^\circ)$, $\cos(330^\circ)$ en $\tan(330^\circ)$.

Opgave 8

Gebruik, indien mogelijk, de exacte waarden van sinus, cosinus en tangens van 0° , 30° , 45° , 60° en 90° .

- a Bepaal alle hoeken α tussen 0° en 360° die voldoen aan $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.
 b Bepaal in graden nauwkeurig alle hoeken β tussen 0° en 360° die voldoen aan $\sin(\beta) = -0,6$.
 c Bepaal in graden nauwkeurig alle hoeken γ tussen 0° en 360° die voldoen aan $\tan(\gamma) = -0,6$.

Voorbeeld 2

Een schip vaart 40 km met een koers van 115° ten opzichte van het noorden. Kompaskoersen worden altijd rechtsonder gemeten.

Hoeveel heeft het schip zich in noordelijke of zuidelijke richting verplaatst? Gebruik een tekening op schaal om eerst een schatting te meten.

Antwoord

Aan de tekening is te zien dat het schip zich in zuidelijke (en oostelijke) richting heeft verplaatst. Dat klopt ook, want de component in zuidelijke richting van de koersvector is: $v_z = 40 \cos(115^\circ) \approx -16,9$ km.

Het schip heeft zich 16,9 km naar het zuiden verplaatst.

noorden

115°

Figuur 2.7

Opgave 9

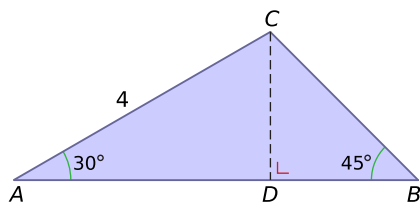
Bekijk **Voorbeeld 2**. Een schip vaart 80 km met een koers van 215° ten opzichte van het noorden. Hoeveel heeft het schip zich in noordelijke of zuidelijke richting verplaatst? En hoeveel in de oostelijke of de westelijke richting? Gebruik een tekening op schaal om eerst een schatting te meten. Geef je antwoorden in één decimaal nauwkeurig.

Voorbeeld 3

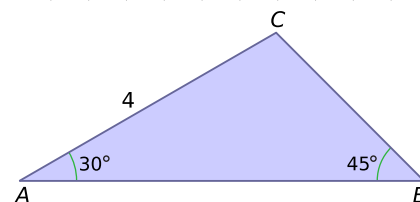
Bekijk $\triangle ABC$ met $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ en $AC = 4$ cm. Bereken de exacte lengte van AB .

Antwoord

Zonder rechte hoeken kun je niet met sin, cos en/of tan werken. Dus maak je eerst rechte hoeken.



Figuur 2.9



Figuur 2.8

Vat je AC als vector op, dan zijn AD en DC de componenten daarvan:

$$|AD| = 4 \cos(30^\circ) = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$|CD| = 4 \sin(30^\circ) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$|DB| = |CD| = 2$ ($\triangle DBC$ is een gelijkbenige driehoek).

Dus is de gevraagde lengte: $|AB| = |AD| + |DB| = 2\sqrt{3} + 2$.

Opgave 10

Bekijk **Voorbeeld 3**. Stel dat $AC = 6$. Bereken op dezelfde manier de exacte lengte van AB .

Opgave 11

Teken $\triangle KLM$ met $\angle K = 60^\circ$, $\angle L = 45^\circ$ en $|LM| = 4$ cm. Bereken de exacte lengte van KL en KM .

Opgave 12

Teken $\triangle PQR$ met $\angle P = 50^\circ$, $\angle Q = 35^\circ$ en $|PR| = 6$ cm. Bereken de lengte van PQ en QR . Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 13

Bereken de x - en de y -componenten van de volgende vectoren. Geef waar mogelijk exacte uitkomsten.

a $|\vec{v}| = 3$ en $\alpha = 135^\circ$

b $|\vec{v}| = 5$ en $\alpha = 210^\circ$

c $|\vec{v}| = 4$ en $\alpha = 320^\circ$

d $|\vec{v}| = 2$ en $\alpha = 270^\circ$

Opgave 14

Bereken in graden nauwkeurig alle hoeken α met $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ waarvoor geldt:

a $\cos(\alpha) = 0,38$

b $\sin(\alpha) = 0,38$

c $\cos(\alpha) = -0,38$

d $\sin(\alpha) = -0,38$

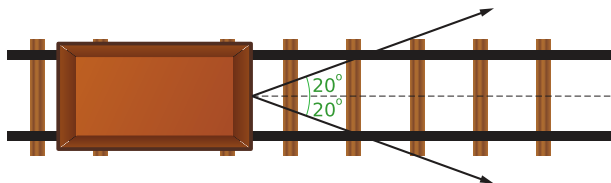
e Teken een eenheidscirkel om het verband te vinden tussen $\cos(\alpha)$ en $\cos(-\alpha)$. Doe hetzelfde voor $\cos(\alpha)$ en $\cos(180^\circ - \alpha)$.

Opgave 15

Teken $\triangle ABC$ met $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ en $|AC| = 5$ cm. Bereken de exacte lengte van AB en BC .

Opgave 16

Twee personen trekken elk aan een touw een lorrie voort. Ze lopen beiden op dezelfde afstand van het midden van de rails. De hoek tussen beide touwen is 40° . De grootte van elke kracht is 7 N.

**Figuur 2.10**

- Bereken de kracht die ze samen uitoefenen in de bewegingsrichting van de lorrie in één decimaal nauwkeurig.
- Doe hetzelfde voor de situatie waarin de ene persoon trekt met een kracht van 8 N onder een hoek van 20° ten opzichte van de rails en de ander trekt met een kracht van 6 N onder een hoek van 15° ten opzichte van de rails.
- In welke van beide situaties loopt de lorrie soepeler over de rails? Verklaar je antwoord.

Opgave 17

Bekijk deze foto van een huis met een zogenaamd mansardedak.

De breedte van het huis is 6 meter en de breedte van elk dakdeel is 2,5 meter. De onderste dakdelen maken een hellingshoek van 65° met een horizontaal vlak.

