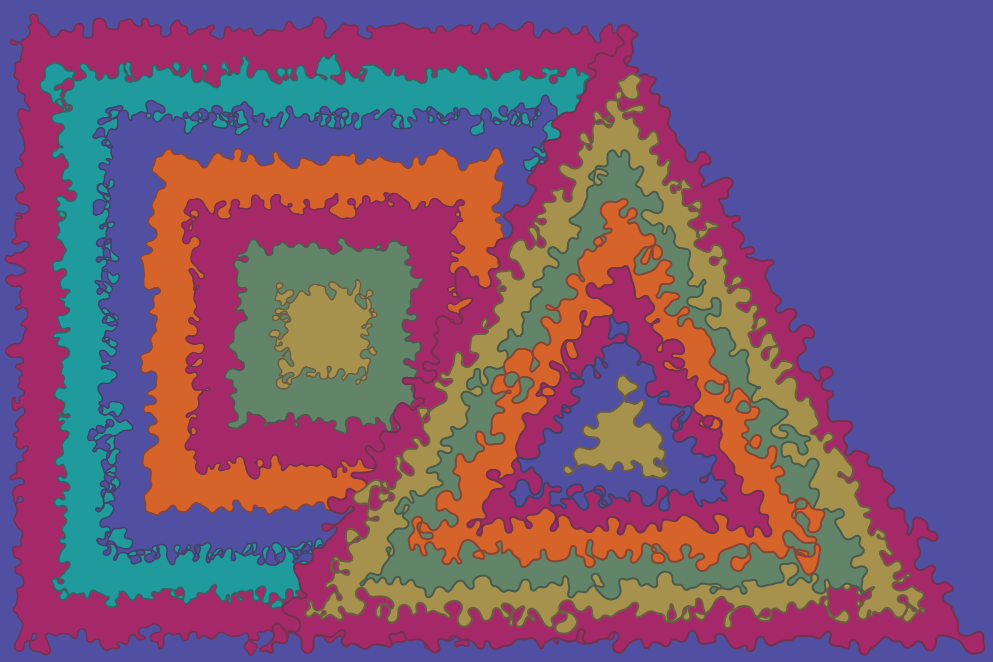
Wiskunde A

4 HAVO

Katern 4

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Tellen

1.1 Mogelijkheden

Inleiding

Misschien heb je je wel eens afgevraagd hoeveel verschillende postcodes, hoeveel nummerborden, hoeveel pincodes er zijn. Of hoeveel mogelijkheden er zijn om een dubbel-zes te gooien met twee dobbelstenen in verhouding tot het totaal aantal mogelijkheden. Maar dan moet je wel een idee hebben welke mogelijkheden er zijn. Om daar een goed overzicht over te krijgen kun je het best systematisch te werk gaan. Boomdiagrammen en tabellen helpen er bij.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- mogelijkheden systematisch tellen;
- mogelijkheden in kaart brengen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen;
- werken met kansen.

Verkennen

Opgave V1

Je werpt vier munten op tafel. Je ziet twee keer kop en twee keer munt.

a Leg uit waarom je op verschillende manieren twee keer kop en twee keer munt kunt gooien.

b Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal als je met vier munten gooit?

c Bij hoeveel daarvan heb je twee keer kop en twee keer munt?

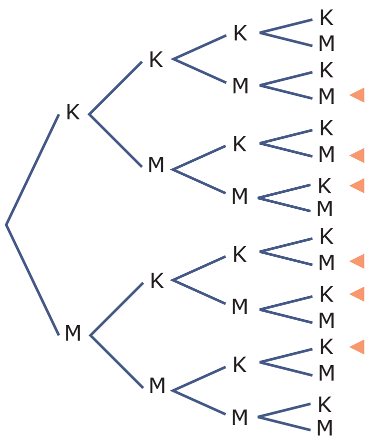
Figuur 1.2

Uitleg

Bij tossen wordt met een munt geworpen. Het werpen met een munt heeft de uitkomst kop of munt. Bij een zuivere munt zijn beide uitkomsten even waarschijnlijk en hebben ze een kans van $\frac{1}{2}$.

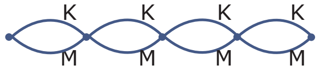
Je gooit met vier munten en onderzoekt de mogelijkheden om twee keer kop en twee keer munt te gooien. Je houdt het aantal gunstige en het totaal aantal mogelijkheden overzichtelijk bij. Dat kun je doen met een boomdiagram. Van de in totaal zestien (even waarschijnlijke) mogelijkheden zijn er zes met twee keer kop en twee keer munt.

Je kunt een boomdiagram soms compacter maken door de takken in één punt te laten samenkomen. Je krijgt dan een wegendiagram. Daarin zie je snel dat er in totaal $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ mogelijkheden zijn.



Figuur 1.3

Alleen zijn de afzonderlijke mogelijkheden nu moeilijker te tellen.



Figuur 1.4

Je kunt ook proberen om alle mogelijkheden systematisch op te schrijven, maar daarbij is de kans groter dat je een paar mogelijkheden vergeet: KKKK, MKKK, KMKK, KKMK, KKKM, ..., MMMM.

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg**.

a Wat is het verschil tussen een boomdiagram en een wegendiagram?

b Wat is het voordeel van een boomdiagram?

Opgave 2

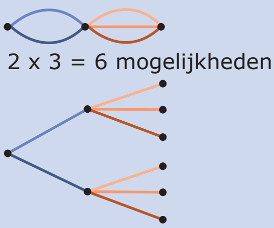
Je hebt in een hoge hoed vier kaartjes met daarop de letters A, B, C, D. Je haalt de kaartjes er willekeurig één voor één uit.
Hoeveel mogelijke volgordes zijn er?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor het systematisch tellen van mogelijkheden bestaan hulpmiddelen.

- Het **wegendiagram**. Kijk in de figuur. Het is een schema (een graaf) waarin je de mogelijkheden weergeeft als verbindingslijnen tussen punten. Het kan ontstaan als compacte versie van een boomdiagram. Het totaal aantal mogelijkheden krijg je door de mogelijkheden om van punt naar punt te komen te vermenigvuldigen.
- Het **boomdiagram**. Kijk in de figuur. Het is een schema waarin je alle mogelijkheden weergeeft als vertakkingen vanuit punten. Dit boomdiagram heeft twee lagen met in de eerste laag twee takken en in de tweede laag drie takken. Het totaal aantal mogelijkheden krijg je door het aantal takken in de laatste laag te tellen. Een boomdiagram kun je altijd maken, maar het kan erg groot zijn.
- Systematisch **uitschrijven**. Er zijn zes manieren om bij het gooien met vier geldstukken twee keer kop en twee keer munt te gooien: KKMM, KMKM, KMMK, MKKM, MKMK, MMKK. Uitschrijven kan altijd, maar het kan veel tijd kosten en je vergeet snel mogelijkheden.
- Een **rooster**. Kijk in de figuur. Dit rooster laat het aantal even waarschijnlijke mogelijkheden bij het werpen met twee munten zien. Het totaal aantal mogelijkheden is het aantal vakjes met een uitkomst. Een rooster kun je maken als je maar twee verschillende series mogelijke uitkomsten hebt.



Figuur 1.5

	K	M
K	KK	KM
M	MK	MM

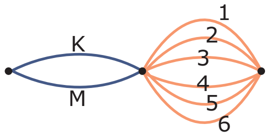
Figuur 1.6

Voorbeeld 1

Iemand gooit tegelijkertijd met een munt en met een dobbelsteen. Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er totaal? En bij hoeveel daarvan heb je hoogstens vijf ogen én kop?

