Wiskunde A / PGA

4 HAVO / docentmateriaal

Lineaire verbanden

ConTeXt College

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je begeleidt dan als docent de leerlingen die in kleine groepjes aan wiskundige problemen werken en op die manier een eigen theoretisch kader opstellen. Dit gebeurt voornamelijk op de wijze die wordt beschreven in het boek *Building Thinking Classrooms in Mathematics* van Peter Liljedahl. Dit boek is ook in het Nederlands beschikbaar. Het is verstandig om dit boek vooraf door te werken, maar je kunt ook beginnen met deze **beknopte handleiding**.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee de leerling kan nagaan of de stof wordt beheersd. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding staat in de marge naast de opgave.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die de leerling alleen hoeft te maken als er genoeg tijd voor is
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die een leerling alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk was

In de bijlage staat een “**Leerdoelentabel**” waarin staat aangegeven door welke opgave het specifieke leerdoel wordt afgedekt en op welk niveau dit gebeurt. Als je deze tabel aan de leerlingen uitreikt, kunnen ze hun eigen vorderingen bijhouden.
Opgaven uit de samenvattende paragraaf *Totaalbeeld* worden voorafgegaan door een T.

1

Lineaire verbanden

1.1 Recht evenredig

Inleiding

Nogal wat variabelen die we in het dagelijks leven tegenkomen, zijn recht evenredig met een andere variabele. In dit onderdeel leer je wat recht evenredig zijn inhoudt en hoe je een recht evenredig verband tussen variabelen kunt beschrijven met formules en weergeven met grafieken.

Je leert in dit onderwerp

- recht evenredige verbanden herkennen;
- een formule bij een recht evenredig verband opstellen;
- een grafiek bij een recht evenredig verband maken;
- berekeningen bij een recht evenredig verband uitvoeren.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij formules, ook met de grafische rekenmachine.

Voor de docent

Het onderwerp ‘Lineaire verbanden’ begin je meestal met het begrip ‘recht evenredig’, dus een situatie waarin de waarden van een variabele uitsluitend worden bepaald door vermenigvuldigen van de waarden van een andere variabele met een vast getal, een vaste factor. Om dat op gang te krijgen, krijgen de leerlingen een probleem waarvan de oplossing niet meteen voor de hand ligt. Ze werken daar dan in groepjes van 2 of 3 leerlingen aan. Mogelijke opdrachten staan hieronder, de laatste is bedoeld om ze zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Bij de tweede opdracht hoort een figuur, die kan met de hand worden getekend, of vooraf gekopieerd, hij is als werkblad beschikbaar.
- Bij de derde opdracht hoort een stuk tekst, dat kan vooraf worden gekopieerd, het is als werkblad beschikbaar.

Opdracht 1.1

Je fietst met een gemiddelde snelheid van 18 km/uur.

Waarom is nu de gefietste afstand a in km recht evenredig met de gefietste tijd t in uren? Geef voorbeelden van het berekenen van a, geef een formule en teken de bijbehorende grafiek.

Hoe bereken je de tijd die je fietst als $a = 60$ km?

Toelichting

Geef de opdrachten mondeling en in stappen. Laat de leerlingen de antwoorden zichtbaar opschrijven.

Hulpvragen zijn bijvoorbeeld “Hoeveel leg je elk uur af?”, “Waaraan herken je het recht evenredig zijn?”, “Wanneer is er dan geen sprake van recht evenredigheid?”, “Hoe schrijf je het rekenen met de variabele t op? Hoe maak je dus een formule?” en “Hoe maak je nu een grafiek?”.

Probeer ze zover te krijgen dat ze een lijstje met eigenschappen van recht evenredig beginnen. Laat eventueel alvast de term ‘evenredigheidsconstante’ vallen.

Uitwerking

Voorbeelden: $t = 2{,}25$ geeft $18 \cdot 2{,}25 = 40{,}5$ km en ...

Bij een twee keer zo grote tijdsduur (een twee keer zo grote waarde van t) fiets je ook twee keer zo ver (wordt de waarde van a ook twee keer zo groot). En omdat de snelheid een vast getal is, dus omdat je per uur steeds hetzelfde aantal km aflegt.

Formule: $a = 18 \cdot t$.

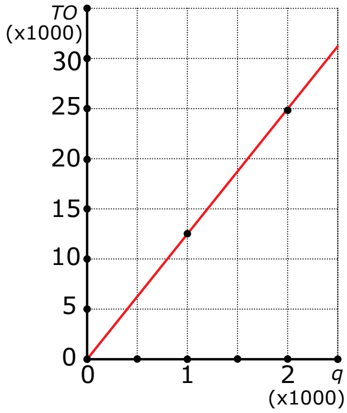
De grafiek wordt een rechte lijn door (0,0) en met elk uur 18 km erbij.

Bij $a = 60$ hoort $t = 60/18 = 3\frac{1}{3}$ uur.

Opdracht 1.2

Welke formule past bij deze grafiek?
(TO is totale opbrengst en q is aantal verkochte exemplaren, beide ×1000.)

En wat betekent het als de grafiek in een nieuwe situatie steiler omhoog loopt?



Figuur 1.1

Toelichting

De grafiek staat ook op dit **Werkblad**.

Sommige leerlingen hebben misschien het principe van 'recht evenredig' nog niet scherp.

Stel dan vragen als "Wat betekent het dat de grafiek een rechte lijn is?" en "Wat betekent het dat de grafiek door (0,0) gaat?", of "Heeft de grafiek iets met recht evenredigheid te maken? En waarom dan?".

Introduceer mondeling de begrippen 'evenredigheidsconstante' en 'hellingsgetal' en laat ze die bij de formule aangeven.

Probeer ze zover te krijgen dat ze de eigenschappen van de grafiek aan het lijstje met eigenschappen van recht evenredig toevoegen.

Uitwerking

Kijk bij $q = 1$ en je vindt $TO = 12{,}5$.

Kijk bij $q = 2$ en je vindt $TO = 25 = 2 \times 12{,}5$.

Er wordt met een vast getal vermenigvuldigt, de 'evenredigheidsconstante'. De formule is $TO = 12{,}5 \cdot q$.

Als de grafiek steiler omhoog loopt, moet het getal 12,5 in die nieuwe situatie groter zijn.

Opdracht 1.3

Wij (Nederlanders) gebruiken meestal de temperatuurschaal van Celsius. Wetenschappers gebruiken vaak de temperatuurschaal van Kelvin. Ook worden andere temperatuurschalen nog steeds gebruikt:

- De temperatuurschaal van Réamur (in gebruik bij de verwerking van suiker): het aantal graden Réamur bereken je door het aantal graden Celsius te delen door 10 en dan te vermenigvuldigen met 8.
- De temperatuurschaal van Fahrenheit (in gebruik in de Verenigde Staten): het aantal graden Fahrenheit bereken je door het aantal graden Celsius te delen door 10, dan te vermenigvuldigen met 18 en er vervolgens nog 32 bij te tellen.

Bij welke van beide temperatuurschalen is sprake van een recht evenredig verband? Maak daarbij een formule en een grafiek en leg uit wat het verschil is met de formule en de grafiek van de andere temperatuurschaal.

Toelichting

Deze opdracht is bedoeld om het verschil tussen recht evenredig en een niet recht evenredig lineair verband scherp te krijgen. De tekst staat op dit **Werkblad**.

Kom ook terug op de evenredigheidsconstante: “Welk getal is de evenredigheidsconstante?”, “Waarom heet dit ook wel hellingsgetal?” en “Hebben beide temperatuurschalen zo'n getal? En wat is dan het verschil tussen beide?”.

Probeer ze zover te krijgen dat ze aan het lijstje met eigenschappen van recht evenredig ook toevoegen wanneer er geen sprake is van een recht evenredig verband. En de begrippen ‘evenredigheidsconstante’ en ‘hellingsgetal’ moeten ook een plek krijgen.

Uitwerking

Bij de temperatuurschaal van Réamur vermenigvuldig je het aantal graden Celsius C steeds met $\frac{8}{10} = 0{,}8$. Daarbij hoort dus een recht evenredig verband met formule $R = 0{,}8 \cdot C$ en een grafiek die door (0,0) en bijvoorbeeld (10,8) gaat. Bedenk dat er ook negatieve temperaturen zijn!

Bij de temperatuurschaal van Fahrenheit vermenigvuldig je het aantal graden Celsius C steeds met $\frac{18}{10} = 1{,}8$, maar daarna moet je er nog 32 bij optellen. Daarbij hoort geen recht evenredig verband want je kunt het aantal graden Fahrenheit niet krijgen door C met een vast getal te vermenigvuldigen. De grafiek erbij gaat ook niet door (0,0) maar door (0,32).

Opdracht 1.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht met betrekking tot een recht evenredig verband.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Hier kun je het werken met GeoGebra (of Excel) goed inzetten: a invoeren als schuifbalkje en de grafiek van $y = a \cdot x$ (laten) maken en bekijken wat het veranderen van a met de grafiek doet. Dit kun je zelf doen met je digibord, maar mooier is het om dit de groepjes leerlingen zelf te laten doen op eigen apparaten.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

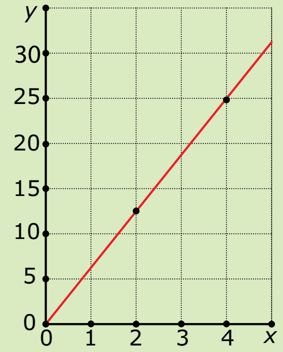
Bekijk de applet: Recht evenredig

Als een verband tussen x en y **recht evenredig** is, dan gelden de volgende eigenschappen:

- De formule kan worden geschreven als: $y = a \cdot x$.
- De grafiek is een rechte lijn door (0,0).
- De tabel is een verhoudingstabel.
- Als x bijvoorbeeld 2 keer zo groot wordt, wordt y ook 2 keer zo groot; dit geldt voor alle waarden van x en y.

Als een van deze eigenschappen geldt, gelden de andere eigenschappen ook. Als een van deze eigenschappen niet geldt, gelden de andere eigenschappen ook niet.

- a noem je de **evenredigheidsconstante**.
- a is ook het **hellingsgetal** van de grafiek die erbij hoort.



Figuur 1.2

Verwerken

★ **Opgave 1.1**

Bij welke van de formules is y recht evenredig met x? Geef in die gevallen de evenredigheidsconstante.

a $y = 3x + 1$

b $y = 3x$

c $y = x + 3$

d $y = \frac{x}{3}$

e $y = \frac{1}{3}x$

f $x + 3y = 0$

★ **Opgave 1.2**

Leg uit in welke van de situaties er sprake is van een recht evenredig verband.

a Uien betaal je per kilogram. Is het bedrag dat je betaalt voor een hoeveelheid uien recht evenredig met het gewicht?

b Uien betaal je per kilogram. Is de prijs van een hoeveelheid uien recht evenredig met het aantal uien?

c Is de afgelegde weg recht evenredig met de tijd als je met een constante snelheid rijdt?

d Is de afgelegde weg recht evenredig met de tijd als een auto uit stilstand optrekt?

e Is de lengte van een rechthoek recht evenredig met de breedte als het gaat om gelijkvormige rechthoeken?

f Is de lengte van een rechthoek recht evenredig met de breedte als het gaat om rechthoeken met dezelfde omtrek?

★ **Opgave 1.3**

Een loodgieter rekent € 30,00 voorrijkosten en daarbovenop rekent hij € 22,50 per gewerkt uur.

a Leg uit waarom het verband tussen zijn arbeidsloon en het aantal gewerkte uren recht evenredig is.

b Leg uit waarom het verband tussen de totale kosten die hij in rekening brengt, en het aantal gewerkte uren niet recht evenredig is.

c Welke formule geldt voor zijn totale kosten TK afhankelijk van het aantal gewerkte uren u?

★ ★ **Opgave 1.4**

De marathon van Rotterdam is een slijtageslag. Het laatste stuk is een vrijwel vlak stuk. Vanaf de Erasmusbrug moet dan nog een lus met een lengte van zes km worden gelopen. Een deelnemer begint na drie uur lopen aan het laatste stuk. Hij loopt het laatste stuk met een vrijwel constante snelheid. Na drie kwartier loopt hij over de finish op de Coolsingel en heeft hij totaal 42 km afgelegd.

a Met welke snelheid heeft hij het laatste deel van de tocht gelopen?

b Stel, t is de tijd in uren en $t = 0$ op het moment dat deze deelnemer aan het laatste stuk van de marathon van Rotterdam begint. Verder is a de afgelegde afstand. Welke formule voor a geldt voor het laatste deel van de loop van deze deelnemer?

★ **Opgave 1.5**

Fietser 1 gaat met een constante snelheid van 20 kilometer per uur (km/h) van A naar B. Fietser 2 gaat met een constante snelheid van 25 km/h van B naar A. De afstand tussen A en B is voor beide fietsers 150 kilometer. a is de afstand tot A in kilometer en t is de tijd in uren.

a Teken in een a,t-assenstelsel de grafiek van beide fietstochten.

b Stel voor beide fietsers een passende formule op voor het verband tussen a en t.

c Bij welke fietser is a recht evenredig met de tijd t?

d Bepaal met de grafische rekenmachine het tijdstip waarop beide fietsers elkaar passeren.

★★ **Opgave 1.6**

Vroeger reden auto's op benzine en soms op diesel.

Ga ervan uit dat benzine € 1,82 per liter kost en dat je met benzine gemiddeld 1 op 12 (1 liter per 12 kilometer) rijdt.
Ga er ook van uit dat diesel € 1,51 per liter kost en dat je met diesel gemiddeld 1 op 25 rijdt. Het aantal kilometers dat iemand in een jaar aflegt is a.

a Stel een formule op voor de brandstofkosten K (in euro) van een auto die op benzine rijdt, afhankelijk van het aantal afgelegde kilometers in een jaar.

b Stel een formule op voor de brandstofkosten K (in euro) van een auto die op diesel rijdt, afhankelijk van het aantal gereden kilometers in een jaar.

c Een auto die op diesel rijdt, is duurder in aanschaf en bovendien duurder qua wegenbelasting dan eenzelfde auto op benzine. Als dit betekent dat de auto op diesel per jaar € 800,00 duurder is, hoeveel kilometer per jaar moet je dan minimaal rijden als je een dieseluitvoering wilt kopen?

