

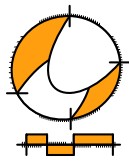
Wiskunde B

4 HAVO

Katern 2

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Lineaire verbanden 5

- 1.1 Lineaire functies 6
- 1.2 Lineaire verbanden 14
- 1.3 Stelsels vergelijkingen 21
- 1.4 Lineaire modellen 28
- 1.5 Totaalbeeld 36

2 Veeltermfuncties 43

- 2.1 Kwadratische functies 44
- 2.2 De abc-formule 51
- 2.3 Veeltermen 60
- 2.4 Ongelijkheden 68
- 2.5 Totaalbeeld 75

Register 81

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Lineaire verbanden

1.1	Lineaire functies	6
1.2	Lineaire verbanden	14
1.3	Stelsels vergelijkingen	21
1.4	Lineaire modellen	28
1.5	Totaalbeeld	36

1.1 Lineaire functies

Inleiding

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen een vast bedrag per m^3 , dat verschilt per regio. In een bepaalde regio zou je dus zeggen dat de kosten voor het verbruik van leidingwater recht evenredig zijn met de hoeveelheid die je verbruikt. Maar dat is niet zo... Je betaalt namelijk ook nog een soort van abonnementskosten, het vastrecht. Als het vastrecht € 65,00 per jaar is en je betaalt € 1,25 per m^3 , dan past hierbij een formule zoals $K = 1,25 \cdot a + 65$ als a het jaarverbruik (in m^3) en K de jaarlijkse kosten zijn. Er bestaat een lineair verband tussen K en a .

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een in woorden beschreven lineair verband een passende formule opstellen;
- de grafiek van een lineair verband tekenen en daarbij het begrip hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) gebruiken.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij functies;
- werken met eenvoudige lineaire verbanden.

Verkennen

Opgave V1

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3 en het vastrecht is € 65,00 per jaar. Hierbij past de formule $K = 1,25 \cdot a + 65$ waarin a het jaarverbruik (in m^3) en K de jaarlijkse kosten zijn.

- Breng de grafiek van K als functie van a goed in beeld met de grafische rekenmachine.
- In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag gebruikt. Zullen er huishoudens van vier personen in deze regio zijn, die meer dan € 1000,00 per jaar aan water kwijt zijn?

Uitleg

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3 en het vastrecht is € 65,00 per jaar. Hierbij past de formule $K = 1,25 \cdot a + 65$ waarin a het jaarverbruik (in m^3) en K de jaarlijkse kosten zijn.

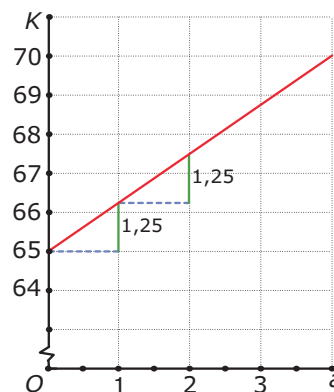
Zelfs als je geen water verbruikt betaal je toch € 65,00 per jaar voor de aansluiting. Dus bij $a = 0$ hoort $K = 65$.



Figuur 1.1

Vervolgens zorgt elke extra m^3 water die je verbruikt voor een toename van K met 1,25. Dit betekent dat elke toename van a met 1 een stijging van K met 1,25 tot gevolg heeft. De grafiek wordt daarom een rechte lijn en het getal 1,25 bepaalt hoe steil die rechte lijn loopt. Je zegt dat er een lineair verband tussen a en K bestaat ('linea recta' betekent 'volgens een rechte lijn.') Het getal 1,25 noem je het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt van de lijn.

In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag gebruikt. Dit betekent 45260 liter per persoon per jaar. Als een gemiddeld huishouden uit vier personen bestaat, dan is dit 181040 liter per jaar voor zo'n huishouden. Omgerekend naar kubieke meter is dit ongeveer $181,04 \text{ m}^3$ per jaar. Met behulp van de formule $K = 1,25 \cdot a + 65$ bereken je de kosten voor een gemiddeld huishouden in deze regio. Dit is dus € 291,30 per jaar.



Figuur 1.2

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. In een andere regio zijn de jaarlijkse kosten K voor het verbruik van water € 1,20 per m^3 met een vastrecht van € 70,00 per jaar.

- Welke formule geldt voor K als functie van a , als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?
- Met hoeveel neemt K toe als a met 1 m^3 toeneemt?
- Hoeveel betaal je in deze regio als je geen water verbruikt?
- Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 195 m^3 water. Hoeveel moeten ze dat jaar betalen?
- Bij welke vensterinstellingen krijg je de grafiek van K zo in beeld dat voor een verbruik tot 300 m^3 de kosten zijn af te lezen uit de grafiek?
- Voor welke waarde van a geldt: $K(a) = 250$? Licht je antwoord toe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

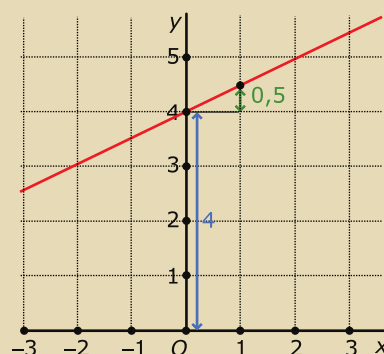
Bekijk de applet: **lineaire functies**

Als y een **lineaire functie** is van x heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waar:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname per stap van 1, is;
- b het **begingetal**, de uitkomst bij $x = 0$, is.

De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0, b)$. Als je de waarde van x daarna met 1 ophoogt, neem de uitkomst met a toe. Het hellingsgetal a wordt ook wel de **richtingscoëfficiënt** genoemd, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.

Als $b = 0$ gaat de lijn door de oorsprong van het assenstelsel. De formule heeft dan de vorm $y = a \cdot x$. Je zegt in dat geval dat y **recht evenredig** is met x .



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

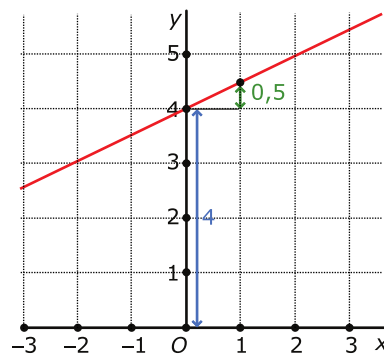
Bekijk de applet

Teken de grafiek bij het lineaire verband met de formule $y = 0,5x + 4$.

Antwoord

Er zijn twee manieren om dit te doen:

- Manier I: het begingetal is 4 dus de grafiek 'start' in (0,4).
Het hellingsgetal is 0,5, dus vanaf het punt (0,4) ga je elke keer dat de x -waarde met 1 toeneemt 0,5 omhoog om een nieuw punt te vinden.
Dit betekent dat de grafiek ook door bijvoorbeeld (1; 4,5), (2,5) en (3; 5,5) gaat.
- Manier II: zoek twee punten van de grafiek.
Bij $x = 0$ hoort $y = 4$.
Bij $x = 6$ hoort $y = 0,5 \cdot 6 + 4 = 7$.
Trek de lijn door de twee bijbehorende punten (0,4) en (6,7).



Figuur 1.4

Opgave 2

Bekijk **Voorbeeld 1**. Gegeven is de functie $f(x) = -0,2x + 6$.

- Waaraan kun je zien dat de grafiek van f dalend is?
- Plot de grafiek van f en geef de coördinaten van de snijpunten met de assen.
- Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- De grafiek van lineaire functie g heeft hetzelfde hellingsgetal als de grafiek van f en gaat door het punt (10,9). Bepaal het functievoorschrift van g .

Opgave 3

Elke lineaire functie heeft een voorschrift van de vorm $y = ax + b$.

- Neem $a = 2$ en $b = 3$ en breng de grafiek van deze functie in beeld. Ga na of de grafiek door het punt (99,200) gaat.
- Neem $a = 2$. Bekijk de grafieken van deze lineaire functies voor verschillende waarden van b . Voor welke waarde van b gaat deze functie door het punt (99,200)?
- Neem $b = 3$. Bekijk de grafieken van deze lineaire functies voor verschillende waarden van a . Voor welke waarde van a gaat deze functie door het punt (99,200)?

Voorbeeld 2

Als een loodgieter bij iemand een reparatie moet uitvoeren, vraagt hij voorrijkosten, een uurtarief en materiaalkosten. Een bepaalde loodgieter vraagt € 35,00 aan voorrijkosten en het uurtarief is € 28,50. Als je niet op de materiaalkosten let, dan zijn de arbeidskosten A in euro alleen afhankelijk van de gewerkte tijd t in uren. Welke formule kun je opstellen voor $A(t)$? En voor de totale kosten $K(t)$?

Bij welke formule is er sprake van een recht evenredig verband?

Antwoord

Elk gewerkt uur kost € 28,50, dus t uur werken kost $A = 28,50 \cdot t$ euro.

De arbeidskosten zijn recht evenredig met de gewerkte tijd.

Maar deze loodgieter kost als je hem belt om te komen in ieder geval € 35,00.

In totaal zijn de kosten dus: $K = 35 + 28,50 \cdot t$.

K is niet recht evenredig met t .

Opgave 4

Voor een rit met een taxi betaal je € 3,50 voorrijkosten en nog eens € 1,20 per gereden kilometer. Hierbij past een lineaire functie voor de ritprijs R afhankelijk van het aantal gereden km a .

- Is R recht evenredig met a ?
- Stel een formule op voor R als functie van a .
- Welk getal is de richtingscoëfficiënt van $R(a)$?
- Waarom heeft het nulpunt van $R(a)$ hier geen betekenis?
- Hoeveel betaal je voor een rit van 16 km?
- Hoeveel kilometer heb je gereden als je € 31,10 moet betalen?

Voorbeeld 3

De temperatuur hangt onder de juiste omstandigheden lineair af van de hoogte boven de zeespiegel. Zeker bij een wandeling in de bergen of bij een ballontochtje kun je dat goed merken. Een vuistregel is dat elke 100 meter stijging een temperatuurdaling van 0,6 °C betekent. Stel je voor dat het op 0 meter hoogte 24 °C is. Welke formule kun je opstellen voor de temperatuur (in °C) afhankelijk van de hoogte (in meter)? Bepaal met de grafische rekenmachine op welke hoogte de temperatuur voor het eerst onder 0 °C komt.

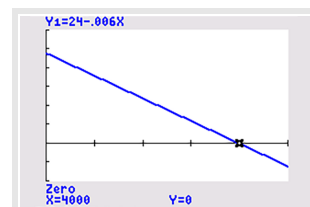
Antwoord

De temperatuurdaling per meter is $\frac{0,6}{100} = 0,006$ °C. De formule is daarom $T = 24 - 0,006h$, met h de hoogte in meter en T de temperatuur in °C.

Maak vervolgens met je rekenmachine een geschikte grafiek, zorg ervoor dat de snijpunten met de assen goed in beeld komen. Het snijpunt met de y -as weet je al, dat is $(0,24)$.

Bepaal met je rekenmachine dat het snijpunt met de x -as gelijk is aan $(4000,0)$. Dus de temperatuur is 0°C als $h = 4000$ meter.

Het snijpunt met de x -as kun je ook uitrekenen door de vergelijking $24 - 0,006h = 0$ algebraïsch op te lossen.



Figuur 1.5

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** heb je kunnen lezen dat de temperatuur lineair afhangt van de hoogte boven de zeespiegel.

- Licht toe hoe je aan de formule $T = 24 - 0,006h$ komt.
- Bereken algebraïsch het nulpunt van T .
- Geef aan welke vensterinstellingen je gebruikt om de grafiek van T goed in beeld te krijgen.
- Hoe hoog is de temperatuur op de top van de Mount Everest (8884 meter boven de zeespiegel)?

Verwerken

Opgave 6

Bereken van de volgende lineaire functies de snijpunten van de grafieken met de assen.

- $h(t) = 3t - 5$
- $f(x) = x - 4$
- $g(x) = -0,5x + 4$
- $k(x) = -2(x + 3)$

Opgave 7

Fietser 1 gaat met een constante snelheid van 20 km/h van A naar B. Fietser 2 gaat met een constante snelheid van 25 km/h van B naar A. De afstand tussen A en B is voor beide fietsers 150 km . a is de afstand tot A en t is de tijd in uren.

- Waarom is voor fietser 1 a recht evenredig met t en voor fietser 2 niet?
- Stel voor beide fietsers een passende formule op voor het verband tussen a en t .
- Na hoeveel tijd komen beide fietsers elkaar tegen? Licht je antwoord toe.

Opgave 8

Gegeven is de functie $y_1 = -4 + 5x$.

- De grafiek van y_1 wordt 10 eenheden langs de y -as omhoog geschoven. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek van y_2 die daardoor ontstaat.
- De grafiek van y_1 wordt gespiegeld in de y -as. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek van y_3 die daardoor ontstaat.

Opgave 9

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - 0,5x$ en $g(x) = 2x - 1$.

- Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van deze functies met de beide assen.
- Bereken algebraïsch het snijpunt van beide grafieken.

Opgave 10

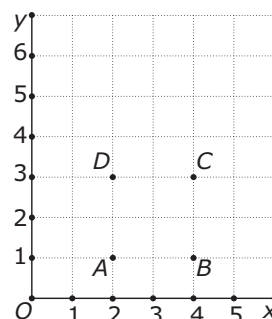
De Elfstedentocht is een schaatstocht langs de elf Friese steden. Het laatste stuk is een vrijwel rechte tocht van Dokkum naar Leeuwarden met een lengte van 26 km. Ireen komt na zeven uur schaatzen in Dokkum aan. Zij schaatst dit laatste stuk voor de wind met een vrijwel constante snelheid. Na drie kwartier is zij in Leeuwarden en heeft zij in totaal ongeveer 200 km afgelegd.

- Met welke snelheid heeft zij het laatste deel van de tocht gereden?
- Stel je voor dat t de tijd in uren is, $t = 0$ op het moment dat Ireen aan de Elfstedentocht begint. Verder is a de afgelegde afstand. Welk functievoorschrift $a(t)$ geldt er voor het laatste deel van haar tocht?
- Ireen is tegelijk met Margot begonnen aan de schaatstocht. Margot komt echter twee uur na Ireen pas in Dokkum aan. Ook zij schaatst het laatste stuk met een constante snelheid, maar doet er een uur over. Welke formule geldt voor haar tocht van Dokkum naar Leeuwarden?

Opgave 11

Je ziet een assenstelsel met een vierkant $ABCD$ erin. In dit assenstelsel gaat de grafiek van een lineaire functie door het punt $(1,5)$.

- Leg uit waarom de bijbehorende formule $y = ax + 5 - a$ moet zijn.
- Voor welke waarden van a heeft de grafiek van deze functie geen punten met het vierkant gemeen?



Figuur 1.6

Toepassen

Opgave 12: Warmtepomp

Voor het plaatsen van een warmtepompsysteem vraagt bedrijf A € 45,00 voorrijkosten en € 60,00 per uur dat ze bezig zijn. Bedrijf B vraagt geen voorrijkosten, maar bij hen moet je € 70,00 per uur betalen.

- Waarom zijn de kosten K_B (in €) voor het plaatsen bij bedrijf B recht evenredig met de gewerkte tijd t (in uren)?
- Stel een formule voor zowel bedrijf A als bedrijf B op voor de kosten K (in €) als functie van de tijd t (in uren).
- Als het plaatsen van het warmtepompsysteem drie uur duurt, welk bedrijf is dan goedkoper?

- d Na hoeveel uur is bedrijf A goedkoper?

De familie Berendsen heeft door bedrijf A een warmtepomp laten plaatsen, maar later kwamen ze erachter dat bedrijf B € 20,00 goedkoper zou zijn geweest als zij er net zo lang over hadden gedaan.

- e Hoelang is bedrijf A met het plaatsen bezig geweest?

Opgave 13: Hoogte en luchtdruk

In de luchtvaart spelen hoogte en luchtdruk een belangrijke rol. De luchtdruk kan worden gemeten met een luchtdrukmeter. Uit de waarde van de gemeten luchtdruk kan de hoogte van het vliegtuig worden afgeleid. Luchtdruk wordt gemeten in millibar (mbar) en hoogte in feet (meervoud van foot, 1 foot $\approx$ 30 cm). Hoe hoger je vliegt, hoe lager de luchtdruk is.

Voor het verband tussen de hoogte en de luchtdruk wordt gebruikgemaakt van de volgende vuistregels:

- op zeeniveau (hoogte 0 foot) is de luchtdruk 1013 millibar;
- tot een hoogte van 12000 feet neemt de luchtdruk af met 1 millibar per 30 feet stijging.

Uit deze vuistregels is voor hoogten tot 12000 feet de volgende lineaire formule af te leiden: $h = 30390 - 30p$.

Hierin is h de hoogte in feet en p de luchtdruk in millibar.

- a Toon aan dat de formule volgt uit de vuistregels.

Een vliegtuig stijgt van 0 foot naar 1000 feet.

- b Bereken het percentage waarmee de luchtdruk tijdens deze stijging volgens deze formule afneemt. Rond je antwoord af op één decimaal.

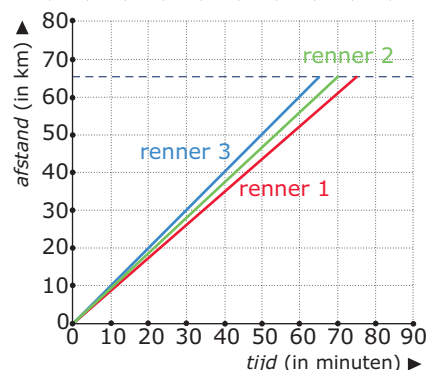
(naar: examen havo wiskunde B in 2012, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 14

In de Tour de France wordt een aantal keren een tijdrit gereden. In deze grafieken vind je gegevens over een tijdrit van 65 km.

- a Welke renner heeft de tijdrit gewonnen? Waar zie je dat aan?
- b Waarom kunnen deze grafieken nooit het werkelijke verloop van deze tijdrit correct beschrijven?
- c Bereken van iedere renner de gemiddelde snelheid.
- d Schrijf voor elke grafiek een passende formule op.



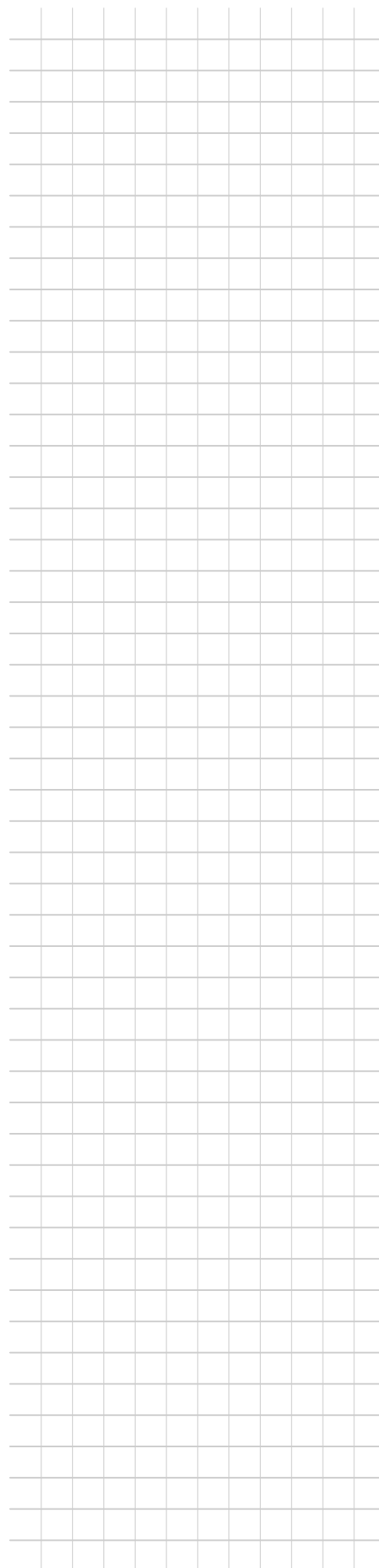
Figuur 1.7

Opgave 15

Gegeven is de lineaire functie f met voorschrift: $f(x) = 7x + 10$.

- a Bereken exact de snijpunten van de grafiek van f met de x -as en de y -as.

- b** De grafiek van f wordt 3 eenheden in de y -richting omlaag geschoven. Welk functievoorschrift hoort bij de nieuwe grafiek die daardoor ontstaat?
- c** De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,10)$. De nieuwe grafiek gaat door $(10,15)$. Welk functievoorschrift past bij die nieuwe grafiek?
- d** De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,10)$ en vervolgens 2 eenheden omhoog geschoven. De nieuwe grafiek gaat door $(10,0)$. Welk functievoorschrift past bij die nieuwe grafiek?



