

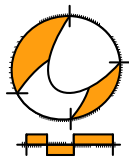
Wiskunde B

4 HAVO

Katern 3

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Veranderingen 5

- 1.1 In grafieken 6
- 1.2 Veranderingen per stap 13
- 1.3 Differentiequotiënt 22
- 1.4 Differentiaalquotiënt 29
- 1.5 Hellingsgrafiek 38
- 1.6 Totaalbeeld 49

2 Analytische meetkunde 57

- 2.1 Coördinaten in het vlak 58
- 2.2 Lijnen 66
- 2.3 Cirkels 73
- 2.4 Snijden 80
- 2.5 Hoeken 88
- 2.6 Totaalbeeld 95

Register 99

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Veranderingen

1.1	In grafieken	6
1.2	Veranderingen per stap	13
1.3	Differentiequotiënt	22
1.4	Differentiaalquotiënt	29
1.5	Hellingsgrafiek	38
1.6	Totaalbeeld	49

1.1 In grafieken

Inleiding

In de Delta Nederland verandert de waterstand voortdurend. De veranderingen worden beschreven met eb, laagwater, vloed en hoogwater. Tussen hoogwater en laagwater daalt het water. Maar stijging en daling zijn niet constant: vlak voor hoogwater neemt de stijging langzaam af en na hoogwater neemt de daling een paar uur lang toe.

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen stijgend en dalend en constant gebruiken bij grafieken;
- toenemende, afnemende en constante stijging en daling herkennen;
- (lokale) maxima en minima van een grafiek bepalen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Zoek via [deze website van Rijkswaterstaat](#) een grafiek van de waterstand bijvoorbeeld bij Vlissingen. Gebruik de kaart.

- Herken je stijging en daling in de grafiek? Kun je soorten stijging en daling beschrijven?
- Wanneer stijgt het water het snelst?
- Hoe zit het met de stijging van het water bij 'hoog water'?

Uitleg

Deze grafiek geeft de temperatuur T (in $^{\circ}\text{C}$) op een bepaalde plaats weer afhankelijk van het tijdstip t (in uren) op de dag.

De temperatuur stijgt vanaf $t = 4$ tot aan $t = 15,5$, want als t toeneemt vanaf 4 tot 15,5, wordt ook T groter. Je zegt dan dat de grafiek stijgend is op het interval $\langle 4; 15,5 \rangle$.

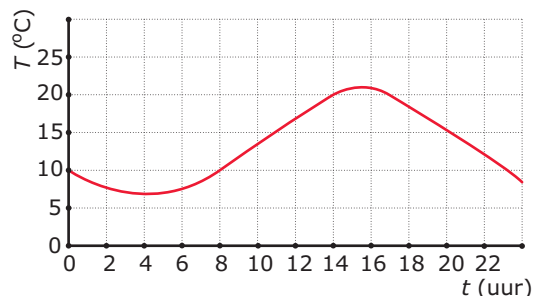
De temperatuur daalt vanaf $t = 15,5$ tot aan $t = 24$, want als t toeneemt vanaf 15,5 tot 24, wordt T juist kleiner. Je zegt dan dat de grafiek dalend is op het interval $\langle 15,5; 24 \rangle$.

De temperatuur is nergens constant, hoewel hij tussen 14 uur en 17 uur maar weinig verandert.

Als je de stijging op het interval $\langle 4; 15,5 \rangle$ nauwkeuriger bekijkt zie je dat hij op het interval $\langle 4; 8 \rangle$ steeds groter wordt; de grafiek wordt steiler. Er is op dat interval sprake van toenemende stijging. Op het interval $\langle 8; 14 \rangle$ daarentegen is er een constante stijging; de grafiek



Figuur 1.1



Figuur 1.2

blijft daar voortdurend even steil. Op het interval $\langle 14; 15,5 \rangle$ wordt de stijging steeds minder, het gaat nu om afnemende stijging. Ga zelf na dat de grafiek op het interval $\langle 0,4 \rangle$ een afnemende daling vertoont. En op het interval $\langle 17,23 \rangle$ is er een vrijwel constante daling.

De hoogste dagtemperatuur is 21°C . Dit is het maximum van T en het wordt bereikt op $t = 15,5$. De laagste dagtemperatuur is 7°C . Dit is het minimum van T en het wordt bereikt op $t = 4$.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de dagtemperatuur in de [Uitleg](#).

- Als de grafiek stijgt, neemt T dan toe of juist af?
- Als de grafiek toenemend stijgt, wat gebeurt er dan met T ?
- Wat betekent voor de grafiek het verschil tussen een toenemende daling en een afnemende daling? En wat betekent dit voor de temperatuur T ?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een functie is:

- **stijgend** als de y -waarden groter worden bij groter wordende x ;
- **dalend** als de y -waarden kleiner worden bij groter wordende x .

Verder heeft de functie:

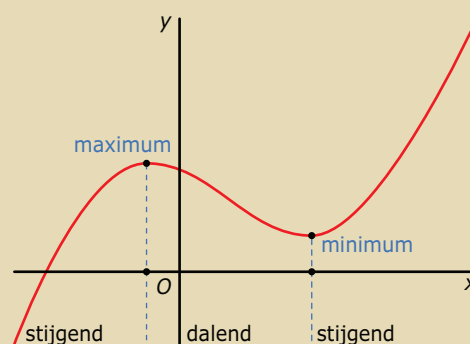
- een **maximum** als hij overgaat van stijgend in dalend in een aaneengesloten grafiek;
- een **minimum** als hij overgaat van dalend in stijgend in een aaneengesloten grafiek.

Deze waarden noem je de **extremen**, ook wel de **uiterste waarden** van de functie.

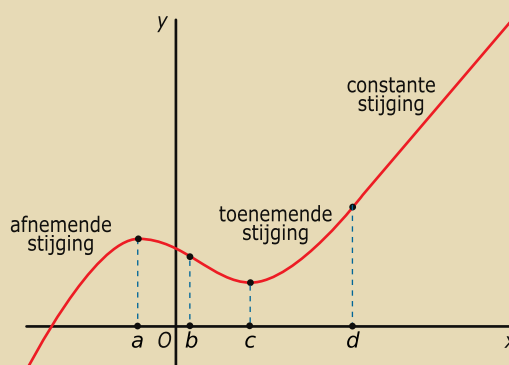
Om aan te geven voor welke waarden van x van een bepaalde soort stijging of daling sprake is, gebruik je **intervallen**.

Deze grafiek heeft een:

- **afnemende stijging** op het interval $\langle \leftarrow, a \rangle$, omdat de stijging daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende daling** op het interval $\langle a, b \rangle$, omdat de daling daar steeds sterker wordt;
- **afnemende daling** op het interval $\langle b, c \rangle$, omdat de daling daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende stijging** op het interval $\langle c, d \rangle$, omdat de stijging daar steeds sterker wordt;
- **constante stijging** op het interval $\langle d, \rightarrow \rangle$, omdat de stijging daar steeds even sterk blijft, de grafiek is daar een rechte lijn.



Figuur 1.3



Figuur 1.4

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek van functie $y = f(x)$ op het interval $[0,6]$.

Beschrijf de veranderingen in deze grafiek.

Antwoord

De veranderingen in deze grafiek kun je van links naar rechts als volgt beschrijven:

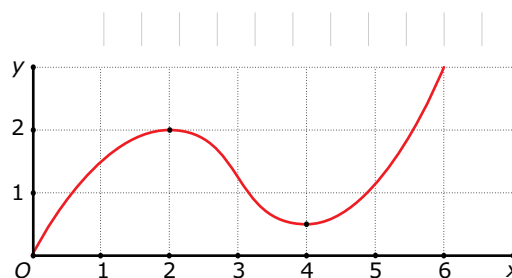
- De grafiek is afnemend stijgend op het interval $\langle 0,2 \rangle$.
- De grafiek is toenemend dalend op het interval $\langle 2,3 \rangle$.
- De grafiek is afnemend dalend op het interval $\langle 3,4 \rangle$.
- De grafiek is toenemend stijgend op het interval $\langle 4,6 \rangle$.

Verder heeft de functie:

- een maximum(waarde) van 2 voor $x = 2$: $\max. f(2) = 2$;
- een minimum(waarde) van 0,6 voor $x = 4$: $\min. f(4) = 0,6$.

Dit zijn de extremen (uiterste waarden) van de functie.

Opmerking: Dat er een minimum is bij $x = 4$, wil niet zeggen dat y niet lager kan zijn. Je ziet dat bijvoorbeeld bij $x = 0$ de y -waarde lager is. Het minimum is een lokaal (plaatselijk) minimum, net als het maximum.

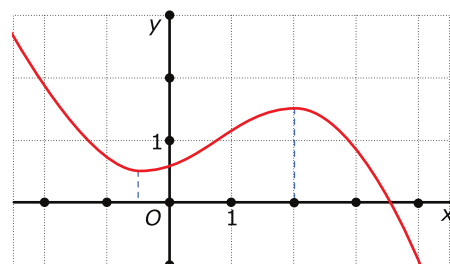


Figuur 1.5

Opgave 2

Bekijk de grafiek van f .

- Beschrijf met intervallen de verandering van de grafiek.
- Schrijf het maximum en het minimum van de functie op.



Figuur 1.6

Voorbeeld 2

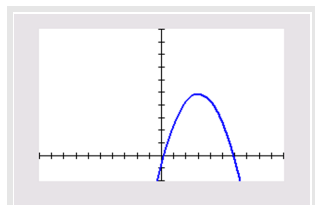
Gegeven is de functie f met functievoorschrift $f(x) = -5 + 36x - 6x^2$.

Beschrijf het verloop van de grafiek.

Antwoord

Breng eerst de grafiek in beeld, bijvoorbeeld met de grafische rekenmachine.

```
WINDOW
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-20
Ymax=100
Yscl=10
Xres=1
ΔX=.07575757575757
TraceStep=.15151515151515
```



Figuur 1.7

De grafiek heeft een maximum van 49 bij $x = 3$. De grafiek gaat dus over van stijgend naar dalend. Aan de grafiek zie je meteen wat voor soort stijging en daling je te maken hebt.

De grafiek is afnemend stijgend op het interval $\langle -, 3 \rangle$ en toenemend dalend op het interval $\langle 3, \rightarrow \rangle$.

Opgave 3

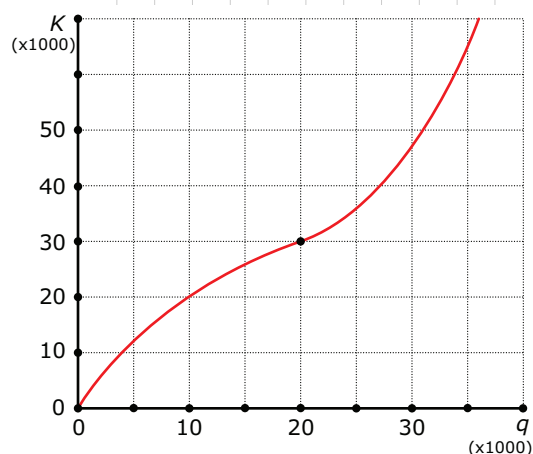
Gegeven is de kwadratische functie f met voorschrift $f(x) = -x^2 + 6x$. De grafiek van zo'n functie is een parabool.

- Met de grafische rekenmachine kun je de parabool bekijken. Op welk interval is de grafiek stijgend?
- Om welk soort stijging gaat het bij a?
- Is er in de grafiek sprake van toenemende of afnemende daling?
- Elke parabool heeft een top. Daarbij hoort een minimum of een maximum. Welke extreme waarde heeft deze functie?

Voorbeeld 3

Bij de productie van een bepaald artikel stijgen de kosten K met een toename van het geproduceerde aantal producten q . Die kostenstijging neemt echter af omdat de productielijn steeds efficiënter wordt ingezet. Wanneer er 20000 artikelen worden gemaakt, zijn de kosten € 30000,00. Om nog meer producten te kunnen maken, moet de productielijn worden aangepast en de kosten stijgen dan harder. Je ziet een schets van een bijpassende grafiek.

Op de horizontale as komt het aantal producten q , op de verticale as de kosten K , omdat de kosten afhangen van het aantal geproduceerde artikelen. De grafiek begint in $(0,0)$ met sterke stijging die vrij snel afvlakt. Dat gaat zo door tot het punt met $q = 20000$ en $K = 30000$. Daarna stijgt de grafiek steeds sterker.



Figuur 1.8

Opgave 4

Van een functie is gegeven dat:

- de grafiek constant stijgt tot $x = 2$;
- de grafiek constant is van $x = 2$ tot $x = 3$;
- de grafiek toenemend daalt van $x = 3$ tot $x = 4$ en dan afnemend daalt tot $x = 5$;
- de grafiek toenemend stijgt vanaf $x = 5$.

Maak een schets van de grafiek van deze functie en leg uit bij welke waarde van x de functie een extreme waarde moet hebben.

Opgave 5

Je gebruikt nu steeds een grafiek om de veranderingen en de extremen van een functie te bepalen. Waarom kun je op deze manier nooit zeker zijn of je wel alle veranderingen en extremen hebt gevonden?

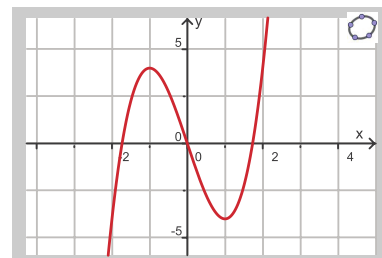
Verwerken

Opgave 6

Bekijk deze grafiek gemaakt met GeoGebra.

Geef voor deze functie aan:

- op welke intervallen de grafiek daalt dan wel stijgt en om welk soort stijging of daling het daarbij gaat;
- welke extremen er zijn;
- voor welke waarden van x de stijging het sterkst is.



Figuur 1.9

Opgave 7

Gegeven is een functie met voorschrift $f(x) = x^3 - 3x$. Bekijk deze functie met de grafische rekenmachine.

- Beschrijf met intervallen het verloop van de grafiek van f .
- Welke extremen heeft f ?
- Waarom kun je niet aangeven waar de snelheid van stijgen het grootst is?

Opgave 8

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 0,5x^4 - 4x^2 + 8$.

- Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van deze functie bekijken. Welke extremen heeft deze functie?
- Op hoeveel intervallen is bij de grafiek van f sprake van toeneemende daling?
- Geef het bereik van f .

Opgave 9

Sofie rijdt met de auto naar de supermarkt. De eerste 7 seconden trekt ze eerst rustig maar daarna snel op, daarna rijdt ze 15 seconden met een constante snelheid om vervolgens 10 seconden lang geleidelijk af te remmen, totdat ze stil staat voor een stoplicht. Ze staat daar 30 seconden stil. Als het stoplicht op groen springt, trekt Sofie geleidelijk op en na 8 seconden rijdt ze weer met een constante snelheid, totdat ze na 2 minuten bij de supermarkt is aangekomen en in 12 seconden geleidelijk afremt totdat ze stil staat.

Beschrijf met intervallen de soorten stijging en daling van de snelheid die optreden gedurende de route die Sofie naar de supermarkt aflegt.

Opgave 10

Voor de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ op een bepaalde dag geldt:

- om 6:00 uur 's morgens ($t = 6$) is de temperatuur $T = 2^{\circ}\text{C}$;
- de grafiek toenemend stijgt van $t = 6$ tot $t = 12$;
- de grafiek afnemend stijgt van 12:00 uur tot 14:30 uur en dan toenemend daalt tot $t = 20$;
- de grafiek afnemend daalt van $t = 20$ tot aan het eind van de dag.

Maak een schets van een mogelijke grafiek van deze functie en leg uit bij welke waarde van t de functie T een uiterste waarde moet hebben.

Toepassen

Opgave 11: Winstformule

Voor een klus maakt een bedrijf gebruik van de volgende winstformule $W = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2$, waarbij W de winst in honderden euro's is en x het aantal werknemers dat het bedrijf voor de klus gebruikt.

- a Bij welk aantal werknemers is er maximale winst?

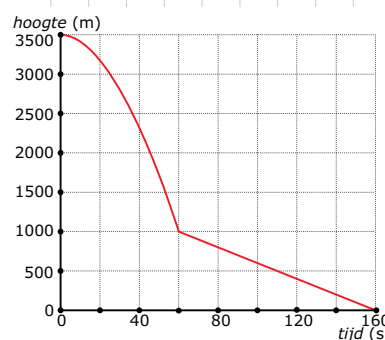
Voor het bepalen van hoeveel werknemers het bedrijf moet inzetten, wordt er gekeken naar de extra winst per werknemer. Zo is de extra winst van de zesde werknemer $W(6) - W(5)$. De extra winst per werknemer wordt ook wel de marginale winst genoemd. Het bedrijf zorgt er voor dat er zoveel werknemers gebruikt worden dat de marginale winst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

- b Hoeveel werknemers moet men dan voor de klus inzetten?
- c Het antwoord van b wijkt af van dat van a. Toch kan het voor het bedrijf beter zijn, om naar de extra winst te kijken zoals bij b is gedaan. Waarom?

Opgave 12: Parachutist

Je ziet de grafiek die hoort bij een parachutesprong vanaf 3500 meter hoogte. Eerst maakt de parachutist een vrije val en daarna opent hij zijn parachute.

- a Na hoeveel seconden heeft deze parachutist zijn valscherf geopend? Hoe zie je dat aan de grafiek?
- b In de periode van vrije val is de grafiek toenemend dalend. Wat betekent dit voor de valsnelheid?
- c Als de parachute uit is, is de valsnelheid constant. Hoe zie je dat aan de grafiek? Hoe groot is de valsnelheid als de parachute uitgevouwen is?



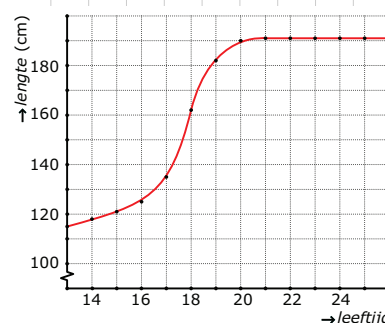
Figuur 1.10

Testen

Opgave 13

Bekijk de grafiek van de lengte van een man vanaf zijn veertiende levensjaar tot zijn huidige leeftijd.

- a Gedurende welk levensjaar groeit hij het snelst? Hoeveel centimeter groeit hij dat jaar?
- b Gedurende welke periode is de grafiek stijgend?
- c Gedurende welke periode is er sprake van een afnemende stijging?
- d Gedurende welke periode is zijn lengte constant?
- e Gedurende welke perioden is de groeisnelheid constant? Hoe zie je dat aan de grafiek?

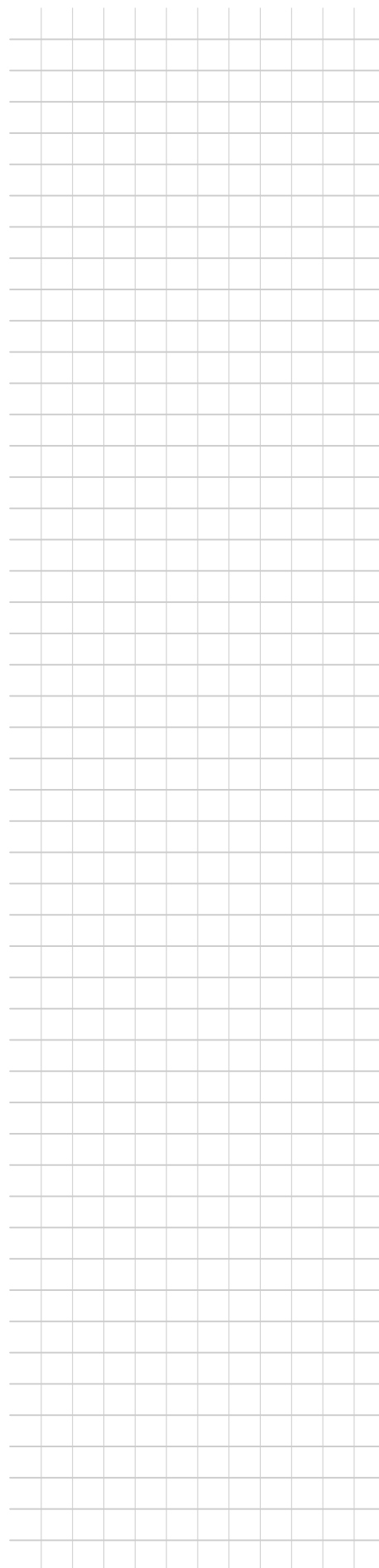


Figuur 1.11

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = -0,5x^4 + 4x^2$ op het interval $[-4,4]$.

- a** Op welke intervallen daalt de grafiek?
- b** Op hoeveel intervallen is de grafiek afnemend stijgend?
- c** Geef alle extremen van deze functie.



1.2 Veranderingen per stap

Inleiding

Om veranderingen van grafieken nauwkeurig te beschrijven kijk je naar de toenames (of afnames) van de uitkomsten bij toename van de invoerwaarden met een vaste stapgrootte. Bijvoorbeeld bij een functie $y = f(x)$ bekijk je de toename van y bij een toename van x met een vaste stapgrootte. Je maakt van die toenames een toenamediagram.

Je leert in dit onderwerp

- een toenamediagram maken bij een gegeven grafiek of een gegeven functievoorschrift;
- vanuit een gegeven toenamediagram (en 'beginwaarde') een mogelijke grafiek van de functie samenstellen of bepalen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, afnemende of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen.

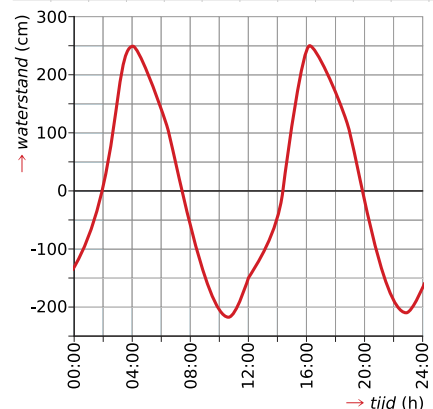
Verkennen

Opgave V1

Je ziet een grafiek met het verloop van het niveau van zeewater over een dag. De hoogte wordt gemeten in meter ten opzichte van een afgesproken hoogte in Amsterdam, het Normaal Amsterdams Peil of NAP.

Om nauwkeuriger zicht te krijgen op de veranderingen van de waterstand, kun je ook een staafdiagram maken van de veranderingen per uur.

- Maak zo'n staafdiagram voor de periode van middernacht tot twee uur 's middags.
- Hoe kun je aan het staafdiagram zien of het water stijgt of daalt?
- Hoe kun je aan dat staafdiagram zien wanneer het water snel stijgt?
- In de Westerschelde moet je goed weten waar je wel en waar je niet kunt varen. Wat heb je dan aan het diagram met veranderingen van de waterstand?



Figuur 2.1

Uitleg

De grafiek geeft de gemiddelde dagtemperatuur T op een bepaalde plaats weer (in $^{\circ}\text{C}$) afhankelijk van het tijdstip t (in uren) op die dag.

De grafiek begint op $t = 0$ met een temperatuur van 10°C . Na 2 uur is die temperatuur gezakt tot ongeveer 8°C . De temperatuur neemt dus af met 2°C . Er is sprake van een toename van -2°C .

Weer twee uur later is de temperatuur nog een graad gezakt: bij $t = 4$ is er van een toename van -1°C ten opzichte van de temperatuur bij $t = 2$.

En zo kun je doorgaan met het bepalen van de toenames (of afnames) in stappen van 2 uur. Je doorloopt de tijd met een stapgrootte van 2 uur en je maakt een tabel van de toenames:

t (uur)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
ΔT		-2	-1	1	2	3	3,5	3,5	1	-3	-3	-3,5	-3,5

Tabel 2.1

Onder ΔT versta je de toename van de temperatuur T . Deze tabel kun je weergeven in een diagram. Als de toename negatief is, teken je een staafje naar beneden en als die positief is naar boven. Zo'n diagram noem je een toenamediagram.

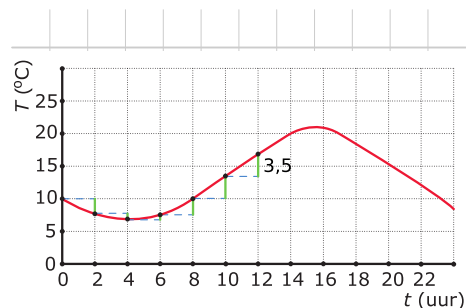
In het toenamediagram zie je:

- waar de grafiek stijgend is, de toenames positief zijn (echte toenames);
- waar de grafiek dalend is, de toenames negatief zijn (afnames);
- waar de toenames steeds groter worden, is de stijging toenevend, enzovoort.

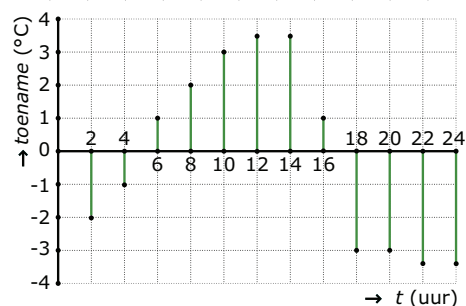
Opgave 1

Bekijk de grafiek van de gemiddelde dagtemperatuur in de uitleg.

- Maak een tabel met toenames vanaf $t = 0$ met een stapgrootte van $\Delta t = 3$.
- Teken nu het bijbehorende toenamediagram van de temperatuurgrafiek met een stapgrootte van $\Delta t = 3$.



Figuur 2.2



Figuur 2.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: toenamediagram

Bekijk deze grafiek op het interval: $[-2, 4]$.

Als je de waarden van x met een vaste **stapgrootte** laat toenemen, kun je daarbij een tabel maken met de toenames Δy van de functiewaarden.

Als je als stapgrootte 1 neemt, dan ziet die tabel er zo uit:

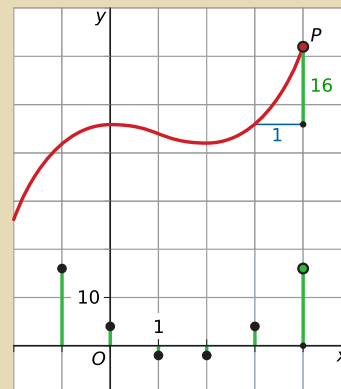
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	26	42	46	44	42	46	62
Δy		16	4	-2	-2	4	16

Tabel 2.2

Je ziet het bijbehorende **toenamediagram** in groen in de figuur.

De hoogte van het staafje bij $x = 3$ is bijvoorbeeld $\Delta y = y(3) - y(2) = 46 - 42 = 4$. Dus het staafje bij $x = 3$ wordt 4 hoog. Bij een negatieve toename teken je het staafje naar beneden, bij $x = 1$ bijvoorbeeld eken je het staafje 2 naar beneden.

Als je het functievoorschrift weet, kun je de grafische rekenmachine gebruiken om een toenametabel te maken. Je voert dan $y_1 = f(x)$ en $y_2 = y_1(x) - y_1(x - 1)$ in, waarin f de gegeven functie is. Als je nu met de grafische rekenmachine een tabel met stapgrootte 1 maakt, krijg je de toenametabel. Een toenamediagram kan de rekenmachine niet maken.



