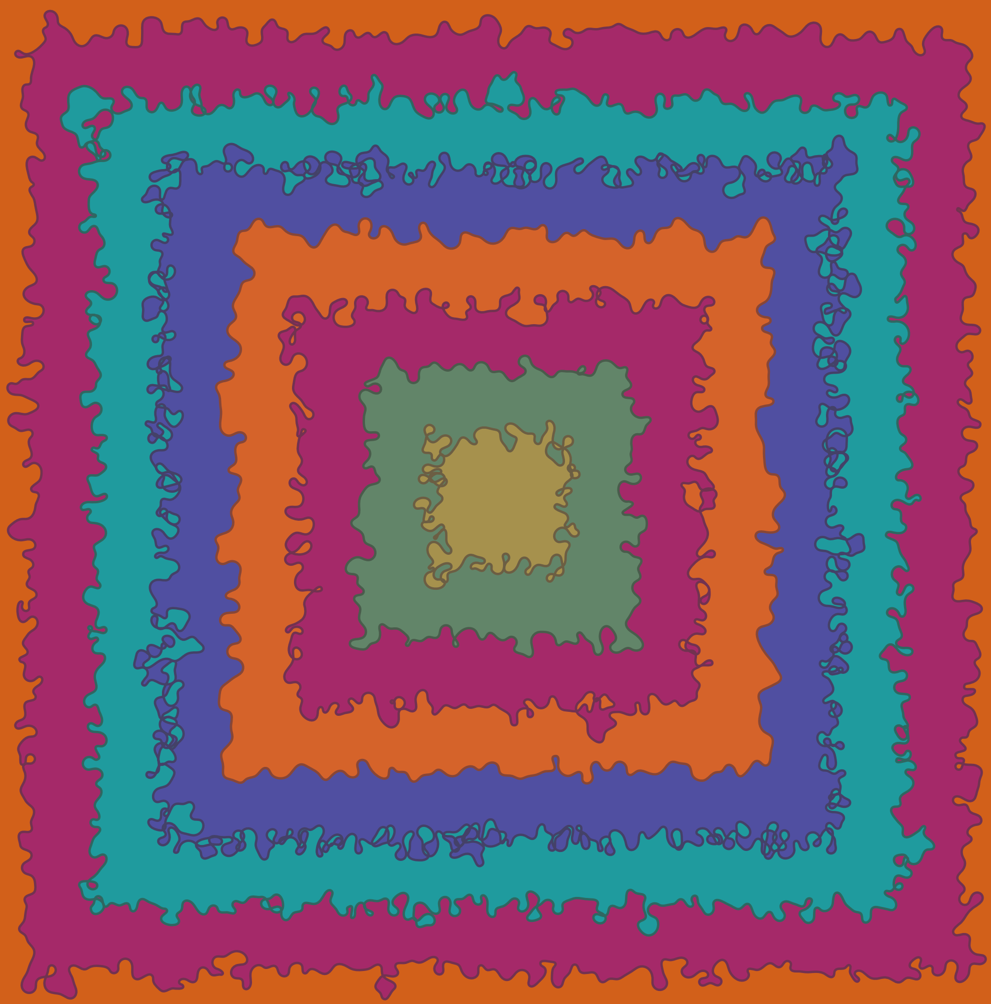
Wiskunde A / PGA

4 HAVO / docentmateriaal

Exponentiële verbanden

ConTeXt College



Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je begeleidt dan als docent de leerlingen die in kleine groepjes aan wiskundige problemen werken en op die manier een eigen theoretisch kader opstellen. Dit gebeurt voornamelijk op de wijze die wordt beschreven in het boek *Building Thinking Classrooms in Mathematics* van Peter Liljedahl. Dit boek is ook in het Nederlands beschikbaar. Het is verstandig om dit boek vooraf door te werken, maar je kunt ook beginnen met deze **beknopte handleiding**.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee de leerling kan nagaan of de stof wordt beheersd. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding staat in de marge naast de opgave.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die de leerling alleen hoeft te maken als er genoeg tijd voor is
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die een leerling alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk was

In de bijlage staat een “**Leerdoelentabel**” waarin staat aangegeven door welke opgave het specifieke leerdoel wordt afgedekt en op welk niveau dit gebeurt. Als je deze tabel aan de leerlingen uitreikt, kunnen ze hun eigen vorderingen bijhouden.
Opgaven uit de samenvattende paragraaf *Totaalbeeld* worden voorafgegaan door een T.

1

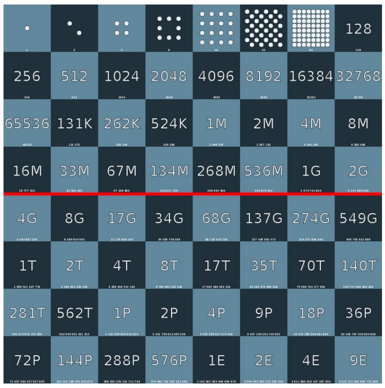
Exponentiële verbanden

1.1 Exponentiële groei 6
1.2 Rekenen met machten 12
1.3 Reële exponenten 18
1.4 Exponentiële functies 24
1.5 Logaritmische schalen 30
1.6 Totaalbeeld 37

1.1 Exponentiële groei

Inleiding

Groeiverschijnselen komen veel voor, denk aan het toenemen van geld dat je op de bank zet, het toenemen van de kosten als je meer km in de taxi zit, het groeien van de bevolking, enzovoorts. Soms is er sprake van toename met een vaste hoeveelheid per tijdseenheid, soms is er sprake van toename die afhankelijk is van de hoeveelheid zelf: hoe groter de hoeveelheid, hoe groter ook de toename per tijdseenheid. Bij exponentiële groei is de toename een vast percentage van de totale hoeveelheid.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei en afname, bijpassende formules opstellen;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- werken met functies en grafieken.

Voor de docent

Het onderwerp ‘Exponentiële verbanden’ begin je meestal met het begrip ‘groeifactor’, het getal waarmee de afhankelijk variabele elke (tijd)stap moet worden vermenigvuldigd. Zo ontstaan machten met een vast grondtal, de groeifactor. Hiermee hebben deze leerlingen als het goed is al in de onderbouw kennisgemaakt. Leerlingen gaan in groepjes van 2 of 3 leerlingen deze kennis weer ophalen. Mogelijke opdrachten staan hieronder, de laatste is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Bij de derde opdracht hoort een tabel, die kan vooraf worden gekopieerd, de tabel is als werkblad beschikbaar.

Opdracht 1.1

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Het aantal bacteriën is dan verdubbeld.
Neem aan dat je in een petrischaaltje begint met 6 bacteriën en dat dit aantal elk uur verdubbeld.

Hoeveel van die bacteriën heb je dan na 24 uur?

Op welk tijdstip zijn er meer dan 60000 bacteriën? Rond je antwoord af op twee decimalen.

Toelichting

Geef de opdrachten mondeling en in stappen. Laat de leerlingen de antwoorden zichtbaar opschrijven.

Hulpvragen zijn bijvoorbeeld “Hoeveel bacteriën zijn er na 1 uur? En na 2 uur? En na 3 uur?”, “Hoe schrijf je dit handig op?” (het muntje naar machten moet vallen), “Hoe schrijf je het rekenen met de variabele t op? Hoe maak je dus een formule?”, “Hoe maak je nu een grafiek?” en “Hoe kun je met die grafiek het tijdstip bepalen waarop je meer dan 60000 bacteriën hebt?”.

Laat de termen ‘groeifactor’ en ‘exponentiële groei’ vallen.

Uitwerking

Na 24 uur zijn er $6 \cdot 2^{24} = 100663296$ bacteriën.

Formule: $B = 6 \cdot 2^t$, grafiek met grafische rekenmachine laten maken.

Voer in: $y_1 = 6 \cdot 2^x$ en $y_2 = 60000$.
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 25$ en $0 \leq y \leq 75000$.

Je vindt: $t \approx 13{,}29$ uur.

Opdracht 1.2

Het aantal inwoners van Dorenstad groeit volgens de formule: $N = 67000 \cdot 1{,}024^t$.
Hierin is t de tijd in jaren en N het aantal inwoners van Dorenstad (afgerond op duizendtallen). $t = 0$ in het jaar 2016.

Met hoeveel procent per jaar groeit het aantal inwoners van Dorenstad volgens deze formule?
In welk jaar heeft Dorenstad meer dan 100000 inwoners als deze groei zo doorgaat?
Met hoeveel procent groeit het aantal inwoners van Dorenstad per 10 jaar?

Toelichting

Dit is vooral bedoeld om na te gaan of de leerlingen het principe van exponentiële groei nu echt in de gaten hebben, ook als de groeifactor geen geheel getal is. De laatste vraag kan op meerdere manieren worden beantwoord, maar het is nuttig om mondeling te sturen op het idee van het bepalen van de groeifactor per 10 jaar.

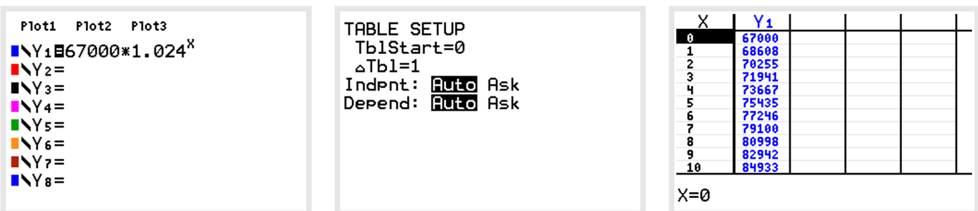
Introduceer mondeling het begrip ‘groeipercentage’.

Probeer ze zover te krijgen dat ze groeipercentages en groeifactoren naar elkaar kunnen omrekenen, dat ze dat straks gaan opnemen in hun theorieoverzicht.

Uitwerking

Er is sprake van exponentiële groei met een groeifactor van 1,024. Elk jaar wordt het inwoneraantal met 1,024 vermenigvuldigd, dus 100% is een jaar later 102,4%. Er komt jaarlijks 2,4% bij.

Als je deze formule invoert op de grafische rekenmachine heb je snel een tabel. Je kunt dan aflezen voor welke waarde van t je voor het eerst boven de 100000 zit. Je vindt $t = 17$. Het aantal inwoners zal dus in $2016 + 17 = 2033$ boven de 100000 komen.



Figuur 1.2

De groeifactor per 10 jaar is $1{,}024^{10} \approx 1{,}268$.
Per 10 jaar komt er dus 26,8% bij.

Opdracht 1.3

Een krant zag in een reeks van jaren het aantal jaarabonnementen dalen.

tijd (jaar)	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen (×1000)	970	941	913	885	859	833

Tabel 1.1

Stel op grond van deze tabel een zo goed mogelijk passende formule op die het verloop van het aantal duizenden abonnementen A als functie van de tijd t in jaren beschrijft. Neem $t = 0$ voor 2010. Als het aantal abonnementen onder de 500000 zakt, raakt de krant in de problemen.

In welk jaar is dat het geval als dit verloop niet wijzigt?

Toelichting

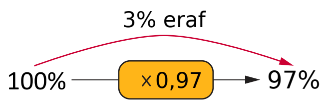
Deze opdracht is bedoeld om uit een gegeven tabel de groeifactor te kunnen halen. De tabel staat op dit **Werkblad**. Ook gaat het om het inzicht dat een groeifactor kleiner dan 1 kan zijn, dus om de begrippen ‘groei’ en ‘verval’ als twee aspecten van exponentiële groei.