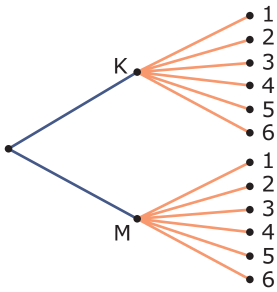
Antwoord

De mogelijke uitkomsten kun je in een wegendiagram weergeven. Er zijn $2 \cdot 6 = 12$ verschillende uitkomsten mogelijk, want je kunt op twaalf verschillende manieren van het beginpunt naar het eindpunt gaan.



Figuur 1.7

Je ziet de uitkomsten van het gelijktijdig gooien van een munt en een dobbelsteen in een boomdiagram weergegeven. Alle twaalf mogelijkheden zijn afzonderlijk zichtbaar. Er zijn vijf mogelijkheden met hoogstens (niet meer dan) vijf ogen én kop.



Figuur 1.8

Opgave 3

Iemand heeft dobbelstenen in de vorm van een regelmatig viervlak. Op de grensvlakken staan de cijfers 1, 2, 3 en 4. Elk vlak heeft een gelijke kans om onder te komen als je met zo'n dobbelsteen gooit. Er wordt geworpen met drie van die dobbelstenen, een rode, een groene en een witte. Er wordt gelet op de vlakken die 'onder' komen na het werpen.

a Geef in een wegendiagram alle mogelijke uitkomsten weer. Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

b Je wilt het aantal uitkomsten tellen waarbij precies één keer het cijfer 3 onder ligt bij de rode dobbelsteen. Waarom zijn er negen mogelijkheden?

c Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij bij alleen de rode óf alleen de groene dobbelsteen de 3 onder ligt?

d Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij precies één keer de 3 onder ligt?

Voorbeeld 2

Iemand gooit tegelijkertijd met twee dobbelstenen. Als je het totaal aantal ogen raadt, win je het spelletje.
Waarom kun je beter gokken op zeven ogen dan op twee ogen?

Antwoord

Omdat je met twee dobbelstenen werpt, en dus twee series uitkomsten hebt, is een rooster een handige manier om alle mogelijkheden in beeld te brengen.

Je ziet dat er in totaal 36 even waarschijnlijke mogelijkheden zijn. Je ziet ook dat zeven ogen het meest voorkomt. Daar kun je dus het best op gokken.

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figuur 1.9

Opgave 4

Bij het werpen met twee dobbelstenen kun je de mogelijkheden overzichtelijk weergeven in een rooster zoals in het voorbeeld.

a Waarom gaat dat bij het werpen met drie dobbelstenen niet?

b Je werpt met twee dobbelstenen. Op hoeveel manieren kun je negen ogen gooien?

c Je werpt met drie dobbelstenen. Op hoeveel manieren kun je negen ogen gooien?

Opgave 5

Je gooit met twee dobbelstenen.

a Op hoeveel manieren kun je zes ogen gooien?

b Op hoeveel manieren kun je hoogstens vijf ogen gooien?

c Op hoeveel manieren kun je minstens vier ogen gooien?

d Op hoeveel manieren kun je een even aantal ogen gooien?

Opgave 6

Het smaakzintuig (de tong) kan de vier smaken zoet, zout, bitter en zuur onderscheiden. Natuurlijk kun je met je tong ook samenstellingen hiervan onderscheiden. Zo kun je bijvoorbeeld het verschil tussen bitter-zout en bitter-zuur proeven.

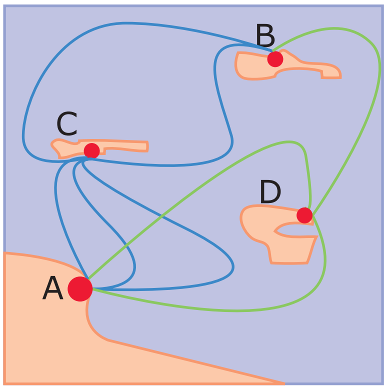
a Hoeveel combinaties zijn er van twee verschillende smaken?

b Hoeveel verschillende samenstellingen zijn er mogelijk van twee of meer smaken?

c In hoeveel van de samenstellingen zit in ieder geval de smaak zoet?

Voorbeeld 3

Je kunt van A naar B via C of via D. Je ziet alle verbindingen getekend.
Op hoeveel manieren kun je van A naar B?



Figuur 1.10

Antwoord

Je kunt van A naar B gaan via C. Dus $3 \cdot 2 = 6$ manieren. Of je kunt van A naar B via D op $2 \cdot 1 = 2$ manieren. Totaal kun je op $6 + 2 = 8$ manieren van A naar B.
Misschien zie je de handige vuistregel dat je bij en-mogelijkheden vermenigvuldigt en bij of-mogelijkheden optelt. Je gaat van A naar C én van C naar B óf van A naar D én van D naar B. Het aantal manieren is $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$.

Opgave 7

Bekijk het wegendiagram in het voorbeeld. Je kunt van C naar D via A of via B, in A en in B moet je overstappen.

a Op hoeveel manieren kun je van C naar D via A?

b Op hoeveel manieren kun je van C naar D via B?

c Op hoeveel manieren kun je van C naar D?

d Hoe heb je gebruikgemaakt van de vuistregels uit het voorbeeld?

Opgave 8

Bij de pincode gaat het om een code van vier cijfers (0, 1, 2, ..., 9). Ga ervan uit dat voor elk cijfer waaruit de pincode bestaat, alle mogelijkheden zijn toegestaan.

a Hoe bereken je met een wegendiagram hoeveel codes van vier cijfers er mogelijk zijn?

b Als het eerste cijfer geen even getal is, hoeveel pincodes zijn er dan mogelijk?

Van je pincode weet je alleen nog dat het cijfer 7 er twee keer direct naast elkaar in staat, maar niet meer op welke plekken. Ook weet je dat je pincode nog twee andere, verschillende, cijfers bevat.

c Hoeveel pincodes zijn er zo mogelijk?

Verwerken

Opgave 9

Een toets bestaat uit zes meerkeuzevragen. Bij elke meerkeuzevraag kun je uit vier antwoorden kiezen. Er is steeds één antwoord goed.

a Als je alle mogelijkheden in een wegendiagram weergeeft, hoeveel wegen zijn er dan?

b Hoeveel mogelijke verschillende antwoorden zijn er voor de hele toets?

c Je hebt de toets goed voorbereid en je weet vier antwoorden zeker. Hoeveel mogelijke antwoorden voor de hele toets zijn er nog?

d Hoeveel mogelijke antwoorden voor de hele toets zijn er mogelijk, als je alleen let op ‘goed’ of ‘fout’?

Opgave 10

Om het cijferslot van een koffer open te krijgen, moet je een code van 3 cijfers onthouden.

a Je weet alleen het eerste cijfer nog. Hoeveel mogelijke codes zijn er dan nog?

b Je weet alle drie de cijfers nog, maar de volgorde niet meer. Hoeveel mogelijke codes zijn er?