Figuur 2.4

Voorbeeld 1

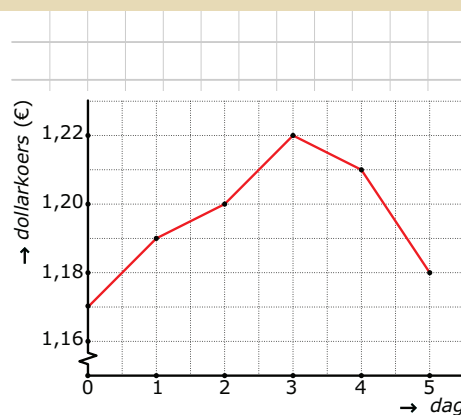
Bekijk de grafiek van het verloop van de koers van de dollar gedurende vijf dagen. Op dag 1 was een euro in dollars 1,19 waard. Maak er een toenamediagram bij met stapgrootte 1 dag.

Antwoord

Maak eerst een tabel met de toenames:

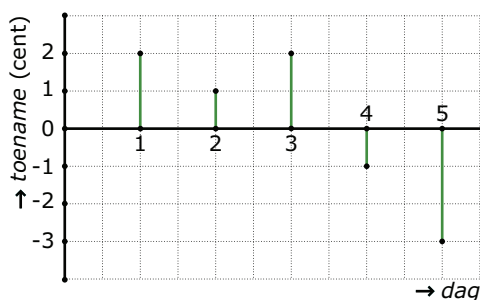
dag	0	1	2	3	4	5
toename (cent)	-	2	1	2	-1	-3

Tabel 2.3



Figuur 2.5

Zet vervolgens deze toenames verticaal in een diagram uit:



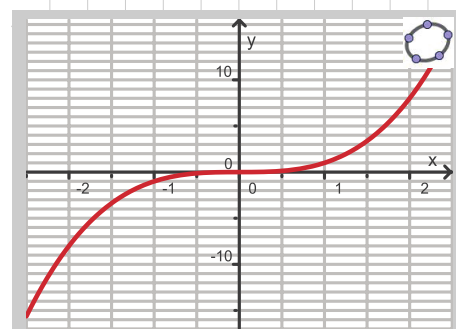
Figuur 2.6

Opgave 2

Bekijk de grafiek gemaakt met GeoGebra.

Je laat de waarden van x oplopen met een stapgrootte 1. De bijbehorende verandering van de functiewaarden kun je in een tabel zetten.

- Maak een toenametabel die begint bij $x = -2$.
- Teken het bijpassende toenamediagram.



Figuur 2.7

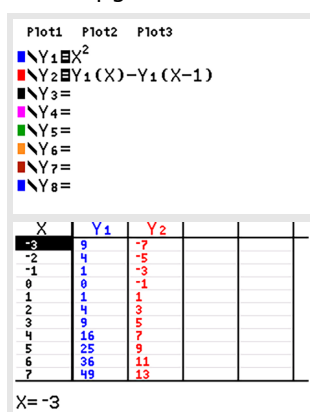
Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Gegeven is de functie met voorschrift $y = x^2$ op het interval $[-3, 3]$. Maak een toenamediagram bij deze functie met stapgrootte 1.

Antwoord

Je kunt met de grafische rekenmachine een toenametabel maken bij een stapgrootte 1.

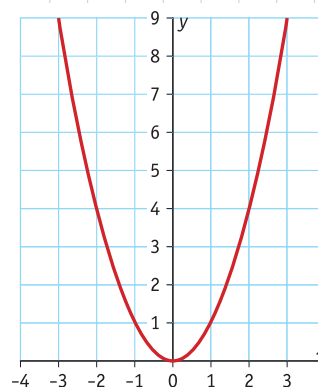


Figuur 2.9

Opgave 3

Teken zelf het toenamediagram bij de functie uit **Voorbeeld 2**.

Neem een stapgrootte van $\Delta x = 0,5$ en gebruik je grafische rekenmachine.



Figuur 2.8

Opgave 4

Maak op de grafische rekenmachine de grafiek van de functie van f met voorschrift $f(x) = -x^3 + 6x$ op het interval $[-3, 3]$.

- Maak een toenametabel met stapgrootte 1 die begint bij $x = -3$.
- Wat weet je op grond van alleen de toenametabel van het maximum van deze functie?
 - Het maximum ligt tussen $x = 0$ en $x = 1$, want bij die waarden horen dezelfde toenames.
 - Het maximum ligt tussen $x = 0$ en $x = 1$, want bij die waarden horen de grootste toenames.
 - Het maximum ligt bij $x = 1,5$, want precies daar gaan de toenames over in afnemen.
 - Het maximum ligt tussen $x = 1$ en $x = 2$, daar gaan de toenames over van positief in negatief.
- Teken het bijpassende toenamediaagram.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Uit een toenamediaagram kun je de grafiek van de functie weer samenstellen. Je moet daarvoor wel een punt van die grafiek weten, anders weet je niet waar je moet beginnen.

Bekijk het toenamediaagram met stapgrootte 0,5.

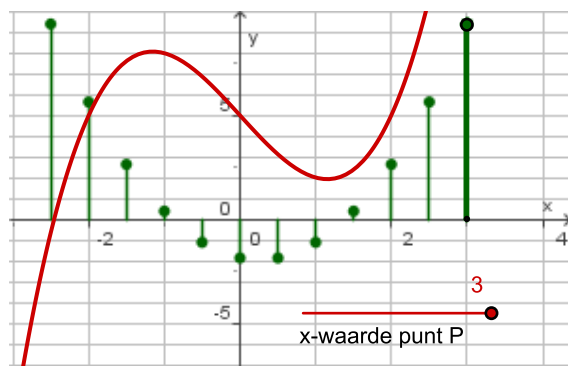
Stel dat de grafiek door het punt $P(0, 10)$ gaat.

Je kunt ook vanuit het toenamediaagram een tabel maken:

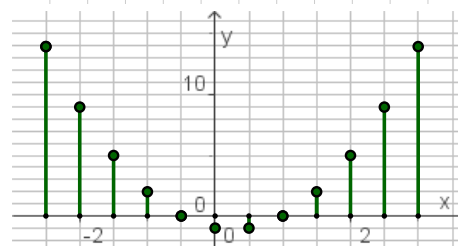
x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
Δy	5	2	0	-1	-1	0	2	5
y	9	11	11	10	9	9	11	16

Tabel 2.4

Daarmee kun je de grafiek tekenen. Kijk goed hoe je de y -waarden kunt vinden van punten die x -waarden links van 0 hebben.



Figuur 2.11



Figuur 2.10

Opgave 5

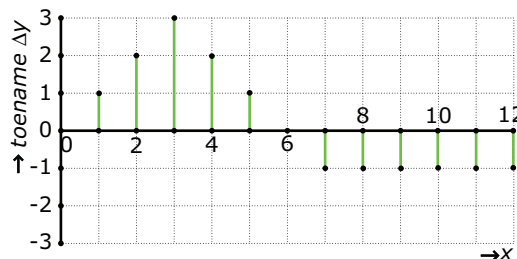
Bekijk het toenamediagram van functie f in **Voorbeeld 3**.

Maak de tabel naar beide zijden af. Schets een mogelijke grafiek van f op het interval $[-3,3]$.

Opgave 6

Bekijk het toenamediagram van de grafiek van een functie f waarvoor geldt: $f(0) = 4$.

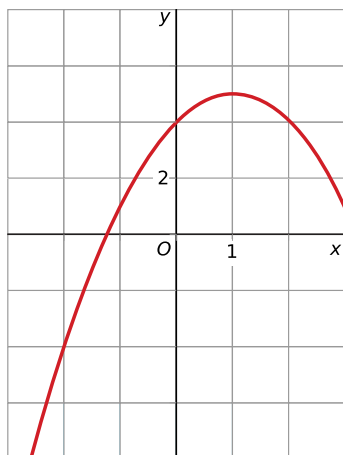
- Maak een grafiek van de functie f .
- Je kunt dus een mogelijke grafiek van f tekenen. Waarom zijn er meerdere mogelijkheden voor de grafiek van de functie van f bij een toenamediagram? Kies uit:
 - Het toenamediagram is te onduidelijk om functiewaarden nauwkeurig uit af te lezen.
 - Omdat je niet weet hoe de functie verloopt tussen de waarden in de tabel.
 - Er zijn meerdere toenametabellen mogelijk bij dit toenamediagram.



Figuur 2.12

Verwerken

Opgave 7



Figuur 2.13

Teken bij de grafiek een toenamediagram met stapgrootte 1, te beginnen bij $x = -1$.

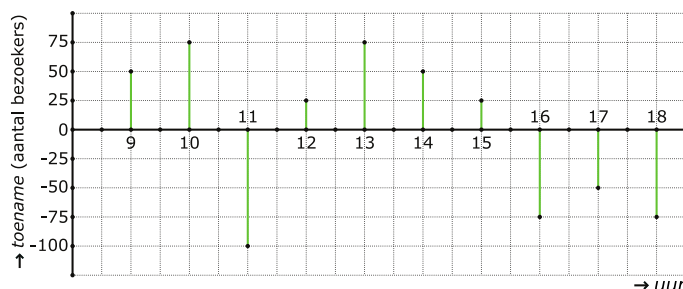
Opgave 8

Gegeven is de functie f met voorschrift: $f(x) = 0,5x^4 - 4x^2 + 8$.

- Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van deze functie bekijken en een toenametabel maken. Teken een toenamediagram op het interval $[-3,3]$ met een stapgrootte van 0,5.
- Hoe zie je aan het toenamediagram dat er precies één interval is waarop de grafiek toenemend daalt?
- Waarom kun je op grond van het toenamediagram concluderen dat er waarschijnlijk drie extremen zijn?

Opgave 9

In een museum is vanaf de opening om 8:00 uur 's morgens tot de sluitingstijd om 18:00 uur elk uur het aantal bezoekers geteld. Van deze gegevens is een toenamediagram gemaakt. Om 12:00 uur waren er 50 bezoekers.



Figuur 2.14

- Maak een grafiek van het totaal aantal bezoekers afhankelijk van het uur van deze dag, van 8:00 uur tot 18:00 uur.
- Rond welk tijdstip waren er waarschijnlijk de meeste bezoekers in het museum?
- Kun je vaststellen hoeveel bezoekers er maximaal in het museum waren op enig moment die dag? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Biologen houden het verloop van de aantallen van een bepaald soort vlinder bij in een afgesloten natuurgebied. De tabel geeft de verzamelde informatie weer:

Jaartal	2010	2011	2012	2013	2014
Aantal vlinders	2450	2050	1810	1665	1580
Verskil V t.o.v. vorig jaar		-400	-240	-145	-85

Tabel 2.5

Het lijkt erop dat het verschil V ten opzichte van het voorgaande jaar exponentieel verandert met de tijd t in jaren. Er lijkt te gelden: $V = -400 \cdot 0,6^{t-1}$ met $t = 0$ in het jaar 2010.

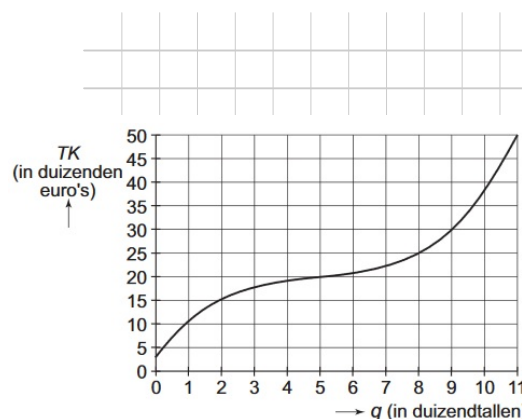
- Ga na of deze formule in overeenstemming is met de gevonden verschillen.
- Ga er vanuit dat deze formule geldig blijft in de jaren na 2014. Teken een toenamediagram van het aantal vlinders in dit natuurgebied met een stapgrootte van 1 jaar.
- Maak ook een grafiek van het aantal vlinders N in de loop van de jaren.
- Van wat voor soort daling is er sprake bij het aantal vlinders? Hoe kun je dat aan het toenamediagram zien?
- Het aantal vlinders van deze soort lijkt zich in dit natuurgebied te stabiliseren. Hoe kun je dat aan het toenamediagram zien? En wat betekent dit voor de grafiek van het aantal vlinders?

Toepassen

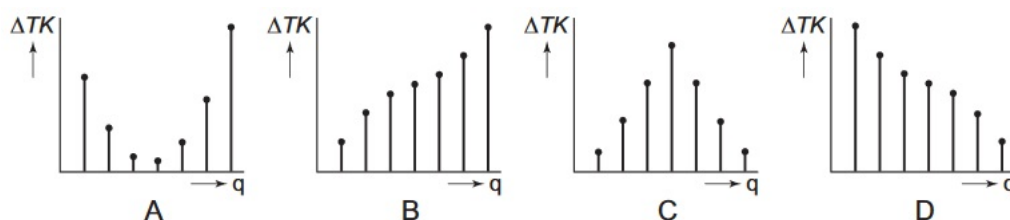
Opgave 11: Verpakkingen produceren

Een bedrijf maakt bijzondere verpakkingen. Het bedrijf heeft onderzocht hoe de kosten voor het maken van die verpakkingen samenhangen met het aantal verpakkingen. Het verband tussen de totale kosten TK (in duizenden euro's) en het aantal geproduceerde verpakkingen q (in duizendtallen) zie je in de figuur. Daaruit lees je bijvoorbeeld af dat bij een productie van 2000 verpakkingen de totale kosten € 15000,00 zijn.

In de diagrammen A, B, C en D, is de toename ΔTK van TK weergegeven. Eén van de vier diagrammen past bij de grafiek.



Figuur 2.15



Figuur 2.16

- Welk toenamediagram past bij de grafiek? Licht je antwoord toe.
 - diagram A
 - diagram B
 - diagram C
 - diagram D
- Met hoeveel procent stijgen de totale kosten als de productie van 4000 naar 8000 verpakkingen gaat?

(naar: examen havo A in 2006, eerste tijdvak)

Opgave 12: Model voor een chemische ramp

Onderzoekers hebben een model ontwikkeld voor een ramp met een chemische fabriek bij een middelgrote stad. In dit model wordt het aantal personen dat last heeft van ongemakken zoals buikloop, duizeligheid en hoofdpijn, voorgesteld door het functievoorschrift: $n(t) = -4(40 - t)^3 + 150(40 - t)^2 + 16000$.

Hierbij stelt t het aantal dagen na het plaatsvinden van de ramp voor en $n(t)$ het bijbehorend aantal slachtoffers.

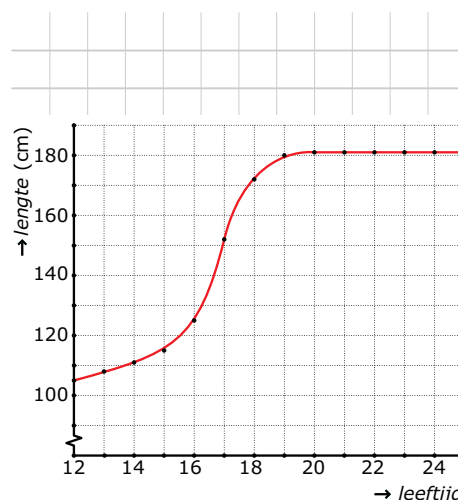
- Plot de grafiek van n . Laat t lopen van 0 tot 40.
- Geef met intervallen aan welke soorten verandering je in de grafiek ziet.
- Na hoeveel dagen is er een maximaal aantal slachtoffers?
- De gevolgen van het ongeval zijn over het hoogtepunt heen als de toename van het aantal slachtoffers in vergelijking met twee dagen daarvoor kleiner is dan 1500. Na hoeveel dagen is dat het geval?

Testen

Opgave 13

Je ziet hier de grafiek van de lengte van een man vanaf zijn 12de levensjaar tot zijn huidige leeftijd.

- Maak bij deze grafiek een toenamediagram met een stapgrootte van 1 jaar.
- Hoe kun je aan het toenamediagram zien dat de grafiek nooit daalt?
- Waarom mag je op grond van het toenamediagram alleen niet de conclusie trekken dat de grafiek nooit daalt?
- Gedurende welke periode is zijn lengte constant? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?
- Gedurende welke perioden is de groeisnelheid constant? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?



Figuur 2.17

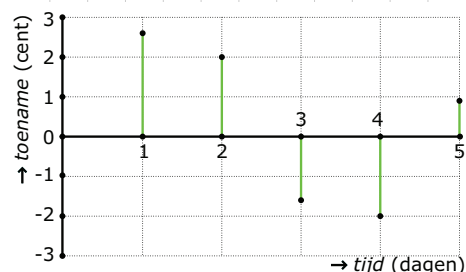
Opgave 14

Bekijk met de grafische rekenmachine de grafiek van de functie $f(x) = -0,5x^4 + 4x^2$ op het interval $[-3,3]$.

- Teken een toenamediagram met een stapgrootte van 0,5.
- Hoe zie je aan het toenamediagram dat er precies één interval is waarop de grafiek van f afnemend daalt?
- Hoe kun je in het toenamediagram de plaats van de extremen van de functie terugvinden?

Opgave 15

De Amerikaanse dollar stond op een dinsdag op een koers van 1,22 ten opzichte van de euro. Het toenamediagram heeft betrekking op een week van zondag tot en met vrijdag. In het diagram zie je de toename of afname van de koers per dag in tienden van centen nauwkeurig. Teken een grafiek waarin de koers van de dollar in de loop van die week zichtbaar is.



Figuur 2.18

1.3 Differentiequotiënt

Inleiding

Je hebt veranderingen in grafieken leren beschrijven in woorden en met toenamediagrammen. Bij toenamediagrammen moet je met een vaste stapgrootte werken. Maar als je wilt nagaan of een wielrenner de eerste 10 minuten gemiddeld net zoveel heeft afgelegd als de volgende 15 minuten, heb je met ongelijke intervallen te doen. In dat geval werk je met gemiddelde veranderingen.

Je leert in dit onderwerp

- wat het differentiequotiënt is (gemiddelde verandering of gemiddelde snelheid);
- het differentiequotiënt met behulp van een grafiek of tabel uitrekenen;
- het differentiequotiënt van een formule op een interval berekenen;
- werken met toepassingen van het differentiequotiënt.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- werken met toenamediagrammen.

Verkennen

Opgave V1

Bij een wielrenner in een tijdrut worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel:

<i>tijd (min)</i>	0	10	18	34	44	60	78	94
<i>afstand (km)</i>	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 3.1

- a Is hij de eerste 8 km gemiddeld sneller of langzamer dan in de volgende 4 km? Waaraan zie je dat?
- b Waarom is er bij deze situatie eigenlijk geen toenamediagram te maken?

Je maakt bij deze tabel een grafiek door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd, op de verticale as de afgelegde afstand. Niet alle lijnstukken zijn even steil.

- c Hoe kun je de helling van zo'n lijnstuk in een getal uitdrukken?
- d Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de periode van 12 kilometer tot en met 18 kilometer.
- e Wat betekent het getal dat je zojuist hebt gevonden voor de wielrenner?



Figuur 3.1

Uitleg

Als een zeilwagen start en de windkracht constant is, dan neemt zijn snelheid toe. Veronderstel dat voor de afgelegde afstand s (in meter) geldt: $s(t) = 1,2 \cdot t^2$. Hierin is t de tijd in seconden. Bekijk de grafiek.

Na 2 seconden is de afgelegde afstand $s(2) = 4,8$ m.

Na 6 seconden is de afgelegde afstand $s(6) = 43,2$ m.

In die 4 seconden is er $s(6) - s(2) = 43,2 - 4,8 = 38,4$ m afgelegd.

De gemiddelde snelheid is: $\frac{38,4}{4} = 9,6$ m/s.

Je berekent de gemiddelde snelheid, ofwel de gemiddelde verandering van plaats, door het verschil in afstand te delen door het verschil in tijd:

$$\text{gemiddelde snelheid} = \frac{\Delta \text{afstand}}{\Delta \text{tijd}}.$$

Het teken Δ (een Griekse letter D) staat voor differentie, wat verschil betekent. Dit getal is de helling van het lijnstuk tussen de punten die horen bij $t = 1$ seconde en bij $t = 4$ seconden.

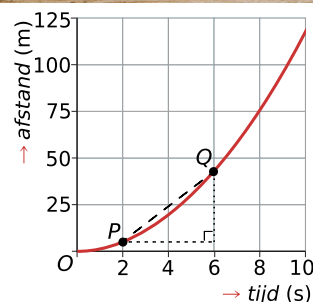
Op het interval $[2,6]$ verandert $s(t)$ gemiddeld met:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(6) - s(2)}{6 - 2} = \frac{38,4}{4} = 9,6 \text{ m/s}.$$

Dit heet een differentiequotiënt ('differentie' is 'verschil' en een quotiënt is de uitkomst van een deling).

De gemiddelde verandering van s op een gegeven interval van t is het differentiequotiënt over dat interval.

Het is ook de helling van het lijnstuk PQ .



Figuur 3.2

Opgave 1

Voor de afgelegde afstand s (in meter) van de zeilwagen in de **Uitleg** geldt dat $s = 1,2t^2$. Hierin is t de tijd in seconden.

- Bereken de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0,6]$.
- Bereken ook de gemiddelde snelheid op het interval $[6,10]$.
- Op welk van beide intervallen was de gemiddelde snelheid van de zeilwagen het hoogst?

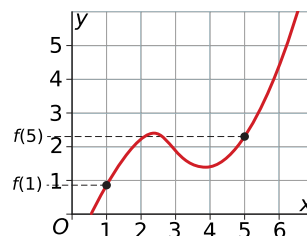
Opgave 2

In het algemeen heb je te maken met een functie als $y = f(x)$.

Hier zie je een grafiek van een functie f .

Bekijk het interval $[1,5]$.

- Bereken de gemiddelde verandering van f op dit interval. Lees functiewaarden af uit de grafiek.
- Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval $[2,4]$.
- Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de punten $(1, f(1))$ en $(6, f(6))$.
- Geef een interval waarop de gemiddelde verandering 2 m/s is.



Figuur 3.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de grafiek van de functie $y = f(x)$.

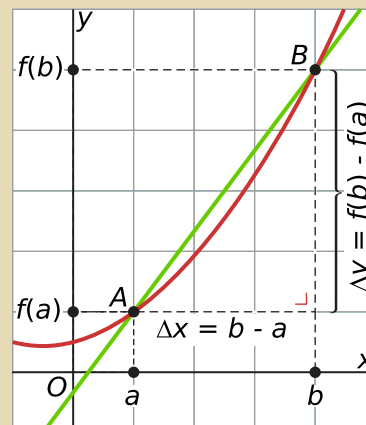
De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a, b]$ is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De uitkomst hiervan noem je het **differentiequotiënt** van de functie f op het interval $[a, b]$. In de grafiek van f is dit differentiequotiënt gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$.

Onthoud dat het differentiequotiënt gelijk is aan

- de helling van de lijn AB ;
- de richtingscoëfficiënt van de lijn AB ;
- de gemiddelde verandering van de grafiek op het interval $[a, b]$.



Figuur 3.4

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - x^2$.

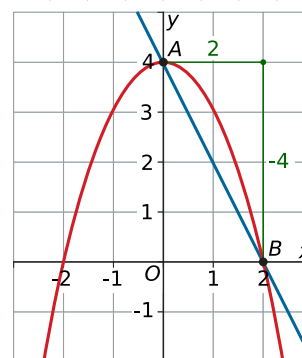
Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0, 2]$ en beschrijf de betekenis van dit getal.

Antwoord

Het differentiequotiënt op het interval $[0, 2]$ is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 4}{2} = -2.$$

Je ziet dat het differentiequotiënt gelijk is aan het hellingsgetal van het lijnstuk AB . Het is de gemiddelde verandering van de functiewaarden op het interval $[0, 2]$. Het geeft dus de toename of de afname van $f(x)$ per eenheid van x weer.



Figuur 3.5

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-2, 1]$.
- Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op het interval $[-1, 1]$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

- Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval $[2, 5]$.
- Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[-3, 6]$.
- Geef een interval waarop de gemiddelde verandering van f gelijk is aan 0.

Voorbeeld 2

Ilse is om 14:00 uur begonnen met het verkopen van kaartjes voor een voorstelling. Zij heeft op een aantal tijdstippen bijgehouden hoeveel kaartjes ze verkocht heeft:

tijd	10:00	12:00	13:30	15:00	18:00
aantal kaartjes	0	178	331	405	642

Tabel 3.2

Om 12:00 uur had Ilse 178 kaartjes verkocht en om 13:30 uur 331. Wanneer liep de kaartverkoop het best, tussen 10:00 en 12:00 uur of tussen 12:00 en 13:30 uur?

Antwoord

Tussen 10:00 en 12:00 uur is de gemiddelde verkoop per uur $\frac{178-0}{2} = 89$.

Tussen 12:00 en 13:30 uur is de gemiddelde verkoop per uur $\frac{331-178}{1,5} = 102$.

Hoewel er tussen 10:00 en 12:00 uur meer kaarten zijn verkocht, liep tussen 12:00 en 13:30 uur de kaartverkoop gemiddeld het best. Met behulp van het berekenen van differentiequotiënten kun je de kaartverkoop eerlijk vergelijken op de verschillende tijdsintervallen.

Opgave 5

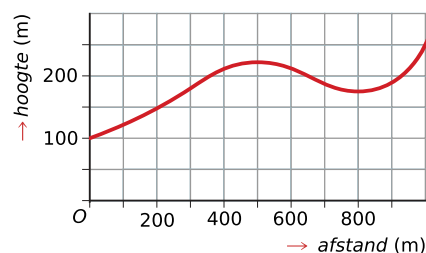
Bekijk [Voorbeeld 2](#).

- In welk van de tijdsintervallen liep de kaartverkoop het best?
- Emmy koopt om 12:10 uur het 181e kaartje. Hoeveel bedraagt de gemiddelde verkoop per minuut tussen 12:10 en 13:30 uur?

Opgave 6

Bij het begin van een berg staat een waarschuwbord met daarop een helling van 15%. Deze grafiek geeft die berg weer. Horizontaal is de afstand uitgezet die je hemelsbreed hebt afgelegd en verticaal de hoogte waarop je je dan bevindt.

- Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering bij zo'n hellingpercentage?
- Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering gerekend over de gehele berg?
- Klopt het waarschuwbord?
- Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering op het interval $[400, 500]$ ongeveer?
- Schat de steilste helling van deze berg.



Figuur 3.6

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 + 5$. Toon aan dat het differentiequotiënt van f op het interval $[0, a]$ gelijk is aan $2a$.

Antwoord

Het differentiequotiënt van f op het interval $[0, a]$ is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2a^2 + 5 - 5}{a - 0} = \frac{2a^2}{a} = 2a.$$

Als je nu een interval zoekt waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 4, kun je $a = 2$ nemen en vind je als interval $[0, 2]$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je de functie $f(x) = 2x^2 + 5$.

- Geef een interval waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 6.
- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[1, 4]$.
- Noem een interval waarop het differentiequotiënt gelijk is aan die op het interval $[1, 4]$.

Opgave 8

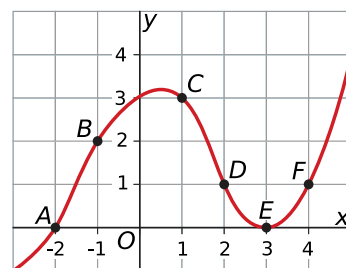
- Elke constante functie heeft de vorm $f(x) = c$. Toon aan dat de gemiddelde verandering van zo'n functie op elk interval gelijk is aan 0.
- Een lineaire functie is van de vorm $f(x) = ax + b$. Waarom is het differentiequotiënt van zo'n functie op elk interval gelijk aan a ?

