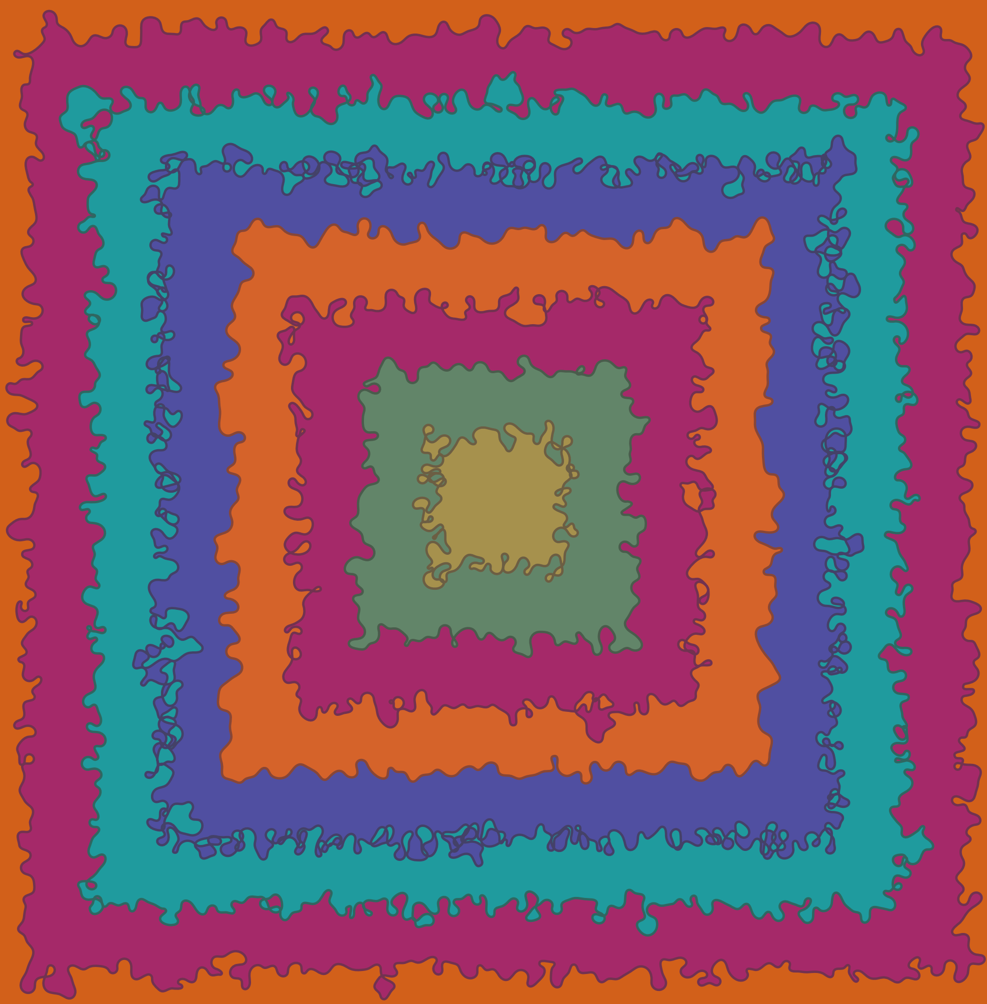
Wiskunde A / PGA

4 HAVO

Exponentiële verbanden

ConTeXt College



© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie http://creativecommons.org/licenses/by/3.0).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je werkt dan onder begeleiding van je docent in kleine groepjes aan wiskundige problemen en samen bouw je de theorie op en maak je er een overzicht van.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee je kunt nagaan of je de stof beheerst. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding vind je terug in de marge.

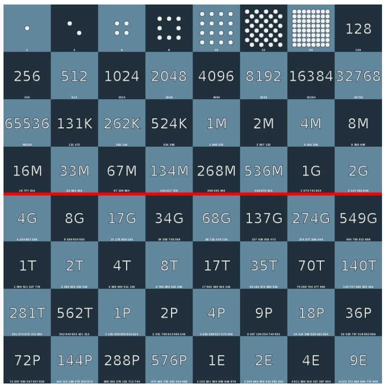
★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die je alleen hoeft te maken als je er genoeg tijd voor hebt
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die je alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk voor je was

1

Exponentiële verbanden

1.1 Exponentiële groei

Inleiding



Figuur 1.1

Groeiverschijnselen komen veel voor, denk aan het toenemen van geld dat je op de bank zet, het toenemen van de kosten als je meer km in de taxi zit, het groeien van de bevolking, enzovoorts. Soms is er sprake van toename met een vaste hoeveelheid per tijdseenheid, soms is er sprake van toename die afhankelijk is van de hoeveelheid zelf: hoe groter de hoeveelheid, hoe groter ook de toename per tijdseenheid. Bij exponentiële groei is de toename een vast percentage van de totale hoeveelheid.

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei en afname, bijpassende formules opstellen;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- werken met functies en grafieken.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het begrip exponentiële groei: snappen wat er onder wordt verstaan, eraan rekenen, er grafieken bij maken en uit gegeven grafieken/tabellen het verband aflezen. Dit wil je overzichtelijk op een rijtje krijgen. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - welke zaken er worden ontdekt.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 1.1**

De oppervlakte die door een snelgroeiende waterplant wordt bedekt, neemt elke dag met 50% toe.

a Met welk getal moet je de oppervlakte vermenigvuldigen als je de oppervlakte wilt weten die de waterplant morgen zal bedekken?

b Neemt de oppervlakte van de waterplant in twee dagen met 100% toe? Of met een ander percentage? Licht je antwoord toe.

c Is hier sprake van exponentiële groei? Licht je antwoord toe.

★ **Opgave 1.2**

Iemand koopt aandelen ter waarde van € 4000,00. De aandelen nemen gedurende de eerste vier jaar elk jaar 11% in waarde toe.

a Bereken de waarde van de aandelen na één jaar en na twee jaar.

b Hoeveel bedraagt de groeifactor van de waarde van de aandelen?

c Hoe kun je met behulp van de waarde na twee jaar de waarde na drie jaar berekenen?

d De waarde na vier jaar is € 6072,28. Hoe kun je hieruit met behulp van de groeifactor de waarde na drie jaar berekenen?

e In het zesde jaar stijgt de waarde van de aandelen van € 6740,23 naar € 7279,45. Met hoeveel procent is de waarde van de aandelen in het zesde jaar toegenomen? Wat is nu de groeifactor?

★ **Opgave 1.3**

Elk jaar wordt op 1 januari het aantal herten in een natuurgebied geteld. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

a Stel een formule op voor de ‘groei’ van het aantal herten vanaf het jaar 2014.

b Bereken het aantal herten in het jaar 2024.

c Bereken het groeipercentage per tien jaar.

d In welk jaar is het aantal herten gehalveerd?

★ ★ **Opgave 1.4**

Een kapitaal van € 10415,00 wordt gedurende tien jaar belegd in aandelen. In de tabel zie je de groei van het kapitaal in de eerste zes jaar.

tijd (jaar)	1	2	3	4	5	6
kapitaal (euro)	10415	10850	11300	11760	12250	12760

Tabel 1.1

Onder rendement wordt hier verstaan de procentuele toename van het belegde kapitaal per jaar.

a Maak duidelijk dat het kapitaal in de eerste zes jaar bij benadering exponentieel toeneemt.

b Bereken voor deze periode het rendement (per jaar).

c Maak een tabel van een kapitaal van € 10000,00 dat tien jaar wordt belegd bij een rendement van 8% per jaar.

d Na hoeveel jaar is dit kapitaal verdubbeld?

e Iemand belegt een kapitaal van € 10000,00 gedurende tien jaar. Stel dat hij de eerste vijf jaar een rendement van 14% per jaar behaalt en de daarop volgende vijf jaar 4% per jaar. Bereken het kapitaal K na vijf jaar en na tien jaar.

f Laat met een berekening zien of het de belegger, in vergelijking met de vorige situatie, meer oplevert als het rendement de eerste vijf jaar 4% is en de volgende vijf jaar 14%.