Toepassen

★★ **Opgave 1.7: Kolibries**

De kolibrie kan door de zeer snelle vleugelslag (gemiddeld zo'n 50 slagen per seconde, afhankelijk van de grootte van de vogel) in de lucht stil blijven hangen. Door deze snelle vleugelslag kan de kolibrie als enige vogel ook achteruit vliegen. Deze vogel kan zelfs recht omhoog en recht omlaag vliegen. Kolibries worden daarom de 'helikopters' onder de vogels genoemd. De jongen worden gedurende de eerste vier weken van hun leven 140 keer per dag door de vrouwtjeskolibrie gevoerd met nectar en insecten. De mannetjeskolibrie bemoeit zich niet met zijn kroost. De voedervluchten van de vrouwtjeskolibrie duren gemiddeld 2,5 minuut. We gaan er voor het gemak van uit dat de vrouwtjeskolibrie tijdens de voederperiode al haar vliegtijd besteedt aan het voederen van haar jongen.

Figuur 1.3

a Is het aantal vleugelslagen die de vrouwtjeskolibrie maakt, evenredig met het aantal vliegminuten?

b Stel een formule op die het verband weergeeft tussen v (het aantal vleugelslagen van de vrouwtjeskolibrie in de voederperiode) en m (het aantal vliegminuten).

c Bereken het aantal vleugelslagen dat een vrouwtjeskolibrie in de voederperiode per dag maakt.

★★ **Opgave 1.8: Stadswandeling**

Bij een stadswandeling in Amsterdam gebruikt Nigel een stadskaart met een schaal van 1 : 20000.

a Is het werkelijke aantal meters recht evenredig met het aantal centimeters op de stadskaart?

b Stel een formule op die het verband weergeeft tussen w (het werkelijke aantal meters) en k (het aantal centimeter op de kaart).

c De afstand van station Amsterdam Centraal naar het Museumplein is op de kaart 16 cm hemelsbreed. Nigel weet dat hij daar nog 30% bij op moet tellen om aan de loopafstand te komen. Hij loopt met een snelheid van 7 kilometer per uur. Bereken in minuten nauwkeurig hoeveel tijd Nigel nodig heeft om van Amsterdam Centraal naar het Museumplein te lopen.

1.2 Lineaire formules

Inleiding

Veel situaties die wij in het dagelijks leven tegenkomen, zijn te beschrijven als lineair verband tussen twee variabelen. In dit onderdeel leer je lineaire verbanden herkennen, er formules voor opstellen en deze formules te gebruiken om grafieken te maken en berekeningen uit te voeren.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- een formule bij een in woorden beschreven lineair verband opstellen;
- de grafiek van een lineair verband tekenen;
- berekeningen met lineaire verbanden uitvoeren.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij formules;
- werken met eenvoudige lineaire verbanden;
- de begrippen hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) en begingetal.

Voor de docent

Bij ‘Lineaire verbanden’ gaat het nu om het halen van zo'n lineair verband uit een tekst, het maken van een grafiek erbij en vooral ook het snel maken van een grafiek (geen grote tabel maken). Mogelijke opdrachten staan hieronder, de laatste is bedoeld om leerlingen zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- De grafische rekenmachine. Er wordt van uitgegaan dat ze de eerste beginselen daarvan hebben aangeleerd. Gebruik anders de practica op de Math4all website.
- Bij de derde opdracht hoort een stuk tekst, dat kan vooraf worden gekopieerd, het is als werkblad beschikbaar.

Opdracht 2.1

De kosten voor leidingwater zijn in een bepaalde regio € 1,25 per verbruikte kubieke meter en het vastrecht is € 65,00 per jaar. Je wilt weten hoeveel je per jaar kwijt bent aan waterverbruik. Noem de jaarlijkse kosten voor het waterverbruik K en het verbruikte aantal m^3 a.

Geef enkele rekenvoorbeelden en stel een formule op voor K afhankelijk van a en maak er een grafiek bij.

Welke getal bepaalt de helling van de grafiek?

Geef ook een voorbeeld van het berekenen van a als de kosten per jaar bekend zijn.

Toelichting

Eventuele hulpvragen zijn bijvoorbeeld “Hoe heb je gerekend?” en “Kun je in de berekeningen het getal voor het verbruikte aantal m^3 vervangen door een variabele (een letter)?”.

Hulpvragen voor de grafiek zijn bijvoorbeeld “Welke getallen moeten op de horizontale as? Welke schaalverdeling kies je dus?”, “Welke getallen moeten op de verticale as? Welke schaalverdeling kies je dus?” en “Is de grafiek zo voor iedereen die hem ziet meteen duidelijk?”.

Om het begrip ‘richtingscoëfficiënt’ of ook wel ‘hellingsgetal’ te introduceren kun je vragen stellen als “Wat gebeurt met de grafiek er als de prijs per m^3 omhoog gaat? En wat als het vastrecht omhoog gaat?”. Het zou goed zijn als die ook in hun eigen theorieoverzicht te voorschijn zou komen.

Het berekenen van a bij gegeven K kan door een vergelijking op te lossen met de balansmethode, maar ook gewoon door terugrekenen. Bespreek nog even beide manieren.

Uitwerking

Rekenvoorbeelden:

Bij 500 m^3 per jaar: $1{,}25 \cdot 500 + 65 = 690$ euro.

Bij 600 m^3 per jaar: $1{,}25 \cdot 1000 + 65 = 1315$ euro.

Bij 0 m^3 per jaar: $1{,}25 \cdot 0 + 65 = 65$ euro.

Formule: $K = 1{,}25a + 65$.

De grafiek is een rechte lijn door (0,65) en bijvoorbeeld (500,690). Als ze deze met de GR maken, laat ze dan de vensterinstellingen en een schets maken die voor iedereen zichtbaar is.

Iemand betaalde afgelopen jaar € 853,75 aan kosten voor het waterverbruik. Dus haar verbruik was: $1{,}25a + 65 = 853{,}75$ geeft $1{,}25a = 788{,}75$ en $a = 788{,}75/1{,}25 = 631$ m^3 water.

Of gewoon terugrekenen: $873{,}75 - 65 = 788{,}75$ en $788{,}75/1{,}25 = 631$ m^3 water.

Opdracht 2.2

Tussen de variabelen x en y bestaat het lineaire verband $y = 0{,}5x + 4$.

Je kunt op meerdere manieren een grafiek hierbij tekenen:

1. Maak een tabel, of bereken punten op de grafiek door waarden voor x in te vullen.
2. Gebruik het hellingsgetal en het startpunt op de y-as.
3. Werken met je grafische rekenmachine en handige vensterinstellingen kiezen.

Laat al deze manieren zien. Waarom heet dit een lineair verband?
Controleer je grafiek met behulp van je grafische rekenmachine.

Toelichting

Eventuele hulpvragen bij manier 1: “Waarom ga je liever voor x getallen invullen dan voor y?” en “Zie je een regelmaat ontstaan? Wat moet je daarvoor doen?”

Eventuele hulpvragen bij manier 2: “Welk getal is het hellingsgetal? En wat betekent dat hellingsgetal?” (bekijk eventueel manier 1 en de regelmaat daar) en “Hoe kun je makkelijk een startpunt vinden?”

Ga ook even in op de grafiek met de GR, stel vragen als: “Hoe kun je uit de gegeven formule de handige vensterinstellingen aflezen?”.

Probeer ze zover te krijgen dat ze de eigenschappen van een lineaire grafiek gaan opschrijven en daarbij ook aandacht hebben voor het gebruik van de grafische rekenmachine.

Uitwerking

1. Bij $x = 0$ hoort $y = 4$.
   Bij $x = 1$ hoort $y = 0{,}5 \cdot 1 + 4 = 4{,}5$.
   Bij $x = 2$ hoort $y = 0{,}5 \cdot 2 + 4 = 5$.
   Enzovoorts. Teken een grafiek door die punten.
2. Het hellingsgetal is 0,5, dus als je x met 1 verhoogt, dan wordt de y-waarde met 0,5 verhoogd. En je kunt starten in (0,4).
3. Bij het gebruik van je GR is het handig te bedenken dat de grafiek door (0,4) moet gaan en elke toename van x met 1 een tename van y met 0,5 betekent. Dat is nuttig voor het kiezen van de vensterinstellingen.

Het verband heet lineair omdat de grafiek een rechte lijn is, elke stap waarbij x met 1 wordt verhoogd, neemt de y-waarde met het vaste getal 0,5 toe.

Opdracht 2.3

De temperatuur van de buitenlucht hangt onder sommige omstandigheden lineair af van de hoogte boven de zeespiegel. Zeker bij een wandeling in de bergen of bij een ballonvaart kun je dat goed merken. Een vuistregel is dat elke 100 meter stijging een temperatuurdaling van 0,6 °C betekent. Stel je voor dat het op 0 meter hoogte 24 °C is.

Welke formule kun je opstellen voor de temperatuur (°C) afhankelijk van de hoogte (meter)? Bepaal met de grafische rekenmachine op welke hoogte de temperatuur voor het eerst onder 0 °C komt.

Toelichting

Deze opdracht is bedoeld om ook een beeld te krijgen van een dalende grafiek. De tekst staat op dit **Werkblad** en kan worden gekopieerd, maar de opdracht kan ook mondeling worden gegeven, eventueel door enkele belangrijke gegevens te laten opschrijven.

Mogelijke hulpvragen: “Welk getal is het hellingsgetal (de richtingscoëfficiënt)?”, “Hoe zie je aan dit hellingsgetal dat de grafiek daalt?” en “Hoe stel je de GR nu goed in? Hoe zorg je dat het nulpunt in beeld komt?”

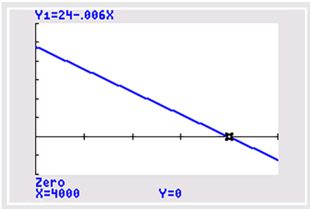
Probeer ze zover te krijgen dat ze aan het lijstje met eigenschappen van lineaire verbanden ook toevoegen wanneer er sprake is van daling, wat een nulpunt is.

Uitwerking

De temperatuurdaling per meter is: $\frac{0,6}{100} = 0,006$ °C

De formule is daarom $T = -0,006 \cdot h + 24$ als h de hoogte in meters en T de temperatuur in °C.

Maak vervolgens met de GR deze grafiek. Zorg ervoor dat het nulpunt (snijpunt met de x-as) in beeld komt.



Figuur 2.2

Bepaal met de grafische rekenmachine dat de temperatuur 0 °C is als $h = 4000$ meter.

Het nulpunt kun je ook uitrekenen door de vergelijking $24 - 0,006h = 0$ op te lossen.

Opdracht 2.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht met betrekking tot lineaire verbanden en hun grafieken.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd. Het is verstandig om daarbij een schets te maken van de grafiek van het algemene geval $y = a \cdot x + b$ en de rol van a en b duidelijk aan te geven met de juiste benamingen erbij.

Toelichting

Geef deze opdracht weer mondeling. Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Hier kun je het werken met GeoGebra (of Excel) goed inzetten: a en b invoeren als schuifbalkjes en de grafiek van $y = a \cdot x + b$ (laten) maken en bekijken wat het veranderen van a en/of b met de grafiek doet. Dit kun je zelf doen met je digibord, maar mooier is het om dit de groepjes leerlingen zelf te laten doen op eigen apparaten.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

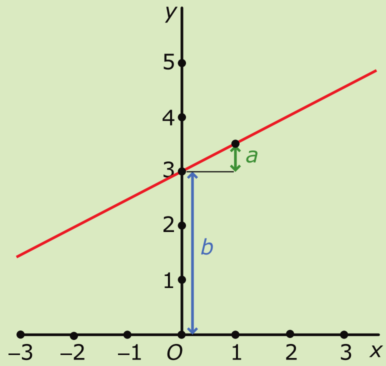
Bekijk de applet: Lineaire verbanden

Als er een **lineair verband** tussen y en x is, heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waarin:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname van y per stap van 1 van x;
- b het **begingetal**, de uitkomst bij $x = 0$.

Je zegt ook wel dat y een **lineaire functie** is van x.

De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0,b)$. Als je de waarde van x daarna met 1 verhoogt, neemt de uitkomst met a toe en als a negatief is, af. Het hellingsgetal a heet ook wel de **richtingscoëfficiënt**, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.



Figuur 2.3

Verwerken

★ **Opgave 2.1**

Het huren van een bepaald type auto bij een autoverhuurbedrijf kost per week $g = 0{,}09k + 75$. Hierbij is k het aantal gereden kilometers en g de kosten in euro's.

a Het verhuurbedrijf vraagt een vast bedrag per week. Welk bedrag is dat?

b Hoe groot zijn de kosten per gereden kilometer?

c Geef de formule voor de kosten van een huurauto die per week € 12,50 duurder is en die per kilometer € 0,10 kost.

★ **Opgave 2.2**

Bereken van de volgende lineaire formules algebraïsch de snijpunten van de bijbehorende grafieken met de assen. Doe dat zonder de grafische rekenmachine te gebruiken.

a $y_1 = 3x - 5$

b $y_2 = x - 4$

c $y_3 = -0{,}5x + 4$

d $y_4 = -2(x + 3)$

★ **Opgave 2.3**

Bekijk de tabel.

gewerkte uren u	0	2	5	9	10
kosten k (euro)	65	135	240	380	415

Tabel 2.1

a Leg uit waarom tussen k en u een lineair verband kan bestaan.

b Waaruit blijkt dat k niet recht evenredig is met u?

c Welke formule past bij de tabel?

d Bereken met de juiste formule de kosten als er zes uur is gewerkt.

e Bereken de kosten als er 2 uur en 50 minuten is gewerkt.

★ **Opgave 2.4**

De winst w (euro) van een feestavond hangt af van het aantal bezoekers n.
De formule is: $w = 2{,}5n - 300$.

a Bereken de winst als het aantal bezoekers 200 is.

b Wat is de betekenis van -300 in deze formule?

c Wat is de betekenis van het getal 2,5?

d Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van w met de horizontale as. Wat is de betekenis van dit punt?

★ ★ **Opgave 2.5**

Chiara en Leyla werken op zaterdag in de supermarkt en verdienen daar € 4,50 per uur. Zij overwegen om voor een callcenter te gaan werken om klanten te werven voor het energiebedrijf. Het basisloon ligt daar met € 3,20 per uur weliswaar wat lager, maar bij het callcenter krijg je per geworven klant een extra bedrag van € 2,00.

a Chiara wil op zaterdag maximaal acht uur werken. Onderzoek hoeveel klanten Chiara moet werven om bij het callcenter meer te gaan verdienen dan bij de supermarkt.

b Leyla denkt dat zij op zaterdag in staat is om drie, vier of vijf klanten te werven. Teken grafieken van het dagloon van Leyla in deze situaties. Onderzoek met deze grafieken hoelang (uur) Leyla maximaal mag doen over het werven van klanten om niet minder te gaan verdienen dan in de supermarkt. Rond af op halve uren nauwkeurig.