Verwerken

Opgave 9

Je ziet een aantal punten op de grafiek.

- Bereken de gemiddelde helling van het lijnstuk AB .
- Bereken de gemiddelde helling van het lijnstuk CF .
- Voor twee lijnstukken die horen bij twee van de getekende punten hoort een differentiequotiënt van 0. Welke twee lijnstukken zijn dat?
- Punt F heeft een kleinere y -waarde dan punt C . Hoe kun je dat aan het differentiequotiënt op het interval $[1, 4]$ zien?



Figuur 3.7

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$.

- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0, 2]$.
- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-1, 2]$.
- Wat valt je bij b op? Kun je dat verklaren?

Opgave 11

Tijdens een hardloophwedstrijd van 10 kilometer wordt op drie momenten de (tussen)tijd gemeten. De resultaten van Bram zie je in de tabel.

tijd (minuten)	0	12	27	39
afstand (kilometer)	0	3	7	10

Tabel 3.3

- Op welk tijdsinterval liep Bram gemiddeld het snelst?
- Cedric loopt de eerste 1,5 kilometer in 6 minuten. Stel dat hij de hele wedstrijd met hetzelfde tempo loopt. Finisht hij dan voor of na Bram?

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2$. Toon aan dat het differentiequotiënt op elk interval $[a, a + 1]$ gelijk is aan $6 \cdot a + 3$.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2,5x^2 + 3x$.

- Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[0, 2]$ exact.
- Geef nog een interval met eenzelfde differentiequotiënt als bij a.

Toepassen

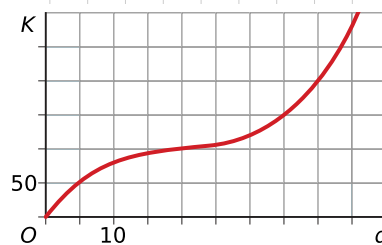
Opgave 14: Koekjesproductie

Het bedrijf Fiesta produceert koekjes voor de horeca. Als verpakking gebruiken ze zakken van 3 kilogram. De kosten hangen af van het aantal zakken koekjes dat gemaakt wordt, q is het aantal geproduceerde zakken koekjes per uur.

Voor de kosten K (in euro) wordt het volgende functievoorschrift gebruikt:

$$K(q) = 0,01q^3 - 0,6q^2 + 13q$$

- Bereken de totale kostenstijging bij een productietoename van 0 zakken per uur naar 20 zakken per uur.
- Bereken de gemiddelde kostenstijging bij een productietoename van 0 zakken per uur naar 20 zakken per uur.
- Plot zelf de grafiek op de grafische rekenmachine. Plot ook de lijn door de punten $(0, 0)$ en $(20, 100)$. De lijn snijdt de grafiek van K in een derde punt. Geef de coördinaten van dat punt.
- Kun je nu zonder berekening zeggen wat de gemiddelde kostenstijging is op het interval $[20, 40]$? Licht je antwoord toe.



Figuur 3.8

Opgave 15: Afkoelende koffie

Het afkoelen van een kopje koffie hangt af van de temperatuur van de koffie bij het inschenken en van de kamertemperatuur. Ook de vorm en het materiaal waarvan het kopje is gemaakt, heeft invloed. De formule $T(t) = 20 + 70 \cdot 0,82^t$ geeft de temperatuur van de koffie.

- Hoe hoog is de temperatuur van de koffie bij het inschenken?
- Hoeveel graden daalt de temperatuur van de koffie gemiddeld in de eerste vijf minuten?
- Bereken ook in één decimaal nauwkeurig hoeveel de temperatuur gemiddeld daalt in de volgende vijf minuten.
- De temperatuur van de koffie daalt van $t = 0$ tot $t = 5$ sneller dan van $t = 5$ tot $t = 10$. Leg uit hoe je dit aan de differentiequotiënten bij b en c kunt zien. Geef ook een natuurkundige verklaring.

Testen

Opgave 16

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die tijden vind je in de tabel:

tijd t (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand a (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 3.4

- Bereken het differentiequotiënt op het tijdsinterval $[0,10]$.
- Welke betekenis heeft dit getal voor de wielrenner?
- Je kunt bij deze tabel een grafiek maken door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd t in minuten, op de verticale as de afgelegde afstand a in kilometer. Bereken het hellingsgetal van het lijnstuk dat hoort bij het interval $[44,60]$.
- Bereken voor het tijdsinterval $[18,44]$ de waarde $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ in twee decimalen nauwkeurig.
- Welke betekenis hebben de bij c en d gevonden getallen voor de grafiek? Geef alle goede antwoorden.
 - Ze geven de helling weer van het lijnstuk door bij het begin- en het eindpunt bij het tijdsinterval.
 - Ze geven de totale toename van de afstand weer op het tijdsinterval.
 - Ze geven de gemiddelde toename van de afstand per minuut weer op het tijdsinterval.

Opgave 17

Gegeven de functie $f(x) = 0,5x^2 - 5x + 4$.

- Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval $[0,2]$.
- Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[-3,7]$.
- Geef een interval waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 0.

1.4 Differentiaalquotiënt

Inleiding

Als je in de auto vanuit een buitenwijk naar het centrum van de stad rijdt, leg je ongeveer 4 kilometer af in 15 minuten. Dat is 16 km/h (kilometer per uur).

Toch kun je onderweg wel een bekeuring oplopen voor het rijden van meer dan 50 km/h binnen de bebouwde kom. Je gemiddelde snelheid zegt nog weinig over je snelheid op elk moment van de route.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de verandering op een bepaald moment, het 'differentiaalquotiënt', benaderen;
- het begrip 'hellingsgetal in een punt' van een grafiek;
- een raaklijn in een punt van een grafiek aan die grafiek van een formule voorzien;
- werken met toepassingen van het differentiaalquotiënt.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- werken met differentiequotiënten.

Verkennen

Opgave V1

Met een zeilwagen die Stevin in de zeventiende eeuw uitvond kun je veranderingen van de snelheid bestuderen.

In deze opgave wordt zo'n zeilwagen klaargemaakt, de zeilen worden gehesen. De zeilwagen gaat steeds sneller, er staat een flinke wind. Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s in meter de formule $s = 1,2t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden.

- Hoeveel m heeft de zeilwagen na 5 s afgelegd en hoe snel rijdt hij dan?
- Kun je een formule opstellen voor de snelheid v in m/s van de zeilwagen als functie van t ?



Figuur 4.2

Uitleg

Bekijk de grafiek van de positie van een startende zeilwagen.

Je mag aannemen dat de snelheid constant toeneemt. De afgelegde afstand neemt dan kwadratisch toe. Voor de afgelegde afstand s (in meter) geldt bijvoorbeeld $s(t) = 1,2 \cdot t^2$, waarin t de tijd in seconden is.

De gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden bereken je met het differentiequotiënt: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,2 \cdot 4^2 - 1,2 \cdot 0^2}{4 - 0} = \frac{19,2}{4} = 4,8$.

Die gemiddelde snelheid voor de eerste 4 seconden is dus 4,8 meter per seconde (m/s).

Omdat de zeilwagen versnelt (steeds sneller gaat rijden), is de snelheid op $t = 4$ hoger dan de gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden. Die snelheid op $t = 4$ kun je benaderen. Daarbij bereken je differentiequotiënten op steeds kleinere intervallen met $t = 4$ als beginwaarde.

Op het interval $[4; 4,1]$ is het differentiequotiënt:

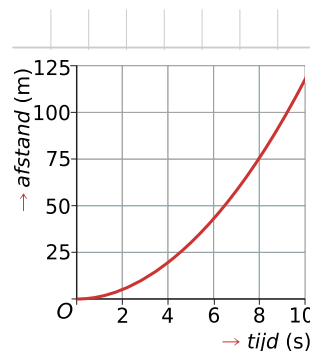
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,2 \cdot 4,1^2 - 1,2 \cdot 4^2}{4,1 - 4} = \frac{0,972}{0,1} = 9,72.$$

Dit is een eerste benadering van de snelheid op $t = 4$.

Op het interval $[4; 4,01]$ is het differentiequotiënt:

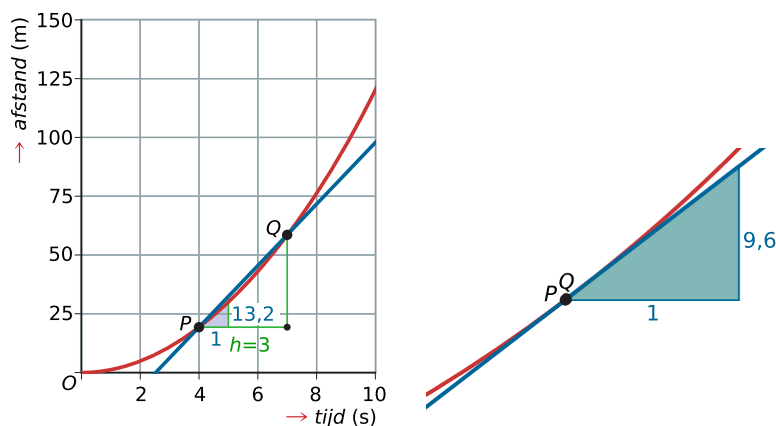
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,2 \cdot 4,01^2 - 1,2 \cdot 4^2}{4,01 - 4} = \frac{0,09612}{0,01} = 9,612.$$

Dit is een tweede en betere benadering van de snelheid op $t = 4$.



Figuur 4.3

Bekijk de applet.



Figuur 4.4

Je kunt de intervallen steeds kleiner maken en het differentiequotiënt uitrekenen om een nog betere benadering te krijgen van de snelheid op $t = 4$.

interval	differentiequotiënt
$[4; 4,1]$	9,72
$[4; 4,01]$	9,612
$[4; 4,001]$	9,6012
$[4; 4,0001]$	9,600 12

Tabel 4.1

Het differentiequotiënt komt steeds dichterbij 9,6, naarmate de rechtergrens van het interval dichterbij 4 komt. Je kunt nu zeggen dat bij $t = 4$ de snelheid 9,6 m/s is. Die snelheid bepaal je dus door een serie differentiequotiënten te berekenen op intervallen $[4, 4 + h]$ waarin h steeds dichterbij 0 komt.

Het getal dat die serie differentiequotiënten benadert is de snelheid op $t = 4$ en de lijn PQ waarvan zo'n differentiequotiënt de richtingscoëfficiënt is, gaat over in een raaklijn aan de grafiek. Je noemt de gevonden waarde het differentiaalquotiënt op dat tijdstip.

Dit differentiaalquotiënt is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor $t = 4$.

Opgave 1

Bekijk in de [Uitleg](#) hoe de snelheid van een zeilwagen op een bepaald tijdstip wordt gevonden met behulp van een rij van differentiequotiënten.

- Kies het juiste antwoord. De snelheid op $t = 4$ is:
 - hetzelfde als de gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden.
 - groter dan de gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden.
 - kleiner dan de gemiddelde snelheid over de eerste 4 seconden.
- Bereken zelf de differentiequotiënten op de intervallen in de tabel in de uitleg.
- Hoe groot is de snelheid op $t = 4$?
- Hoe is de snelheid op $t = 4$ zichtbaar in de grafiek? Kies het juiste antwoord.
 - Als richtingscoëfficiënt van het lijnstuk op het interval $[0, 4]$.
 - Als richtingscoëfficiënt van het lijnstuk op het interval $[4; 4,0001]$.
 - Als richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het punt met $t = 4$.
 - Als uitkomst bij $t = 4$.
- Bereken met behulp van een rij met differentiequotiënten het differentiaalquotiënt op $t = 5$.
 Het differentiaalquotiënt dat je bij e hebt berekend is de snelheid op $t = 5$ van de zeilwagen.
 Maar het is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek als $t = 5$. Van die raaklijn weet je dus de helling.
- Door welk punt gaat die raaklijn? Welke vergelijking past er dus bij?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: differentiaalquotiënt.

Je ziet een deel van de grafiek van de functie $y = f(x)$.

De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a, b]$ is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De **verandering in een punt** met $x = a$ van de functie f vind je door een aantal keer het differentiequotiënt op $[a, a + h]$ te berekenen, waarbij je h steeds dichterbij 0 kiest: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Je krijgt dan een rij met differentiequotiënten die een bepaald getal benadert.

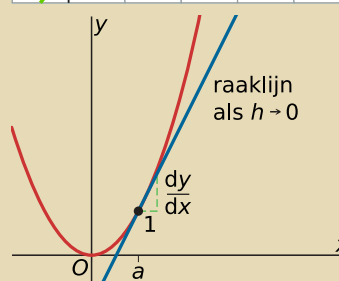
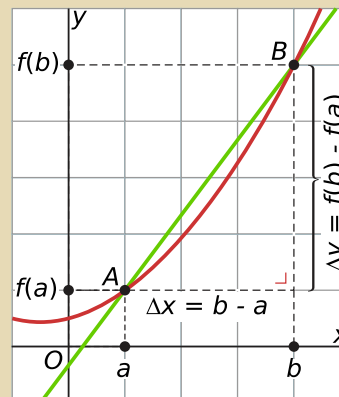
Dit getal heet het **differentiaalquotiënt** $\frac{dy}{dx}$ voor $x = a$.

In plaats van $\frac{dy}{dx}$ voor $x = a$, schrijf je ook wel $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$.

In de grafiek is het differentiaalquotiënt gelijk aan de **richtingscoëfficiënt** van de **raaklijn** in het punt van de grafiek met $x = a$.

- Als $\frac{dy}{dx} > 0$, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn positief en stijgt de grafiek dus.
- Als $\frac{dy}{dx} < 0$, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn negatief en daalt de grafiek dus.
- Als $\frac{dy}{dx} = 0$, dan is het hellingsgetal van de raaklijn 0. Er kan dan sprake zijn van een top, maar dat hoeft niet.
- Het hellingsgetal van de raaklijn in een top is altijd 0.

Op de grafische rekenmachine vind je het differentiaalquotiënt als dy/dx . Als je hier een x -waarde aan koppelt dan vind je direct het hellingsgetal van de raaklijn in dat punt aan de grafiek. Bekijk daarvoor het **Practicum: Veranderingen, differentiëren en de GR**.



Figuur 4.5

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met $f(x) = 4 - x^2$.

Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 1$ en beschrijf de betekenis van dit getal.

Antwoord

Maak een rij met differentiequotiënten door bij het interval $[1, 1 + h]$ voor h steeds kleinere waarden te kiezen. Bijvoorbeeld:

interval	differentiequotiënt
$[1; 1,1]$	-2,1
$[1; 1,01]$	-2,01
$[1; 1,001]$	-2,001
$[1; 1,0001]$	-2,0001

Tabel 4.2

Deze rij getallen lijkt te naderen naar -2. Dit is het differentiaalquotiënt van deze functie voor $x = 1$ en de veranderingssnelheid van de grafiek voor die waarde van x . Het is ook het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 1$. Je ziet in de figuur dat een grafische rekenmachine dit voor je kan berekenen, zie ook het **Practicum**.

Opgave 2

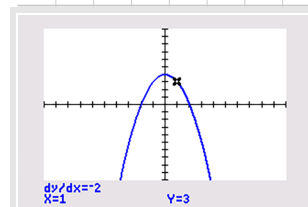
In **Voorbeeld 1** zie je hoe je bij een gegeven functie f het differentiaalquotiënt voor een bepaalde x -waarde kunt berekenen.

- Wat betekent dit getal voor de grafiek? Meerdere antwoorden kunnen goed zijn.
 - De richtingscoëfficiënt van de grafiek voor die x -waarde.
 - De richtingscoëfficiënt van het lijnstuk op het interval $[0, x]$.
 - De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor die x -waarde.
 - De y -waarde bij die waarde van x .
- Welke betekenis heeft dit getal voor de functiewaarden?
 - De grootte van de functiewaarde bij die waarde van x .
 - De snelheid waarmee de functiewaarden veranderen voor die waarde van x .
 - De gemiddelde verandering van de functiewaarden.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je wilt het differentiaalquotiënt van f bepalen voor $x = 2$.

- Maak zelf de tabel met differentiequotiënten op het interval $[2, 2 + h]$ waarin h achtereenvolgens de waarden 0,1; 0,01; 0,001 en 0,0001 heeft.
- Hoe groot is dus het differentiaalquotiënt voor $x = 2$?
- Welke vergelijking heeft de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$?



Figuur 4.6

Voorbeeld 2

Bekijk de grafiek van de afgelegde afstand s van een auto op een binnenweg, uitgezet tegen de tijd t .

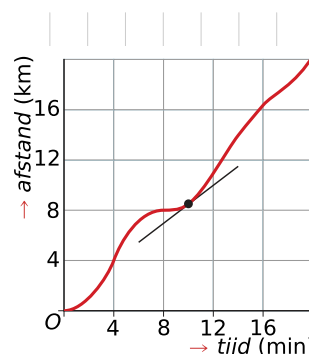
Je ziet dat de snelheid eerst langzaam toeneemt totdat hij na 4 minuten maximaal is. Dan neemt de snelheid weer af. Bij $t = 4$ gaat de grafiek van toenemend stijgend over in afnemend stijgend. Na 8 minuten staat de auto even stil om daarna weer langzaam op te trekken. Bepaal de snelheid van deze auto na precies 10 minuten.

Antwoord

De snelheid na precies 10 minuten is het differentiaalquotiënt op $t = 10$. Omdat er geen functievoorschrift bij deze grafiek is, bepaal je de waarde van $\frac{ds}{dt}$ voor $t = 10$ met behulp van de grafiek en de getekende raaklijn.

Je ziet dat die raaklijn behalve door het punt $(10; 8,5)$ ook (bij benadering) door het punt $(12; 10)$ gaat. De helling van de raaklijn is daarom (ongeveer): $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10,0 - 8,5}{12 - 10} = 0,75$.

De auto had na precies 10 minuten een snelheid van 0,75 km/minuut. Dat is ongeveer 45 km/uur.



Figuur 4.7

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je een tijd-afstand grafiek van een auto.

- Wanneer was de snelheid van de auto hoger, bij $t = 4$ of bij $t = 16$?
- Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn bij $t = 8$?
- Hoeveel minuten heeft de auto ongeveer met constante snelheid gereden?
- Bereken de snelheid van de auto bij $t = 4$.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 1$ zonder een rij met differentiequotiënten te maken.

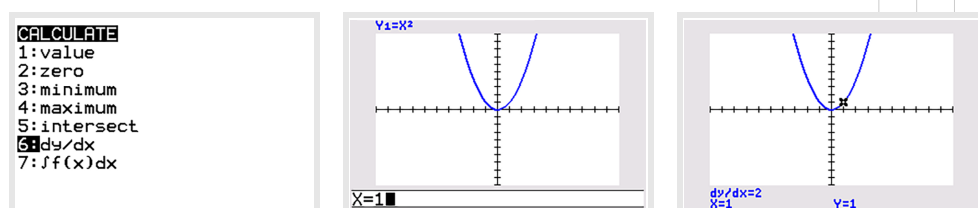
Antwoord

Het differentiequotiënt op het interval $[1, 1 + h]$ is:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

Dit differentiequotiënt heeft voor elke waarde van h (behalve $h = 0$) de waarde $2 + h$. Hoe dichter h bij 0 komt, hoe dichter $2 + h$ bij 2 komt. Dit betekent dat het differentiaalquotiënt voor $x = 1$ gelijk is aan 2.

Ook met de grafische rekenmachine kun je het differentiaalquotiënt $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 1$ meteen vinden:



Figuur 4.8

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** zie je de functie $f(x) = x^2$.

- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[2, 2 + h]$ en benader hiermee het differentiaalquotiënt voor $x = 2$.
- Controleer je antwoord bij a met de grafische rekenmachine.
- Stel een vergelijking op voor de raaklijn aan de grafiek voor $x = 2$.
- Er is een punt op de grafiek waarin de helling van de raaklijn precies het tegenovergestelde is van die bij a. Welk punt is dat? Licht je antwoord toe.
- In welk punt van de grafiek is de helling 0?

Verwerken

Opgave 6

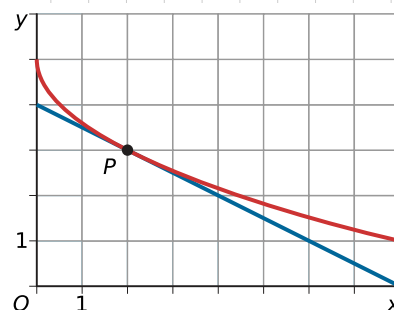
Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 5x^2 - x^3$ op de grafische rekenmachine.

- Bereken het hellingsgetal van de raaklijn aan f voor $x = 2$ met behulp van een rij differentiequotiënten.
- Je kunt van tevoren aan de grafiek zien of het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 2$ positief of negatief is. Waaraan kun je dat zien?
- Stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 2$ aan de grafiek van f .

Opgave 7

Je ziet een deel van een grafiek met een raaklijn aan de grafiek in het punt bij $x = 2$.

- Bepaal het differentiaalquotiënt voor $x = 2$ met behulp van de grafiek.
- Stel de vergelijking op van de getekende raaklijn.
De grafiek hoort bij de functie $f(x) = 5 - \sqrt{2x}$.
- Controleer je antwoord bij a door het differentiaalquotiënt door de grafische rekenmachine te laten bepalen.



Figuur 4.9

Opgave 8

Gegeven is de functie met voorschrift $g(x) = \frac{4}{x}$ op het interval $[-5, 5]$.

- Bereken de verandering van $g(x)$ voor $x = 1$.
- Er is een punt op de grafiek van g waar de helling dezelfde waarde heeft als die in het punt $(1, 4)$. Welk punt is dat? Licht je antwoord toe.
- Voor $x = 0$ heeft de functie g geen functiewaarde. Wat betekent dit voor de helling? En wat is er met de grafiek aan de hand?

Opgave 9

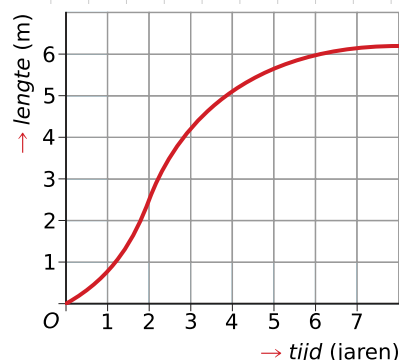
De concentratie C van een bepaalde stof die is opgelost in water, neemt met de tijd af volgens de formule $C(t) = 10 \cdot 0,9^t$. Hierin is C in gram per liter (g/L) en t in uren.

- Er verdwijnt niet elk uur een even grote hoeveelheid van deze stof uit het water. Hoe komt dat?
- Hoeveel gram van deze stof verdwijnt er gemiddeld in de eerste 5 uren? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- De vervalsnelheid van deze stof op $t = 5$ is niet gelijk aan de hoeveelheid die er tot dan toe gemiddeld per uur is verdwenen. Bereken deze vervalsnelheid in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Bekijk de grafiek van de lengtegroei van een boom. Neem de grafiek over.

- Hoeveel meter per jaar groeit deze boom gemiddeld, gerekend over de eerste vijf jaar?
- Wat is de groeisnelheid na precies vijf jaar? Geef een zo nauwkeurig mogelijke schatting.
- Op welk tijdstip is de groeisnelheid het grootst? Licht je antwoord toe.
- Welke waarde krijgt de groeisnelheid uiteindelijk als de boom gezond blijft?



Figuur 4.10

Opgave 11

De baan van een vuurpijl is bij benadering parabolisch tot hij uit elkaar spat. Bij deze baan past de formule $h(x) = -x^2 + 10x$, waarin zowel h als x in meters wordt uitgedrukt.

- Welke helling heeft de baan als de vuurpijl wordt afgeschoten?
- In welk punt van de baan is de helling 0?
- Als de pijl horizontaal 8 meter heeft afgelegd, spat hij uiteen. Hoe hoog is de pijl dan en welke helling heeft de baan op dat punt?

Toepassen

Opgave 12: Vallend voorwerp

Een steen valt van een loodrechte rotswand 500 meter naar beneden. Voor de afgelegde weg y (in meter) geldt de formule $y(t) = 4,9t^2$, waarin t de tijd in seconden is, tenminste zolang de steen nog aan het vallen is en niet op de grond terecht is gekomen.

- Bereken de gemiddelde snelheid van de steen gedurende de eerste 5 seconden.
- Bereken de snelheid van de steen na precies 5 seconden. Gebruik een rij van differentiequotiënten en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.
- Bereken de snelheid waarmee de steen op de grond terechtkomt.

Testen

Opgave 13

Een hoeveelheid H (in kilogram) groeit exponentieel volgens de formule $H(t) = 2500 \cdot 1,2^t$ met t in dagen.

- Bereken de gemiddelde toename van deze hoeveelheid op het interval $[0,4]$.
- Bereken de toenamesnelheid van deze hoeveelheid op $t = 4$ met behulp van de grafische rekenmachine.
- Deze toenamesnelheid op $t = 4$ kun je in de grafiek aangeven. Leg uit hoe dat gaat.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 4$.

- Bereken het differentiaalquotiënt van f voor $x = 3$ met behulp van een rij differentiequotiënten. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 3$ aan de grafiek van f .
- Noem een punt op de grafiek van f waarvan het hellingsgetal van de raaklijn aan f door dat punt 0 is.

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het bepalen van een differentiaalquotiënt.

- [Veranderingen, differentiëren en de TI84](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de TIInspire](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de Casio](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de HPprime](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de NumWorks](#)

1.5 Hellingsgrafiek

Inleiding

Je kunt bij veel functies in een punt van de grafiek de helling van die grafiek berekenen. Bij de meeste x -waarden hoort wel een hellingsgetal. En dus kun je een grafiek maken van het hellingsgetal afhankelijk van de waarde van x . Zo'n 'hellingsgrafiek' zegt dan weer het nodige over de grafiek van de functie zelf.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- bij een gegeven grafiek of functievoorschrift een hellingsgrafiek schetsen;
- uit een gegeven hellingsgrafiek gegevens over de bijbehorende functie aflezen;
- werken met tekenschema's van de hellingen van functies;
- de beginselen van het opstellen van het functievoorschrift van een hellingsfunctie.

Voorkennis

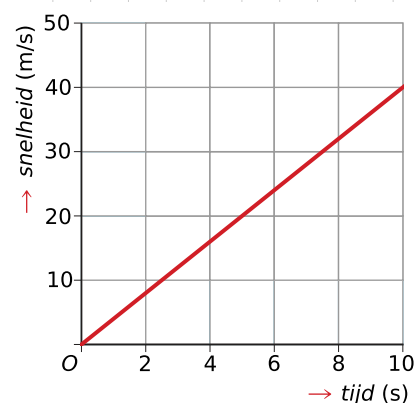
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- (toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- met een differentiequotiënt de gemiddelde verandering op een interval uitrekenen;
- met een differentiaalquotiënt de verandering voor een bepaalde invoerwaarde berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je zit op een stilstaande zeilwagen. Als je het zeil hijst, neemt je snelheid v door de windkracht toe. Bij een constante windkracht neemt de snelheid recht evenredig met die windkracht toe. Je ziet een snelheidsgrafiek bij een constante windkracht.

- Welke formule past bij deze grafiek?
- Schets de bijbehorende grafiek voor de afgelegde afstand.
- Kun je daar een formule bij verzinnen en zo berekenen welke afstand je na 20 seconden hebt afgelegd?



Figuur 5.2

Uitleg

Bekijk de applet.