1.2 Lineaire verbanden

Inleiding

Lineaire functies zijn voorbeelden van veel algemenere lineaire verbanden met twee variabelen. Een eenvoudig voorbeeld is het verband tussen lengte l en breedte b als de omtrek van een rechthoek is gegeven. Maar er zijn meer situaties te bedenken waarin tussen twee variabelen een lineair verband bestaat.

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een in woorden beschreven lineair verband een passende formule opstellen;
- grafieken tekenen bij lineaire verbanden in het algemeen;
- lineaire formules herleiden naar lineaire functies.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij lineaire functies;
- werken met lineaire functies.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

De omtrek van rechthoek $OAPB$ is 30.

Noem de lengte van deze rechthoek l en de breedte b .

- Welke formule geldt voor het verband tussen l en b ?
- Waarom is de bijbehorende grafiek in een l, b -assenstelsel een rechte lijn?

Uitleg

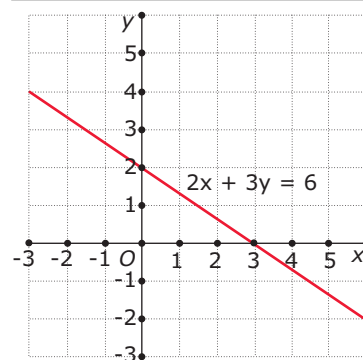
Bekijk de applet

Een formule als $2x + 3y = 6$ is een lineaire vergelijking met twee variabelen. De grafiek bij zo'n lineaire vergelijking is een rechte lijn.

Je kunt de formule herleiden tot de vorm $y = ax + b$. In deze vorm is y uitgedrukt als een functie van x :

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 6 \\3y &= -2x + 6 \\y &= -\frac{2}{3}x + 2\end{aligned}$$

Op de rechte lijn liggen alle punten (x, y) die voldoen aan $2x + 3y = 6$ en ook aan $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Om die rechte lijn te tekenen, is het niet nodig om de formule te herschrijven.



Figuur 2.1

Je kunt ook enkele punten van de lijn bepalen:

- Als $x = 0$, dan is $3y = 6$ en dus $y = 2$.
Het punt $(0, 2)$ ligt op de lijn.
- Als $x = 1$, dan is $2 + 3y = 6$ en dus $y = 1\frac{1}{3}$.

Het punt $(1, 1\frac{1}{3})$ ligt op de lijn.

- Als $y = 0$, dan is $2x = 6$ en dus $x = 3$.
Het punt $(3, 0)$ ligt op de lijn.

Omdat de grafiek bij een lineaire vergelijking een rechte lijn is, heb je genoeg aan twee punten om de grafiek te tekenen. Vaak neem je daarvoor de punten met $x = 0$ of $y = 0$.

Opgave 1

Gegeven is de lineaire vergelijking $3x - 4y = 12$.

- Teken de lijn die bij deze lineaire vergelijking hoort door eerst de snijpunten met de beide assen te berekenen.
- Herleid de vergelijking tot de vorm $y = \dots$

Opgave 2

Gegeven zijn de lineaire vergelijkingen $-2x + y = 2$ en $5x + 2y = 13$.

- Plot de grafieken bij de formules in één assenstelsel.
- Bepaal het snijpunt van beide grafieken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

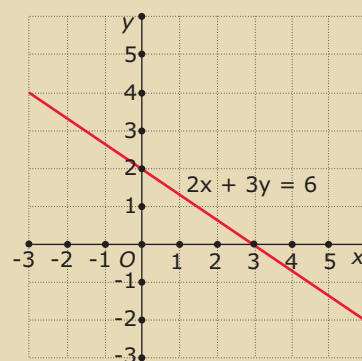
Bekijk de applet

Een vergelijking van de vorm $ax + by = c$ beschrijft een **lineair verband tussen twee variabelen**. De grafiek ervan is een rechte lijn.

Je kunt die grafiek tekenen door twee punten van deze lijn te bepalen. Vaak doe je dat door $x = 0$ te kiezen en de bijbehorende waarde voor y uit te rekenen en door $y = 0$ te kiezen en de bijbehorende waarde voor x uit te rekenen.

Lineaire vergelijkingen met twee variabelen zoals $ax + by = c$ kun je herleiden naar een lineaire functie als $b \neq 0$. Zo is $2x + 3y = 6$ te schrijven als

$y = -\frac{2}{3}x + 2$. En dit is een lineaire functie met begingetal 2 en hellingsgetal $-\frac{2}{3}$.



Figuur 2.2

Bijzondere gevallen:

- $a = 0$: de vergelijking heeft dan de vorm $by = c$ en is te herleiden tot $y = \frac{c}{b}$. Dit is een lineaire functie met hellingsgetal 0.
- $b = 0$: de vergelijking heeft dan de vorm $ax = c$ en is te herleiden tot $x = \frac{c}{a}$. Dit is geen lineaire functie; er is geen hellingsgetal. De grafiek is een verticale lijn evenwijdig aan de y-as.

Voorbeeld 1

Een museum trok op een zaterdag veel bezoekers. Een kinderkartje kostte € 1,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 2,50. In totaal is er voor € 1245,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Hoeveel kinderen en hoeveel volwassenen hebben het museum bezocht?

Antwoord

Er zijn meerdere combinaties mogelijk. Bijvoorbeeld 50 kinderen en 468 volwassenen of 150 kinderen en 408 volwassenen. Met de grafische rekenmachine kun je gemakkelijk alle oplossingen bepalen.

Noem het aantal kinderen x en het aantal volwassenen y , dan geldt:

$1,50x + 2,50y = 1245$. Dit is een lineair verband tussen x en y . Je kunt de formule herleiden tot: $y = \frac{1245 - 1,50x}{2,50}$. Maak je nu met de grafische rekenmachine een grafiek, dan kun je gemakkelijk alle mogelijke combinaties van x en y zien. Je kunt dan de volgende waarden vrij snel vinden: $x = 0$ en $y = 498$, $x = 5$ en $y = 495$ en $x = 830$ en $y = 0$. Deze waarden kun je ook in de tabel van de grafische rekenmachine vinden.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je ziet een lineair verband tussen de variabelen x en y gegeven door $1,50x + 2,50y = 1245$.

- Laat zien dat je deze formule kunt herleiden tot $y = -0,6x + 498$.
- Kunnen er 300 kinderen bij de voorstelling aanwezig zijn geweest? Licht je antwoord toe.

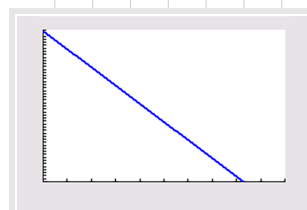
Voorbeeld 2

Gegeven is de lineaire formule $2,5x + 3,5y = 35$. Maak een grafiek bij het verband tussen beide variabelen.

Antwoord

De lineaire vergelijking $2,5x + 3,5y = 35$ kun je ook schrijven als $5x + 7y = 70$. Er zijn meerdere manieren om hierbij een grafiek te tekenen:

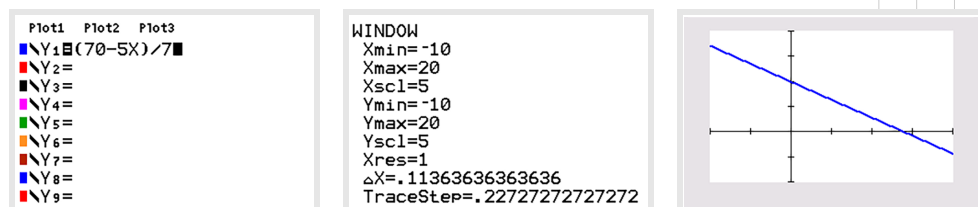
- Omdat bij een lineair verband de grafiek een rechte lijn is, heb je aan twee punten (x, y) die aan de vergelijking voldoen genoeg.



Figuur 2.3

Je vindt die snel door eerst $x = 0$ en vervolgens $y = 0$ te kiezen: $(0,10)$ en $(14,0)$.

- Je herleidt de vergelijking tot: $y = \frac{70-5x}{7}$ en gebruikt de grafische rekenmachine om de grafiek te tekenen. Het wordt een rechte lijn die door het punt $(0,10)$ gaat en richtingscoëfficiënt $-\frac{5}{7}$ heeft.



Figuur 2.4

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je een grafiek maakt bij de vergelijking $2,5x + 3,5y = 35$.

- Waarom kun je in dit geval de grafiek het beste tekenen door eerst de snijpunten met de assen te berekenen?
- Maak zelf de grafiek op de grafische rekenmachine.
- Welke waarde van x hoort bij $y = -20$?

Opgave 5

Je ziet vier keer de vergelijking van een lijn. Om die lijn te tekenen kun je eerst de snijpunten met de assen berekenen en dan een rechte lijn door die twee snijpunten trekken.

Je kunt ook de vergelijking eerst herleiden tot een lineaire functie en dan het begingetal en de richtingscoëfficiënt gebruiken voor het tekenen van de lijn.

Gebruik bij de onderstaande lijnen elk van deze methoden in ieder geval één keer.

- $5x + 4y = 20$
- $5x - 4y = 20$
- $2x + y = 10$
- $x - 2y = 10$

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Bij een lineair verband hoort in het algemeen de vergelijking $ax + by = c$.

Stel $a = 4$, $b = 2$ en $c = 6$, dan krijg je de vergelijking $4x + 2y = 6$. Er is een aantal bijzondere gevallen:

- $a = 0$: de grafiek is een lijn die evenwijdig aan de x -as is;
- $b = 0$: de grafiek is een lijn die evenwijdig aan de y -as is;
- $c = 0$: de grafiek gaat door $O(0,0)$.

Wat gebeurt er met de grafiek als $a = b$, of $a = -b$?

Opgave 6

- a Hoe ziet de vergelijking van een verticale lijn eruit?
- b Waarom kun je bij een verticale lijn geen functievoorschrift opstellen?

Opgave 7

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met twee variabelen is:

$$ax + by = c.$$

- a Herleid deze vergelijking tot een functievoorschrift van de vorm $y = \dots$
- b Waarom moet bij a gelden dat $b \neq 0$?
- c Welk bijzonder geval krijg je als $a = 0$ terwijl $b \neq 0$ en $c \neq 0$?
- d Welk bijzonder geval krijg je als $b = 0$ terwijl $a \neq 0$ en $c \neq 0$?
- e Welk bijzonder geval krijg je als $c = 0$ terwijl $a \neq 0$ en $b \neq 0$?

Opgave 8

Welke van deze vergelijkingen kun je herleiden tot een lineaire functie? Bepaal in die gevallen de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende lijn en plot de grafiek met de grafische rekenmachine.

- a $2x - 3y = 12$
- b $2x - 3 = 12$
- c $x = -2y + 6$
- d $4y - 6 = 0$

Verwerken

Opgave 9

Teken de grafieken van de volgende lineaire vergelijkingen en bepaal als dat mogelijk is de richtingscoëfficiënt.

- a $-2x + 3y = 6$
- b $6x - 2y = 24$
- c $y = 2x + 1$
- d $4x + y = 10$
- e $20x = 45$
- f $y + 2 = 0$

Opgave 10

Gegeven zijn de lijnen $l: 2x - 4y = -3$ en $m: 5x + 4y = 8$.

- a Bereken van beide lijnen algebraïsch de snijpunten met de coördinaatassen.
- b Breng beide lijnen op de grafische rekenmachine in beeld.
- c Bepaal de coördinaten van hun snijpunt in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 11

Stel je voor dat je een groep van 180 personen van drinken wilt voorzien. Je koopt daarvoor literpakken appelsap en sinaasappelsap. Je hebt 90 pakken nodig. Appelsap kost € 0,90 per literpak en sinaasappelsap € 1,05 per literpak. Noem het aantal pakken appelsap a en het aantal pakken sinaasappelsap s . Aan de kassa moet je € 90,00 betalen.

- Aan welke twee vergelijkingen moeten deze variabelen voldoen?
- Plot de bijbehorende grafieken.
- Bepaal hoeveel pakken appelsap en sinaasappelsap je hebt gekocht.

Opgave 12

Gegeven zijn de lijnen:

$$k : \frac{1}{3}x + \frac{1}{7}y = 21$$

$$l : 0,01x + 2,75 = y$$

$$m : x = 7y + 4$$

- Bepaal algebraïsch het snijpunt van de lijnen k en l . Geef je antwoord als coördinaat en rond af op twee decimalen.
- Bepaal algebraïsch het snijpunt van de lijnen k , l en m met de x -as. Geef je antwoord als coördinaat.

Opgave 13

Gegeven zijn de lijnen $l : 0,5y - 2x = c$ en $m : y - ax = -4$.

- Voor welke a zijn de lijnen evenwijdig?
- Voor welke c ligt het snijpunt van de lijnen op de y -as?
- Voor welke a en c snijden de lijnen elkaar in het punt $(5,8)$?

Toepassen

Opgave 14: Oude puzzel

Deze puzzel wordt toegeschreven aan Euclides (ongeveer 300 voor Christus).

“Een ezel en een muilnier sjokken voort, beladen met allemaal even zware zakken. De ezel zucht onder zijn last, waarop het muilnier tegen zijn lotgenoot zegt: Wat kreun en jammer je toch! Tweemaal zoveel zou ik dragen als jij, als je mij één zak van jou zou geven, terwijl we evenveel zouden dragen als je er één van mij nam. Hoeveel zakken draagt ieder dier?”

Los de puzzel op.

Opgave 15: Ballenverkoop

Een winkelier verkoopt grote en kleine ballen. De grote ballen verkoopt hij voor € 8,50 en de kleine voor € 5,00. Op een dag heeft hij 60 ballen verkocht en dat leverde hem € 387,50 op.

Hoeveel grote en hoeveel kleine ballen heeft hij verkocht?

Testen

Opgave 16

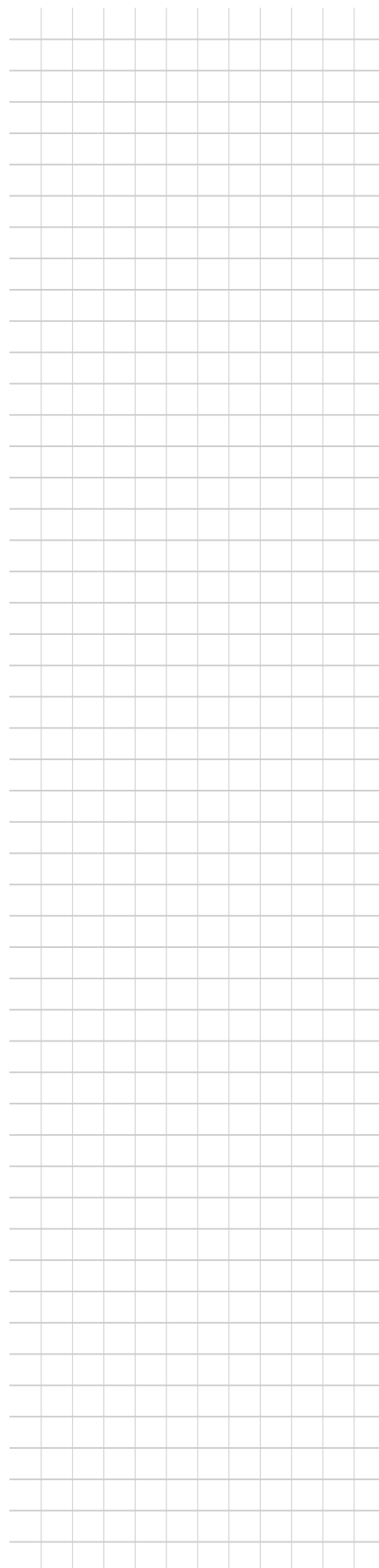
Plot de grafieken van de volgende lineaire vergelijkingen en bepaal als dat mogelijk is de richtingscoëfficiënt.

- a** $5x + 2y = 10$
- b** $-2x + 5y = 7$
- c** $x = 4$
- d** $4 - 2y = 0$

Opgave 17

In een bak zitten 1000 pakjes. In een aantal van die pakjes zit een cadeautje van € 9,00, in de overige zit een cadeautje ter waarde van € 1,00. Het totale bedrag aan cadeautjes in de bak is € 3000,00. De vraag is: Hoeveel pakjes met een cadeautje van € 9,00 zitten er in de bak?

- a** Stel twee lineaire vergelijkingen op om dit probleem op te lossen.
- b** Plot de grafieken die bij deze vergelijkingen horen.
- c** Bepaal de oplossing van het probleem.



1.3 Stelsels vergelijkingen

Inleiding

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden en die kun je op verschillende manieren oplossen. Over het oplossen van dergelijke stelsels van vergelijkingen gaat dit onderdeel.

Je leert in dit onderwerp

- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van substitutie;
- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode;
- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van de grafische rekenmachine;
- opstellen van een stelsel van vergelijkingen.

Voorkennis

- werken met variabelen (met 'letters');
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden en die kun je op verschillende manieren oplossen.

Bereken algebraïsch hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Uitleg

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal zijn de inkomsten door kaartverkoop € 1110,00. Bereken hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Dit probleem kun je aanpakken door bijvoorbeeld twee variabelen in te voeren:

- het aantal kinderen in de zaal is x ;
- het aantal volwassenen in de zaal is y .



Figuur 3.1



Figuur 3.2

Natuurlijk kun je ook letters als k en v nemen, maar het voordeel van deze keuze is dat je meteen weet wat je op de x -as en wat je op de y -as uitzet. Er zijn twee gegevens:

- het totaal aantal bezoekers is 300, dus $x + y = 300$
- de totale inkomsten zijn 1110 euro, dus $2,5x + 4,5y = 1110$

Je hebt nu een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Dit stelsel wil je oplossen, dat wil zeggen een combinatie van waarden voor x en y zoeken die aan beide vergelijkingen tegelijk voldoen.

Zo'n stelsel van vergelijkingen wordt vaak als volgt genoteerd:

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

In de voorbeelden leer je verschillende methoden om zo'n stelsel op te lossen.

Opgave 1

Bekijk het stelsel van vergelijkingen in de [Uitleg](#).

- Schrijf beide vergelijkingen in een zodanige vorm dat ze in de grafische rekenmachine kunnen worden ingevoerd.
- Kies geschikte vensterinstellingen en bepaal het snijpunt van beide grafieken.
- Hoeveel kinderen zaten er in de zaal?
- Je kunt dit ook algebraïsch oplossen. Laat zien, hoe.

Je kunt $2,5x + 4,5y = 1110$ nog handiger combineren met $x + y = 300$.

Schrijf $x + y = 300$ als $y = 300 - x$ en vul dit in $2,5x + 4,5y = 1110$ in.

- Hoe kun je nu x vinden?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het oplossen van een **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** zoek je in feite naar de snijpunten van twee bijpassende grafieken. Die snijpunten kun je in veel gevallen vinden door:

- beide vergelijkingen met elkaar te **combineren** en er zo één vergelijking met één onbekende van te maken;
- beide vergelijkingen zo te herleiden dat je ze in de grafische rekenmachine kunt invoeren en dan de gevraagde snijpunten door de machine te laten berekenen.

Bij het combineren van beide vergelijkingen maak je gebruik van:

- **substitutie**: je drukt bij een van beide vergelijkingen de ene variabele in de andere uit en je vervangt dan in de andere vergelijking die variabele door de gevonden uitdrukking; zie [Voorbeeld 1](#).

- de **balansmethode**: je telt dan de linkerzijden en de rechterzijden van beide vergelijkingen bij elkaar. Je zorgt er wel eerst voor dat dan een van beide variabelen wegvalt (door een slimme vermenigvuldiging toe te passen); zie **Voorbeeld 2**.

Voorbeeld 1

Los dit stelsel met behulp van substitutie op.

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

Antwoord

De vergelijking $x + y = 300$ kun je schrijven als $y = 300 - x$. In de andere vergelijking kun je nu y vervangen door $300 - x$. Dat heet substitutie. Je krijgt dan: $2,5x + 4,5(300 - x) = 1110$.

Deze vergelijking heeft alleen x als onbekende. Het stelsel is dus op te lossen: $x = 120$. Er zaten dus 120 kinderen in de zaal.

Opgave 2

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen: $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$.

- Druk in de eerste vergelijking y uit in x .
- Vul de gevonden uitdrukking voor y in de tweede vergelijking in. Welke vergelijking in x ontstaat nu?
- Los de vergelijking die je bij b hebt gevonden op.
- Bepaal bij de gevonden waarde voor x de bijbehorende waarde voor y . Schrijf je oplossing nu volledig op en laat zien hoe je die kunt controleren.
- Je kunt dit stelsel van vergelijkingen ook oplossen door x uit te drukken in y . Los ook op die manier het stelsel op.

Voorbeeld 2

Je kunt een stelsel van vergelijkingen ook met de balansmethode oplossen.