- Bereken de hoogte van het huis als de dakgoot op 3 meter boven de begane grond zit.
- Bereken de hellingshoek van de bovenste dakdelen.

**Figuur 2.11****Toepassen****Opgave 18: Noodlanding**

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt 3 uur met een constante snelheid van 140 km/h in de koers 30° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na 1,5 uur moet hij een noodlanding maken. Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bereken de verplaatsingsvector van de helikopter.

Opmerking: Dit is dezelfde opgave als in Test jezelf van de vorige paragraaf, maar het verschil is dat je bij de vorige paragraaf nog mocht meten en nu moet je berekenen.

Testen

Opgave 19

Gegeven zijn de punten $P(0,8)$ en $Q(12,3)$.

- a Bereken $|\overrightarrow{PQ}|$ en de hoek die $\overrightarrow{PQ}$ met de positieve x-as maakt.
- b $\overrightarrow{OR}$ is even lang als $\overrightarrow{PQ}$ maar heeft een richtingshoek van 120° met de positieve x-as. Bereken de exacte coördinaten van R .

Opgave 20

Bereken (exact indien mogelijk, anders in graden nauwkeurig) alle hoeken α met $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ waarvoor geldt:

- a $\sin(\alpha) = -0,83$
- b $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 21

Teken $\triangle ABC$ met $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 135^\circ$, en $|AC| = 10$. Bereken de exacte lengte van AB en BC .

2.3 De sinusregel

Inleiding

Niet altijd zijn driehoeken netjes voorzien van een rechte hoek. Om toch met $\sin$, $\cos$ of $\tan$ te kunnen werken heb je dan hulplijnen nodig die voor rechte hoeken zorgen. Bovendien moet je dan een aantal berekeningsstappen zetten. De sinusregel maakt het rekenwerk wat eenvoudiger...

Je leert in dit onderwerp

- de sinusregel gebruiken.

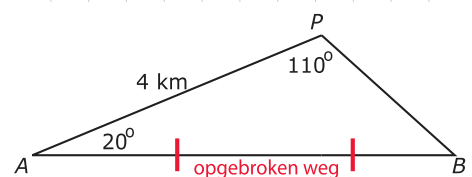
Voorkennis

- werken sinus, cosinus en tangens;
- werken met hoeken groter dan 90° .

Verkennen

Opgave V1

Tussen de punten A en B is de weg opgebroken. Er is een omleiding via P . De wegen AB en AP maken een hoek van 20° met elkaar. De hoek tussen PA en PB is 110° . De weg van A naar P is 4 km. Hoeveel langer is de weg A naar B via P dan de rechtstreekse weg AB ?

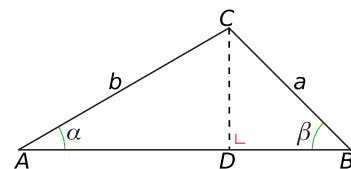


Figuur 3.1

Opgave V2

Bekijk de driehoek.

Laat zien, dat $a \sin(\beta) = b \sin(\alpha)$ door de lengte van CD op twee manieren te berekenen.



Figuur 3.2

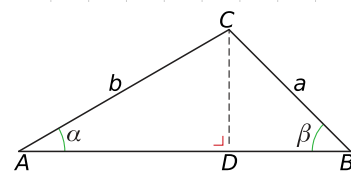
Uitleg

Je kunt een verband afleiden tussen a , b , $\sin(\alpha)$ en $\sin(\beta)$ door de hoogtelijn CD op twee manieren te schrijven:

- In $\triangle ADC$ is $|CD| = b \sin(\alpha)$.
- In $\triangle DBC$ is $|CD| = a \sin(\beta)$.

Dit betekent: $b \sin(\alpha) = a \sin(\beta)$. Dit kun je schrijven als: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$. Met behulp van een andere hoogtelijn kun je ook zo'n verband tussen a , c , $\sin(\alpha)$ en $\sin(\gamma)$ afleiden. Hierin is $c = |AB|$ en $\gamma = \angle C$.

Dit verband tussen de hoeken en de zijden van een driehoek heet de 'sinusregel'.

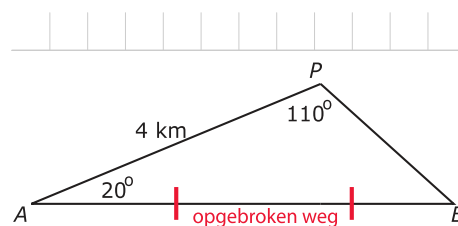


Figuur 3.3

Opgave 1

Gebruik de sinusregel om het volgende (reeds bekende) probleem op te lossen.

Tussen de punten A en B is de weg opgebroken. Er is een omleiding via P . De wegen AB en AP maken een hoek van 20° met elkaar. De hoek tussen PA en PB is 110° . De weg van A naar P is 4 km. Hoeveel langer is de weg A naar B via P dan de rechtstreekse weg AB ?



Figuur 3.4

Opgave 2

Gegeven is $\triangle ABC$ met $|AB| = 5$ cm, $\angle A = 40^\circ$ en $\angle C = 65^\circ$. Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Gegeven is $\triangle DEF$ met $|DE| = 5$ cm, $\angle D = 40^\circ$ en $\angle E = 65^\circ$. Bereken de lengte van DF in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

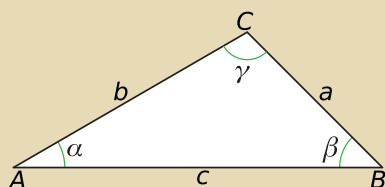
De algemene afspraak voor het geven van namen aan onderdelen van driehoek ABC is:

$\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$ en $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$.

Nu kun je zelf afleiden: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. Laat dat zien.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 3.5

In elke $\triangle ABC$ geldt de **sinusregel**: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Je gebruikt hem vooral in driehoeken die geen rechte hoek hebben.