Toepassen

★ ★ Opgave 2.6: Gala

De vertegenwoordiger van het volleybalmerk 'Gala' verkoopt in Nederland via internet volleyballen voor € 48,00 per stuk. Het merk stelt daarnaast een bedrag van € 1000,00 beschikbaar aan de vertegenwoordiger om het merk te promoten. De vertegenwoordiger koopt de ballen in voor € 30,00 per stuk. Daarnaast heeft hij vaste kosten van € 2500,00.

a Stel formules op voor de kosten k en de opbrengst r afhankelijk van het aantal verkochte volleyballen b.

b Maak de grafieken van k en r met de grafische rekenmachine en ga met behulp van deze grafieken na hoeveel volleyballen de vertegenwoordiger moet verkopen om winst te maken.

★ ★ ★ Opgave 2.7: Fooi

Uit Amerikaans onderzoek in horecagelegenheden blijkt dat er tussen de fooi F in dollars en de hoogte van de rekening R in dollars een lineair verband bestaat. Een onderzoeker vond de volgende gegevens:
Bij een rekening van $ 20,00 hoort een fooi van $ 4,00.
Bij een rekening van $ 80,00 hoort een fooi van $ 13,00.

a Stel een formule op bij dit lineaire verband tussen F en R.

b Een ober brengt een klant een rekening van $ 45,00. Hoeveel fooi kan de ober verwachten?

1.3 Lineaire modellen

Inleiding

Op grond van meetresultaten kun je een lineair verband tussen twee variabelen veronderstellen. Dat is bijvoorbeeld het geval als meetpunten bij een verband tussen twee variabelen (vrijwel) op een rechte lijn liggen. In dit onderdeel leer je hoe je bij een aantal meetpunten een passende lineaire formule (lineair model) op kunt stellen.

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband herkennen in de grafische weergave van meetpunten;
- bij een lineair verband dat is gegeven door een aantal meetpunten een passende formule opstellen;
- lineair interpoleren en extrapoleren.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten).

Voor de docent

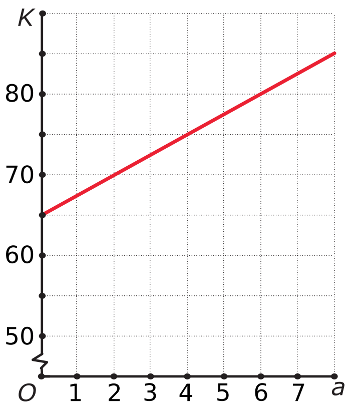
Bij ‘Lineaire verbanden’ gaat het nu om het opstellen van bijbehorende formules als twee punten van de grafiek zijn gegeven. Mogelijke opdrachten staan hieronder, de laatste is bedoeld om leerlingen zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Omdat bij de eerste opdracht grafieken zullen worden getekend is het beschikbaar hebben van voldoende roosterpapier erg nuttig.
- In de tweede opdracht zit een tabel. Het is niet de bedoeling die tabel in één keer aan de leerlingen te geven. Dit gaat stap voor stap en mondeling.

Opdracht 3.1

Stel een formule op bij deze grafiek.



Figuur 3.1

Toelichting

De grafiek staat op een **Werkblad**.

Leerlingen die hier al vanaf het begin moeite mee hebben terugverwijzen naar het voorgaande onderdeel met vragen als: "Hoe ziet de formule voor een lineair verband er altijd uit? En in deze situatie?", "Welke betekenis heeft het getal waarmee je x (hier a) vermenigvuldigt? En het andere getal?" en "Hoe kun je dus uit een grafiek die getallen aflezen? Of zelfs berekenen?"

Uitwerking

De grafiek gaat door (0,65) en (4,75).

Als a met 4 stappen toeneemt, neemt K dus met $75 - 65 = 10$ stappen toe.

Het hellingsgetal is daarom $\frac{10}{4} = 2{,}5$.

De gevraagde formule is $K = 2{,}5a + 65$.

Opdracht 3.2

Stel telkens een formule op bij het lineaire verband door de twee gegeven punten.

a. (0,5) en (1,7)
b. (0,5) en (2,11)
c. (0,5) en (2,7)
d. (1,6) en (2,10)
e. (1,6) en (5,26)
f. (5,12) en (6,14)
g. (5,12) en (9,20)
h. (5,3) en (8,3)
i. (0,5) en (1,3)
j. (0,5) en (3,-1)
k. (5,12) en (7,8)
l. (-3,4) en (-1,8)
m. (-6,12) en (-2,-4)
n. (5,12) en (8,14)
o. (5,12) en (8,10)

Toelichting

Leg uit dat de leerlingen steeds een formule moeten opstellen vanuit twee gegeven punten. Die setjes punten komen ze bij je halen en schrijven ze steeds bovenaan hun bord. Daaronder stellen ze de formule op. Als dit is gedaan kunnen ze een nieuw setje punten komen halen om weer bovenaan op hun bord te zetten. Als dit al meteen heel snel gaat, kun je wellicht enkele setjes overslaan.

Leerlingen die hier al vanaf het begin moeite mee hebben terugverwijzen naar het voorgaande probleem, via "Kun je iets met hoe je het voorgaande probleem hebt aangepakt?" Verder is het goed om in de gaten te houden vanaf welk koppeltje punten dit moeizamer gaat. Dan is er enige ondersteuning nodig, zo, dat ze later de vervolgvraag kunnen beantwoorden.

Probeer de leerlingen zover te krijgen dat ze beschrijven hoe je de formule opstelt van een lineair verband waarvan twee punten van de grafiek gegeven zijn.

Uitwerking

a. $y = 2x + 5$
b. $y = 3x + 5$
c. $y = x + 5$
d. $y = 4x + 2$
e. $y = 5x + 1$
f. $y = 2x + 2$
g. $y = 2x + 2$
h. $y = 3$
i. $y = -2x + 5$
j. $y = -2x + 5$

k. $y = -2x + 22$
l. $y = x + 7$
m. $y = -4x - 12$
n. $y = \frac{2}{3}x + 8\frac{2}{3}$
o. $y = -\frac{2}{3}x + 15\frac{1}{3}$

Opdracht 3.3

De bevolking van een stad is de laatste jaren gestaag gegroeid. In de tabel vind je gegevens.

tijd (jaar)	1960	1970	1980	1990	2000	2010
aantal inwoners (×100000)	2,1	3,8	5,3	6,6	8,3	9,8

Tabel 3.1

Hoe groot zal het aantal inwoners in 2020 en 2030 zijn? En hoe groot schat je het aantal inwoners in 1998?

Toelichting

De tabel staat op een **Werkblad**.

Dit is extrapoleren, ofwel waarden naar de toekomst voorspellen, op grond van een lineair model. Het meest voor de hand ligt hier om een rechte lijn door al deze punten te trekken, een lijn die er zo goed mogelijk doorheen gaat.

Eventuele hulpvragen: “Heb je al even gekeken hoe dit er in een grafiek uitziet?”, “Is er (ongeveer) een lineair verband?”, “Kun je daar een formule bij opstellen?”

Het is goed om het mogelijke verschil in benadering voor extrapoleren en lineair interpoleren te bespreken. In situaties zoals hier is extrapoleren op basis van de laatste twee getallen eigenlijk vrij onzinnig.

Wanneer termen als ‘extrapoleren’ en ‘interpoleren’ nog niet bekend zijn, is het goed om ze even te noemen.

Uitwerking

Kies eerst namen voor de variabelen, zoals:
N is het aantal inwoners (×100000).
t is de tijd in jaren vanaf 1960, dus $t = 0$ in 1960.

Als je bij de tabel van de bevolking van deze stad een grafiek tekent, lijken de meetpunten ongeveer op een rechte lijn te liggen. Hoewel de groei dus niet precies lineair is, kun je doen alsof het verband lineair is. Je tekent dan een rechte lijn die zo goed mogelijk door de meetpunten gaat.

De formule heeft dan de vorm: $N = a \cdot t + b$.

Een lijn die goed het verloop van de meetpunten beschrijft, gaat door bijvoorbeeld: $(20; 5{,}3)$ en $(50; 9{,}8)$. Daarmee bereken je $a = 0{,}15$.

De formule wordt dan: $N = 0{,}15 \cdot t + b$.

Eén van beide punten invullen geeft: $b = 2{,}3$.

Het lineaire model is dus: $N = 0{,}15t + 2{,}3$.

Met deze formule kun je voorspellen hoe groot het aantal inwoners in 2020 en 2030 zal zijn.

Voor de voorspelling in 1998 ligt lineair interpoleren tussen $(1990; 6{,}6)$ en $(2000; 8{,}3)$ heet meest voor de hand. Per jaar $\frac{8{,}3-6{,}6}{10} = 0{,}17$ (×100000) erbij geeft in 1998: $6{,}6 + 8 \cdot 0{,}17 = 7{,}96$, dus ongeveer 796000 inwoners.

Opdracht 3.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht met betrekking tot het opstellen van een formule bij een lineaire verband waarvan twee punten van de grafiek zijn gegeven.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd. Verwerk daarin ook de termen ‘interpoleren’ en ‘extrapoleren’.

Toelichting

Geef deze opdracht weer mondeling. Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Bekijk de applet: Lijn door twee punten

De formule van een lijn door de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ heeft de vorm $y = a \cdot x + b$.
a is het hellingsgetal; b de uitkomst bij $x = 0$

- $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- b bereken je door de coördinaten van één van de twee punten in te vullen.

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door meetpunten en kun je door die punten een rechte lijn trekken. Niet alle punten hoeven helemaal op deze lijn te liggen. De formule bij de lijn noem je dan een **lineair model** voor het verband tussen y en x.

Toepassingen van het gebruik van lineaire formules en modellen zijn:

- Het berekenen van tussenliggende waarden door te doen alsof de grafiek tussen de meetwaarden lineair is. Dit is **lineair interpoleren**.
- Het berekenen van waarden die eerder of verder liggen. Dus voorspellen, door te doen alsof de grafiek lineair verder loopt. Dit is **lineair extrapoleren**.

Verwerken

★ **Opgave 3.1**

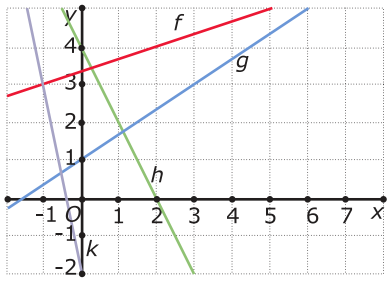
Je ziet vier grafieken van lineaire verbanden.

a Stel een formule van f op.

b Stel een formule van g op.

c Stel een formule van h op.

d Stel een formule van k op.



Figuur 3.2

★ **Opgave 3.2**

Een zuiver cilindervormige kaars is aan het opbranden. Het verband tussen de kaarslengte L (centimeter) en de brandtijd t (uur) is lineair. Na 2 uur branden is de kaars 12 cm lang, na 5 uur branden heeft hij nog een lengte van 6 cm. Stel een formule op voor L.

★ **Opgave 3.3**

Bij een eenparige beweging beweegt een voorwerp met een constante snelheid langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven met de formule: $s(t) = s(0) + v \cdot t$, met $s(t)$ de afgelegde weg (meters) na t seconden.

a Wat houdt $s(0)$ in?

b Wat houdt v in?

Je volgt een auto die op een Franse tolweg door een automatisch tolpoortje rijdt. Neem $s(0) = 0$ en $v = 30$ meter per seconde (m/s) voor deze auto.

c Geef de formule en teken de bijbehorende grafiek van de afgelegde weg $s(t)$.

Een andere auto is al eerder door het tolpoortje gereden en heeft 400 meter voorsprong op de auto uit b. Deze auto heeft een snelheid van 20 meter per seconde.

d Geef de formule die bij de beweging van deze auto hoort en teken de bijbehorende grafiek bij de afgelegde weg van de tweede auto in hetzelfde assenstelsel als de grafiek van de afgelegde weg van de eerste auto.

e Bereken op welk tijdstip de eerste auto de tweede auto inhaalt.

★ **Opgave 3.4**

Mensen verbruiken veel olie. Gelukkig wordt er nog regelmatig nieuwe olie gevonden, maar ooit raakt de olie op. De ‘reserves’ olie is de hoeveelheid olie die naar schatting nog uit de grond gehaald kan worden. De ‘olieconsumptie’ is de hoeveelheid olie die gebruikt wordt. Hoeveelheden olie worden uitgedrukt in vaten. Eén vat is 159 liter olie.

In 2003 was de olieconsumptie in de Verenigde Staten 20071000 vaten per dag. In 2003 hadden de Verenigde Staten ongeveer 293 miljoen inwoners.

a Bereken de olieconsumptie in de Verenigde Staten in 2003 in liters per inwoner per dag.

Aan het eind van 2003 waren de reserves in de hele wereld 1147,7 miljard vaten. Als de wereldolieconsumptie per jaar steeds gelijk zou blijven aan die van 2003, dan zouden deze reserves 41 jaar later helemaal verbruikt zijn: er is dan geen olie meer.

b Bereken hoeveel vaten olie per dag in de wereld geconsumeerd werden in 2003. Geef je antwoord in miljoenen.

c Je mag aannemen dat er geen nieuwe olie wordt gevonden. Stel formules op die beschrijven hoe de reserves R en de consumptie C (beide in miljarden vaten) in de loop van de tijd t (jaar) vanaf eind 2003 ($t = 0$) veranderen.

★ ★ **Opgave 3.5**

Er bestaat een verband tussen het aantal ademhalingen A dat een mens per minuut maakt, en de polsslag P in slagen per minuut. Een arts onderzoekt een groepje van vijftien mensen en krijgt de volgende meetwaarden:

A	16	16	19	20	20	23	24	26	27	28	30	34	36	41	44
P	57	59	66	68	71	70	72	84	82	80	91	94	105	116	120

Tabel 3.2

a Zet de gegevens uit de tabel in een grafiek. Zet A op de horizontale as.

b Bestaat er een lineair verband tussen A en P? Licht je antwoord toe.

c Trek een rechte lijn door de punten (16,57) en (44,120). Geeft deze lijn een zo goed mogelijke weergave van het verband? Licht je antwoord toe.

d Stel een formule op bij de getekende lijn.

e Bereken met behulp van de formule het aantal polsslagen bij 20, 24 en 28 ademhalingen per minuut. Wijken deze waarden veel af van de gemeten waarden?

f Bereken met behulp van de formule het aantal polsslagen van iemand met 32 ademhalingen per minuut.

g Het aantal polsslagen uit f kun je ook benaderen door het gemiddelde van 91 en 94 te nemen. Waarom? Ligt deze waarde dicht bij de waarde die je bij f berekend hebt?