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

Vermenigvuldig in de bovenste vergelijking beide zijden met 2,5, dan krijg je:

$$\begin{cases} 2,5x + 2,5y = 750 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

Als je van de bovenste vergelijking links van het isgelijktteken de linkerzijde van de onderste vergelijking en rechts van het isgelijktteken de rechterzijde van de bovenste vergelijking aftrekt, dan krijg je $2y = 360$.

Dit geeft $y = 180$. Er zaten daarom $300 - 180 = 120$ kinderen in de zaal.

Opgave 3

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je een stelsel van vergelijkingen kunt oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken).

- a Voer zelf de in het voorbeeld beschreven oplossingsmethode uit.
- b Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door in de bovenste vergelijking beide zijden met 4,5 te vermenigvuldigen. Laat zien hoe je dan de oplossing vindt.
- c Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door in de bovenste vergelijking beide zijden met 5 te vermenigvuldigen en in de onderste vergelijking beide zijden met -2. Laat zien hoe je dan de oplossing vindt.

Opgave 4

Los de stelsels van vergelijkingen op eenzelfde manier als in het voorbeeld op.

a
$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ 6x + 8y = 1 \end{cases}$$

Voorbeeld 3

Welke afmetingen heeft een rechthoekig veld met een oppervlakte van 120 m^2 en een omtrek van 46 meter?

Antwoord

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b . Een oppervlakte van 120 m^2 betekent $l \cdot b = 120$. Een omtrek van 46 meter betekent $2l + 2b = 46$.

Dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden is alleen algebraïsch op te lossen door middel van substitutie. Schrijf $2l + 2b = 46$ als $l = 23 - b$ en vervang in de andere vergelijking l door deze uitdrukking. Je krijgt: $(23 - b) \cdot b = 120$.

De vergelijking $(23 - b) \cdot b = 120$ schrijf je als $b^2 - 23b + 120 = 0$. Door ontbinden in factoren vind je $b = 8 \vee b = 15$.

Het grasveld is 15 bij 8 meter.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 3**.

- a Waarom kun je dit stelsel van vergelijkingen niet oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken)?
- b Laat zien hoe je dit stelsel kunt oplossen met behulp van de grafische rekenmachine.

Opgave 6

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen: $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$.

- Probeer dit stelsel van vergelijkingen op te lossen.
- Welk probleem doet zich voor?
- Leg uit waarom dit stelsel van vergelijkingen geen oplossingen heeft.

Verwerken

Opgave 7

Los de stelsels van vergelijkingen op.

a $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x + 4y = -7 \\ 4x + 5y = -8 \end{cases}$

c $\begin{cases} 4x + 6y = 22 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$

d $\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 6 \end{cases}$

e $\begin{cases} x \cdot y = 84 \\ 2x + y = 29 \end{cases}$

f $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$

Opgave 8

Van een rechthoek is de oppervlakte 200 cm^2 en de omtrek 90 cm . Noem de lengte l en de breedte b , beide in centimeter.

Stel twee vergelijkingen op waaraan l en b moeten voldoen. Bereken algebraïsch de oplossing van dit stelsel.

Opgave 9

Een verhandelaar heeft een mengmachine van € 300,00 aangeschaft. Het mengen van verf kost hem naast deze vaste kosten nog € 6,00 per liter.

- Geef een formule voor de kosten K als functie van het aantal liter verf q dat hij verkoopt.
- Welke waarden kan q aannemen? Welke waarden kan K aannemen?
- Hij verkoopt zijn gemengde verf voor € 8,25 per liter. Zijn opbrengst R is ook een functie van q . Geef een bijpassende formule.
- Breng beide functies in beeld op de grafische rekenmachine. Bereken het snijpunt van beide grafieken. Welke betekenis heeft dit snijpunt voor de verhandelaar?

Opgave 10

Op een kaasboerderij wordt van 9,8 kg melk 1 kg volvette kaas gemaakt. 22,5 kg melk verwerkt men daar tot 1 kg boter. Er is 1000 kg melk in voorraad. Er wordt altijd twee keer zoveel boter als kaas gemaakt.

Hoeveel kg kaas en hoeveel kg boter kan er van de beschikbare hoeveelheid melk worden gemaakt? Los dit probleem op met behulp van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Opgave 11

Voor een heg koopt een tuinman jonge groenblijvende planten: twintig thuja's en twaalf jeneverbessen. Dat kost hem € 267,00. Na het planten blijven er twee jeneverbessen over, maar komen er vijf thuja's tekort. Bij het tuincentrum ruilen ze de twee jeneverbessen voor vijf thuja's, maar er moet € 18,00 worden bijbetaald.

Wat kost een thuja en wat kost een jeneverbes?

Toepassen

Behalve een stelsel van (lineaire) twee vergelijkingen met twee onbekenden kun je nu ook een **stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden** oplossen.

Meestal pas je dan op een handige manier de balansmethode toe. Eerst kies je twee vergelijkingen uit die je door combineren kunt terugbrengen tot één vergelijking met twee onbekenden.

Dit doe je vervolgens nog een keer met één van die vergelijkingen en de derde vergelijking.

Zorg er wel voor dat je in beide gevallen dezelfde onbekende 'wegwerkt'.

Je hebt dan een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden over en daar weet je wel raad mee...

Opgave 12

Los het stelsel van drie vergelijkingen met drie variabelen op.

$$\begin{cases} 3x + 3y + z = 3 \\ 2x - y + z = 24 \\ -x + 3y + 2z = -47 \end{cases}$$

Testen

Opgave 13

Los de volgende stelsels van vergelijkingen op.

a $\begin{cases} k + 3v = 200 \\ k + v = 110 \end{cases}$

b $\begin{cases} 3a + 4b = 10 \\ a - 2b = 4 \end{cases}$

c $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 5y = 15 \end{cases}$

d
$$\begin{cases} p \cdot q = 400 \\ q = 200 - 0,5p \end{cases}$$

Opgave 14

In een klein theater zijn twee soorten plaatsen: 'zaal' en 'balkon'. Voor een bepaalde voorstelling kost een zaalplaats € 12,50 en een balkonplaats € 15,00. Er worden die avond 82 kaarten verkocht met een totale opbrengst van € 1080,00.

Hoeveel mensen hadden een balkonplaats en hoeveel een zaalplaats?

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het oplossen van stelsels vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.4 Lineaire modellen

Inleiding

Het komt regelmatig voor dat onderzoekers op grond van de gevonden resultaten een lineair verband tussen twee variabelen veronderstellen. Dat is bijvoorbeeld het geval als de meetpunten bij een verband tussen twee variabelen (vrijwel) op een rechte lijn liggen. De kunst is dan om op grond van de meetgegevens een goede lineaire functie als model op te stellen. Hoe dat in zijn werk gaat wordt in dit onderdeel besproken.

Je leert in dit onderwerp

- bij een lineair verband dat is gegeven door een aantal (meet-) punten een passende formule opstellen.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten).

Verkennen

Opgave V1

Nadat een kaars van 30 cm lang is aangestoken heeft iemand om de twee uur de lengte gemeten. De resultaten zie je in de tabel.

<i>tijd</i> (in uren)	0	2	4	6	8	10
<i>lengte</i> (in cm)	30	27,2	24,1	20,9	17,9	14,6

Tabel 4.1

- Maak bij deze tabel een puntengrafiek.
- Je kunt een rechte lijn trekken die het verloop van de lengte van de kaars weergeeft. Doe dat en probeer met behulp daarvan te voorspellen na hoeveel uur de kaars is opgebrand.

Uitleg

De bevolking van een grote stad is de laatste jaren gestaag gegroeid. In de tabel vind je enkele gegevens:

<i>jaartal</i>	1960	1970	1980	1990	2000	2010
<i>aantal inwoners</i> ($\times 10000$)	2,1	3,8	5,3	6,6	8,3	9,8

Tabel 4.2

Als je bij de tabel van de bevolking van deze stad een grafiek tekent, lijken de meetpunten ongeveer op een rechte lijn te liggen. Hoewel de groei niet precies lineair is, kun je hem goed benaderen door een lineair model. Je tekent dan een rechte lijn die zo goed mogelijk door de meetpunten gaat. Kies eerst een paar variabelen:

N is het aantal inwoners ($\times 100000$) en t is de tijd in jaren vanaf 1960, dus $t = 0$ in 1960.

Een lijn die goed het verloop van de meetpunten beschrijft gaat door de punten $(20; 5,3)$ en $(50; 9,8)$. Ga dat zelf na door de punten te tekenen. Om een formule bij deze lijn op te stellen, zoek je eerst het hellingsgetal. In $50 - 20 = 30$ jaar tijd neemt N toe met $9,8 - 5,3 = 4,5$.

Per jaar is dat een toename van $\frac{4,5}{30} = 0,15$.

Dit is het hellingsgetal van de rechte lijn. De bijbehorende formule is dus $N = 0,15 \cdot t + b$. Om b te bepalen, gebruik je het feit dat de grafiek door $(20; 5,3)$ gaat, dus: $5,3 = 0,15 \cdot 20 + b$.

Dit betekent dat $b = 2,3$. Het lineaire model heeft daarom als formule $N = 0,15 \cdot t + 2,3$.

Hiermee kun je voorspellen hoe groot het aantal inwoners in 2020 en 2030 zal zijn.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** het lineaire model dat wordt opgesteld voor de bevolking van deze stad.

- Ga na dat er door de meetpunten inderdaad ongeveer een rechte lijn bestaat die door de punten $(20; 5,3)$ en $(50; 9,8)$ gaat.
- Controleer of de gevonden formule bij de overige meetpunten ongeveer de juiste waarden oplevert.
- Voorspel het aantal inwoners van deze stad in 2020 en 2030.

Opgave 2

Een cilindervormige kaars is anderhalf uur na het aansteken 25 cm lang en vier uur na het aansteken nog 20 cm lang. Voor deze kaars kun je aannemen dat de lengte L (in centimeter) afhangt van de brandtijd t (in uren).

- Bereken het hellingsgetal van die lineaire functie. Welke betekenis heeft dit getal in de praktijk?
- Stel het functievoorschrift $L(t)$ op.
- Bereken met behulp van dat functievoorschrift na hoeveel uur deze kaars volledig is opgebrand.

Theorie en voorbeelden

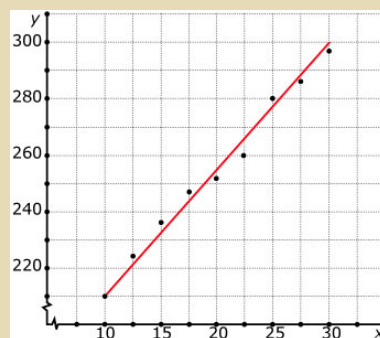
Om te onthouden

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door een tabel met meetpunten. Liggen die meetpunten (ongeveer) op een rechte lijn, dan kun je hierbij een **lineair model** opstellen. En daarbij hoort een **lineaire functie** van de vorm $y = ax + b$.

Gaat de rechte lijn door de punten (x_A, y_A) en (x_B, y_B) , dan bepaal je als volgt de lineaire formule:

- x neemt toe met $x_B - x_A$;
- y neemt toe met $y_B - y_A$;
- als x met 1 toeneemt, neemt y met $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ toe;
dit is het hellingsgetal (de richtingscoëfficiënt) r van de lijn;
- de gevraagde formule is $y = rx + b$;
- (x_A, y_A) moet op de lijn liggen, dus $y_A = r \cdot x_A + b$, waarmee je b kunt berekenen.

De formule van de rechte lijn kun je nu opstellen.



Figuur 4.1

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet in een assenstelsel de twee punten A en B getekend. Stel een formule op voor de lijn die door de punten A en B gaat.

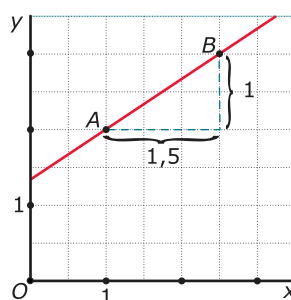
Antwoord

Lees af: $A(1,2)$ en $B(2,5;3)$. De gevraagde formule heeft de vorm $y = ax + b$.

Zo bereken je a en b :

- $a = \frac{3-2}{2,5-1} = \frac{2}{3}$;
- de formule wordt dan $y = \frac{2}{3}x + b$;
- $A(1,2)$ invullen geeft: $2 = \frac{2}{3} \cdot 1 + b$ en dus $b = 1\frac{1}{3}$.
Als je het punt $B(2,5;3)$ invult, moet je dezelfde waarde voor b krijgen.

De gevraagde formule is $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.



Figuur 4.2

Opgave 3

Bekijk eerst **Voorbeeld 1**.

- Lijn l gaat door de punten $(-3,2)$ en $(17,10)$. Stel de vergelijking van lijn l op.
- Lijn m gaat door de punten $(5,20)$ en $(10,-25)$. Stel de vergelijking van lijn m op.
- Gegeven is dat f een lineaire functie is en dat $f(6) = 8$ en $f(10) = 14$. Stel het functievoorschrift op van f .

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Je kunt een formule voor de lijn die door de punten $A(1,2)$ en $B(2,5;3)$ gaat ook opstellen door beide punten in de vergelijking $y = ax + b$ in te vullen:

- $A(1,2)$ geeft: $2 = a + b$.
- $B(2,5;3)$ geeft: $3 = 2,5a + b$.

Trek je beide vergelijkingen van elkaar af, dan vind je: $1 = 1,5a$. Dus $a = \frac{2}{3}$. En (na invullen): $b = \frac{4}{3}$. De vergelijking van de lijn is $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** tref je een andere manier aan om de vergelijking van een lijn door twee gegeven punten op te stellen. Lijn l gaat door de punten $(-4,2)$ en $(20,10)$.

Stel een vergelijking van l op door deze methode toe te passen.

Opgave 5

Dit zijn twee bijzondere situaties.

- Stel een vergelijking op van de lijn die door de punten $(2,1)$ en $(12,1)$ gaat.
- Stel een vergelijking op van de lijn die door de punten $(2,1)$ en $(2,10)$ gaat.

Voorbeeld 3

Van 22 scholieren in een 4 havo klas zijn lengte en gewicht gemeten en in Excel ingevoerd. Excel kan daar een zogenaamde trendlijn doorheen tekenen. Deze trendlijn geeft dan een verband tussen lengte L (in centimeter) en gewicht G (in kilogram). Er is gekozen voor een lineair verband. Stel daarbij een passende formule op.

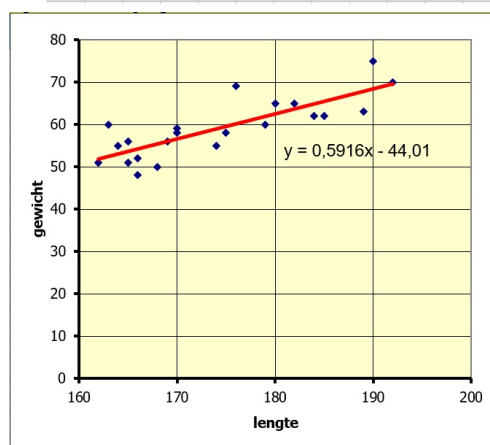
Antwoord

De formule krijgt de vorm: $G = a \cdot L + b$. De lijn gaat ongeveer door $(160,50)$ en $(190,67)$.

- $a = \frac{67-50}{190-160} \approx 0,57$;
- de formule wordt dan $G = 0,57L + b$;
- punt $(160,50)$ invullen geeft $50 = 0,57 \cdot 160 + b$, dus $b \approx -41,2$.

De gevraagde formule is $G = 0,57L - 41,2$.

Je ziet dat deze formule iets afwijkt van de formule die Excel geeft. Dat komt door de onnauwkeurigheid van het aflezen van de punten waar de lijn doorheen gaat. Excel berekent de trendlijn nauwkeuriger.



Figuur 4.3

Opgave 6

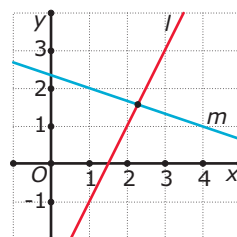
In **Voorbeeld 3** zie je hoe bij een verzameling meetpunten een lineair model wordt opgesteld door een zo goed mogelijk passende lijn te trekken en twee punten op die lijn af te lezen uit de figuur.

- Stel dat je afleest dat de rechte lijn door de punten $(170,56)$ en $(195,70)$ gaat. Welke formule past er dan bij de lijn?
- Bepaal met de formule die je bij a hebt gevonden hoe zwaar een scholier van 1,60 meter uit deze groep zou moeten zijn.

Opgave 7

Je ziet twee lijnen l en m .

- Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op.
- Bereken vervolgens exact het snijpunt van beide lijnen.

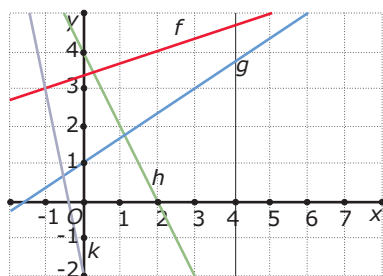


Figuur 4.4

Verwerken

Opgave 8

In dit assenstelsel staan vier grafieken van lineaire functies.



Figuur 4.5

Stel bij elk van deze functies het functievoorschrift op.

Opgave 9

Stel een vergelijking op van de rechte lijn l bij de volgende situaties.

- l gaat door de punten $(30,68)$ en $(34,56)$.
- l gaat door de punten $(-2,100)$ en $(-3,100)$.
- l heeft richtingscoëfficiënt 0,5 en gaat door $(-2,4)$.
- l is de x -as.
- l is de y -as.

Opgave 10

In een hogedrukpan neemt tijdens het koken de druk in de pan toe. Daardoor wordt de kooktemperatuur hoger, zodat het eten sneller gaar is. In de tabel vind je enige meetgegevens.

druk p (in atmosfeer)	1	1,23	1,51	1,7	1,94
temperatuur T (in $^{\circ}\text{C}$)	100	105	110	115	120

Tabel 4.3

Als je deze meetgegevens als punten in een assenstelsel tekent, dan kun je daar (bij benadering) een rechte lijn door tekenen. Neem

T op de verticale as, dan gaat de lijn door het punt $(1,100)$. Bij de tabel past dan een lineair verband van de vorm $T = a \cdot p + b$. De rechte lijn gaat ook langs bijvoorbeeld het punt $(1,70; 115)$. Met behulp van deze punten vind je dan een geschikt lineair model: $T = 21,43p + 78,57$.

- a Stel zelf de gegeven formule voor $T(p)$ op. Welke eenheden worden er gebruikt?
- b Bij welke temperatuur zou de druk 2 atmosfeer worden?
- c Bij welke druk kun je een temperatuur van 150°C bereiken?

Opgave 11

Lijn l gaat door de punten $P(13,8)$ en $Q(43,68)$ en lijn m gaat door de punten $R(23,38)$ en $T(43,28)$. Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijnen l en m .

Opgave 12

Voor gassen geldt de wet van Gay-Lussac. Het volume V (in m^3) van een bepaalde hoeveelheid gas bij een bepaalde druk hangt af van de temperatuur T (in $^\circ\text{C}$). Er geldt: $\frac{V(T)}{T+273} = \frac{V(0)}{273}$ waarin -273°C het absolute nulpunt is en $V(0)$ het volume bij 0°C is.

- a Herleid deze formule tot $V(T) = V(0) \cdot \left(1 + \frac{1}{273}T\right)$.
- b Leg uit dat er sprake is van een lineair model. Welke aanname moet je doen, wil dat model geldig zijn? Welk domein moet je kiezen?
- c Neem $V(0) = 1 \text{ m}^3$ en breng de bijbehorende grafiek in beeld. Schrijf de geschikte vensterinstellingen op.
- d Welk volume heeft dit gas bij kamertemperatuur (20°C)?
- e Bij welke temperatuur is het volume 1,5 keer zo groot geworden ten opzichte van $V(0) = 1$?

Toepassen

Opgave 13: Eenparige beweging

Bij een eenparige beweging beweegt een voorwerp met een constante snelheid langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven met de formule: $s(t) = s(0) + v \cdot t$ waarin $s(t)$ de afgelegde weg (in meters) na t seconden is.

- a Wat stelt $s(0)$ voor?
- b Wat stelt v voor?
- c Neem $s(0) = 0$ en $v = 20$ voor een bepaald voorwerp. Breng de bijbehorende grafiek van $s(t)$ in beeld.
- d Een tweede voorwerp heeft 400 meter voorsprong en beweegt langs dezelfde baan met een snelheid van 15 m/s . Geef de formule die bij de beweging van dit voorwerp past en breng de bijbehorende grafiek in beeld.
- e Bereken op welk tijdstip het eerste voorwerp het tweede heeft ingehaald.

Opgave 14: Eenparig versnelde beweging

Bij een eenparig versnelde beweging beweegt een voorwerp met een constante versnelling a (in m/s^2) langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven door: $v(t) = v(0) + a \cdot t$ waarin $v(t)$ de snelheid (in m/s) na t seconden is.