Voorbeeld 1

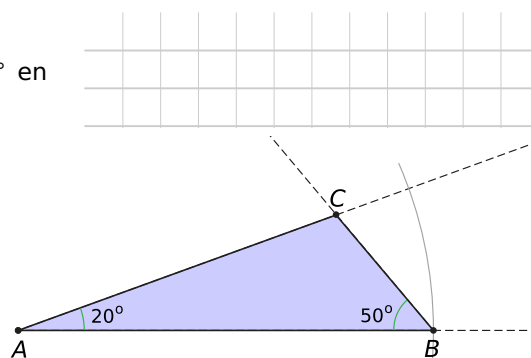
Bekijk de constructie van $\triangle ABC$ met $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 50^\circ$ en $|AB| = 6$. Bereken de lengte van AC .

Antwoord

Merk eerst op dat $\angle C = 110^\circ$.

$$\frac{|AC|}{\sin(50^\circ)} = \frac{6}{\sin(110^\circ)}$$

Hieruit volgt: $|AC| \approx 4,89$.



Figuur 3.6

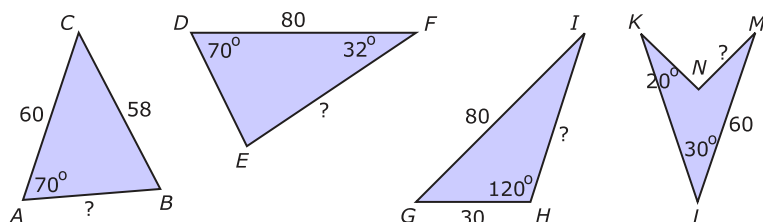
Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je de constructie van $\triangle ABC$ als gegeven is $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 50^\circ$ en $|AB| = 6$ cm.

- Construeer zelf deze driehoek.
- Waarom is het voor het berekenen van de lengte van AC nodig om $\angle C$ te berekenen?
- Controleer dat inderdaad $|AC| \approx 4,89$.

Opgave 6

Bereken de zijde waar het vraagteken bij staat.



Figuur 3.7

Opgave 7

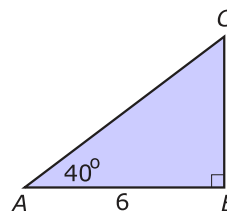
Je kunt de sinusregel op meerdere manieren schrijven. Bijvoorbeeld ook zo: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

Bedenk nog twee manieren waarop je de sinusregel kunt schrijven.

Opgave 8

In deze rechthoekige driehoek kun je de lengte van AC berekenen met behulp van de sinusregel.

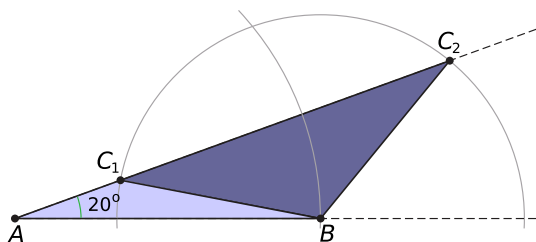
- Laat zien hoe dat gaat.
- Bereken $|AC|$ ook zonder de sinusregel te gebruiken.



Figuur 3.8

Voorbeeld 2

Bekijk de constructie van $\triangle ABC$ met $\angle A = 20^\circ$, $|AB| = 6$ en $|BC| = 4$. Bereken de lengte van AC .

**Figuur 3.9**

Antwoord

De sinusregel geeft: $\frac{4}{\sin(20^\circ)} = \frac{6}{\sin(\angle C)}$.

Hieruit volgt: $\sin(\angle C) \approx 0,5130$.

Nu zijn er twee hoeken die hieraan voldoen: $\angle C_2 \approx 31^\circ$ v $\angle C_1 \approx 149^\circ$.

En daarom zijn er twee driehoeken mogelijk, wat de constructie ook laat zien. Van deze driehoeken is $\angle B_2 \approx 129^\circ$ v $\angle B_1 \approx 11^\circ$.

Pas je nog een keer de sinusregel toe, dan vind je: $|AC| \approx 9,1$ v $|AC| \approx 2,2$.

Opgave 9

$\triangle KLM$ heeft $\angle K = 30^\circ$, $|KL| = 5$ cm en $|LM| = 4$ cm. Construeer de twee mogelijke driehoeken en bereken voor allebei de lengte van KM .

Opgave 10

Van een $\triangle ABC$ is $|AB| = 20$, $|BC| = 25$ en $\angle A = 60^\circ$.

- Toon aan dat $\sin(\angle C) = \frac{2}{5}\sqrt{3}$
- Welke hoeken voldoen aan $\sin(\angle C) = \frac{2}{5}\sqrt{3}$?
- Je berekent hoeken uit een driehoek. Welke hoek voldoet?
- Bereken nu de lengte van AC .

Verwerken**Opgave 11**

Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle A = 25^\circ$, $\angle B = 55^\circ$ en $|AB| = 5$. Bereken $|AC|$ en $|BC|$ in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 12

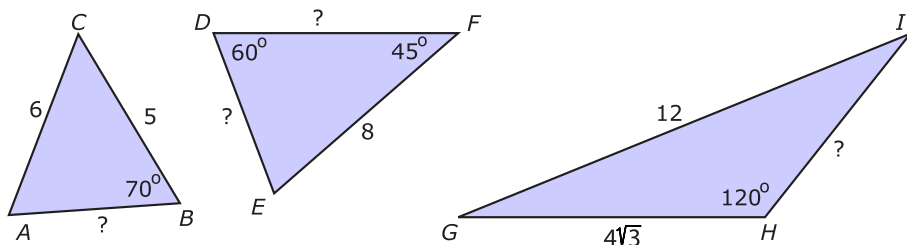
Gegeven is $\triangle KLM$ met $\angle K = 40^\circ$, $|KM| = 6$ en $|LM| = 8$. Bereken $\angle L$ en $\angle M$ in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 13

Laat met een berekening zien dat een driehoek ABC met $|AB| = 12$, $|AC| = 8$ en $\angle B = 45^\circ$ onmogelijk is.

Opgave 14

Bereken (waar mogelijk exact) de zijde waar het vraagteken bij staat.



Figuur 3.10

Opgave 15

Je wilt de lengte bepalen van lijnstuk AB , maar tussen de punten A en B ligt een meertje. Je gaat nu als volgt te werk:

- Je loopt vanuit punt A 200 m in een richting die een hoek van 60° maakt met AB . Zo houdt je droge voeten.
- Je bent op een punt dat je P noemt en meet de hoek tussen AP en PB . Die is 80° .
- Vervolgens bereken je de lengte van AB .