Stel eventuele hulpvragen als: “Neemt het aantal abonnementen met een vast getal af?”, “Neemt het aantal abonnementen (ongeveer) met een vast percentage af?” en “Hoe bepaal je dit percentage? Of de groeifactor?”.

Probeer ze zover te krijgen dat de leerlingen een overzicht maken van hoe je bij een tabel kunt nagaan of er van een vaste groeifactor sprake is en hoe je die dan kunt vaststellen.

Uitwerking

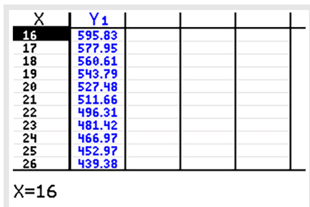
Je controleert eerst of je een exponentiële formule mag maken: de jaartallen nemen gelijkmatig toe. Deling van opeenvolgende aantallen abonnementen levert steeds (ongeveer) 0,97 op, dus de daling is een vorm van exponentiële groei.



Figuur 1.3

De groeifactor $g \approx 0,97 < 1$, dus er is sprake van exponentiële afname. Het aantal abonnementen neemt jaarlijks met 3% af.
Een passende formule is daarom: $A(t) = 970 \cdot 0,97^t$.

Maak een tabel van deze functie met de rekenmachine. Op $t = 21$ is de waarde van A ongeveer 512. En op $t = 22$ is de waarde van A ongeveer 496. Dus bij $t = 22$ komt het aantal abonnementen voor het eerst onder de 500000. De krant raakt in 2032 in de problemen.



X	Y1
16	595.83
17	577.95
18	560.61
19	543.79
20	527.48
21	511.66
22	496.31
23	481.42
24	466.97
25	452.97
26	439.38

X=16

Figuur 1.4

Opdracht 1.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht met betrekking tot exponentiële groei.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

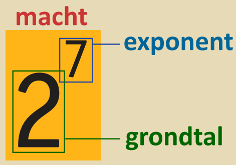
Bij exponentiële groei vermenigvuldig je per tijdseenheid een hoeveelheid steeds met hetzelfde getal. Dit getal g heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Voor g geldt: $g > 0$

Om uit een tabel vast te stellen of een hoeveelheid H exponentieel groeit, deel je opeenvolgende waarden van de hoeveelheid op elkaar (let op dat er steeds evenveel tijd verstreken is). Komt daar steeds hetzelfde uit, dan is er sprake van **exponentiële groei**. De hoeveelheid H groeit dan zo:

- Op $t = 0$ heb je de beginwaarde b.
- Op $t = 1$ heb je: $H = b \cdot g$
- Op $t = 2$ heb je: $H = b \cdot g \cdot g = b \cdot g^2$
- Op $t = 3$ heb je: $H = b \cdot g \cdot g \cdot g = b \cdot g^3$

Dus er geldt een formule van de vorm: $H = b \cdot g^t$

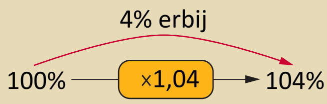
Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je t keer hetzelfde getal g, dan schrijf je dat als g^t. Dit is een **macht**, de groeifactor g heet het **grondtal**, t heet de **exponent**.



Figuur 1.5

Een voorbeeld van exponentiële groei is toename of afname met een vast percentage. Bij een groei met p procent hoort de groeifactor: $g = 1 + \frac{p}{100}$

Voor $p > 0$ neemt de hoeveelheid toe en is $g > 1$: **exponentiële toename**.
Voor $p < 0$ neemt de hoeveelheid af en is $g < 1$ (maar groter dan 0): **exponentiële afname**.



Figuur 1.6

Verwerken

★ **Opgave 1.1**

De oppervlakte die door een snelgroeiende waterplant wordt bedekt, neemt elke dag met 50% toe.

a Met welk getal moet je de oppervlakte vermenigvuldigen als je de oppervlakte wilt weten die de waterplant morgen zal bedekken?

b Neemt de oppervlakte van de waterplant in twee dagen met 100% toe? Of met een ander percentage? Licht je antwoord toe.

c Is hier sprake van exponentiële groei? Licht je antwoord toe.

★ **Opgave 1.2**

Iemand koopt aandelen ter waarde van € 4000,00. De aandelen nemen gedurende de eerste vier jaar elk jaar 11% in waarde toe.

a Bereken de waarde van de aandelen na één jaar en na twee jaar.

b Hoeveel bedraagt de groeifactor van de waarde van de aandelen?

c Hoe kun je met behulp van de waarde na twee jaar de waarde na drie jaar berekenen?

d De waarde na vier jaar is € 6072,28. Hoe kun je hieruit met behulp van de groeifactor de waarde na drie jaar berekenen?

e In het zesde jaar stijgt de waarde van de aandelen van € 6740,23 naar € 7279,45. Met hoeveel procent is de waarde van de aandelen in het zesde jaar toegenomen? Wat is nu de groeifactor?

★ **Opgave 1.3**

Elk jaar wordt op 1 januari het aantal herten in een natuurgebied geteld. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

a Stel een formule op voor de ‘groei’ van het aantal herten vanaf het jaar 2014.

b Bereken het aantal herten in het jaar 2024.

c Bereken het groeipercentage per tien jaar.

d In welk jaar is het aantal herten gehalveerd?

★ ★ **Opgave 1.4**

Een kapitaal van € 10415,00 wordt gedurende tien jaar belegd in aandelen. In de tabel zie je de groei van het kapitaal in de eerste zes jaar.

tijd (jaar)	1	2	3	4	5	6
kapitaal (euro)	10415	10850	11300	11760	12250	12760

Tabel 1.2

Onder rendement wordt hier verstaan de procentuele toename van het belegde kapitaal per jaar.

a Maak duidelijk dat het kapitaal in de eerste zes jaar bij benadering exponentieel toeneemt.

b Bereken voor deze periode het rendement (per jaar).

c Maak een tabel van een kapitaal van € 10000,00 dat tien jaar wordt belegd bij een rendement van 8% per jaar.

d Na hoeveel jaar is dit kapitaal verdubbeld?

e Iemand belegt een kapitaal van € 10000,00 gedurende tien jaar. Stel dat hij de eerste vijf jaar een rendement van 14% per jaar behaalt en de daarop volgende vijf jaar 4% per jaar. Bereken het kapitaal K na vijf jaar en na tien jaar.

f Laat met een berekening zien of het de belegger, in vergelijking met de vorige situatie, meer oplevert als het rendement de eerste vijf jaar 4% is en de volgende vijf jaar 14%.

★★ **Opgave 1.5**

Twee scholen hebben te maken met teruglopende leerlingenaantallen.

tijd (jaar teldatum 1 sept.)	2009	2010	2011	2012	2013
aantal leerlingen school 1	1050	998	948	900	855
aantal leerlingen school 2	1050	1000	960	890	850

Tabel 1.3

a Bij een van beide scholen neemt het leerlingenaantal jaarlijks met een vast percentage af. Bij welke school is dat en met welk percentage?

b Hoe groot is het groeipercentage in tien jaar?

c In deze situatie heeft het geen zin om naar kleinere tijdseenheden dan een jaar te kijken. Waarom niet?

Toepassen

★★ **Opgave 1.6: Sparen voor een scooter**

Bij de geboorte van Marijn heeft zijn vader bedacht dat hij op 16 jarige leeftijd wel een (elektrische) scooter zou willen rijden. Hij heeft een bedrag op een spaarrekening gezet dat elk jaar 4% rente geeft. Na 16 jaar is het bedrag € 2750,00 geworden.

a Hoe groot is de groeifactor in 16 jaar?

b Hoeveel heeft de vader van Marijn gestort?

★★★ **Opgave 1.7: Internetsparen**

Er zijn nogal wat verschillende internetspaarrekeningen. In deze opgave worden er twee vergeleken: een gewone spaarrekening en één met opnamekosten. Deze laatste geeft wel een iets hogere rente, maar als je het spaarsaldo opneemt, betaal je een percentage van het opgenomen bedrag aan opnamekosten. Als je bijvoorbeeld € 2500,00 van je rekening haalt en de bank rekent 1% opnamekosten, dan moet je € 25,00 aan opnamekosten betalen. Je krijgt dus maar € 2475,00 uitbetaald.

Je stort € 10000,00 op een gewone internetspaarrekening met een rentepercentage op jaarbasis van 1,85. Je stort ook € 10000,00 op een internetspaarrekening die 1% opnamekosten rekent, maar wel 2,65% rente op jaarbasis geeft. Na zes jaar neem je van beide rekeningen het totale spaarsaldo op.

a Bereken bij elk van beide internetspaarrekeningen het bedrag dat je uiteindelijk in handen krijgt.

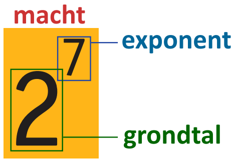
b Stel voor beide internetspaarrekeningen een bijbehorende formule op voor het totale bedrag B dat je na t jaar kunt opnemen.

c Bereken in maanden nauwkeurig op welke termijn de internetspaarrekening zonder opnamekosten het aantrekkelijkst is.

1.2 Rekenen met machten

Inleiding

In de formules voor exponentiële groei komen machten voor. Om er mee te kunnen werken moet je dus met machten kunnen rekenen. Waarschijnlijk heb je dat wel geleerd, maar hier worden de belangrijkste rekenregels voor machten nog even opnieuw uitgelegd.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- rekenen met machten;
- de rekenregels voor machten toepassen bij exponentiële groei.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met formules en grafieken.

Voor de docent

Ook met de rekenregels voor machten hebben deze leerlingen als het goed is al in de onderbouw kennisgemaakt. Leerlingen gaan in groepjes van 2 of 3 leerlingen deze kennis weer ophalen, gerelateerd aan exponentiële groei. Mogelijke opdrachten staan hieronder, de laatste is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Bij de tweede opdracht hoort een lijst met te herschrijven machten, die kan vooraf worden gekopieerd, het is als werkblad beschikbaar.

Opdracht 2.1

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Het aantal bacteriën is dan verdubbeld.
Neem aan dat je in een petrischaaltje begint met 6 bacteriën en dat dit aantal elk uur verdubbeld. Na 3 uur heb je dan $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$.

Leg uit dat dit betekent dat $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$.

Van welke rekenregel voor machten is dit een voorbeeld? Probeer met behulp van de groei van deze bacteriën van nog twee rekenregels voor machten een voorbeeld te laten zien.

Toelichting

Geef de opdrachten mondeling en in stappen. Laat de leerlingen de antwoorden zichtbaar opschrijven.

Hulpvragen zijn bijvoorbeeld “Hoeveel uur later ben je 4 uur na 3 uur?”, “Hoe schrijf je dit als algemene regel op?”, “En waarom geldt deze regel in het algemeen?” (misschien alleen voor de leerlingen die dit allemaal moeiteloos doen), “Wat gebeurt er als je terug gaat in de tijd? Bijvoorbeeld 4 uur eerder dan 7 uur?” en “Wat gebeurt er als je in stapjes van 3 uur vooruit gaat? Om welke rekenregel gaat het dan?”.

Uitwerking

Na 3 uur heb je $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$. Dit is het aantal bacteriën na 7 uur, dus $6 \cdot 2^7$. Conclusie: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Als je machten van 2 vermenigvuldigt, tel je de exponenten op.

Na 7 uur heb je $6 \cdot 2^7$ en 4 uur eerder $6 \cdot 2^{7-4}$ (namelijk het moment dat $t = 3$). Dit is het aantal bacteriën na 3 uur, dus $6 \cdot 2^3$. Conclusie: $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$. Als je machten van 2 deelt, trek je de exponenten af.