★ ★ **Opgave 3.6**

Een onderzoeker wil weten of er een verband bestaat tussen het aantal eitjes N dat een zalm legt en de lengte L (centimeter) van een zalm. Je ziet de door hem gevonden gegevens in de tabel.

L	52	58	66	68	73	74	78	90
N	5620	7410	9805	10390	11890	12200	13380	17010

Tabel 3.3

a Onderzoek of er bij benadering een lineair verband bestaat tussen N en L.

Stel in dat geval een formule op voor N, waarbij je de kleinste en grootste waarde van L uit de tabel gebruikt.

b Geef een zo goed mogelijke schatting van het aantal eitjes dat een zalm van 85 cm lengte legt.

c Een zalm legt 4500 eitjes. Hoe lang zal deze zalm ongeveer zijn?

d Bereken met behulp van lineair extrapoleren het aantal eitjes dat een zalm van 120 cm lengte legt. Denk je dat dit een realistische schatting oplevert? Licht je antwoord toe.

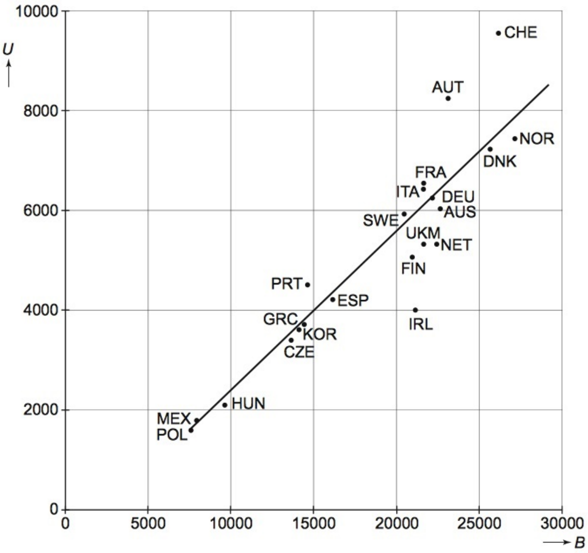
Toepassen

★ ★ Opgave 3.7: Onderwijsuitgaven

De OESO (Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling) doet jaarlijks onderzoek naar de onderwijsuitgaven van de landen die bij deze organisatie zijn aangesloten. In de grafiek is voor deze landen af te lezen hoeveel geld de overheid uitgeeft per leerling per jaar in het voortgezet onderwijs.

Op de horizontale as staat B, het bruto binnenlands product (bbp) per hoofd van de bevolking in euro's. Verticaal staat U, de uitgaven per leerling per jaar in euro's. Nederland staat in de grafiek met NET aangegeven.

In Nederland zijn de uitgaven per leerling per jaar voor alle schoolsoorten in het voortgezet onderwijs (vmbo, havo en vwo) ongeveer gelijk. Een havo leerling behaalt het diploma gemiddeld in 5,4 jaar.



Figuur 3.3

a Bereken hoeveel geld de Nederlandse overheid gemiddeld uitgeeft aan de havo-opleiding van een leerling die een havo-diploma behaalt.

In de grafiek is een lijn getrokken die zo goed mogelijk bij de punten past. Een land dat op de lijn ligt en een bbp van € 10000,00 heeft, zou dan € 2400,00 per leerling per jaar uitgeven. Een land op de lijn met een bbp van € 25000,00 zou dan € 7200,00 per leerling per jaar uitgeven.

Het punt van de Verenigde Staten ligt op die lijn en heeft met € 36800,00 het hoogste bbp van alle landen. Door deze hoge waarde van B is dit punt niet zichtbaar in de grafiek.

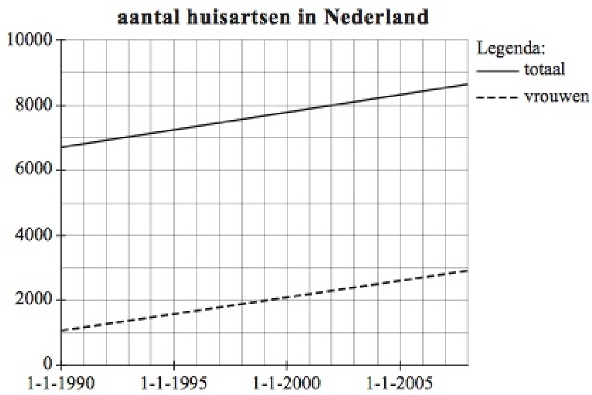
b Stel een vergelijking van de lijn op en bereken daarmee de uitgaven per leerling per jaar in de Verenigde Staten.

(bron: examen havo wiskunde A in 2006, eerste tijdvak)

★ ★ ★ Opgave 3.8: Vrouwelijke huisartsen

Een jaar of veertig geleden was een vrouwelijke huisarts nog een uitzondering. Maar hun aantal neemt toe. Bekijk de figuur. Ga ervan uit dat het verband lineair is.

Op 1 januari 1990 waren er 1078 vrouwelijke huisartsen en op 1 januari 2008 bleek dit aantal gestegen tot 2980. Het aantal vrouwelijke huisartsen H_V na t jaar, met $t = 0$ op 1 januari 1990, is te schrijven als: $H_V = a \cdot t + 1078$. De waarde van a is ongeveer 106.



Figuur 3.4

a Bereken a in één decimaal nauwkeurig.

Ook het totaal aantal huisartsen H_T neemt vanaf 1 januari 1990 toe. Hiervoor geldt de formule: $H_T = 107 \cdot t + 6703$, met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 1990.

Als de stijging van het totaal aantal huisartsen en van het aantal vrouwelijke huisartsen zich op dezelfde manier voortzet als in de formules voor H_T en H_V is beschreven, komt er een moment dat er evenveel vrouwelijke als mannelijke huisartsen zullen zijn.

b Onderzoek in welk jaar dat zal zijn.

(bron: pilotexamen wiskunde A havo in 2013, eerste tijdvak)

1.4 Lineaire verbanden vergelijken

Inleiding

Stel je hebt een loodgieter nodig. Bedrijf A rekent € 25,00 per uur en € 30,00 voorrijkosten. Bedrijf B rekent € 27,50 per uur en € 18,00 voorrijkosten. (Materiaalkosten zijn bij beide even hoog.)
De klus lijkt minstens een dagdeel te duren, welke van beide bedrijven is dan het voordeligst?
Om te berekenen vanaf hoeveel uur bedrijf A goedkoper is dan B kun je een lineaire ongelijkheid oplossen.

Je leert in dit onderwerp

- problemen te beschrijven als lineaire vergelijking of ongelijkheid;
- lineaire vergelijkingen en ongelijkheden systematisch oplossen.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten);
- formules opstellen bij lineaire verbanden.

Voor de docent

Bij ‘Lineaire verbanden’ gaat het nu om het oplossen van lineaire vergelijkingen en ongelijkheden met één variabele. Mogelijke opdrachten staan hieronder, de laatste is bedoeld om leerlingen zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Weer is de grafische rekenmachine nodig.
- Bij de tweede opdracht hoort een tabel met vergelijkingen, die kan vooraf worden gekopieerd, is als werkblad beschikbaar. Deel die lijst niet aan de leerlingen uit, zij krijgen ze stap voor stap mondeling te horen.

Opdracht 4.1

Je hebt een loodgieter nodig. Bedrijf A rekent € 25,00 per uur en € 30,00 voorrijkosten. Bedrijf B rekent € 27,50 per uur en € 18,00 voorrijkosten.
Hoe bereken je vanaf hoeveel uur werk bedrijf A goedkoper is dan bedrijf B? Materiaalkosten zijn bij beide bedrijven even hoog, dus daar houd je geen rekening mee.

Toelichting

Het is zeer de vraag of leerlingen hier een oplossing gaan zoeken met formules, gewoon een tabel maken helpt al. Dan is het zaak om ze ook op het spoor van formules en daarna een vergelijking oplossen te brengen.

Mogelijke hulpvragen: “Hoe kun je met behulp van je GR snel tabellen en grafieken maken?”, “Welke formules heb je daarvoor nodig? Hoe stel je die formules op?” en “En hoe vind je dan snel de waarde bij het omslagpunt”. En vervolgens: “Kun je dit ook met behulp van een vergelijking doen?”. Misschien goed om ze dan te vertellen dat het oplossen zonder GR vaak sneller gaat en dat het algebraïsch oplossen van een lineaire vergelijking echte examenstof is.

Uitwerking

De kosten K (euro) die afhangen van het aantal gewerkte uren a zijn:

- Bedrijf A: $K_A = 30 + 25a$.
- Bedrijf B: $K_B = 18 + 27{,}5a$.

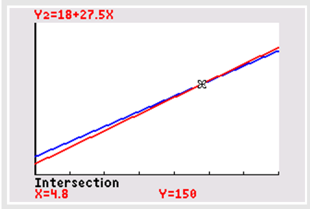
Deze kosten zijn gelijk als $K_A = K_B$, dus als $30 + 25a = 18 + 27{,}5a$.

Los deze vergelijking op met de balansmethode:

$$\begin{aligned} 30 + 25a &= 18 + 27{,}5a \\ 12 + 25a &= 27{,}5a \\ 12 &= 2{,}5a \\ a &= 4{,}8 \end{aligned}$$

A is dus even duur als B bij 4,8 gewerkte uren. Met grafieken op je GR kun je zien welk van beide bedrijven daarna voordeliger is. Die waarde 4,8 had je ook met je GR kunnen vinden, maar het is de bedoeling dat je dit algebraïsch doet.

Als de x-waarden, de gewerkte uren, groter zijn dan 4,8, dan zijn de y-waarden, de kosten, van A kleiner dan die van B. De oplossing van het probleem is dus: Als het aantal te werken uren groter is dan 4,8 dan kun je beter bedrijf A inhuren.



Figuur 4.1

Opdracht 4.2

Los de volgende vergelijkingen op:

a. $3x = 18$

b. $1{,}2x = 6$

c. $x + 5 = 9$

d. $x - 5 = 9$

e. $5 - x = 9$

f. $2x + 5 = 9$

g. $4 + 3x = 10$

h. $16 - 2x = 2$

i. $5{,}8 - 1{,}2x = 2{,}8$

j. $3(x - 5) = 6$

k. $3x - 2 = 9 - 3x$

l. $6 - 4{,}2x = 62 - 1{,}4x$

m. $\frac{1}{2}x - 5 = 2 + \frac{1}{4}x$

n. $\frac{1}{2}x - 5 = 2 + \frac{1}{3}x$

o. $\frac{1}{2}x - 5 = 2 + \frac{1}{3}x$

p. $\frac{1}{2}(x - 2) = \frac{1}{3}(x + 2)$

q. $\frac{1}{2}(x - 2) = \frac{1}{3}(x - 4) + 2$

r. $\frac{1}{3}(3 - 2x) = 2 + \frac{1}{4}(4 - 4x)$

s. $\frac{6-2x}{4} = \frac{4-x}{3}$

t. $\frac{4-3x}{5} + 2 = \frac{2-x}{3}$

Toelichting

Leg uit dat de leerlingen steeds een lineaire vergelijking moeten oplossen. Elke vergelijking komen ze bij je halen en schrijven ze steeds bovenaan hun bord. Daaronder komt hun oplossing. Als dit is gedaan kunnen ze een nieuwe vergelijking komen halen om weer bovenaan op hun bord te zetten. Als dit al meteen heel snel gaat, kun je wellicht enkele vergelijkingen overslaan.

Voor jezelf staat de lijst op een **Werkblad**.

Het is goed om in de gaten te houden vanaf welke vergelijking dit moeizamer gaat. Dan is er enige ondersteuning nodig, zo, dat ze later de vervolgvraag kunnen beantwoorden.

Uitwerking

a. $x = \frac{18}{3} = 6$

b. $x = \frac{6}{1,2} = 5$

c. $x = 9 - 5 = 4$

d. $x = 9 + 5 = 14$

e. $x = 5 - 9 = -4$

f. $2x = 9 - 5 = 4$
$x = 4/2 = 2$

g. $3x = 6$
$x = 6/3 = 2$

h. $2x = 14$
$x = 7$

i. $1,2x = 3$
$x = 2,5$

j. $x - 5 = 2$
$x = 7$

k. $6x = 11$
$x = \frac{11}{6}$

l. $2,8x = 56$
$x = 20$

m. $2x - 10 = 8 + x$
$x = 18$

n. $3x - 30 = 12 + 2x$
$x = 42$

o. $\frac{1}{2}x - 5 = 2 + \frac{1}{3}x$

p. $3(x-2) = 2(x+2)$
$3x - 6 = 2x + 4$
$x = 10$

q. $3(x-2) = 2(x-4) + 12$
$3x - 6 = 2x + 4$
$x = 10$

r. $4(3-2x) = 24 + 3(4-4x)$
$12 - 8x = 36 - 12x$
$x = 6$

s. $3(6-2x) = 4(4-x)$
$18 - 6x = 16 - 4x$
$x = 1$

t. $3(4-3x) + 30 = 5(2-x)$
$42 - 9x = 10 - 5x$
$x = 8$

Opdracht 4.3

Los op: $\frac{15-2x}{3} < \frac{x}{5} + 10$.

Toelichting

Eventuele hulpvragen: “Hoe pak je het oplossen van de bijbehorende vergelijking aan? Bekijk wat je hiervoor hebt gedaan.”, “Hoe los je de ongelijkheid op? Grafieken nodig?”

Uitwerking

Dat gaat bijvoorbeeld zo:

$$\begin{aligned}
\frac{15-2x}{3} &= \frac{x}{5} + 10 && \text{beiden zijden } \times 15\\
75 - 10x &= 3x + 150 && \text{beide zijden } -75\\
-10x &= 3x + 75 && \text{beide zijden } -3x\\
-13x &= 75 && \text{beide zijden } / -13\\
x &= \frac{75}{-13} = -\frac{75}{13}
\end{aligned}$$

Met behulp van een grafiek op de grafische rekenmachine vind je de oplossing van de ongelijkheid: $x > -\frac{75}{13}$. Maak als toelichting altijd even een schets van die grafieken.

Opdracht 4.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht met betrekking tot het oplossen van lineaire vergelijkingen en ongelijkheden.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Geef deze opdracht weer mondeling. Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Als je van twee lineaire verbanden

$y_1 = ax + b$ en

$y_2 = cx + d$

het snijpunt wilt berekenen, geldt:

$y_1 = y_2$ dus $ax + b = cx + d$.

Dit is een **lineaire vergelijking**.

Een lineaire vergelijking kun je oplossen met de balansmethode of met de grafische rekenmachine.