Laat met een tekening zien hoe dit in zijn werk gaat en bereken de lengte van AB .

Toepassen

Om de positie van een bepaald punt P in kaart te brengen, werkten landmeters vroeger met de sinusregel. Daartoe werden de afstanden tot P vanuit bekende punten berekend. Door omcirkelen vanuit die bekende punten kon P op de kaart worden aangegeven. Deze procedure heette 'voorwaartse insnijding'. Deze methode werkt alleen in de 'lagere geodesie', de **landmeetkunde** waarbij het aardoppervlak als plat kan worden beschouwd.

Opgave 16

Stel dat A en B de bekende punten zijn. Ze liggen 125,3 m uit elkaar. Je wilt de positie van P bepalen. Je meet de hoeken BAP en ABP : $\angle BAP = 68,3^\circ$ en $\angle ABP = 77,4^\circ$.

Bereken nu de lengtes van AP en BP .

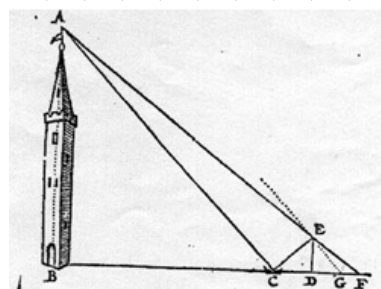
Opgave 17

Iemand wil de hoogte van een toren weten. Hij gaat een stuk van de toren vandaan staan en meet de hoek tussen de horizontale richting en de richting naar de spits van de toren (punt A). Deze hoek C is 32° . Dan loopt hij 50 m verder van de toren vandaan en meet de hoek naar de top opnieuw; de nieuwe hoek D is nu 15° .

- Maak een schets van deze situatie met de gegevens die bekend zijn. Ga er daarbij vanuit dat beide hoeken op 1,80 m boven de grond zijn gemeten.
- Bereken de hoogte van de toren in meter nauwkeurig. (Opmerking: er is een oplossing van dit probleem waarbij je de sinusregel gebruikt, maar er is wel een oplossing te bedenken waarbij dit niet hoeft. Kun je beide oplossingen vinden?)

De Nederlandse meetkundige Sybrandt Hansz. Cardinael (1578–1647) bedacht een manier om de hoogte van een toren te bepalen. Je hebt er zelfs geen hoeken voor nodig. Hier zie je hoe hij te werk ging. De toren is AB en er ligt een spiegel op de grond in C . Je zet bij D een verticale stok DE zo, dat de top A van de toren in de spiegel gezien kan worden vanuit E . Vervolgens bepaal je de plaats van punt F zo, dat vanuit F de top A juist boven de stok DE in het verlengde van FE gezien kan worden. Als je de lengtes van CD , DE en DF kent, kun je de hoogte van de toren AB berekenen.

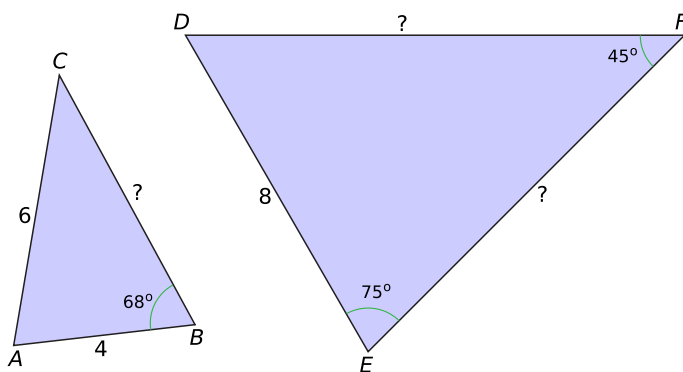
- Bereken de hoogte van de toren als $|CD| = 8$, $|DE| = 6$ en $|DF| = 9$.



Figuur 3.11

Testen**Opgave 18**

Bereken (exact indien mogelijk) in de twee onderstaande figuren de lengte van het lijnstuk waar een vraagteken bij staat.



Figuur 3.12

Opgave 19

Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle B = 45^\circ$, $|BC| = 5$ cm en $|AC| = 4$ cm. Construeer de twee mogelijke driehoeken en bereken telkens de lengte van AB in twee decimalen nauwkeurig.

2.4 De cosinusregel

Inleiding

De sinusregel werkt niet in alle situaties, dat heb je vast wel ontdekt. Als je bijvoorbeeld van een driehoek alle zijden weet, dan kun je hem construeren, de driehoek ligt daarmee volledig vast. Toch kun je niet met behulp van de sinusregel de hoeken ervan uitrekenen. In dit geval gebruik je de cosinusregel...

Je leert in dit onderwerp

- de cosinusregel gebruiken.

Voorkennis

- werken sinus, cosinus en tangens;
- werken met hoeken groter dan 90° .
- de sinusregel gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

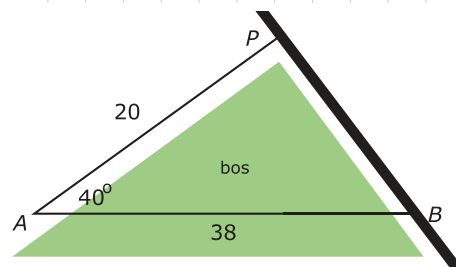
Bij een crosscountry-wedstrijd moeten de deelnemers van punt A naar punt B zien te komen. Er zijn twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is een route rechtstreeks door het bos van A naar B . De tweede mogelijkheid is een route via punt P en een geasfalteerd fietspad. De paden AB en AP maken een hoek van 40° met elkaar. Het pad van A naar P is 20 m, dat van A naar B is 38 m.

- Bereken hoeveel verschil er is tussen de route AB door het bos en de route van A naar B via P en het fietspad.
- Waarom lukt dit met de sinusregel niet?