De groeifactor per uur is 2. Per drie uur is die groeifactor $2^3 = 8$. Het aantal bacteriën na 12 uur kun je op twee manieren berekenen: $6 \cdot 2^{12}$ of $6 \cdot 8^4$. Dus moet $\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$. Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

Opdracht 2.2

Rekenregels voor machten zijn van belang omdat rekenmachines machten met grote exponenten niet kunnen berekenen, maar alleen benaderen. Zelfs 2^{100} lukt al niet.

Schrijf als één macht en bereken het exacte antwoord als dat kan:

1. $\left(2^{30}\right)^4 \cdot 2^{100}$
2. $\frac{3^{160}}{3 \cdot 3^{155}}$
3. $2^{100} + 7 \cdot 2^{100}$
4. $\left(2^{30}\right)^4 \cdot 2^{100}$
5. $\frac{4^{100} \cdot 8^{200}}{16^{199}}$
6. $\frac{g^{10} \cdot g^{20}}{g^{28}}$
7. $g^{10} \cdot \left(g^4\right)^5$

Toelichting

Dit is vooral bedoeld om na te gaan of de leerlingen de rekenregels voor machten begrijpen. Wijs ze daarom steeds op die rekenregels. Deze opdracht staat ook op een **Werkblad**.

Bij de derde opdracht moeten er wellicht hulpvragen als “Hoeveel keer 2^{100} is dit samen?” en/of “Is 8 ook een macht van 2?”.

Bij de vijfde opdracht moet er wellicht een hulpvraag als “Welk grondtal past bij zowel 4, als 8, als 16?”.

De zesde en de zevende opdracht zijn bedoeld om de leerlingen op het spoor van de rekenregels formuleren te zetten.

Uitwerking

1. $\left(2^{30}\right)^4 \cdot 2^{100} = 2^{120} \cdot 2^{100} = 2^{220}$
2. $\frac{3^{160}}{3 \cdot 3^{155}} = \frac{3^{160}}{3^{156}} = 3^4 = 81$
3. $2^{100} + 7 \cdot 2^{100} = 1 \cdot 2^{100} + 7 \cdot 2^{100} = 8 \cdot 2^{100} = 2^3 \cdot 2^{100} = 2^{103}$
4. $0{,}9^{400} \cdot \left(0{,}9^{20}\right)^{30} = 0{,}9^{400} \cdot 0{,}9^{600} = 0{,}9^{1000}$
5. $\frac{4^{100} \cdot 8^{200}}{16^{199}} = \frac{\left(2^2\right)^{100} \cdot \left(2^3\right)^{200}}{\left(2^4\right)^{199}} = \frac{2^{200} \cdot 2^{600}}{2^{796}} = \frac{2^{800}}{2^{796}} = 2^4 = 16$

Opdracht 2.3

Een spaartegoed staat uit tegen 0,5% rente per maand. De bank wil de rente per half jaar bijschrijven of zelfs jaarlijks. Met welke rentepercentages moeten ze dan werken? Geef beide percentages in twee decimalen nauwkeurig.

Toelichting

Deze opdracht is bedoeld om met groeifactoren en groeipercentages te rekenen.

Stel eventuele hulpvragen als: "Welke groeifactor hoort bij het gegeven rentepercentage?", "Hoe kom je nu aan de groeifactor per zes maanden?" en "Hoe bepaal je het bijbehorende percentage?". Eventueel voor het renteprecentage per jaar aangepaste versies van die vragen stellen.

Uitwerking

De groeifactor van het spaartegoed per maand is 1,005.

De groeifactor per half jaar is dan: $1{,}005^6 \approx 1{,}0304$. Het rentepercentage per half jaar is dus 3,04. Dat is iets meer dan $6 \cdot 0{,}5 = 3\%$.

Op dezelfde manier is de groeifactor per jaar $\left(1{,}005^6\right)^2$ of $1{,}005^{12}$ en dat is ongeveer 1,0617. Het rentepercentage per jaar is dus 6,17.

Opdracht 2.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht met betrekking tot de rekenregels voor machten, toegepast op exponentiële groei.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

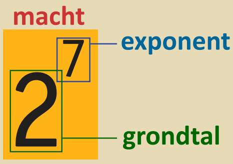
Om te onthouden

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je t keer hetzelfde getal g, dan schrijf je dat als g^t. Dit is een **macht**, de groeifactor g heet het **grondtal**, t heet de **exponent**, waarbij t (voorlopig) een positief geheel getal is.

Voor $t = 0$ is de afspraak: $g^0 = 1$.

In het algemeen gelden voor een willekeurig grondtal g en willekeurige positieve gehele n en m de volgende **rekenregels**:

- $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$
- $\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$
- $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$



Figuur 2.2

Verwerken

★ **Opgave 2.1**

In een ondiep meer van 1000 km^2 begint riet te groeien. Op 1 januari 2005 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 1 km^2. Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. In 2010 constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar twee keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

a Hoeveel is de groeifactor per jaar?

b Maak een tabel voor de met riet bedekte oppervlakte voor de eerste vijf jaar.

c Hoe groot is de groeifactor per tien jaar?

d Na hoeveel jaar is het hele meer begroeid met riet?

★ **Opgave 2.2**

Schrijf als één macht.

a $7^2 \cdot 7^3 \cdot 7^1$

b $\frac{5^{312}}{5^{309}}$

c $3^{69} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{60}$

d $\frac{x^{12} \cdot x^{15}}{\left(x^6\right)^3}$

★ **Opgave 2.3**

De concentratie van een bepaalde vervuilende stof in het water neemt langzaam af met een vast percentage van 13 per uur. Op $t = 0$ is de concentratie 150 mg per liter.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur? Stel een formule op voor de concentratie C als functie van de tijd t in uren.

b Na hoeveel uur is de concentratie gehalveerd?

c Met hoeveel procent neemt de concentratie per dag af?

★ ★ **Opgave 2.4**

Bereken.

a $3^{110} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{109}$

b $\left(\frac{3}{4}\right)^{235} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{236}$

★ ★ **Opgave 2.5**

Bereken:

$\frac{4^{180} \cdot 2^{60}}{8^{112} \cdot 4^{42}}$

Toepassen

★ ★ ★

Opgave 2.6: Getallenpuzzel

Wat zijn de laatste vier cijfers van 5^{2017}?

Practicum

Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **het rekenen met machten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.3 Reële exponenten

Inleiding

Tot nu toe kun je bij exponentiële groei eigenlijk alleen wat zeggen op tijdstippen die gehele positieve waarden hebben. En dat is natuurlijk niet wenselijk, je wilt weten hoeveel bacteriën er zijn na 1,5 uur, of 2,3 uur voor het begintijdstip.
Je gaat nu kijken hoe het met decimale en/of negatieve exponenten zit.
In het algemeen zul je leren werken met alle mogelijke reële exponenten.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken en/of negatieve exponenten;
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten;
- werken met functies en grafieken.

Voor de docent

Nu gaat het erom te leren werken met negatieve en decimale (gebroken) getallen voor de tijdstippen waarop sprake is van exponentiële groei. Het omrekenen van groeifactoren naar andere (tijds)eenheden is een belangrijke vaardigheid voor deze leerlingen. Mogelijke opdrachten staan hieronder, de laatste is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Bij de derde opdracht hoort een tabel, die is als werkblad beschikbaar.

Opdracht 3.1

Stel dat de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B(t) = 12 \cdot 2^t$, met $t = 0$ is 12:00 uur. Je mag voor t alle getallen invullen, ook negatieve getallen en breuken.

Hoeveel bacteriën zullen er geweest zijn om 11:00 uur? En om 10:00 uur? En om 14:15 uur?

Bepaal de groeifactor per dag en de groeifactor per half uur en per kwartier.

Toelichting

Geef de opdrachten mondeling en in stappen. Laat de leerlingen de antwoorden zichtbaar opschrijven.

Probeer ze te richten op het gebruik van de juiste waarden van t in de formule, naast het idee dat je terug in de tijd gaat door te delen door de groeifactor. Rekenregels als $g^{-t} = \frac{1}{g^t}$ en $g^{\frac{1}{t}} = \sqrt[t]{g}$ zijn niet nodig voor havo wiskunde A. Hulpvragen zijn bijvoorbeeld “Wat doe je met de groeifactor als je terug gaat in de tijd?”, “Welke waarden voor t horen daar bij?”, “Komen de uitkomsten bij het invullen van de juiste t-waarden in de formule overeen met wat je met de groeifactor moet doen?”, "Wat gebeurt er als je niet met hele uren werkt? Welke t-waarden horen daar bij?" en "Kun je voor t alle getallen invullen?".

Uitwerking

Elk uur verdubbelt de hoeveelheid bacteriën. Als je aanneemt dat dit voor 12:00 uur ook het geval was, dan zullen er om 11:00 uur $\frac{12}{2} = 6$ bacteriën in het schaaltje hebben gezeten.

De hoeveelheid bacteriën op $t = -1$ moet dus 6 zijn. Ga met behulp van de rekenmachine na dat dit overeenkomt met $12 \cdot 2^{-1}$.

Om 10:00 uur is $t = -2$ en het aantal bacteriën $\frac{6}{2} = 3$. Ga na dat $12 \cdot 2^{-2} = 3$

De hoeveelheid bacteriën om 14:15 uur kun je berekenen door met decimale exponenten te werken. Om 14:15 uur geldt $t = 2{,}25$. Het aantal bacteriën is op dat moment:

$B = 12 \cdot 2^{2{,}25} \approx 57{,}08 \approx 57$

Zo krijgen ook decimale exponenten betekenis.

De groeifactor per uur van de hoeveelheid bacteriën is 2.
De groeifactor per dag is $2^{24} = 16777216$.

De groeifactor per half uur is $2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}41$.

De groeifactor per kwartier ($0{,}25 = \frac{1}{4}$) is $2^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}19$.

Zo hebben ook gebroken exponenten betekenis.

Opdracht 3.2

Een spaartegoed staat uit tegen 5% rente per jaar. De bank kan de rente per half jaar bijschrijven of zelfs maandelijks.

Met welke rentepercentages moeten ze dan werken? Geef beide percentages in twee decimalen nauwkeurig.

Toelichting

Dit is vooral bedoeld om na te gaan of de leerlingen kunnen werken met breuken en decimale getallen in exponentiële functies en groeifactoren kunnen omrekenen naar kleinere tijdseenheden.

Stel eventuele hulpvragen als: "Welke groeifactor hoort bij het gegeven rentepercentage? En welke tijdseenheid hoort daar bij", "Welke tijdseenheid hoort er dan bij een half jaar?" en "Welke tijdseenheid hoort er bij 1 maand?".

Uitwerking

De groeifactor van het spaartegoed per jaar is 1,05. Noem de groeifactor per half jaar g: de groeifactor per half jaar $g = 1{,}05^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}0247$.

Het rentepercentage per half jaar is dus 2,47.

Op dezelfde manier is de groeifactor per maand $1{,}05^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}0041$. Het rentepercentage per maand is dus 0,41.

Opdracht 3.3

Thomas Robert Malthus leefde in het begin van de 19e eeuw. Hij dacht dat de groei van de wereldbevolking exponentieel zou kunnen zijn. In de tabel zie je het aantal mensen op aarde in de 19e eeuw.

tijd (jaar)	1800	1820	1840	1860	1880	1900
aantal mensen (mln)	1000	1102	1216	1340	1477	1629

Tabel 3.1

Stel een model op voor de bevolkingsgroei per jaar, vanaf 1800, in de vorm van een passende formule. Maak er een grafiek bij en bereken hoeveel mensen er in 1600 en in 2000 volgens dit model geweest kunnen zijn.