★ ★

Opgave 1.5

Twee scholen hebben te maken met teruglopende leerlingenaantallen.

tijd (jaar teldatum 1 sept.)	2009	2010	2011	2012	2013
aantal leerlingen school 1	1050	998	948	900	855
aantal leerlingen school 2	1050	1000	960	890	850

Tabel 1.2

a Bij een van beide scholen neemt het leerlingenaantal jaarlijks met een vast percentage af. Bij welke school is dat en met welk percentage?

b Hoe groot is het groeipercentage in tien jaar?

c In deze situatie heeft het geen zin om naar kleinere tijdseenheden dan een jaar te kijken. Waarom niet?

Toepassen

★ ★

Opgave 1.6: Sparen voor een scooter

Bij de geboorte van Marijn heeft zijn vader bedacht dat hij op 16 jarige leeftijd wel een (elektrische) scooter zou willen rijden. Hij heeft een bedrag op een spaarrekening gezet dat elk jaar 4% rente geeft. Na 16 jaar is het bedrag € 2750,00 geworden.

a Hoe groot is de groeifactor in 16 jaar?

b Hoeveel heeft de vader van Marijn gestort?

★ ★ ★

Opgave 1.7: Internetsparen

Er zijn nogal wat verschillende internetspaarrekeningen. In deze opgave worden er twee vergeleken: een gewone spaarrekening en één met opnamekosten. Deze laatste geeft wel een iets hogere rente, maar als je het spaarsaldo opneemt, betaal je een percentage van het opgenomen bedrag aan opnamekosten. Als je bijvoorbeeld € 2500,00 van je rekening haalt en de bank rekent 1% opnamekosten, dan moet je € 25,00 aan opnamekosten betalen. Je krijgt dus maar € 2475,00 uitbetaald.

Je stort € 10000,00 op een gewone internetspaarrekening met een rentepercentage op jaarbasis van 1,85. Je stort ook € 10000,00 op een internetspaarrekening die 1% opnamekosten rekent, maar wel 2,65% rente op jaarbasis geeft. Na zes jaar neem je van beide rekeningen het totale spaarsaldo op.

a Bereken bij elk van beide internetspaarrekeningen het bedrag dat je uiteindelijk in handen krijgt.

b Stel voor beide internetspaarrekeningen een bijbehorende formule op voor het totale bedrag B dat je na t jaar kunt opnemen.

c Bereken in maanden nauwkeurig op welke termijn de internetspaarrekening zonder opnamekosten het aantrekkelijkst is.

Antwoorden

1.1 a Met groeifactor 1,5.

b De oppervlakte neemt met 125% toe over twee dagen.

c Ja, met groeifactor 1,5 elke dag tot al het water is bedekt.

1.2 a Na 1 jaar: 4440,00 euro en na 2 jaar: 4928,40 euro.

b 1,11 per jaar.

c Vermenigvuldigen met 1,11.

d Delen door 1,11.

e De groeifactor is 1,08 en het groeipercentage is 8.

1.3 a $N = 5000 \cdot 0{,}96^t$

b $\approx$ 3324 herten.

c Groeipercentage: -33,52.

d In de loop van 2030 is het aantal herten gehalveerd.

1.4 a Als je twee opvolgende kapitalen deelt, vind je telkens ongeveer 1,04.

b Ongeveer 4% per jaar.

c $K(t) = 10000 \cdot 1{,}08^t$ invoeren op de GR. Tabel van $t = 0$ tot $t = 10$ overnemen.

d Na tien jaar.

e Na vijf jaar 19254,15 euro en na tien jaar 123425,61 euro.

f Dit maakt geen verschil.

1.5 a Bij school 1 met 5% per jaar.

b Ongeveer 40% afname.

c Gedurende een jaar veranderen de leerlingenaantallen alleen incidenteel. Alleen bij de start van een cursusjaar is er een structurele wijziging, afhankelijk van de aanmeldingen en de examenresultaten.

1.6 a $\approx$ 1,87

b $\approx$ 1470,59 euro.

1.7 a Bij de gewone internetspaarrekening: $\approx$ 11162,62 euro.

Bij de internetspaarrekening met opnamekosten: $\approx$ 11582,14 euro.

b Rekening 1: $B = 10000 \cdot 1{,}0185^t$

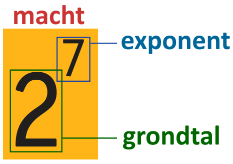
Rekening 2: $B = 9900 \cdot 1{,}0265^t$

c GR geeft $x = 1{,}2846$, dat is vijftien maanden.

1.2 Rekenen met machten

Inleiding

In de formules voor exponentiële groei komen machten voor. Om er mee te kunnen werken moet je dus met machten kunnen rekenen. Waarschijnlijk heb je dat wel geleerd, maar hier worden de belangrijkste rekenregels voor machten nog even opnieuw uitgelegd.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- rekenen met machten;
- de rekenregels voor machten toepassen bij exponentiële groei.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met formules en grafieken.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om de rekenregels voor machten, toegepast op exponentiële groei. Dit wil je overzichtelijk op een rijtje krijgen. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - welke zaken er worden ontdekt.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 2.1**

In een ondiep meer van 1000 km^2 begint riet te groeien. Op 1 januari 2005 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 1 km^2. Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. In 2010 constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar twee keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

a Hoeveel is de groeifactor per jaar?

b Maak een tabel voor de met riet bedekte oppervlakte voor de eerste vijf jaar.

c Hoe groot is de groeifactor per tien jaar?

d Na hoeveel jaar is het hele meer begroeid met riet?

★ **Opgave 2.2**

Schrijf als één macht.

a $7^2 \cdot 7^3 \cdot 7^1$

b $\frac{5^{312}}{5^{309}}$

c $3^{69} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{60}$

d $\frac{x^{12} \cdot x^{15}}{\left(x^6\right)^3}$

★ **Opgave 2.3**

De concentratie van een bepaalde vervuilende stof in het water neemt langzaam af met een vast percentage van 13 per uur. Op $t = 0$ is de concentratie 150 mg per liter.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur? Stel een formule op voor de concentratie C als functie van de tijd t in uren.

b Na hoeveel uur is de concentratie gehalveerd?

c Met hoeveel procent neemt de concentratie per dag af?

★ ★ **Opgave 2.4**

Bereken.

a $3^{110} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{109}$

b $\left(\frac{3}{4}\right)^{235} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{236}$

★ ★ **Opgave 2.5**

Bereken:

$\frac{4^{180} \cdot 2^{60}}{8^{112} \cdot 4^{42}}$

Toepassen

★ ★ ★

Opgave 2.6: Getallenpuzzel

Wat zijn de laatste vier cijfers van 5^{2017}?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het rekenen met machten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Antwoorden

2.1 a 2

b Zie de tabel.

t	0	1	2	3	4	5
$R(t)$	1	2	4	8	16	32

c 1024

d Na 10 jaar.

2.2 a 7^6

b 5^3

c 3^9

d x^9

2.3 a Groeifactor 0,87 en formule: $C = 150 \cdot 0{,}87^t$.

b $t \approx 4{,}98$ uur.

c Ongeveer 96,5%.