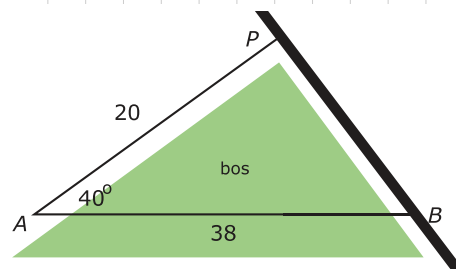
Uitleg

Bij een crosscountry-wedstrijd moeten de deelnemers van punt A naar punt B zien te komen. Er zijn twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is een route rechtstreeks door het bos van A naar B . De tweede mogelijkheid is een route via punt P en een geasfalteerd fietspad. De paden AB en AP maken een hoek van 40° met elkaar. Het pad van A naar P is 20 m, dat van A naar B is 38 m.

Nu is de sinusregel niet bruikbaar. Je kunt dit alleen oplossen door een hoogtelijn PD op AB te tekenen. Dat is nog behoorlijk wat rekenwerk. Handiger is het om de cosinusregel te gebruiken in $\triangle ABP$.



Figuur 4.1



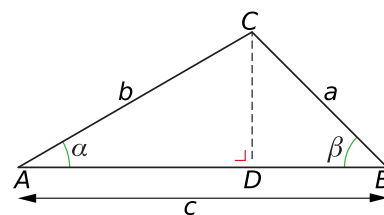
Figuur 4.2

In elke driehoek ABC geldt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

In de driehoek bij de crosscountry-wedstrijd is $C = P$ en dus $\alpha = 40^\circ$, $PB = a$, $AB = c$ en $AP = b$.

Even invullen en je vindt $PB = a \approx 26,1$ m.



Figuur 4.3

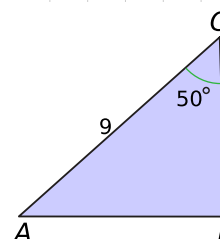
Opgave 1

Bekijk in de [Uitleg](#) wat de cosinusregel is. Laat zien hoe je aan de lengte van PB komt met behulp van de cosinusregel.

Opgave 2

Bekijk driehoek ABC . Twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven.

- Hoe ziet de cosinusregel bij de gegeven hoek eruit?
- Bereken de derde zijde van deze driehoek.

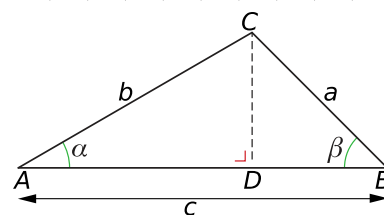


Figuur 4.4

Opgave 3

Wil je in deze figuur a uitrekenen terwijl α , b en c bekend zijn, dan lukt dit niet met behulp van de sinusregel. Je kunt echter een verband afleiden tussen a , α , b en c .

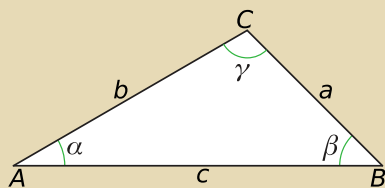
- Laat zien, dat $a^2 = CD^2 + (c - AD)^2$.
- Laat zien dat $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot AD$ door haakjes weg te werken.
- Laat tenslotte zien, dat $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.



Figuur 4.5

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 4.6

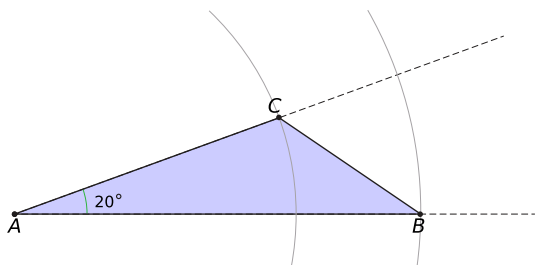
In elke $\triangle ABC$ geldt de **cosinusregel**. Er zijn drie varianten:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

Je gebruikt de cosinusregel in driehoeken die geen rechte hoek hebben en in situaties waarin de sinusregel niet goed werkt.

Voorbeeld 1

Bekijk de constructie van $\triangle ABC$ met $\angle A = 20^\circ$, $|AB| = 6$ en $|AC| = 4$. Bereken de lengte van BC .

**Figuur 4.7**

Antwoord

Cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.

Dit geeft: $|BC|^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(20^\circ) = 6,89\dots$

Hieruit volgt: $|BC| \approx 2,6$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je de constructie van $\triangle ABC$ als gegeven is $\angle A = 20^\circ$, $|AB| = 6$ cm en $|AC| = 4$ cm.

- Construeer zelf deze driehoek.
- Controleer met de cosinusregel dat inderdaad $|BC| \approx 2,63$.

Opgave 5

Laat zien dat de stelling van Pythagoras een speciaal geval is van de cosinusregel.

Opgave 6

Stel je voor dat op 60 km van een eiland je schip vergaat. Je kunt jezelf drijvend houden op een vlot, maar alle instrumenten zijn verloren gegaan. Natuurlijk probeer je rechtstreeks naar het eiland te peddelen, maar zodra je begonnen bent, komt er een dichte mist op. Je legt ongeveer 2,5 km per uur af. Zonder dat je het in de gaten hebt, staat er een stroming die ervoor zorgt dat je 30° uit de koers raakt. Na 20 uur zou je nog 10 km van het eiland verwijderd moeten zijn, als je er inderdaad recht naartoe gepeddeld was.

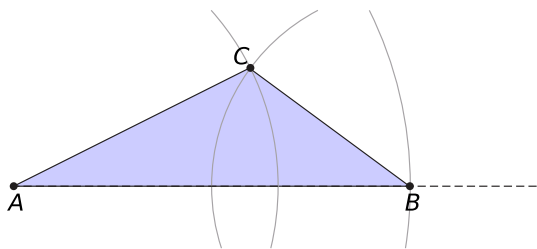
Hoe ver ben je er in werkelijkheid vanaf? Teken eventueel eerst een schets.

Opgave 7

Van een $\triangle ABC$ is gegeven dat $|AB| = 10$, $|AC| = 6$ en $\angle C = 60^\circ$. Gebruik de cosinusregel om de lengte van zijde BC uit te rekenen.

Voorbeeld 2

Bekijk de constructie van $\triangle ABC$ met $|AB| = 6$, $|AC| = 4$ en $|BC| = 3$. Bereken de grootte van $\angle A$.