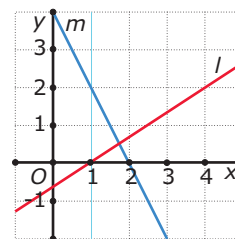
- Wat stelt $v(0)$ voor?
- Albert weet op twee momenten de snelheid van een voorwerp. Hij weet namelijk dat het voorwerp vertrekt met een beginsnelheid van 40 m/s en dat het voorwerp na $3,5$ seconden een snelheid van 75 m/s heeft. Stel eerst de formule $v(t)$ voor dit voorwerp op en bereken dan na hoeveel seconden het voorwerp met een snelheid van 350 m/s beweegt.
- Om een voorwerp met een massa m van 1000 kg dat met een constante snelheid van 40 m/s beweegt tot stilstand te brengen, wordt een bepaalde remkracht F (in newton) uitgeoefend. Het voorwerp moet binnen acht seconden tot stilstand komen. Er geldt $F = m \cdot a$ met F in newton, m in kg en a (de versnelling) in m/s^2 . Bereken de grootte van de remkracht F .

Testen

Opgave 15

In deze figuur staan twee lijnen l en m .

Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op. Bereken vervolgens algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.



Figuur 4.6

Opgave 16

Stel een vergelijking op van de rechte lijnen die als volgt beschreven worden.

- De lijn gaat door de punten $(40, 32)$ en $(34, 56)$.
- De lijn heeft richtingscoëfficiënt -2 en gaat door het punt $(-2, 4)$.
- De lijn gaat door het punt $(3, 2)$ en is evenwijdig aan de y -as.

Opgave 17

De uitzetting van een metalen staaf verloopt lineair met de temperatuur T als deze gelijkmatig wordt verhit. In de natuurkunde wordt daarvoor de formule: $l(T) = l(0) \cdot (1 + \alpha \cdot T)$ gebruikt, waarin $l(T)$ de lengte (in m) van de staaf na het verhitten tot T °C is. De constante α heet de lineaire uitzettingscoëfficiënt.

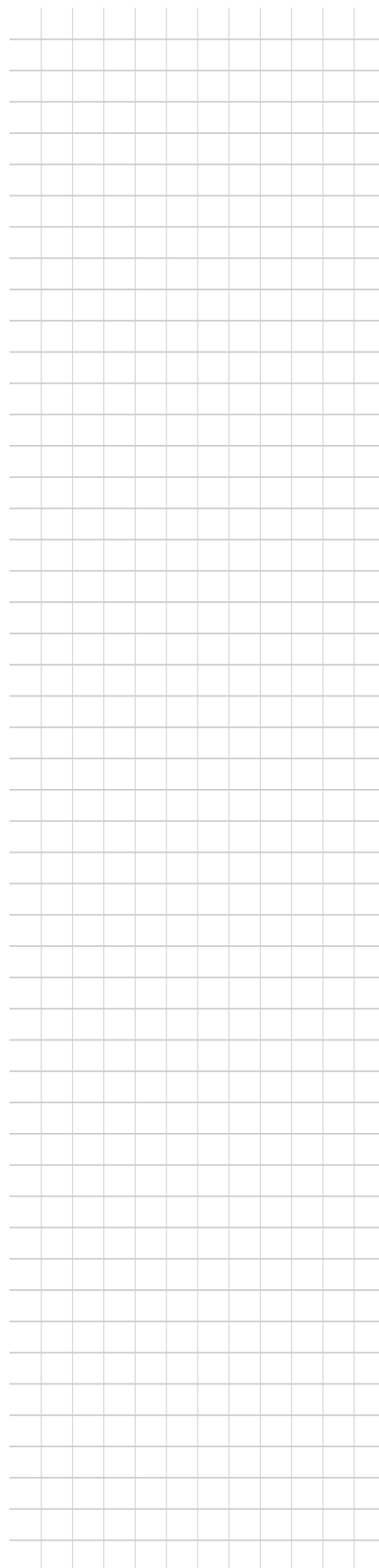
- Wat stelt $l(0)$ voor?
- Voor ijzer geldt: $\alpha = 9 \cdot 10^{-6}$. Ga uit van een ijzeren staaf met $l(0) = 0,5 \text{ m}$. Hoe lang is deze staaf op kamertemperatuur (20 °C)? En tot hoeveel graden Celsius moet je hem verhitten om de staaf 1 mm langer dan $l(0)$ te laten worden?
- Voor koper geldt: $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5}$. Een staaf koper van 50 cm bij 20 °C wordt verhit tot 100 °C. Bereken de lengte van deze staaf bij 100 °C.

Practicum

Ook de grafische rekenmachine kan een formule opstellen bij een lijn door een puntenwolk.

Met deze practica leer je hoe je de **de trendlijn** met de grafische rekenmachine tekent en berekent.

- **Trendlijn, correlatie en de TI84**
- **Trendlijn, correlatie en de TIInspire**
- **Trendlijn, correlatie en de Casio**
- **Trendlijn, correlatie en de HPprime**
- **Trendlijn, correlatie en de NumWorks**



1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Lineaire verbanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

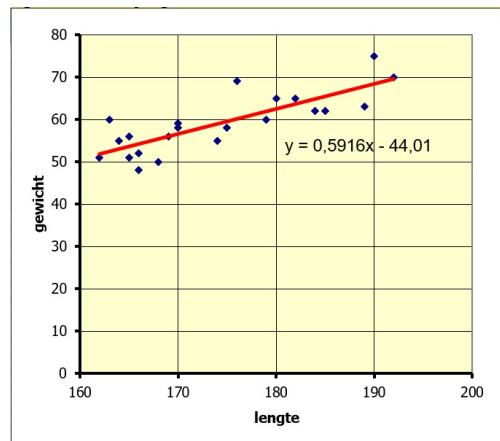
- lineaire functie — hellingsgetal = richtingscoëfficiënt — begingetal
- lineair verband — lineaire vergelijking met twee variabelen
- stelsel (lineaire) vergelijkingen met twee variabelen — oplossen door substitutie en/of de balansmethode
- lineair model

Activiteitenlijst

- bij lineaire functie hellingsgetal en begingetal herkennen om snel de grafiek te kunnen tekenen
- algemene lineaire verbanden herkennen — herschrijven naar lineaire functie
- stelsel (lineaire) vergelijkingen met twee variabelen oplossen
- lineair model opstellen, vergelijking lijn door twee gegeven punten opstellen

Achtergronden

In praktijksituaties wordt een verband tussen twee variabelen vaak onderzocht door te meten. Een eenvoudig voorbeeld is het verband tussen lengte en gewicht bij mensen. Langere mensen zullen gemiddeld wel zwaarder zijn dan kleinere, dus het lijkt er op dat er tussen lengte L (in cm) en gewicht G (in kg) een verband bestaat. Dat kun je voor scholieren in 4 havo bijvoorbeeld onderzoeken door een steekproef te nemen (bijvoorbeeld alle 4-havo-leerlingen van een bepaalde school) en daarvan lengte en gewicht te meten. Als je die gegevens in een Excelbestand zet en vervolgens een grafiek (kies grafiektype 'Spreiding') maakt, kun je bekijken of er als grafiek ongeveer een rechte lijn uitkomt. In Excel kun je de rechte lijn die het beste bij je meetpunten past laten tekenen (Invoegen: Trendlijn). Zelf kun je er dan wel een formule bij maken. Excel past hierbij **lineaire regressie** toe. Het verband is alleen betrouwbaar als je meetpunten ook echt redelijk dicht bij de getekende trendlijn liggen.



Figuur 5.1

Testen

Opgave 1

Twee hardlopers lopen 1000 meter in een vrijwel constant tempo. Ton loopt met een snelheid van 15 km/h, Henk met een snelheid van 12 km/h. Henk begint twee minuten eerder aan de 1000 meter dan Ton.

- Hoe groot zijn hun snelheden in meter per minuut?
- Hoeveel meter ligt Henk op Ton voor als Ton aan zijn 1000 meter begint?
- Voor Ton geldt de formule $a = 250t$, waarin t de tijd en a de afgelegde afstand (vanaf de start van de 1000 meter) is. Welke eenheden zijn er gebruikt?
- Waarom is voor Ton de afgelegde afstand a wel recht evenredig met de tijd t en is dit voor Henk niet het geval?
- Welke formule met dezelfde variabelen geldt dan voor Henk?
- Breng beide grafieken in beeld. Wie is het eerst aan het einde van de 1000 meter gekomen en hoeveel lag hij toen op de ander voor?

Opgave 2

Breng de lineaire vergelijkingen in beeld op de grafische rekenmachine. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de lijn.

- $3x - 2y = 24$
- $x + 3y = 6$
- $x = 2y + 1$
- $y = 2$

Opgave 3

Los de stelsels van vergelijkingen op. Rond waar nodig af op 1 decimaal.

- $$\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} K = 40 + 0,16a \\ K = 36 + 0,18a \end{cases}$$
- $$\begin{cases} q = 200 - 0,25p \\ p \cdot q = 10000 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x + y = 6 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Opgave 4

Gegeven is lijn l die door de punten $(-40,46)$ en $(110,96)$ gaat en lijn m die een richtingscoëfficiënt heeft van -3 en door het punt $(2,14)$ gaat.

- Stel de formule op van beide lijnen.
- Bereken algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.

Opgave 5

Iemand investeert € 10000,00 die voor hem worden belegd in twee aandelenfondsen A en B. De aandelen in fonds A leveren minder winst op, maar er is weinig risico dat ze sterk in waarde dalen. Fonds B lijkt meer winst op te gaan leveren, maar er is een groter risico aan verbonden. Het fonds A levert na een jaar een winst van 10% op, het fonds B levert na een jaar 14% winst. In totaal wordt er € 1180,00 aan winst aan deze investeerder uitgekeerd.

Hoeveel geld is er voor hem in fonds A belegd?

Opgave 6

In de jaren zeventig van de vorige eeuw bestonden er verschillende tarieven voor het gebruik van aardgas. Voor het gemak zijn de bedragen omgerekend in euro.

In een zekere plaats gold:

- bij een jaarverbruik tot 600 m^3 :
vastrecht € 21,00 per jaar en daarbovenop € 0,13 per verbruikte m^3 (tarief 1);
- bij een jaarverbruik vanaf 600 m^3 :
vastrecht € 48,00 per jaar en daarbovenop € 0,08 per verbruikte m^3 (tarief 2).

- Teken de grafiek van de jaarlijkse kosten K voor een gasverbruik a lopend van 0 tot 1200 m^3 .
- De grafiek van a valt in twee delen uiteen. Voor elk van die delen zijn de jaarlijkse kosten een lineaire functie van a , het aantal verbruikte m^3 . Geef van elk van die lineaire functies een formule.
- Een tuinder die aan de meterstand zag dat hij op een jaarverbruik van ongeveer 590 m^3 uit zou komen, ging gas afbranden. Wat wordt daarmee bedoeld? Waarom deed hij dat?
- Vanaf welk jaarverbruik leverde toen het gas afbranden een besparing op? En vanaf welk jaargebruik was dat tarief twee keer goedkoper?
- Welke maatregelen kon het gasbedrijf treffen om het afbranden van gas te voorkomen?

Opgave 7

Iemand hangt verschillende gewichten aan een veer en meet de uitrekking. m is de massa van de gewichten in gram, u is de uitrekking van de veer in centimeter. Ze zet de meetwaarden in een tabel.

m	10	20	30	40	50	60	70	80
u	4,8	10,3	15,1	19,7	25,0	29,8	35,2	40,1

Tabel 5.1

- Zet de punten in een assenstelsel. Waarom is er sprake van een lineair verband (bij benadering)?
- Geef de formule die u uitdrukt in m .
- Als er 50 gram aan de veer hangt is de totale lengte l van de veer 35 centimeter. Geef de formule die l uitdrukt in m .

Een tweede veer is zonder gewicht eraan 8 centimeter lang en met 10 gram eraan 15,5 centimeter lang.

- d Geef de formule die de lengte l van deze tweede veer uitdrukt in m .
- e Er is een massa die ervoor zorgt dat de totale lengte van beide veren gelijk is. Bereken deze massa.

Toepassen

Opgave 8: Afgelegde weg, snelheid en versnelling

Bij een eenparige beweging is de snelheid constant. Bij een eenparig versnelde beweging is de versnelling constant. In Nederland geldt op sommige plaatsen een maximumsnelheid van 100 km/uur. Een automobilist rijdt omdat er verder vrijwel geen verkeer op de weg is toch 140 km/uur op zo'n weggedeelte. Een verdekt opgestelde motoragent ziet hem voorbij schieten en zet de achtervolging in. Neem $t = 0$ op het moment dat de motor start. Dit is 6 seconden nadat de auto de motoragent passeert. Neem ook aan dat de auto met een constante snelheid rijdt en de motor eenparig versnelt met een versnelling van 4 m/s^2 .

- a Hoeveel seconden na $t = 0$ rijdt de motor sneller dan de auto?
- b Hoeveel m voorsprong heeft de auto op het moment dat de motor start?
- c Stel een formule op voor de afgelegde weg $a(t)$ van de auto. Kies geschikte eenheden.
- d De topsnelheid van de motor is 200 km/uur. Hoe lang doet de motor er over om die te bereiken?
- e Als de motor op topsnelheid rijdt, is zijn snelheid constant. Welke formule geldt dan voor de afgelegde weg $m(t)$ van de motor?
- f Na hoeveel seconden heeft de motor de auto ingehaald?

Opgave 9: Cijfers vaststellen

Bij het bepalen van het cijfer van een toets wordt uitgegaan van een lineair verband tussen de score s en het cijfer c . Neem aan dat de maximale score 80 punten is. Bij een score van 80 punten hoort als cijfer een 10, bij een score van 0 punten hoort als cijfer een 1. De omslagscore is de score waarbij het cijfer 5,5 (dus net voldoende) is.

- a Met welke formule kun je de score omzetten naar een cijfer?
- b Hoeveel bedraagt de omslagscore?
Als een toets zeer slecht wordt gemaakt, dan kun je als docent de cijfers wat ophogen door de omslagscore te veranderen. Bijvoorbeeld verlaag je de omslagscore met 5 punten. Nog steeds levert een score van 0 punten een 1 en een score van 80 punten een 10 op. De grafiek van c als functie van s bestaat dan uit twee lineaire gedeelten.
- c Welke twee formules heb je nu nodig om het cijfer te berekenen?
- d Welk cijfer krijgt iemand die zonder ophogen een 6 zou krijgen?

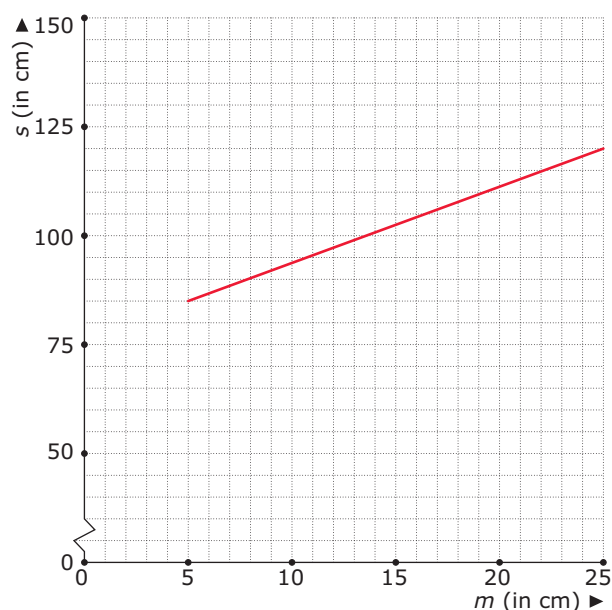
Is een toets daarentegen erg gemakkelijk, dan kan de docent de cijfers naar beneden bijstellen door de omslagscore te verhogen. Stel dat een docent met zichzelf afsprekt dat hij achteraf de omslagscore met maximaal 5 punten zal verlagen of verhogen, afhankelijk van de resultaten van de toets.

- e Je zou zonder bijstelling een 5,8 halen. Welk cijfer kan dit maximaal nog worden? En minimaal?

Examen

Opgave 10: Schofthoogte

Oudheidkundigen proberen informatie te krijgen over de voedselsituatie van vroegere bewoners van een nederzetting. Uit botjes in afvalputten blijkt welke dieren men vroeger at en soms ook hoeveel. Niet bekend is hoeveel voedsel een rund uit die tijd opleverde, maar daarover zou de grootte van het dier informatie kunnen geven. Als maat voor de grootte neemt men de schofthoogte. Meestal ontbreken er botten die nodig zijn om de schofthoogte te bepalen. Vaak treft men wel een middenvoetsbeentje (metacarpus) aan. Men heeft voor twee runderrassen, A en B, kunnen vaststellen dat er tussen de metacarpus en de schofthoogte een verband bestaat. Dat verband verschilt per ras. Onderstaande grafiek (zie [werkblad](#)) geeft het verband tussen de schofthoogte (s) en de lengte van de metacarpus (m) voor ras A.



Figuur 5.3

- a Stel een formule op, die bij deze grafiek past.
Voor ras B geldt de formule: $s = 5m + 16$ ($5 \leq m \leq 25$).
- b Teken in de figuur de grafiek bij deze formule.
- c Bereken in millimeters nauwkeurig bij welke waarde van m de schofthoogten van beide rassen gelijk zijn.



Figuur 5.2

In theorie zou bij opgegeven waarden van m en s van een dier vastgesteld kunnen worden of het een dier van ras A of van ras B betreft, met uitzondering van de situatie zoals bedoeld in c. In werkelijkheid is het verband tussen de lengte van de metacarpus en de schofthoogte niet zo precies als de formules aangeven. We nemen aan dat bij elke lengte van de metacarpus de schofthoogte kan variëren van 2 cm onder de aangegeven waarde tot 2 cm erboven.

- d Bepaal met behulp van de grafieken bij welke lengten van de metacarpus er problemen kunnen optreden bij het vaststellen van het ras.

Uit de schofthoogte kan bij benadering het levend gewicht van een rund worden afgeleid. Er blijkt een verband te bestaan dat nage-noeëg lineair is. Gegevens over dit verband staan in onderstaande tabel.

schofthoogte (cm)	levend gewicht ras A (kg)	levend gewicht ras B (kg)
110	400	380
120	470	435

Tabel 5.2

De lengte van een gevonden metacarpus is 21 cm. Het botje kan van een rund van ras A of van ras B zijn.

- e Bereken voor beide mogelijkheden het levend gewicht.

(bron: examen wiskunde A havo 1990 - I)

Opgave 11: Windsnelheid en hoogte

Op een bepaalde dag is in Vlaardingen op verschillende hoogtes de windsnelheid gemeten. Uit de meetresultaten blijkt dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de windsnelheid W in m/s en de hoogte h in meter voor hoogten tussen 10 en 80 meter (zie tabel). De formule $W = a \cdot h + b$ geeft dit lineaire verband.

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,8	4,3

Tabel 5.3

Bereken a en b met behulp van de gegevens in de tabel. Rond a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

(bron: examen wiskunde B havo 2006 - I)

2

Veeltermfuncties

2.1	Kwadratische functies	44
2.2	De abc-formule	51
2.3	Veeltermen	60
2.4	Ongelijkheden	68
2.5	Totaalbeeld	75

2.1 Kwadratische functies

Inleiding

Je gaat nu in op de eigenschappen van functies met exponent 2, kwadraten dus. Kwadratische functies zijn functies waarvan de grafieken kunnen ontstaan door transformaties van de grafiek van $y = x^2$. De grafieken van kwadratische functies zijn parabolen. De eigenschappen van die kwadratische functies kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen en om formules bij gegeven parabolen op te stellen.

Je leert in dit onderwerp

- de eigenschappen van een kwadratische functie afleiden uit het functievoorschrift;
- kwadratische vergelijkingen oplossen;
- een passend functievoorschrift opstellen bij een parabool die de grafiek is van een kwadratische functie.

Voorkennis

- algebraïsch vergelijkingen oplossen;
- transformaties van functies toepassen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet al van alles van kwadratische functies.

- Welke oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = 20$?
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = -1$?
- Heeft elke kwadratische vergelijking oplossingen? Hoeveel oplossingen kunnen er zijn?
- Wat weet je allemaal van een kwadratische functie? Maak een overzicht.