De **ongelijkheid** $y_1 < y_2$ oplossen, doe je zo:

- Los de bijbehorende vergelijking $y_1 = y_2$ op.
- Teken de grafieken y_1 en y_2.
- Lees de oplossing van de ongelijkheid af.

Verwerken

★ **Opgave 4.1**

Een leerlingenvereniging heeft een filmavond georganiseerd voor alle leerlingen van de school. Voor de filmavond heeft de vereniging € 400,00 uitgegeven. Om de gemaakte kosten te betalen, vraagt de vereniging € 2,50 voor een toegangskaartje. Noem de gemaakte winst W en het aantal leerlingen dat komt kijken l.

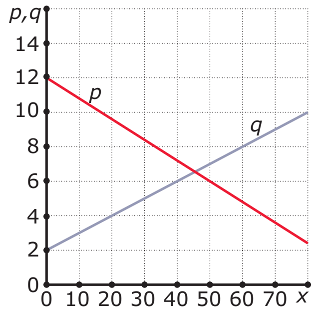
a Geef de formule voor W afhankelijk van l.

b Hoeveel kaartjes moet de vereniging verkopen om geen winst en geen verlies te draaien?

c Hoeveel kaartjes zijn er verkocht als de winst groter is dan € 1000?

★ **Opgave 4.2**

Bekijk de grafieken en los op: $p \leq q$. Rond je antwoord af op twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 4.2

★ **Opgave 4.3**

Twee personen willen vanaf het station met de taxi naar huis gebracht worden. Ze hebben de keuze tussen de treintaxi en de gewone taxi. De treintaxi kost een vast bedrag van € 3,00 per persoon, de gewone taxi rekent € 2,25 per rit en € 0,75 per gereden minuut.

a Geef een formule voor de kosten K van de gewone taxi, afhankelijk van het aantal minuten m dat de rit duurt.

b Bepaal bij welk aantal minuten het voordeliger wordt om een treintaxi te nemen.

c Bereken wat de rit kost bij dit aantal minuten.

d Beide taxi's rijden door de stad gemiddeld 60 km/h. De twee personen wonen in hetzelfde gebouw, op een afstand van 6 km van het station. Welk type taxi raad je deze personen aan? Licht je antwoord toe met een berekening.

★ **Opgave 4.4**

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op met de balansmethode.

a $55 - 6k = 4k - 25$

b $12 - 4x \geq 36 + 2x$

c $25 - 1\frac{2}{3}t > 30 - 3t$

d $1200 + 0{,}08a \geq 30 + 0{,}11a$

e $\frac{6-2x}{5} = \frac{4-x}{4}$

f $200 - (80 - x) = 4(x + 15)$

★★ **Opgave 4.5**

Een fabriek produceert een artikel dat voor € 10,00 wordt verkocht. Het maken van een exemplaar kost € 6,50 en de vaste kosten voor het onderhoud van de fabriek, de machines, de lonen, enzovoort zijn € 83000,00. Elk geproduceerd exemplaar wordt verkocht.

a Stel formules op voor de totale opbrengst TO en de totale kosten TK als functie van het geproduceerde aantal q.

b De waarde van q waarbij opbrengst en kosten gelijk zijn, heet het ‘break-even-point’. Bepaal dit ‘break-even-point’ met behulp van de grafische rekenmachine.

c Bereken dit ‘break-even-point’ ook met de balansmethode.

d Bereken de totale opbrengst en de totale kosten in het ‘break-even-point’.

e Bij welke waarden van q wordt er winst gemaakt?

f Bij welke productie wordt er € 50000 winst gemaakt?

Toepassen

★ ★

Opgave 4.6: Toets lineaire verbanden

De klassen 4 HA en 4 HB hebben eenzelfde toets gemaakt over lineaire verbanden. De 54 leerlingen in de twee klassen haalden samen gemiddeld een 6,4. De leerlingen uit klas 4 HA haalden gemiddeld een 6,8. De leerlingen uit klas 4 HB haalden gemiddeld een 5,9.

Hoeveel leerlingen zitten er in klas 4 HA?

★ ★ ★

Opgave 4.7: Kangoeroewedstrijd

Bij de kangoeroewedstrijd (een internationale wiskundige puzzelwedstrijd voor middelbare scholieren) kom je regelmatig problemen tegen die op te lossen zijn door het probleem te beschrijven met een vergelijking. Hieronder vind je daar een paar voorbeelden van.

a Over drie jaar zal Steven drie keer zo oud zijn als drie jaar geleden. Over vier jaar zal Steven ... keer zo oud zijn als vier jaar geleden. Welk getal moet er op de puntjes staan?

b In een winkel hebben twee cd's dezelfde prijs. Een van de cd's wordt 5% goedkoper, de andere wordt 15% duurder. Daardoor gaan ze € 6,00 in prijs verschillen. Hoeveel euro gaat de duurste cd kosten?

c Anna, haar moeder en haar vader zijn alle drie in januari jarig. In mei 2007 was Anna’s leeftijd $\frac{1}{6}$ van die van haar moeder. In mei 2008 was haar leeftijd $\frac{1}{6}$ van die van haar vader. Hoeveel jaar is Anna's vader ouder dan haar moeder?

d Fred en Karel gaan tegen elkaar hardlopen. Omdat Karel $\frac{9}{8}$ keer zo snel loopt als Fred, begint Karel met een halve ronde achterstand. Ze starten gelijktijdig. Hoeveel rondes heeft Fred gelopen als Karel hem voor de eerste keer inhaalt?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van lineaire vergelijkingen en ongelijkheden**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.5 Ongelijkheden en gebieden

Inleiding

Bij een muziekvoorstelling werden twee soorten kaartjes verkocht: een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. Als er nu voor € 1200,00 aan kaartjes is verkocht, dan past daarbij een vergelijking als $2{,}50k + 4{,}50v = 1200$ als k het aantal kinderkaartjes en v het aantal kaartjes voor volwassenen is.

Dit is ook een lineair verband, maar niet van de vorm $y = a \cdot x + b$. In dit onderdeel leer je werken met lineaire verbanden van de vorm $px + qy = r$.

Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- lineaire verbanden van de vorm $px + qy = r$ herleiden tot de vorm $y = ax + b$;
- combineren van lineaire verbanden van de vorm $px + qy = r$: snijpunt uitrekenen;
- combineren van lineaire ongelijkheden: het juiste gebied in een assenstelsel weergeven.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten);
- lineaire vergelijkingen oplossen;
- lineaire ongelijkheden oplossen.

Voor de docent

Bij 'Lineaire verbanden' gaat het nu om het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen en om het interpreteren van lineaire ongelijkheden met twee variabelen. Mogelijke opdrachten staan hieronder, de laatste is bedoeld om leerlingen zelf een theorieoverzicht te laten maken. Bij de opdrachten staan mogelijke hulpvragen die je als docent kunt stellen om ervoor te zorgen dat het ontwikkelproces doorgaat, ook als het groepje even vast lijkt te zitten. Ook kun je - bij groepjes die snel klaar lijken te zijn - meer uitdagende vragen stellen.

Gewenste materialen:

- Weer is de grafische rekenmachine nodig.
- Bij de tweede opdracht hoort een tabel met stelsels vergelijkingen, die is voor jezelf als werkblad beschikbaar. Deel die lijst niet aan de leerlingen uit, zij krijgen ze stap voor stap mondeling te horen, of je laat ze op het werkblad kijken.

Opdracht 5.1

Een muziekvoorstelling trekt driehonderd bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Je wilt weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten. Hoe pak je dat aan?

Toelichting

Het is ook nu de vraag of leerlingen hier een oplossing gaan zoeken met formules, gewoon een tabel maken helpt al. Dan is het zaak om ze ook op het spoor van formules en daarna een vergelijking oplossen te brengen. Maar ook dan is het de vraag of ze met twee onbekenden gaan werken, met één onbekende kan namelijk ook. Toch is het hier de bedoeling om ze op het spoor te zetten van het oplossen van een stelsel vergelijkingen.

Mogelijke hulpvragen: "Hoe kun je met behulp van je GR snel tabellen en grafieken maken?", "Welke formules heb je daarvoor nodig? Hoe stel je die formules op? En hoe kun je ze in je GR invoeren?".

Uitwerking

Noem bijvoorbeeld het aantal kinderen k en het aantal volwassenen v. Dan is:

- $k + v = 300$;
- $2{,}5k + 4{,}5v = 1110$.

Wil je weten hoeveel volwassenen er waren, dan herleid je beide formules tot de vorm $k = ...$

- $k = -v + 300$
- $k = -1{,}8v + 444$

Je ziet dat beide formules horen bij een lineair verband. Je kunt de bijbehorende rechte lijnen tekenen. Ook kun je de waarden van v van het snijpunt berekenen door de vergelijking $-v + 300 = -1{,}8v + 444$ op te lossen.

Het is ook goed mogelijk om maar met één onbekende te werken: noem het aantal kinderen k, dan is het aantal volwassenen $300 - k$ en kun je meteen komen op $2{,}5k + 4{,}5(300 - k) = 1110$.

Opdracht 5.2

Je ziet hier steeds twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden. Deze onbekenden moeten samen aan beide vergelijkingen voldoen. Bereken telkens beide onbekenden.

a. $y = 2x$ en $y = x + 4$

b. $y = 2x$ en $y = 6 - x$

c. $y = 2x$ en $x + y = 6$

d. $y = 2x$ en $x - y = 6$

e. $y = x + 2$ en $x + y = 6$

f. $y = 2x - 2$ en $3x + y = 6$

g. $2x + y = 2$ en $x + 2y = 6$

h. $2x - y = 2$ en $5x + 2y = 6$

i. $2x + 5y = 20$ en $2{,}8x + 2y = 12$

j. $2x - 5y = 20$ en $x + 5y = 35$

Toelichting

Leg uit dat de leerlingen steeds een stelsel van twee lineaire vergelijkingen moeten oplossen. Elke set vergelijkingen komen ze bij je halen en schrijven ze steeds bovenaan hun bord. Daaronder komt hun oplossing. Als dit is gedaan kunnen ze een nieuwe set komen halen om weer bovenaan op hun bord te zetten. Als dit al meteen heel snel gaat, kun je wellicht enkele sets vergelijkingen overslaan.

De lijst met stelsels vergelijkingen staat voor eigen gebruik op het **Werkblad**.

Het is goed om in de gaten te houden vanaf welke vergelijking dit moeizamer gaat. Dan is er enige ondersteuning nodig, zo, dat ze later de vervolgvraag kunnen beantwoorden.

Uitwerking

De stelsels kunnen worden opgelost door beide vergelijkingen in de vorm $y = ...$ te schrijven. Daarna kun je door gelijkstellen of met de GR het snijpunt bepalen. Meld vooraf dat overal exacte antwoorden moeten komen, dus dat de GR wel kan helpen, maar wellicht niet altijd.

a. $2x = x + 4$ geeft $x = 4$ en $y = 8$

b. $2x = 6 - x$ geeft $x = 2$ en $y = 4$

c. $y = 2x$ en $y = 6 - x$ geeft $2x = 6 - x$ en dus $x = 2$ en $y = 4$

d. $y = 2x$ en $y = x - 6$ geeft $2x = x - 6$ en dus $x = -6$ en $y = -12$

e. $y = x + 2$ en $y = 6 - x$ geeft $x + 2 = 6 - x$ en dus $x = 2$ en $y = 4$

f. $y = 2x - 2$ en $y = 6 - 3x$ geeft $2x - 2 = 6 - 3x$ en dus $x = 1{,}6$ en $y = 1{,}2$

g. $y = 2 - 2x$ en $y = 3 - 0{,}5x$ geeft $2 - 2x = 3 - 0{,}5x$ en dus $x = -\frac{2}{3}$ en $y = 3\frac{1}{3}$

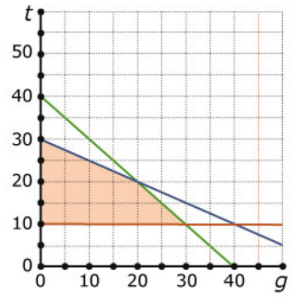
h. $y = 2x - 2$ en $y = -2{,}5x + 3$ geeft $2x - 2 = -2{,}5x + 3$ en dus $x = \frac{10}{9}$ en $y = \frac{2}{9}$

i. $y = -0{,}4x + 4$ en $y = -1{,}4x + 6$ geeft $x = 2$ en $y = 3{,}2$

j. $y = 0{,}4x + 4$ en $y = -0{,}2x + 7$ geeft $x = 5$ en $y = 6$

Opdracht 5.3

Een rijwielhandelaar krijgt een aanbod van een fietsfabriek: hij kan een bepaald type fiets inkopen voor € 650 per stuk. Een e-bike versie kan hij inkopen voor € 1300. Hij kan niet meer dan veertig fietsen in voorraad hebben en beschikt over maximaal € 39000 om te investeren. Verder koopt hij minstens tien e-bikes van dit type in, omdat hij verwacht die gemakkelijk te kunnen verkopen.



Figuur 5.2

Noem het aantal gewone fietsen dat de rijwielhandelaar inkoopt g en het aantal e-bikes t en beschrijf alle ongelijkheden waaraan deze twee variabelen moeten voldoen.

Op een gewone fiets wordt € 250 winst gemaakt en op e-bike € 400. De winkelier wil zo veel mogelijk winst maken met de verkoop van deze fietsen. De figuur hiernaast laat zien welke punten in het assenstelsel voldoen aan de voorwaarden die je hebt gevonden. Licht dat toe en bepaal bij welke waarden voor g en t de rijwielhandelaar de meeste winst maakt.

Toelichting

Deze opdracht staat ook op een **Werkblad**.

Eventuele hulpvragen: “Hoe beschrijf je in een ongelijkheid het feit dat hij maximaal veertig fietsen bergen?”, “En hoe beschrijf je de maximale hoeveelheid geld die hij investeert?” en “Welke beperkingen zijn er nog meer?”

Eventuele hulpvragen bij het tweede deel: “Hoe bereken je de winst in een punt van het toegelaten gebied?” en “Kun je bedenken in welk punten de winst zo groot mogelijk zal zijn?”

Uitwerking

De inkoop van fietsen kost $650g$ plus $1300t$ en kan maximaal 39000 euro zijn:

$650g + 1300t \leq 39000$

In totaal kan hij niet meer dan 40 fietsen in voorraad hebben: $g + t \leq 40$.

En hij koopt minstens 10 fietsen met trapondersteuning in: $t \geq 10$.

Ten slotte moet gelden: $g \geq 0$.

Dus: $650g + 1300t \leq 39000$, $g + t \leq 40$, $t \geq 10$ en $g \geq 0$.