Toelichting

Deze opdracht gaat om het bepalen van de groeifactor vanuit een tabel die op dit **Werkblad** staat. Het omrekenen van de groeifactor per 20 jaar naar de groeifactor per jaar zal wellicht enige ondersteuning vergen.

Stel eventuele hulpvragen als: “Welke groeifactor hoort bij deze tabel? En welke tijdseenheid hoort daar bij?”, “Hoe kom je nu aan de groeifactor per jaar?” en “Hoe stel je daarmee de formule op?”. Het lijkt interessant om dat te leggen naast werkelijke gegevens als ongeveer 6 mld mensen in 2000 en/of de huidige cijfers.

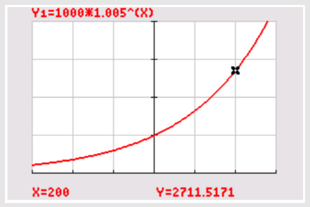
Uitwerking

Om een formule op te stellen, moet je de groeifactor berekenen. Van 1800 tot 1820 wordt het aantal mensen vermenigvuldigd met: $\frac{1102}{1000} = 1{,}102$. Controleer dat dit voor elke volgende periode van twintig jaar ook ongeveer zo is. Vanaf 1800 tot 1900 groeide de wereldbevolking met een vrijwel constante groeifactor per twintig jaar van 1,102. De groeifactor per jaar is dan: $1{,}102^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}005$

Neem je de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1800 en het aantal miljoenen mensen N, dan is: $N = 1000 \cdot 1{,}005^t$.

In 1600 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{-200} \approx 369$ miljoen mensen zijn geweest. In 2000 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{200} \approx 2712$ miljoen mensen zijn geweest.

In werkelijkheid waren dat er nog veel meer, namelijk meer dan 6000 miljoen.



Figuur 3.2

Opdracht 3.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht met betrekking tot het werken met negatieve en gebroken of decimale getallen bij de tijdstippen waarin sprake is van exponentiële groei. Ook het omrekenen van groeifactoren naar andere tijdseenheden is van belang.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

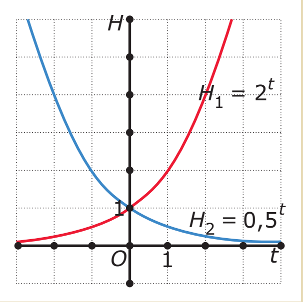
Om te onthouden

Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Altijd is $g > 0$.

De algemene formule voor **exponentiële groei** is: $H = b \cdot g^t$
Hierin is H de hoeveelheid en t de tijd.

In feite mag t alle reële waarden aannemen, ook breuken en/of negatieve getallen. En daarom zijn bij exponentiële groei de grafieken vloeiende kromme lijnen.

Ook kun je nu de groeifactor g per tijdseenheid omrekenen naar de groeifactor per (bijvoorbeeld) een halve tijdseenheid of een $\frac{1}{n}$-de tijdseenheid.



Figuur 3.3

- De groeifactor per $\frac{1}{2}$ tijdseenheid is: $g^{\frac{1}{2}}$
- De groeifactor per $\frac{1}{n}$ tijdseenheid is: $g^{\frac{1}{n}}$

Verwerken

★ **Opgave 3.1**

Bereken de gevraagde percentages in één decimaal nauwkeurig.

a Een hoeveelheid groeit met 36% per jaar. Bereken het groeipercentage per maand.

b Een hoeveelheid neemt met 14% per week af. Bereken het percentage dat de hoeveelheid per dag afneemt.

★ **Opgave 3.2**

Bereken de gevraagde percentages in één decimaal nauwkeurig.

a Een hoeveelheid is in twee jaar verviervoudigd. Bereken het groeipercentage per maand.

b Van een hoeveelheid is na drie weken nog maar een derde deel over.
Bereken het percentage waarmee de hoeveelheid per dag afneemt.

★ **Opgave 3.3**

Om 9:00 uur waren er 500 bacteriën. Dit aantal groeit exponentieel. Je ziet een tabel met het aantal bacteriën op bepaalde tijdstippen.

tijd	9:00	12:00	15:00	18:00
bacteriën	500	1500	4500	13500

Tabel 3.2

a Bereken in drie decimalen nauwkeurig de groeifactor per uur.

b Stel de formule op van de hoeveelheid bacteriën N na t uur met $t = 0$ om 9:00 uur.

c Hoeveel bacteriën waren er om 6:00 uur?

d Hoe laat waren er 250 bacteriën? Gebruik de formule die je bij b hebt gevonden.

★ **Opgave 3.4**

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1{,}1^t$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (jaar) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

a Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 januari 2025?

b Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 augustus 2025?

c Hoe groot is de groeifactor per jaar?

d Wat is het groeipercentage per maand?

e Bereken het aantal inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

★ ★ **Opgave 3.5**

Op 1 januari 2012 had iemand een kapitaal van € 7969,24 op zijn spaarrekening staan. Het kapitaal heeft jaren vastgestaan tegen een rente van 6%. De rente werd elk jaar bijgeschreven.

a Bereken de grootte van het kapitaal op 1 januari 2011, 1 januari 2010 en 1 januari 2009.

b In welk jaar had het kapitaal een grootte van € 5618,00?

c De spaarder heeft waarschijnlijk een bedrag in duizenden ingelegd toen hij begon met sparen. Wanneer is de spaarder begonnen met sparen en met welk bedrag?

★ ★ **Opgave 3.6**

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel. In drie uur tijd is het aantal gegroeid van 1200 (om 10:00 uur) naar 3000.

a Hoe groot is de groeifactor per drie uur?

b Bereken het groeipercentage per uur.

c Welke formule kun je opstellen voor de groei van deze kolonie als H de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren voorstelt? Neem $t = 0$ op het moment dat er 1200 bacteriën zijn.
Rond de groeifactor af op drie decimalen.

d Op welk moment waren er nog 600 bacteriën? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Toepassen

★ ★ ★ **Opgave 3.7: Wereldbevolking**

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in 1500 jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs 1,2 miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot 2,4 miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking 4,8 miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

a In de tekst is sprake van verschillende perioden. Bereken voor die perioden waarin de wereldbevolking zich heeft verdubbeld het groeipercentage per jaar in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken ook voor de andere perioden het groeipercentage per jaar in twee decimalen nauwkeurig.

★ ★ **Opgave 3.8: Radioactiviteit**

De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie. Doordat de fall-out op het gras komt, krijgt het hooi een te hoog jodium-131 gehalte. Melk van koeien die met dit hooi gevoerd worden is niet meer voor consumptie geschikt. Na een ongeluk in een kerncentrale bevat hooi in de omtrek van de centrale zes keer het toegestane gehalte jodium-131. De halveringstijd van jodium-131 is acht dagen. Hoeveel dagen moet het hooi bewaard blijven voordat het weer aan koeien gevoerd kan worden?

1.4 Exponentiële functies

Inleiding

Bij exponentiële groei horen formules van de vorm $y = b \cdot g^x$. Je gaat nu deze exponentiële functies nader bestuderen. De groeifactor (het grondtal) is steeds positief.

Je leert in dit onderwerp

- wat een exponentiële functie is en de karakteristieken ervan bepalen;
- een exponentiële functie opstellen vanuit twee gegeven punten;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met formules en grafieken.

Voor de docent

Nu gaat het erom vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële verbanden te leren oplossen. En ook om een formule te kunnen opstellen bij een exponentieel verband met twee gegeven punten. Mogelijke opdrachten staan hieronder, de laatste is bedoeld om de leerlingen zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Omdat bij de derde opdracht grafieken zullen worden getekend is het beschikbaar hebben van voldoende roosterpapier erg nuttig. Of er moet een rooster zitten op de borden waaraan de leerlingen werken.

Opdracht 4.1

In het water van een meer is verontreiniging ontdekt. Er wordt op een bepaald moment 40 mg/L (milligram per liter) van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Gelukkig wordt deze stof op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan worden gemeten met een nauwkeurigheid van gehele mg/L. Het blijkt dat de concentratie exponentieel vervalt met 20% per dag.

Na hoeveel dagen is de concentratie van deze stof in het meer minder dan 1 mg/L? Is deze stof ooit geheel verdwenen uit dit meer?

Toelichting

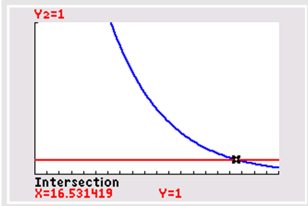
Nu gaan de leerlingen kennismaken met exponentiële functies en hun karakteristieken, met name het asymptotisch gedrag. Ook gaan ze vergelijkingen en ongelijkheden oplossen. Voor havo wiskunde A gebeurt dat met de grafische rekenmachine. Er moet dan aandacht zijn voor de handige instellingen van het venster.

Hulpvragen zijn bijvoorbeeld "Welke groeifactor per dag geldt voor de concentratie van deze stof?", "Welke formule dus opstellen?", "Hoe ziet de bijbehorende grafiek er uit? Welke vensterinstellingen zijn handig?", "Wat gebeurt er als je hele grote t-waarden invoert?", "Over welke ongelijkheid gaat deze opdracht?" en "Hoe los je ook alweer een ongelijkheid op met de GR?".

Uitwerking

De ‘groeifactor’ per dag is 0,80. Op $t = 0$ is er 40 mg/L gemeten. Voor de concentratie C (mg/L) geldt dus: $C = 40 \cdot 0{,}80^t$.

Omdat de groeifactor tussen 0 en 1 ligt, is dit een dalende exponentiële grafiek. Echter, zo'n exponentiële formule komt nooit op 0 uit, hoe groot je t ook kiest. Is de stof dan nooit verdwenen? Theoretisch inderdaad niet, maar in de praktijk is de stof niet meer meetbaar als de concentratie onder de 1 mg/L zakt (dat volgt uit de nauwkeurigheid van meten). Om te bepalen na hoeveel dagen de concentratie van deze stof minder dan 1 mg/L is, moet je de ongelijkheid $40 \cdot 0{,}80^t < 1$ oplossen.



Figuur 4.1

Dat doe je met de grafische rekenmachine. Je vindt: $t > 16{,}5$.

Opdracht 4.2

In een stedelijk gebied liggen twee middelgrote steden: A met 750000 inwoners en B met 620000 inwoners op 1 januari 2013. In A groeide het aantal inwoners de laatste jaren gemiddeld met 2,5% per jaar, in B was dat 3,1%.

Na hoeveel jaren is B groter dan A als deze ontwikkeling zo doorgaat?

Toelichting

Nu worden twee exponentiële verbanden vergeleken. Belangrijk is dat de leerlingen in de gaten hebben dat een grotere groeifactor ook een grotere groeisnelheid betekent.

Stel eventuele hulpvragen als: “Welke plaats groeit het hardst? En waarom?”, “Welke formules horen bij deze situatie? En hoe krijg je die formules goed in beeld op je GR?” en “Hoe los je nu de bijbehorende ongelijkheid op?”.

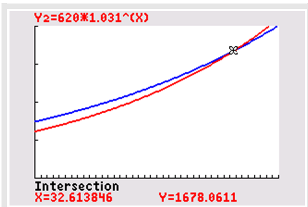
Uitwerking

Dat B harder groeit dan A is duidelijk. Als A het aantal inwoners van A voorstelt en B dat van B, dan geldt: de groeifactor van A is 1,025, die van B is 1,031. Neem A en B in duizendtallen, en t de tijd in jaren vanaf 1 januari 2013, dan zijn de groeifuncties:

- $A = 750 \cdot 1{,}025^t$
- $B = 620 \cdot 1{,}031^t$

De bijbehorende grafieken maak je op de grafische rekenmachine en je bepaalt het snijpunt. Ga na dat je $t = 32{,}6138...$ vindt.