Figuur 1.1

Uitleg

Bekijk de applet: Kwadratische functies

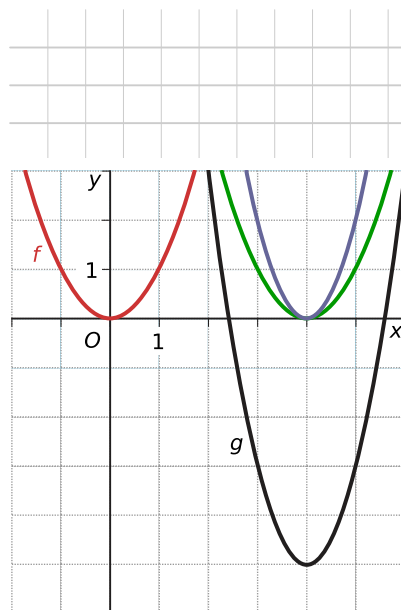
Kwadratische functies zijn $f(x) = x^2$ en alle functies waarvan de grafiek door de bekende transformaties uit die van f ontstaan. Je schrijft ze in de vorm $g(x) = a(x - p)^2 + q$

Kies bijvoorbeeld $a = 2$, $p = 4$ en $q = -5$ dan krijg je de functie met voorschrift $g(x) = 2(x - 4)^2 - 5$, waarvan de grafiek uit die van f ontstaat door:

- een translatie ten opzichte van de y -as van 4;
- vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 2;
- een translatie ten opzichte van de x -as van -5.

De grafiek van g is een dalparabool met top $(4, -5)$ en symmetrieas $x = 4$. De twee nulpunten bereken je door de vergelijking $2(x - 4)^2 - 5 = 0$ op te lossen.

Neem je $a = -2$, dan wordt het functievoorschrift $h(x) = -2(x - 4)^2 - 5$. De grafiek van h is een bergparabool, omdat tekenwisseling van a een spiegeling betekent.



Figuur 1.2

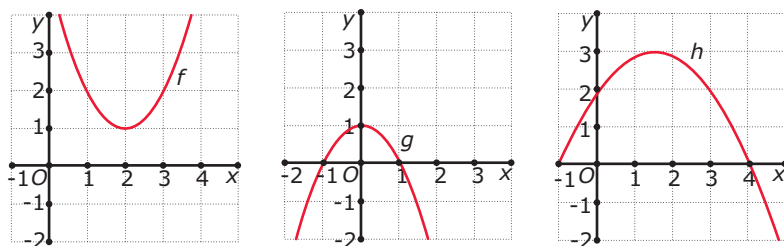
Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 4$.

- Door welke transformaties kan de grafiek van f uit die van $y = x^2$ ontstaan?
- Geef het domein en bereik van f .
- Heeft deze functie een minimum of een maximum?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de functie een minimum of een maximum heeft?

Opgave 2

Bekijk de parabolen. Geef de bijbehorende functievoorschriften.



Figuur 1.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Kwadratische functies

Een functie van de vorm

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

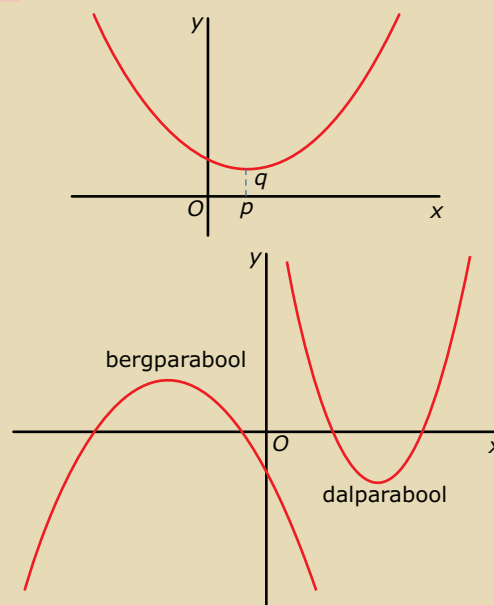
noem je een **kwadratische functie** (als $a \neq 0$). De grafiek van elke kwadratische functie ontstaat door transformatie van de grafiek van $y = x^2$. De grafiek van elke kwadratische functie is een **parabool** met **top** (p, q) en **symmetrieas** $x = p$.

Als $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool**.

Als $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool**.

De **kwadratische vergelijking** $a(x - p)^2 + q = u$ kun je herleiden tot: $(x - p)^2 = c$ met $c = \frac{u - q}{a}$.

- Als $c > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $c = 0$ is er één oplossing.
- Als $c < 0$ zijn er geen oplossingen.



Figuur 1.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Gegeven is de kwadratische functie $f(x) = 2(x - 1)^2 - 5$.

Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$?

Bepaal de top en de symmetrieas van deze grafiek.

Antwoord

De grafiek wordt verkregen door op de grafiek van $y = x^2$ de volgende transformaties toe te passen:

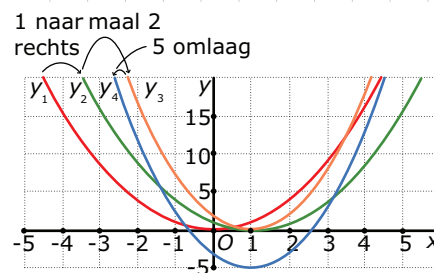
- translatie van 1 ten opzichte van de y -as;
- vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x -as;
- translatie van -5 ten opzichte van de x -as.

De grafiek is een dalparabool met top $(1, -5)$. De coördinaten van die top zijn direct uit het functievoorschrift af te lezen. De symmetrieas is de lijn $x = 1$.

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$.

- Door welke transformaties kan de grafiek van f uit die van $y = x^2$ ontstaan?
- Geef het domein en bereik van f .
- Bepaal de uiterste waarde van f .



Figuur 1.5

Opgave 4

Als je de grafiek van $y = x^2$ verschuift en ten opzichte van de x -as vermenigvuldigt, krijg je een grafiek waarvan het functievoorschrift als volgt te schrijven is: $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de grafiek een maximum of een minimum heeft?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien hoe groot het maximum of minimum is?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien welke waarde van x je in moet vullen om het maximum of minimum te krijgen?
- Geef het domein en bereik van deze functie als $a < 0$.

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $2(x - 1)^2 - 5 = 3$ exact op.

Bekijk ook de oplossingen van de volgende twee vergelijkingen:

- $2(x - 1)^2 - 5 = -8$
- $2(x - 1)^2 - 5 = -5$

Antwoord

$$\begin{aligned} 2(x - 1)^2 - 5 &= 3 \\ 2(x - 1)^2 &= 8 \\ (x - 1)^2 &= 4 \\ x - 1 &= \pm\sqrt{4} \\ x &= 1 \pm 2 \end{aligned}$$

Je vindt $x = -1 \vee x = 3$.

Voor de tweede vergelijking krijg je $2(x - 1)^2 = -3$. Dit kan niet aangezien $2(x - 1)^2 \geq 0$.

De derde vergelijking wordt $2(x - 1)^2 = 0$ en heeft precies één oplossing, namelijk $x = 1$.

Opgave 5

Los de vergelijkingen exact op (dus rond wortels niet af).

- $x^2 = 100$
- $(x - 4)^2 = 64$
- $-3(x + 1)^2 = -75$
- $3(x + 2)^2 - 3 = 27$
- $2x^2 - 10 = 0$

Voorbeeld 3

De snijpunten met de x -as van de grafiek van de kwadratische functie f zijn $(2,0)$ en $(4,0)$. Het snijpunt met de y -as is $(0,6)$.

Welk functievoorschrift heeft deze functie?

Antwoord

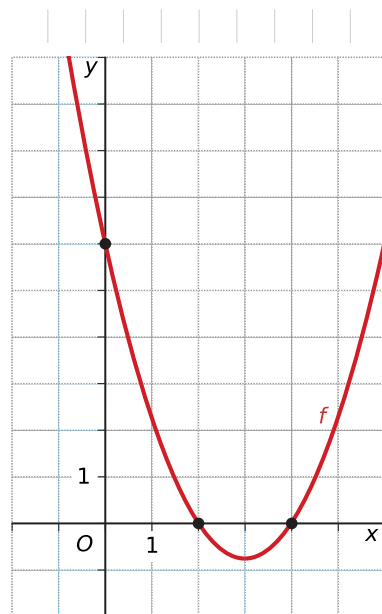
De grafiek van f is een parabool waarvan de symmetrieas een verticale lijn midden tussen de nulpunten is, dus door het punt $(3,0)$. Dus is $f(x) = a(x - 3)^2 + q$.

De grafiek gaat door het punt $(0,6)$, dus $f(0) = 6$, dit geeft $9a + q = 6$.

De grafiek gaat ook door het punt $(2,0)$, dus $f(2) = 0$, dit geeft $a + q = 0$.

Uit de onderste vergelijking volgt: $q = -a$. Vul dit in de bovenste vergelijking in. Je vindt dan: $9a - a = 6$. En dus: $a = 0,75$. Omdat $q = -a$ is, geldt $q = -0,75$.

Het functievoorschrift wordt: $f(x) = 0,75(x - 3)^2 - 0,75$.



Figuur 1.6

Opgave 6

Stel een voorschrift op van de kwadratische functie f waarvan de grafiek de assen in de punten $(-2,0)$, $(0,2)$ en $(4,0)$ snijdt.

Verwerken

Opgave 7

De grafiek van de functie $f(x) = 2(x + 8)^2 - 8$ ontstaat door transformatie van de grafiek van $y = x^2$.

- Welke transformaties moet je dan toepassen?
- Verander de volgorde van de laatste twee transformaties en plot de grafiek van de functie g die zo ontstaat. Waarom is de volgorde van de transformaties belangrijk?

Opgave 8

Bekijk de grafiek van $f(x) = -2(x + 4)^2 + 5$ met de grafische rekenmachine.

- Geef het maximum, dan wel minimum van f en de waarde van x waarvoor je deze extreme waarde krijgt.
- Los de vergelijking $-2(x + 4)^2 + 5 = -5$ op.
- Los op: $f(x) = 5$
- Los op: $f(x) = -11$

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$ met de grafische rekenmachine.

- Los algebraïsch op: $2(x - 1)^2 - 3 = 0$. Rond af op twee decimalen.
- Teken de grafiek van f door elke transformatie vanuit $y = x^2$ te tekenen.

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = -3(x + 2)^2 + 10$.

- Voor welke waarden van x is deze functie dalend?
- Is de functie op de rest van het domein dus stijgend?
- Bereken algebraïsch de nulpunten van f . Rond af op twee decimalen.

Opgave 11

De grafiek van een kwadratische functie gaat door de punten (1,9) en (5,5) en heeft als symmetrieas de lijn $x = 2$.

- Is de grafiek van deze kwadratische functie een berg- of een dalparabool?
- Stel het functievoorschrift op bij de grafiek.

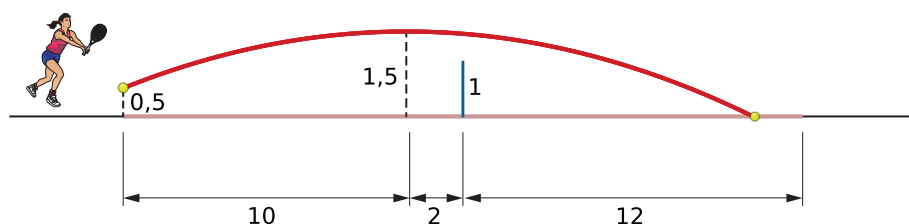
Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + p$. Hierin is p een nog onbekende constante.

- Welke extreme waarde heeft functie f ?
- Voor welke waarden van p heeft de functie f twee nulpunten?
- Voor welke waarde van p gaat de grafiek van f door het punt (5,8)?
- Voor welke waarden van p heeft de functie f geen snijpunten met de lijn $y = 4$?
- Voor welke waarden van p ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 4x - 5$?

Toepassen

Bekijk de applet: Baan van een tennisbal.



Figuur 1.7

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) **parabolische baan** ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, dat ongeveer 24 meter bedraagt.

Je kunt door berekening aantonen dat de bal 'in' is.

Breng daartoe een geschikt assenstelsel aan zoals dat in de figuur is te zien en stel een bijpassende kwadratische formule op voor de baan van de bal.

Opgave 13

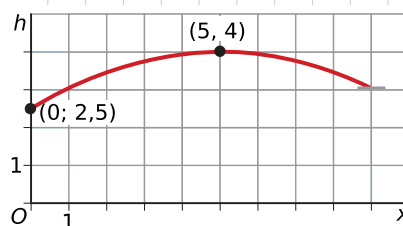
De baan van een tennisbal kan worden beschreven met een kwadratische functie.

- De baan is slechts ongeveer parabolisch. Waarom is hij in de praktijk zeer waarschijnlijk niet precies parabolisch?
- Omdat de parabool door het punt $(1; 1,5)$ gaat, kun je de baan beschrijven met de formule $h(x) = a(x - 10)^2 + 1,5$. Licht dit toe.
- Laat zien dat $a = -0,01$.
- Bereken nu de twee nulpunten van de kwadratische functie die de baan van de tennisbal (ongeveer) beschrijft. Laat zien dat de bal inderdaad 'in' is.

Opgave 14

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool, zie de figuur. Het hoogste punt van de baan is gegeven. De speler laat de bal op 2,5 meter boven de grond los.

- Stel een formule op voor de functie $h(x)$ die de baan van de bal beschrijft.
- De ring van de basket hangt op 3,05 meter boven de grond. Hoe ver staat de speler van (het midden van) de ring van de basket in cm nauwkeurig?



Figuur 1.8

Testen

Opgave 15

Bepaal bij de volgende functies de coördinaten van de top van de grafiek. Heeft de functie een maximum of een minimum?

- $f(x) = -2x^2 - 2$
- $g(x) = 100(x - 4)^2 + 8$
- $h(x) = -(x + 9)^2$

Opgave 16

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

- $3(x - 5)^2 - 5 = -2$
- $3(x - 5)^2 - 5 = -5$
- $-2(x + 4)^2 + 3 = 1$

Opgave 17

De nulpunten van de kwadratische functie f zijn $x = 10$ en $x = 20$. De grafiek van f snijdt de y -as in het punt $(0,30)$. Stel het functievoorschrift van f op.

2.2 De abc-formule

Inleiding

In het vorige onderdeel heb je gezien hoe je de vergelijking $2(x-1)^2 - 5 = 3$ oplost door terug te rekenen. Dat terugrekenen lukt omdat de x maar op één plaats in de vergelijking voorkomt. Kwadratische vergelijkingen komen ook voor in een vorm waarin terugrekenen niet mogelijk is. Werk je namelijk de haakjes weg, dan krijg je $2x^2 - 4x - 3 = 3$. De x komt nu op meer plekken voor en terugrekenen is niet meer mogelijk. Door kwadraatafsplitsen kun je ook een formule afleiden waarmee een dergelijke vergelijking in één keer op te lossen is. Dat is de zogenaamde abc-formule.

Je leert in dit onderwerp

- nagaan hoeveel oplossingen een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heeft;
- kwadratische vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen.
- kwadraat afsplitsen en zo de karakteristieken van een kwadratische functie bepalen.

Voorkennis

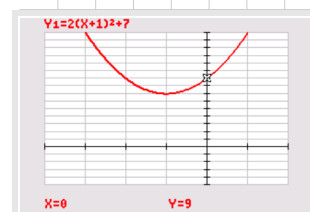
- kwadratische vergelijkingen van de vorm $a(x-p)^2 + q = u$ oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = 2(x+1)^2 + 7$.

- Schrijf het functievoorschrift van g in de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$.
- Hoe kun je met de grafische rekenmachine nagaan of je dit goed hebt gedaan?
- Hoe kun je aan een functievoorschrift van de vorm g in de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$ zien of de grafiek een dal- of een bergparabool is?
- Hoe bepaal je de top van de grafiek van g ?



Figuur 2.1

Uitleg 1

De vergelijking $x^2 + 6x = 16$ kun je niet oplossen door terug te rekenen. Maar bekijk de figuur eens. Zie je dat $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 3^2$? Dit betekent dat je de gegeven vergelijking kunt schrijven als: $(x + 3)^2 - 9 = 16$. En nu komt x weer op één plek voor en kun je terugrekenen:

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 - 9 &= 16 \\(x + 3)^2 &= 25 \\x + 3 &= \pm 5 \\x &= -3 \pm 5\end{aligned}$$

De oplossing van deze vergelijking is dus $x = 2 \vee x = -8$.

De gebruikte techniek heet kwadraat afsplitsen.

Opgave 1

Bekijk de kwadratische functie f met functievoorschrift $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

- Schrijf $f(x)$ in de vorm $(x - q)^2 + p$ door een kwadraat af te splitsen.
- Je weet nu de coördinaten van de top van de grafiek van f . Welke coördinaten zijn dit?
- Bereken algebraïsch de nulpunten van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Splitst van de functievoorschriften een kwadraat af.

- $f(x) = x^2 + 12x$
- $g(x) = x^2 - 8x + 15$
- $h(x) = 2x^2 - 12x - 12$
- $k(x) = -x^2 + 4x + 3$
- $m(x) = x^2 + 4x - 16$
- $k(x) = 3x^2 + 18x - 6$

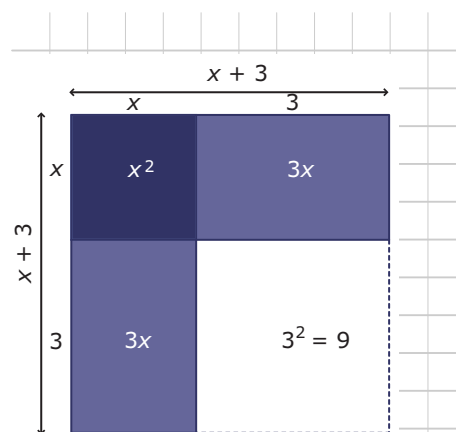
Uitleg 2

De techniek van een kwadraat afsplitsen kun je ook toepassen om bijvoorbeeld de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op te lossen (door eerst te delen door 3). Omdat dit tijdrovend kan zijn, hebben wiskundigen een algemene formule opgesteld.

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossing:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dit noem je de abc-formule of wortelformule. Deze formule geeft meteen de twee oplossingen als je de juiste waarden voor a , b en c invult. Deze formule kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen, maar de vergelijking moet vaak wel eerst nog in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ worden gezet.



Figuur 2.2

Ga na dat de oplossing van $3x^2 + 17x = 45$, en dus $3x^2 + 17x - 45 = 0$ is:

$$x = \frac{-17 + \sqrt{829}}{6} \vee x = \frac{-17 - \sqrt{829}}{6}$$

De uitdrukking $b^2 - 4ac$ onder het wortelteken heet de discriminant. Omdat de discriminant in dit geval positief is, namelijk 829, zijn er twee mogelijke antwoorden. Is de discriminant negatief, dan zijn er geen reële oplossingen. Je kunt de discriminant beter eerst uitrekenen.

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen op.

- a $3x^2 + 17x = 45$
- b $x^2 - 6x + 1 = 0$
- c $x^2 + 4x = 0$
- d $4x^2 - 3x - 8 = 0$

Opgave 4

- a Los de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op met kwadraat afsplitsen.
- b Probeer op dezelfde manier de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ op te lossen met kwadraat afsplitsen. Kun je zelf de abc-formule vinden?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een algemene formule voor een **kwadratische functie** is: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nu zie je aan het functievoorschrift niet meteen hoe hij door transformatie uit de machtsfunctie $y = x^2$ kan ontstaan. Dat is lastig als je de top en de nulpunten van de bijbehorende parabool wilt vinden.

Door **kwadraat afsplitsen** kun je het functievoorschrift van f omzetten naar de vorm: $f(x) = a(x - p)^2 + q$ waarin (p, q) de top van de grafiek is. Je gebruikt daarbij het product:

$$(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2, \text{ dus } x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$$

Natuurlijk is het handig als je $f(x) = ax^2 + bx + c$ met behulp van kwadraat afsplitsen omzet naar de vorm waarin je de top en de symmetrieas zo kunt aflezen.

Het berekenen van de nulpunten van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ kun je ook doen met behulp van kwadraat afsplitsen.

Wiskundigen hebben dit al lang geleden gedaan en zo de **abc-formule** afgeleid. Daarmee kun je de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen en zo de nulpunten van de bijbehorende kwadratische functie berekenen.

$$\text{De gevonden oplossing is: } x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De uitdrukking $D = b^2 - 4ac$ die onder het wortelteken staat, heet de **discriminant** van de kwadratische vergelijking. Omdat alleen de wortel uit een positief getal of 0 een reëel getal oplevert, bepaalt die discriminant het aantal oplossingen van de vergelijking:

- bij $D > 0$ zijn er twee oplossingen;
- bij $D = 0$ is er één oplossing (twee dezelfde);
- bij $D < 0$ zijn er geen reële oplossingen.

$-\frac{b}{2a}$ is de x -coördinaat van de top, omdat deze waarde precies tussen de nulpunten ligt.

In het **Practicum** kun je oefenen met het oplossen van kwadratische vergelijkingen.

Voorbeeld 1

Los op: $x^2 + 10x = 15$.

Antwoord

Terugrekenen kan niet, maar op $x^2 + 10x$ kun je kwadraat afsplitsen toepassen: $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.