2.4 a 3

b $\frac{4}{3}$

2.5 1

2.6 Het antwoord op de vraag is 3125.

1.3 Reële exponenten

Inleiding

Tot nu toe kun je bij exponentiële groei eigenlijk alleen wat zeggen op tijdstippen die gehele positieve waarden hebben. En dat is natuurlijk niet wenselijk, je wilt weten hoeveel bacteriën er zijn na 1,5 uur, of 2,3 uur voor het begintijdstip.
Je gaat nu kijken hoe het met decimale en/of negatieve exponenten zit.
In het algemeen zul je leren werken met alle mogelijke reële exponenten.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken en/of negatieve exponenten;
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten;
- werken met functies en grafieken.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het werken met negatieve en decimale (gebroken) getallen voor de tijdstippen waarop er sprake is van exponentiële groei en om het omrekenen van groeifactoren naar grotere of juist kleinere tijdseenheden. Dit wil je overzichtelijk op een rijtje krijgen. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - welke zaken er worden ontdekt.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ Opgave 3.1

Bereken de gevraagde percentages in één decimaal nauwkeurig.

a Een hoeveelheid groeit met 36% per jaar. Bereken het groeipercentage per maand.

b Een hoeveelheid neemt met 14% per week af. Bereken het percentage dat de hoeveelheid per dag afneemt.

★ Opgave 3.2

Bereken de gevraagde percentages in één decimaal nauwkeurig.

a Een hoeveelheid is in twee jaar verviervoudigd. Bereken het groeipercentage per maand.

b Van een hoeveelheid is na drie weken nog maar een derde deel over.
Bereken het percentage waarmee de hoeveelheid per dag afneemt.

★ Opgave 3.3

Om 9:00 uur waren er 500 bacteriën. Dit aantal groeit exponentieel. Je ziet een tabel met het aantal bacteriën op bepaalde tijdstippen.

tijd	9:00	12:00	15:00	18:00
bacteriën	500	1500	4500	13500

Tabel 3.1

a Bereken in drie decimalen nauwkeurig de groeifactor per uur.

b Stel de formule op van de hoeveelheid bacteriën N na t uur met $t = 0$ om 9:00 uur.

c Hoeveel bacteriën waren er om 6:00 uur?

d Hoe laat waren er 250 bacteriën? Gebruik de formule die je bij b hebt gevonden.

★ Opgave 3.4

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1{,}1^t$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (jaar) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

a Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 januari 2025?

b Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 augustus 2025?

c Hoe groot is de groeifactor per jaar?

d Wat is het groeipercentage per maand?

e Bereken het aantal inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

★ ★ Opgave 3.5

Op 1 januari 2012 had iemand een kapitaal van € 7969,24 op zijn spaarrekening staan. Het kapitaal heeft jaren vastgestaan tegen een rente van 6%. De rente werd elk jaar bijgeschreven.

a Bereken de grootte van het kapitaal op 1 januari 2011, 1 januari 2010 en 1 januari 2009.

b In welk jaar had het kapitaal een grootte van € 5618,00?

c De spaarder heeft waarschijnlijk een bedrag in duizenden ingelegd toen hij begon met sparen. Wanneer is de spaarder begonnen met sparen en met welk bedrag?

★ ★ Opgave 3.6

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel. In drie uur tijd is het aantal gegroeid van 1200 (om 10:00 uur) naar 3000.

a Hoe groot is de groeifactor per drie uur?

b Bereken het groeipercentage per uur.

c Welke formule kun je opstellen voor de groei van deze kolonie als H de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren voorstelt? Neem $t = 0$ op het moment dat er 1200 bacteriën zijn.
Rond de groeifactor af op drie decimalen.

d Op welk moment waren er nog 600 bacteriën? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Toepassen

★ ★ ★ Opgave 3.7: Wereldbevolking

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in 1500 jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs 1,2 miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot 2,4 miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking 4,8 miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

a In de tekst is sprake van verschillende perioden. Bereken voor die perioden waarin de wereldbevolking zich heeft verdubbeld het groeipercentage per jaar in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken ook voor de andere perioden het groeipercentage per jaar in twee decimalen nauwkeurig.

★ ★ Opgave 3.8: Radioactiviteit

De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie. Doordat de fall-out op het gras komt, krijgt het hooi een te hoog jodium-131 gehalte. Melk van koeien die met dit hooi gevoerd worden is niet meer voor consumptie geschikt. Na een ongeluk in een kerncentrale bevat hooi in de omtrek van de centrale zes keer het toegestane gehalte jodium-131. De halveringstijd van jodium-131 is acht dagen. Hoeveel dagen moet het hooi bewaard blijven voordat het weer aan koeien gevoerd kan worden?

Antwoorden

3.1 a 2,6%.

b 2,1%.

3.2 a 5,9% per maand.

b 5,1% per dag.

3.3 a $\approx 1{,}442$

b $N = 500 \cdot 1{,}442^t$

c ≈ 167 bacteriën.

d Om ongeveer 7:07 uur waren er 250 bacteriën.

3.4 a ≈ 64844 inwoners.

b ≈ 68551 inwoners.

c 1,1

d ≈ 0,8%.

e In 2010: 15523 inwoners. In 2005: 9639 inwoners.

3.5 a 1-1-2011: ≈ 7518,15 euro; 1-1-2010: ≈ 7092,60 euro; 1-1-2009: ≈ 6691,13 euro.

b In 2006.

c Met € 5000 ingelegd op 1 januari 2004.

3.6 a 2,5

b Ongeveer 35,7%.

c $H = 1200 \cdot 1{,}357^t$

d Om 7:44 uur.

3.7 a Zie de tabel.

periode	groeifactor per jaar	groeipercentage
0-1500	$2^{\frac{1}{1500}} \approx 1{,}00046$	0,05%
1500-1800	$2^{\frac{1}{300}} \approx 1{,}002313$	0,23%
1800-1950	$2^{\frac{1}{150}} \approx 1{,}00463$	0,46%
1950-1986	$2^{\frac{1}{36}} \approx 1{,}01944$	1,94%

b Zie de tabel.

periode	groeifactor per jaar	groeipercentage
1500-1750	$\left(\frac{800}{600}\right)^{\frac{1}{250}} \approx 1{,}00115$	0,12%
1750-1800	$\left(\frac{1200}{800}\right)^{\frac{1}{50}} \approx 1{,}00814$	0,81%
1986-1997	$\left(\frac{5800}{4800}\right)^{\frac{1}{11}} \approx 1{,}01735$	1,74%

3.8 21 dagen.

1.4 Exponentiële functies

Inleiding

Bij exponentiële groei horen formules van de vorm $y = b \cdot g^x$. Je gaat nu deze exponentiële functies nader bestuderen. De groeifactor (het grondtal) is steeds positief.

Je leert in dit onderwerp

- wat een exponentiële functie is en de karakteristieken ervan bepalen;
- een exponentiële functie opstellen vanuit twee gegeven punten;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met formules en grafieken.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële verbanden en om het opstellen van een formule van een exponentieel verband met twee punten van de grafiek gegeven. Dit wil je overzichtelijk op een rijtje krijgen. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - welke zaken er worden ontdekt.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 4.1**

In 2000 heeft iemand € 10000,00 op een spaarrekening gezet. De rente was toen 5% per jaar en werd bijgeschreven op de spaarrekening.

a Stel een bijpassende formule op voor het saldo S met t in jaren na het moment waarop het startbedrag op de spaarrekening is geplaatst. Schrijf op bij welke vensterinstellingen de grafiek goed in beeld komt.

b Hoelang duurt het voor het spaartegoed is gegroeid tot € 15000,00?

c Hoelang duurt het voor het spaartegoed zich verdubbeld heeft?