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ met daarin de raaklijn aan de grafiek in het punt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. De richtingscoëfficiënt van die raaklijn bepaalt de helling van de grafiek bij $x = \frac{1}{2}$.

Als je de waarden van x verandert, veranderen ook de hellingsgetallen van de raaklijnen. Je kunt van die hellingsgetallen een afzonderlijke grafiek maken: de hellingsgrafiek. De bijbehorende functie wordt de hellingsfunctie $f'(x)$ genoemd. Die zie je ook getekend.

Als je de grafiek van de functie f en die van zijn hellingsfunctie f' vergelijkt, dan valt op:

- als de grafiek stijgt, is de helling positief (en omgekeerd);
- als de grafiek daalt, is de helling negatief (en omgekeerd);
- in toppen van de grafiek (extremen van de functie) is de helling 0.

Verder zie je dat de grafiek van f van afnemende daling overgaat naar een toenemende stijging. Dit betekent dat de hellingen van de raaklijnen steeds groter worden; dit zie je ook terug in de hellingsgrafiek, de grafiek is namelijk een stijgende rechte lijn.

Deze eigenschappen kun je goed gebruiken om uit een hellingsgrafiek de karakteristieke eigenschappen van de grafiek van f af te leiden. Uit de hellingsgrafiek van een functie kun je bijvoorbeeld de (lokale) extremen aflezen.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $f(x) = x^2$ in de **Uitleg**. Als je de grafiek op de grafische rekenmachine maakt, kun je met $\frac{dy}{dx}$ in elk punt de helling bepalen.

a Vul de tabel in.

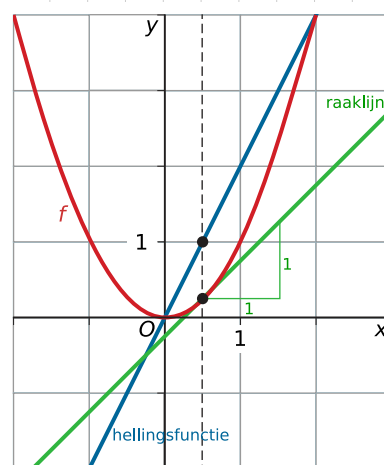
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							

Tabel 5.1

b Teken met behulp van de tabel in a zelf de hellingsgrafiek van deze functie.

Ga na dat die hellingsgrafiek een rechte lijn wordt.

c Wat betekent $f'(x) = 0$ voor de grafiek van f ?



Figuur 5.3

Theorie en voorbeelden

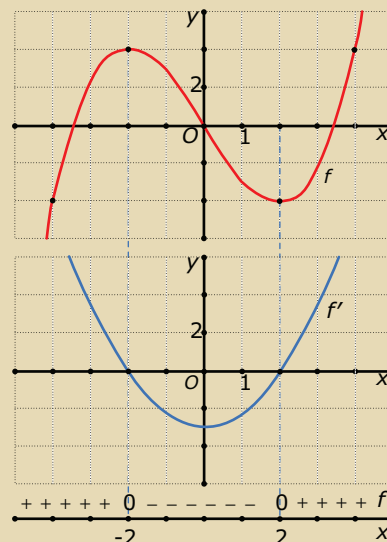
Om te onthouden

Bekijk de applet: Hellingsgrafiek

Een functie $y = f(x)$ heeft meestal in een punt van de grafiek een helling die wordt bepaald door het differentiaalquotiënt in dat punt. Van die hellingsgetallen kun je ook weer een grafiek maken. Je ziet de grafiek van een functie (in rood) met de **hellingsgrafiek** (in blauw). De bijbehorende functie van de hellingsgrafiek wordt de **hellingsfunctie** of **afgeleide** van f genoemd en kun je korter schrijven als f' (spreek uit f accent). Je ziet:

- als de hellingsfunctie positieve waarden heeft, stijgt de bijbehorende functie;
- als de hellingsfunctie negatieve waarden heeft, daalt de bijbehorende functie;
- met wat voor soort stijging/daling je te maken hebt;
- waar de hellingsfunctie de waarde 0 heeft, heeft de grafiek van de bijbehorende functie een horizontale raaklijn; vaak gaat het daarbij om extremen van de functie.

Hieruit blijkt dat vooral het positief, negatief, of 0 zijn van de hellingsfunctie van belang is om het verloop van de grafiek van een functie te beschrijven. Dezelfde gegevens kun je ook terugvinden in een **tekenschema**, dat je onder de hellingsgrafiek ziet getekend. Een tekenschema is een getallenlijn waarop je aangeeft wanneer een functie positief, negatief of 0 is. Hoe steil de grafiek moet lopen kun je niet van een tekenschema aflezen. Wel waar toppen zitten.



Figuur 5.4

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = 0,5x^4 - 4x^2$.

Teken de grafiek van de bijbehorende hellingsfunctie f' .

Antwoord

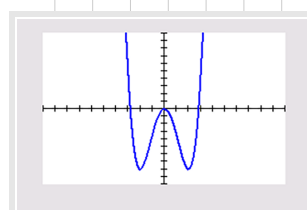
Maak eerst met behulp van de grafische rekenmachine een tabel met hellingsgetallen.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x) = \frac{dy}{dx}$	-30	0	6	0	-6	0	30

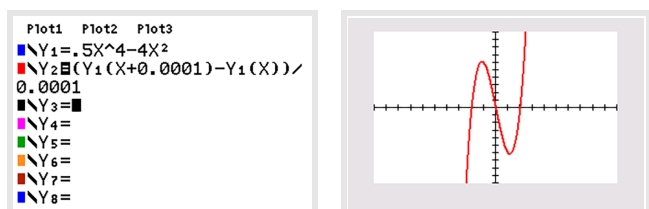
Tabel 5.2

Teken de bij deze tabel passende grafiek.

Je kunt ook direct de grafische rekenmachine een goede benadering van de hellingsgrafiek laten tekenen. Daartoe laat je hem voor willekeurige x het differentiaalquotiënt benaderen door een differentiequotiënt op het interval $[x; x + 0,001]$ en daarvan een grafiek maken. Bekijk dit in het **Practicum**.



Figuur 5.5



Figuur 5.6

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0,5x^3 - 6x$.

In elk punt heeft de grafiek van f een bepaalde helling, die wordt bepaald door het differentiaalquotiënt $f'(x)$ in dat punt.

- a Vul de tabel in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							

Tabel 5.3

- b Met behulp van de tabel bij a kun je de hellingsgrafiek van de gegeven functie handmatig tekenen. Dat kan echter ook met de grafische rekenmachine. Maak die grafiek van f' .
- c Welke waarde heeft $f'(x)$ in de toppen van de grafiek van f ?
- d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.
- e Welke extreme waarde heeft $f'(x)$ en wat betekent dit voor de grafiek van f ?

Opgave 3

Er is verband tussen de grafiek en de hellingsgrafiek van een functie. Kies telkens het juiste antwoord.

- a Wat betekent het voor de grafiek van de functie als de hellingsgrafiek onder de x -as ligt?
- De functiewaarden zijn negatief.
 - De grafiek is stijgend.
 - De grafiek is dalend.
 - De grafiek heeft een minimum.
- b Soms is een grafiek toenemend stijgend. Hoe zie je dat aan de hellingsgrafiek?
- De hellingsgrafiek ligt boven de x -as.
 - De hellingsgrafiek is stijgend.
 - De hellingsgrafiek ligt boven de x -as en is stijgend.
 - De hellingsgrafiek heeft een maximum.
- c Hoe vind je de extremen van een functie uit de hellingsgrafiek?
- Je bekijkt voor welke waarden van x de hellingsgrafiek een maximum of een minimum heeft.
 - Je bekijkt voor welke waarden van x de helling overgaat van positief in negatief of omgekeerd.
 - Je bekijkt voor welke waarden van x de helling de waarde 0 heeft.
 - Dat kun je niet uit de hellingsgrafiek aflezen.

Voorbeeld 2

De hellingsfunctie zegt veel over het verloop van een grafiek. Het gaat er dan vooral om waar de hellingen positief, negatief of 0 zijn. Daarvoor heb je geen hellingsgrafiek nodig, een tekenschema van de afgeleide is genoeg.

Je ziet hier een tekenschema van de hellingsfunctie van een onbekende functie f .

+	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	$f'(x)$
						-1					2						x

Figuur 5.7

Schets een mogelijke grafiek van f .

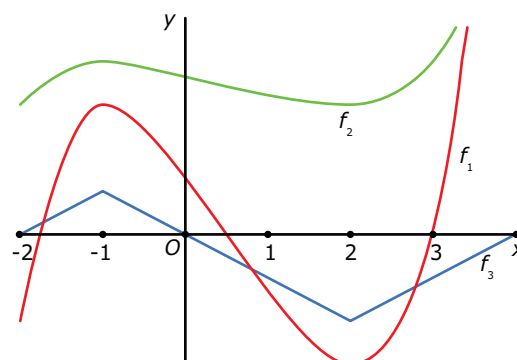
Antwoord

Als de hellingsfunctie positief is, is de grafiek van f stijgend, als de hellingsfunctie negatief is, is die grafiek dalend. Dit betekent dat:

- op het interval $(-\infty, -1)$ de grafiek moet stijgen;
- op het interval $(-1, 2)$ de grafiek moet dalen;
- op het interval $(2, \infty)$ de grafiek moet stijgen.

Welke waarden $f(x)$ precies aanneemt is niet bekend. Daarom kies je zelf een startpunt, bijvoorbeeld $(0,0)$. De helling is daar negatief, dus de grafiek dalend. Hoe steil, is onbekend. Verder heeft de grafiek een maximum bij $x = -1$, omdat daar de helling overgaat van positief in negatief. Een minimum treedt op bij $x = 2$, omdat dan de helling van negatief in positief verandert.

Je ziet drie mogelijke grafieken. Maar er zijn nog veel meer mogelijkheden. De grafieken hoeven niet door het punt $(0,0)$ te gaan.

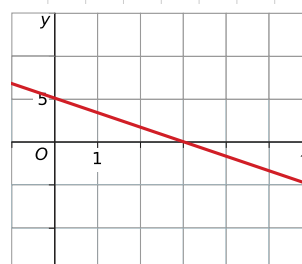


Figuur 5.8

Opgave 4

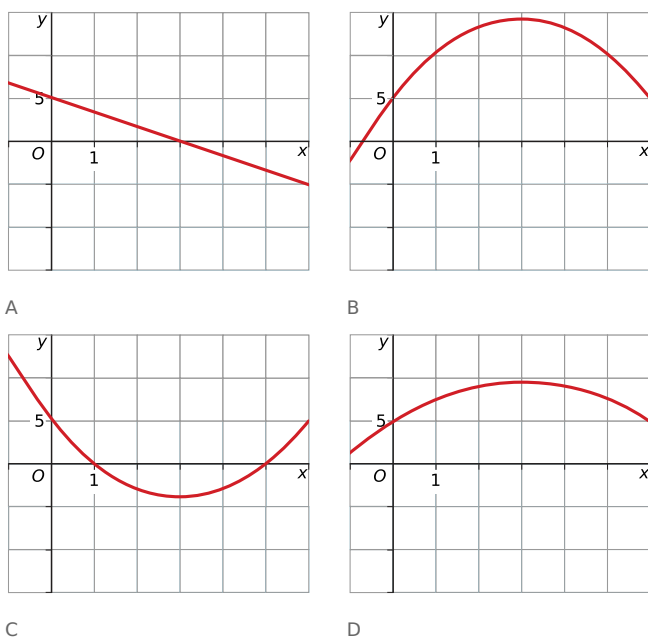
Je ziet de hellingsgrafiek van functie f .

- a Kies uit de volgende antwoorden. De grafiek van f heeft:
- A. precies één extreme waarde van 6 voor $x = 0$;
 - B. geen extremen want de hellingsgrafiek is dalend;
 - C. geen extremen want de grafiek van de functie zelf is ook dalend;
 - D. een maximum voor $x = 3$



Figuur 5.9

- b Als $f(0) = 5$, welke van deze grafieken A, B, C of D is dan een mogelijke grafiek van f ?

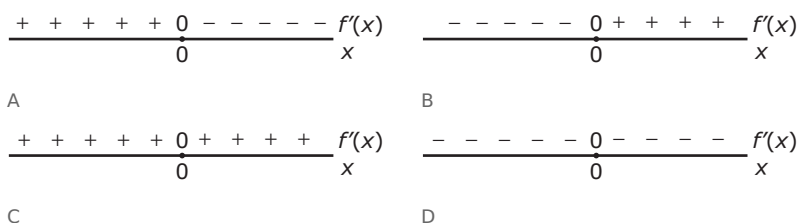


Figuur 5.10

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = x^3$.

- a Welke van deze tekenschema's is van de bijbehorende helling-functie?



Figuur 5.11

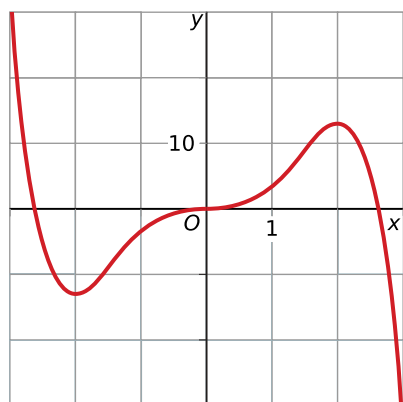
- b Voor $x = 0$ is de helling van de grafiek van f gelijk aan 0. Waarom heeft de grafiek van f geen extreme waarde voor $x = 0$? (Geef alle goede antwoorden aan.)
- A. De grafiek is altijd stijgend, behalve bij $x = 0$.
 - B. Het tekenschema van de afgeleide wisselt bij $x = 0$ niet van teken.
 - C. De functie heeft geen horizontale raaklijn voor $x = 0$.
 - D. De functie heeft wel een horizontale raaklijn voor $x = 0$ maar gaat niet van stijgend naar dalend.

Opgave 6

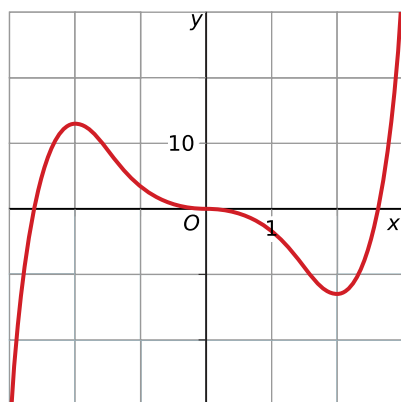
Bekijk het tekenschema van de hellingsfunctie van f . De grafiek van f gaat door het punt $(0,0)$.

Welke van deze grafieken is een mogelijke grafiek van f ?

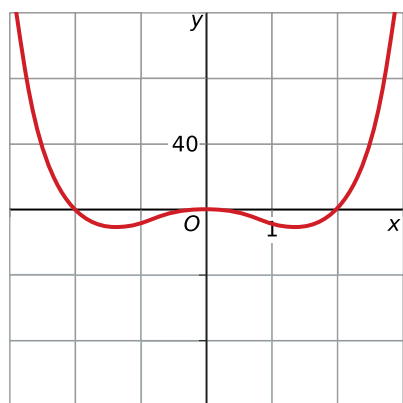
+++	0	---	---	0	---	---	0	+++	$f'(x)$
-2				0			2		x



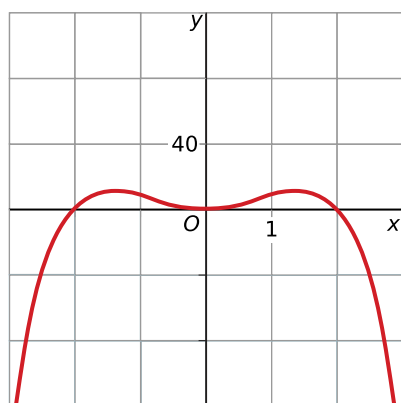
A



B



C



D

Figuur 5.13

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

Stel een voorschrift op voor de hellingsfunctie $f'(x)$.

Antwoord

Je kunt dit doen door eerst met behulp van de grafische rekenmachine voor een aantal x waarden $\frac{dy}{dx}$ uit te rekenen en deze in een tabel te zetten.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

Tabel 5.4

In de tabel lijkt het er sprake van een lineair verband. Je ziet dat $f'(x)$ steeds precies 2 keer de x -waarde is. Je kunt de tabel nog uitbreiden om te bekijken of deze regelmaat blijft opgaan. Als je dit doet, zul je zien dat dit inderdaad het geval is. Je kunt niet alle mogelijkheden uitproberen, maar je mag er nu vanuit gaan dat $f'(x) = 2x$.

Opgave 7

In het **Voorbeeld 3** zie je hoe je bij een gegeven kwadratische functie een formule voor de hellingsfunctie kunt opstellen.

Gegeven de kwadratische functie $g(x) = x^2 + 4$.

Stel het voorschrift van de hellingsfunctie op met behulp van een tabel van $g'(x)$. Wat valt je op?

Opgave 8

Voor een optrekkende zeilwagen geldt $a(t) = 1,2t^2$, waarin a de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconden is.

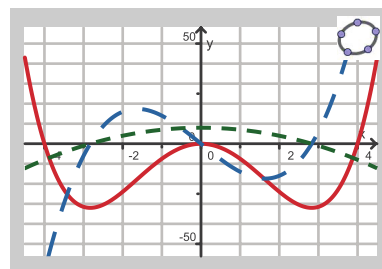
- De snelheid van dit voorwerp na 5 seconden is $a'(5)$. Bereken deze snelheid in meter per seconde (m/s) en in kilometer per uur (km/h).
- De snelheid v is een functie van t die hoort bij de hellingsgrafiek $a'(t)$.
Teken de grafiek van v en stel een formule op voor $v(t)$.
- Na hoeveel seconden beweegt de zeilwagen met een snelheid van 50 kilometer per uur (km/h)? Rond af op één decimaal.

Verwerken

Opgave 9

Je ziet hier drie grafieken gemaakt met GeoGebra.

Welke van de twee gestippelde grafieken is de hellingsgrafiek van de rode grafiek?



Figuur 5.14

Opgave 10

Bekijk het tekenschema van de hellingsfunctie van een functie g . Schets een mogelijke grafiek van g .

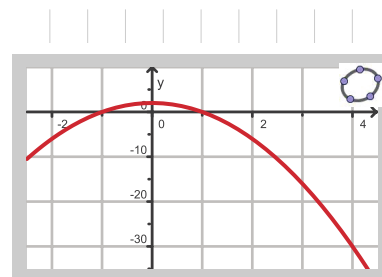
---	0	---	0	+	0	---	0	+	+	+	+	$g'(x)$
-2	0	1	3									x

Figuur 5.15

Opgave 11

Bekijk de hellingsgrafiek van functie f , gemaakt met GeoGebra.

- Op welk interval stijgt de grafiek van f ?
- Voor welke waarde(n) van x heeft de grafiek van f een maximum?
- Kun je uit de hellingsgrafiek aflezen hoe groot dit maximum is?
- Neem aan dat $f(0) = 2$. Schets de grafiek van f .



Figuur 5.16

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 0,5x^2 + 3x$.

Stel de formule op van de hellingsgrafiek van f door eerst een tabel van differentiaalquotiënten te maken.

Opgave 13

Er zijn vier functies gegeven:

- $f(x) = -x^2 + 4$
- $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
- $h(x) = \frac{4}{x}$
- $k(x) = -x^4 + 4x$

- Bereken elk van deze functies het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 1$.
- Teken van elk van deze functies de grafiek van de hellingsfunctie.
- Bepaal met behulp van de hellingsgrafiek de extremen van de gekozen functie.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 8x$.

- Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van f zo in beeld brengen dat alle drie de nulpunten en de twee toppen zichtbaar zijn. Toon aan dat deze grafiek de x -as snijdt in het punt $(4,0)$.
- Bereken het hellingsgetal van de grafiek in dit punt.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 4$.
- Teken de grafiek van de afgeleide van f .
- Met behulp van de grafiek van die afgeleide kun je de extremen van f berekenen. Doe dat met behulp van de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 15: Elektrische auto

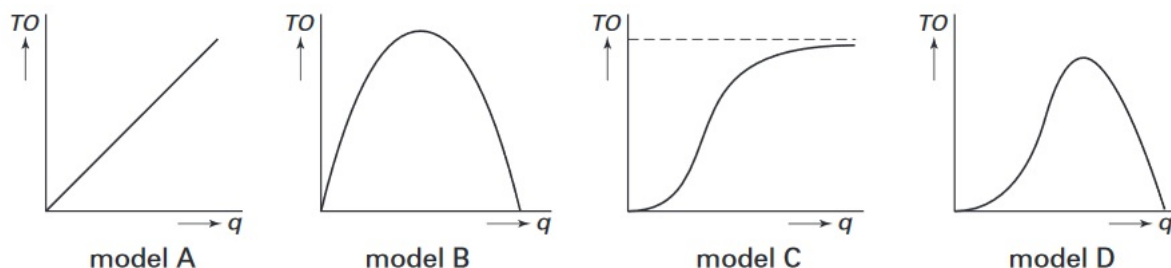
Een elektrische auto trekt op als het stoplicht op groen springt. Voor de afgelegde weg geldt: $s(t) = 1,6t^2$ waarin s de afgelegde weg in meters en t de tijd in seconden. (Een elektrische auto hoeft niet te schakelen.)

- De snelheid van deze auto wordt uitgedrukt in meter per seconde. Teken de grafiek van de snelheid v van deze auto als functie van de tijd t .

- b Als het goed is, is je grafiek van de snelheid een rechte lijn. Stel een bijpassende formule op voor de snelheid $v(t)$.
- c Na hoeveel seconden is de snelheid meer dan 80 km/h? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

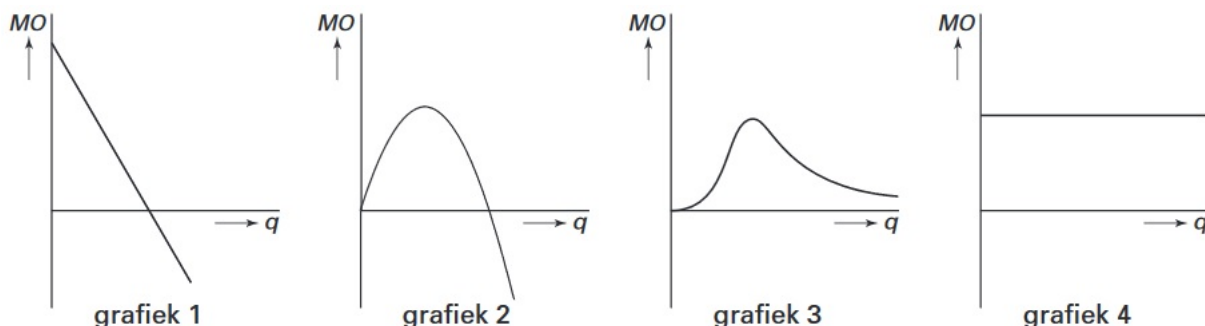
Opgave 16: Economische modellen

Een producent verkoopt q eenheden van een product. De totale opbrengst is TO . In de figuur staat voor vier economische modellen een schets van de grafiek van TO .



Figuur 5.17

Als je wilt weten hoe groot de totale opbrengst verandert bij een kleine toename van q , dan kijk je naar de marginale opbrengst MO . In de volgende figuur zie je bij elk van de modellen uit de figuur met economische modellen de grafiek van de marginale opbrengst, maar ze staan niet in de juiste volgorde.



Figuur 5.18

Geef voor elk van de grafieken 1, 2, 3 en 4 aan bij welk economisch model de grafiek hoort. Licht je antwoord toe.

(bron: examen 2002 - II)

Testen

Opgave 17

Gegeven de functie $f(x) = x^2 - 4x$.

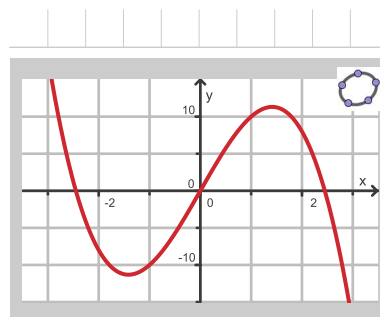
Teken de grafiek van de bijbehorende hellingsfunctie.

Opgave 18

Je ziet de hellingsgrafiek van een functie g , getekend met GeoGebra.

De grafiek van deze functie gaat door het punt $(2,4)$.

Teken een mogelijke grafiek van g .



Figuur 5.19

Opgave 19

Dit is een tekenschema van de hellingsfunctie van een functie f .

+	+	+	0	-	-	0	+	+	+	$f'(x)$
			0			3				x

Figuur 5.20

- Voor welke waarde van x heeft deze functie een maximum?
- Op welk interval is de grafiek van deze functie dalend?
- Maak een schets van een mogelijke grafiek van f die door $(0,1)$ gaat.

Practicum: Grafische rekenmachine

Met de volgende practica leer je de basistechnieken bij veranderingen zoals het bepalen van een differentiaalquotiënt en het maken van een hellingsgrafiek.

- [Veranderingen, differentiëren en de TI84](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de TIInspire](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de Casio](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de HPprime](#)
- [Veranderingen, differentiëren en de NumWorks](#)

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Veranderingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- toenemende, afnemende of constante stijging of daling — extremen
- toenametabel — vaste stapgrootte — toenamediagram
- gemiddelde verandering — differentiequotiënt — koorde
- veranderingssnelheid in een punt — differentiaalquotiënt — raaklijn
- hellingsgrafiek — hellingsfunctie — tekenschema

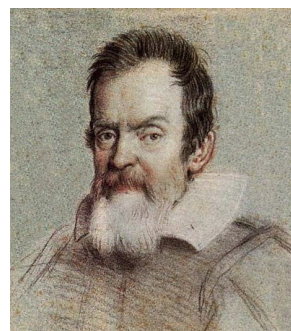
Activiteitenlijst

- bij een functie (of grafiek) aangeven waar hij (toenemend, afnemend) stijgt en daalt;
- bij een functie (of grafiek) een toenamediagram tekenen en omgekeerd bij een toenamediagram mogelijke grafieken van een bijpassende functie tekenen;
- bij een functie (of grafiek) het differentiequotiënt op een gegeven interval berekenen en de betekenis daarvan omschrijven;
- bij een functie (of grafiek) het differentiaalquotiënt voor een gegeven invoerwaarde berekenen en de betekenis ervan omschrijven — het hellingsgetal van een raaklijn aan een grafiek berekenen;
- bij een functie (of grafiek) een hellingsgrafiek tekenen — uit een hellingsgrafiek eigenschappen van de functie (stijgen, dalen, extremen) aflezen.

Achtergronden

Het wiskundig beschrijven van veranderingen is nog niet zo heel oud. Eigenlijk begon het allemaal met de Fransman **Nicole Oresme (1323—1382)** die de 'grafiek' bedacht om het bewegen van voorwerpen langs een rechte lijn te beschrijven.

Later gebruikte **Galileo Galileï (1564—1642)** de grafieken van Oresme om er de vrije val van een voorwerp in vacuüm mee weer te geven. En **Isaac Newton (1642—1727)** en **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716)** bedachten een goede techniek om veranderingen te berekenen: de 'differentiaalrekening'.



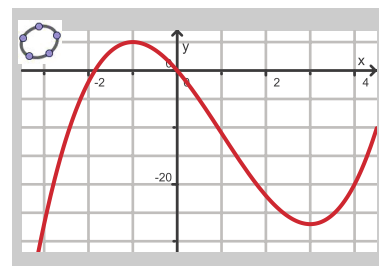
Figuur 6.1 Galileo Galileï (Wikipedia)

Testen

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$, gemaakt met GeoGebra.

- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-3,1]$.
- Geef een interval waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 0.
- Stel de vergelijking op van de raaklijn aan f voor $x = 1$.
- Maak de hellingsgrafiek bij deze functie.
- Uit de hellingsgrafiek kun je de x -waarden van de extremen van de gegeven functie halen. Leg uit hoe en bereken de extremen van f .



Figuur 6.2

Opgave 2

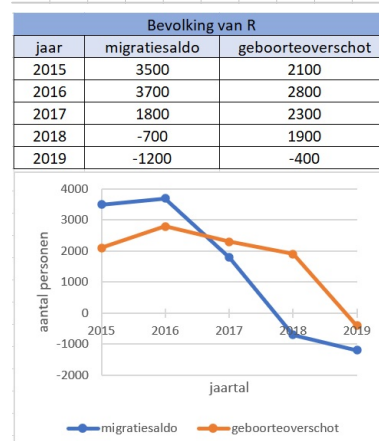
De hoogte van een vuurpijl die je van de grond afschiet, wordt gegeven door $h(t) = 60t - 5t^2$, waarin h de hoogte boven de begane grond in meter en t de tijd in seconden na het afschieten.

- Na tien seconden ontploft de vuurpijl. Op welke hoogte is dat?
- Teken een bijpassend toenamediagram van 0 tot 6 met stapgrootte 1.
- Bereken de gemiddelde snelheid van de vuurpijl over de eerste zes seconden.
- Bereken de snelheid van de vuurpijl op $t = 4$.
- Plot de grafiek van de snelheid $h'(t)$ van de vuurpijl. Maak eerst een tabel met hellingsgetallen.
- De grafiek van de snelheid die je bij e hebt getekend moet een rechte lijn zijn. Stel bij die rechte lijn een formule op en bereken met die formule de snelheid op het moment van ontploffen.

Opgave 3

Het migratiesaldo van R geeft het verschil tussen het aantal mensen dat in R komt wonen, en het aantal mensen dat uit R vertrekt. Het geboorteoverschot is het verschil tussen het aantal geboorten en het aantal overledenen in R. In deze grafiek zie je het migratiesaldo en het geboorteoverschot voor de jaren 2015 tot en met 2019.

- Met hoeveel mensen is het aantal inwoners in R in het jaar 2015 toegenomen?
- In welk jaar is het aantal inwoners in deze stad afgenomen?
- Het aantal inwoners van R was aan het begin van het jaar 2015 ongeveer 72600 (op honderdtallen afgerond). Teken een grafiek van het aantal inwoners in R in de jaren 2015 tot en met 2019.
- Hoe groot was het aantal inwoners op 1 januari 2020?



Figuur 6.3

Opgave 4

In een viskwekerij wordt vis uitgezet in een aantal nieuw aangelegde kweekvijvers. Als er geen vis wordt gevangen zal de visstand zich in de loop der jaren uitbreiden. De grafiek geeft een model van de groei van de visstand.

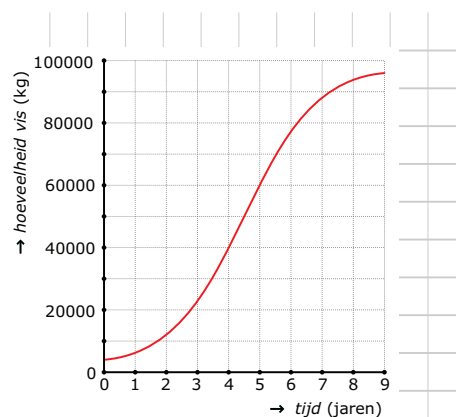
- Teken het toenamediagram met stapgrootte 1.
- De viskweker zal een aantal jaren afwachten alvorens te oogsten. Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens de grafiek.

Welk advies zou je de viskweker geven over:

- het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten.
- de grootte van de jaarlijkse vangst.

Geef bij dit advies een toelichting waarmee je de viskweker denkt te overtuigen.

(bron: examen wiskunde A vwo in 1989, eerste tijdvak)



Figuur 6.4

Toepassen

Opgave 5: Suikerbieten

Een boer verbouwt suikerbieten op een bepaalde lap grond. Voor het onkruid wieden heeft hij personeel in dienst. De opbrengst bij de verkoop van de suikerbieten neemt toe als er beter wordt gewied, dus als hij meer werknemers in dienst neemt. Maar dat gaat niet onbeperkt: op zeker moment lopen de bietenwieders elkaar voor de voeten en wordt het wieden er niet beter van.

Een mogelijk verband tussen de opbrengst R (in honderden euro) en het aantal werknemers w wordt gegeven door de formule

$$R = -\frac{1}{3}w^3 + 6w^2.$$

Voor de boer is het interessant om te weten hoeveel werknemers hij het beste kan inhuren. Daarbij kijkt hij naar de meeropbrengst van een werknemer. Zo is de meeropbrengst van de derde werknemer $R(3) - R(2)$. De meeropbrengst per werknemer heet in economisch ook wel marginale opbrengst. De boer zorgt er voor dat hij zoveel werknemers in dienst neemt dat de marginale opbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

- Hoeveel bedraagt de marginale opbrengst (de meeropbrengst) van de derde werknemer?
- Je kunt met de grafische rekenmachine een tabel maken van de meeropbrengsten van elk van de eerste 10 werknemers. Maak die tabel en beslis op grond daarvan hoeveel werknemers de boer in dienst zal nemen voor het bieten wieden.
- De boer kiest voor zoveel werknemers, dat de meeropbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is. Waarom doet hij dat? Waarom kiest hij niet voor het aantal werknemers waarbij de opbrengst zo groot mogelijk is?

Opgave 6: Daglengte

Door het KNMI worden de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang gedurende het jaar bijgehouden. Via internet kun je actuele informatie over dit onderwerp vinden. **Hier** zie je een tabel en een grafiek voor Amsterdam in een bepaald jaar gemaakt in MS-Excel.

Je ziet dat de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang in de loop van het jaar veranderen. Bovendien is de snelheid waarmee die veranderingen plaatsvinden ook veranderlijk. In de tweede helft van de maand juni bijvoorbeeld verandert het tijdstip van zonsondergang maar weinig per dag. Maar in september is die verandering per dag juist behoorlijk groot. Ook de daglengte (verschil tussen zonsopkomst en zonsondergang) verandert in de loop van het jaar. En ook die verandering gaat soms sneller en soms minder snel...

Een goede manier om de veranderingen nauwkeurig te bekijken is een toenamediagram bijvoorbeeld per maand.

- Het tijdstip van zonsopkomst verandert per dag. In welke maanden verandert het tijdstip van zonsopkomst het snelst per dag? Hoe zie je dat aan de grafiek?
- Ook het tijdstip van zonsondergang verandert per dag. Verandert het tijdstip van zonsondergang het snelst per dag in dezelfde maanden als dat van zonsopkomst? Kun je dit verklaren?
- De daglengte-grafiek is af te leiden uit die van zonsopkomst en zonsondergang. Hoe?
- In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder?
- Teken zelf in Excel een grafiek en een toenamediagram van de daglengte in de loop van het jaar. Neem de gegevens over. Neem voor het toenamediagram een stapgrootte van 1 maand.
- De daglengte verandert dagelijks. In welke maanden verandert de daglengte het snelst? Hoe zie je dat aan de grafiek en hoe aan het toenamediagram?
- In bepaalde maanden lijkt de daglengte wel vrijwel constant. In welke maanden is dat het geval? En hoe zie je dat aan het toenamediagram?
- In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?

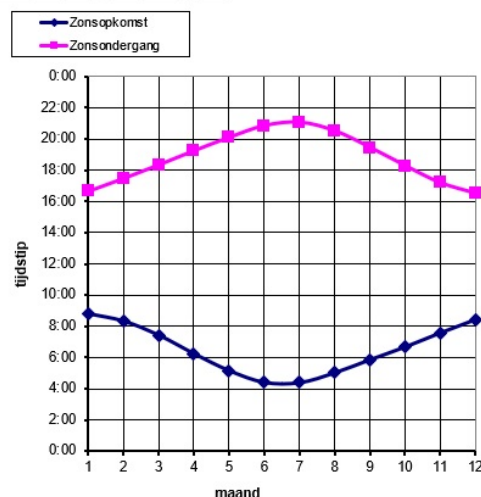
Opgave 7: Snelheid, versnelling

Voor de snelheid v in m/s van een bewegend voorwerp geldt: $v = 2,4t$ waarin t de tijd in seconden is.

- De grafiek van v is de hellingsgrafiek van de grafiek van de afgelegde weg $s(t)$ waarin s in meters is uitgedrukt. Neem aan, dat $s(0) = 0$. Maak een zo nauwkeurig mogelijke grafiek van $s(t)$.
- Bij de grafiek van $v(t)$ hoort ook een hellingsgrafiek. Teken die hellingsgrafiek.
- Wat stelt de hellingsgrafiek van $v(t)$ voor?

Zonsopkomst en zonsondergang in Nederland
De tijdstippen gelden steeds voor de eerste dag van de maand
Alle tijden zijn in M.E.T. (geen zomertijd dus)

maand	opkomst	ondergang
1	8:48	16:39
2	8:20	17:28
3	7:26	18:20
4	6:15	19:14
5	5:10	20:05
6	4:25	20:50
7	4:24	21:03
8	5:02	20:30
9	5:52	19:27
10	6:41	18:17
11	7:35	17:12
12	8:26	16:32



Figuur 6.5

- d Voor de afgelegde weg geldt de formule $s(t) = 1,2t^2$. Laat met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[t, t + h]$ zien, dat de gegeven functie v inderdaad de hellingfunctie van s is.

Examen

Opgave 8: Woestijnhagedis

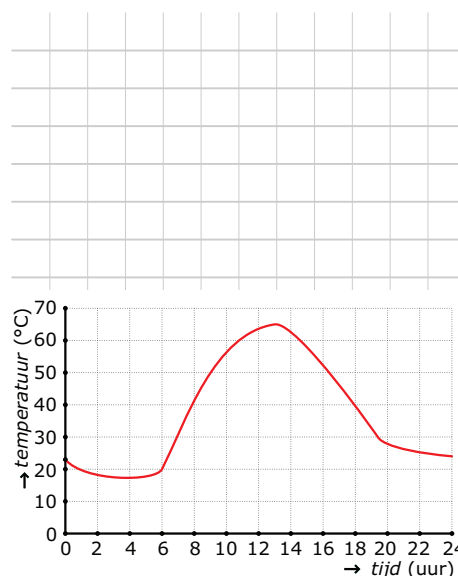
De woestijnhagedis (*diposaurus dorsalis*) leeft in de woestijnen van Californië (V.S.). In deze woestijn zijn er dagelijks grote temperatuurschommelingen. In de zomer kan de temperatuur op een dag variëren van ongeveer 20 °C tot ongeveer 65 °C. In de winter kan het er zelfs vriezen. Omdat de hagedis een koudbloedig dier is, is zijn gedragspatroon erg afhankelijk van de temperatuur. Je ziet in de figuur het temperatuurverloop voor een zomerdag (eind juli/begin augustus) in de Californische woestijn. Deze figuur is typerend voor alle dagen in de periode eind juli/begin augustus. Alleen als de temperatuur tussen de 36 °C en 42 °C ligt, is de hagedis voortdurend buiten zijn hol actief met het zoeken naar voedsel. Hij heeft dan geen beschutting nodig. Als de temperatuur tussen de 42 °C en de 50 °C is moet hij af en toe beschutting zoeken tegen de zon. Bij alle andere temperaturen bevindt de hagedis zich voortdurend in zijn hol.

- a Hoeveel uur per dag is de hagedis in de periode eind juli/begin augustus voortdurend buiten zijn hol actief? Licht je antwoord toe.
- b In de figuur is te zien, dat de temperatuur tussen 6:00 uur en 10:00 uur vrij snel stijgt. Hoeveel bedraagt in deze periode de gemiddelde temperatuurstijging per uur?

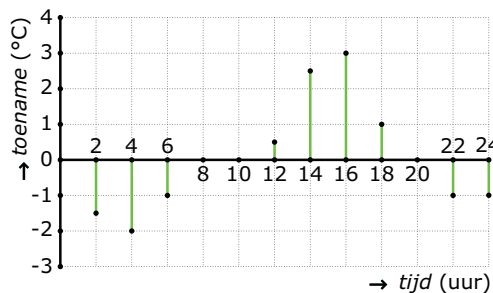
In dit diagram zie je de toename/afname van de temperatuur in het hol van de hagedis. Ook deze figuur is typerend voor de periode eind juli/begin augustus. Omdat het niet zo eenvoudig is om deze temperaturen te meten, kun je in het diagram slechts aflezen hoeveel de temperatuur per 2 uur is gestegen of gedaald. Om 8:00 uur 's morgens is de temperatuur in het hol ongeveer 38 °C.

- c Teken een grafiek van de temperatuur in het hol van de hagedis uitgaande van het toename-/afnamediagram.
- d Bepaal op welke momenten van de dag het temperatuurverschil tussen de binnenkant van het hol en de omgeving het grootst is.

(bron: examen wiskunde A havo 1996, tweede tijdvak, aangepast)



Figuur 6.6



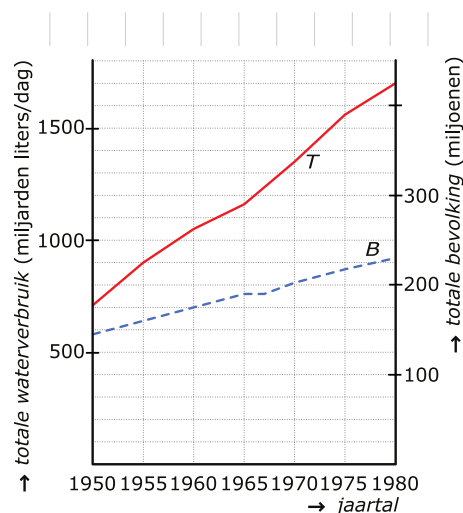
Figuur 6.7

Opgave 9: Schoon drinkwater

Overall op aarde is de behoefte aan schoon water groot. Niet alleen voor huishoudelijk gebruik (o.a. drinkwater), maar vooral voor niet-huishoudelijk gebruik (landbouw en industrie) is heel veel water nodig. Deze opgave gaat over het waterverbruik in de Verenigde Staten vanaf 1950.

In de grafiek staan gegevens over het totale jaarverbruik (T) en de grootte van de bevolking (B) van de V.S. Je kunt er bijvoorbeeld uit aflezen dat in 1980 het totale waterverbruik ongeveer 1680 miljard liter per dag bedroeg, en dat de bevolking in dat jaar ongeveer 230 miljoen mensen telde.

- a Laat zien dat het totale verbruik per jaar in 1975 gemiddeld ongeveer 2,6 miljoen liter water per inwoner was.



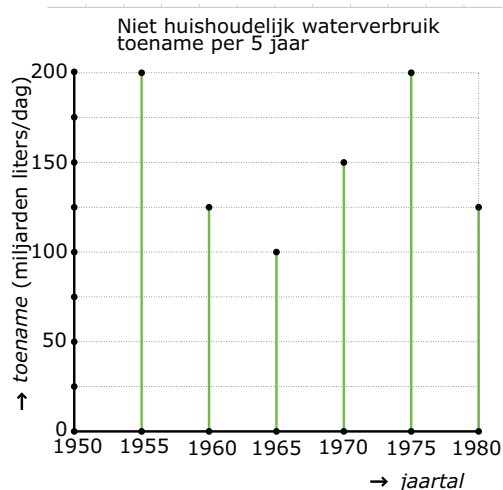
Figuur 6.8

Het aantal liters in opgave a is erg groot. Dat komt vooral door het niet-huishoudelijk waterverbruik. In 1950 was het totale waterverbruik (700 miljard liter per dag) opgebouwd uit 625 miljard liter water voor niet-huishoudelijk gebruik en 75 miljard liter per dag voor huishoudelijk verbruik.

- b Bekijk ook het toenamediaagram van het waterverbruik per dag in de V.S. voor niet-huishoudelijk gebruik.

Onderzoek of het niet-huishoudelijk verbruik als percentage van het totale waterverbruik per dag in 1980 groter was dan in 1950.

- c Bij een onderzoek schatte men dat de toename van het totale waterverbruik elke 5 jaar zou liggen tussen 110 en 200 miljard liter per dag. Tussen welke twee getallen ligt volgens deze veronderstelling het totale waterverbruik in de V.S. in 2010?



Figuur 6.9

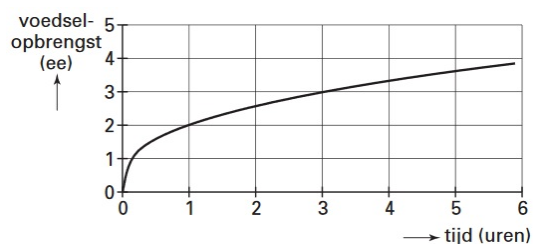
(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)

Opgave 10: Roofdieren

De meeste roofdieren proberen iedere dag hun voedsel zo snel mogelijk te vangen. Naarmate meer voedsel is gevangen, wordt het vaak moeilijker om nog nieuw voedsel te vangen. Deze opgave gaat over het wiskundige model dat daarbij gemaakt kan worden. In dat model geeft de opbrengstfunctie het verband aan tussen de hoeveelheid voedsel (de voedselopbrengst) en de tijd die nodig is om die hoeveelheid voedsel te vangen. In de figuur is de grafiek getekend van de opbrengstfunctie voor roofdiersoort A. De voedselopbrengst is uitgedrukt in energie-eenheden (ee) en de benodigde tijd in uren.

We bekijken een roofdier van soort A. Na 0,5 uur heeft dit roofdier een bepaalde hoeveelheid energie aan voedsel gevangen. Om de dubbele hoeveelheid te vangen is meer dan het dubbele van 0,5 uur nodig.

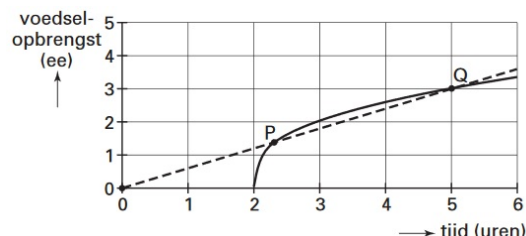
- a Bepaal met behulp van de grafiek hoeveel maal zo groot de daarvoor benodigde tijd is.



Figuur 6.10

Sommige roofdieren leven niet in hetzelfde gebied als hun prooidieren. Zulke roofdieren moeten zich eerst verplaatsen naar hun voedselgebied voordat ze met de jacht kunnen beginnen. De tijd die nodig is om een bepaalde hoeveelheid voedsel te vangen wordt daardoor uitgebreid met de tijd die nodig is om naar het voedselgebied te gaan. Dit heeft gevolgen voor de gemiddelde opbrengst per uur. In de figuur is de grafiek van de opbrengstfunctie van roofdiersoort B getekend. Zoals je in de figuur kunt zien, is een roofdier van deze soort twee uur onderweg (1 uur heen en 1 uur terug).

Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich het punt Q met coördinaten $(5,3)$. Dat wil zeggen dat, als een roofdier van roofdiersoort B vijf uur jaagt (inclusief verplaatsing), dan is zijn voedselopbrengst 3 ee. De gemiddelde voedselopbrengst is dan $\frac{3}{5} = 0,6$ ee/h. In de figuur is ook een stippellijn getekend die gaat door de oorsprong en punt Q . Deze stippellijn snijdt de grafiek van roofdiersoort B ook in punt P .



Figuur 6.11

- b** Leg uit, zonder berekening, dat de gemiddelde voedselopbrengst die hoort bij punt P ook gelijk is aan 0,6 ee/uur.
- c** Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich een punt waarbij de gemiddelde opbrengst per uur voor een roofdier van soort B maximaal is.

Bepaal met behulp van de figuur bij b, bij welke tijd de gemiddelde opbrengst per uur maximaal is. Licht je antwoord toe.

Een roofdier van soort C is in totaal 1 uur onderweg. Voor deze roofdieren is de opbrengstfunctie gegeven door de formule:

$$r = 4\sqrt{t-1} \text{ als } t > 1 \text{ (voor het eerste uur geldt: } r = 0)$$

Hierin is t de tijd in uren en r de hoeveelheid gevonden voedsel in ee.

Deze opbrengstfunctie r heeft voor $t > 1$ de volgende twee eigenschappen:

- een langere tijd levert altijd een hogere opbrengst op;
- de toename van de opbrengst wordt steeds geringer naarmate t groter wordt.

Deze twee eigenschappen zijn zichtbaar in de grafiek van r , maar ze kunnen ook worden verklaard aan de hand van de grafiek van de afgeleide van r .

- d** Schets de grafiek van de afgeleide van r en verklaar de beide eigenschappen aan de hand van deze grafiek.

(bron: vwo wiskunde A examen 2006, eerste tijdvak)

2

Analytische meetkunde

2.1	Coördinaten in het vlak	58
2.2	Lijnen	66
2.3	Cirkels	73
2.4	Snijden	80
2.5	Hoeken	88
2.6	Totaalbeeld	95

2.1 Coördinaten in het vlak

Inleiding

In de zestiende eeuw maakte de wiskunde door René Descartes een enorme sprong. Voor het eerst gebruikte Descartes systematisch assenstelsels om meetkundige problemen te beschrijven. Zo worden meetkundige figuren met getallen en variabelen beschreven. Om Descartes te blijven herinneren is het coördinatenstelsel dat geschikt is voor het werken met meetkundige objecten, een cartesisch coördinatenstelsel genoemd.

Je leert in dit onderwerp

- werken met een cartesisch coördinatenstelsel is;
- de afstand tussen twee punten berekenen;
- de coördinaten van het midden tussen twee punten berekenen.

Voorkennis

- werken met coördinaten;
- meetkundige begrippen zoals loodrecht, evenwijdig, hoek en afstand gebruiken.

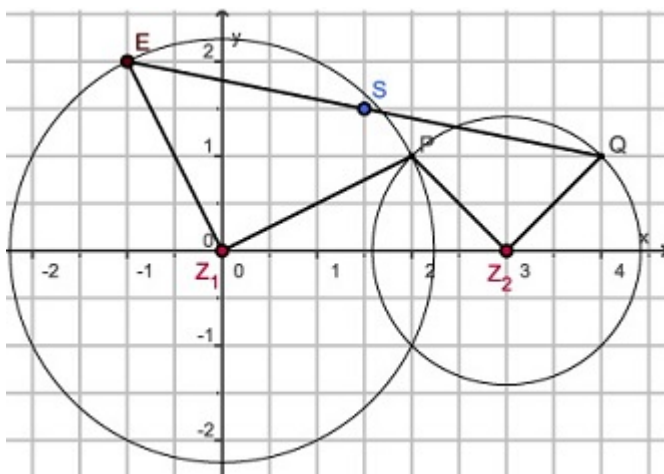
Verkennen

Opgave V1

Op een eiland is een schat begraven. De volgende aanwijzingen moeten je bij de schat brengen:

“Ga in een rechte lijn van de oude eik naar de grote zwerfkei. Loop vervolgens dezelfde afstand, in een lijn loodrecht op de vorige richting. Loop vanaf het punt waar je bent gekomen in een rechte lijn naar de tweede zwerfkei en vervolg je route in de richting loodrecht op het laatst gelopen stuk, even ver als dit stuk. Ga tenslotte in een rechte lijn terug naar de oude eik. Halverwege zul je de schat aantreffen.”

Bekijk de applet: schatgraversprobleem



Figuur 1.1

Er is echter een probleem: de oude eik is totaal verdwenen.

Eerst een schets van de situatie: Z_1 en Z_2 zijn de zwerfkeien, die punten liggen vast. De oude eik wordt zo maar ergens een punt, de rest construeer je. Bij Z_1 en Z_2 maak je rechte hoeken, de cirkels zijn nodig om gelijke afstanden op de goede plek te krijgen. Kijk eens wat er gebeurt als je de oude eik verplaatst.

Is de plaats van de oude eik belangrijk voor de positie van de schat?

Uitleg

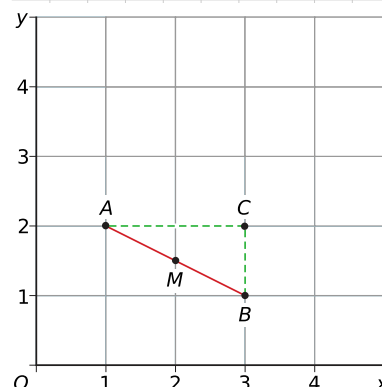
Bekijk de applet

Meetkundige problemen gaan over punten, lijnen en lijnstukken, hoeken, afstanden en dergelijke. Dat zijn zaken die zich goed laten aanpakken met behulp van coördinaten. Vandaar dat in de meetkunde het cartesisch coördinatenstelsel Oxy wordt gebruikt: twee onderling loodrechte assen met daarop dezelfde schaalverdeling.

Bekijk het cartesisch coördinatenstelsel met de punten A en B . Door de manier waarop het assenstelsel is gekozen, heeft A de coördinaten $(1,2)$ en is $B(3,1)$.

De afstand van A tot B is de lengte van lijnstuk AB . De lengte van lijnstuk AB noteer je als $|AB|$. Je berekent de lengte AB door in $\triangle ABC$ de stelling van Pythagoras toe te passen. De lengte van lijnstuk AC vind je door de x -coördinaten van A en C van elkaar af te trekken. De lengte van lijnstuk CB vind je door de y -coördinaten van B en C van elkaar af te trekken. De lengte van lijnstuk AB is gelijk aan $|AB| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$.

De coördinaten van M , het midden van AB , bereken je als volgt: De x -coördinaat van M is het gemiddelde van de x -coördinaten van A en B . De y -coördinaat van M is het gemiddelde van de y -coördinaten van A en B . Dus M is $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(2, 1\frac{1}{2}\right)$.



Figuur 1.2

Opgave 1

Je weet nu wat een cartesisch coördinatenstelsel is.

- Waarom is het in de meetkunde van belang dat beide assen loodrecht op elkaar staan en dezelfde schaalverdeling hebben?
- Teken een cartesisch coördinatenstelsel met punten $A(1,3)$ en $B(4,1)$ en bereken de lengte van lijnstuk AB .
- Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB .

Opgave 2

Gegeven zijn in een cartesisch coördinatenstelsel de punten $A(-1,3)$ en $B(1,4)$.

- Bereken de lengte van lijnstuk AB .
- Bereken de coördinaten van het midden M van AB .

Opgave 3

Gegeven zijn de punten $A(-10,33)$ en $B(20,-45)$ in een coördinatenstelsel waarvan de assen loodrecht op elkaar staan en de schaalverdelingen op de assen gelijk zijn.

- Bereken de lengte van lijnstuk AB .
- Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB .

Opgave 4

Ga uit van $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$.

- Druk de lengte van lijnstuk AB uit in x en y .
- Druk de coördinaten van punt M uit in x en y .

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Meetkunde kun je door een slimme keuze van een assenstelsel omzetten in berekeningen met coördinaten.

Een **cartesisch assenstelsel** is een Oxy -assenstelsel waarvan de x -as en de y -as loodrecht op elkaar staan en waarvan de assen dezelfde lineaire schaalverdeling hebben.