De vergelijking wordt dan zo opgelost:

$$\begin{aligned}(x + 5)^2 - 25 &= 15 \\(x + 5)^2 &= 40 \\x + 5 &= \pm\sqrt{40} \\x &= -5 \pm \sqrt{40}\end{aligned}$$

Je kunt ook de abc-formule toepassen. Eerst schrijf je de vergelijking als: $x^2 + 10x - 15 = 0$. Dan neem je $a = 1$, $b = 10$ en $c = -15$. Discriminant: $D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot -15 = 160$. De discriminant is positief, er zijn twee oplossingen: $x = \frac{-10 \pm \sqrt{160}}{2}$ ∨ $x = \frac{-10 \pm \sqrt{160}}{2}$.

Ga na dat beide oplossingsmethoden hetzelfde opleveren.

Opgave 5

Los nu zelf de vergelijking $x^2 - 12x = 30$ op.

- Doe dit eerst met behulp van kwadraat afsplitsen.
- Doe dit ook met de abc-formule.

Opgave 6

Kwadratische vergelijkingen kunnen soms ook opgelost worden door ontbinden in factoren. Ga bij elk van de volgende vergelijkingen na of ze opgelost kunnen worden met ontbinden in factoren. Bereken van elk van de vergelijkingen de oplossing. Gebruik de abc-formule alleen als dat echt nodig is.

- $x^2 - x - 3 = 0$
- $-4x^2 + 5x - 12 = 0$
- $2x^2 - 10x + 10 = 2x - 6$
- $x - 5x^2 = 10$
- $x(x - 7) = 8$

Voorbeeld 2

Bepaal algebraïsch de nulpunten van de functie $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$ en geef de coördinaten van de top van de grafiek van f .

Antwoord

$f(x) = 0$ geeft $2x^2 - 2x - 4 = 0$. Je hebt verschillende technieken gezien om deze vergelijking op te lossen.

Kwadraat afsplitsen:

$$2x^2 - 2x - 4 = 2\left(x^2 - x - 2\right) = 2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2}$$

De nulpunten vind je door de vergelijking $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2} = 0$ op te lossen. Ga na dat je door terugrekenen de nulpunten $x = -1$ en $x = 2$ vindt.

De coördinaten van de top kun je nu gemakkelijk uit het functievoorschrift aflezen: $\left(\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}\right)$.

Je kunt ook de vergelijking $2x^2 - 2x - 4 = 0$ met de abc-formule oplossen, maar ontbinden in factoren is een snellere manier. Ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt. Voordeel van het kwadraat afsplitsen is dat je ook meteen de top van de grafiek uit het functievoorschrift kunt aflezen. Als je voor het bepalen van de nulpunten gaat ontbinden in factoren of gebruikmaakt van de abc-formule, dan kun je met behulp van de nulpunten of $-\frac{b}{2a}$ de x -coördinaat van de top bepalen.

Opgave 7

Bekijk de kwadratische functie $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$. Je wilt de nulpunten (in twee decimalen nauwkeurig) en de top van de grafiek van f bepalen.

- Doe dit eerst met behulp van kwadraat afsplitsen.
- Bepaal a , b en c . Bereken daarna de discriminant.
- Kun je aan de discriminant zien hoeveel oplossingen de vergelijking $f(x) = 0$ heeft?
- Los de vergelijking $f(x) = 0$ met behulp van de abc-formule op en ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt als bij a.
- Werk je met de abc-formule, dan kun je vanuit de nulpunten de top bepalen. Hoe gaat dat in zijn werk?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Een kwadratische vergelijking heeft precies één oplossing als de discriminant 0 is. Stel je nu voor dat je een functie hebt zoals $f(x) = x^2 + kx + 3$, waarin k een nog onbekende constante is. Je wilt deze constante zo kiezen, dat de grafiek van f precies met zijn top op de x -as ligt.

Welke waarde moet k dan krijgen?

Antwoord

Je kunt met de applet werken of met de grafische rekenmachine een paar grafieken van die functies bekijken, neem bijvoorbeeld $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ en $k = 4$. Je ziet dan dat $3 < k < 4$.

De vergelijking $x^2 + kx + 3 = 0$ moet precies één oplossing hebben. Uit $D = 0$ volgt dan: $k^2 - 12 = 0$.

Kennelijk moet dan gelden $k^2 = 12$. Dus: $k = \pm\sqrt{12}$.

Opgave 8

Het voorschrift $f(x) = x^2 + kx + 3$ voor verschillende waarden van k levert steeds een andere functie met een andere grafiek op.

- Bepaal de top van deze parabool als $k = 2$.
- Bepaal de top van deze parabool als $k = 1$.
- Schrijf functie f in de vorm $f(x) = (x - p)^2 + q$.
- Voor welke waarden van k ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 1$?

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = px^2 - 4x + 5$.

- Neem $p = 1$ en bepaal de nulpunten en de top van de grafiek van f .
- Neem $p = 0$. Waarom is de grafiek van f nu geen parabool?
- Voor welke waarde(n) van p heeft de grafiek van f precies één punt met de x -as gemeen?

Verwerken

Opgave 10

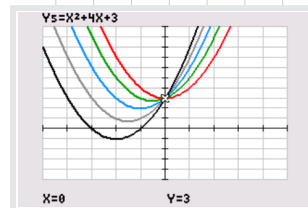
Gegeven is de kwadratische functie f met $f(x) = x^2 + 8x - 20$.

- Schrijf het functievoorschrift in een zodanige vorm dat je de top van de grafiek kunt aflezen.
- Je kunt nu op drie manieren de nulpunten van de grafiek van f berekenen. Doe dit eerst door het functievoorschrift dat je bij a hebt gevonden te gebruiken.
- Bereken de nulpunten ook met behulp van de abc-formule.
- Ten slotte kun je gebruikmaken van ontbinden in factoren. Bereken de nulpunten nog eens op deze manier.

Opgave 11

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond waar nodig af op twee decimalen.

- $x^2 - 3x - 13 = 0$
- $\frac{1}{3}x^2 + 10x + 1 = 0$
- $2x^2 - 5x = x$
- $2x^2 - 12x = -18$
- $x^2 - 5x + 10 = 0$



Figuur 2.3

f $x(x - 1) = 12$

g $5 - \frac{1}{3}x^2 = 1$

h $x - 5x^2 = 3$

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + kx + 5$, waarin k een nog onbekende constante is.

- a** Voor welke waarde van k gaat de grafiek van f door het punt $(2,7)$?
- b** Voor welke waarde(n) van k ligt de top van de parabool op de y -as?
- c** Voor welke k ligt de top van de parabool op de x -as?
- d** Voor welke waarden van k ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 4$?

Opgave 13

De grafiek van de kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ gaat door de punten $P(0,3)$, $Q(2,7)$ en $R(4,12)$.

- a** Van welke constante a , b , of c weet je nu direct de waarde?
- b** Stel het functievoorschrift van f op.
- c** De lijn $y = p$ snijdt de kwadratische functie in één punt. Bereken de waarde van p .

Opgave 14

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = px^2 + 6x + 2p$ en $g(x) = 6 - x$.

- a** Neem $p = 2$ en bereken de nulpunten en de top van de grafiek van f .
- b** Voor welke exacte waarden van p heeft de grafiek van f precies één punt met de x -as gemeen?
- c** Hoe vaak snijdt de grafiek van f de x -as als $p = 3$?
- d** Hoe vaak snijdt de grafiek van f de x -as als $p = 5$?
- e** Voor welke exacte waarden van p hebben de grafieken van f en g precies één snijpunt? Rond af op twee decimalen.

Toepassen

In de micro-economie wordt het volgende **rekenmodel voor de winst van de verkoop van een bepaald product** gehanteerd als het bedrijf de enige aanbieder is.

Het aantal verkochte producten hangt alleen af van de prijs p in euro per stuk. Hoe hoger de prijs, hoe lager de hoeveelheid q die van dit product wordt verkocht per tijdseenheid. Bijvoorbeeld kan per week gelden $q = 400 - 2,5p$.

De inkoopkosten hangen weer af van de prijs per eenheid en de voorraadkosten. Bijvoorbeeld kan een eenheid product € 6,= kosten en de voorraadkosten kunnen € 1500,= per week zijn.

Voor de opbrengst - als wekelijks de hele voorraad wordt verkocht - geldt $TO = p \cdot q$, de wekelijkse kosten noem je TK en de winst is $TW = TO - TK$.

Opgave 15

Bekijk het rekenmodel voor het bepalen van de winst bij de verkoop van een bepaald product.

- a Waarom is $TO = p \cdot q$?
- b Welke waarden kunnen p en q aannemen?
- c Stel een formule op voor TW als functie van de prijs p .
De winst is in dit rekenmodel een kwadratische functie van p .
- d Bereken de maximale winst.
- e Bij welke laagste prijs bedraagt de winst meer dan € 10.000?

Opgave 16

In de voorgaande opgave heb je een formule opgesteld voor de winst TW afhankelijk van de prijs p per eenheid product.

- a Stel een formule op voor TW als functie van de verkochte hoeveelheid q .
- b Bereken de maximale winst.
- c Bij welke hoeveelheden verkocht product wordt nog verlies geleden?

Testen

Opgave 17

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- a $x^2 - 2x - 15 = 0$
- b $-x^2 - x - 1 = 0$
- c $20 - x^2 = 11$
- d $3x^2 = 6 + 5x$

Opgave 18

Gegeven zijn de functies $f(x) = p - x^2$ en $g(x) = x^2 - 3x$. Hierin is p een nog onbekende constante.

- a Voor welke waarde(n) van p heeft functie f precies één nulpunt?
- b Bepaal de coördinaten van de top van de grafiek van g .
- c Neem $p = 4$ en bereken de x -coördinaten van de snijpunten van de twee grafieken van f en g in twee decimalen nauwkeurig.
- d Voor welke waarde van p hebben beide grafieken precies één snijpunt?

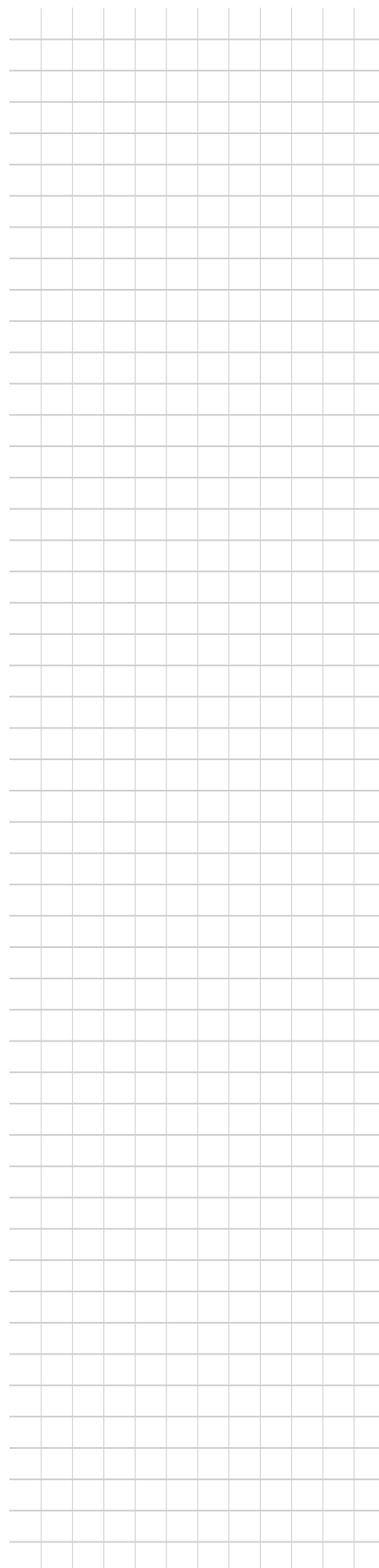
Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het (handig) oplossen van kwadratische vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



2.3 Veeltermen

Inleiding

Alle kwadratische functies hebben een grafiek met dezelfde vorm als de functie $f(x) = x^2$. Je kunt je ook wel functies voorstellen die bestaan uit een optelling van machtsfuncties met hogere machten, zoals bijvoorbeeld $g(x) = x^3 - 4x$ of $h(x) = 0,5x^4 - 8x^2 + 5$. Dergelijke functies heten veeltermfuncties, want het functievoorschrift is een veelterm (of polynoom). En je kunt je afvragen hoe het zit met hun grafieken...

Je leert in dit onderwerp

- werken met veeltermen en vergelijkingen met veeltermen oplossen;
- toepassingen van veeltermfuncties.

Voorkennis

- werken met machtsfuncties en kwadratische functies in het algemeen;
- vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven de veeltermfunctie g met functievoorschrift $g(x) = x^3 - 4x$.

- Welke karakteristieken heeft de grafiek van g ? Gebruik je grafische rekenmachine.
- Schrijf domein en bereik van g op.
- Kun je de nulpunten en de toppen ook algebraïsch berekenen? Waarom is dit belangrijk?

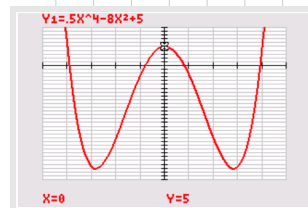
Uitleg 1

Bekijk de applet: machtsfuncties

Functies van de vorm $f(x) = x^n$ zijn machtsfuncties.

Bekijk de grafieken voor bijvoorbeeld van $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Het verloop van de grafiek hangt af van de waarde van n .

- Als n positief en even is, dan is de grafiek dalvormig en lijnsymmetrisch. De symmetrieas is de y -as. De coördinaten van de top zijn $(0,0)$. Voor het domein en bereik van de functie geldt $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [0, \infty)$.
- Als n positief en oneven is, dan is de grafiek stijgend voor elke waarde van x (behalve bij $x = 0$) en puntsymmetrisch in $(0,0)$. Dit punt wordt het symmetriepunt genoemd. Voor het domein en bereik van de functie geldt $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \mathbb{R}$.



Figuur 3.1



Figuur 3.2

De grafieken van functies zoals $f(x) = 2(x - 5)^n - 1$ ontstaan door transformaties uit die van $y = x^n$.

Vergelijkingen bij dergelijke functies los je op door terugrekenen. Dat gaat met een n de machtswortel:

$x^n = c$ geeft $x = \sqrt[n]{c}$ als n oneven is.

$x^n = c$ geeft $x = -\sqrt[n]{c} \vee x = \sqrt[n]{c}$ als n even is.

Met je grafische rekenmachine kun je dergelijke wortels berekenen.

Opgave 1

Bekijk de grafieken van de functies: $f(x) = x^3$ en $g(x) = x^4$.

- Geef het domein en bereik van beide functies.
- Van welke functie is de grafiek lijnsymmetrisch en van welke puntsymmetrisch? Geef ook de symmetrieas en het punt van symmetrie.

Gegeven de functie $h(x) = -4(x - 2)^4 + 6$.

- Uit welk van beide machtsfuncties f en g kan de grafiek van h door transformatie ontstaan? En welke transformaties moet je dan toepassen?
- Bereken algebraïsch de nulpunten en de top van h .

Opgave 2

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

- $x^6 = 22$
- $2x^7 = 40$
- $-5x^5 = 30$
- $-3(x + 4)^5 + 6 = 12$

Uitleg 2

De functie $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 12x$ is een voorbeeld van een veeltermfunctie. Elke uitdrukking die bestaat uit een optelling of aftrekking van machtsfuncties met een gehele positieve exponent en eventueel een constant getal heet namelijk een veelterm (of polynoom).

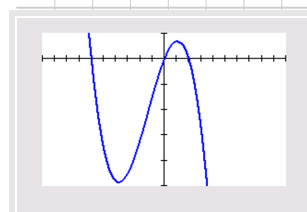
Om de grafiek goed in beeld te krijgen, wil je vooraf weten welke nulpunten en toppen er zijn.

In dit geval kun je nulpunten algebraïsch berekenen:

$$-x^3 - 4x^2 + 12x = 0 \text{ geeft } -x(x^2 + 4x - 12) = 0.$$

Ontbinden in factoren levert $-x(x + 6)(x - 2) = 0$, dus $x = 0 \vee x = -6 \vee x = 2$.

De enige snijpunten met de x -as zijn $(-6,0)$, $(0,0)$ en $(2,0)$. Hoe je de toppen kunt berekenen, leer je later. Nu bekijk je eerst even de tabel op je grafische rekenmachine tussen de nulpunten. Je ziet dan dat je de grafiek goed in beeld krijgt met venster $[-10,10] \times [-50,10]$.



Figuur 3.3

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

- Bepaal met de grafische rekenmachine beide toppen van de grafiek in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken de exacte snijpunten van de grafiek van f met de parabool $y = -4x^2$.

Opgave 4

Gegeven is de veeltermfunctie g met $g(x) = 0,5x^4 - 8x^2$.

- Bereken algebraïsch de drie nulpunten van deze functie.
- Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van g met de grafische rekenmachine. Rond waar nodig af op twee decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: machtsfuncties

Functies van de vorm $f(x) = x^n$ zijn **machtsfuncties**. Het verloop van de grafiek hangt af van de waarde van n .

Als n een positief even getal is, dan heeft f de volgende karakteristieke eigenschappen:

- $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [0, \infty)$
- de grafiek is dalend als $x < 0$ en stijgend als $x > 0$
- de **symmetrieas** van de grafiek is de y -as
- de top is $(0,0)$

Als n een positief oneven getal is, dan heeft f de volgende karakteristieke eigenschappen:

- $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \mathbb{R}$
- de grafiek is stijgend voor elke waarde van x (behalve bij $x = 0$)
- de grafiek is puntsymmetrisch in het punt $(0,0)$, daarom wordt dit het **symmetriepunt** genoemd.

De grafieken van de vorm $g(x) = a(x - p)^n + q$ ontstaan door transformaties uit de grafiek van $f(x) = x^n$.

De vergelijking $x^n = c$ met n een positief geheel getal heeft de volgende oplossingen:

- als n even is en $c > 0$, dan zijn er twee oplossingen: $x = -\sqrt[n]{c}$ en $x = \sqrt[n]{c}$
- als n even is en $c = 0$, dan is er één oplossing en dat is tevens de top van de grafiek: $x = 0$
- als n even is en $c < 0$, dan zijn er geen oplossingen
- Als n oneven is, dan is er altijd één oplossing: $x = \sqrt[n]{c}$

$\sqrt[n]{c}$ spreek je uit als **n -de machtswortel** van c .

Functies zoals $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x - 10$ heten **veeltermfuncties**. Om daarvan de karakteristieken te berekenen heb je vaak gevorderde wiskundige technieken nodig. Maar soms kun je hier ook met behulp van ontbinden in factoren uitkomen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie: $f(x) = -0,1(x - 4)^3 + 10$

Bepaal eerst de karakteristieke eigenschappen van f en plot daarna met de grafische rekenmachine de grafiek. Bereken het nulpunt van f .

Antwoord

De grafiek van f ontstaat door transformaties uit de grafiek van $y = x^3$.

Achtereenvolgens:

- translatie van 4 t.o.v. de y -as;
- vermenigvuldiging t.o.v. de x -as met factor $-0,1$;
- translatie van 10 t.o.v. de x -as.

Het domein en bereik van f is daarom $\mathbb{R}$ en de grafiek van f is puntsymmetrisch.

Door de negatieve factor $-0,1$ voor $(x - 4)^3$ is de grafiek dalend voor elke waarde van x (behalve bij $x = 4$). Het punt van symmetrie kun je uit het functievoorschrift aflezen: $(4, 10)$

Venster bijvoorbeeld: $[-6, 14] \times [-90, 110]$

Het nulpunt bereken je door $f(x) = 0$ op te lossen:

$$-0,1(x - 4)^3 + 10 = 0$$

$$(x - 4)^3 = 100$$

$$x - 4 = \sqrt[3]{100}$$

$$x = \sqrt[3]{100} + 4$$

Het exacte nulpunt is $x = \sqrt[3]{100} + 4$.

Opgave 5

Gegeven is de functie: $f(x) = 3(x - 5)^4 - 6$

- Bereken exact de nulpunten van f .
- Los exact op: $f(x) = 21$
- Voor welke waarden van c heeft de vergelijking $f(x) = c$ geen oplossing?

Opgave 6

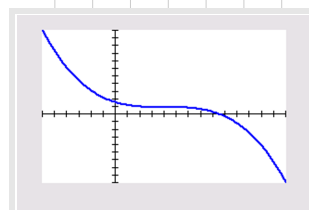
Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- $5(x - 1)^6 + 1 = 26$
- $-(x + 3)^5 - 2 = 15$
- $\frac{1}{4}(x + 2)^9 + 100 = -28$
- $-2(x - 5)^4 + 15 = 3$

Opgave 7

Een grafiek is door translaties en een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as ontstaan uit de grafiek van $y = x^4$. De top van de grafiek is $(5, 8)$ en de grafiek gaat ook door $(3, 12)$.