Opgave 11

Je gooit met drie dobbelstenen.

a Als je alle mogelijkheden in een wegendiagram weergeeft, hoeveel wegen zijn er dan?

b Waarom is een boomdiagram in dit geval niet zo geschikt?

c Bij hoeveel mogelijke uitkomsten heb je precies één zes?

d Bij hoeveel mogelijke uitkomsten heb je minstens twee zessen?

e Bij hoeveel mogelijke uitkomsten heb je hoogstens twee zessen?

f Hoeveel mogelijkheden zijn er om totaal zes ogen te gooien?

g Hoeveel mogelijkheden zijn er om minstens zestien ogen te gooien?

Opgave 12

Je bestelt een pizza. Je hebt keuze uit een kleine pizza, een gewone pizza en een extra grote pizza. Er zijn twee soorten pizzabodems, de Pizza Crossa en de Pizza Classica. Verder zijn er twaalf verschillende smaken. Je kunt de pizza zelf halen of je kunt hem laten bezorgen.

a Uit hoeveel verschillende pizza's kun je kiezen?

b Hoeveel keuzemogelijkheden heb je als je een pizza wilt eten?

c Je houdt niet van vis. Daarom vallen er vijf smaken af. Uit hoeveel verschillende pizza's kun je nu kiezen?

Opgave 13

Een fruitautomaat heeft drie vensters waarachter banden met plaatjes draaien. Op elke band staan twintig plaatjes. Je brengt ze in beweging door aan een hendel te trekken. Eén druk op de knop en de banden stoppen. Zie je drie dezelfde plaatjes, dan win je een bepaald bedrag. Je ziet het aantal plaatjes per band. Bekijk de tabel goed en beantwoord de vragen.

plaatje	band 1	band 2	band 3
BAR	1	2	1
bel	8	1	7
pruim	2	7	3
sinaasappel	2	8	4
twee kersen	7	2	0
citroen	0	0	5

Figuur 1.11

a Hoeveel mogelijkheden zijn er om drie plaatjes op een rij te krijgen?

b Op hoeveel manieren krijg je drie keer bar?

c Op hoeveel manieren krijg je bel of sinaasappel?

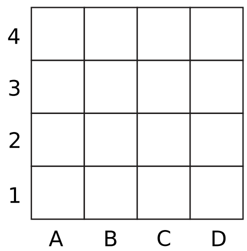
d Op hoeveel manieren krijg je één keer kersen en twee keer pruim?

e Op hoeveel manieren kun je winnen?

Opgave 14

Je hebt een veld van 4×4 vierkante hokjes. Van deze zestien hokjes wil je er precies vier zwart kleuren. Het moet zó gebeuren dat elke rij en elke kolom precies één zwart hokje krijgt. Bovendien mogen er geen twee zwarte hokjes diagonaal (met een hoekpunt) aan elkaar grenzen.

Op hoeveel manieren kun je de vier hokjes kiezen?



Figuur 1.12

Toepassen

Opgave 15: WK voetbal 2010

Aan het WK voetbal 2010 in Zuid-Afrika deden 32 landen mee. Ze speelden eerst een groepsfase. Hierin speelden de landen in acht poules van vier teams. In zo'n poule speelt elk team één wedstrijd tegen elk ander team. De twee hoogst eindigende teams per poule gingen door naar de knock-outfase. Deze overgebleven teams speelden allemaal één wedstrijd tegen een ander team en de verliezer moest naar huis. De winnaars gingen door en speelden weer één wedstrijd tot er uiteindelijk nog twee teams over waren. Die speelden de finale. Er was ook nog een wedstrijd om de derde plaats, de troostfinale.

In eerdere edities van het WK waren er minder deelnemende teams. Zo waren er in 1974 in West-Duitsland maar zestien teams.

Die speelden volgens hetzelfde schema. Eerst in poules van vier teams en de twee hoogst eindigende teams naar de knock-outfase.
Er werden in 1974 natuurlijk veel minder wedstrijden gespeeld dan in 2010.

a Ga met een berekening na of de verdubbeling van het aantal deelnemende teams ook geleid heeft tot een verdubbeling van het totaal aantal wedstrijden.

Alle WK's kenden een groepsfase met poules van vier teams. Er kunnen ook meer teams in een poule zitten. Dat leidt dan tot een groter aantal poulewedstrijden.

$W(n)$ is het aantal wedstrijden in een poule met n teams. Er geldt dat $W(n+1) = W(n) + n$ waarbij $W(n+1)$ het aantal wedstrijden in een poule met $n+1$ teams is.

b Toon aan dat dit klopt.

(naar: pilotexamen 2013, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 16

Bij een vakantie naar de zon neem je vooral luchtige kleding mee. Bijvoorbeeld: 2 paar schoenen, 6 paar sokken, 4 korte broeken en 5 shirts.

a Teken een wegendiagram van alle mogelijke combinaties van schoenen, sokken, broeken en shirts.

b Op hoeveel verschillende manieren kun je je zomers kleden?

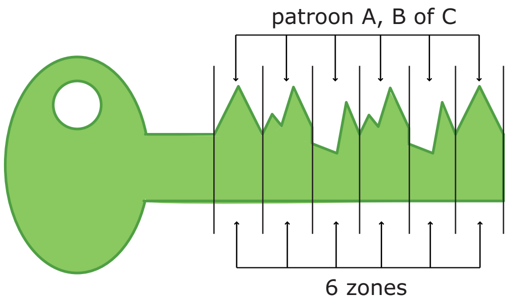
c Op het strand heb je geen sokken en schoenen aan. Op hoeveel verschillende manieren kun je daar luchtig gekleed rondwandelen?

Opgave 17

Voor cilindersloten worden verschillende soorten sleutels gemaakt. De sleutel die je hier ziet, bestaat uit zes gedeelten. Voor elk gedeelte wordt patroon A, B of C gekozen.

a Hoeveel verschillende sleutels van deze soort zijn er mogelijk?

b Hoeveel verschillende sleutels van deze soort zijn er mogelijk waarin één van de patronen niet voorkomt?



Figuur 1.13

Opgave 18

Een deelnemer aan een tv-quiz krijgt vier kaarten met op elk een naam van een populaire zangeres. Zijn opdracht is om de juiste namen onder de foto's van deze zangeressen te hangen. De deelnemer kent de vier zangeressen niet en besluit de kaarten op goed geluk onder de foto's te hangen.

a Geef alle mogelijkheden in een boomdiagram weer.

b Hoeveel mogelijkheden heeft hij in totaal?

c Op hoeveel manieren heeft hij één kaart goed?

d Beredeneer waarom er geen mogelijkheden zijn om drie kaarten goed te hebben.

e Op hoeveel manieren heeft hij minstens twee kaarten goed?

1.2 Herhaling of niet

Inleiding

Bij het systematisch tellen heb je tot nu toe vooral gewerkt met diagrammen. Eigenlijk gaat dat alleen als het aantal mogelijkheden niet al te groot is. Want gooi je bijvoorbeeld met drie of meer dobbelstenen, dan wordt het aantal even waarschijnlijke uitkomsten al snel zo groot, dat een boomdiagram niet meer te maken is. Wegendiagrammen zijn dan nog wel te maken, maar daarin kun je niet gemakkelijk de afzonderlijke mogelijkheden zien. Vaak kun je ook aantallen mogelijkheden berekenen zonder diagrammen. Daarbij is als eerste belangrijk om onderscheid te maken tussen situaties met herhaling en situaties zonder herhaling.

Je leert in dit onderwerp

- werken met machten als je mogelijkheden telt in situaties waarin herhaling optreedt;
- werken met faculteit;
- werken met permutaties als je mogelijkheden telt in situaties waarin steeds een mogelijkheid wordt afgestreept.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen.