★ **Opgave 4.2**

Een saldo van € 4000,00 kan ontstaan zijn doordat ooit iemand € 1,00 op een spaarrekening zette tegen 5% rente.

a Wanneer moet die € 1,00 dan op de spaarrekening gezet zijn? Geef je antwoord in één jaar nauwkeurig.

b Kun je dit antwoord ook vinden door een geschikte grafiek van $S = 4000 \cdot 1{,}05^t$ te tekenen?

c Stel je voor dat je de grafiek van S steeds verder naar links door trekt. Zal de grafiek ooit de horizontale as snijden? Licht je antwoord toe. Wat betekent dit voor de grafiek van S?

★ **Opgave 4.3**

De smartphone is niet meer weg te denken. Eind 2001 waren er in Nederland ongeveer 12 miljoen aansluitingen op het mobiele netwerk. Eind 2009 waren het er al 20 miljoen. In deze periode was er sprake van exponentiële groei.
Bereken met welk percentage het aantal mobiele aansluitingen jaarlijks toenam.

★ ★ **Opgave 4.4**

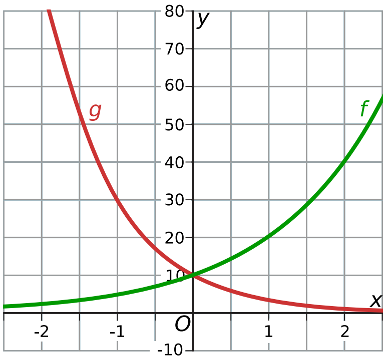
Een huurder betaalt een huur van € 650,00 en vindt de jaarlijkse huurverhoging van 5,5% te veel. Hij herinnert zich nog dat exponentiële groei veel harder gaat dan lineaire groei. Hij stelt zijn verhuurder daarom voor om de huur elk jaar met € 50 te verhogen.

Na hoeveel jaar gaat dit de huurder voordeel opleveren?

★ ★ ★ **Opgave 4.5**

Bekijk deze grafieken van twee exponentiële functies.

Geef van beide functies het functievoorschrift.



Figuur 4.1

Toepassen

★ ★ **Opgave 4.6: Centenarians**

In Engeland wordt iemand die de leeftijd van 100 jaar bereikt, aangeduid met de titel 'centenarian'. Vanaf 1967 begon het totale aantal centenarians bij benadering exponentieel te groeien. Waren er op 1 januari 1967 zo'n 1000 centenarians, op 1 januari 2009 was dit aantal gestegen tot 9600.

a Bereken het groeipercentage per jaar in deze periode.

De groei van het aantal centenarians komt voornamelijk voor rekening van vrouwen. Op 1 januari 2009 was $\frac{7}{8}$ deel van de 9600 centenarians vrouwelijk. Voor de toekomst gaat men in Engeland uit van de volgende aannames:

- Het aantal centenarians stijgt vanaf 1 januari 2009 met 8,0% per jaar.
- Het aantal vrouwelijke centenarians blijft in de toekomst $\frac{7}{8}$ deel van het totaal.

b Bereken het te verwachten aantal vrouwelijke centenarians op 1 januari 2034 in Engeland.

c Vanaf welk jaar zullen er in Engeland meer dan 100000 centenarians zijn?

(naar: pilotexamen wiskunde A in 2013, eerste tijdvak)

★ ★ **Opgave 4.7: Radioactief afval**

Op een afgelegen terrein wordt op 6 januari 2017 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval er al tien jaar heeft gelegen. De straling blijkt 2000 Bq (becquerel) te zijn. Vier maanden later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt nu ongeveer 1630 Bq te zijn. De straling neemt exponentieel af.

a Bepaal hoeveel Bq de straling een jaar geleden was. En hoe groot is de straling over 2,5 jaar?

b Stel een formule op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 6 januari 2017.

c Vanaf welke datum is de straling minder dan 1000 Bq?

Antwoorden

4.1 a $S = 10000 \cdot 1{,}05^t$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 25000$.

b 9 jaar.

c 15 jaar.

4.2 a 170 jaar geleden.

b Ja.

c Nee, er is een horizontale asymptoot $S = 0$.

4.3 7% (of nauwkeuriger; bijvoorbeeld 6,6%).

4.4 Het levert de huurder na dertien jaar voordeel op.

4.5 $f\colon\ y = 10 \cdot 2^x$ en $g\colon\ y = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

4.6 a Per jaar 6%.

b Het aantal vrouwelijke centenarians is: 57500 (of nauwkeuriger).

c Vanaf het jaar 2041 zullen er meer dan 100000 centenarians zijn.

4.7 a 1 jaar voor 6 januari 2017 was de straling ≈ 3695 Bq.
2,5 jaar na 6 januari 2017 was de straling ≈ 431 Bq.

b $S = 2000 \cdot 0{,}541^t$

c Vanaf 22 februari 2018.

1.5 Logaritmische schalen

Inleiding

Exponentiële groei is vaak ook nogal een explosieve groei. Je hebt al snel te maken met veel grotere getallen dan waarmee je begon, of (bij een groeifactor tussen 0 en 1) met heel kleine positieve getallen. Dat is lastig bij het maken van grafieken waaruit je met enige nauwkeurigheid wilt kunnen aflezen. Het lukt bijna niet om in één grafiek zowel de (kleine) beginwaarden als de (hele grote) waarden na verloop van tijd te laten zien.
Er is echter speciaal grafiekenpapier bedacht om dit probleem op te lossen. Het is zo gemaakt, dat de grafiek van een exponentiële formule er op dit papier als een rechte lijn uitziet.

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische schalen te werken;
- logaritmisch grafiekenpapier te gebruiken;
- het voorschrift van exponentiële formules op te stellen vanaf enkellogaritmisch papier.

Voorkennis

- werken met exponentiële formules;
- werken met logaritmen.

Voor de leerling

Je krijgt eerst in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het werken met logaritmisch grafiekenpapier en om het opstellen van een formule van een exponentieel verband waarvan de grafiek op dergelijk papier is getekend. Dit wil je overzichtelijk op een rijtje krijgen. Bekijk samen - en ook bij andere groepjes - welke zaken er worden ontdekt.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 5.1**

Teken een rechte lijn door de punten (2,40), (4,400) en (6,4000) op logaritmisch papier.

a Waarom hoort bij de lijn door deze punten een exponentieel verband?

b Geef een formule bij dit exponentiële verband.

★ **Opgave 5.2**

De bevolking van een middelgrote stad groeit vanaf 1 januari 2000 met (ongeveer) 6% per jaar. Op 1 januari 2000 zijn er 80000 inwoners.

a Stel een formule op voor het aantal inwoners A afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2000.

b Teken een bijpassende grafiek op enkellogaritmisch papier.

c Lees uit die grafiek het aantal inwoners af op 1 januari 2015. Controleer je antwoord met behulp van de formule.

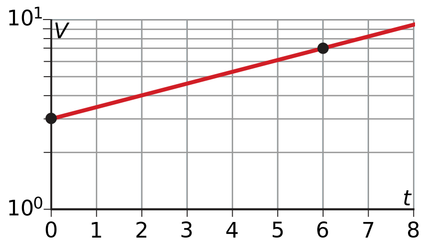
★ **Opgave 5.3**

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend die het verband tussen een toenemende hoeveelheid V en de tijd t weergeeft.

a Geef een formule voor V.

b Bereken de waarde van t waarvoor $V(t) = 10$ in twee decimalen nauwkeurig. Controleer je antwoord met de grafiek.

c Voor negatieve waarden van t heeft de grafiek een snijpunt met de t-as. Bereken de bijbehorende waarde van t in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 5.1

★ **Opgave 5.4**

Gegeven zijn de exponentiële verbanden $N_1 = 10 \cdot 5^t$ en $N_2 = 5 \cdot 10^t$.

a Welke grafiek gaat het steilst wanneer beide verbanden op enkellogaritmisch papier worden getekend?

b Teken de beide grafieken op enkellogaritmisch papier. Neem voor t de waarden 0 tot en met 4.

c Heeft het snijpunt op enkellogaritmisch papier een betekenis? Zo ja, welke?