Conclusie: 33 jaar na 1 januari 2013 is B groter als je ervan uitgaat dat er steeds op 1 januari wordt geteld.



Figuur 4.2

Opdracht 4.3

Een exponentiële functie heeft de vorm $y = b \cdot g^x$.

Stel telkens een formule op bij het exponentiële verband met de grafiek door de twee gegeven punten. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a. (0,5) en (1,10)
b. (0,5) en (1; 7,5)
c. (1,5) en (2,10)
d. (1,5) en (2; 7,5)
e. (0,5) en (2,10)
f. (1,5) en (3,10)
g. (0,5) en (1; 2,5)
h. (1,5) en (2; 2,5)
i. (0,5) en (2; 2,5)
j. (1,5) en (3; 2,5)

k. (-2,5) en (0,20)
l. (-2,5) en (4,20)
m. (-2,6) en (4,20)
n. (-2,6) en (4,2)

Toelichting

Leg uit dat de leerlingen steeds een formule moeten opstellen vanuit twee gegeven punten. Die setjes punten komen ze bij je halen en schrijven ze steeds bovenaan hun bord. Daaronder stellen ze de formule op. Als dit is gedaan kunnen ze een nieuw setje punten komen halen om weer bovenaan op hun bord te zetten. Als dit al meteen heel snel gaat, kun je wellicht enkele setjes overslaan.

Leerlingen die hier al vanaf het begin moeite mee hebben vragenderwijs terugverwijzen naar de twee belangrijke constanten in een exponentieel verband: b is het begingetal (bij $x = 0$) en g is de groeifactor per stap. Met name als de groeifactor over meerdere stappen bekend is, moet het muntje vallen naar het berekenen van de groeifactor per stap.

Mogelijke hulpvragen: “Hoe bepaal je de groeifactor?” of “Hoeveel groeit de y-waarde per 2 stappen? En hoe bepaal je daarmee de groeifactor per stap?” en dit verder veralgemenen. Daarnaast moet het begingetal worden berekend als het niet is gegeven. Ook daar zijn vermoedelijk hulpvragen voor nodig.

Probeer de leerlingen zover te krijgen dat ze beschrijven hoe je de formule opstelt van een exponentieel verband waarvan twee punten van de grafiek gegeven zijn.

Uitwerking

a. $y = 5 \cdot 2^x$
b. $y = 5 \cdot 1{,}5^x$
c. $y = 2{,}5 \cdot 2^x$
d. $y \approx 3{,}33 \cdot 1{,}5^x$
e. $y \approx 5 \cdot 1{,}41^x$
f. $y \approx 3{,}54 \cdot 1{,}41^x$
g. $y = 5 \cdot 0{,}5^x$
h. $y = 10 \cdot 0{,}5^x$
i. $y \approx 5 \cdot 0{,}71^x$
j. $y \approx 7{,}07 \cdot 0{,}71^x$
k. $y = 20 \cdot 2^x$
l. $y \approx 7{,}94 \cdot 1{,}26^x$
m. $y \approx 8{,}96 \cdot 1{,}22^x$
n. $y \approx 4{,}21 \cdot 0{,}83^x$

Opdracht 4.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht met betrekking tot opstellen van een formule voor exponentiële groei bij twee (of meer) gegeven punten en hoe je vergelijkingen en ongelijkheden oplost met exponentiële verbanden.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

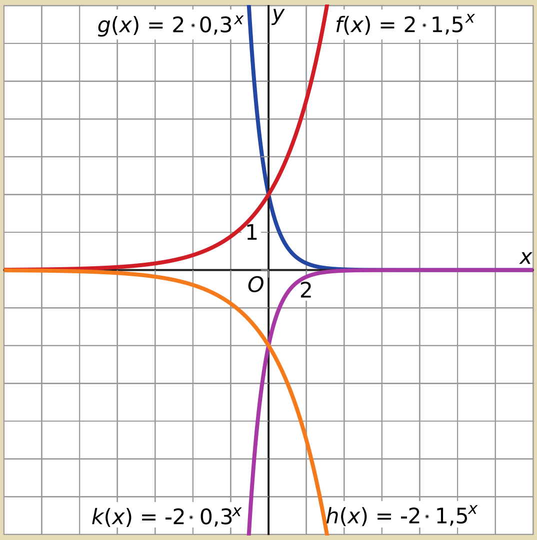
Theorie

Om te onthouden

Bekijk de applet: Exponentiële functies

De grafiek van het **exponentiële verband** $y = b \cdot g^x$ heeft de volgende karakteristieken:

- De grafiek snijdt de y-as in het punt $(0,b)$.
- Als $b > 0$ en $g > 1$, is de grafiek stijgend. Naar links (voor afnemende x) nadert de grafiek de x-as. Je kunt de functiewaarde zo dicht bij 0 krijgen als je wilt door x voldoende klein te nemen.
- Als $b > 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek dalend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek x-as.
- Als $b < 0$ en $0 < g < 1$ is de grafiek stijgend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek x-as.
- Als $b < 0$ en $g > 1$, is de grafiek dalend. Naar links (voor afnemende x) nadert de grafiek de x-as.
- Als $g = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = b$.



Figuur 4.3

Verwerken

★ **Opgave 4.1**

In 2000 heeft iemand € 10000,00 op een spaarrekening gezet. De rente was toen 5% per jaar en werd bijgeschreven op de spaarrekening.

a Stel een bijpassende formule op voor het saldo S met t in jaren na het moment waarop het startbedrag op de spaarrekening is geplaatst. Schrijf op bij welke vensterinstellingen de grafiek goed in beeld komt.

b Hoelang duurt het voor het spaartegoed is gegroeid tot € 15000,00?

c Hoelang duurt het voor het spaartegoed zich verdubbeld heeft?

★ **Opgave 4.2**

Een saldo van € 4000,00 kan ontstaan zijn doordat ooit iemand € 1,00 op een spaarrekening zette tegen 5% rente.

a Wanneer moet die € 1,00 dan op de spaarrekening gezet zijn? Geef je antwoord in één jaar nauwkeurig.

b Kun je dit antwoord ook vinden door een geschikte grafiek van $S = 4000 \cdot 1{,}05^t$ te tekenen?

c Stel je voor dat je de grafiek van S steeds verder naar links door trekt. Zal de grafiek ooit de horizontale as snijden? Licht je antwoord toe. Wat betekent dit voor de grafiek van S?

★ **Opgave 4.3**

De smartphone is niet meer weg te denken. Eind 2001 waren er in Nederland ongeveer 12 miljoen aansluitingen op het mobiele netwerk. Eind 2009 waren het er al 20 miljoen. In deze periode was er sprake van exponentiële groei.
Bereken met welk percentage het aantal mobiele aansluitingen jaarlijks toenam.

★ ★ **Opgave 4.4**

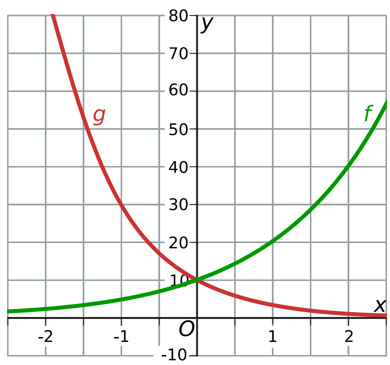
Een huurder betaalt een huur van € 650,00 en vindt de jaarlijkse huurverhoging van 5,5% te veel. Hij herinnert zich nog dat exponentiële groei veel harder gaat dan lineaire groei. Hij stelt zijn verhuurder daarom voor om de huur elk jaar met € 50 te verhogen.

Na hoeveel jaar gaat dit de huurder voordeel opleveren?

★ ★ ★ **Opgave 4.5**

Bekijk deze grafieken van twee exponentiële functies.

Geef van beide functies het functievoorschrift.



Figuur 4.4

Toepassen

★★ Opgave 4.6: Centenarians

In Engeland wordt iemand die de leeftijd van 100 jaar bereikt, aangeduid met de titel 'centenarian'. Vanaf 1967 begon het totale aantal centenarians bij benadering exponentieel te groeien. Waren er op 1 januari 1967 zo'n 1000 centenarians, op 1 januari 2009 was dit aantal gestegen tot 9600.

a Bereken het groeipercentage per jaar in deze periode.

De groei van het aantal centenarians komt voornamelijk voor rekening van vrouwen. Op 1 januari 2009 was $\frac{7}{8}$ deel van de 9600 centenarians vrouwelijk. Voor de toekomst gaat men in Engeland uit van de volgende aannames:

- Het aantal centenarians stijgt vanaf 1 januari 2009 met 8,0% per jaar.
- Het aantal vrouwelijke centenarians blijft in de toekomst $\frac{7}{8}$ deel van het totaal.

b Bereken het te verwachten aantal vrouwelijke centenarians op 1 januari 2034 in Engeland.

c Vanaf welk jaar zullen er in Engeland meer dan 100000 centenarians zijn?

(naar: pilotexamen wiskunde A in 2013, eerste tijdvak)

★★ Opgave 4.7: Radioactief afval

Op een afgelegen terrein wordt op 6 januari 2017 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval er al tien jaar heeft gelegen. De straling blijkt 2000 Bq (becquerel) te zijn. Vier maanden later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt nu ongeveer 1630 Bq te zijn. De straling neemt exponentieel af.

a Bepaal hoeveel Bq de straling een jaar geleden was. En hoe groot is de straling over 2,5 jaar?

b Stel een formule op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 6 januari 2017.

c Vanaf welke datum is de straling minder dan 1000 Bq?

1.5 Logaritmische schalen

Inleiding

Exponentiële groei is vaak ook nogal een explosieve groei. Je hebt al snel te maken met veel grotere getallen dan waarmee je begon, of (bij een groeifactor tussen 0 en 1) met heel kleine positieve getallen. Dat is lastig bij het maken van grafieken waaruit je met enige nauwkeurigheid wilt kunnen aflezen. Het lukt bijna niet om in één grafiek zowel de (kleine) beginwaarden als de (hele grote) waarden na verloop van tijd te laten zien.
Er is echter speciaal grafiekenpapier bedacht om dit probleem op te lossen. Het is zo gemaakt, dat de grafiek van een exponentiële formule er op dit papier als een rechte lijn uitziet.

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische schalen te werken;
- logaritmisch grafiekenpapier te gebruiken;
- het voorschrift van exponentiële formules op te stellen vanaf enkellogaritmisch papier.

Voorkennis

- werken met exponentiële formules;
- werken met logaritmen.

Voor de docent

Leren werken met (enkel)logaritmisch grafiekenpapier is nu aan de orde. Er wordt in dit onderdeel ook ingegaan op het begrip logaritme in verband met logaritmische schaalverdelingen. Dat zal wellicht voor sommige leerlingen wat hoog gegrepen zijn en is voor havo wiskunde A ook niet strikt nodig. Ga daar met beleid mee om. Verder gaat het opnieuw om het opstellen van een formule bij een exponentieel verband met twee gegeven punten. Mogelijke opdrachten staan hieronder, de laatste is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

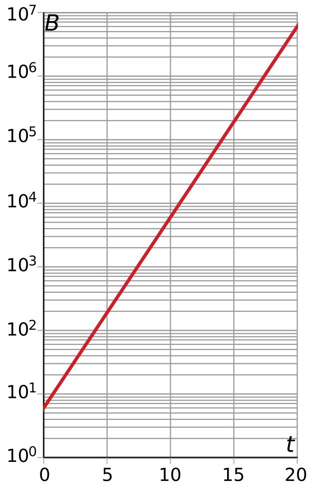
- Bij de tweede opdracht is **enkellogaritmisch papier** nodig. Het lijkt verstandig daar een goede voorraad van bij de hand te hebben.
- Bij de derde opdracht is de figuur op een werkblad beschikbaar, alleen vooraf een aantal exemplaren kopiëren.