Verkennen

Opgave V1

Bankrekeningnummers bestonden voor de komst van IBAN (International Bank Account Number) in 2014 alleen uit een aantal cijfers. Neem eens aan dat elk bankrekeningnummer uit 7 cijfers bestaat en dat op elke positie elk cijfer kan voorkomen.

a Hoeveel bankrekeningnummers kun je maken?

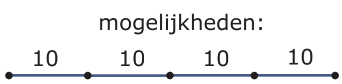
b Het eerste cijfer mag geen 0 zijn. Hoeveel bankrekeningnummers kun je nu maken?

c Hoeveel bankrekeningnummers zijn er met allemaal verschillende cijfers?

Uitleg

Je wilt berekenen hoeveel verschillende pincodes mogelijk zijn. De eerste vraag die je kunt stellen is:
'Mag ik cijfers herhalen of niet?'

Als bij de pincode (van vier cijfers) herhaling van cijfers is toegestaan, kun je de situatie weergeven in een wegendiagram.



Figuur 2.1

Het aantal mogelijkheden is $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$. Je berekent het aantal mogelijkheden met behulp van machten, omdat je cijfers in de pincode mag herhalen. Maar als alle cijfers verschillend moeten zijn, wordt het anders. Als bij de pincode van vier cijfers herhaling van cijfers niet is toegestaan, ziet het wegendiagram met alle mogelijkheden er anders uit.

Figuur 2.2

Het aantal mogelijkheden is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Omdat het opschrijven van dergelijke aflopende vermenigvuldigingen nogal tijdrovend is, hebben wiskundigen daarvoor het begrip faculteit ingevoerd.
$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ wordt 10 faculteit genoemd en genoteerd als $10!$
De rekenmachine beschikt over een functie om faculteiten te berekenen. Ga na dat $10! = 3628800$. Ga ook na dat $6! = 720$, $1! = 1$ en dat $0! = 1$.
Je kunt ook $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ uitrekenen met behulp van faculteiten:
$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{6!}$

Ga na dat dit inderdaad 5040 oplevert.
Het werken met faculteiten is vooral handig als het om grote aantallen gaat.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je hebt zes verschillend gekleurde kaartjes. Op die kaartjes wil je de letters A, B, C, D, E en F zetten.

a Op hoeveel manieren kan dat als je op meerdere kaartjes dezelfde letter toelaat?

b Op hoeveel manieren kan dat als elk kaartje een verschillende letter moet krijgen?

Opgave 2

Nu gebruik je alle 26 letters van het alfabet. En je hebt nog steeds zes verschillend gekleurde kaartjes.

a Op hoeveel manieren kun je er letters op zetten als je op meerdere kaartjes dezelfde letter toelaat?

b Op hoeveel manieren kun je er letters op zetten als elk kaartje een verschillende letter moet krijgen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je vier elementen kiest uit tien beschikbare elementen en herhaling is toegestaan en je let op de volgorde, dan heb je 10^4 mogelijkheden.

mogelijkheden:

10 10 10 10

Figuur 2.3

Als je vier elementen kiest uit tien beschikbare elementen en herhaling is niet toegestaan en je let op de volgorde, dan heb je $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ mogelijkheden.

Dit noem je het aantal **permutaties** van vier uit tien elementen. Het woord ‘permutationem’ (Latijn) betekent verwisseling.

10 9 8 7

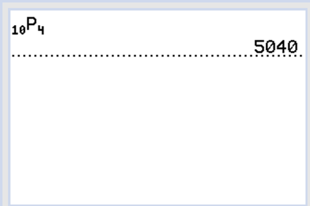
Figuur 2.4

Als herhaling niet is toegestaan, dan krijg je te maken met vermenigvuldiging van een rij getallen die steeds met één vermindert. De vermenigvuldiging van de aflopende rij opeenvolgende getallen n tot en met 1 wordt n-**faculteit** genoemd. Dit schrijf je als $n!$.
Dus $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Afgesproken is dat $0! = 1$. De rekenmachine heeft een functie om faculteiten te berekenen.

Bij permutaties heb je te maken met vermenigvuldiging van een aflopende rij opeenvolgende getallen. Alleen stopt die rij niet altijd bij 1. De rekenmachine heeft ook een speciale functie om het aantal permutaties zoals $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ te berekenen.

Zie het **Practicum**.



Figuur 2.5

Voorbeeld 1

In Nederland bestaat een categorie kentekenplaten (op auto's) uit twee cijfers gevolgd door vier letters. Je mag er hier van uitgaan dat alle letters en cijfers gebruikt mogen worden.
Hoeveel kentekens kun je maken als herhaling van letters en cijfers is toegestaan?

Figuur 2.6

Antwoord

Voor elk kenteken heb je twee cijfers nodig en er zijn tien verschillende cijfers. Je hebt dan totaal $10^2 = 100$ verschillende mogelijkheden.
Voor elk kenteken heb je vier letters nodig en er zijn 26 verschillende letters. Je hebt $26^4 = 456976$ verschillende mogelijkheden voor de letters.
In totaal zijn er dus $10^2 \cdot 26^4 = 45697600$ van dergelijke kentekenplaten mogelijk. Dat is meer dan 17 miljoen.

Opgave 3

Zie **Voorbeeld 1**. Kentekenplaten van een bepaalde generatie auto's bestaan uit twee letters, drie cijfers en vervolgens nog één letter. Bijvoorbeeld ZB-627-N. De letters I, O en Q worden niet gebruikt. Ga ervan uit dat verder alle letters en alle cijfers kunnen worden gebruikt.

Hoeveel van deze kentekenplaten zijn er dan mogelijk?

Voorbeeld 2

Figuur 2.7

In Nederland bestaat een bepaalde categorie kentekenplaten (op auto's) uit twee cijfers gevolgd door vier letters. Neem aan dat alle letters en cijfers mogen worden gebruikt.
Dit kenteken kent allemaal verschillende tekens, hoeveel van die kentekenplaten zijn er?

Antwoord

In het voorgaande voorbeeld heb je gezien dat er $10^2 \cdot 26^4 = 45697600$ kentekenplaten mogelijk zijn als de tekens ook mogen worden herhaald.

Mogen de tekens niet worden herhaald, dan zijn dat er $10 \cdot 9 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 32292000$.

Opgave 4

Zie **Voorbeeld 2**. Kentekenplaten van een bepaalde generatie auto's bestaan uit twee letters, drie cijfers en vervolgens nog één letter. Bijvoorbeeld ZB-627-N. De letters I, O en Q worden niet gebruikt. Ga ervan uit dat verder alle letters en alle cijfers kunnen worden gebruikt.

Hoeveel van deze kentekenplaten zijn er mogelijk als je geen letters en cijfers mag herhalen?

Voorbeeld 3

Tijdens de finale van de 100 meter hardlopen op de Olympische Spelen strijden acht lopers om drie medailles. De lopers zijn allemaal topatleten. Veronderstel dat alle denkbare volgordes van binnenkomst mogelijk zijn.
Op hoeveel manieren kunnen de medailles worden verdeeld? En op hoeveel manieren kunnen de acht lopers de finish passeren?

Antwoord

Figuur 2.8

Stel je een wegendiagram voor. Voor de eerste positie zijn acht mogelijke kandidaten, voor de tweede dan nog zeven en voor de derde nog zes.
Er zijn $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ mogelijke uitslagen. Dit is het aantal mogelijke permutaties van drie elementen uit acht elementen waarbij de volgorde van belang is. De grafische rekenmachine kent hiervoor een speciale functie.