Je kunt $650g + 1300t = 39000$ schrijven als $t = 30 - 0{,}5g$.

Je kunt $g + t = 40$ schrijven als $t = 40 - g$.

Het gebied met punten die aan alle voorwaarden voldoen ligt boven de lijn $t = 10$, onder de lijn $t = 40 - g$, onder de lijn $t = 30 - 0{,}5g$ en rechts van $g = 0$.

De winstformule is $W = 250 \cdot g + 400 \cdot t$.
De meeste winst wordt gemaakt aan de bovenrand van het gebied.

In het snijpunt (0,30) maakt de winkelier een winst van: $250 \cdot 0 + 400 \cdot 30 = 12000$ euro.

In (20,20) maakt de winkelier een winst van: $250 \cdot 20 + 400 \cdot 20 = 13000$ euro.

In (30,10) maakt de winkelier een winst van: $250 \cdot 30 + 400 \cdot 10 = 11500$ euro.

De winkelier kan dus het beste van beide soorten 20 fietsen kopen.

Opdracht 5.4

Bekijk wat iedereen heeft bedacht met betrekking tot het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen en het werken met gebieden bij ongelijkheden met twee variabelen.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Geef deze opdracht weer mondeling. Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Bekijk de applet: Lineaire ongelijkheid

Situaties kunnen soms wiskundig worden beschreven met ongelijkheden zoals: $k + v \leq 500$ of $5k + 3v \geq 10000$.

Om met deze ongelijkheden te kunnen rekenen, maak je er eerst een vergelijking van: $5k + 3v = 10000$

Zo'n vergelijking heeft met de variabelen x en y de algemene vorm: $px + qy = r$, waarin p, q en r getallen zijn. Omdat je $px + qy = r$ kunt schrijven als $y = ax + b$, is $px + qy = r$ een **lineair verband** tussen de variabelen x en y.

De bij dit lineaire verband horende **lineaire ongelijkheid** heeft de vorm:

$px + qy \leq r$ of $px + qy \geq r$

De punten (x, y) die aan zo'n ongelijkheid voldoen, vormen een **vlakdeel** met als **grenslijn** de lijn $px + qy = r$. De x-as en de y-as zijn ook vaak grenslijnen van zo'n vlakdeel.

Een **vlakdeel tekenen** van een ongelijkheid:

- Teken de grenslijn.
- Kies een punt dat niet op de grenslijn ligt en controleer of het aan de ongelijkheid voldoet. Met bijvoorbeeld het punt (0,0) reken je makkelijk.
- Kleur het vlakdeel waarvoor de ongelijkheid geldt.

Soms moet je meerdere grenslijnen tekenen om een vlakdeel in te sluiten.

Opmerking 1:
Ongelijkheden kunnen ook de vorm $px + qy > r$ of $px + qy < r$ hebben. De grenslijn hoort dan niet bij het vlakdeel. Die situatie komt niet of nauwelijks voor.

Opmerking 2:
Er zijn grafische rekenmachines die een grafiek in de vorm $px + qy = r$ of een bijbehorende ongelijkheid kunnen tekenen.

Verwerken

★ **Opgave 5.1**

Bereken x en y.

a Met de balansmethode als: $x + 3y = 10$ en $x + y = 4$.

b Met de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig als: $2x - y = 10$ en $3x + 5y = 4$.

★ **Opgave 5.2**

In een x,y-assenstelsel wordt een gebied bepaald door de lineaire ongelijkheden:

- $x + 2y \leq 10$
- $y \leq 2x$
- $0 \leq x \leq 8$
- $y \geq 0$

Teken dit gebied en lees de coördinaten van de hoekpunten af.

★ ★ **Opgave 5.3**

Een winkelier wil twee nieuwe merken waspoeder aan zijn klanten aanbieden. Beide merken zitten in dozen van vijf kilogram verpakt. Beide soorten dozen hebben dezelfde afmetingen. De winkelier heeft elke dag ruimte voor hoogstens vijftig van deze dozen waspoeder en hij wil in elk geval vijftien dozen van beide merken hebben staan aan het begin van de dag. Hij vult zijn schap met deze waspoeders uitsluitend aan het begin van elke dag bij. Merk A kost € 4,50 per doos, merk B kost € 5,25 per doos. a is het aantal dozen van merk A en b dat van merk B.

a Welke ongelijkheden gelden voor a en b?

b Geef in een assenstelsel alle mogelijke combinaties (a,b) weer.

Op een zekere dag heeft de winkelier voor precies € 183,00 aan dozen waspoeder van die twee merken verkocht.

c Welke vergelijking in a en b hoort hierbij?

d Hoeveel dozen waspoeder van merk A heeft de winkelier die dag verkocht?

★ **Opgave 5.4**

Om een heg te kunnen maken, koopt iemand jonge groenblijvende planten: 20 thuja´s en 12 jeneverbessen. Deze planten kosten samen € 267,00. Na het planten blijven 2 jeneverbessen over, maar zijn er 5 thuja's te weinig. Bij het tuincentrum worden de 2 jeneverbessen geruild voor 5 thuja's. De bijkomende kosten zijn € 18,00.

a Noem de prijs van een thuja t en die van een jeneverbes j. Welke twee lineaire verbanden zijn er tussen t en j?

b Wat kost een thuja en wat kost een jeneverbes?

★ ★ **Opgave 5.5**

Een koffiebranderij gebruikt twee soorten koffie: Arabica en Robusta. Na het branden en fijnmalen worden de twee soorten koffie gemengd tot de melanges ‘goudmerk’ en ‘zilvermerk’. Goudmerk is een mengsel van 400 gram Arabica koffie en 100 gram Robusta koffie. Zilvermerk is een mengsel van 200 gram Arabica koffie en 300 gram Robusta koffie. De koffiebranderij kan dagelijks maximaal 6000 kg Arabica koffie en 6000 kg Robusta koffie verwerken tot maximaal 20000 pakken zilvermerk en 12000 pakken goudmerk, elk van 500 gram. Noem het aantal pakken goudmerk g en het aantal pakken zilvermerk z.

a Welke ongelijkheden gelden voor g en z?

b Geef in een assenstelsel alle mogelijke combinaties (g,z) weer.

De winst voor de koffiebranderij op een pak goudmerk is € 0,80 en die op een pak zilvermerk is € 0,50.

c Bij hoeveel verkochte pakken goudmerk en pakken zilvermerk per dag maakt deze fabrikant de meeste winst?

Toepassen

★★
Opgave 5.6: Tablets

Een bedrijf assembleert twee typen tablets: type A en type B. Er is voor elk type tablet een assemblagelijn opgezet waarin per uur hoogstens 50 tablets kunnen worden samengesteld. Met het maken van tablet A is een werknemer 1 uur bezig. Het maken van tablet B kost een werknemer 1,5 uur. Er zijn elk uur 90 werknemers bezig met de assemblage van deze tablets. Er kunnen maximaal 70 tablets per uur worden verpakt. Noem a het aantal tablets per uur van type A en b het aantal tablets per uur van type B.

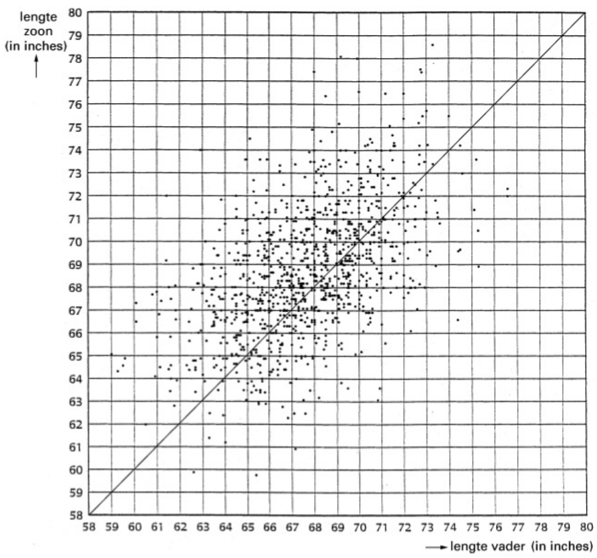
a Aan welke ongelijkheden moeten a en b voldoen?

b Teken het gebied in een a,b-assenstelsel met alle mogelijke combinaties (a,b).

c Tablet A wordt verkocht voor € 240,00 per stuk, tablet B voor € 300,00 per stuk. Hoeveel bedraagt de maximale opbrengst bij de verkoop van deze tablets als de hele productie ook daadwerkelijk wordt afgezet?

★★★
Opgave 5.7: Vaders en zonen

De Engelsman Karl Pearson was een van de grondleggers van de moderne statistiek. Hij heeft zich vaak beziggehouden met de statistiek van biologische onderwerpen. Ongeveer een eeuw geleden onderzocht hij, samen met zijn collega Alice Lee, of in Engeland zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders. Zij vergeleken de lengtes van 1064 zonen en hun vaders. De zonen studeerden allen aan een Londonse universiteit.



Figuur 5.3

In de grafiek zie je een overzicht van de resultaten. Elke stip stelt een vader-zoon-paar voor. De lengte van de vader staat op de horizontale as, de lengte van de zoon op de verticale as. De lengtes zijn gegeven in inches (1 inch = 2,54 centimeter).

In de grafiek is een lijn getekend. Als een stip op deze lijn ligt, zijn de vader en de zoon precies even lang. We noemen een vader en zijn zoon ongeveer even lang als ze minder dan 2 inch in lengte verschillen.

a Geef de ongelijkheden die horen bij het gebied dat hoort bij vaders en zonen die ongeveer even lang zijn.

b Kun je aan de hand van het aangegeven gebied in a concluderen dat de zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders? Licht je antwoord toe.

(naar: examen wiskunde A in 2003, eerste tijdvak)

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

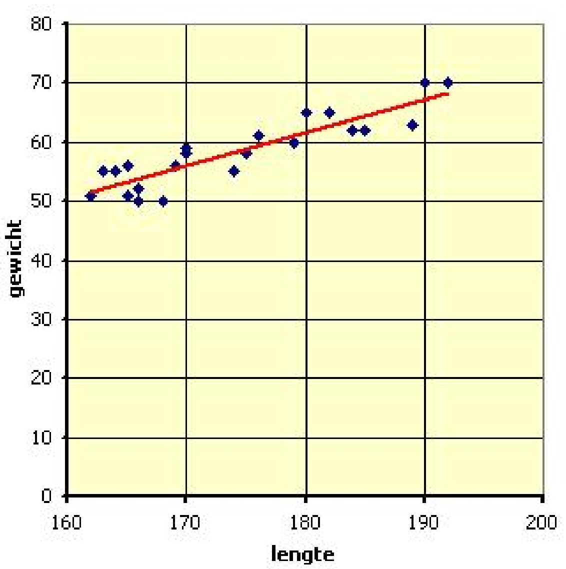
Begrippenlijst

- recht evenredig — evenredigheidsconstante — hellingsgetal
- lineaire functie — hellingsgetal = richtingscoëfficiënt
- lineair model
- lineaire vergelijking — lineaire ongelijkheid
- lineaire vergelijking en lineaire ongelijkheid met twee variabelen

Activiteitenlijst

- een recht evenredig verband tussen twee variabelen herkennen
- een lineaire functie herkennen — hellingsgetal en begingetal gebruik om de grafiek te tekenen — een lineaire functie opstellen vanuit een begingetal en een hellingsgetal
- een lineaire functie opstellen vanuit twee gegeven punten
- lineaire vergelijkingen en ongelijkheden systematisch oplossen
- gebieden bij lineaire ongelijkheden tekenen — eenvoudige stelsels lineaire vergelijkingen oplossen

Achtergronden



Figuur 6.1

In praktijksituaties wordt een verband tussen twee variabelen vaak onderzocht door te meten. Een eenvoudig voorbeeld is het verband tussen lengte en gewicht bij mensen. Langere mensen zullen gemiddeld wel zwaarder zijn dan kleinere, dus het lijkt er op dat er tussen lengte L (cm) en gewicht G (kg) een verband bestaat. Dat kun je voor scholieren in 4-havo bijvoorbeeld onderzoeken door een steekproef te nemen (bijvoorbeeld alle havo 4-leerlingen van een bepaalde school) en daarvan lengte en gewicht te meten. Als je die gegevens in een Excelbestand zet en vervolgens een grafiek (kies grafiektype 'Spreiding') maakt, kun je bekijken of er als grafiek ongeveer een rechte lijn uitkomt. In Excel kun je de rechte lijn die het beste bij je meetpunten past, laten tekenen (Invoegen: Trendlijn). Zelf kun je er dan wel een formule bij maken. Excel past hierbij lineaire regressie toe. Het verband is alleen betrouwbaar als je meetpunten ook echt redelijk dicht bij de getekende trendlijn liggen.

Testen

★ **Opgave 6.1**

Los de lineaire vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $\frac{1}{6}x + 5 = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x$

b $40 + 0{,}16a \leq 36 + 0{,}18a$

c $\frac{3x-5}{4} + 2 > \frac{1}{8}x + 1\frac{1}{2}$

d $25(x - 10) = 110 - 20x$

★★ **Opgave 6.2**

Een zwembad vraagt € 3,00 toegang per bezoek. Met een abonnement is de toegang € 1,25 per bezoek. Een abonnement kost € 17,50 per jaar. Bereken algebraïsch vanaf welk aantal bezoeken per jaar het voordeliger is om een abonnement te kopen.

★ **Opgave 6.3**

Twee hardlopers lopen 1000 meter in een vrijwel constant tempo. Ton loopt met een snelheid van 15 km per uur, Henk met een snelheid van 12 km per uur. Henk begint 2 minuten eerder aan de 1000 meter dan Ton.

a Hoe groot zijn hun snelheden in meters per minuut?

b Hoeveel meter ligt Henk op Ton voor als Ton aan zijn 1000 meter begint?

c Voor Ton geldt de formule $a = 250t$, waarin t de tijd en a de afgelegde afstand (vanaf de start van de 1000 meter). Welke eenheden zijn er gebruikt? Is voor Ton a recht evenredig met t?

d Welke formule met dezelfde variabelen geldt dan voor Henk? Is voor Henk a recht evenredig met t?

e Breng beide grafieken in beeld. Wie is het eerst aan het einde van de 1000 meter gekomen en hoeveel ligt hij dan op de ander voor?

★ **Opgave 6.4**

De huurprijs van een kopieerapparaat is opgebouwd uit € 225,00 per maand en € 0,06 per gemaakte kopie.

a Geef een formule voor de huurprijs h in euro's per maand, afhankelijk van het aantal gemaakte kopieën n.

b Hoeveel kopieën zijn er gemaakt als de huur € 378,96 is?