Opdracht 5.1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur. Bekijk de grafiek van B als functie van t. Op de B-as is een zogenaamde logaritmische schaalverdeling gebruikt. Je gebruikt daarvoor de log-knop van je grafische rekenmachine. Bijvoorbeeld bij $t = 5$ is $B = 6 \cdot 2^5 = 192$ bacteriën. Daarbij vind je $\log(192) = 2{,}2833...$ en dat betekent dat je in zo'n grafiek $10^{2{,}2833...} = 10^{0{,}2833...} \cdot 10^2 = 1{,}92 \cdot 10^2$ zou moeten aflezen bij $t = 5$.

Ga na, dat je bij $t = 5$ iets minder dan $B = 2 \cdot 10^2 = 200$ afleest en controleer dat dit ongeveer klopt met het aantal bacteriën op dat tijdstip.

Doe die controle ook bij $t = 10$, $t = 15$ en $t = 12$.



Figuur 5.1

Toelichting

Het gaat in dit onderdeel om het kunnen gebruiken van een exponentiële schaalverdeling, zowel aflezen als punten op de juiste plek tekenen. Het werken met logaritmen is niet nodig, maar het verklaart wel de naam van de schaalverdeling. Het kan dus geen kwaad er even aandacht aan te besteden, maar het is niet van doorslaggevende betekenis voor havo wiskunde A.

Hulpvragen zijn bijvoorbeeld “Welke bijzonderheid heeft deze schaalverdeling?”, “Welke waarden horen er bij de horizontale lijnen?” en “Waarom liggen die lijnen niet op gelijke afstanden van elkaar?” (dit laatste alleen voor de leerlingen die daar nieuwsgierig naar zijn, of al snel verder willen). Misschien ook een goed moment om even ter sprake te brengen waarom mensen deze schaalverdeling hebben bedacht. Kortom: wat het nut is van dit onderdeel. Zeker als je er vragen over krijgt.

Uitwerking

Controleer het aflezen en bedenk dat de horizontale lijnen tussen 10^2 en 10^3 betekenen $2 \cdot 10^2$, $3 \cdot 10^2$, ..., $9 \cdot 10^3$. Verder is $6 \cdot 2^5 = 192$, inderdaad iets minder dan 200.

Bij $t = 10$ lees je af ongeveer $6 \cdot 10^3 = 6000$.
Het werkelijke aantal bacteriën is dan $6 \cdot 2^{10} = 6144$.
Omgekeerd: $\log(6144) = 3{,}78845...$ en $10^{3{,}78845...} = 10^{0{,}78845...} \cdot 10^3 = 6{,}144 \cdot 10^3$.

Bij $t = 15$ lees je af ongeveer $2 \cdot 10^5 = 200000$.
Het werkelijke aantal bacteriën is dan $6 \cdot 2^{15} = 196608$.

Bij $t = 12$ lees je af ongeveer $2{,}5 \cdot 10^4 = 25000$.
Het werkelijke aantal bacteriën is dan $6 \cdot 2^{12} = 24576$.

Opdracht 5.2

Voor de groei van het aantal inwoners van de gemeente V geldt de formule: $A = 16000 \cdot 1{,}012^t$. Hierin is A het aantal inwoners en t de tijd in jaren.

Teken de grafiek van A afhankelijk van t op **enkellogaritmisch papier** voor de 50 jaren vanaf $t = 0$.

Toelichting

Bij deze opdracht gaat het om het tekenen op enkellog-papier.
Ook hier is het gebruik van logaritmen voor het tekenwerk niet essentieel. Het gaat er om dat de leerlingen herkennen dat bijvoorbeeld $18027 \approx 1{,}8 \cdot 10^4$, zodat ze zien dat deze uitkomst vlak onder het lijntje $2 \cdot 10^4$ zou moeten terechtkomen.

Mogelijke hulpvragen: “Hebben jullie al een tabel gemaakt?”, “Tussen welke machten van 10 ligt (bijvoorbeeld) 18027?” en “Kun je dit getal schrijven in de vorm $a \cdot 10^b$? En waarom helpt dat?”.

Uitwerking

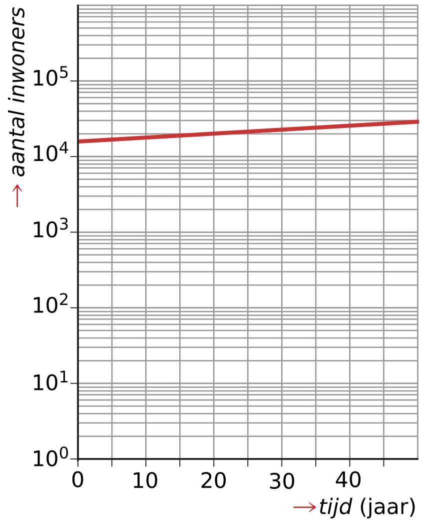
De tabel wordt zo:

t	0	10	20	30	40	50
A	16000,00	18027,07	20310,95	22884,18	25783,42	29049,96

Tabel 5.1

Gebruik het logaritmisch papier om de grafiek te tekenen met behulp van de gegevens in de tabel.

Om de uitkomsten voor A op de juiste plek op de logaritmisch verdeelde A-as te zetten, gebruik je een 10-logaritme.
Bijvoorbeeld op $t = 10$ heb je $A = 16000 \cdot 1{,}012^{10} \approx 18027{,}07$ inwoners. Dat getal ligt tussen $10000 = 10^4$ en $100000 = 10^5$, want de logaritme van dit getal is: $\log(18027{,}07) \approx 4{,}26$. Je zet het daarom op 4,26 eenheden boven de horizontale as, bij $10^{4,26}$ dus, ongeveer bij $1{,}8 \cdot 10^4$.
Doe je dit ook voor de andere t-waarden, dan krijg je de grafiek.

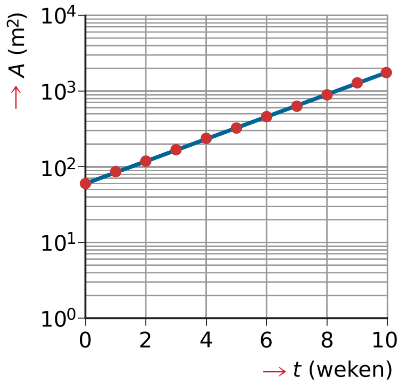


Figuur 5.2

Opdracht 5.3

Je ziet een grafiek van de groei van een waterplant. De grafiek geeft het verband weer tussen de oppervlakte A (m^2) en de tijd t (week). Hij staat ook op het **Werkblad**.

Stel een bijpassende formule op.



Figuur 5.3

Toelichting

Nu gaat het om het vinden van een passende formule vanaf enkel-log-papier.
Daarvoor hoeven de leerlingen alleen twee punten van de grafiek te kunnen aflezen. Vervolgens kun je verwijzen naar voorgaande paragrafen.

Uitwerking

De grafiek is een rechte lijn met alleen op de verticale as een logaritmische schaal. Er bestaat daarom een exponentieel verband tussen A en t: $A = b \cdot g^t$

Uit de figuur lees je af:

- bij $t = 0$ hoort $A \approx 60$
- bij $t = 8$ hoort $A \approx 900$

De groeifactor per 8 weken is ongeveer $\frac{900}{60}$. De groeifactor per week is ongeveer: $\left(\frac{900}{60}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}40$.

Je vindt dus: $A = 63 \cdot 1{,}40^t$.

Opdracht 5.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht met betrekking tot het werken met logaritmische schalen en enkellogaritmisch grafiekenpapier. Je kunt dergelijk papier downloaden vanaf de Math4allsite.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

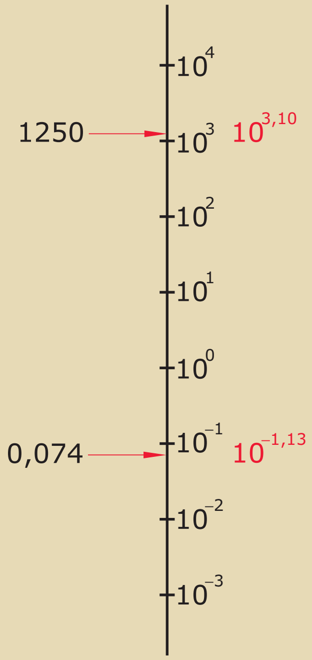
Om te onthouden

Bij een **logaritmische schaalverdeling** zet je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar uit. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen in dezelfde schaalverdeling plaatsen. Met behulp van de 10-**logaritme** ([LOG] op je rekenmachine) kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- $\log(1250) \approx 3{,}10$ dus $1250 \approx 10^{3{,}10}$.
  Je plaatst 1250 dus op 3,10 eenheden boven 10^0, net boven 10^3.
- $\log(0{,}074) \approx -1{,}13$ dus $0{,}074 \approx 10^{-1{,}13}$.
  Je plaatst 0,074 dus op 1,13 eenheden onder 10^0, net onder 10^{-1}.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal. Er bestaat ook speciaal **enkellogaritmisch papier**.

Omdat elke rechte lijn op enkellogaritmisch papier de grafiek is van een exponentiële functie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een exponentieel verband bestaat en om een bijpassende formule op te stellen.



Figuur 5.4

Verwerken

★ Opgave 5.1

Teken een rechte lijn door de punten (2,40), (4,400) en (6,4000) op logaritmisch papier.

a Waarom hoort bij de lijn door deze punten een exponentieel verband?

b Geef een formule bij dit exponentiële verband.

★ Opgave 5.2

De bevolking van een middelgrote stad groeit vanaf 1 januari 2000 met (ongeveer) 6% per jaar. Op 1 januari 2000 zijn er 80000 inwoners.

a Stel een formule op voor het aantal inwoners A afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2000.

b Teken een bijpassende grafiek op enkellogaritmisch papier.

c Lees uit die grafiek het aantal inwoners af op 1 januari 2015. Controleer je antwoord met behulp van de formule.

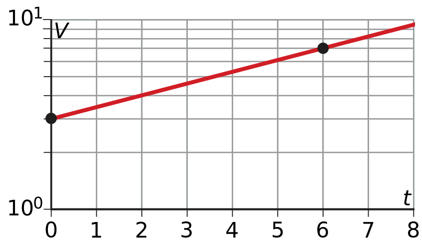
★ Opgave 5.3

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend die het verband tussen een toenemende hoeveelheid V en de tijd t weergeeft.

a Geef een formule voor V.

b Bereken de waarde van t waarvoor $V(t) = 10$ in twee decimalen nauwkeurig. Controleer je antwoord met de grafiek.

c Voor negatieve waarden van t heeft de grafiek een snijpunt met de t-as. Bereken de bijbehorende waarde van t in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 5.5

★ Opgave 5.4

Gegeven zijn de exponentiële verbanden $N_1 = 10 \cdot 5^t$ en $N_2 = 5 \cdot 10^t$.

a Welke grafiek gaat het steilst wanneer beide verbanden op enkellogaritmisch papier worden getekend?

b Teken de beide grafieken op enkellogaritmisch papier. Neem voor t de waarden 0 tot en met 4.

c Heeft het snijpunt op enkellogaritmisch papier een betekenis? Zo ja, welke?