Stel een formule op voor deze grafiek.



Figuur 3.4

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $x^5 = 12x$.

Rond af op twee decimalen.

Antwoord

$$x^5 = 12x$$

$$x^5 - 12x = 0$$

$$x(x^4 - 12) = 0$$

$$x = 0 \vee x^4 - 12 = 0$$

$$x = 0 \vee x^4 = 12$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt[4]{12} \vee x = -\sqrt[4]{12}$$

$$x = 0 \vee x \approx 1,86 \vee x \approx -1,86$$

Opgave 8

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $x^4 - x^2 = 0$

b $5x^8 = x^3$

c $x^4 + 5x^3 = -6x^2$

Voorbeeld 3

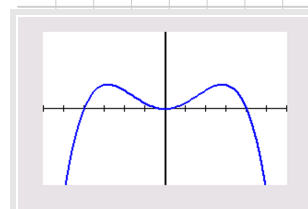
Gegeven is de functie f met $f(x) = -0,5x^4 + 800x^2$.

Hoeveel toppen heeft deze functie?

Antwoord

Om vast te stellen hoeveel toppen er zijn, breng je de grafiek van f met alle karakteristieken in beeld. Het is handig om eerst de nulpunten te berekenen: $-0,5x^4 + 800x = 0$ geeft $-0,5x^2(x^2 - 1600) = 0$ en dus $x = -40 \vee x = 0 \vee x = 40$.

Er zijn drie nulpunten, te weten: $(0,0)$, $(-40,0)$ en $(40,0)$. De grafiek komt met alle karakteristieken in beeld met een venster van $[-60,60] \times [-1000000,1000000]$. Er zijn drie toppen die je door de rekenmachine kunt laten bepalen.



Figuur 3.5

Opgave 9

Derdegraadsfuncties hebben de vorm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ met $a \neq 0$.

- a** Neem $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ en $d = 0$. Hoeveel nulpunten heeft f dan? En hoeveel toppen?
- b** Neem $a = 1$, $b = 4$, $c = 0$ en $d = 0$. Hoeveel nulpunten heeft f dan? En hoeveel toppen?
- c** Neem $a = 1$, $b = 0$, $c = 4$ en $d = 0$. Hoeveel nulpunten heeft f dan? En hoeveel toppen?
- d** Neem $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$ en $d = 0$. Hoeveel nulpunten heeft f dan? En hoeveel toppen?
- e** Hoeveel nulpunten en hoeveel toppen heeft een derdegraadsfunctie maximaal?

Opgave 10

Bekijk de vierdegraadsfunctie $f(x) = 2x^4 - 512x^2$. Je wilt de nulpunten en de toppen van de grafiek van f bepalen.

- Bereken algebraïsch de nulpunten van f .
- Bij welke vensterinstellingen krijg je nu de grafiek van f goed in beeld?
- Hoeveel toppen zijn er? Bepaal de extremen van f in twee decimalen nauwkeurig met de grafische rekenmachine.

Verwerken

Opgave 11

Gegeven zijn de functies: $f(x) = 0,25(x-3)^4 + 50$ en $g(x) = 2(x+1)^5 - 100$.

- Van welke functie is de grafiek lijnsymmetrisch en van welke puntsymmetrisch? Geef ook de symmetrieas of het punt van symmetrie.
- Geef het domein en bereik van beide functies.
- Los op met de grafische rekenmachine: $f(x) = g(x)$.

Opgave 12

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- $4x^5 = -12$
- $60 - 0,5x^4 = 0$
- $(x-1)^8 + 5 = 10$
- $-(x-2)^7 + 5 = 15$
- $10(x+6)^4 - 22 = 138$
- $-5(x-3)^6 + 18 = -2$

Opgave 13

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- $x^3 - 4x^2 = 21x$
- $x(x^3 - 1) = 7x$
- $x(6-x)(x+5) = 0$
- $2x^4 - 12x = -18x$
- $x^4 - 7x^3 + 10x^2 = 0$

Opgave 14

Gegeven zijn de functies f en g door: $f(x) = 2x^5 - 4x^3$ en $g(x) = 5x^4$.

- Bereken exact de nulpunten van f .
- Los algebraïsch op $f(x) = g(x)$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 15

Gegeven is de functie: $f(x) = (x^2 - 4)^2 - 100$

- Bereken algebraïsch de nulpunten van f .
- Geef de extremen van f .
- Los exact op: $f(x) = -91$.
- Voor welke waarden van c heeft de vergelijking $f(x) = c$ geen oplossing?

Toepassen

In een bepaald **economisch model** wordt als voorbeeld een landbouwer genomen die bieten verbouwt. Bieten moet je vrij houden van onkruid, dat heet 'wieden'. Hoe meer mensen gaan wieden, hoe beter de bieten groeien. Maar als er te veel mensen gaan wieden, lopen ze elkaar in de weg en vertrappen ze de bietenplantjes. De oogst Q (in honderden kg bieten) hangt af van het aantal werkers w volgens de formule $Q = -0,5w^3 + 9w^2$.

Hoeveel wieders kan deze landbouwer het beste inzetten als hij een zo groot mogelijke oogst wil hebben?

Opgave 16

Bij **Toepassen** gaat het over een economisch model waarin een derdegraadsfunctie voorkomt.

- Breng de grafiek van $Q(w)$ in beeld.
- Bepaal nu het antwoord op de gestelde vraag.

Opgave 17

ChemTech produceert een onkruidbestrijdingsmiddel. Voor de productiekosten per maand gelden de volgende gegevens:

q (duizenden kg per maand)	1	2	3	4	5	6
TK (euro per maand)	775	1000	1220	2000	4000	8000

Tabel 3.1

Variabele q is de geproduceerde hoeveelheid per maand in duizenden kg. TK zijn de totale kosten in euro's. ChemTech verkoopt dit middel voor € 2,25 per kilogram.

- De bedrijfsleiding heeft voor de kostenfunctie deze formule bedacht: $TK = 100q^3 - 600q^2 + 1300q$.
Laat zien dat deze formule redelijk goed bij de gegeven tabel past.
- Stel een formule op voor de totale winst TW afhankelijk van q . Ga ervan uit dat de geproduceerde hoeveelheid elke maand ook wordt verkocht.
- Bepaal met de grafische rekenmachine bij welke productie per maand de winst maximaal is. Wat is dan de maximale winst?

Testen

Opgave 18

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

- a $x^4 - 8x = 0$
- b $-x^2(x - 5) = 2x^2$
- c $20 - x^4 = 11$
- d $(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 36$

Opgave 19

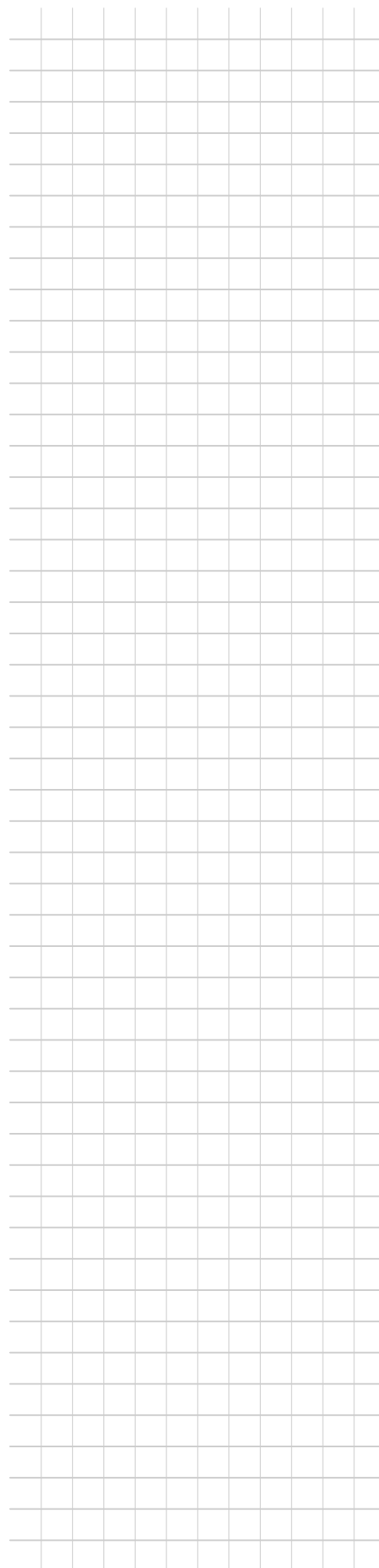
Een bedrijf gebruikt voor de winst die het per maand maakt de formule $W = -q^3 + 9q^2 + 21q - 40$. Hierbij is q de productie in duizendtallen en W de winst in duizenden euro.

- a Hoe hoog is de winst als het bedrijf 2500 producten maakt?
- b Wat is de laagste productie waarbij het bedrijf € 100875,00 winst maakt?
- c Bij welke productie is de winst maximaal? En wat is die maximale winst?

Opgave 20

De grafiek van f ontstaat door translaties en een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as uit de grafiek van $g(x) = x^4$. De top van de grafiek van f is $(4,6)$. De grafiek van f snijdt de y -as in $(0,1)$.

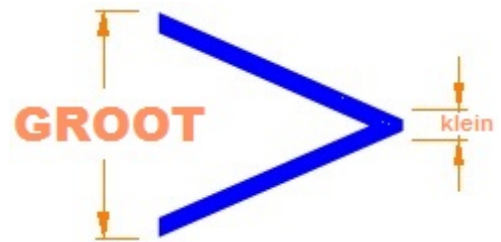
Stel het functievoorschrift van f op.



2.4 Ongelijkheden

Inleiding

Als je wilt weten bij welke windsnelheid een windmolen meer dan bijvoorbeeld 20 kW aan vermogen levert, dan moet je een ongelijkheid oplossen. Hetzelfde geldt als je wilt weten vanaf hoeveel gereden km per jaar een auto op benzine duurder is dan één op diesel. Over het oplossen van ongelijkheden gaat dit onderdeel.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- ongelijkheden systematisch oplossen.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- de karakteristieken van een functie bepalen en zo de grafiek goed in beeld krijgen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

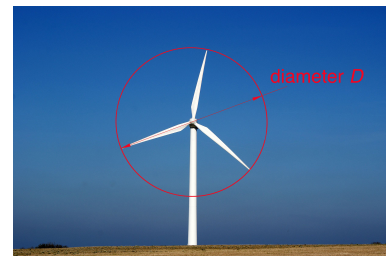
Verkennen

Opgave V1

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de wieklengthe (dat is de halve diameter van de rotor) en van de windsnelheid v .

Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en 0,052 een getal dat afhangt van het type molen.

- Stel, je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Welke ongelijkheid hoort daar bij?
- Hoe ga je zo'n ongelijkheid oplossen?



Figuur 4.2

Uitleg

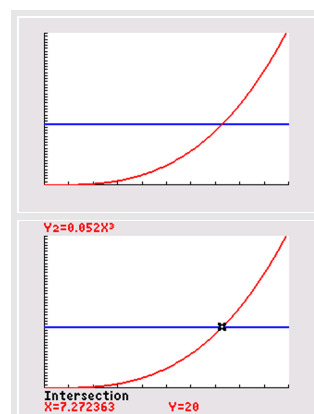
Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, is afhankelijk van de wieklengthe en van de windsnelheid v .

Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt) en v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s. Stel je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Daarbij hoort de **ongelijkheid**: $0,052v^3 > 20$. Geef je antwoord in twee decimalen.

Het oplossen van zo'n ongelijkheid gaat prima met de grafische rekenmachine:

- Je voert $Y1=20$ en $Y2=0.052X^3$ in en brengt ze goed in beeld.
- Je bepaalt het snijpunt van beide grafieken: $(7,272...; 20)$.
- Je leest de oplossing van de ongelijkheid af uit de figuur: $v > 7,27$.

Belangrijk is het aantal decimalen waarop je moet afronden. Het gegeven antwoord is op twee decimalen nauwkeurig juist. Moet je echter op één decimaal nauwkeurig afronden, dan is het antwoord: $v \geq 7,3$. Want bij 7,2 is het vermogen nog niet meer dan 20 kW.



Figuur 4.3

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe de ongelijkheid $0,052v^3 > 20$ wordt opgelost. Daarbij wordt de grafische rekenmachine gebruikt.

- a** Los zelf de ongelijkheid op met de grafische rekenmachine.

Bij een algebraïsche aanpak bereken je eerst de oplossingen van de vergelijking $0,052v^3 = 20$ met behulp van terugrekenen.

- b** Laat zien dat je dan dezelfde oplossing vindt.
- c** Wat is het voordeel van een algebraïsche aanpak?

Opgave 2

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = 0,01x(x^2 - 400)$ en $g(x) = x$. In deze opgave ga je de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ oplossen.

- a** Hoe moet je het venster van de grafische rekenmachine instellen om goede grafieken bij deze ongelijkheid te krijgen? Hoeveel snijpunten hebben beide grafieken?
- b** Los nu de ongelijkheid met de grafische rekenmachine op in twee decimalen nauwkeurig.

Om zeker te weten dat je alle snijpunten van de grafieken hebt gevonden, kun je de bijbehorende vergelijking beter algebraïsch oplossen. Wil je een ongelijkheid algebraïsch oplossen, dan los je de bijbehorende vergelijking algebraïsch op en lees je daarna de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.

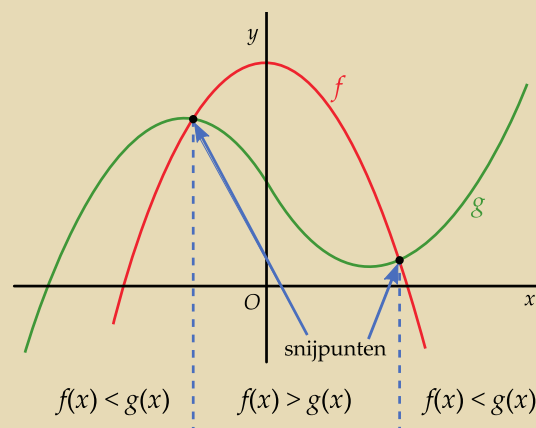
- c** Los de bij deze ongelijkheid horende vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een uitdrukking zoals $f(x) > g(x)$ of $f(x) < g(x)$, enzovoort, heet een **ongelijkheid**. Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.

- Eerst voer je beide functies op de grafische rekenmachine in.
- Vervolgens breng je ze goed in beeld. Alle snijpunten moeten zichtbaar zijn!
- Dan bepaal je de snijpunten. Dat kan met de grafische rekenmachine. Dat kan vaak ook door de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch op te lossen. Soms is dit handiger of wordt het zo gevraagd.
- Vervolgens lees je de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af. Reken door met de maximale nauwkeurigheid van de grafische rekenmachine en rond alleen af als dat wordt gevraagd en aan het einde van je uitwerking.



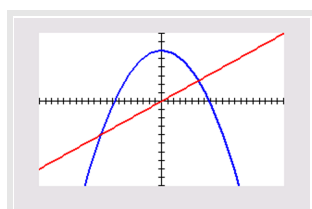
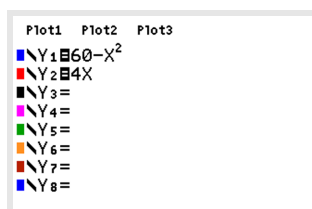
Figuur 4.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Los op: $60 - x^2 \geq 4x$.

Antwoord



Figuur 4.5

Bekijk eerst de grafieken van $y_1 = 60 - x^2$ en $y_2 = 4x$. Bij de meeste waarden van x zijn de functiewaarden verschillend. Alleen bij de snijpunten zijn de functiewaarden gelijk.

De snijpunten vind je door de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ op te lossen. Je vindt: $x = -10 \vee x = 6$. Lees nu uit de figuur af dat de oplossing van de ongelijkheid is: $-10 \leq x \leq 6$.

Opgave 3

Je gaat in deze opgave de ongelijkheid $60 - x^2 < 4x$ exact oplossen.

- Los de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ algebraïsch op.
- Schrijf de juiste oplossing van de ongelijkheid op. De oplossing bestaat uit twee delen!

Voorbeeld 2

Een verfhandelaar heeft een mengmachine van € 2000,00. De inkoopprijs van de verf en de kosten van het mengproces samen komen op € 5,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 7,25 per liter. Hij maakt winst als de opbrengst TO groter is dan de totale kosten TK . Met voorraadkosten wordt geen rekening gehouden.

Bereken algebraïsch vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst gaat maken.

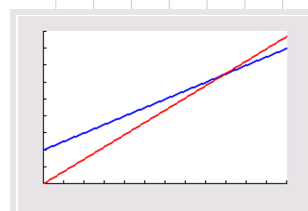
Antwoord

Er geldt: $TK = 2000 + 5q$ en $TO = 7,25q$. De variabele q is de verkochte hoeveelheid verf.

Nu moet: $TO > TK$, dus $7,25q > 2000 + 5q$. Met de grafische rekenmachine breng je de grafieken van TO en TK goed in beeld. Het snijpunt moet zichtbaar zijn.

Vervolgens bereken je dit snijpunt algebraïsch: $7,25q = 2000 + 5q$ geeft $2,25q = 2000$ en dus $q \approx 888,9$ liter.

De oplossing lees je uit de grafiek af: vanaf 889 liter verf maakt de verfhandelaar winst.



Figuur 4.6

Opgave 4

Stel je voor dat je al jaren in een auto op benzine rijdt. De benzineprijs blijft echter maar stijgen en je vraagt je af of je niet beter elektrisch kunt gaan rijden. Je huidige benzinekosten per kilometer zijn ongeveer 12,5 eurocent.

- a Stel een formule op voor de benzinekosten per jaar (B in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers (a).

Een elektrische auto kost € 10.000 meer dan de benzinevariant. Je kosten per kilometer gaan omlaag, want je rijdt ongeveer 100 km met 16 kWh elektriciteit en elke kWh kost € 0,22.

- b Stel een formule op voor de kosten (E) afhankelijk van het aantal kilometers (a), waarbij je de meerkosten mee rekent.
- c Je wilt weten hoeveel kilometer je moet rijden om goedkoper uit te zijn. Welke ongelijkheid hoort daar bij?
- d Los deze ongelijkheid algebraïsch op met a in kilometers nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3$ en $g(x) = 4x$.

Los algebraïsch op: $f(x) > g(x)$.

Antwoord

Eerst los je de vergelijking $x^3 = 4x$ op:

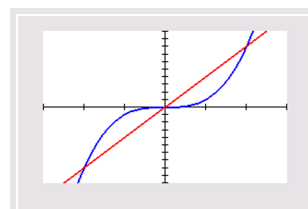
$$x^3 = 4x$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x - 2)(x + 2) = 0$$

Je vindt $x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$.

Vervolgens maak je de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 4x$ op de grafische rekenmachine. Zorg dat alle snijpunten in beeld komen. Ten slotte lees je de oplossing uit de grafiek af. De blauwe grafiek moet boven de rode grafiek liggen, dus je vindt $-2 < x < 0 \vee x > 2$.



Figuur 4.7

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je algebraïsch de ongelijkheid $x^3 < 4x$ oplost.

- a Welke oplossing heeft de ongelijkheid $x^3 \leq 4x$?
Bekijk nu de ongelijkheid $x^3 < x^2$.
- b Los de ongelijkheid algebraïsch op.

Verwerken

Opgave 6

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- a $5(x - 1)^2 - 9 > 11$
- b $x^3 > x$
- c $x^3 \leq 80x - 2x^2$
- d $-2x^2 < 8 - x$
- e $\frac{8}{x^2} \geq x$
- f $x^2 - 4x > -3$

Opgave 7

Een winkelier koopt maandelijks fietsen in voor € 300,00 per stuk. Deze slaat hij op in een magazijn. Voor het gebruiken van dit magazijn betaalt hij een huur van € 950,00 per maand. Daarnaast heeft hij personele kosten van € 5200,00 per maand. Hij verkoopt de fietsen voor € 425,00 per stuk.

- a Hoeveel fietsen moet de winkelier in een maand verkopen wil hij die maand winst maken? Ga ervan uit dat hij alle fietsen die hij inkoopt dezelfde maand nog verkoopt.
- b In een maand heeft de winkelier 200 fietsen gekocht. Hoeveel van die fietsen moet hij minstens verkopen om alle kosten van die maand te dekken?

Opgave 8

Twee auto's rijden op de A1, beide met (ongeveer) constante snelheid. Bestuurder A houdt een snelheid van 110 km/h aan. Bestuurder B rijdt met 120 km/h. Als bestuurder B bij de IJsselbrug bij Deventer komt, ligt hij 24 kilometer achter op bestuurder A. Het tijdstip waarop dat gebeurt, is $t = 0$. De afstand (kilometer) tot Deventer wordt voorgesteld door $a(t)$.