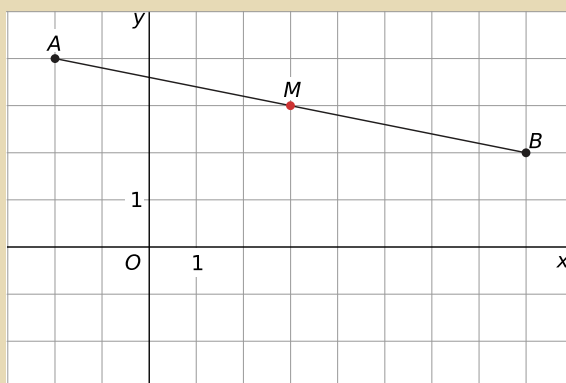
Een cartesisch assenstelsel zet gelijke maten (lengten, hoeken) om naar gelijke getallen en ongelijke maten naar ongelijke getallen.

Het **midden** M van lijnstuk AB kan bijvoorbeeld op deze manier worden bepaald: Als door de keuze van het cartesische coördinatenstelsel A gelijk is aan (x_A, y_A) en B aan (x_B, y_B) , geldt: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

De **lengte van lijnstuk** AB schrijf je als $|AB|$. Met de stelling van Pythagoras geldt in een cartesisch coördinatenstelsel:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

De 'omgekeerde stelling van Pythagoras' is: als in een driehoek geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dan is die driehoek rechthoekig.



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet de punten $A(11,19)$, $B(40,12)$ en $C(11,12)$.

M is het midden van lijnstuk AB en $MD \parallel AC$.

Gebruik gelijkvormigheid en laat zien dat $x_M = 25\frac{1}{2}$ en $y_M = 15\frac{1}{2}$.

Bereken ook de coördinaten van M met de formule uit de theorie en laat zien dat je dezelfde coördinaten vindt.

Antwoord

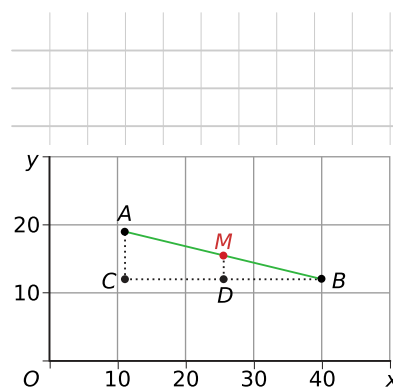
Bekijk de twee driehoeken CBA en DBM . De overeenkomende paren hoeken van deze driehoeken zijn even groot, dus de driehoeken zijn gelijkvormig. Omdat $|AM| = |MB|$ geldt ook $|CD| = |DB|$.

Omdat $|CB| = 40 - 11 = 29$, is $|CD| = \frac{1}{2} \cdot 29 = 14\frac{1}{2}$.

Dus is $x_M = x_A + 14\frac{1}{2} = 11 + 14\frac{1}{2} = 25\frac{1}{2}$.

Op dezelfde manier laat je zien dat $y_M = 15\frac{1}{2}$. Dus $M(25\frac{1}{2}, 15\frac{1}{2})$.

Met de formule: $M(\frac{40+11}{2}, \frac{12+19}{2})$ en dus $M(25\frac{1}{2}, 15\frac{1}{2})$.



Figuur 1.4

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** vind je voor het midden van AB het punt $M = (25\frac{1}{2}, 15\frac{1}{2})$.

Je hebt met behulp van de figuur laten zien dat $x_M = 25\frac{1}{2}$.

- Teken zelf een figuur om y_M uit te rekenen.
- Laat met behulp van de figuur zien dat $y_M = 15\frac{1}{2}$.

Opgave 6

Gegeven zijn de punten de punten $A(2,8)$ en $B(10,14)$.

Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB .

Voorbeeld 2

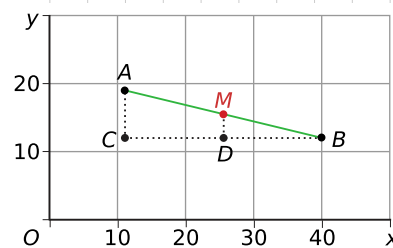
Bekijk de applet

Je ziet de punten $A(11,19)$ en $B(40,12)$. Bereken de lengte van AB met de formule $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. Toon aan dat je uitkomst klopt.

Antwoord

$$|AB| = \sqrt{(40 - 11)^2 + (12 - 19)^2} = \sqrt{890}$$

Je kunt aantonen dat dit klopt door een rechthoekige driehoek CBA te maken en daarop de stelling van Pythagoras toe te passen.



Figuur 1.5

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zijn de punten $A(11,19)$ en $B(40,12)$ gegeven.

- Laat met behulp van de stelling van Pythagoras zien dat de formule voor de lengte van lijnstuk AB klopt.
- Neem nu $C(-1,3)$ en $D(5,-10)$.
Bereken $|CD|$ met de formule voor de lengte en laat met een tekening zien dat dit inderdaad de juiste lengte oplevert.

Opgave 8

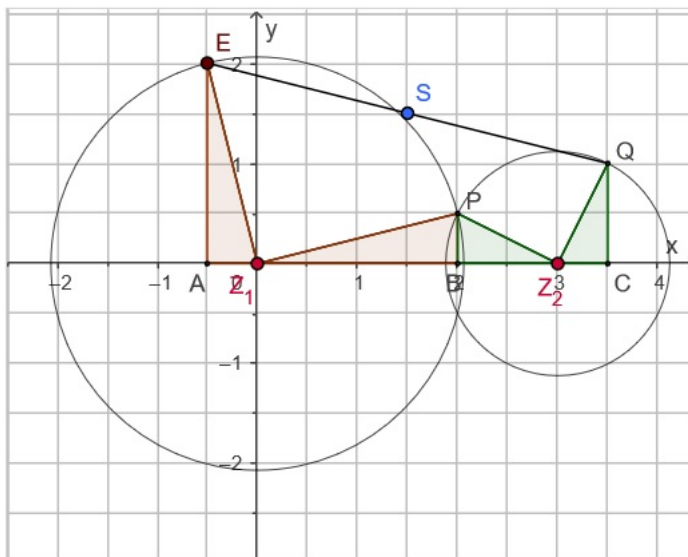
Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de punten $A(-3,6)$, $B(6,0)$ en $C(18,18)$.

- Bereken de lengtes van de lijnstukken AB , BC en AC .
- Bewijs dat driehoek ABC rechthoekig is.
- Noem het midden van AB punt D , het midden van BC punt E , en het midden van AC punt F .
Bereken de coördinaten van de hoekpunten van driehoek DEF .
- Bewijs dat ook driehoek DEF rechthoekig is.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: schatgraversprobleem

In de figuur is E variabel, Z_1 en Z_2 liggen vast. Gegeven: $|EZ_1| = |Z_1P|$ en $|PZ_2| = |Z_2Q|$ en de hoeken EZ_1P en PZ_2Q zijn recht. Gevraagd is aan te tonen dat het midden S van EQ niet van plaats kan veranderen, ook als punt E van plaats verandert.



Antwoord

Je ziet in de figuur de congruente (gelijke) driehoeken: $\triangle EAZ_1 \cong \triangle Z_1BP$ en $\triangle PBZ_2 \cong \triangle Z_2CQ$.

Neem voor het variabele punt $E(-x, y)$, dan is $|EA| = y$ en $|AZ_1| = x$. En dus is ook $|Z_1B| = y$ en $|BP| = x$.

$|BZ_2| = 3 - y$. Tenslotte is $|Z_2C| = |BP| = x$ en $|CQ| = |BZ_2| = 3 - y$.

De coördinaten van Q zijn daarom $(3 + x, 3 - y)$. Het midden van EQ is dus $S = \left(\frac{-x+3+x}{2}, \frac{y+3-y}{2} \right) = (2, 1)$.

Kennelijk is de plaats van S niet van x en y afhankelijk en dus ook niet van de positie van punt E .

Opgave 9

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 3**. Punt E kan van positie veranderen, maar de positie van punt S zou daardoor niet moeten veranderen.

- Neem $E(-1,2)$ en toon door berekening aan dat de positie van het punt S niet verandert.
- Neem $E(-x,y)$ en toon zelf door berekening aan dat het punt S niet verandert.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven zijn de punten $A(-11,23)$ en $B(106,133)$.

- Bereken $|AB|$ en de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB .
- B is het midden van lijnstuk AC . Bereken de coördinaten van C .

Opgave 11

Teken de punten $A(6,0)$, $B(10,8)$, $C(6,10)$ en $D(2,2)$ in een cartesisch coördinatenstelsel.

- Toon met een berekening aan dat vierhoek $ABCD$ een rechthoek is.
- Bepaal de coördinaten van het snijpunt S van de diagonalen van rechthoek $ABCD$.
- Bereken de oppervlakte van driehoek ABS .

Opgave 12

Ga uit van de vlieger $PQRS$. De middens van de zijden van deze vlieger $PQRS$ vormen een rechthoek (zoals dat bij elke vlieger het geval is). Dat kun je met behulp van analytische meetkunde aantonen.

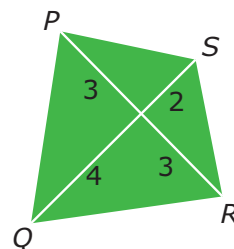
- Teken een cartesisch assenstelsel met O op het snijpunt van de diagonalen van de vlieger. De assen kies je precies langs de diagonalen. Waarom kan dat eigenlijk?
- Nu zijn de hoekpunten $P(-3,0)$, $Q(0,-4)$, $R(3,0)$ en $S(0,2)$. Noem A midden PQ , B midden QR , C midden SR en D midden PS en bereken de coördinaten van A , B , C en D .
- Toon aan dat $ABCD$ een rechthoek is.

Opgave 13

Gegeven zijn de lijnen $l : y = 5x + 3$, $m : y = 2\frac{1}{2}x - 12$ en $n : y = -2x + 6$.

Lijnen l en m snijden elkaar in punt A , en m en n snijden elkaar in punt B .

Bereken $|AB|$ algebraïsch.



Figuur 1.7

Opgave 14

Van een lijnstuk KL is het punt $K(2,8)$ gegeven en het midden $M(4,12)$.

- Bereken het eindpunt L .
- Bereken de lengte van het lijnstuk KL .
- Stel dat L het midden is van lijnstuk KP .
Bereken de coördinaten van P .
- Het punt N ligt op $\frac{3}{4}$ van lijnstuk KP . Bereken de coördinaten van N .

Toepassen**Opgave 15: Schepen op zee**

Twee schepen varen op zee een onderling loodrechte koers. Die twee koersen kun je aangeven met lijnen die zich in S snijden. Het ene schip vaart met een snelheid van 20 km/h en is nog 80 km van S verwijderd. Het andere schip vaart met 10 km/h en is nog 60 km van S verwijderd. Hoe dicht zullen de schepen bij elkaar komen?

- De variabele t is de tijd in uren. Kies $t = 0$ op het moment van de beschreven situatie en maak een passende tekening met een geschikt assenstelsel. Zet de afstand tussen beide schepen in het assenstelsel.
- Neem nu $t = 1$ en teken de onderlinge afstand tussen beide schepen. Doe dit ook voor $t = 2$, $t = 3$ enzovoort.
- Hoe groot is de onderlinge afstand van de schepen op $t = 0$ (t in uren)?
- Hoe groot is die afstand op $t = 1$?
- Druk de onderlinge afstand a uit in t .
- Hoe groot is de kleinste onderlinge afstand tussen beide schepen?

Opgave 16: Zwaartelijnen in een gelijkbenige driehoek

Een gelijkbenige driehoek ABC heeft twee benen AC en BC van 5 cm en lijnstuk $AB = 6$ cm. Verbind het midden P van AC met B en het midden Q van BC met A . Je krijgt twee lijnstukken die elkaar snijden in punt S . Nu geldt $\frac{AS}{SQ} = \frac{BS}{BP} = \frac{2}{1}$.

Toon dit aan met behulp van een goed gekozen assenstelsel.

Testen**Opgave 17**

Gegeven zijn de punten $P(-120, -35)$ en $Q(0,12)$.

- Bereken de lengte van lijnstuk PQ in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken de afstand van het midden van lijnstuk PQ tot de oorsprong van het assenstelsel.

Opgave 18

Teken in een cartesisch coördinatenstelsel de punten $A(1,1)$, $B(3,2)$ en $C(1,6)$ en verbind de punten met elkaar.

- a Toon aan dat driehoek ABC rechthoekig is.
- b Verbind het midden P van AC met B . Toon aan dat $\triangle ABP$ een gelijkbenige driehoek is.

Practicum: GeoGebra I

Bij vlakke meetkunde kun je constructies uitvoeren m.b.v. **GeoGebra**. Je kunt dit (gratis) downloaden via www.geogebra.org. Installeer GeoGebra eerst of gebruik de app: "Meetkunde".

Met dit programma maak je constructies en applets zoals je die regelmatig in dit webmateriaal aantreft.

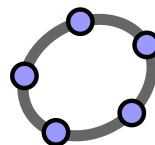
Bijvoorbeeld de applet bij het schatgraversprobleem bij Verkennen.

- Doe de [Lesbrief-GeoGebra-5](#).

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het berekenen van het midden en de afstand tussen twee punten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.



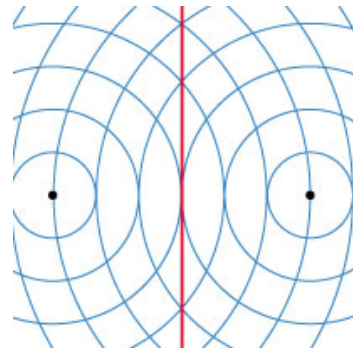
Figuur 1.8

Werk met AlgebraKIT.

2.2 Lijnen

Inleiding

Je hebt al iets gezien van de kracht van de analytische meetkunde, het toepassen van het rekenen met coördinaten en variabelen (van algebra) bij meetkundige problemen. Punten, lengtes van lijnstukken kun je zo benoemen, maar hoe zit het met (scheve) rechte lijnen, cirkels, parabolen, en dergelijke? Descartes ontdekte dat je die weer kunt geven met vergelijkingen in x en y . Eigenlijk weet je dat ook al: $y = 2x + 3$ is een vergelijking van een rechte lijn. Alleen denk je daarbij eerder aan functies en grafieken en niet aan meetkunde...



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- een rechte lijn beschrijven met een vergelijking van de vorm $px + qy = r$ en die lijn tekenen;
- een vergelijking van de vorm $px + qy = r$ herleiden tot $y = ax + b$;
- de richtingscoëfficiënt van een rechte lijn berekenen en daarmee de vergelijking van de lijn opstellen.

Voorkennis

- werken met het begrip richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) van een rechte lijn;
- werken met cartesische coördinaten;
- middens en lengtes van lijnstukken berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.

Je ziet een Oxy -assenstelsel met 121 roosterpunten. Door de punten $A(1,3)$ en $B(4,2)$ is een (rechte) lijn getekend. Daarbij staat de vergelijking $x + 3y = 10$.

- Ga na dat de coördinaten van punt A op de lijn inderdaad aan deze vergelijking voldoen.
- Ga na dat de coördinaten van punt B op de lijn inderdaad aan deze vergelijking voldoen.
- Hoe zou je zelf een formule opstellen bij de lijn door A en B ?
- Welke van de 121 roosterpunten liggen op de lijn met vergelijking $x + 2y = 6$?

- e Welke van de 121 roosterpunten liggen op de lijn met vergelijking $x - 2y = 6$?
- f Welke van deze roosterpunten liggen op de lijn met vergelijking $x = 3$?

Uitleg

Bekijk de applet

Een lijn in de wiskunde is altijd recht. Door twee verschillende punten in een plat vlak gaat precies één lijn. De formule van een lijn die niet verticaal is, heb je als volgt leren opstellen: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Bij een lijn hoort een formule van de vorm $y = ax + b$, waarbij a het hellingsgetal (de richtingscoëfficiënt) is en b de y -coördinaat van het snijpunt van de lijn met de y -as.

Voor de lijn door de punten $A(1,2)$ en $B(4,1)$ geldt $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3}$.

De constante b bereken je door de coördinaten van $A(1,2)$ en $B(4,1)$ in te vullen in de vergelijking $y = -\frac{1}{3}x + b$.

De formule voor de lijn wordt dan $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$.

Een verticale lijn door $A(1,2)$ en bijvoorbeeld $C(1,4)$ heeft als formule $x = 1$. Deze formule kun je niet schrijven als $y = ax + b$, omdat in die formule altijd een y voorkomt. Met formules van de vorm $px + qy = r$ kun je alle lijnen in het vlak beschrijven. Kies je namelijk $q = 0$ dan krijg je een verticale lijn.

Opgave 1

Gegeven zijn de punten $A(1,2)$ en $B(4,1)$.

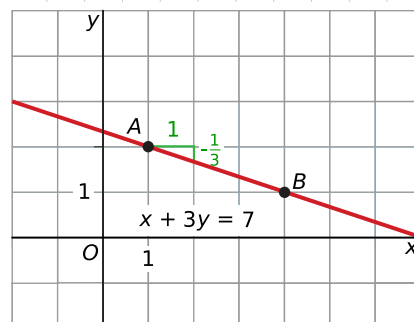
- a Laat zien dat bij de lijn door A en B de vergelijking $x + 3y = 7$ past.
- b Welke richtingscoëfficiënt heeft deze lijn? En wat betekent dit getal?

Opgave 2

Laat zien dat de lijn door $A(1,2)$ en $C(1,4)$ niet de vorm $y = ax + b$ kan hebben.

Opgave 3

Laat zien dat bij de lijn door $A(1,2)$ en $C(1,4)$ de vergelijking $x = 1$ past.



Figuur 2.2

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

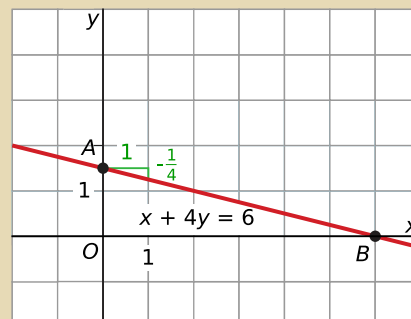
Analytische meetkunde vertaalt vormen naar vergelijkingen. Coördinaten van punten die op de vorm liggen, maken de vergelijking kloppend. Coördinaten van andere punten doen dat niet.

De vergelijking van elke **lijn** kan in een cartesisch assenstelsel in de vorm $px + qy = r$ worden geschreven. Een lijn is recht en heet daarom ook 'rechte'.

Speciale gevallen zijn lijnen evenwijdig aan de x - en de y -as:

- De vergelijking van een lijn evenwijdig aan de y -as is $x = \frac{r}{p}$.
Deze ontstaat door $q = 0$ te nemen.
- De vergelijking van een lijn evenwijdig aan de x -as is $y = \frac{r}{q}$.
Deze ontstaat door $p = 0$ te nemen.

Elke lijn die niet evenwijdig is aan de y -as heeft ook de vergelijking $y = ax + b$. In dat geval is a het **hellingsgetal** of de **richtingscoëfficiënt** van de lijn en is b de y -coördinaat van het snijpunt van de lijn met de y -as.



Figuur 2.3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Teken de lijn l met vergelijking $2x + 5y = 10$.
Bereken de richtingscoëfficiënt van l .

Antwoord

Bereken eerst de snijpunten van de lijn met beide assen:

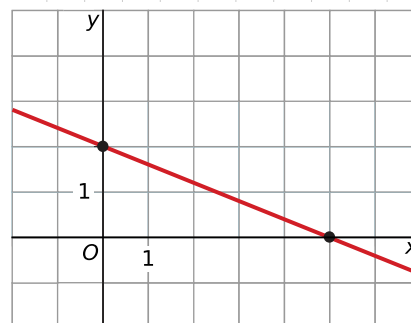
- Het snijpunt met de x -as: $y = 0$ invullen, geeft $2x = 10$ en dus $x = 5$.
Het snijpunt met de x -as is dus $(5, 0)$.
- Het snijpunt met de y -as: $x = 0$ invullen, geeft $5y = 10$ en dus $y = 2$.
Het snijpunt met de y -as is dus $(0, 2)$.

Teken de lijn door deze punten.

De richtingscoëfficiënt bepaal je door eerst de vergelijking $2x + 5y = 10$ te herleiden tot de vorm $y = ax + b$:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 10 \\ 5y &= -2x + 10 \\ y &= -0,4x + 2 \end{aligned}$$

De richtingscoëfficiënt is dus $-0,4$.



Figuur 2.4

Opgave 4

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de lijn met vergelijking $3x + 4y = 12$ en bereken de richtingscoëfficiënt van deze lijn.

Opgave 5

Teken de volgende lijnen in een Oxy -assenstelsel en bereken (indien mogelijk) de richtingscoëfficiënt van de lijn.

- a $6x - 2y = 13$
- b $2x = 7$
- c $15 - 2y = 3x$
- d $2(x + 2y) = 5$
- e $y = -5$
- f $6(y - 1) - 2(3 - x) = x + y - 4$

Opgave 6

Waarom beschrijven de volgende vergelijkingen dezelfde lijn?

- $2x + 4y = 12$
- $x + 2y = 6$
- $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Opgave 7

Bekijk de algemene vergelijking van een lijn l : $px + qy = r$.

- a Hoe loopt deze lijn als $p = 0$?
- b Hoe loopt deze lijn als $q = 0$?
- c Welke richtingscoëfficiënt hoort bij de lijn als $q = 0$?
- d Wat is er met l aan de hand als $r = 0$?

Voorbeeld 2

In de figuur is een lijn l getekend.

Stel bij lijn l exacte vergelijkingen op van de vormen $y = ax + b$ en $px + qy = r$.

Bepaal ook de snijpunten van l met de x - en y -as.

Antwoord

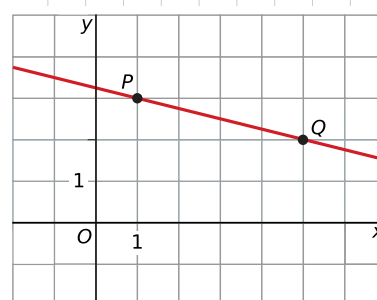
Gebruik de vorm $y = ax + b$ omdat de lijn niet evenwijdig is aan de y -as.

Het hellingsgetal $a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{2-3}{5-1} = -\frac{1}{4}$.

Dit geeft $y = -\frac{1}{4}x + b$.

$P(1,3)$ ligt op l . Dit invullen geeft $3 = -\frac{1}{4} \cdot 1 + b$ en dus $b = 3\frac{1}{4}$.

Een vergelijking van l in de vorm $y = ax + b$ wordt dan: $y = -\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4}$.



Figuur 2.5

Herleid deze vergelijking tot de vorm $px + qy = c$:

$$y = -\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4}$$

$$4y = -x + 13$$

$$x + 4y = 13$$

Dus een vergelijking van de vorm $px + qy = c$ wordt dan $x + 4y = 13$.

Het snijpunt met de y -as: $x = 0$ invullen in één van de vergelijkingen geeft $(0, 3\frac{1}{4})$.

Het snijpunt met de x -as: $y = 0$ invullen in één van de vergelijkingen geeft $(13, 0)$.

Opmerking: ga na welke vergelijking je het beste kunt gebruiken.

Opgave 8

Stel exacte vergelijkingen op van de vormen $y = ax + b$ en $px + qy = c$ van de lijn l die gaat door de punten $P(-2, 5)$ en $Q(-4, 6)$. Bereken de richtingscoëfficiënt van l en de snijpunten met de x -as en de y -as.

Opgave 9

Stel exacte vergelijkingen op van de vormen $y = ax + b$ en $px + qy = c$ van de lijn door $R(-22, -35)$ en $S(12, 25)$.

Bereken de richtingscoëfficiënt van deze lijn en de snijpunten met de x -as en y -as.

Opgave 10

Gegeven is de rechte lijn met vergelijking $3x + by = 1$. De lijn gaat door het punt $C(5, -2)$. Bereken de waarde van b .

Verwerken

Opgave 11

Gegeven zijn de lijnen $x + y = 6$, $y = 2x$, $x - 2y = 4$ en $x = 5$.

- Teken deze vier lijnen in een cartesisch assenstelsel.
- Van welke twee lijnen ligt het snijpunt het dichtst bij de oorsprong?

Opgave 12

In een cartesisch assenstelsel Oxy zijn de punten $A(2, 0)$, $B(7, 3)$ en $C(0, 5)$ gegeven.

- Stel een exacte vergelijking op van de lijn l door A en B in de vorm: $ax + by = c$.
- Geef een vergelijking in de vorm $ax + by = c$ van de lijn door C die evenwijdig is aan l .

Opgave 13

Gegeven zijn de volgende lijnen:

$$l : 7x + 2y = 14$$

$$m : -5x = 12$$

$$n : 14x = 28 - 4y$$

$$p : 7x + 2y = 15$$

$$q : 3y = 15 - 7x$$

$$r : y = -3\frac{1}{2}x + 3$$

- a Welke van deze lijnen zijn evenwijdig?
- b Welke van deze vergelijkingen horen bij dezelfde lijn?
- c Welke van deze vergelijkingen horen bij een roosterlijn?

Opgave 14

Lijn l is gegeven door $y = 5x - 2$. Lijn m is evenwijdig aan l en gaat door het punt $P(6,4)$ en kan geschreven worden in de vorm $ax + by = c$. Bepaal de waarden voor a , b en c , waarbij a , b en c zo klein mogelijke gehele getallen zijn.

Opgave 15

Gegeven is de lijn l met vergelijking $x - 2y = 6$.

- a Bepaal een vergelijking van de lijn die ontstaat door l te spiegelen in de x -as.
- b Bepaal een vergelijking van de lijn die ontstaat door l te spiegelen in de y -as.
- c Bepaal een vergelijking van de lijn die ontstaat door l te spiegelen in de lijn $y = x$.

Opgave 16

Een lijn l is gegeven door $y = 2x + 1$. Een andere lijn m is evenwijdig aan l en gaat door het punt $P(0,10)$ en kan geschreven worden in de vorm $px + qy = r$.

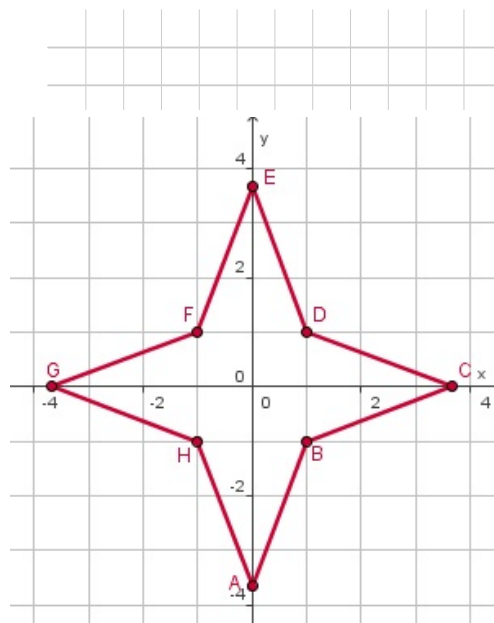
Bereken de drie bij elkaar horende waarden van p , q en r voor lijn m .

Toepassen

Opgave 17: Symmetrische ster

Bekijk de symmetrische ster die bestaat uit acht even grote lijnstukken. Eén van die lijnstukken ligt op de lijn met vergelijking $3x + y = 4$. De hoekpunten A , C , E en G liggen even ver van O af.

- Stel vergelijkingen op van de lijnen waarop de andere lijnstukken liggen.
- Bereken de totale omtrek van de ster in twee decimalen nauwkeurig.
- Bepaal de totale oppervlakte van de ster.