★★ Opgave 5.5

Deze tabel met gegevens hoort bij een bacteriecultuur. t is gegeven in uren en N in aantallen.

t	0	1	2	3	4	5	6
N	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 5.2

a Maak met behulp van deze tabel een tabel waarin $\log(N)$ wordt uitgezet tegen t.

b Teken de bijbehorende grafiek. Kun je deze grafiek benaderen door een rechte lijn? Is er sprake van exponentiële groei?

c Stel een formule op die het verband tussen $\log(N)$ en t beschrijft.

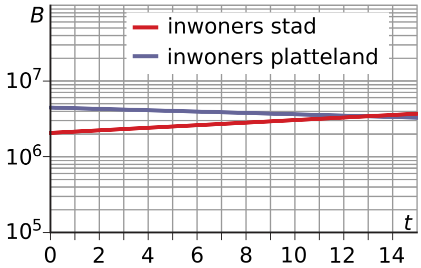
d Stel ook een formule op die het verband tussen N en t beschrijft.

Toepassen

★ ★

Opgave 5.6: Van platteland naar stad

In China zie je de laatste jaren een steeds groter wordend verschil tussen het aantal inwoners op het platteland en in de steden. Veel jeugd verlaat het platteland om in de stad te gaan wonen. Zo ook in Kunming, de hoofdstad van de zuidwestelijke provincie Yunnan. Op 1 januari 2000 had de regio rond Kunming naar schatting 6,5 miljoen inwoners, waarvan 2,055 miljoen mensen in de stad woonden. De formule van het aantal inwoners afhankelijk van de tijd t (jaar) is: $B = 2055000 \cdot 1{,}04^t$ met $t = 0$ op 1 januari 2000.



Figuur 5.6

Bekijk de grafiek.

a In welk jaar woonden er 2,5 miljoen mensen in de stad Kunming?

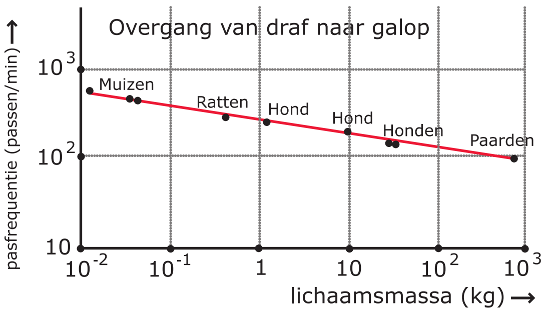
b Het aantal inwoners op het platteland in de regio Kunming nam na 1 januari 2000 per jaar met 2% af. Stel een bijpassende formule op voor het aantal inwoners op het platteland.

c In welk jaar was het aantal inwoners in de stad gelijk aan het aantal inwoners op het platteland?

★ ★ ★

Opgave 5.7: Pasfrequentie

Zoogdieren gaan bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) over van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt, hangt af van de lichaamsmassa (kg). Noem de lichaamsmassa m (kg) en de pasfrequentie P. De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden.



Figuur 5.7

a Waaraan kun je zien dat op beide assen van deze grafiek een logaritmische schaal is gebruikt?

b Omdat op beide assen een logaritmische schaal is gebruikt, is in feite $\log(P)$ uitgezet tegen $\log(m)$. Voor het punt dat hoort bij paarden, geldt dan ongeveer $\log(m) = 2{,}9$ en $\log(P) = 2{,}0$. Bepaal zelf de bijpassende waarden van het punt dat bij een kleine hond hoort.

c Leid nu een formule af die het verband tussen $\log(P)$ en $\log(m)$ beschrijft.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- exponentiële groei — groeifactor — macht, grondtal, exponent
- rekenregels voor machten
- algemene formule voor exponentiële groei
- exponentiële functie — exponentiële vergelijking en ongelijkheid
- logaritmische schaal — enkellogaritmisch papier

Activiteitenlijst

- formule voor exponentiële groei opstellen bij gegeven groeifactor (groeipercentage) en beginwaarde
- rekenregels voor machten toepassen — groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden
- eigenschappen van exponentiële functies toepassen — exponentiële functie opstellen bij gegeven punten van de grafiek
- werken met logaritmische schalen — formule opstellen bij exponentiële groei bij gegeven tabel, punten of grafiek (op enkellogaritmisch papier)

Achtergronden


Figuur 6.1

Thomas Robert Malthus (1766—1834) was een Brits geestelijke die zich veel bezighield met demografische en economische vraagstukken. In 1798 publiceerde hij ‘An Essay on the Principle of Population’, waarin hij aannam dat de totale bevolking exponentieel groeit, terwijl de middelen van bestaan lineair toenemen. Dit leidt tot de beschikbaarheid van steeds minder grond (voedsel/energie) per mens en dus een daling in welvaart, de ‘Malthusiaanse catastrofe’.
Op grond hiervan meende hij dat de totale bevolking een maximale omvang zou hebben, het ‘Malthusiaans plafond’. Hij veronderstelde dat de mensheid deze maximale omvang binnen afzienbare tijd zou bereiken en dat alleen middels hongersnood, epidemieën en oorlogen het aantal mensen binnen de grenzen van het Malthusiaans plafond zou kunnen blijven. Malthus geldt als één der eerste economen. In de tweede helft van de negentiende eeuw werd deze opinie fel bestreden, onder andere door Karl Marx en Friedrich Engels die in Malthus' catastrofe slechts een gevolg van de kapitalistische samenleving zagen. Ook economen als John Maynard Smith en Ronald Fisher trokken Malthus' pessimistische kijk in twijfel. In de twintigste eeuw heeft niets van een Malthusiaanse catastrofe plaatsgevonden. Wel verscheen in 1972 het ‘De grenzen aan de groei’. Dit is een geschrift van de **Club van Rome** die als doelstelling heeft de wereld bekend te maken met problemen als bevolkingsgroei, voedselproductie, industrialisatie, uitputting natuurlijke hulpbronnen en vervuiling. Ook zij maakten veel gebruik van exponentiële groeimodellen.

Testen

★ **Opgave 6.1**

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld, groeit de laatste jaren met 2% per jaar. In 2000 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?

b Geef een formule voor het aantal passagiers p op tijdstip t in jaren na 2000.

c Als de groei zo doorgaat, hoelang duurt het dan voor het huidige aantal passagiers verdubbeld is?

d Hoeveel passagiers waren er in 1997?

e Hoe groot is de groeifactor per tien jaar?

f Hoe groot is de groeifactor per kwartaal?

★ Opgave 6.2

In de gemeente Zaandam groeit het aantal inwoners sinds 2000 met ongeveer 3,2% per jaar. In het jaar 2000 had de gemeente Zaandam in totaal 97452 inwoners. Het aantal woningen in Zaandam was toen 35505.

a Geef een formule voor het aantal inwoners A van Zaandam waarbij je ervan uitgaat dat de groei onverminderd met hetzelfde percentage doorgaat.

b Neem aan dat alle inwoners van Zaandam in één van die 35505 woningen woonden. Hoeveel inwoners telde Zaandam in 2000 gemiddeld per woning? Rond af op twee decimalen.

c De gemeente Zaandam liet om de bevolkingsgroei op te vangen jaarlijks gemiddeld 1350 woningen bijbouwen. Als je het aantal mensen per woning constant houdt, hoeveel mensen kan Zaandam dan jaarlijks meer huisvesten?

d Tot welk jaar kan Zaandam zijn bevolking huisvesten als er gemiddeld 1350 woningen per jaar bijkomen en het aantal personen per woning ongewijzigd blijft?

★ Opgave 6.3

Een doorzichtige kunststof absorbeert een deel van het licht dat er doorheen valt. Elke laag van 1 cm absorbeert 20% van het licht.

a Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per cm kunststof?

b Hoeveel procent van het licht wordt geabsorbeerd door een laag van 2,5 cm dikte?

c Hoe dik moet de laag kunststof zijn om 90% van het licht te absorberen?

d Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per mm kunststof?

★ Opgave 6.4

Iemand haalt een fles melk uit de koelkast en zet er een fles cola voor in de plaats. De temperatuur van de fles melk neemt hierdoor langzaam toe tot kamertemperatuur, de temperatuur van de fles cola neemt juist af tot koelkasttemperatuur. De formules voor de temperaturen T_1 en T_2 (°C) in de flessen, afhankelijk van de tijd t (min) zien er zo uit:
$T_1 = 19 - 13 \cdot 0{,}78^t$ en $T_2 = 6 + 13 \cdot 0{,}78^t$.

a Teken de grafieken van beide formules in één figuur. Laat t hierbij lopen van 0 tot 25.

b Welke van de formules hoort bij de fles melk, en welke bij de fles cola? Licht je antwoord toe.

c Wat is de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles cola?

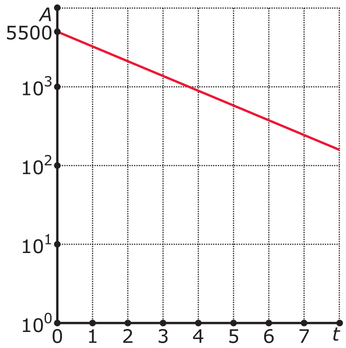
d Wat is de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles melk?

e Hoeveel bedraagt de kamertemperatuur?

f Vanaf welk tijdstip is de cola kouder dan de melk?

★★ **Opgave 6.5**

In sommige dorpen in delen van Rusland is nog weinig werkgelegenheid en daarom trekken steeds meer mensen er weg. In de grafiek is het aantal inwoners A van zo'n dorp uitgezet tegen de tijd t in jaren. Het tijdstip $t = 0$ komt overeen met het jaar 2000. In dat jaar zijn er 5500 inwoners.



Figuur 6.2

a Waaruit concludeer je dat er sprake is van een exponentieel verband?

b Waren er in 2006 meer of minder dan 600 inwoners?

c Bepaal de groeifactor en geef een formule voor het aantal inwoners afhankelijk van de tijd (jaar).

d Iemand doet de volgende uitspraak: “Het aantal inwoners wordt nooit nul, maar komt wel steeds dichter bij nul.”
Geef argumenten waarom je het met deze persoon eens of oneens bent.

Toepassen

★★ **Opgave 6.6: Radioactief verval**

Een natuurkundige toepassing van exponentiële functies vind je bij radioactiviteit.

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven.
Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4{,}468 \cdot 10^9$ jaar.
Het verval van U-238 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t. Begin je met 1 kg U-238, dan heb je na 4,468 miljard jaar nog 0,5 kg over (plus 0,5 kg Th-234). Je kunt dus het beste de tijd in miljarden jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer 0,8563. En $A = 1000 \cdot 0{,}8563^t$ gram.

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2001 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.

c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.

d Als je de halveringstijd weet, kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot 750 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

★★ **Opgave 6.7: Wereldbevolking**

Omstreeks 1970 bedroeg de wereldbevolking ongeveer 3,6 miljard en zij groeide per jaar met 2,1%.

a Hoe groot was toen de groeifactor?

b Als we ervan uitgaan dat die groeifactor door de jaren heen gelijk is gebleven, hoeveel mensen leefden er dan in 1971, 1988, 1900 en het jaar 0?

c B is de bevolking na t jaren, gerekend vanaf 1970 ($t = 0$). Geef B als functie van t door een formule.

d Je hebt nu een model van de bevolkingsgroei gemaakt, gebaseerd op gegevens uit 1970. Volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 is in 2050 het aantal mensen op aarde nog geen 9 miljard. Klopt dat met de formule die je bij c hebt gevonden?

e Waaraan kun je zien dat de bevolkingsgroei dan niet meer exponentieel loopt? Kun je daar redenen voor geven?