- a Stel bij beide auto's een lineaire functie voor $a(t)$ op.
- b Bereken na hoeveel minuten auto A door auto B wordt ingehaald.
- c Bereken algebraïsch hoelang hun onderlinge afstand minder dan 4 kilometer is.

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.

- a Los algebraïsch op: $f(x) \leq 0$.
- b Los algebraïsch op: $f(x) < 36$.

Opgave 10

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + px + 12$ en $g(x) = -x + 9$.

- a Voor welke exacte waarden van p snijdt de grafiek van f de x -as twee keer?
- b Neem $p = 3$ en los de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ algebraïsch op.

Toepassen

Opgave 11: Smart ForTwo

Je rijdt al een Smart Fortwo voor € 4,00 per dag! Stel je hebt op 1 januari 2015 een Smart gekocht en betaalt hiervoor € 4,00 per dag. Daarnaast heb je onderhoudskosten: voor 2,5 eurocent per gereden kilometer kun je daarvoor een abonnement afsluiten waar vrijwel alle onderhoudskosten mee worden afgedekt. Je hebt dan dus alleen nog benzinekosten. Je kunt met 1 liter benzine 20 kilometer rijden en 1 liter benzine kost ongeveer € 1,60.

- a Hoeveel eurocent per kilometer ben je kwijt aan benzine en onderhoud samen?
- b Hoeveel kost deze Smart je per jaar als je er 16000 kilometer per jaar mee rijdt?
- c Stel een ongelijkheid op bij de vraag: Hoeveel kilometer per jaar mag je maximaal met deze Smart rijden als je minder dan € 5000,00 kwijt wilt zijn dat jaar? Los daarna die ongelijkheid algebraïsch op.
- d Eigenlijk geldt het onderhoudsabonnement van 2,5 eurocent per gereden kilometer pas vanaf 20000 km/jaar. Rijd je minder, dan betaal je alsof je 20000 km/jaar rijdt. Stel de formule op voor de jaarlijkse kosten K als functie van het aantal gereden kilometers.



Figuur 4.8

Testen

Opgave 12

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op:

- a $6 - x < x^2$
- b $\frac{1}{x} \geq 0,25x$
- c $(2x - 6)^2 < 16$

Opgave 13

De afstand Utrecht - Enschede is voor een fietser 144 kilometer. Fietser A gaat met 18 km/h van Utrecht naar Enschede. Fietser B gaat met 24 km/h van Enschede naar Utrecht. Beide fietsers starten tegelijkertijd. Je wilt weten hoe lang fietser A dichterbij Utrecht is dan fietser B.

- Welke ongelijkheid hoort daar bij als t de tijd in uren is?
- Los deze ongelijkheid algebraïsch op.
- Beantwoord de vraag in minuten nauwkeurig.

Opgave 14

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 - x^3$ en $g(x) = (x - 1)^2$.

- Bereken met de grafische rekenmachine de snijpunten van de grafieken van f en g in twee decimalen nauwkeurig.
- Los op: $f(x) \geq g(x)$.

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het oplossen van ongelijkheden**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Veeltermfuncties**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- kwadratische functie — dal- en bergparabool — top — symmetrieas — kwadratische vergelijking;
- abc-formule;
- veeltermfunctie — derdegraads, hogere graads functies;
- ongelijkheid.

Activiteitenlijst

- kwadratische functies tekenen — kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen;
- kwadratische functies schrijven als machtsfuncties — de abc-formule gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met veeltermfuncties — hogere graads vergelijkingen oplossen;
- ongelijkheden systematisch oplossen.

Achtergronden

Een kwadraat is (de oppervlakte van) een vierkant, in de Oudheid werden kwadraten altijd door vierkanten voorgesteld. En (vierkants)wortels zijn de lengten van de zijden van een vierkant. Heel lang kon daar alleen meetkundig mee worden gemanipuleerd, want in de Oudheid waren de enige getallen 1, 2, 3, ... en de verhoudingen van die getallen (breuken dus). En daarmee was bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ geen getal, het kon alleen worden benaderd met getallen. Hetzelfde gold voor kubussen (derde machten zouden wij zeggen) en kubische wortels (derdemachts wortels). Maar heel af en toe waren dat getallen, meestal niet. Toch werd met dergelijke machten gewerkt, maar steeds als vierkant of kubus. Ook gewone getallen (meetbare getallen) waren eigenlijk concrete lengtes net als wortels en π (onmeetbare getallen). Tot ruim voorbij de Middeleeuwen werd op die manier over getallen gedacht.

Vergelijkingen werden geformuleerd in termen van 'een vierkant en een lengte zijn samen 90, hoe groot is die lengte?'. Nu noteer je dat als $x^2 + x = 90$ en dan wil je weten hoe groot x is. Na de Griekse wiskundige **Diophantos (ongeveer 200–284)** hielden vooral geleerden uit het grote Islamitische Rijk dat van 622 tot 1450 het Midden-Oosten domineerde zich met het oplossen van kwadratische vergelijkingen bezig. De wiskundige **Al-Khwarizmi (ongeveer 780–845)** bedacht de abc-formule, hoewel hij totaal andere notaties gebruikte.

Pas veel later ontstonden in West-Europa de moderne notaties zoals de gewoonte om letters te gebruiken voor variabelen en het wortelteken. Ook werd het getalbegrip verruimd, zodat alle wortels als getallen werden opgevat.



Figuur 5.1

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 10 - 2(x - 1)^2$.

- a Laat zien door welke transformaties de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^2$.
- b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de coördinaatassen.
- c Los algebraïsch op: $f(x) = -712$.
- d Los algebraïsch op: $f(x) > 8$.

Opgave 2

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

- a $-0,5(x - 2)^2 + 45 \leq 4,5$
- b $x(x - 2) = 3x - 6$
- c $x^3 - 4x^2 = 10x$
- d $6 - 0,001(x - 3)^3 = 5$
- e $\frac{1}{4}x^2 \geq x + 5$
- f $(x^2 - 9)(x - 2)^3 > 0$

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = 8 + 4px - px^2$.

- a Neem $p = 1$ en bereken de karakteristieken van de grafiek van f met behulp van kwadraat afsplitsen.
- b Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f geen snijpunten met de x -as?
- c Voor welke waarde(n) van p ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 50 - 2x$?

Opgave 4

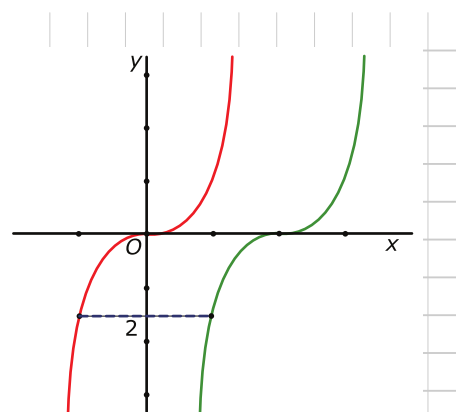
Een vuurpijl wordt vanaf de grond afgeschoten. De maximale hoogte van de vuurpijl is 122,5 meter en die hoogte bereikt hij na 5 seconden. Er bestaat een kwadratisch verband tussen de hoogte van de vuurpijl h in meters vanaf de grond en de tijd t in seconden.

- a Toon aan dat het functievoorschrift van $h(t)$ gegeven wordt door $h(t) = -4,9t^2 + 49t$.
- b Als de vuurpijl niet uit elkaar spat, na hoeveel seconden is hij dan weer op de grond?
- c De vuurpijl spat na 6 seconden uit elkaar. Bereken algebraïsch hoe lang de vuurpijl op een hoogte van meer dan 30 meter is. Rond af op één decimaal.

Opgave 5

Bekijk de grafiek van $y_1 = x^3$ en de grafiek van y_2 . De grafiek van y_2 ligt rechts van die van y_1 zo, dat alle verbindingslijnstukken evenwijdig aan de x -as de lengte 2 hebben.

- Geef het functievoorschrift van y_2 .
- De functie $v(x)$ stelt de lengte voor van de verbindingslijnstukken die evenwijdig lopen aan de y -as. Toon aan dat $v(x) = 6x^2 - 12x + 8$.
- Voor welke waarden van x is de lengte van het verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y -as minder dan 8?
- Bepaal de lengte van het kortste verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y -as.



Figuur 5.2

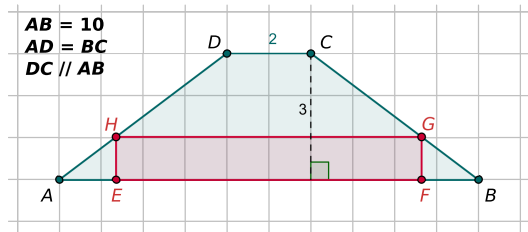
Toepassen

Opgave 6: Boekenkast

Boven op zolder, onder het schuine dak, maak je een rechthoekige boekenkast op zolder. Neem aan dat de zolder 10 m breed is en 3 m hoog is. De vorm van de zijmuur $ABCD$ waar de boekenkast tegenaan komt is een symmetrisch trapezium. Wanneer is de oppervlakte van het vooraanzicht $EFGH$ van de boekenkast zo groot mogelijk?

Bekijk de applet: boekenkast

- Experimenteer eerst met de applet. Bestudeer de figuur.
- Kies een geschikte variabele en leidt een formule af voor de oppervlakte K van het vooraanzicht.
- Bereken met behulp van die formule de maximale waarde van K .

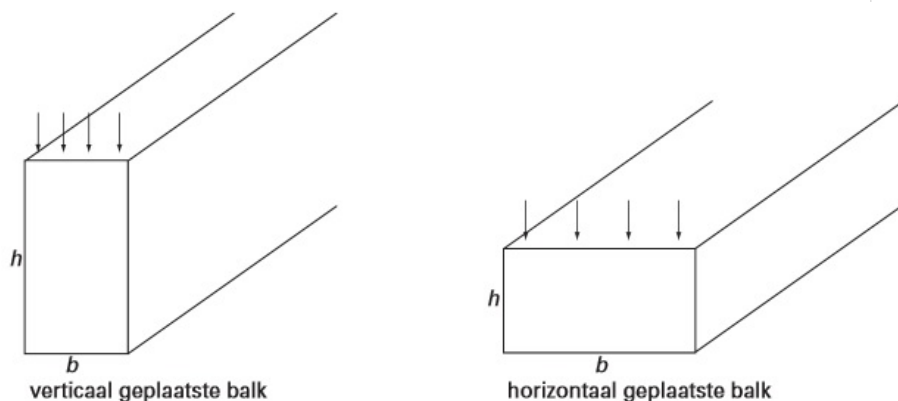


Figuur 5.3

Examen

Opgave 7: Sterkte van een balk

In een bouwconstructie worden houten balken door verticale krachten belast. De sterkte van zo'n balk hangt dan af van zijn afmetingen en de gebruikte houtsoort. We bekijken liggende balken met een rechthoekige doorsnede. Balken kunnen op twee manieren worden neergelegd: met de lange rechthoekszijde horizontaal of verticaal. We noemen dit horizontaal of verticaal geplaatste balken. Zie figuur. De richting van de krachten is aangegeven met pijlen.



Figuur 5.4

Voor de sterkte S van een balk van een bepaalde houtsoort geldt de formule: $S = 0,12 \cdot b \cdot h^2$. Hierbij is b de basis in cm en h de hoogte van de dwarsdoorsnede in cm.

Een balk van deze houtsoort heeft een rechthoekige dwarsdoorsnede van 24 cm bij 6 cm. Deze balk kan in verticale en in horizontale stand worden geplaatst.

- a** In welke stand is de sterkte het grootst? Licht je antwoord toe.

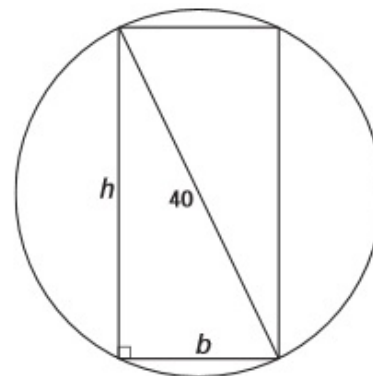
De oppervlakte van de rechthoekige dwarsdoorsnede van een balk van deze houtsoort is gelijk aan 60 cm^2 . Voor de sterkte S geldt: $S = 100$.

- b** Bereken de afmetingen h en b van deze dwarsdoorsnede. Geef h en b in één decimaal nauwkeurig.

Uit een cilindervormige boom van dezelfde houtsoort wil men een balk zagen met basis b en hoogte h . Voor deze balk geldt nog steeds de formule $S = 0,12 \cdot b \cdot h^2$. De cirkelvormige dwarsdoorsnede heeft een diameter van 40 cm. Zie de figuur hiernaast.

- c** Laat zien dat in deze situatie voor de sterkte de formule $S = 192b - 0,12b^3$ kan worden gevonden.
- d** Bereken de afmetingen h en b van de dwarsdoorsnede met de grootste sterkte. Geef h en b in één decimaal nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde B in 2002, eerste tijdvak)



Figuur 5.5

Opgave 8: Modderstroom

Er zijn vulkanen die geen lava uitspuwen, maar een constante stroom modder geven. De koude modder stroomt als een rivier langzaam de helling af (zie bovenste foto). Aan de rand van deze stroom droogt de modder op. Daar stroomt de modder dus wat langzamer dan in het midden. Dit is te zien aan het geribbelde patroon.

Om dit snelheidsverschil te meten, gebruiken geologen stenen die ze op de modderstroom leggen. Bij een modderstroom van ruim 6 dm breed gebeurt dat als volgt. Een geoloog legt een rij van 7 stenen dwars in de stroom. Elke steen krijgt een nummer van 0 t/m 6. Steen nummer 0 legt hij vlak bij de rand van de stroom. Het midden van steen nummer 1 legt hij op 1 dm van het midden van steen nummer 0. De afstand tussen de middens van opeenvolgende stenen is steeds 1 dm. Steen nummer 6 ligt vlak bij de andere rand. Het resultaat zie je op de onderste foto.

Elk uur meet hij de afstand die de stenen door de stroom hebben afgelegd. In de onderstaande figuren zie je de ligging na één uur en na drie uur.

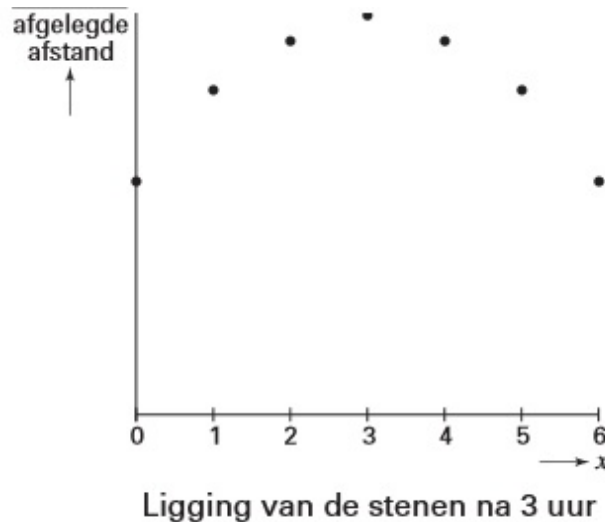
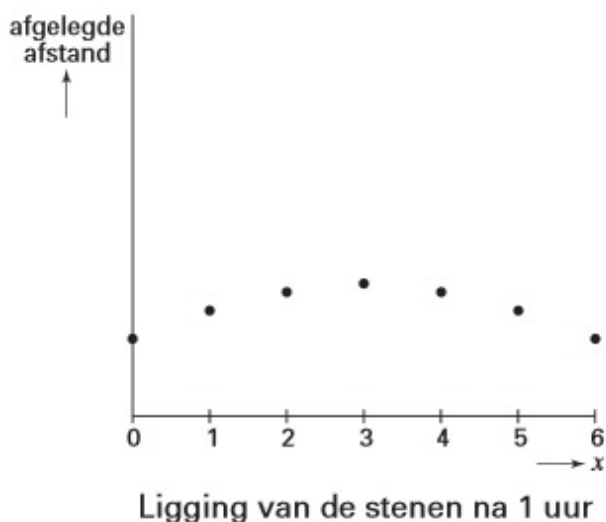
De afstand A (in dm) die de stenen na één uur hebben afgelegd, wordt beschreven door de formule:

$$A = -0,1x^2 + 0,6x + 19,4$$

Hierbij is x de afstand in dm van het midden van een steen tot het midden van steen 0 bij het begin van het proces.



Figuur 5.6



Figuur 5.7

- a** Bereken de afstand die steen nummer 2 het eerste uur heeft afgelegd.

De stenen gaan met de modder mee de berg af. Elke steen heeft zijn eigen constante snelheid.

- b** Van welke stenen ligt die snelheid het dichtst bij 20 dm per uur? Licht je antwoord toe met een berekening.



De geoloog heeft de stenen op een rechte lijn loodrecht op de stroomrichting gelegd. Steen nummer 3 zal door de stroom sneller vooruit komen dan de andere stenen. Het weglengteverschil W dat op die manier tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 na één uur ontstaat, is afgebeeld in de figuur hiernaast.

- c Toon aan dat het weglengteverschil W tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 na één uur 9 cm is.

Op een gegeven moment meet de geoloog een weglengteverschil W tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 van 83 cm.

- d Bereken de totale afgelegde weg van de steen met nummer 3, gerekend vanaf de plek waar de geoloog de stenen in de modderstroom gelegd heeft. Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde B in 2005, eerste tijdvak)

Opgave 9: Halve cirkel en derdegraads functie

Bekijk de functies f en g : $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en

$$g(x) = -\frac{1}{30}x^3 + x^2 - 1,9x + 1,58.$$

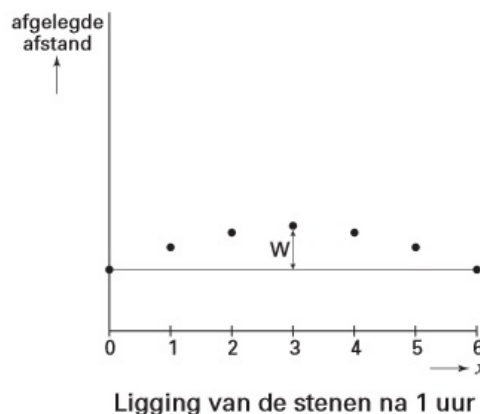
De grafieken van f en g lijken elkaar te raken. Bekijk de figuur.

De grafieken van f en g raken elkaar echter niet. De vergelijking $f(x) = g(x)$ heeft twee oplossingen.

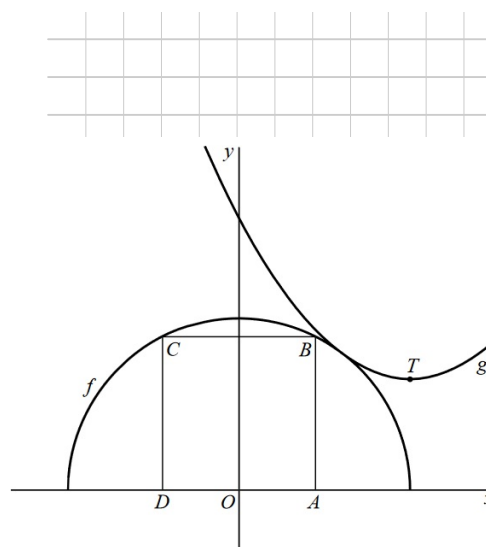
- a Los op voor welke x geldt $f(x) \leq g(x)$. Rond de grenswaarden van x zo nodig af op twee decimalen.
- b Het punt T in de figuur is een top van de grafiek van de functie g .

Bepaal de x -coördinaat van het punt T . Rond zo nodig af op twee decimalen.

(naar: examen havo wiskunde B in 2008, tweede tijdvak)



Figuur 5.8



Figuur 5.9

a

abc-formule 53

b

balansmethode 23

begingetal 7

bergparabool 46

c

combineren 22

d

dalparabool 46

discriminant 54

h

hellingsgetal 7

hogere machtswortel 62

k

kwadraat afsplitsen 53

kwadratische functie 46, 53

kwadratische vergelijking 46

l

lineair model 30

lineair verband 15

lineaire functie 7, 30

lineaire regressie 36

m

machtsfuncties 62

o

ongelijkheid 68, 70

p

parabool 46

punt van symmetrie, centrum
van symmetrie 62

r

recht evenredig 7

richtingscoëfficiënt 7

s

stelsel van twee vergelijkingen
22

substitutie 22

symmetrieas 46, 62

t

top 46

v

veeltermfunctie 62

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

**De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst.
De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.**

Stichting Math4All

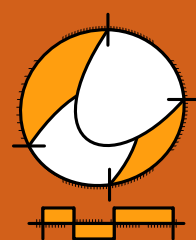
Inhoud Katern 2

3. Lineaire verbanden

4. Veeltermfuncties



www.math4all.nl



Werkblad bij Opgave 10 op pagina 40