★ ★ **Opgave 5.5**

Deze tabel met gegevens hoort bij een bacteriecultuur. t is gegeven in uren en N in aantallen.

t	0	1	2	3	4	5	6
N	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 5.1

a Maak met behulp van deze tabel een tabel waarin $\log(N)$ wordt uitgezet tegen t.

b Teken de bijbehorende grafiek. Kun je deze grafiek benaderen door een rechte lijn? Is er sprake van exponentiële groei?

c Stel een formule op die het verband tussen $\log(N)$ en t beschrijft.

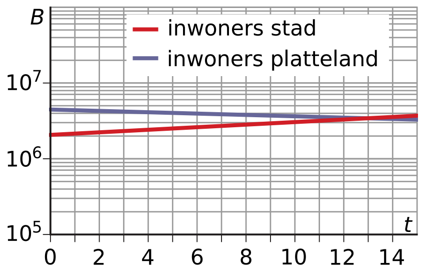
d Stel ook een formule op die het verband tussen N en t beschrijft.

Toepassen

★ ★

Opgave 5.6: Van platteland naar stad

In China zie je de laatste jaren een steeds groter wordend verschil tussen het aantal inwoners op het platteland en in de steden. Veel jeugd verlaat het platteland om in de stad te gaan wonen. Zo ook in Kunming, de hoofdstad van de zuidwestelijke provincie Yunnan. Op 1 januari 2000 had de regio rond Kunming naar schatting 6,5 miljoen inwoners, waarvan 2,055 miljoen mensen in de stad woonden. De formule van het aantal inwoners afhankelijk van de tijd t (jaar) is: $B = 2055000 \cdot 1{,}04^t$ met $t = 0$ op 1 januari 2000.



Figuur 5.2

Bekijk de grafiek.

a In welk jaar woonden er 2,5 miljoen mensen in de stad Kunming?

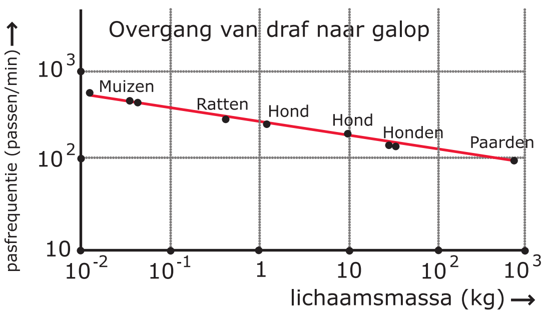
b Het aantal inwoners op het platteland in de regio Kunming nam na 1 januari 2000 per jaar met 2% af. Stel een bijpassende formule op voor het aantal inwoners op het platteland.

c In welk jaar was het aantal inwoners in de stad gelijk aan het aantal inwoners op het platteland?

★ ★ ★

Opgave 5.7: Pasfrequentie

Zoogdieren gaan bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) over van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt, hangt af van de lichaamsmassa (kg). Noem de lichaamsmassa m (kg) en de pasfrequentie P. De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden.



Figuur 5.3

a Waaraan kun je zien dat op beide assen van deze grafiek een logaritmische schaal is gebruikt?

b Omdat op beide assen een logaritmische schaal is gebruikt, is in feite $\log(P)$ uitgezet tegen $\log(m)$. Voor het punt dat hoort bij paarden, geldt dan ongeveer $\log(m) = 2{,}9$ en $\log(P) = 2{,}0$. Bepaal zelf de bijpassende waarden van het punt dat bij een kleine hond hoort.

c Leid nu een formule af die het verband tussen $\log(P)$ en $\log(m)$ beschrijft.

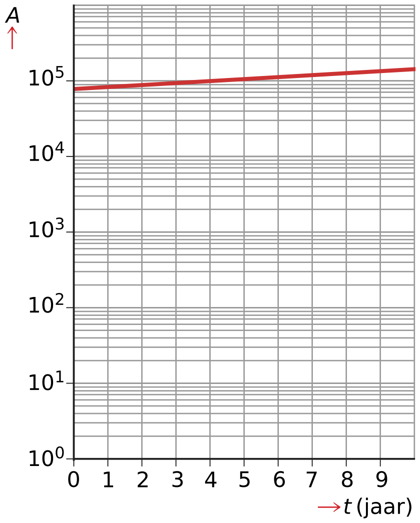
Antwoorden

5.1 a De groeifactor per twee eenheden is steeds 10.

b $y = 4 \cdot 3{,}16^x$

5.2 a $A = 80000 \cdot 1{,}06^t$

b Zie de figuur.



c Schatting: ongeveer 190000, GR geeft $A(15) \approx 191725$.

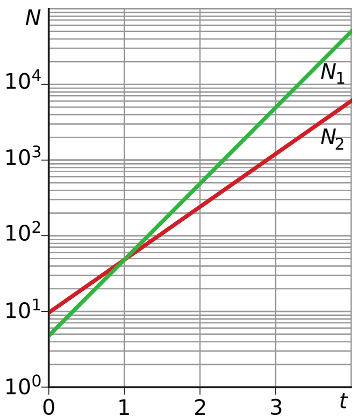
5.3 a $V \approx 2 \cdot 1{,}25^t$.

b $t \approx 7{,}21$

c $t \approx -3{,}11$

5.4 a Grafiek N_2, omdat daar de groeifactor het grootste is en deze dus het snelste stijgt.

b Zie de figuur.



c Ja, het is de oplossing van de vergelijking: $10 \cdot 5^t = 5 \cdot 10^t$.

5.5 a Zie de tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6
$\log(N)$	1,70	1,92	2,15	2,37	2,60	2,83	3,05

b Ja, een rechte lijn door $(0; 1{,}70)$ en $(4; 2{,}60)$, dus $N(t)$ is een exponentiële functie.

c $\log(N) \approx 0{,}225t + 1{,}70$

d $N \approx 50 \cdot 1{,}68^t$

5.6 a 2005

b $B = 4445000 \cdot (0{,}98)^t$

c In 2013.

5.7 a Op de assen staan machten van 10, en de afstand tussen 1 en 10 is even groot als tussen 10 en 100.

b $\log(m) \approx 0{,}1$ en $\log(P) \approx 2{,}4$

c $\log(P) \approx -0{,}14 \cdot \log(m) + 2{,}41$

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- exponentiële groei — groeifactor — macht, grondtal, exponent
- rekenregels voor machten
- algemene formule voor exponentiële groei
- exponentiële functie — exponentiële vergelijking en ongelijkheid
- logaritmische schaal — enkellogaritmisch papier

Activiteitenlijst

- formule voor exponentiële groei opstellen bij gegeven groeifactor (groeipercentage) en beginwaarde
- rekenregels voor machten toepassen — groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden
- eigenschappen van exponentiële functies toepassen — exponentiële functie opstellen bij gegeven punten van de grafiek
- werken met logaritmische schalen — formule opstellen bij exponentiële groei bij gegeven tabel, punten of grafiek (op enkellogaritmisch papier)

Achtergronden

Figuur 6.1

Thomas Robert Malthus (1766—1834) was een Brits geestelijke die zich veel bezighield met demografische en economische vraagstukken. In 1798 publiceerde hij ‘An Essay on the Principle of Population’, waarin hij aannam dat de totale bevolking exponentieel groeit, terwijl de middelen van bestaan lineair toenemen. Dit leidt tot de beschikbaarheid van steeds minder grond (voedsel/energie) per mens en dus een daling in welvaart, de ‘Malthusiaanse catastrofe’.
Op grond hiervan meende hij dat de totale bevolking een maximale omvang zou hebben, het ‘Malthusiaans plafond’. Hij veronderstelde dat de mensheid deze maximale omvang binnen afzienbare tijd zou bereiken en dat alleen middels hongersnood, epidemieën en oorlogen het aantal mensen binnen de grenzen van het Malthusiaans plafond zou kunnen blijven. Malthus geldt als één der eerste economen. In de tweede helft van de negentiende eeuw werd deze opinie fel bestreden, onder andere door Karl Marx en Friedrich Engels die in Malthus' catastrofe slechts een gevolg van de kapitalistische samenleving zagen. Ook economen als John Maynard Smith en Ronald Fisher trokken Malthus' pessimistische kijk in twijfel. In de twintigste eeuw heeft niets van een Malthusiaanse catastrofe plaatsgevonden. Wel verscheen in 1972 het ‘De grenzen aan de groei’. Dit is een geschrift van de **Club van Rome** die als doelstelling heeft de wereld bekend te maken met problemen als bevolkingsgroei, voedselproductie, industrialisatie, uitputting natuurlijke hulpbronnen en vervuiling. Ook zij maakten veel gebruik van exponentiële groeimodellen.