★ ★ ★ Opgave 6.8: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip ‘zuurgraad’ gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $\left[H_3O^+\right]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $\left[H_3O^+\right] = 10^{-7}$ mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van 10^{-7}: pH $= -\log\left(10^{-7}\right) = 7$. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: pH $= -\log\left[H_3O^+\right]$.

a Bij geconcentreerd zwavelzuur is $\left[H_3O^+\right] = 18$ mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?

b Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van 11,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie in mol/L?

c Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie van zure regen?

d Vanaf welke H_3O^+ concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?

e De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijk pH van de huid is ongeveer 5,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie dan?

Examen

★ ★ Opgave 6.9: Ureumgehalte

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 gram toeneemt.
Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo ververst worden dat de wettelijke norm van 2 gram ureum per cm^3 water niet overschreden wordt. In een model gaan we ervan uit dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken.
Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 m^3 ververst wordt (dus 3% van het totaal).
We beginnen de eerste dag met 0 gram ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 gram ureum in het water. Na verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 gram ureum over.

a Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 gram ureum in het water zit.

b In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

c Stel U is de hoeveelheid ureum aan het begin van een zekere dag. Toon aan dat de hoeveelheid ureum aan het begin van de daaropvolgende dag gelijk is aan $0{,}8U + 400$.

We starten in het model weer met 0 gram ureum aan het begin van de eerste dag. De hoeveelheid ureum in gram (U_n) aan het begin van de n-de dag kan rechtstreeks berekend worden met de formule:
$U_n = 2000 - 2500 \cdot 0{,}8^n$.

d Leg uit met behulp van deze formule dat aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm voldaan wordt.

e In de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden. Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(bron: examen wiskunde A havo 1989, tweede tijdvak)

★ ★ Opgave 6.10: Sparen, sparen en sparen

Nederland is een echt spaarland. Jaarlijks worden er miljarden euro's gestort op spaarrekeningen. Er zijn verschillende soorten spaarrekeningen. In deze opgave bekijken we er drie: de groeirekening, de depositorekening en de renteklimrekening.
We storten op elk van de drie spaarrekeningen een bedrag van € 10000,00 dat voor een periode van 10 jaar op de spaarrekening blijft staan.

Groeirekening

De groeirekening is de bekendste soort. Het rentepercentage op deze rekening is 3,5% per jaar. Het is een ‘rente op rente’-rekening: na een jaar wordt de rente bijgeschreven op de rekening, zodat het volgende jaar rente wordt berekend over een hoger bedrag G. Na elk jaar wordt het bedrag op de rekening dus hoger. Het bedrag G dat na t-jaar op de groeirekening staat, kun je bereken met de formule: $G = 10000 \cdot 1{,}035^t$. Het bedrag op de groeirekening is na 10 jaar nog niet verdubbeld. Maar als je de rekening nog langer laat doorlopen, komt er een jaar dat het bedrag op de rekening voor het eerst twee keer zo hoog is. Het bedrag is zelfs nog hoger dan € 20000.

a Bereken na hoeveel jaar dat is.

Depositorekening

De depositorekening is een spaarrekening met een rentepercentage van 4,0% per jaar. De rente over elk jaar is € 400. Dat bedrag wordt steeds bijgeschreven op een aparte betaalrekening. Op de betaalrekening krijg je geen rente, zodat het bedrag op de betaalrekening lineair toeneemt. De rente van 4,0% lijkt gunstiger dan een rente van 3,5%. Toch heb je na tien jaar bij de depositorekening in totaal minder rente gekregen dan bij de groeirekening. Een bank introduceert een nieuwe depositorekening die in tien jaar evenveel rente oplevert als de groeirekening.

b Bereken het rentepercentage per jaar van die nieuwe depositorekening. Geef je antwoord in één decimaal.

Renteklimrekening

De renteklimrekening is een soort depositorekening. Ook hier wordt jaarlijks de rente bijgeschreven op een aparte betaalrekening die geen rente oplevert. Bij de renteklimrekening wordt het rentepercentage elk jaar hoger. In deze tabel kun je aflezen welke bedragen er na t-jaar sparen op de renteklimrekening R en op de betaalrekening B staan.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
B	0	300	615	950	1310	1700	2130	2615	3165	3775	4475

Tabel 6.1

In de volgende tabel staan de rentepercentages voor het t-de jaar.

t-de jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rentepercentage	3,00	3,15	3,35	3,60	3,90	4,30				

Tabel 6.2

c Bereken het rentepercentage voor het zevende jaar. Geef je antwoord in twee decimalen.

d De renteklimrekening geeft in tien jaar € 4475,00 rente. Wat dit betreft is het de beste van de drie spaarrekeningen. De groeirekening is de op één na beste.
Bereken het rentepercentage per jaar dat een groeirekening moet hebben om in 10 jaar € 4475,00 rente te geven. Geef je antwoord in twee decimalen.

(bron: examen wiskunde A havo 2004, tweede tijdvak)

★ ★ **Opgave 6.11: De wet van Moore**

Het Amerikaanse bedrijf Intel is een zeer grote producent van computerchips. Gordon Moore was in 1968 één van de oprichters van het bedrijf.
Deze opgave gaat over het aantal transistoren in een computerchip. (Een transistor is een elektronische schakeling.)
In 1965 deed Moore daar een voorspelling over:
‘Het aantal transistoren in een computerchip zal tussen 1965 en 1975 exponentieel groeien.’
Moore heeft meer dan gelijk gekregen: de voorspelling is zelfs tot het jaar 2000 uitgekomen! Zijn voorspelling is men de Wet van Moore gaan noemen.
In de tabel zie je hoeveel transistoren er in de chips van Intel zitten. Ook zie je in welk jaar die chips op de markt zijn gebracht.

introductiejaar	naam chip	aantal transistoren
1971	4004	2250
1972	8008	2500
1974	8080	5000
1978	8086	29.000
1982	286	120.000
1985	386	275.000
1989	486 DX	1.180.000
1993	Pentium I	3.100.000
1997	Pentium II	7.500.000
1999	Pentium III	24.000.000
2000	Pentium IV	42.000.000

Tabel 6.3

In de tabel zie je dat het aantal transistoren tussen 1971 en 1972 met 250 toeneemt.
Stel dat het aantal transistoren in de jaren daarna lineair toe zou nemen met 250 per jaar.

a In welk jaar zou dan het aantal van 5000 transistoren per chip zijn bereikt? Licht je antwoord toe.

In werkelijkheid is de toename dus exponentieel. Zo is in de periode van 1971 tot 2000 het aantal transistoren per chip toegenomen van 2250 tot 42 miljoen.

b Bereken hiermee de groeifactor per jaar in vier decimalen nauwkeurig.

De Wet van Moore in formulevorm is: $A = 2250 \cdot 1{,}404^t$.
Hierin is A het aantal transistoren per chip en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1971. In de Pentium II-chip zitten volgens de tabel 7500000 transistoren. Dat aantal transistoren wijkt nogal af van de voorspelling volgens de Wet van Moore.

c Bereken hoeveel procent dit aantal afwijkt van de voorspelling volgens de formule van de Wet van Moore.

d Met behulp van de formule kunnen we voorspellen wanneer er 1 miljard transistoren in een computerchip zitten. Bereken hoeveel jaar na 1971 dit het geval is.

(bron: examen wiskunde A havo 2005, eerste tijdvak))

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★ ★	★ ★ ★
1	**Exponentiële groei**	★	★ ★	★ ★ ★
	Werken met exponentiële groei en afname, bijpassende formules opstellen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ T 6.1 ☐ T 6.2 ☐	1.4 ☐ 1.5 ☐ 1.6 ☐ T 6.6 ☐ T 6.7 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐ T 6.11 ☐	1.7 ☐ T 6.8 ☐
	Groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ T 6.1 ☐ T 6.3 ☐	1.4 ☐ 1.5 ☐ 1.6 ☐ T 6.7 ☐	
2	**Rekenen met machten**	★	★ ★	★ ★ ★
	Rekenen met machten.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ T 6.1 ☐ T 6.3 ☐	2.4 ☐ 2.5 ☐ T 6.7 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐ T 6.11 ☐	2.6 ☐ T 6.8 ☐
	De rekenregels voor machten toepassen bij exponentiële groei.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ T 6.3 ☐	2.4 ☐ 2.5 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐ T 6.11 ☐	2.6 ☐
3	**Reële exponenten**	★	★ ★	★ ★ ★
	Werken met gebroken en negatieve exponenten.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ T 6.1 ☐	3.5 ☐ 3.6 ☐ T 6.6 ☐	3.7 ☐
	Groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ T 6.1 ☐	3.5 ☐ 3.8 ☐ T 6.6 ☐	3.7 ☐
4	**Exponentiële functies**	★	★ ★	★ ★ ★
	Wat een exponentiële functie is en de karakteristieken ervan bepalen.	T 6.1 ☐ T 6.3 ☐ T 6.4 ☐	4.4 ☐ 4.6 ☐ T 6.6 ☐ T 6.7 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐ T 6.11 ☐	4.5 ☐ T 6.8 ☐
	Een exponentiële functie opstellen vanuit twee gegeven punten.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ T 6.2 ☐ T 6.4 ☐	4.6 ☐ 4.7 ☐ T 6.7 ☐ T 6.9 ☐	4.5 ☐ T 6.8 ☐
	Vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen.	4.1 ☐ 4.2 ☐ T 6.3 ☐	4.4 ☐ 4.6 ☐ 4.7 ☐ T 6.6 ☐ T 6.7 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐	
5	**Logaritmische schalen**	★	★ ★	★ ★ ★
	Met logaritmische schalen werken.	5.1 ☐ 5.2 ☐ 5.3 ☐ 5.4 ☐	5.5 ☐ 5.6 ☐ T 6.5 ☐	5.7 ☐
	Logaritmisch papier gebruiken.	5.1 ☐ 5.2 ☐ 5.3 ☐ 5.4 ☐	5.5 ☐ T 6.5 ☐	5.7 ☐
	Het voorschrift van een exponentiële functies opstellen vanaf enkellogaritmisch papier.	5.1 ☐ 5.3 ☐	5.5 ☐ 5.6 ☐ T 6.5 ☐	5.7 ☐

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

www.math4all.nl

Werkblad bij Opdracht 1.3

tijd (jaar)	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen (×1000)	970	941	913	885	859	833

Werkblad bij Opdracht 2.2

Schrijf als één macht en bereken het exacte antwoord als dat kan:

1. $\left(2^{30}\right)^4 \cdot 2^{100}$

2. $\frac{3^{160}}{3 \cdot 3^{155}}$

3. $2^{100} + 7 \cdot 2^{100}$

4. $0{,}9^{400} \cdot \left(0{,}9^{20}\right)^{30}$

5. $\frac{4^{100} . 8^{200}}{16^{199}}$

6. $\frac{g^{10} \cdot g^{20}}{9^{28}}$

7. $g^{10} \cdot \left(g^4\right)^5$

Werkblad bij Opdracht 3.3

Thomas Robert Malthus leefde in het begin van de 19e eeuw. Hij dacht dat de groei van de wereldbevolking exponentieel zou kunnen zijn. In de tabel zie je het aantal mensen op aarde in de 19e eeuw.

tijd (jaar)	1800	1820	1840	1860	1880	1900
aantal mensen (mln)	1000	1102	1216	1340	1477	1629

Werkblad bij Opdracht 5.3

Je ziet een grafiek van de groei van een waterplant. De grafiek geeft het verband weer tussen de oppervlakte A (m^2) en de tijd t (week).