Een andere firma biedt een gelijkwaardig kopieerapparaat aan tegen de huurprijs van € 0,10 per gemaakte kopie, zonder daarbij een vast bedrag per maand te rekenen.

c Bij welk aantal gemaakte kopieën is deze tweede aanbieder voordeliger?

★ **Opgave 6.5**

Rachel hangt verschillende gewichten aan een veer en meet de uitrekking. m is de massa van de gewichten in grammen, u is de uitrekking van de veer in centimeters. Ze zet de meetwaarden in een tabel.

m	10	20	30	40	50	60	70	80
u	4,8	10,3	15,1	19,7	25,0	29,8	35,2	40,1

Tabel 6.1

a Zet de punten in een assenstelsel. Waarom is er sprake van een lineair verband (bij benadering)?

b Geef de formule die u uitdrukt in m.

c Als er 50 gram aan de veer hangt, is de totale lengte l van de veer 35 cm. Geef de formule die l uitdrukt in m.

Een tweede veer is zonder gewicht eraan 8 cm lang en met 10 gram eraan 15,5 cm lang.

d Geef de formule die de lengte l van deze tweede veer uitdrukt in m.

e Er is een massa die ervoor zorgt dat de totale lengte van beide veren gelijk is. Bereken deze massa.

★ ★ **Opgave 6.6**

Iemand investeert € 10000 die voor hem wordt belegd in twee aandelenfondsen A en B. De aandelen in fonds A leveren minder winst op, maar er is weinig risico dat deze aandelen sterk in waarde zullen dalen. De aandelen in fonds B lijken meer winst te gaan opleveren, maar er is een groter risico aan verbonden. Fonds A levert na een jaar een winst van 10% op, fonds B levert dat jaar 14% winst op. In totaal wordt er € 1180 winst aan deze investeerder uitgekeerd. a is het bedrag dat voor hem in fonds A is belegd, b is het bedrag dat in fonds B is belegd.

a Aan welke twee formules moeten a en b voldoen?

b Bereken met behulp van een vergelijking hoeveel geld er voor de investeerder in fonds A is belegd.

★ **Opgave 6.7**

Een fabrikant produceert twee soorten papieren zakdoekjes in pakjes van tien stuks. In een wit pakje zitten geurloze zakdoekjes, in een groen pakje zitten zakdoekjes met een mentholgeur. Voor de productie van deze zakdoekjes is nodig:

- voor een pakje geurloze zakdoekjes: 20 gram papier en 1 wit hoesje
- voor een pakje mentholzakdoekjes: 25 gram papier, 1 centiliter mentholoplossing en 1 groen hoesje

Per dag is beschikbaar: 100 kilogram papier, 20 liter mentholoplossing, 3000 witte hoesjes en 2500 groene hoesjes. x is het aantal pakjes geurloze zakdoekjes dat per dag wordt geproduceerd en y is het aantal geproduceerde pakjes mentholzakdoekjes per dag.

a Aan welke ongelijkheden moeten x en y voldoen?

b Teken het gebied met alle mogelijke combinaties (x, y) in een assenstelsel.

De winst op een pakje geurloze zakdoekjes is € 0,08 en die op een pakje mentholzakdoekjes is € 0,09.

c Bereken de maximale winst die haalbaar is.

★ ★ **Opgave 6.8**

In de zeventiger jaren bestonden verschillende tarieven voor het gebruik van aardgas (voor het gemak zijn de bedragen omgerekend van gulden in euro). In een bepaalde gemeente geldt dan:

- bij een jaarverbruik tot en met 600 kubieke meter (m^3): vastrecht € 21,00 per jaar en daarbovenop € 0,13 per verbruikte m^3 (klein verbruik)
- bij een jaarverbruik van meer dan 600 kubieke meter (m^3): vastrecht € 48,00 per jaar en daarbovenop € 0,08 per verbruikte m^3 (groot verbruik)

a De grafiek voor het jaarverbruik valt in twee delen uiteen. Voor elk van die delen zijn de jaarlijkse kosten een lineaire functie van a, het aantal verbruikte m^3. Geef van elk van die lineaire functies een formule.

b Teken een grafiek van de jaarlijkse kosten K voor het gasverbruik a lopend van 0 tot 900 kubieke meter (m^3).

c Een tuinder die aan de meterstand ziet dat hij op een jaarverbruik van ongeveer 590 m^3 uit zal komen, verbrandt gas af. Wat denk je dat gas afbranden is en waarom doet de tuinder dat?

d Vanaf welk jaarverbruik levert het gas afbranden een besparing op?

e Welke maatregelen kan het gasbedrijf treffen om gas afbranden te voorkomen?

Toepassen

★ Opgave 6.9: Afgelegde weg, snelheid en versnelling

In Nederland geldt op sommige plaatsen een maximumsnelheid van 100 km/uur. Een automobilist rijdt omdat er verder vrijwel geen verkeer op de weg is toch 140 km/uur op zo'n weggedeelte. Een verdekt opgestelde motoragent ziet hem voorbijschieten en zet de achtervolging in. Neem $t = 0$ op het moment dat de motor op topsnelheid is. Dit is 16 seconden nadat de auto de motoragent passeert; de motor heeft dan 300 m afgelegd. Neem ook aan dat de auto met een constante snelheid rijdt en de motor een constante topsnelheid van 200 km/h heeft.

a Hoeveel meter voorsprong heeft de auto op het moment dat de motor op topsnelheid is?

b Stel een formule op voor de afgelegde weg $a(t)$ van de auto. Kies geschikte eenheden.

c Stel een formule op voor de afgelegde weg $m(t)$ van de motor op topsnelheid.

d Hoeveel seconden nadat hij op topsnelheid rijdt heeft de motor de auto ingehaald?

★ ★ Opgave 6.10: Cijfers vaststellen

Bij het bepalen van het cijfer van een toets wordt uitgegaan van een lineair verband tussen de score s en het cijfer c. Neem aan dat de maximale score 80 punten is. Bij een score van 80 punten hoort als cijfer een 10, bij een score van 0 punten hoort als cijfer een 1. De omslagscore is de score waarbij het cijfer 5,5 (dus net voldoende) is.

a Met welke formule kun je de score omzetten naar een cijfer?

b Hoeveel bedraagt de omslagscore?

Als een toets zeer slecht wordt gemaakt, dan kun je als docent de cijfers wat ophogen door de omslagscore te veranderen. Bijvoorbeeld verlaag je de omslagscore met 5 punten. Nog steeds levert een score van 0 punten een 1 en een score van 80 punten een 10 op. De grafiek van c als functie van s bestaat dan uit twee lineaire gedeelten.

c Welke twee formules heb je nu nodig om het cijfer te berekenen?

d Welk cijfer krijgt iemand die zonder ophogen een 6 zou krijgen?

Is een toets daarentegen erg gemakkelijk, dan kan de docent de cijfers naar beneden bijstellen door de omslagscore te verhogen. Stel dat een docent met zichzelf afspreekt dat hij achteraf de omslagscore met maximaal 5 punten zal verlagen of verhogen, afhankelijk van de resultaten van de toets.

e Je zou zonder bijstelling een 5,8 halen. Welk cijfer kan dit maximaal nog worden? En minimaal?

★ ★ Opgave 6.11: Economisch evenwicht

Economen werken vaak met stelsels vergelijkingen. Het gaat daarbij om variabelen als prijs, hoeveelheid, inkomsten, winst, en dergelijke. Een voorbeeld daarvan is een model van vraag en aanbod op een graanmarkt. Vraag en aanbod in een periode hangen af van de prijs gedurende die periode, zoals je in de tabel kunt zien. Bij een (te) lage prijs ontstaat er een grote vraag en een laag aanbod. Daardoor gaat de prijs weer omhoog.

	prijs per ton	totale vraag	totale aanbod
	p	q_v	q_a
periode 1	€ 200,00	5000 ton	2000 ton
periode 2	€ 400,00	4000 ton	5000 ton
periode 3	€ 600,00	3000 ton	8000 ton

Tabel 6.2

Er zijn drie variabelen, namelijk p (de prijs per ton in euro), q_v (de totale vraag in ton) en q_a (het totale aanbod in ton). Economen zijn geïnteresseerd in de waarde voor p waarbij vraag en aanbod in evenwicht zijn. Dus: $q_v = q_a$.

a Teken in één figuur de grafieken van q_a uitgezet tegen p en van q_v uitgezet tegen p.

De grafieken suggereren dat je lineaire formules voor q_a en q_v afhankelijk van p kunt opstellen.

b Stel deze formules op.

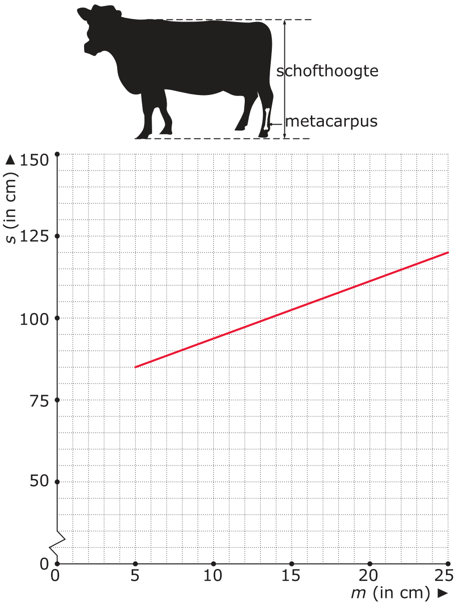
c Bereken de evenwichtsprijs, dus de prijs waarvoor $q_v = q_a$.

d Wat gebeurt er met de evenwichtsprijs als de vraag afneemt?

Examen

★ ★ **Opgave 6.12: Schofthoogte**

Oudheidkundigen proberen informatie te krijgen over de voedselsituatie van vroegere bewoners van een nederzetting. Uit botjes in afvalputten blijkt welke dieren men vroeger at en soms ook hoeveel. Niet bekend is hoeveel voedsel een rund uit die tijd opleverde, maar daarover zou de grootte van het dier informatie kunnen geven. Als maat voor de grootte neemt men de schofthoogte. Meestal ontbreken er botten die nodig zijn om de schofthoogte te bepalen. Vaak treft men wel een middenvoetsbeentje (metacarpus) aan. Men heeft voor twee runderrassen, A en B, kunnen vaststellen dat er tussen de metacarpus en de schofthoogte een verband bestaat. Dat verband verschilt per ras. De grafiek geeft het verband tussen de schofthoogte s en de lengte van de metacarpus m voor ras A.



Figuur 6.2

a Stel de formule op die bij deze grafiek past.

Voor ras B geldt de formule: $s = 5m + 16$, met $5 \leq m \leq 25$.

b Neem de grafiek over en teken in rood de grafiek bij de formule van ras B in die figuur.

c Bereken in millimeters nauwkeurig bij welke waarde van m de schofthoogten van beide rassen gelijk zijn.

In theorie zou bij opgegeven waarden van m en s van een dier vastgesteld kunnen worden of het een dier van ras A of van ras B betreft, met uitzondering van de situatie zoals bedoeld in c. In werkelijkheid is het verband tussen de lengte van de metacarpus en de schofthoogte niet zo precies als de formules aangeven. We nemen aan dat bij elke lengte van de metacarpus de schofthoogte kan variëren van 2 cm onder de aangegeven waarde tot 2 cm erboven.

d Bepaal met behulp van de grafieken bij welke lengtes van de metacarpus er problemen kunnen optreden bij het vaststellen van het ras.

Uit de schofthoogte kan bij benadering het levend gewicht van een rund worden afgeleid. Er blijkt een verband te bestaan dat nagenoeg lineair is. Gegevens over dit verband staan in de tabel.

schofthoogte (cm)	levend gewicht ras A (kg)	levend gewicht ras B (kg)
110	400	380
120	470	435

Tabel 6.3

De lengte van een gevonden metacarpus is 21 cm. Het botje kan van een rund van ras A of van ras B zijn.

e Bereken voor een rund van ras A en voor een rund van ras B het levend gewicht bij een metacarpus van 21 cm.

(bron: examen havo wiskunde A in 1990, eerste tijdvak)

★ ★

Opgave 6.13: Veldkrekels

Onderstaande tekst is ontleend aan het *Brabants Dagblad* van 28 mei 1997.

> De veldkrekel is een toonkunstenaar. Moeiteloos sjirpt hij een hoge C. Het tempo van de roepzang is afhankelijk van het weer. Bij fris weer laat de veldkrekel gemiddeld één sjirp per seconde horen, bij warm weer wel gemiddeld vijf,met alle variaties daartussen. Sterker, de veldkrekel kan eigenlijk wel als een thermometer gebruikt worden.
> De onderzoeker M. Duijm heeft daar eens een berekening voor uitgedokterd. Het rekenvoorschrift luidt: neem het gemiddelde aantal sjirpen per vijf seconden, tel er zeven bij op, en je weet de temperatuur in graden Celsius.
> Midas Dekkers evenwel hanteert een rekenvoorschrift waarbij je moet uitgaan van het gemiddeld aantal sjirpen per minuut. Je trekt er veertig van af, deelt de uitkomst door zeven en telt er tien bij op.

Stel dat een krekel op een zeker moment gemiddeld 2,4 sjirpen per seconde maakt. Als we met de twee rekenvoorschriften de temperatuur op dat moment berekenen, vinden we twee heel verschillende uitkomsten.

a Hoeveel graden verschillen die uitkomsten? Licht je antwoord toe.

b Stel voor M. Duijm en voor Midas Dekkers de formule op die de temperatuur t (in °C) uitdrukt in het gemiddeld aantal sjirpen n per seconde.

Voor het verschil dat bij a gevonden is, is een eenvoudige verklaring: niet alle krekels sjirpen hetzelfde. Het rekenvoorschrift van Duijm geldt voor de veldkrekel, terwijl Dekkers het heeft over de sneeuwboomkrekel. Bij alle soorten krekels sjirpen de mannetjes om wijfjes te lokken. De wijfjes herkennen hun eigen soort aan de sjirpsnelheid, dus aan het aantal sjirpen per seconde.

c Bij welke temperatuur kan het veldkrekelvrouwtje geen verschil horen tussen een veldkrekelmannetje en een sneeuwboomkrekelmannetje? Licht je antwoord toe door algebraïsch een bijpassende vergelijking op te lossen.