Figuur 4.8

Antwoord

Cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.

Dit geeft: $3^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(\angle A)$.

Dus: $9 = 52 - 48 \cos(\angle A)$. En: $\cos(\angle A) = \frac{-43}{-48} \approx 0,8958$, zodat $\angle A \approx 26^\circ$.

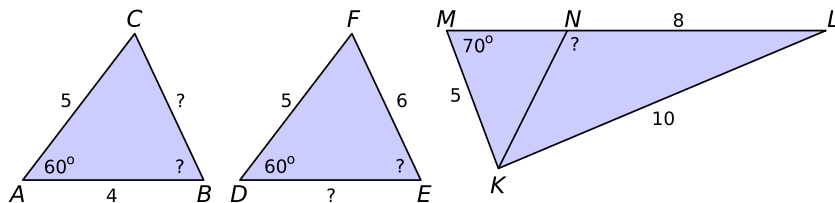
Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2** de constructie van $\triangle ABC$ met $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm en $|BC| = 3$ cm.

- Voer zelf de berekening van $\angle A$ uit.
- Bereken nu ook $\angle B$.
- Heb je opnieuw de cosinusregel gebruikt? Zo ja, kon dit ook met de sinusregel?

Opgave 9

Bereken de onbekende zijden en de onbekende hoeken in de figuren.



Figuur 4.9

Verwerken

Opgave 10

Elke $\triangle ABC$ heeft zes afmetingen, te weten:

- de lengtes van de zijden $|AB| = c$, $|BC| = a$ en $|AC| = b$;
- de hoeken $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$.

Hier zijn steeds drie maten van $\triangle ABC$ gegeven. Bereken de andere maten (exact waar mogelijk).

- $a = 8$, $b = 5$ en $\gamma = 65^\circ$
- $a = 8$, $b = 5$ en $\alpha = 65^\circ$
- $c = 150$, $\gamma = 120^\circ$ en $\beta = 45^\circ$

- d $a = 6$, $b = 10$ en $c = 8$
 e $a = b = 15$ en $\gamma = 20^\circ$

Opgave 11

Teken het trapezium $ABCD$ met $|AB| = 12$, $|AC| = 10$, $|DC| = 4$ en $\angle B = 45^\circ$. Omdat de vierhoek $ABCD$ een trapezium is, is AB evenwijdig met CD .

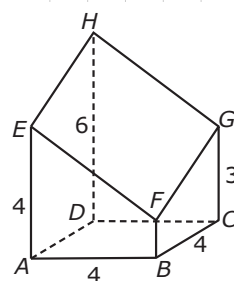
Bereken de lengte van AD . Er zijn twee mogelijkheden. Geef ze allebei.

Opgave 12

Laat met een berekening zien dat een gelijkbenige driehoek ABC met $\angle A = \angle B$, $\angle C = 20^\circ$, $|AC| = 10$ en $|AB| = 5$ onmogelijk is.

Opgave 13

Bekijk de afgeknotte balk $ABCD.EFGH$. De afmetingen staan in de figuur. Bereken de grootte van $\angle EHG$ met behulp van de cosinusregel in $\triangle EHG$.



Figuur 4.10

Opgave 14

Van een viervlak $ABCD$ zijn de ribben achtereenvolgens $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|AD| = 7$ cm, $|BD| = 8$ cm en $|CD| = 9$ cm. Punt P is het midden van AC en punt Q is het midden van BD . Bereken de lengte van PQ .

Toepassen

In een automotor wordt de op- en neergaande beweging van een zuiger via een drijfstang omgezet in een draaiende beweging. In de eerste figuur zijn twee standen getekend.

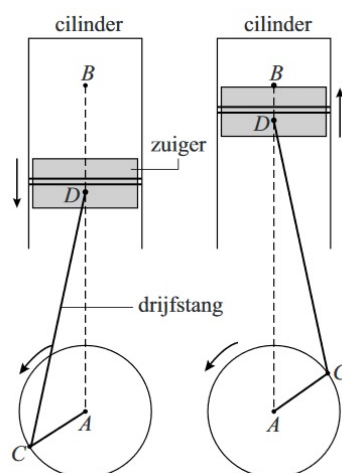
In de eerste stand beweegt de zuiger omlaag en in de tweede stand omhoog.

In de tweede figuur zijn vier standen schematisch getekend. A is een vast punt, D beweegt verticaal over AB en C draait over een cirkel met straal 1 en middelpunt A waarbij CD een vaste lengte 4 dm heeft.

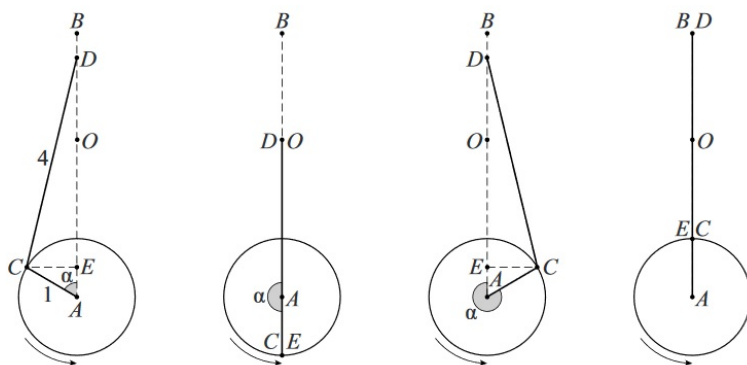
De grootte van hoek CAD (in graden) is α .

De grootte van hoek ACD (in graden) is γ .

Punt E is de loodrechte projectie van C op lijn AD .



Figuur 4.11



Figuur 4.12

Je kunt nu de lengte van AD bij allerlei hoeken α of γ berekenen.

Opgave 15

Bekijk de figuren hierboven. Alle afmetingen zijn in dm.

- Bereken AD als $\gamma = 110^\circ$ in mm nauwkeurig.
- Bereken AD als $\alpha = 55^\circ$ in mm nauwkeurig.

Opgave 16

De zuiger kent een stand waarbij AD maximaal is en een stand waarbij AD minimaal is.

- Tussen welke waarden ligt de lengte van AD ?
- Hoe groot zijn AD en γ als $\alpha = 100^\circ$?