De acht lopers kunnen op $8! = 40320$ volgordes de finish passeren.

Opgave 5

Bekijk hoe je met de rekenmachine permutaties berekent.

a Bereken het aantal permutaties van tien elementen (dus van tien uit de tien).

b Bereken het aantal permutaties van drie uit tien elementen.

c Wat is het aantal permutaties van vijf uit honderd elementen?

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 3**. Uit een aanbod van veertig boeken moet een jury nummer 1, nummer 2 en nummer 3 kiezen. Wanneer de jury op goed geluk de boeken kiest, zonder verder naar de inhoud te kijken, hoeveel verschillende keuzes zijn er dan mogelijk?

Opgave 7

Je maakt vijfcijferige getallen met de cijfers 4, 5, 6, 7 en 8.
Hoeveel getallen kun je maken onder de volgende voorwaarden?

a Herhaling van cijfers is toegestaan.

b De getallen bestaan uit verschillende cijfers.

c De getallen zijn oneven en bestaan uit verschillende cijfers.

d De getallen zijn groter dan 65000 en herhaling van cijfers is toegestaan.

e De getallen zijn groter dan 65000 en herhaling van cijfers is niet toegestaan.

f De getallen liggen tussen de 65000 en 85000 en herhaling is toegestaan.

Verwerken

Opgave 8

In Nederland bestaat de postcode uit vier cijfers, gevolgd door twee letters. Alle cijfers zijn op elk van de vier plaatsen mogelijk. Ook elke letter is op elk van de twee plaatsen mogelijk.
Hoeveel postcodes zijn er in Nederland totaal mogelijk?

Opgave 9

De tekens van een grafische rekenmachine bestaan uit puntjes. Elk klein teken past in een rechthoekje van 10 bij 12 puntjes. Een teken wordt gemaakt door deze puntjes aan of uit te zetten.
Hoeveel tekens zijn er in principe mogelijk?

Opgave 10

Aan de herenfinale op de steeple-chase doen bij de Olympische Spelen vijftien mannen mee. De nummers 1, 2 en 3 komen op het erepodium.
Op hoeveel manieren kunnen die ereplaatsen theoretisch worden verdeeld?

Opgave 11

Een groep van zeven vrienden (drie meisjes en vier jongens) komt tegelijk met de fiets aan op school. Zij zetten hun fietsen naast elkaar in de fietsenstalling.

a Hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk?

b Eén van de zeven vrienden wil per se zijn fiets aan de buitenkant van de groep fietsen zetten. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de fietsen nu neergezet worden?

c Twee personen willen per se hun fietsen naast elkaar zetten. Hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk?

d De drie meisjes willen hun fietsen naast elkaar zetten en de vier jongens ook. Hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk?

Opgave 12

Een kaartspel bestaat uit de kaartsoorten harten, ruiten, schoppen en klaveren. De kaartsoorten harten en ruiten zijn rood gekleurd en de kaartsoorten schoppen en klaveren zijn zwart gekleurd. Van elke kaartsoort zitten er dertien kaarten in het spel. Dat zijn de kaarten 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer, aas. Iemand pakt uit een kaartspel één voor één vier kaarten.

a Op hoeveel manieren kan dat?

b Op hoeveel manieren kan hij vier kaarten van dezelfde soort pakken?

c Op hoeveel manieren kan hij vier kaarten van dezelfde kleur pakken?

d Op hoeveel manieren kan hij vier kaarten van verschillende soort pakken?

Opgave 13

Je werpt met vier dobbelstenen.

a Op hoeveel manieren kun je 23 of meer ogen gooien?

b Op hoeveel manieren kun je met het product van de ogen 24 krijgen met verschillende ogen van de vier dobbelstenen?

Toepassen

Opgave 14: Mobiel dataverkeer

Het gebruik van apparatuur voor mobiel dataverkeer (zoals tablet en laptop) is in de loop der jaren toegenomen. In 2014 verscheen daarover een nieuwsbericht.

Er komt een tekort aan 06-nummers aan. Steeds meer apparatuur maakt gebruik van mobiele datacommunicatie en communiceert door middel van een simkaart. Denk aan mobiel internet op tablet en laptop, maar ook aan liftinstallaties, snoep- en frisdrankautomaten, OV chipkaart systemen, mobiele reisinformatie in het openbaar vervoer, navigatiesystemen, enzovoort.
Omdat de komende jaren een explosieve groei wordt verwacht in het aantal mobiele data-aansluitingen, heeft de overheid een nieuwe, twaalfcijferige nummerreeks in gebruik genomen. Deze nummerreeks begint met 097 en is alleen bedoeld voor mobiele datacommunicatie. In de toekomst moeten alle mobiele datatoepassingen gebruikmaken van een 097-nummer om zo de huidige 06 nummerreeks te ontlasten.

Tabel 2.1

Mobiele telefoons behouden de bekende tiencijferige 06-nummers, overige apparatuur krijgt een twaalfcijferig 097-nummer. Nederland telt in 2014 ongeveer 17 miljoen inwoners.

Met welk aantal neemt het maximale aantal apparaten voor mobiele datacommunicatie per Nederlander toe door de introductie van de 097-nummers?

Opgave 15: IP-adressen

IP-adressen worden gebruikt om nummers toe te kennen aan computers die verbonden zijn met het internet. Een IP-adres V4 is een adres dat bestaat uit vier getallen die gescheiden zijn door een punt. Een voorbeeld van zo'n adres is 135.75.43.52. Elk van de vier getallen kan een waarde van 0 tot en met 255 aannemen en de getallen mogen meerdere keren voorkomen.
Hoeveel IP-adressen V4 zijn er mogelijk?

Testen

Opgave 16

Je maakt getallen van vijf cijfers en gebruikt de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7.

a Hoeveel verschillende getallen zijn mogelijk als ieder cijfer op elke positie is toegestaan?

b Hoeveel getallen zijn mogelijk als het getal niet met een 0 mag beginnen en alle cijfers verschillend zijn?

c Hoeveel getallen zijn mogelijk als alle cijfers verschillend zijn en het getal groter dan 43000 is?

d Hoeveel getallen zijn mogelijk als herhaling is toegestaan en het getal tussen de 15000 en 25000 ligt?

Opgave 17

Een toets bestaat uit dertig meerkeuzevragen. Op elke meerkeuzevraag kun je uit vier antwoorden kiezen; er is steeds één antwoord goed.

a Hoeveel mogelijke series antwoorden zijn er?

b Je hebt de toets goed voorbereid en je weet 24 antwoorden zeker. De rest moet je gokken. Hoeveel mogelijke series antwoorden zijn er?

c Je weet 4 antwoorden niet en besluit om elk van de 4 antwoorden A, B, C en D een keer te gebruiken. Hoeveel mogelijke series zijn er?

Opgave 18

In de lottomachine zitten balletjes met de nummers 1 tot en met 41. Er worden één voor één zes balletjes uitgehaald. Het eerst getrokken balletje valt in het eerste bakje, het tweede in het tweede bakje enzovoort.

a Hoeveel verschillende trekkingen zijn er mogelijk?

b Hoeveel van deze trekkingen leveren dezelfde zes getrokken ballen op?