Figuur 2.6

Testen

Opgave 18

De lijn l gaat door $A(-10, 45)$ en $B(15, -5)$.

- Stel een vergelijking op van l in de vorm $ax + by = c$.
- Bereken de richtingscoëfficiënt van deze lijn en de snijpunten met de x - en de y -as.

Opgave 19

Gegeven is lijn $l : 4x - 5y = 20$.

- Stel een vergelijking op van de lijn door $P(3, 2)$ die evenwijdig is aan l .
- Stel een vergelijking op van de lijn m die ontstaat door l te spiegelen in de x -as.
- Stel een vergelijking op van de lijn n die ontstaat door l te spiegelen in de y -as.

Practicum: GeoGebra II

In GeoGebra kun je eenvoudig **vergelijkingen invoeren**. Dat doe je in de invoerbalk onderaan het venster. Je typt de formule gewoon in het vak achter de knop invoer en [ENTER]. Het sterretje * is het vermenigvuldigingsteken. De lijnen die je in dit onderdeel tegenkomt kun je zelf eenvoudig maken, gebruik eventueel de help-functie via het menu 'Help'; hij is vrij duidelijk en uitgebreid.



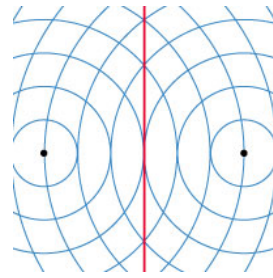
Figuur 2.7

Een vergelijking met **parameters** kan ook. Je voert dan eerst een waarde voor de parameter in, bijvoorbeeld $a = 2$ en dan $b = 1$ en $c = 6$. Vervolgens voer je een vergelijking in x en y in waar deze parameters in voorkomen, bijvoorbeeld $a \cdot x + b \cdot y = c$. Je kunt de parameters als schuifbalkjes zichtbaar maken door in het algebra-venster met de rechter muisknop op de parameter te klikken en 'object tonen' te kiezen.

2.3 Cirkels

Inleiding

Je hebt gezien hoe je rechte lijnen weer kunt geven met vergelijkingen in x en y . Maar hoe zit het nu met cirkels, parabolen en andere kromme lijnen? Je zult ontdekken hoe je ook cirkels kunt beschrijven met behulp van vergelijkingen. Maar het werken met vergelijkingen kan nog veel algemener worden toegepast: veel kromme lijnen kunnen door vergelijkingen worden beschreven...



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- hoe je een cirkel kunt beschrijven met een vergelijking in x en y ;
- berekenen of punten op, binnen of buiten een gegeven cirkel liggen;
- bij een gegeven cirkelvergelijking de cirkel tekenen.

Voorkennis

- werken met het begrip richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) van een rechte lijn;
- werken met cartesische coördinaten;
- de afstand tussen twee gegeven punten berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt al kennis gemaakt met vergelijkingen van lijnen. Je weet dat die de vorm $ax + by = c$ hebben. Benoem de verzameling van alle punten $P(x, y)$ die voldoen aan de genoemde vergelijkingen. Laat bijvoorbeeld GeoGebra de figuren maken door de vergelijkingen in te voeren, zie [Practicum](#).

- a $y = 2x + 6$
- b $x^2 + y^2 = 25$
- c $x^2 = 4$
- d $y = 25 - x^2$

Uitleg

Bekijk de applet

Een cirkel in de meetkunde bestaat uit alle punten die even ver van het middelpunt liggen. Je ziet cirkel c met middelpunt $M(4,3)$ en straal 3 in een cartesisch coördinatenstelsel.

Het bijzondere van alle punten op deze cirkel is, dat ze op afstand 3 van M liggen. Punten die niet op de cirkel liggen, hebben een andere afstand tot M .

Voor alle punten P op de cirkel geldt dus $|MP| = 3$.

$|MP|$ kun je in een cartesisch coördinatenstelsel met de stelling van Pythagoras berekenen: $|MQ|^2 + |QP|^2 = |MP|^2$.

Noem nu de coördinaten van $P(x, y)$. Bekijk de figuur en controleer dat, afhankelijk van de plek van P op de cirkel, geldt:

- $|MQ| = x - 4$ of $|MQ| = 4 - x$
- $|QP| = y - 3$ of $|QP| = 3 - y$

Een vergelijking van een cirkel met $M(4,3)$ en straal 3 ontstaat door dit in te vullen $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$.

Opmerking: punt M ligt zelf dus niet op de cirkel.

Opgave 1

Gegeven is de volgende formule voor een cirkel:

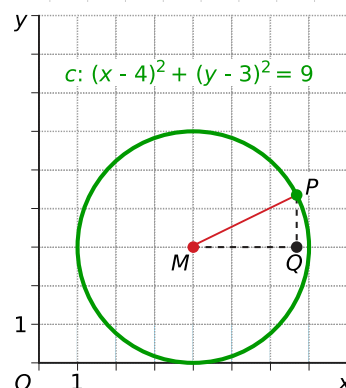
$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

- Controleer of de punten $(1,3)$, $(4,0)$, $(7,3)$ en $(4,6)$ inderdaad voldoen aan de gevonden formule voor de cirkel.
- Hoe kun je nagaan of het punt $P(6,5)$ binnen of buiten de gegeven cirkel ligt? (Denk eraan dat alleen tekenen geen bewijs is.)

Opgave 2

Teken zo nodig de volgende cirkels in een cartesisch assenstelsel.

- Welke vergelijking hoort bij de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 5?
- Welke vergelijking hoort bij de cirkel met middelpunt $M(3,1)$ en straal 2?
- Een cirkel heeft middelpunt $M(4, -1)$ en straal 5. Welke vergelijking heeft deze cirkel?



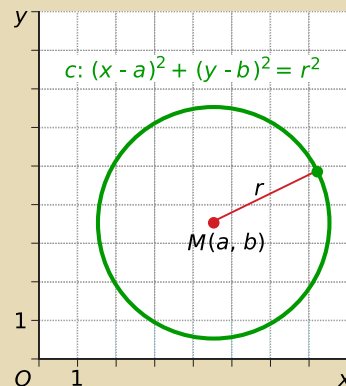
Figuur 3.2

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

De **vergelijking van een cirkel** in een cartesisch assenstelsel met middelpunt $M(a,b)$ en straal r is $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Bij een vergelijking in x en y die niet in deze vorm te schrijven is, hoort geen cirkel.



Figuur 3.3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Teken in een cartesisch assenstelsel de cirkel met vergelijking $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

Antwoord

Het middelpunt van de cirkel lees je uit de vergelijking af: $M(4,2)$. Voor de straal r geldt: $r^2 = 16$ en dus $r = \sqrt{16} = 4$.

Teken punt $M(4,2)$ en maak met de passer een cirkel met M als middelpunt en straal 4.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je de vergelijking van een cirkel.

Bekijk die cirkel in het assenstelsel. Bepaal alle roosterpunten op de cirkel.

Opgave 4

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de cirkel met de volgende vergelijking: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Bepaal alle roosterpunten op deze cirkel.

Voorbeeld 2**Bekijk de applet**

Teken in een cartesisch assenstelsel de cirkel met vergelijking $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 10$.

Antwoord

Het middelpunt van de cirkel lees je uit de vergelijking af: $M(4,2)$.

Voor de straal r geldt: $r^2 = 10$ en dus $r = \sqrt{10} \approx 3,16$.

Dit getal is een benadering. In dit geval kun je echter een roosterpunt op de cirkel vinden door in te zien dat $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{3^2+1^2}$. Alle punten die 3 rechts of links van M en tegelijk 1 onder of boven M liggen, zijn roosterpunten van de cirkel. Bijvoorbeeld $(4 + 3, 2 + 1) = (7,3)$. Dit kun je goed gebruiken om de cirkel te tekenen.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je de vergelijking van een cirkel.

Bekijk de cirkel in het assenstelsel. Bepaal alle roosterpunten op de cirkel.

Opgave 6

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de cirkel met vergelijking $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 13$. Bepaal alle roosterpunten op deze cirkel.

Opgave 7

Waarom liggen op de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 7$ geen roosterpunten?

Voorbeeld 3**Bekijk de applet**

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(-1,3)$ die gaat door het punt $P(1,2)$.

Antwoord

De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(a,b)$ en straal r is: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Omdat $M = (-1,3)$, wordt dit $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2$.

P invullen geeft: $(1 + 1)^2 + (2 - 3)^2 = r^2$. Dus $r^2 = 5$.

De gevraagde vergelijking wordt $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Opgave 8

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(3,4)$ die gaat door punt $P(-1,7)$. Laat zien dat deze cirkel ook door de oorsprong $O(0,0)$ gaat.

Opgave 9

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(-10,25)$ die gaat door punt $A(-4,21)$. Onderzoek of deze cirkel ook door $B(-5,20)$ gaat.

Verwerken**Opgave 10**

Stel de vergelijking van de cirkels op.

- a Met middelpunt $M(1,2)$ en straal 3.
- b Met middelpunt $M(-2,3)$ en straal 2,5.
- c Met middelpunt $M(4,-5)$ door $P(8,10)$.
- d Met middelpunt $M(-2,-6)$ door $P(3,3)$.

Opgave 11

Gegeven is een cirkel in een cartesisch assenstelsel die aan de vergelijking $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 17$ voldoet. Bepaal alle roosterpunten die op de cirkel liggen

Opgave 12

In een cartesisch assenstelsel zijn de drie punten $A(2,0)$, $B(7,3)$ en $C(0,5)$ gegeven.

- a Stel een vergelijking op van de cirkel door C met middelpunt A .
- b Stel een vergelijking op van de cirkel door B en C waarvan het middelpunt op lijnstuk BC ligt. Onderzoek of deze cirkel ook door A gaat.

Opgave 13

Gegeven zijn de punten $P(0,4)$ en $Q(4,0)$ in een cartesisch assenstelsel Oxy .

- a Welk middelpunt heeft de cirkel die door de oorsprong O en door P en Q gaat?
- b Stel de vergelijking van deze cirkel op en teken de cirkel.
- c Hoeveel roosterpunten liggen op of binnen deze cirkel?

Opgave 14

De lijn met vergelijking $2x + 3y = 6$ snijdt de x - en y -as in de punten A en B . Er gaat een cirkel door deze twee punten met als middelpunt het midden van lijnstuk AB .

Stel een vergelijking van deze cirkel op.

Toepassen**Opgave 15: Stelling van Thales**

Door de drie hoekpunten van een rechthoekige driehoek kun je altijd een cirkel tekenen waarvan het middelpunt op de schuine zijde ligt. Thales van Milete merkte dit als eerste op (omstreeks 600 voor Christus).

- a Kun je met behulp van eenvoudige meetkunde laten zien dat dit voor elke rechthoekige driehoek geldt?

- b** Neem een rechthoekige driehoek met rechthoekzijden van a cm en b cm. Kies een cartesisch assenstelsel Oxy zo, dat O het hoekpunt met de rechte hoek is en de rechthoekzijden langs de assen liggen. Toon met een berekening aan dat deze rechthoekige driehoek de genoemde eigenschap heeft.

Opgave 16: GPS-ontvanger

Een GPS-ontvanger meet hoever verschillende satellieten van je vandaan zijn door hun signalen op te vangen. Door deze afstanden te combineren, wordt je positie bepaald. Veronderstel dat elke satelliet het afstandssignaal in een cirkelvorm uitzendt.

- a** Hoeveel satellieten heb je minimaal nodig om je positie vast te stellen?
- b** Met de volgende drie cirkelvergelijkingen wordt je positie (het snijpunt van de drie cirkels) bepaald. Teken de drie cirkels in een cartesisch assenstelsel en geef de coördinaten van je positie.

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

$$(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 13$$

$$(x - 5)^2 + y^2 = 10$$

Testen

Opgave 17

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$.

- a** Bepaal het middelpunt en de straal van deze cirkel en teken de cirkel in een Oxy -assenstelsel.
- b** Toon aan dat $A(5,1)$ op deze cirkel ligt.
- c** Toon aan dat $B(1,3)$ buiten cirkel c ligt.

Opgave 18

Stel een vergelijking op van de cirkel door de punten $A(1,0)$ en $B(5,0)$ waarvan het middelpunt op de lijn $y = 4$ ligt. Bepaal alle roosterpunten op deze cirkel.

Practicum: GeoGebra III

Je hebt nu hopelijk een aantal keren met GeoGebra gewerkt (loop anders GeoGebra I en II nog een keer door).

In GeoGebra kun je eenvoudig **vergelijkingen invoeren**. Dat doe je in de invoerbalk onderaan het venster. Je typt de formule gewoon in het vak achter de knop invoer en [ENTER]. Het sterretje * is het vermenigvuldigingsteken. De lijnen die je in dit onderdeel tegenkomt kun je zelf eenvoudig maken, gebruik eventueel de help-functie via het menu 'Help'; hij is vrij duidelijk en uitgebreid.



Figuur 3.4

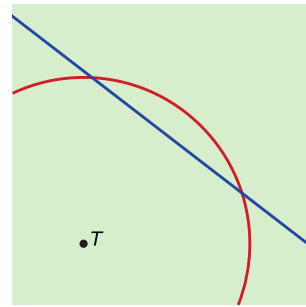
Een vergelijking met een **parameter** kan ook. Je voert dan eerst een waarde voor de parameter in, bijvoorbeeld $p = 2$ en dan $b = 1$ en $c = 6$. Vervolgens voer je een vergelijking in x en y in waar deze parameter in voorkomt. (Ook nu kan niet alles, maar wel veel...) Je kunt de parameter als schuifbalk zichtbaar maken door in het algebrafenster met de rechter muisknop op de parameter te klikken en 'object tonen' te kiezen.



2.4 Snijden

Inleiding

Stel je een uitgestrekt en nogal leeg gebied voor met daarin een rechte weg. Je wilt telefoneren want je weet niet of je de goede kant op rijdt. Maar telefoonmasten hebben een beperkt bereik, bij T staat er één met een bereik van 30 km. Tussen welke punten op de weg kun je bellen? Het gaat dus om de snijpunten van een lijn en een cirkel. Bij het berekenen van snijpunten kun je de analytische aanpak van meetkundige problemen goed gebruiken.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- het snijpunt berekenen van twee lijnen;
- snijpunten berekenen van een lijn en een cirkel;
- snijpunten berekenen van twee cirkels.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen van (rechte en kromme) lijnen in het platte vlak;
- systematisch lineaire en kwadratische vergelijkingen oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Kies het assenstelsel en de eenheden zo dat de cirkel middelpunt $O(0,0)$ en een straal van 5 cm heeft. De lijn gaat door de punten $(0,5)$ en $(10,0)$.

Bepaal de coördinaten van de snijpunten van de lijn met de cirkel en bepaal de lengte van het stuk lijn binnen de cirkel.

Uitleg 1

Je wilt het snijpunt van de lijnen $l : x + 2y = 8$ en $m : 3x - 4y = 12$ berekenen. Daarvoor bestaan meerdere methodes:

- Methode I (één variabele vrijmaken en gelijkstellen): je herleidt beide vergelijkingen tot de vorm $y = ax + b$. Je stelt beide uitdrukkingen in x aan elkaar gelijk. Je lost de vergelijking op. Je berekent y .
- Methode II (substitutiemethode): je kiest een vergelijking en herleidt deze tot $x = \dots$ of $y = \dots$.
Bijvoorbeeld herleid je $x + 2y = 8$ tot $x = 8 - 2y$.
Je vult dit in de andere vergelijking in: $3(8 - 2y) - 4y = 12$.
Je lost deze vergelijking op. Je vult de uitkomst in de andere vergelijking in en vindt daarmee de andere variabele.

- Methode III (balansmethode): je kunt ook beide vergelijkingen optellen of aftrekken links en rechts van het isgelijktteken. Maar daar heb je alleen wat aan als of de x of de y als variabele wegvalt. Door in de eerste vergelijking links en rechts met 2 te vermenigvuldigen, wordt:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases} \text{ omgezet naar: } \begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$$

Tel nu beide vergelijkingen links en rechts van het isgelijktteken op. Je krijgt: $5x = 28$ en dus $x = 5,6$. De bijbehorende y -waarde vind je uit $5,6 + 2y = 8$.

Dit zijn drie methodes om een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden op te lossen.

Opgave 1

Bestudeer **Uitleg 1**. Het is nuttig om alle drie de oplossingsmethodes goed te beheersen, soms is de ene dan weer de andere methode handiger.

- Bereken de snijpunten van de lijnen l en m met behulp van de eerste methode. Doe dit algebraïsch.
- Bereken de snijpunten van l en m ook met de tweede methode.
- En werk ten slotte de derde methode nog een keer door.

Opgave 2

Bereken het snijpunt van l en m in de volgende gevallen.

- $l : 2x - 3y = 6$ en $m : x + 4y = 10$
- $l : 4x + 12 = 0$ en $m : 5x + 2y = 20$

Opgave 3

Welke van de drie methodes werkt het beste als je het snijpunt van de lijnen $p : 5x - 3y = 15$ en $q : 2x - 6y = 11$ wilt berekenen? Bereken dit snijpunt.

Opgave 4

Bereken het snijpunt van $l : 2x + 3y = 6$ en $m : y = 4 - \frac{2}{3}x$. Wat gaat er mis en hoe kun je dit verklaren?

Opgave 5

Het snijpunt van twee lijnen bereken je door het stelsel van lineaire vergelijkingen op te lossen.

- Hoeveel snijpunten hebben de lijnen $x + 2y = 6$ en $2x + 4y = 10$?
- Hoeveel snijpunten hebben de lijnen $x + 2y = 6$ en $2x + 4y = 12$?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Stel je wilt de (eventuele) snijpunten van een cirkel met een lijn berekenen. Je ziet een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en een straal van 5 en een lijn door $(0,4)$ en door $(8,0)$. Om de snijpunten P en Q te berekenen, stel je eerst de vergelijkingen van de lijn en de cirkel op:

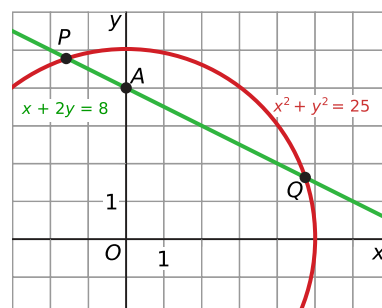
- cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$
- lijn $l : x + 2y = 8$

Dit stelsel los je op met de substitutiemethode. Dat kan door de vergelijking van de lijn (die is lineair) te herleiden naar de vorm $x = \dots$ of $y = \dots$. Bijvoorbeeld: $x = -2y + 8$. Vervolgens vul je dit in de cirkelvergelijking in: $(-2y + 8)^2 + y^2 = 25$.

Haakjes wegwerken geeft: $5y^2 - 32y + 39 = 0$.

Oplossingen: $y \approx 1,64$ v $y \approx 4,76$ (met de abc-formule of met de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig).

De snijpunten zijn: $P(-1,52; 4,76)$ en $Q(4,72; 1,64)$.



Figuur 4.2

Opgave 6

In **Uitleg 2** zie je hoe je snijpunten van een lijn en een cirkel berekent. Bereken op dezelfde manier een snijpunt van de cirkel c met de lijn $m : 2x - y = 4$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 7

Hoeveel gemeenschappelijke punten kunnen een lijn en een cirkel hebben?

Opgave 8

Bereken het snijpunt van $k : y = -0,75x + 6,25$ met de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **snijpunten** van twee lijnen, een lijn en een cirkel, of twee cirkels, zijn de punten die op beide lijnen en/of cirkels liggen. Je berekent ze door het bijbehorende **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** op te lossen:

- Het snijpunt van twee rechte lijnen kun je berekenen door een van beide te herleiden tot de vorm $x = \dots$ of $y = \dots$. Je vult dan de gevonden uitdrukking in de andere vergelijking in. Maar soms werkt de balansmethode beter: je telt dan de linkerzijden en de rechterzijden van beide vergelijkingen bij elkaar op of trekt ze van elkaar af, waarbij je ervoor zorgt dat een van de variabelen wegvalt.

- De snijpunten van een rechte lijn met een cirkel kun je berekenen door de vergelijking van de lijn te herleiden tot de vorm $x = \dots$ of $y = \dots$. Je substitueert dan de gevonden uitdrukking in de vergelijking van de cirkel.
- De snijpunten van twee cirkels bereken je door in beide vergelijkingen de haakjes weg te werken en dan met behulp van de balansmethode alle kwadraten te laten wegvallen. Je houdt dan een lineair verband over in de vorm $x = \dots$ of $y = \dots$ dat je in een van beide cirkelvergelijkingen invult.

Zijn er geen oplossingen, dan spreek je van een **strijdig stelsel**. Je hebt dan bijvoorbeeld te maken met twee evenwijdige rechte lijnen of twee cirkels die elkaar niet snijden.

Beschrijven de twee vergelijkingen dezelfde lijn of dezelfde cirkel, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen. Dan is sprake van een **afhankelijk stelsel**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Bekijk de figuur. Je ziet de twee rechten $l : 2x - y = 2$ en $m : x + 3y = 4$.

Bereken het snijpunt.

m is een rechte uit de familie $m_p : x + py = 4$. Door parameter p te variëren kun je ervoor zorgen dat l en m_p geen snijpunt hebben. Voor welke waarde van p is dit het geval?

Antwoord

Schrijf de vergelijking van l als $y = 2x - 2$. Vul dit in de vergelijking van m in: $x + 3(2x - 2) = 4$. Dit geeft $x = \frac{10}{7}$ en $y = 2 \cdot \frac{10}{7} - 2 = \frac{6}{7}$.

Het snijpunt is $(\frac{10}{7}, \frac{6}{7})$.

Nu wil je p berekenen als l en m_p geen snijpunt hebben. Weer schrijf je de vergelijking van l als $y = 2x - 2$.

Vul dit in de vergelijking van m_p in: $x + p(2x - 2) = 4$.

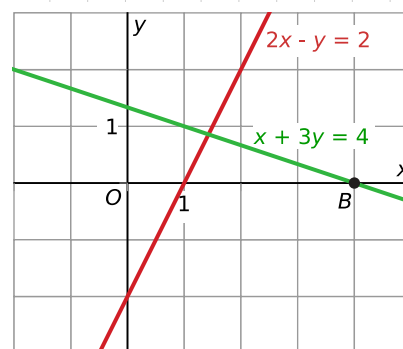
Dit geeft: $(1 + 2p)x = 4 + 2p$.

Deze laatste vergelijking heeft geen oplossingen als $1 + 2p = 0$.

Dus alleen voor $p = -0,5$ hebben l en m_p geen snijpunt.

Een andere methode is de volgende: schrijf beide vergelijkingen van de lijnen in de vorm $y = \dots$, je krijgt $l : y = 2x - 2$ en $m_p : y = -\frac{1}{p}x + \frac{4}{p}$.

De lijnen snijden elkaar niet als ze evenwijdig lopen, de richtingscoëfficiënten moeten dus hetzelfde zijn. Er moet dan gelden $2 = -\frac{1}{p}$ en dit geeft $p = -0,5$.



Figuur 4.3

Opgave 9

In **Voorbeeld 1** wordt het snijpunt van l en m berekend door substitutie. Daarbij wordt de vergelijking van l herleid naar $y = \dots$. Voer deze berekening nog eens uit, maar nu door de vergelijking van m te herschrijven en dan in te vullen.

Opgave 10

Bereken het snijpunt van l en m in **Voorbeeld 1** met de balansmethode.

Opgave 11

Bereken het snijpunt van l en m in de volgende gevallen.

- a** $l : 2x - 3y = 6$ en $m : x + 4y = 10$
b $l : 4y = -12$ en $m : 5x + 2y = 20$

Opgave 12

Kijk nog eens naar **Voorbeeld 1**.

- a** Laat zien dat de waarde van p waarvoor beide lijnen evenwijdig zijn, inderdaad betekent dat beide lijnen dezelfde richtingscoëfficiënt hebben.
b Gegeven zijn de lijnen $l : x + 5y = 12$ en $m_p : px - y = 4$. Voor welke waarde van p hebben deze lijnen geen snijpunt?

Voorbeeld 2

Bereken de snijpunten van de volgende cirkels:

$$c_1 : x^2 + y^2 = 25 \text{ en } c_2 : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

Antwoord

Het beste kun je nu in de vergelijking van c_2 de haakjes wegwerken:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = -4.$$

Vervolgens pas je de balansmethode toe op het stelsel:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y = -4 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Je ziet dat door de beide linkerzijden en de beide rechterzijden van elkaar af te trekken, er een lineaire vergelijking overblijft:

$$-4x - 6y = -29 \text{ ofwel: } x = -1,5y + 7,25.$$

Dit vul je in een van beide cirkelvergelijkingen in: $(-1,5y + 7,25)^2 + y^2 = 25$.

Hieruit bereken je de twee y -waarden van de snijpunten.

De twee x -waarden vind je met $x = -1,5y + 7,25$.

Opgave 13

Voer de berekening van **Voorbeeld 2** zelf uit. Rond je antwoord af op één decimaal.

Opgave 14

Bereken de snijpunten van de cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 25$ en $c_2 : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$. Geef je antwoorden in één decimaal nauwkeurig.

Verwerken**Opgave 15**

Bereken (waar nodig in twee decimalen nauwkeurig) de snijpunten.

- a lijn $l : x + y = 6$ met cirkel $c_1 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$.
- b lijn $m : 5x - 2y = 10$ met lijn $k : 2x = 12 - 3y$.
- c cirkel $c_1 : x^2 + y^2 = 6$ met cirkel $c_2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

Opgave 16

Bereken de snijpunten van de cirkel $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$ met de gegeven lijnen.

- a de x-as.
- b de y-as.
- c de lijn $k : x + y = 1$ (in twee decimalen nauwkeurig).

Opgave 17

Bereken hoeveel punten de cirkel $c : (x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 52$ en de lijn $l : 12x + 8y = 24$ met elkaar gemeen hebben.

Opgave 18

Voor welke waarde van a hebben de lijnen $ax + 4y = 10$ en $2x = y + 6$ geen snijpunt?

Opgave 19

Gegeven zijn de cirkels $c_1 : x^2 + (y - 2)^2 = 9$ en $c_2 : (x - 2)^2 + y^2 = 9$. Lijn l gaat door de middelpunten van beide cirkels.

- a Bereken de snijpunten van c_1 met c_2 in twee decimalen nauwkeurig.
- b Bereken de snijpunten van c_1 met de x- en y-as.
- c Bereken de snijpunten van c_1 met l in twee decimalen nauwkeurig.
- d Lijn l heeft in totaal vier snijpunten met beide cirkels. Wat is de grootste afstand tussen twee van die snijpunten in één decimaal nauwkeurig?

Opgave 20

Als je in een cirkel twee lijnen trekt die allebei door het middelpunt M van de cirkel gaan, dan vormen de vier snijpunten van die lijnen met de cirkel een rechthoek. Deze stelling kun je met analytische meetkunde bewijzen.

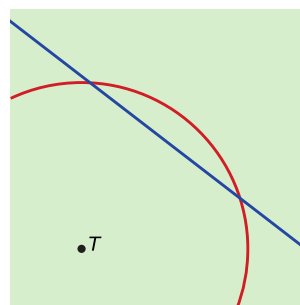
- a In een assenstelsel is $O(0,0)$ het middelpunt van de cirkel en het punt $(1,0)$ een punt op de cirkel. Welke vergelijking heeft de cirkel dan?