Testen

Opgave 17

Van een driehoek ABC is gegeven $|AC| = b = 12$, $|AB| = c = 15$ en $\angle A = \alpha = 55^\circ$. Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 18

Van een driehoek zijn de zijden respectievelijk 8, 5 en 4 cm. Bereken de grootte van de hoeken.

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **de sinusregel en de cosinusregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Vectoren en goniometrie** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- vector, lengte en richtingshoek — componenten van een vector
- sinus, cosinus, tangens ook van hoeken groter dan 90°
- de sinusregel
- de cosinusregel

Activiteitenlijst

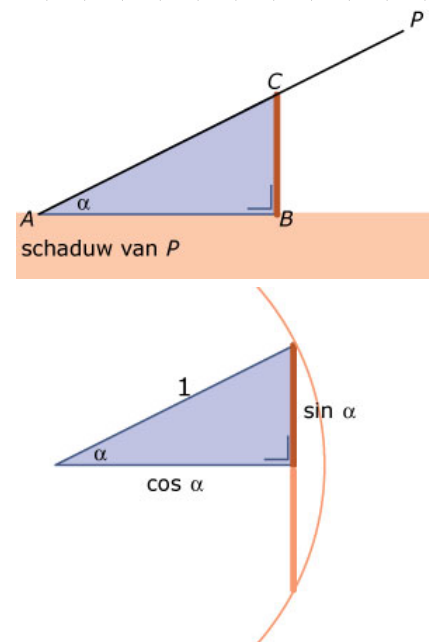
- componenten van een vector bepalen door meting/berekening — positieve/negatieve componenten onderscheiden
- componenten van vectoren berekenen met behulp van $\sin$ en $\cos$ — $\sin$, $\cos$ en $\tan$ van hoeken (ook) boven 90° bepalen
- de sinusregel gebruiken in (niet-)rechthoekige driehoeken
- de cosinusregel gebruiken in (niet-)rechthoekige driehoeken

Achtergronden

Met een staaf van een bepaalde lengte werden in de oude culturen de posities van de zon, de maan en andere hemellichamen vastgelegd. Bij elk punt aan de hemel hoort een bepaalde 'schaduw' en een bepaalde hoek. Er is dus een verband tussen hoek A en punt P aan de hemel. Goniometrie (hoekmeting) speelt daarom van oudsher een grote rol in de sterrenkunde.

De beroemde Alexandrijnse astronoom **Ptolemaeus (87–168 vermoedelijk)** gaf rond 150 na Chr. in zijn boek 'Almagest' een tabel de lengtes van de koorden bij bepaalde cirkelhoeken. De Indiërs gaven in de 7de eeuw bij een gegeven middelpuntshoek de lengte van de halve koorde. Via het Arabisch is het woord voor 'halve koorde' in de 12de eeuw in het Latijn vertaald als *sinus* (wat 'bocht' of 'boezem' betekende).

Het woord *cosinus* is de afkorting voor 'complementi sinus' (de sinus van het complement). Met 'complement' wordt de hoek bedoeld die de gegeven hoek aanvult tot 90° .



Figuur 5.1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn vectoren met lengte v en richtingshoek α . Bereken de x -component en de y -component. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

- a $v = 20$ en $\alpha = 45^\circ$
- b $v = 20$ en $\alpha = 115^\circ$
- c $v = 20$ en $\alpha = 300^\circ$
- d $v = 20$ en $\alpha = 270^\circ$

Opgave 2

Bereken alle overige zijden en hoeken van $\triangle ABC$ als gegeven is (geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig):

- a $a = 5$, $b = 6$ en $c = 4$.
- b $a = 5$, $b = 6$ en $\gamma = 120^\circ$.
- c $a = 5$, $b = 6$ en $\beta = 120^\circ$.
- d $c = 12$, $\alpha = 50^\circ$ en $\beta = 60^\circ$.
- e $a = 12$, $b = 6$ en $\alpha = 90^\circ$.
- f $a = c = 10$ en $\gamma = 81^\circ$.

Opgave 3

- a Van $\triangle ABC$ is gegeven dat $|AB| = 8$, $|BC| = 6$ en $\angle B = 60^\circ$.
Bereken $|AC|$ exact.
- b Van $\triangle DEF$ is gegeven dat $|DE| = \sqrt{3}$, $|DF| = 3$ en $\angle E = 120^\circ$.
Bereken $|EF|$ exact.

Opgave 4

De breedte van een rivier bepaal je vanuit een duidelijk herkenbaar punt P op de tegenoverliggende oever. Langs de oever waarop je zelf staat, zet je een lijnstuk AB van bijvoorbeeld 10 m uit. Vervolgens meet je de hoeken van AP met AB en van BP met AB . Bereken de breedte van de rivier als $\angle BAP = 65^\circ$ en $\angle ABP = 54^\circ$.

Opgave 5

Tussen drie palen die loodrecht op de grond staan, is heel strak een driehoekig zeil gespannen. Paal 1 staat 5 m van paal 2, paal 2 staat 4 m van paal 3 en paal 3 staat 3 m van paal 1. Het zeil is op 2 m boven de grond aan paal 1, op 2,5 m boven de grond aan paal 2 en op 3,5 m boven de grond aan paal 3 bevestigd. Bereken de oppervlakte van dit zeil.

Opgave 6

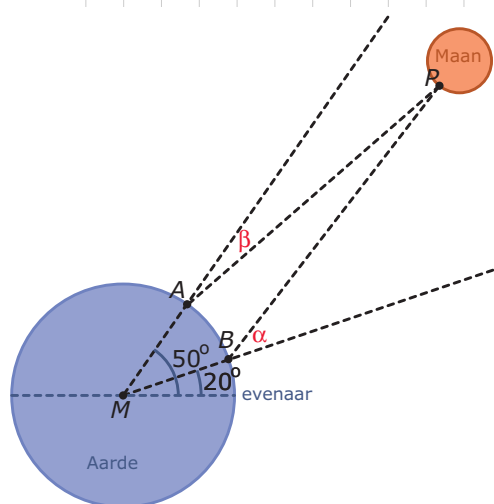
Gegeven is een driehoek waarvan de lengtes van de zijden a , b en c zijn. Bereken in de volgende gevallen de grootte van de hoek α tegenover de zijde met lengte a .