Testen

★ **Opgave 6.1**

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld, groeit de laatste jaren met 2% per jaar. In 2000 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?

b Geef een formule voor het aantal passagiers p op tijdstip t in jaren na 2000.

c Als de groei zo doorgaat, hoelang duurt het dan voor het huidige aantal passagiers verdubbeld is?

d Hoeveel passagiers waren er in 1997?

e Hoe groot is de groeifactor per tien jaar?

f Hoe groot is de groeifactor per kwartaal?

★ **Opgave 6.2**

In de gemeente Zaandam groeit het aantal inwoners sinds 2000 met ongeveer 3,2% per jaar. In het jaar 2000 had de gemeente Zaandam in totaal 97452 inwoners. Het aantal woningen in Zaandam was toen 35505.

a Geef een formule voor het aantal inwoners A van Zaandam waarbij je ervan uitgaat dat de groei onverminderd met hetzelfde percentage doorgaat.

b Neem aan dat alle inwoners van Zaandam in één van die 35505 woningen woonden. Hoeveel inwoners telde Zaandam in 2000 gemiddeld per woning? Rond af op twee decimalen.

c De gemeente Zaandam liet om de bevolkingsgroei op te vangen jaarlijks gemiddeld 1350 woningen bijbouwen. Als je het aantal mensen per woning constant houdt, hoeveel mensen kan Zaandam dan jaarlijks meer huisvesten?

d Tot welk jaar kan Zaandam zijn bevolking huisvesten als er gemiddeld 1350 woningen per jaar bijkomen en het aantal personen per woning ongewijzigd blijft?

★ **Opgave 6.3**

Een doorzichtige kunststof absorbeert een deel van het licht dat er doorheen valt. Elke laag van 1 cm absorbeert 20% van het licht.

a Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per cm kunststof?

b Hoeveel procent van het licht wordt geabsorbeerd door een laag van 2,5 cm dikte?

c Hoe dik moet de laag kunststof zijn om 90% van het licht te absorberen?

d Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per mm kunststof?

★ **Opgave 6.4**

Iemand haalt een fles melk uit de koelkast en zet er een fles cola voor in de plaats. De temperatuur van de fles melk neemt hierdoor langzaam toe tot kamertemperatuur, de temperatuur van de fles cola neemt juist af tot koelkasttemperatuur. De formules voor de temperaturen T_1 en T_2 (°C) in de flessen, afhankelijk van de tijd t (min) zien er zo uit:
$T_1 = 19 - 13 \cdot 0{,}78^t$ en $T_2 = 6 + 13 \cdot 0{,}78^t$.

a Teken de grafieken van beide formules in één figuur. Laat t hierbij lopen van 0 tot 25.

b Welke van de formules hoort bij de fles melk, en welke bij de fles cola? Licht je antwoord toe.

c Wat is de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles cola?

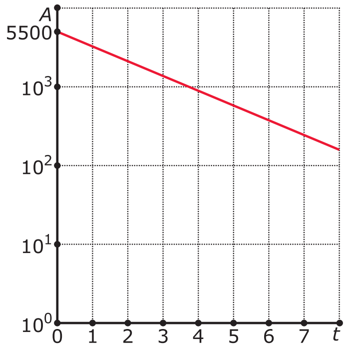
d Wat is de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles melk?

e Hoeveel bedraagt de kamertemperatuur?

f Vanaf welk tijdstip is de cola kouder dan de melk?

★ ★ **Opgave 6.5**

In sommige dorpen in delen van Rusland is nog weinig werkgelegenheid en daarom trekken steeds meer mensen er weg. In de grafiek is het aantal inwoners A van zo'n dorp uitgezet tegen de tijd t in jaren. Het tijdstip $t = 0$ komt overeen met het jaar 2000. In dat jaar zijn er 5500 inwoners.



Figuur 6.2

a Waaruit concludeer je dat er sprake is van een exponentieel verband?

b Waren er in 2006 meer of minder dan 600 inwoners?

c Bepaal de groeifactor en geef een formule voor het aantal inwoners afhankelijk van de tijd (jaar).

d Iemand doet de volgende uitspraak: "Het aantal inwoners wordt nooit nul, maar komt wel steeds dichter bij nul."
Geef argumenten waarom je het met deze persoon eens of oneens bent.

Toepassen

★ ★ **Opgave 6.6: Radioactief verval**

Een natuurkundige toepassing van exponentiële functies vind je bij radioactiviteit.

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven.
Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4{,}468 \cdot 10^9$ jaar.
Het verval van U-238 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t. Begin je met 1 kg U-238, dan heb je na 4,468 miljard jaar nog 0,5 kg over (plus 0,5 kg Th-234). Je kunt dus het beste de tijd in miljarden jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer 0,8563. En $A = 1000 \cdot 0{,}8563^t$ gram.

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2001 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.

c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.

d Als je de halveringstijd weet, kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot 750 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

★ ★ **Opgave 6.7: Wereldbevolking**

Omstreeks 1970 bedroeg de wereldbevolking ongeveer 3,6 miljard en zij groeide per jaar met 2,1%.

a Hoe groot was toen de groeifactor?

b Als we ervan uitgaan dat die groeifactor door de jaren heen gelijk is gebleven, hoeveel mensen leefden er dan in 1971, 1988, 1900 en het jaar 0?

c B is de bevolking na t jaren, gerekend vanaf 1970 ($t = 0$). Geef B als functie van t door een formule.

d Je hebt nu een model van de bevolkingsgroei gemaakt, gebaseerd op gegevens uit 1970. Volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 is in 2050 het aantal mensen op aarde nog geen 9 miljard. Klopt dat met de formule die je bij c hebt gevonden?

e Waaraan kun je zien dat de bevolkingsgroei dan niet meer exponentieel loopt? Kun je daar redenen voor geven?

★ ★ ★ Opgave 6.8: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip ‘zuurgraad’ gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $\left[H_3O^+\right]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $\left[H_3O^+\right] = 10^{-7}$ mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van 10^{-7}: pH $= -\log\left(10^{-7}\right) = 7$. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: pH $= -\log\left[H_3O^+\right]$.

a Bij geconcentreerd zwavelzuur is $\left[H_3O^+\right] = 18$ mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?

b Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van 11,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie in mol/L?

c Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie van zure regen?

d Vanaf welke H_3O^+ concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?

e De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijk pH van de huid is ongeveer 5,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie dan?