Practicum: Grafische rekenmachine

Met een grafische rekenmachine kun je met machten en faculteiten werken. Ook kan de machine permutaties voor je berekenen. Zie het practicum:

- **Tellen en de TI84**
- **Tellen en de TInspire**
- **Tellen en de Casio cfx-9850**
- **Tellen en de HPprime**
- **Tellen en de NumWorks**

1.3 Combinaties

Inleiding

In dit onderdeel bekijken we situaties waarin je een keuze maakt van een aantal elementen uit een groep. Je leert onderscheid te maken tussen situaties waarin de volgorde waarin de elementen gekozen worden wel uitmaakt (permutaties) en niet uitmaakt (combinaties).

Je leert in dit onderwerp

- het verschil onderscheiden tussen permutaties en combinaties;
- het aantal combinaties van r uit n elementen berekenen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- machten en permutaties toepassen bij telproblemen met of zonder herhaling.

Verkennen

Opgave V1

Acht hardlopers doen mee aan een wedstrijd over 100 meter. Hun volgorde van aankomst hangt uitsluitend van het toeval af.

a Op hoeveel manieren kunnen drie van de acht hardlopers als eerste, tweede en derde aankomen?

b De eerste drie lopers gaan door naar de volgende ronde. Hoeveel mogelijke drietallen zijn dat?

Uitleg

Bij de Olympische Spelen is de 100 meter hardlopen een vast onderdeel. In de finale starten acht lopers: A, B, C, D, E, F, G en H. Ze strijden om goud, zilver en brons. Alle lopers zijn in staat elke medaille te behalen. Hoeveel top 3's zijn er mogelijk?

Omdat het hier zonder herhaling is en omdat de volgorde belangrijk is, gaat het om het aantal permutaties, in dit geval van 3 uit 8: $8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!} = 336$ mogelijkheden.

Figuur 3.1

In de voorrondes is de volgorde niet belangrijk. De eerste drie gaan door naar de volgende ronde. De groepjes BZG, BGZ, ZBG, GBZ, ZGB en GZB zijn dus hetzelfde. Dit zijn geen afzonderlijke mogelijkheden (volgordes), maar samen vormen ze één mogelijkheid (groep).
Dat geldt net zo voor alle andere drietallen. De volgorde binnen die drietallen is niet belangrijk en de $3! = 6$ volgordes/permutaties vormen één groep.

Dit betekent dat er 336 gedeeld door 3!, dus 56 groepjes zijn. Dit heet het aantal combinaties van 3 uit 8.

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg** met het aantal combinaties van 3 uit 8.

a Wat is het kenmerkende verschil tussen de finale en de voorrondes?

b Waarom zijn er in de voorrondes minder uitkomsten als je alle mogelijke eindresultaten wilt berekenen?

c Bereken het aantal groepjes zonder herhaling en waarbij de volgorde niet uitmaakt als je uit 9 personen er 4 kiest.

d Bereken het aantal groepjes zonder herhaling en waarbij de volgorde niet uitmaakt van 3 uit 100. Controleer het antwoord met de grafische rekenmachine.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

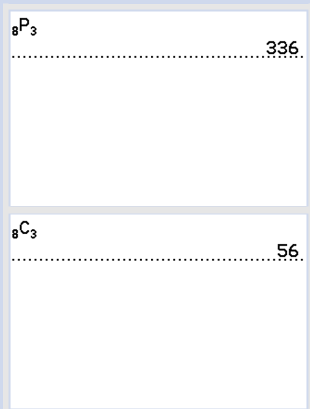
Als je drie elementen kiest uit acht beschikbare zonder herhaling waarbij de volgorde wel van belang is, heb je $8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!} = 336$ mogelijkheden.

Dit is het aantal **permutaties** van drie elementen uit acht elementen.

Als je drie elementen kiest uit acht beschikbare zonder herhaling waarvan hun onderlinge volgorde niet van belang is, heb je $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$ mogelijkheden.

Dit heet het aantal **combinaties** van drie elementen uit acht elementen. Je noteert $\binom{8}{3}$ en je zegt: ‘acht boven drie’.

De rekenmachine heeft hier een speciale functie voor, zie het **Practicum**.



Figuur 3.2

Voorbeeld 1

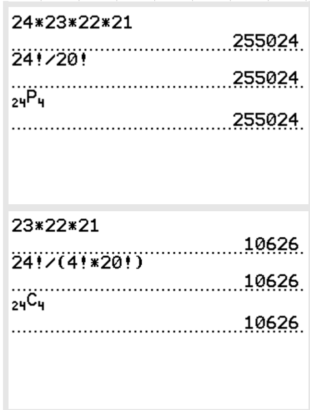
In een klas van 24 personen wordt door loting een groep van vier personen samengesteld. Deze vier personen krijgen ieder een andere taak.
Op hoeveel manieren kan dit als er per taak wordt geloot?
En op hoeveel manieren kan dit als deze vier personen pas na de loting hun taken onderling verdelen?

Antwoord

In het eerste geval is de volgorde in de groep van belang: word je als eerste ingeloot, heb je een andere taak dan wanneer je als tweede, of derde of vierde wordt ingeloot.
Het gaat dus om het aantal permutaties van 4 uit 24. Dat zijn $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 255024$ mogelijkheden.

In het tweede geval is de volgorde in de groep niet van belang. Ze verdelen pas na de loting onderling hun taken.

Het gaat dus om het aantal combinaties van 4 uit 24. Dat zijn $\binom{24}{4} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4!} = 23 \cdot 22 \cdot 21 = 10626$ mogelijkheden.



Figuur 3.3

Opgave 2

Vergelijk de verschillen tussen de antwoorden op de twee vragen in **Voorbeeld 1**.
Je hebt een groep van twintig personen met acht mannen en twaalf vrouwen.

a Uit de groep van twintig worden door loting vijf personen geselecteerd. Op hoeveel manieren kan dat als ze pas na de loting een bepaalde opdracht krijgen?

b Uit de groep van twintig worden door loting vijf personen geselecteerd. Elk van hen krijgt een bepaalde opdracht. Op hoeveel manieren kan dat als er per opdracht wordt geloot?

Voorbeeld 2

Uit een groepje van vijf meisjes en vier jongens kies je door loting een groepje van drie.
Hoeveel mogelijkheden zijn er voor een groepje van drie met minstens twee meisjes?

Antwoord

Minstens twee meisjes betekent dat er twee meisjes of drie meisjes in het groepje zitten. Als er precies twee meisjes in het groepje zijn, kun je eerst twee van de vijf meisjes kiezen en vervolgens één van de vier jongens. De twee meisjes kies je op $\binom{5}{2} = 10$ manieren. Naast deze tien mogelijkheden zijn er nog $\binom{4}{1} = 4$ mogelijke keuzes voor één jongen.

Dat betekent dat er totaal $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} = 10 \cdot 4 = 40$ mogelijkheden zijn om precies twee meisjes en één jongen te kiezen.

Met precies drie meisjes in het groepje, kies je drie van de vijf meisjes. Dat kan op $\binom{5}{3} = 10$ manieren.

Totaal zijn er $40 + 10 = 50$ manieren om drietallen met minstens twee meisjes te loten.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Op hoeveel manieren kun je door loting uit een groep van twintig, met acht mannen en twaalf vrouwen, een groep van vijf samenstellen die bestaat uit drie mannen en twee vrouwen?

b Op hoeveel manieren kun je door loting uit een groep van twintig, met acht mannen en twaalf vrouwen, een groep van vijf samenstellen die bestaat uit hoogstens drie mannen?