- a $a^2 = b^2 + c^2$
- b $a^2 = b^2 + c^2 - bc$
- c $a^2 = b^2 + c^2 + 0,5bc$

Toepassen

Opgave 7: Afstand Aarde - Maan

De afstand van het middelpunt M van de Aarde tot een punt P op de Maan kun je berekenen door op dezelfde lengtegraad op twee verschillende punten A en B een kijker op punt P te richten. Neem aan dat de Aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40000 km en neem ook aan dat de Maan precies recht boven de lengtegraad staat waar A en B op liggen, dus M , A , B en P liggen in één vlak. Je meet nu de hoeken die de kijker met MA en met MB maakt (dus met lijnen loodrecht op het aardoppervlak). Stel dat A op 50° N.B. ligt en B op 20° N.B. Beschrijf hoe je vanuit de gemeten hoeken de afstand MP berekent.

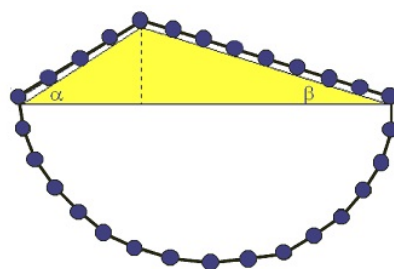


Figuur 5.2

Opgave 8: Cloutkransbewijs

In een tijd dat krachten nog niet als vectoren werden ontbonden bedacht Simon Stevin wat de kracht moet zijn die een massa uitoefent op een helling. Hij deed dat niet door een experiment, maar door een simpele redenering.

Hang een ketting van kralen over een punt dat twee hellingen verbindt. Welke kracht oefent de ketting uit op het punt, vanaf links en vanaf rechts? Het vrij hangende gedeelte trekt aan beide kanten even hard. De ketting beweegt niet, dus het gewicht van de ketting links is evenredig met de lengte van de helling links. De kracht die dat gewicht dan effectief uitoefent moet gelijk zijn aan de kracht die het rechterstuk uitoefent. Dus moet die kracht evenredig zijn met de lengte van de andere zijde. Dus verhouden de krachten zich omgekeerd met de lengtes van de hellingen. Je kunt dit ook controleren door de krachten te ontbinden in vectoren. En dan de sinusregel toe te passen. Laat zien hoe dat gaat. (Zie ook: [Cloutcransbewijs in Wikipedia](#))



Figuur 5.3

Examen

Opgave 9: Schaatshouding

Omdat de houding die een schaatser aanneemt van invloed is op zijn snelheid, is deze zogeheten schaatshouding onderzocht.

Hierbij is gekeken naar de driehoek die wordt gevormd door het heupgewricht H , het kniegewricht K en het enkelgewricht E .

De hoek in graden tussen het dijbeen (HK) en het scheenbeen (KE) is de kniehoek α . Zie de figuur.

We bekijken eerst een schaatser met een dijbeenlengte van 48 cm en een scheenbeenlengte van 42 cm.

Op een bepaald moment geldt voor deze schaatser:

$$HE = 69 \text{ cm en } \alpha = 100^\circ.$$

- Bereken $\angle HEK$ in graden nauwkeurig.
- Op het moment van de afzet geldt voor deze schaatser: $HE = 88$ cm.

Bereken de kniehoek α op het moment van de afzet. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

De snelheid waarmee HE verandert, bepaalt mede de snelheid van de schaatser. Bij het schaatsen op een schaats met vaste ijzers kan het been bij de afzet niet volledig gestrekt worden.

Bij het schaatsen op een klapschaats is het wel mogelijk het been bij de afzet geheel te strekken. Hierbij neemt de kniehoek in 0,70 seconden toe van 100° tot 180° .

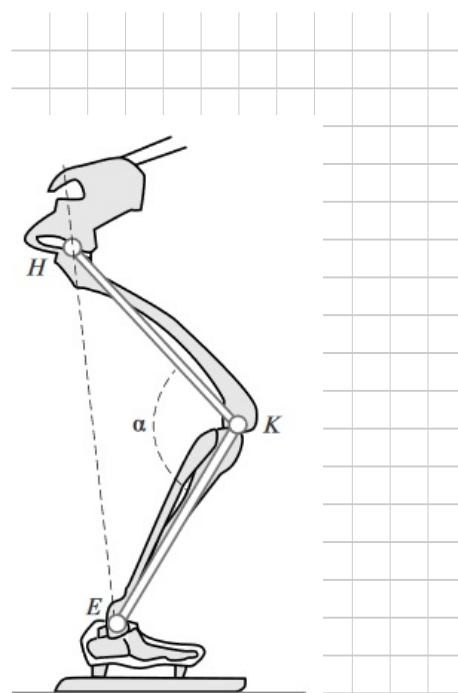
Voor een bepaalde schaatser op klapschaatsen geldt:

$$HE = \sqrt{3625 - 3600 \cos \alpha}.$$

Hierbij is α in graden en HE in cm.

- Bereken de gemiddelde snelheid waarmee bij deze schaatser op klapschaatsen HE verandert als α toeneemt van 100° tot 180° . Geef je antwoord in een geheel aantal cm per seconde.

(bron: pilotexamen havo B in 2012, eerste tijdvak)



Figuur 5.4



Figuur 5.5

a

aangrijpingspunt 56

c

component 56

component van een vector
64

cosinusregel 77

e

eenheidscirkel 64

eigenschappen van machten,
rekenregels voor machten
24

exponent 8

exponentiële functie 31

exponentiële groei 8

exponentiële ongelijkheden
31

exponentiële vergelijkingen
31

g

gebroken exponenten 17

groeifactor 8

grondtal 8

h

horizontale asymptoot 39

k

kwadrant 64

l

lengte 56

m

macht 8

n

negatieve exponenten 17

r

rekenregels voor machten 8

richtingshoek 56, 64

s

sinusregel 71

v

vector 56

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 4

7. Exponentiële functies

8. Vectoren en goniometrie



www.math4all.nl