Examen

★ ★ Opgave 6.9: Ureumgehalte

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 gram toeneemt.
Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo ververst worden dat de wettelijke norm van 2 gram ureum per cm^3 water niet overschreden wordt. In een model gaan we ervan uit dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken.
Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 m^3 ververst wordt (dus 3% van het totaal).
We beginnen de eerste dag met 0 gram ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 gram ureum in het water. Na verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 gram ureum over.

a Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 gram ureum in het water zit.

b In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

c Stel U is de hoeveelheid ureum aan het begin van een zekere dag. Toon aan dat de hoeveelheid ureum aan het begin van de daaropvolgende dag gelijk is aan $0{,}8U + 400$.

We starten in het model weer met 0 gram ureum aan het begin van de eerste dag. De hoeveelheid ureum in gram (U_n) aan het begin van de n-de dag kan rechtstreeks berekend worden met de formule:
$U_n = 2000 - 2500 \cdot 0{,}8^n$.

d Leg uit met behulp van deze formule dat aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm voldaan wordt.

e In de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden. Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(bron: examen wiskunde A havo 1989, tweede tijdvak)

★ ★ Opgave 6.10: Sparen, sparen en sparen

Nederland is een echt spaarland. Jaarlijks worden er miljarden euro's gestort op spaarrekeningen. Er zijn verschillende soorten spaarrekeningen. In deze opgave bekijken we er drie: de groeirekening, de depositorekening en de renteklimrekening.
We storten op elk van de drie spaarrekeningen een bedrag van € 10000,00 dat voor een periode van 10 jaar op de spaarrekening blijft staan.

Groeirekening

De groeirekening is de bekendste soort. Het rentepercentage op deze rekening is 3,5% per jaar. Het is een ‘rente op rente’-rekening: na een jaar wordt de rente bijgeschreven op de rekening, zodat het volgende jaar rente wordt berekend over een hoger bedrag G. Na elk jaar wordt het bedrag op de rekening dus hoger. Het bedrag G dat na t-jaar op de groeirekening staat, kun je bereken met de formule: $G = 10000 \cdot 1{,}035^t$. Het bedrag op de groeirekening is na 10 jaar nog niet verdubbeld. Maar als je de rekening nog langer laat doorlopen, komt er een jaar dat het bedrag op de rekening voor het eerst twee keer zo hoog is. Het bedrag is zelfs nog hoger dan € 20000.

a Bereken na hoeveel jaar dat is.

Depositorekening

De depositorekening is een spaarrekening met een rentepercentage van 4,0% per jaar. De rente over elk jaar is € 400. Dat bedrag wordt steeds bijgeschreven op een aparte betaalrekening. Op de betaalrekening krijg je geen rente, zodat het bedrag op de betaalrekening lineair toeneemt. De rente van 4,0% lijkt gunstiger dan een rente van 3,5%. Toch heb je na tien jaar bij de depositorekening in totaal minder rente gekregen dan bij de groeirekening. Een bank introduceert een nieuwe depositorekening die in tien jaar evenveel rente oplevert als de groeirekening.

b Bereken het rentepercentage per jaar van die nieuwe depositorekening. Geef je antwoord in één decimaal.

Renteklimrekening

De renteklimrekening is een soort depositorekening. Ook hier wordt jaarlijks de rente bijgeschreven op een aparte betaalrekening die geen rente oplevert. Bij de renteklimrekening wordt het rentepercentage elk jaar hoger. In deze tabel kun je aflezen welke bedragen er na t-jaar sparen op de renteklimrekening R en op de betaalrekening B staan.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
B	0	300	615	950	1310	1700	2130	2615	3165	3775	4475

Tabel 6.1

In de volgende tabel staan de rentepercentages voor het t-de jaar.

t-de jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rentepercentage	3,00	3,15	3,35	3,60	3,90	4,30				

Tabel 6.2

c Bereken het rentepercentage voor het zevende jaar. Geef je antwoord in twee decimalen.

d De renteklimrekening geeft in tien jaar € 4475,00 rente. Wat dit betreft is het de beste van de drie spaarrekeningen. De groeirekening is de op één na beste.
Bereken het rentepercentage per jaar dat een groeirekening moet hebben om in 10 jaar € 4475,00 rente te geven. Geef je antwoord in twee decimalen.

(bron: examen wiskunde A havo 2004, tweede tijdvak)

★★ Opgave 6.11: De wet van Moore

Het Amerikaanse bedrijf Intel is een zeer grote producent van computerchips. Gordon Moore was in 1968 één van de oprichters van het bedrijf.
Deze opgave gaat over het aantal transistoren in een computerchip. (Een transistor is een elektronische schakeling.)
In 1965 deed Moore daar een voorspelling over:
'Het aantal transistoren in een computerchip zal tussen 1965 en 1975 exponentieel groeien.'
Moore heeft meer dan gelijk gekregen: de voorspelling is zelfs tot het jaar 2000 uitgekomen! Zijn voorspelling is men de Wet van Moore gaan noemen.
In de tabel zie je hoeveel transistoren er in de chips van Intel zitten. Ook zie je in welk jaar die chips op de markt zijn gebracht.

introductiejaar	naam chip	aantal transistoren
1971	4004	2250
1972	8008	2500
1974	8080	5000
1978	8086	29.000
1982	286	120.000
1985	386	275.000
1989	486 DX	1.180.000
1993	Pentium I	3.100.000
1997	Pentium II	7.500.000
1999	Pentium III	24.000.000
2000	Pentium IV	42.000.000

Tabel 6.3

In de tabel zie je dat het aantal transistoren tussen 1971 en 1972 met 250 toeneemt.
Stel dat het aantal transistoren in de jaren daarna lineair toe zou nemen met 250 per jaar.

a In welk jaar zou dan het aantal van 5000 transistoren per chip zijn bereikt? Licht je antwoord toe.

In werkelijkheid is de toename dus exponentieel. Zo is in de periode van 1971 tot 2000 het aantal transistoren per chip toegenomen van 2250 tot 42 miljoen.

b Bereken hiermee de groeifactor per jaar in vier decimalen nauwkeurig.

De Wet van Moore in formulevorm is: $A = 2250 \cdot 1{,}404^t$.
Hierin is A het aantal transistoren per chip en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1971. In de Pentium II-chip zitten volgens de tabel 7500000 transistoren. Dat aantal transistoren wijkt nogal af van de voorspelling volgens de Wet van Moore.

c Bereken hoeveel procent dit aantal afwijkt van de voorspelling volgens de formule van de Wet van Moore.

d Met behulp van de formule kunnen we voorspellen wanneer er 1 miljard transistoren in een computerchip zitten. Bereken hoeveel jaar na 1971 dit het geval is.

(bron: examen wiskunde A havo 2005, eerste tijdvak))

Antwoorden

6.1 a $g = 1{,}02$

b $p(t) = 4300 \cdot 1{,}02^t$

c 35 jaar.

d 40520 passagiers.

e $g_{10} \approx 1{,}2119$

f $1{,}02^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}0050$

6.2 a $A = 97452 \cdot 1{,}032^t$, met $t = 0$ in 2000.

b 2,74

c 3705 mensen per jaar.

d $t \approx 11{,}59$, dus in 2012.

6.3 a Met 0,8.

b Er wordt 42,8% geabsorbeerd.

c $d \approx 10{,}32$ cm

d De groeifactor per mm: $\approx 0{,}978$.

6.4 a Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 20$.

b T_1 hoort bij de melk en T_2 hoort bij de cola, want als $t = 0$ dan $T_1 = 19-13 = 6$ en $T_2 = 6+13 = 19$.

c $T = 6$

d $T = 19$

e Cola had kamertemperatuur, dus de kamertemperatuur is 19 °C.

f Na 2,8 minuten.

6.5 a De grafiek is een rechte lijn op enkellogaritmisch papier.

b Minder dan 600.

c De formule is: $A = 5500 \cdot 0{,}65^t$.

d Theoretisch wordt het aantal mensen nooit 0, maar het lijkt toch logisch om te veronderstellen dat een aantal mensen dat kleiner is dan 1 (of 0,5) betekent dat er geen mensen meer in dit dorp wonen.