Opgave 4

Er zijn dertig schakelaars waarmee je dertig toneellampen op een podium kunt regelen. Voor een bepaalde scène worden er vier van de dertig aangezet. De volgorde waarin ze worden aangezet, is van belang.

a Op hoeveel manieren kun je de eerste schakelaar kiezen?

b Op hoeveel manieren kun je vier schakelaars kiezen?

c Voor een bepaalde scène worden de schakelaars $S5$, $S7$, $S8$ en $S9$ gebruikt. Op hoeveel verschillende manieren kun je die schakelaars aanzetten?

d Gebruik de antwoorden op b en c om uit te rekenen op hoeveel manieren je vier schakelaars uit de dertig kunt kiezen als de volgorde niet belangrijk is.

e Op hoeveel manieren kun je zes schakelaars kiezen uit de dertig als de volgorde niet belangrijk is?

Opgave 5

Voor je literatuurlijst moet je uit veertig literaire boeken en vijftien thrillers tien boeken kiezen.

a Op hoeveel manieren kan dat als er verder geen eisen aan je lijst worden gesteld?

b Op hoeveel manieren kan dat als je maximaal drie thrillers mag kiezen?

Voorbeeld 3

Je wilt binnen een groep van acht meisjes en tien jongens vijf verschillende klusjes door loting verdelen.
Op hoeveel manieren kan dat als dit twee meisjes en drie jongens moeten zijn?

Antwoord

De twee meisjes en drie jongens kun je op

$\binom{8}{2} \cdot \binom{10}{3} = 28 \times 120 = 3360$ manieren kiezen.

Binnen elk vijftal kun je op $5! = 120$ manieren de klussen verdelen.
Het totaal aantal mogelijkheden is

$5! \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{10}{3} = 120 \cdot 3360 = 403200.$

Opgave 6

Je wilt binnen een groep van tien meisjes en acht jongens zes verschillende klusjes door loting verdelen.
Op hoeveel manieren kan dat als dit drie meisjes en drie jongens moeten zijn?

Verwerken

Opgave 7

Iemand moet 10 vragen met 'ja' of 'nee' beantwoorden.

a Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er mogelijk met precies drie keer 'ja'?

b Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er mogelijk met precies 9 keer 'ja'?

c Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er in totaal mogelijk?

Opgave 8

Je gooit met vijf verschillende geldstukken en je let op het aantal keren 'kop'.

a Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er mogelijk?

b Hoeveel mogelijke uitkomsten met precies twee keer 'kop' zijn er?

c Je gooit nu met 50 geldstukken. Op hoeveel manieren kun je 20 keer 'kop' werpen?

Opgave 9

Voor een schaaktoernooi hebben zich 24 deelnemers gemeld. Ze spelen een halve competitie, dus iedere deelnemer speelt precies één maal tegen iedere andere deelnemer. Het aantal wedstrijden kun je berekenen met behulp van combinaties. Leg uit waarom je met combinaties rekent en bereken het aantal te spelen wedstrijden.

Opgave 10

Een groep muizen bestaat uit acht mannetjes en twaalf vrouwtjes. Er wordt willekeurig een groepje van vijf muizen gekozen.

a Het groepje bestaat uit uitsluitend vrouwtjes. Hoeveel verschillende groepjes zijn er mogelijk?

b Het groepje bestaat uit hoogstens twee mannetjes. Hoeveel verschillende groepjes zijn er mogelijk?

Opgave 11

Op hoeveel manieren kun je acht verschillende boeken op een rij op een boekenplank plaatsen onder de volgende voorwaarden?

a Elke volgorde is toegestaan.

b De drie wiskundeboeken moeten bij elkaar staan.

c De twee woordenboeken aan het eind of aan het begin moeten naast elkaar staan.

d Er worden eerst drie boeken uitgekozen om hetzelfde te worden gekaft en worden dan aan het eind van de rij gezet.

Opgave 12

Je werpt met drie dobbelstenen.

a Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er? Let op! Er is één manier om drie te gooien, maar er zijn meerdere manieren om vier te gooien.

b Je kunt op verschillende manieren twaalf ogen gooien. Bijvoorbeeld door driemaal vier te gooien, maar ook door een zes en tweemaal drie te gooien.
Hoeveel mogelijkheden zijn er om twaalf ogen te gooien?

c Op hoeveel manieren kun je hoogstens zestien ogen gooien?

Opgave 13

Op een scholengemeenschap bestaat de medezeggenschapsraad uit twaalf personen: zes personeelsleden, drie ouders en drie leerlingen. Deze medezeggenschapsraad kiest een dagelijks bestuur van drie personen.

a Op hoeveel manieren kun je een bestuur van drie personen kiezen als er verder geen eisen aan dat dagelijks bestuur worden gesteld?

b Op hoeveel manieren kun je een bestuur van drie personen kiezen als er een personeelslid, een ouder en een leerling in moeten zitten?

c Op hoeveel manieren kun je een bestuur van drie personen kiezen als eerst de voorzitter, vervolgens de vice-voorzitter en ten slotte de secretaris in functie worden gekozen?

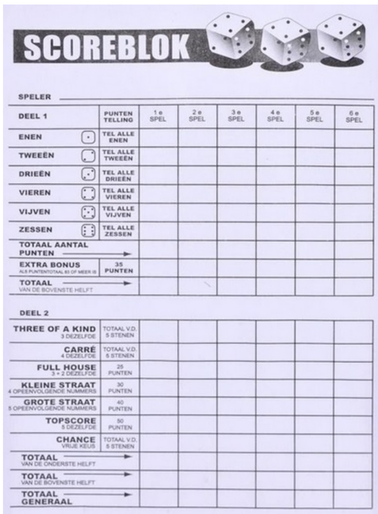
Toepassen

Opgave 14: Yahtzee

Bij het dobbelspel Yahtzee gooi je met vijf dobbelstenen. Bij dit spel kun je afhankelijk van het aantal ogen op de dobbelstenen op een scoreformulier een puntentotaal noteren.

a Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er bij het gooien met vijf dobbelstenen?

b Eén van de worpen die punten oplevert, is Full House. Bij deze worp gooi je een aantal ogen driemaal en een ander aantal ogen tweemaal; bijvoorbeeld driemaal 5 en tweemaal 1. Hoeveel manieren zijn er om in één worp met vijf dobbelstenen Full House te gooien?