- b De ene lijn door het middelpunt van de cirkel is bijvoorbeeld de x -as, de andere is dan $y = ax$. Welke vier snijpunten met de cirkel vind je dan?
- c Waarom vormen deze vier punten een rechthoek?
- d Kun je ook een bewijs geven zonder analytische meetkunde?

Toepassen

Opgave 21: Mobiele telefonie

Mobiele telefoons hebben soms 'geen bereik'. Dat betekent dat er geen mast voor telecommunicatie in de buurt is waarmee je mobiele telefoon in verbinding kan staan. Stel je voor dat zo'n telefoon een bereik heeft van dertig kilometer. Op vijftien kilometer van de snelweg A1 staat zo'n mast voor telecommunicatie. Gedurende hoeveel kilometer kun je rijdend op de A1 via die mast verbinding maken met je mobiele telefoon? Ga uit van een recht stuk snelweg. Probeer dit met analytische meetkunde op te lossen.



Figuur 4.4

Opgave 22: Gelijkzijdige driehoek

Met een passer kun je gemakkelijk een gelijkzijdige driehoek construeren. Kies twee punten A en B en omcirkel AB vanuit punt A en daarna vanuit punt B . Markeer vervolgens één van de twee snijpunten van die cirkels als punt C . $\triangle ABC$ is dan de gewenste gelijkzijdige driehoek. Neem een cartesisch assenstelsel met $A(-a,0)$ en $B(a,0)$ en $a > 0$.

- a Cirkel c_1 heeft middelpunt A en straal AB . Stel een vergelijking voor c_1 op.
- b Cirkel c_2 heeft middelpunt B en straal AB . Stel een vergelijking voor c_2 op.
- c Bereken de snijpunten van c_1 en c_2 .
- d Noem één van beide snijpunten C en laat met behulp van de coördinaten van A , B en C zien dat de afstanden tussen deze drie punten even groot zijn.

Testen

Opgave 23

Bereken algebraïsch de snijpunten.

- a Lijn $l : x + 4y = 12$ met lijn $m : 2x - 3y = -20$.
- b Lijn $l : x + 4y = 12$ met cirkel $c : (x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 34$.
- c De cirkel $c : (x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 34$ met de cirkel $k : x^2 + (y + 3)^2 = 13$.

Opgave 24

Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(2,1)$ en straal 4 en lijn l die door de punten $(0,3)$ en $(5,0)$ gaat. Bereken de afstand tussen de snijpunten van l en c in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 25

Voor welke waarde van p hebben de lijnen $2x + 7y = 28$ en $px - y = 15$ geen snijpunt?

Practicum: GeoGebra IV

Je kunt GeoGebra heel goed gebruiken om rechten en krommen met een gegeven vergelijking in beeld te brengen. Je ziet dan meteen of er snijpunten zijn. En met GeoGebra kun je gemakkelijk snijpunten van twee (rechte of kromme) lijnen in de figuur aangeven. Door vervolgens met de rechter muisknop bij de eigenschappen van het snijpunt het label aan te zetten en te kiezen voor 'Naam en waarde', krijgt het snijpunt een naam en kun je er de coördinaten gemakkelijk van aflezen. Op deze manier kun je gemakkelijk antwoorden controleren...

2.5 Hoeken

Inleiding

Bij het ontwerpen van een gebouw of een brug of viaduct spelen hoeken en afstanden, lengtes, een grote rol. Bij ontwerpen wordt gebruik gemaakt van technische teken- en berekensoftware. Voorbeelden daarvan zijn AutoCAD en Illustrator. Bedenk dat computers alles (dus ook tekst, muziek en tekeningen) verwerken in getallen. Dan begrijp je waarom coördinaten zo belangrijk zijn voor het tekenen op computers.

Je leert in dit onderwerp

- de hoek tussen twee lijnen berekenen;
- bepalen wanneer twee lijnen loodrecht op elkaar staan;
- de vergelijking opstellen van een lijn loodrecht op een gegeven lijn en door een gegeven punt.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen van (rechte en kromme) lijnen in het platte vlak;
- het hellingsgetal berekenen van een lijn door twee punten;
- snijpunten van rechte en/of kromme lijnen berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is een lijn met vergelijking $2x + 4y = 9$.

- Welke vergelijking heeft de lijn door $O(0,0)$ die er loodrecht op staat?
- Ontdek je een verband tussen beide vergelijkingen?

Uitleg 1

Bekijk de applet

Om de hoek tussen twee lijnen te berekenen, bereken je de grootte van de hellingshoek (de hoek met de x -as) van beide lijnen. Deze hellingshoeken trek je van elkaar af.

Bekijk de figuur.

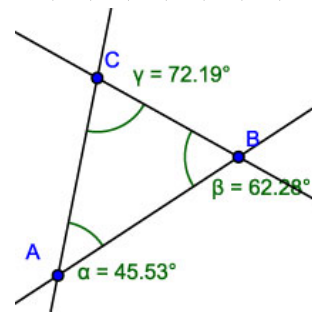
Je ziet de lijnen $l : y = 0,25x + 1$ en $m : y = 0,5x$.

De grootte van de hellingshoek van l bereken je zo:

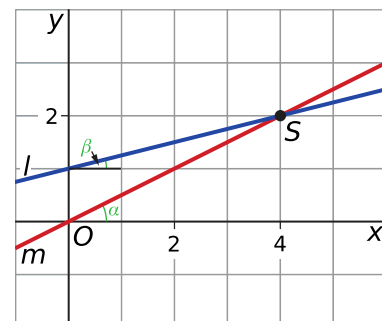
- l heeft als hellingsgetal, ofwel richtingscoëfficiënt $0,25$.
Je ziet in de figuur een rechthoekige driehoek waarvoor geldt:
 $\tan(\beta) = \frac{0,25}{1} = 0,25$ en dus is $\beta \approx 14,04^\circ$;

Om terug te rekenen vanuit de tangens gebruik je $\arctan(0,25)$. De grafische rekenmachine kent hiervoor een functie als $\tan^{-1}$, of $\arctan$.

- Voor m geldt $\tan(\alpha) = 0,5$. Dan is $\alpha = \arctan(0,5) \approx 26,57^\circ$.



Figuur 5.1



Figuur 5.2

Bereken de hoek tussen de lijnen: $26,57^\circ - 14,04^\circ \approx 12,53^\circ$.

Opmerking: bij een negatieve richtingscoëfficiënt hoort ook een negatieve richtingshoek, je draait als het ware de andere kant op vanuit de x-as. De hellingshoek ligt zo altijd tussen de -90° en 90° .

Opgave 1

Bestudeer [Uitleg 1](#).

- Bereken op dezelfde manier de hoek tussen de lijnen $l : y = 0,5x$ en $k : x - 3y = 6$.
- Bereken op dezelfde manier de hoek tussen de lijnen $l : y = 0,5x$ en $k : x + 3y = 6$.

Opgave 2

Moet je bij het berekenen van de hoek tussen twee lijnen altijd de twee hellingshoeken van elkaar aftrekken?

Uitleg 2

[Bekijk de applet](#)

Je ziet dat de lijnen $l_p : y = px + 3$ en $m : y = 0,5x$ loodrecht op elkaar staan als $p = -2$. Dat kun je als volgt aantonen.

Als beide lijnen loodrecht op elkaar staan, zijn de twee rechthoekige driehoeken OPQ en ALK gelijkvormig. Immers $\angle POQ(\alpha)$ en $\angle LAK(\beta)$ zijn dan samen 90° . Maar $\angle POQ$ en $\angle OQP$ zijn ook samen 90° , dus $\angle OQP = \angle LAK$. Beide driehoekjes hebben dezelfde hoeken en zijn dus gelijkvormig. Hun zijden hebben dezelfde verhoudingen en dus is $\frac{|PQ|}{1} = \frac{1}{|LK|}$. Omdat $|PQ| = 0,5$ vind je $|LK| = 2$.

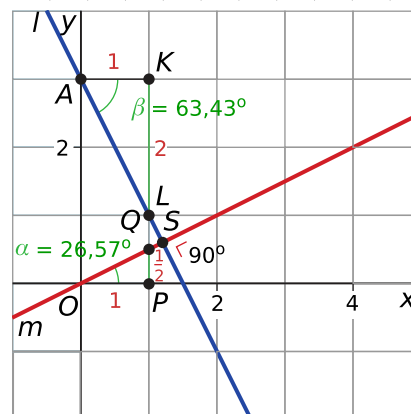
Hieruit blijkt dat een lijn die loodrecht staat op een lijn met een richtingscoëfficiënt van $0,5$, zelf een richtingscoëfficiënt van -2 heeft. Het product van deze twee hellingsgetallen is -1 en dat blijkt altijd het geval te zijn bij lijnen die elkaar loodrecht snijden (tenzij een van beide een verticale lijn is).

Opgave 3

Toon aan dat de lijnen $p : y = 0,25x$ en $q : y = -4x + 3$ loodrecht op elkaar staan.

Opgave 4

Welk hellingsgetal heeft de lijn die loodrecht staat op $k : 2x - 5y = 10$?



Figuur 5.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Elke rechte lijn heeft een vergelijking van de vorm $ax + by = c$.

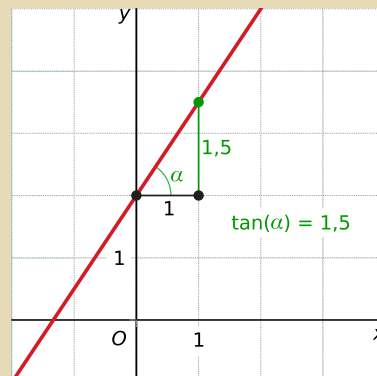
Dit is te herleiden tot $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ mits $b \neq 0$.

Dit betekent dat elke lijn (behalve een lijn evenwijdig aan de y -as) een **richtingscoëfficiënt** (hellingsgetal) van $r = -\frac{a}{b}$ heeft en te schrijven is in de vorm $y = rx + q$.

Bij de richtingscoëfficiënt r hoort een **richtingshoek** (hellingshoek) α , de hoek die de lijn met de positieve x -as maakt. Deze hoek ligt tussen -90° en 90° .

Er geldt: $\tan(\alpha) = r$ als $r \geq 0$ en $\tan(\alpha) = -r$ als $r < 0$. Met behulp van deze hellingshoeken bereken je de **hoek** die twee lijnen met elkaar maken.

Als voor twee lijnen l en m met richtingscoëfficiënten r_l en r_m geldt $r_l \cdot r_m = -1$, dan staan beide lijnen **loodrecht** op elkaar. Staan omgekeerd twee lijnen l en m met richtingscoëfficiënten r_l en r_m loodrecht op elkaar, dan geldt $r_l \cdot r_m = -1$.



Figuur 5.4

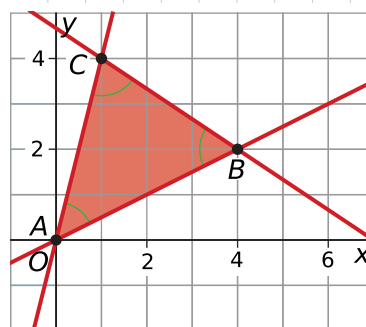
Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Hoe bereken je de hoeken van een driehoek ABC ?

Antwoord

Bepaal eerst de hellingsgetallen van de drie lijnen. Daarmee kun je de hoeken tussen de lijnen en de x -as berekenen. Vervolgens kun je de hoeken tussen de lijnen berekenen door de hoeken met de x -as van elkaar af te trekken. Let wel goed op dat je steeds de goede hoek berekent. Als je antwoord hoger is dan 90° , dan moet je dat nog van 180° aftrekken.



Figuur 5.5

Opgave 5

Bereken zelf de hoeken van driehoek ABC met $A(0,0)$, $B(4,2)$ en $C(1,4)$.

Opgave 6

Gegeven zijn de punten $A(1,1)$, $B(4,-2)$ en $C(2,4)$. Door deze punten gaan drie lijnen.

- Bereken de hoeken die deze drie lijnen onderling maken.
- De drie punten zijn de hoekpunten van een driehoek. Waarom is de som van de drie hoeken uit het vorige onderdeel geen 180° ?

Voorbeeld 2**Bekijk de applet**

Van driehoek ABC is $A(0,0)$, $B(5;2,5)$ en $C(3,4)$.

$\angle C$ is een rechte hoek en de lijnen AC en BC staan loodrecht op elkaar. Toon dat aan.

Antwoord

De richtingscoëfficiënt van lijn AC is $\frac{4}{3}$. De richtingscoëfficiënt van lijn BC is $\frac{4-2,5}{3-5} = -\frac{3}{4}$.

Het product van beide richtingscoëfficiënten is $\frac{4}{3} \cdot -\frac{3}{4} = -1$ en daarom staan beide lijnen loodrecht op elkaar.

Door de punten te verplaatsen, kun je veel meer rechthoekige driehoeken vinden. De berekeningen zijn dan hetzelfde, maar met andere getallen.

Opgave 7

In driehoek ABC met $A(2, -1)$, $B(7, -2)$ en $C(3,4)$ staan AB en AC loodrecht op elkaar. Toon dat aan.

Opgave 8

Toon aan dat lijn l door $O(0,0)$ en $P(2,5)$ loodrecht staat op lijn m door $P(4,5)$ en $Q(9,3)$.

Voorbeeld 3**Bekijk de applet**

Gegeven zijn de lijn $l : 2x + 3y = 6$ en punt $A(3,4)$. Stel de vergelijking op van de lijn die door het punt A gaat en loodrecht op lijn l staat.

Antwoord

Teken de situatie.

Ga na, dat lijn l een richtingscoëfficiënt heeft van $-\frac{2}{3}$. Als een lijn die daar loodrecht op staat een richtingscoëfficiënt heeft van r , dan is $-\frac{2}{3} \cdot r = -1$. De lijn door A en loodrecht op l heeft dus een richtingscoëfficiënt van $1,5$. En daarom een vergelijking van de vorm $y = 1,5x + b$.

De lijn gaat door $A(3,4)$ en dus moet $4 = 1,5 \cdot 3 + b$. Dus $b = -0,5$ en de vergelijking wordt $y = 1,5x - 0,5$. Ga na dat dit in overeenstemming is met de grafiek.

Opgave 9

Gegeven is de lijn $p : 3x - 4y = 12$. Stel een vergelijking op van de lijn q door $O(0,0)$ en loodrecht op p .

Opgave 10

Gegeven zijn de punten $A(-2,5)$, $B(8,0)$ en $C(-2,1)$. Stel een vergelijking op van de lijn door C die loodrecht staat op lijn AB .

Verwerken**Opgave 11**

Bereken de hoek tussen de lijnen l en m .

- a $l : y = -3x + 2$ en $m : 4x - 2y = 9$
- b $l : x + y = 6$ en $m : 3x + 4y = 8$
- c $l : 7x - 3y = 42$ en $m : 3x + 7y = 35$

Opgave 12

Stel een vergelijking op van de lijn door $P(120,31)$ die loodrecht staat op de lijn met vergelijking $25x - 40y = 167$.

Opgave 13

De middelloodlijn van een lijnstuk AB is een lijn door het midden M van AB die loodrecht op AB staat. Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van lijnstuk AB als $A(1,5)$ en $B(6,2)$.

Opgave 14

Een lijn l snijdt de x -as in $A(3,0)$ onder een hoek van 60° . Stel een mogelijke vergelijking op van lijn l . Zijn er meerdere mogelijkheden? Geef een verklaring.

Opgave 15

Gegeven is driehoek ABC door de hoekpunten $A(0,2)$, $B(5,4)$ en $C(2,5)$.

- a Bereken de drie hoeken van deze driehoek in hele graden nauwkeurig.
- b Stel een vergelijking op van de lijn p door C loodrecht op AB .
- c D is het snijpunt van lijn p met de lijn AB . Bereken de coördinaten van D .
- d De lengte van de hoogtelijn CD is de hoogte van driehoek ABC als je AB als basis neemt. Bereken de oppervlakte van driehoek ABC met behulp van hoogte CD .
- e Je kunt de oppervlakte van driehoek ABC ook vinden door gebruik te maken van het rooster. Ga na, dat je dan hetzelfde antwoord vindt.

Toepassen

Opgave 16: Kortste afstand tot lijn

Gegeven is de lijn $l : 2x + 5y = 10$. De kortste afstand van de oorsprong O van het assenstelsel tot deze lijn l kun je berekenen.

- Stel een vergelijking op van de lijn m door O en loodrecht op l .
- Bereken het snijpunt S van m en l .
- De kortste afstand van O tot de lijn l is nu $|OS|$. Bereken $|OS|$.
- Deze kortste afstand kun je ook met behulp van gelijkvormigheid berekenen. Laat zien hoe.

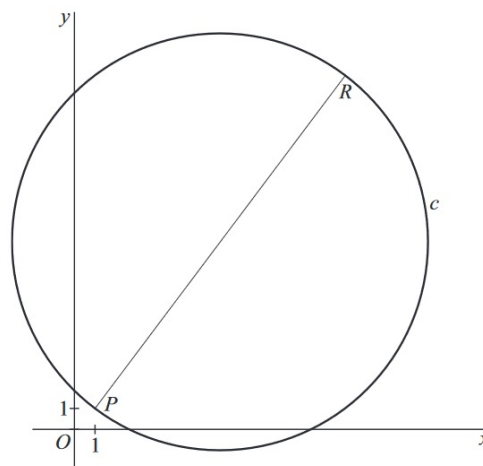
Opgave 17: Cirkel om vierhoek

Gegeven zijn de punten $P(1,1)$ en $R(13,17)$. PR is een middellijn van cirkel c . Zie de grafiek.

Een vergelijking van cirkel c is $(x - 7)^2 + (y - 9)^2 = 100$.

- Toon dit aan.
Punt S ligt op de cirkel en heeft dezelfde x -coördinaat als punt P . Lijn l gaat door S en staat loodrecht op lijnstuk PR .
Lijn l heeft als vergelijking $y = -\frac{3}{4}x + 17\frac{3}{4}$.
- Toon dit aan.
Punt Q ligt zo op cirkel c , dat vierhoek $PQRS$ symmetrisch is ten opzichte van diagonaal PR .
- Bereken de coördinaten van punt Q .

(bron: pilotexamen wiskunde havo B in 2011, tweede tijdvak)



Figuur 5.6

Testen

Opgave 18

Bereken de hoek tussen de lijnen $l : 2x - y = 10$ en $m : x - 4y = 12$ in hele graden nauwkeurig.

Opgave 19

Staan de lijnen $p : -30x + 20y = 33$ en $q : 2x = 100 - 3y$ loodrecht op elkaar? Licht je antwoord toe.

Opgave 20

Gegeven is het punt $P(12,44)$ en de lijn l met vergelijking $12x - 36y = 720$. De lijn door P loodrecht op l snijdt l in punt Q . Stel een vergelijking op voor deze lijn en bereken daarmee de lengte van het lijnstuk PQ .

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het berekenen van de richtingscoëfficiënt van een lijn door twee punten en een lijn loodrecht daarop**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen.

Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Analytische meetkunde** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- cartesisch coördinatenstelsel — midden van een lijnstuk — lengte van een lijnstuk
- vergelijking van een (rechte) lijn
- vergelijking van een cirkel met gegeven middelpunt en straal
- snijpunten — stelsel vergelijkingen — strijdig stelsel
- richtingscoëfficiënt en hellingshoek — hoek van twee lijnen — loodrechte stand

Activiteitenlijst

- een cartesisch assenstelsel invoeren — het midden en de lengte van een lijnstuk berekenen
- vergelijkingen van rechte lijnen opstellen
- vergelijkingen van cirkels opstellen
- snijpunten berekenen, vooral van lijnen en lijnen en cirkels
- de hellingshoek van een rechte lijn berekenen — de hoek tussen twee lijnen berekenen — onderzoeken of twee lijnen loodrecht op elkaar staan — de vergelijking van een lijn loodrecht op een gegeven lijn opstellen

Achtergronden

René Descartes (1596–1650) maakte in 1618 kennis met de Nederlandse wiskundige Isaac Beeckman, die hem de wiskundige inzichten van die dagen, onder andere met het werk van François Viète en het gebruik van letters voor variabelen, leerde.

Uiteindelijk schreef Descartes 'Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences', met als aanhangsel 'La Géométrie'. Het werd in 1637 in Leiden gepubliceerd. Hierin nam Descartes afstand van de logica (van Aristoteles) die bijna 2000 jaar lang het wetenschappelijk denken had beheerst. Hij twijfelde aan alle bestaande kennis en vond dat alle wetenschap op wiskundige methoden moest worden gebaseerd. Zijn wereldbeeld was dat van een groot mechaniek bestaande uit allemaal delen die via wiskundige wetten op elkaar reageerden.

Op het gebied van de wiskunde zelf zette hij een revolutionaire ontwikkeling in door het rechthoekig (cartesisch) assenstelsel in te voeren. In één klap konden meetkundige objecten worden beschreven met getallen en vergelijkingen. Dit leidde tot het ontstaan van de analytische meetkunde...



Figuur 6.1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de lijn $l : 5x - 4y = 40$ en de punten $A(12,3)$ en $B(2,-2)$.

- Lijn m gaat door de punten A en B . Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m .
- Stel een vergelijking op van de lijn p door het midden van lijnstuk AB die loodrecht op lijn m staat.
- Bereken de exacte coördinaten van het snijpunt C van lijn p en lijn l .
- Bereken de oppervlakte van driehoek ABC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Bereken de hoeken van $\triangle ABC$ met $A(15,21)$, $B(29,28)$ en $C(25,40)$ in graden nauwkeurig.

Opgave 3

In een cartesisch assenstelsel zijn er twee cirkels met straal $\sqrt{13}$ die door de punten O en $A(0,6)$ gaan. Stel de vergelijkingen van deze cirkels op.

Opgave 4

Stel steeds een vergelijking op van de beschreven lijn of cirkel.

- De lijn l door de punten $A(-22,105)$ en $B(58,65)$.
- De lijn m door $C(24,0)$, loodrecht op l .
- De cirkel c_1 door C met middelpunt $M(20,3)$.
- De lijn n door de snijpunten van de cirkels c_1 en $c_2 : (x - 24)^2 + y^2 = 2$.

Opgave 5

Gegeven is de lijn $l : 4x - 15y = 61$ en punt $P(0,12)$.

- Stel een vergelijking op van de lijn m door P , loodrecht op l .
- Bereken het snijpunt S van de lijnen l en m .
- Bereken de afstand van P tot lijn l .
- Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt P en door S .
- Waarom hebben cirkel c en lijn l precies één snijpunt?

Toepassen

Opgave 6: Cola en sinas

Een fles cola kost € 0,95 en een fles sinas kost € 1,20. Je hebt € 80,00 tot je beschikking om 75 flessen cola en/of sinas te kopen. Als je het aantal flessen cola x en het aantal flessen sinas y noemt, dan kun je hierbij twee vergelijkingen in x en y opstellen. Doe dat en bereken hoeveel flessen van elke soort je koopt.

Opgave 7: Hoogtelijnen

Een hoogtelijn in een driehoek is een lijn die door een hoekpunt gaat en loodrecht staat op de zijde tegenover dat hoekpunt. In elke driehoek ABC gaan de drie hoogtelijnen door één punt. Deze stelling kun je met analytische meetkunde als volgt bewijzen: Kies het assenstelsel zo, dat A en B op de x -as liggen en dat C op de y -as ligt. Neem $A(-a,0)$, $B(b,0)$ en $C(0,c)$ en laat $a \geq 0$, $b \geq 0$ en $c \geq 0$.

- Welke vergelijking heeft de hoogtelijn door C nu?
- Welke vergelijkingen hebben de andere twee hoogtelijnen?
- Toon nu aan dat alle drie de hoogtelijnen door hetzelfde punt H gaan.

Opgave 8: Middelloodlijn

Een middelloodlijn van een lijnstuk AB is een lijn die door het midden van AB gaat en er loodrecht op staat. Een manier om zo'n middelloodlijn te construeren is door twee even grote cirkels om A en om B te tekenen en een lijn te trekken door beide snijpunten van die cirkels. Met analytische meetkunde kun je bewijzen dat je zo inderdaad een middelloodlijn krijgt.

- Kies een geschikt assenstelsel. Welke coördinaten geef je A en B ?
- Stel vergelijkingen op van twee even grote cirkels om A en om B .
- Hoe maak je nu het bewijs af?

Examen

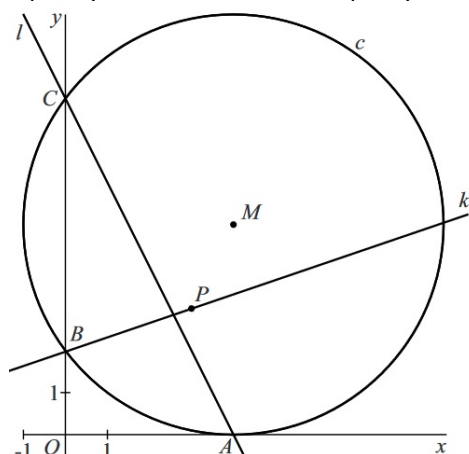
Opgave 9: Een punt binnen een cirkel

Gegeven zijn de cirkel c met vergelijking $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$ en het punt $P(3,3)$. M is het middelpunt van c .

- Bereken de exacte afstand van punt P tot cirkel c .

Cirkel c raakt de x -as in het punt A en snijdt de y -as in de punten B en C , waarbij C boven B ligt.

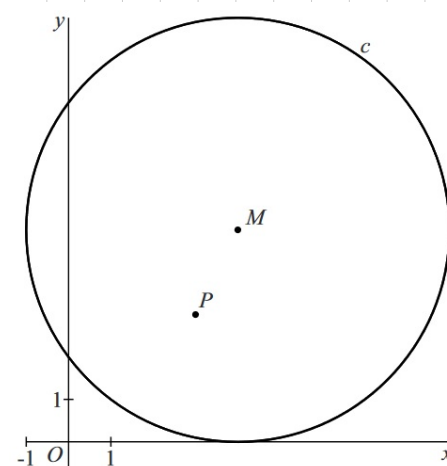
Lijn k gaat door B en P en lijn l gaat door A en C .



Figuur 6.3

- Bereken in graden nauwkeurig de scherpe hoek waaronder k en l elkaar snijden.

(bron: pilotexamen havo wiskunde B in 2012, eerste tijdvak)



Figuur 6.2

a

afgeleide 40
afhankelijk stelsel 83
afnemende daling 7
afnemende stijging 7

c

cartesisch assenstelsel 60
constante stijging 7

d

dalen 7
differentiaalquotiënt 32
differentiequotiënt 24

e

extremen 7

g

gemiddelde verandering 24, 32

h

hellingsfunctie 40
hellingsgetal 68
hellingsgrafiek 40
hoek tussen twee lijnen 90

i

interval 7

l

lengte lijnstuk 60
lijn 68

loodrechte lijnen 90

m

maximum 7
midden 60
minimum 7

r

raaklijn 32
richtingscoëfficiënt 32, 68, 90
richtingshoek, hellingshoek 90

s

snijpunt 82
stapgrootte 15
stelsel van vergelijkingen 82
stijgen 7
strijdig stelsel 83

t

tekenschema 40
toenamediagram 15
toenemende daling 7
toenemende stijging 7

u

uiterste waarde 7

v

verandering in een punt 32
vergelijking van een cirkel 75

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

5. Veranderingen

6. Analytische meetkunde



www.math4all.nl