6.6 a $R = 1000 \cdot 0{,}90^t$

b De GR geeft $t \approx 2{,}118$, dus 2 jaar en 1 maand.

c De GR geeft $t \approx 6{,}58$ jaar.

d 750 ligt midden tussen 500 en 1000, schatting 2,8 jaar.

6.7 a 1,021

b 1971: 3,68 mld; 1988: 5,23 mld; 1900: 0,84 mld; 0: $5{,}96 \cdot 10^{-9}$ mld, hetgeen nogal ongeloofwaardig is. De aanname, dat de groeifactor constant is, is dus onjuist.

c $B = 3{,}6 \cdot 1{,}021^t$ mld.

d $B(80) \approx 18{,}98$ mld, dus het klopt niet.

e Uit het voorgaande resultaat volgt dat de groei van de wereldbevolking zal afremmen. En dat moet ook wel, want onze planeet heeft te weinig grondstoffen om een exponentieel groeiend aantal mensen op den duur van voedsel en woonruimte te voorzien.

6.8 a $pH = -\log(18) \approx -1{,}26$

b $-\log\left(H_3O^+\right) = 11{,}5$ dus $\left[H_3O^+\right] = 10^{-11{,}5} \approx 3{,}16 \cdot 10^{-12}$ mol/L.

c $-\log\left(H_3O^+\right) = 4$ dus $\left[H_3O^+\right] = 10^{-4} = 0{,}0001$ mol/L.

d $-\log\left(H_3O^+\right) = 0$ dus $\left[H_3O^+\right] = 10^{-0} \approx 1$ mol/L, dus als $\left[H_3O^+\right] > 1$ mol/L. De oplossing is dan erg zuur en wordt steeds zuurder.

e $-\log\left(H_3O^+\right) = 5{,}5$ dus $\left[H_3O^+\right] = 10^{-5{,}5}$ mol/L, dus $\left[H_3O^+\right] = 3{,}16 \cdot 10^{6}$ mol/L.

6.9 a Elke nacht wordt 3% van het water ververst, 97% niet, dus er blijft $0{,}97 \cdot 500 = 485$ g ureum over. De tweede dag komt er weer 500 g ureum bij, samen 985 g. Aan het begin van de derde dag is daar nog 97% van over: $0{,}97 \cdot 985 = 955{,}45$ g.

b Begin dag 3: 955,45 g en eind dag 3: 1455,45 g.
Begin dag 4: 1411,79 g en eind dag 3: 1911,79 g.
Begin dag 5: 1854,43 g en eind dag 3: 2354,43 g.
Dus in de loop van de vijfde dag.

c Nu wordt 20% van het totaal ververst. Er blijft dus 80% van $U + 500$ over, dat is $0{,}8(U + 500) = 0{,}8U + 400$.

d $500 \cdot 0{,}8^n > 0$ voor elke n, dus $2000 - 500 \cdot 0{,}8^n < 2000$ voor elke n.

e Telkens wordt de hoeveelheid U een het begin van een dag gegeven door $U_n = 2000 - 2500 \cdot 0{,}8^n$.
Er komt 500 gram bij in de loop van de dag.
De norm overschrijden betekent: $2000 - 2500 \cdot 0{,}8^n + 500 > 2000$.
Dit kun je schrijven als $2500 \cdot 0{,}8^n < 500$ en je GR geeft dan $n > 7{,}21...$

Dus dit gebeurt voor het eerst in de loop van de zevende dag.

6.10 a $1{,}035^t = 2$ oplossen met de GR geeft $t \approx 20{,}15$. Na 21 jaar is het bedrag verdubbeld.

b $G = 10000 \cdot 1{,}035^{10} \approx 14105{,}99$. Dit betekent een rente van $\frac{4105{,}99}{10} \approx 410{,}60$ per jaar en dat is ongeveer 4,1%.

c $\frac{2615-2130}{10000} = 0{,}0485$, dus 4,85%.

d $10000 \cdot g^{10} = 14475$ en dus is $g = 1{,}4475^{\frac{1}{10}} \approx 1{,}0377$.
De groeirekening moet een rentepercentage hebben van 3,77.

6.11 a In 1972 zijn er 2500 transistoren per chip. Er komen bij lineaire groei 250 per jaar bij, dus 10 jaar na 1972 zijn er dan 5000 transistoren per chip. Dat is in 1982.

b $\left(\frac{42000000}{2250}\right)^{\frac{1}{25}} \approx 1{,}4037$

c In 1997 is $t = 26$ en $A(26) \approx 15266037$. Het getal 7500000 zit daar 51% onder.

d $2250 \cdot 1{,}404^t = 10^9$ geeft $t \approx 38{,}3$.

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★ ★	★ ★ ★
1	**Exponentiële groei**	★	★ ★	★ ★ ★
	Werken met exponentiële groei en afname, bijpassende formules opstellen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ T 6.1 ☐ T 6.2 ☐	1.4 ☐ 1.5 ☐ 1.6 ☐ T 6.6 ☐ T 6.7 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐ T 6.11 ☐	1.7 ☐ T 6.8 ☐
	Groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ T 6.1 ☐ T 6.3 ☐	1.4 ☐ 1.5 ☐ 1.6 ☐ T 6.7 ☐	
2	**Rekenen met machten**	★	★ ★	★ ★ ★
	Rekenen met machten.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ T 6.1 ☐ T 6.3 ☐	2.4 ☐ 2.5 ☐ T 6.7 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐ T 6.11 ☐	2.6 ☐ T 6.8 ☐
	De rekenregels voor machten toepassen bij exponentiële groei.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ T 6.3 ☐	2.4 ☐ 2.5 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐ T 6.11 ☐	2.6 ☐
3	**Reële exponenten**	★	★ ★	★ ★ ★
	Werken met gebroken en negatieve exponenten.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ T 6.1 ☐	3.5 ☐ 3.6 ☐ T 6.6 ☐	3.7 ☐
	Groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ T 6.1 ☐	3.5 ☐ 3.8 ☐ T 6.6 ☐	3.7 ☐
4	**Exponentiële functies**	★	★ ★	★ ★ ★
	Wat een exponentiële functie is en de karakteristieken ervan bepalen.	T 6.1 ☐ T 6.3 ☐ T 6.4 ☐	4.4 ☐ 4.6 ☐ T 6.6 ☐ T 6.7 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐ T 6.11 ☐	4.5 ☐ T 6.8 ☐
	Een exponentiële functie opstellen vanuit twee gegeven punten.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ T 6.2 ☐ T 6.4 ☐	4.6 ☐ 4.7 ☐ T 6.7 ☐ T 6.9 ☐	4.5 ☐ T 6.8 ☐
	Vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen.	4.1 ☐ 4.2 ☐ T 6.3 ☐	4.4 ☐ 4.6 ☐ 4.7 ☐ T 6.6 ☐ T 6.7 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐	
5	**Logaritmische schalen**	★	★ ★	★ ★ ★
	Met logaritmische schalen werken.	5.1 ☐ 5.2 ☐ 5.3 ☐ 5.4 ☐	5.5 ☐ 5.6 ☐ T 6.5 ☐	5.7 ☐
	Logaritmisch papier gebruiken.	5.1 ☐ 5.2 ☐ 5.3 ☐ 5.4 ☐	5.5 ☐ T 6.5 ☐	5.7 ☐
	Het voorschrift van een exponentiële functies opstellen vanaf enkellogaritmisch papier.	5.1 ☐ 5.3 ☐	5.5 ☐ 5.6 ☐ T 6.5 ☐	5.7 ☐

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

www.math4all.nl