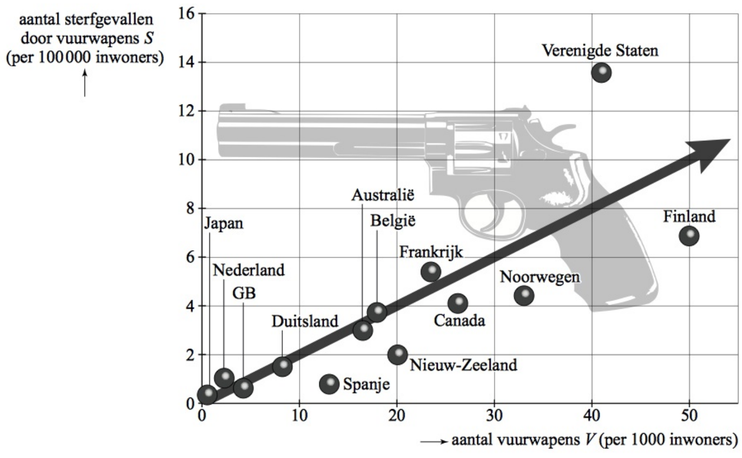
(naar: examen wiskunde A havo 1999, tweede tijdvak)

★ ★

Opgave 6.14: Vuurwapens

De regels omtrent het vuurwapenbezit zijn per land verschillend. Deze regels staan ook wel eens ter discussie. Tegenstanders van vuurwapenbezit beweren dat het gebruik van wapens toe zal nemen als mensen makkelijker aan vuurwapens kunnen komen.

Voorstanders van vuurwapenbezit zeggen dat het niet de wapens zijn die doden, maar de mensen. Zij vinden dat mensen vrij moeten zijn om een vuurwapen aan te schaffen, omdat meer vuurwapens niet betekent dat er dan ook meer gebruik van wordt gemaakt.



Figuur 6.3

Het vuurwapenbezit en het aantal dodelijke slachtoffers door vuurwapens is in een aantal landen onderzocht. De onderzoeksresultaten zie je in de grafiek.

De grafiek geeft het verband weer tussen het jaarlijkse *aantal sterfgevallen door vuurwapens* S (per 100000 inwoners) en het *aantal vuurwapens* V (per 1000 inwoners). Behalve de gegevens van een aantal landen is in de grafiek ook een trendlijn getekend. Voor landen op de trendlijn is er sprake van een evenredig verband tussen S en V.

Zowel voorstanders als tegenstanders van vuurwapenbezit kunnen de grafiek gebruiken als steun voor hun standpunt.

a Geef een argument dat voorstanders uit deze grafiek kunnen halen en geef een argument dat tegenstanders uit de grafiek kunnen halen.

Nederland heeft ongeveer 17 miljoen inwoners, de Verenigde Staten ongeveer 295 miljoen.

b Bereken met behulp van de grafiek hoeveel keer zo groot het jaarlijks aantal sterfgevallen door vuurwapens in de Verenigde Staten is, vergeleken met Nederland.

In 2005 heeft de bevolking van Brazilië zich in een referendum uitgesproken tegen het beperken van de verkoop van vuurwapens. En dat terwijl er in dit land met 180 miljoen inwoners jaarlijks zo'n 40000 mensen sterven door vuurwapengebruik.

Ga ervan uit dat Brazilië op de trendlijn ligt, zodat je gebruik kunt maken van het evenredige verband tussen S en V.

c Bereken met behulp van dit evenredige verband het totaal aantal vuurwapens in Brazilië.

(bron: examen havo wiskunde A in 2009, eerste tijdvak)

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★★	★★★
1	**Recht evenredig**	★	★★	★★★
	Recht evenredige verbanden herkennen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.5 ☐ T6.3 ☐ T6.4 ☐	1.4 ☐ 1.7 ☐ 1.8 ☐ T6.2 ☐ T6.14 ☐	
	Een formule bij een recht evenredig verband opstellen.	1.3 ☐ 1.5 ☐ T6.3 ☐ T6.4 ☐	1.4 ☐ 1.6 ☐ 1.7 ☐ 1.8 ☐ T6.2 ☐ T6.14 ☐	
	Een grafiek bij een recht evenredig verband maken.	1.5 ☐ T6.3 ☐		
	Berekeningen bij een recht evenredig verband uitvoeren.	1.5 ☐ T6.3 ☐	1.6 ☐ 1.7 ☐ 1.8 ☐ T6.14 ☐	
2	**Lineaire formules**	★	★★	★★★
	Een lineair verband tussen twee variabelen herkennen.	2.3 ☐ 2.4 ☐ T6.3 ☐ T6.4 ☐ T6.5 ☐ T6.7 ☐ T6.9 ☐	2.5 ☐ T6.2 ☐ T6.11 ☐ T6.12 ☐ T6.13 ☐	
	Een formule bij een lineair verband opstellen.	2.1 ☐ 2.3 ☐ T6.3 ☐ T6.4 ☐ T6.5 ☐ T6.7 ☐ T6.9 ☐	2.5 ☐ 2.6 ☐ T6.2 ☐ T6.6 ☐ T6.11 ☐ T6.12 ☐ T6.13 ☐	2.7 ☐
	Een grafiek bij een lineair verband tekenen.	2.2 ☐ T6.3 ☐	2.6 ☐ T6.8 ☐ T6.10 ☐	
	Berekeningen met lineaire verbanden uitvoeren.	2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.4 ☐ T6.3 ☐ T6.4 ☐	2.5 ☐ 2.6 ☐ T6.6 ☐ T6.13 ☐	2.7 ☐
3	**Lineaire modellen**	★	★★	★★★
	Een grafiek tekenen bij meetwaarden.	3.3 ☐	3.5 ☐ 3.6 ☐ T6.8 ☐ T6.11 ☐ T6.12 ☐	
	Een lineaire formule opstellen bij meetwaarden.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ T6.5 ☐	3.5 ☐ 3.6 ☐ 3.7 ☐ T6.10 ☐ T6.12 ☐	3.8 ☐
	Lineair interpoleren en extrapoleren.	T6.5 ☐	3.5 ☐ 3.7 ☐	
4	**Lineaire verbanden vergelijken**	★	★★	★★★
	Een probleem beschrijven als lineaire vergelijking of ongelijkheid.	4.1 ☐ 4.3 ☐ T6.5 ☐	4.5 ☐ 4.6 ☐ T6.2 ☐ T6.10 ☐ T6.11 ☐ T6.12 ☐ T6.13 ☐	4.7 ☐
	Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden oplossen.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ T6.1 ☐ T6.4 ☐ T6.5 ☐ T6.7 ☐ T6.9 ☐	4.5 ☐ 4.6 ☐ T6.2 ☐ T6.6 ☐ T6.8 ☐ T6.10 ☐ T6.11 ☐ T6.12 ☐ T6.13 ☐	

5	**Ongelijkheden en gebieden**	★	★ ★	★ ★ ★
	Lineaire verbanden herleiden.	**5.1** ☐ **5.4** ☐	**5.3** ☐ **5.5** ☐ **5.6** ☐	
	Lineaire formules combineren om een snijpunt uit te rekenen.	**5.1** ☐ **5.4** ☐ **T 6.4** ☐	**5.5** ☐ **5.6** ☐ **T 6.10** ☐ **T 6.11** ☐ **T 6.12** ☐	
	Lineaire ongelijkheden combineren om het juiste gebied weer te geven.	**5.2** ☐	**5.3** ☐ **5.5** ☐ **5.6** ☐ **T 6.2** ☐ **T 6.10** ☐ **T 6.12** ☐	**5.7** ☐

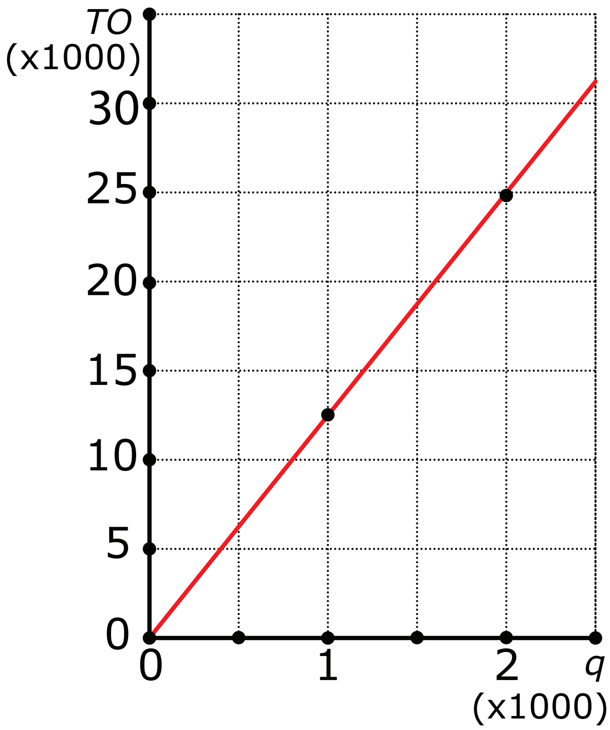
Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

www.math4all.nl

Werkblad bij Opdracht 1.2



Werkblad bij Opdracht 1.3

Wij (Nederlanders) gebruiken meestal de temperatuurschaal van Celsius. Wetenschappers gebruiken vaak de temperatuurschaal van Kelvin. Ook worden andere temperatuurschalen nog steeds gebruikt:

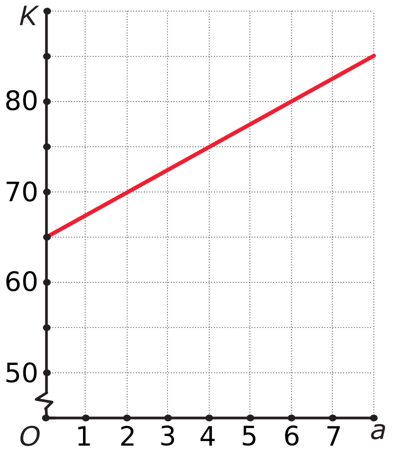
- De temperatuurschaal van Réamur (in gebruik bij de verwerking van suiker): het aantal graden Réamur bereken je door het aantal graden Celsius te delen door 10 en dan te vermenigvuldigen met 8.
- De temperatuurschaal van Fahrenheit (in gebruik in de Verenigde Staten): het aantal graden Fahrenheit bereken je door het aantal graden Celsius te delen door 10, dan te vermenigvuldigen met 18 en er vervolgens nog 32 bij te tellen.

Werkblad bij Opdracht 2.3

De temperatuur van de buitenlucht hangt onder sommige omstandigheden lineair af van de hoogte boven de zeespiegel. Zeker bij een wandeling in de bergen of bij een ballonvaart kun je dat goed merken. Een vuistregel is dat elke 100 meter stijging een temperatuurdaling van $0{,}6$ °C betekent. Stel je voor dat het op 0 meter hoogte 24 °C is.

Welke formule kun je opstellen voor de temperatuur (°C) afhankelijk van de hoogte (meter)? Bepaal met de grafische rekenmachine op welke hoogte de temperatuur voor het eerst onder 0 °C komt.

Werkblad bij Opdracht 1.1



Werkblad bij Opdracht 3.3

De bevolking van een stad is de laatste jaren gestaag gegroeid. In de tabel vind je gegevens.

tijd (jaar)	1960	1970	1980	1990	2000	2010
aantal inwoners (×100000)	2,1	3,8	5,3	6,6	8,3	9,8

Werkblad bij Opdracht 4.2

a. $3x = 18$

b. $1{,}2x = 6$

c. $x + 5 = 9$

d. $x - 5 = 9$

e. $5 - x = 9$

f. $2x + 5 = 9$

g. $4 + 3x = 10$

h. $16 - 2x = 2$

i. $5{,}8 - 1{,}2x = 2{,}8$

j. $3(x - 5) = 6$

k. $3x - 2 = 9 - 3x$

l. $6 - 4{,}2x = 62 - 1{,}4x$

m. $\frac{1}{2}x - 5 = 2 + \frac{1}{4}x$

n. $\frac{1}{2}x - 5 = 2 + \frac{1}{3}x$

o. $\frac{1}{2}x - 5 = 2 + \frac{1}{3}x$

p. $\frac{1}{2}(x - 2) = \frac{1}{3}(x + 2)$

q. $\frac{1}{2}(x - 2) = \frac{1}{3}(x - 4) + 2$

r. $\frac{1}{3}(3 - 2x) = 2 + \frac{1}{4}(4 - 4x)$

s. $\frac{6-2x}{4} = \frac{4-x}{3}$

t. $\frac{4-3x}{5} + 2 = \frac{2-x}{3}$

Werkblad bij Opdracht 5.2

a. $y = 2x$ en $y = x + 4$

b. $y = 2x$ en $y = 6 - x$

c. $y = 2x$ en $x + y = 6$

d. $y = 2x$ en $x - y = 6$

e. $y = x + 2$ en $x + y = 6$

f. $y = 2x - 2$ en $3x + y = 6$

g. $2x + y = 2$ en $x + 2y = 6$

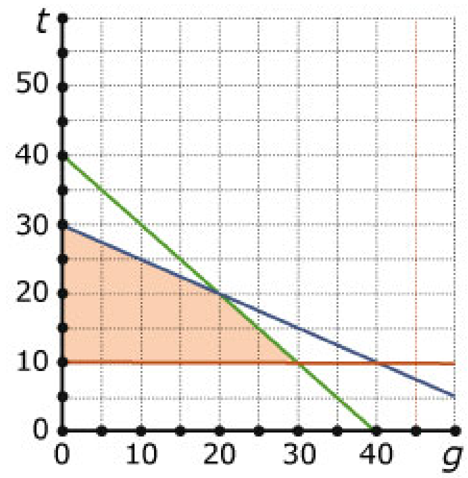
h. $2x - y = 2$ en $5x + 2y = 6$

i. $2x + 5y = 20$ en $2{,}8x + 2y = 12$

j. $2x - 5y = 20$ en $x + 5y = 35$

Werkblad bij Opdracht 5.3

Een rijwielhandelaar krijgt een aanbod van een fietsfabriek: hij kan een bepaald type fiets inkopen voor € 650 per stuk. Een e-bike versie kan hij inkopen voor € 1300. Hij kan niet meer dan veertig fietsen in voorraad hebben en beschikt over maximaal € 39000 om te investeren. Verder koopt hij minstens tien e-bikes van dit type in, omdat hij verwacht die gemakkelijk te kunnen verkopen.



Noem het aantal gewone fietsen dat de rijwielhandelaar inkoopt g en het aantal e-bikes t en beschrijf alle ongelijkheden waaraan deze twee variabelen moeten voldoen.

Op een gewone fiets wordt € 250 winst gemaakt en op e-bike € 400. De winkelier wil zo veel mogelijk winst maken met de verkoop van deze fietsen. De figuur hiernaast laat zien welke punten in het assenstelsel voldoen aan de voorwaarden die je hebt gevonden. Licht dat toe en bepaal bij welke waarden voor g en t de rijwielhandelaar de meeste winst maakt.