SCOREBLOK

SPELER

DEEL 1	PUNTEN TELLING	1 e SPEL	2 e SPEL	3 e SPEL	4 e SPEL	5 e SPEL	6 e SPEL
ENEN	TEL ALLE ENEN						
TWEEËN	TEL ALLE TWEEËN						
DRIEËN	TEL ALLE DRIEËN						
VIEREN	TEL ALLE VIEREN						
VIJVEN	TEL ALLE VIJVEN						
ZESSEN	TEL ALLE ZESSEN						
TOTAAL AANTAL PUNTEN →							
EXTRA BONUS ALS PUNTENTOTAAL 63 OF MEER IS	35 PUNTEN						
TOTAAL → VAN DE BOVENSTE HELFT							

DEEL 2

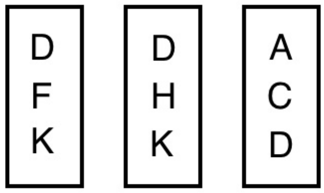
THREE OF A KIND 3 DEZELFDE	TOTAAL V.D. 5 STENEN						
CARRÉ 4 DEZELFDE	TOTAAL V.D. 5 STENEN						
FULL HOUSE 3 + 2 DEZELFDE	25 PUNTEN						
KLEINE STRAAT 4 OPEENVOLGENDE NUMMERS	30 PUNTEN						
GROTE STRAAT 5 OPEENVOLGENDE NUMMERS	40 PUNTEN						
TOPSCORE 5 DEZELFDE	50 PUNTEN						
CHANCE VRIJE KEUS	TOTAAL V.D. 5 STENEN						
TOTAAL → VAN DE ONDERSTE HELFT							
TOTAAL → VAN DE BOVENSTE HELFT							
TOTAAL → GENERAAL							

Figuur 3.4

Opgave 15: Straten vergelijken

Een planoloog wil weten op grond van welke eigenschappen de bewoners de straten van hun wijk beoordelen. Hij legt een aantal proefpersonen groepjes van drie straten voor. Hij vraagt hun bij elk groepje aan te wijzen welke twee van de drie straten het meest op elkaar lijken.

Het onderzoek heeft betrekking op tien straten, straat A, B, C, D, E, F, G, H, K en L genoemd. Hieruit worden alle mogelijke groepjes van drie gevormd en elk groepje wordt in alfabetische volgorde op een kaartje geschreven. Je ziet drie voorbeelden.



Figuur 3.5

a Hoeveel kaartjes zijn er nodig?

b Op hoeveel kaartjes komt straat A voor?

c Op hoeveel kaartjes komen straat A en B samen voor?

Een proefpersoon is bereid om bij alle kaartjes zijn keuze te maken.

d Onderzoek of het mogelijk is dat hij zeven keer voor de combinatie AB, zeven keer voor de combinatie AC en zeven keer voor de combinatie AD kiest.

(bron: examen havo wiskunde A in 1990, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 16

Een volleybalteam bestaat uit 12 spelers. De coach bepaalt welke spelers worden opgesteld en op welke van de zes posities in het veld.

a Als alle spelers even sterk zijn en op elke positie kunnen spelen, op hoeveel manieren kan de coach dan een team van zes samenstellen?

b Als hij dat team heeft samengesteld, hoeveel verschillende beginopstellingen kan hij dan nog maken?

Opgave 17

Een klas bestaat uit 26 leerlingen.

a Op hoeveel manieren kun je die leerlingen op een rij zetten?

b Op hoeveel manieren kun je vijf van de 26 leerlingen op een rij zetten?

c Op hoeveel manieren kun je een groepje van vijf uit 26 kiezen?

d Er zitten tien meisjes in deze klas. Op hoeveel manieren kun je een groepje van vijf leerlingen kiezen met precies twee meisjes?

Opgave 18

Je bestelt een ijsje bij ijssalon Venezia. Je kunt je ijsje krijgen in een oubliehoorn, wafelhoorn, wafelbeker of gewone beker. Je kunt een, twee of drie bolletjes ijs nemen met tien verschillende smaken. Daarbij kun je natuurlijk ook meerdere bolletjes van dezelfde smaak kiezen. Op je ijsje kun je slagroom nemen of niet. Bovenop je slagroom kun je vervolgens weer een discodip, een nootjesdip of geen dip nemen.

a Op hoeveel manieren kun je een ijsje samenstellen bij Venezia?

b Op hoeveel manieren kun je een ijsje samenstellen bij Venezia als je alleen ijsjes met één of meer verschillende smaken telt?

Practicum

Met de volgende practica kun je leren hoe je met de grafische rekenmachine met faculteiten kunt werken. Verder wordt er beschreven hoe permutaties en combinaties snel kunnen worden berekend.

- **Tellen en de TI84**
- **Tellen en de TInspire**
- **Tellen en de Casio cfx-9850**
- **Tellen en de HPprime**
- **Tellen en de NumWorks**

1.4 Driehoek van Pascal

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- mogelijke routes zonder omwegen tellen in een rooster;
- de driehoek van Pascal gebruiken.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- machten en permutaties toepassen bij telproblemen met of zonder herhaling;
- permutaties en combinaties toepassen bij het kiezen van r elementen uit n elementen.

Verkennen

Opgave V1

Figuur 4.1

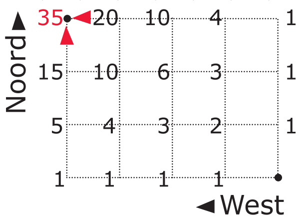
Bekijk het stratenplan van het centrum van Denver, een grote stad in de VS. Je staat op Larimer Square op de hoek van Larimer Street en 15th Street. Je wilt naar je hotel, het Hyatt Regency.

Uit hoeveel even lange routes (zonder omwegen) kun je kiezen?

Uitleg

Bekijk het stukje plattegrond van Denver. Je wilt van de hoek van Larimer Street en 15th Street naar de Wynkoop Brewing Co, op de hoek van 18th Street en Wynkoop Street. Je vraagt je af hoeveel even lange routes je hiervoor kunt nemen, zonder omwegen.

Bekijk de figuur met een vereenvoudigde vorm van de plattegrond: vier blokken west en drie blokken noord. Je ziet ook hoe je ze kunt tellen. Het aantal routes in een punt is telkens het aantal routes in het punt eronder, opgeteld bij het aantal routes in het punt rechts ernaast.



Figuur 4.2

Je kunt het aantal routes ook berekenen met combinaties. Elke route is een rijtje van het type WNWWNWN waarin W een blok naar het westen en N een blok naar het noorden voorstelt. Je kiest drie posities uit de zeven mogelijke posities om een N neer te zetten, de rest wordt een W.

Met combinaties is het totale aantal manieren: $\binom{7}{3} = 35$.

Je kunt ook eerst de vier posities voor de W uit de zeven mogelijke posities. Dit kan op $\binom{7}{4}$ manieren en dit is gelijk aan $\binom{7}{3}$, omdat het voor het aantal mogelijkheden niet uitmaakt of je eerst de letters N plaatst en dan de letters W of omgekeerd.

Reken na dat $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je het aantal manieren kunt tellen om in Denver van de hoek van Larimer Street en 15th Street naar de Wynkoop Brewing Co, op de hoek van 18th Street en Wynkoop Street, te komen. De kaart staat op dit **werkblad**.

a Je wilt van de hoek van Larimer Street en 15th Street naar het Hyatt Regency (je hotel) lopen. Schets een daarbij passend rooster. Laat aan de hand van dit rooster met een berekening zien op hoeveel manieren je van Larimer Square naar het Hyatt Regency kunt komen.

b Bereken op hoeveel manieren je van Larimer Square (hoek Larimer Street en 15th Street) naar het kruispunt van Arapahoe Street en 20th Street kunt komen.

Opgave 2

Op hoeveel manieren kun je van Larimer Square (hoek Larimer Street en 15th Street) naar het kruispunt van Arapahoe Street en 20th Street lopen via het Hyatt Regency? Gebruik eventueel het **werkblad**.

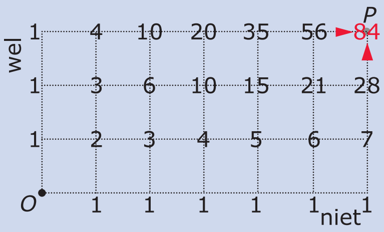
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk het rooster van 6 bij 3. Je vertrekt vanuit punt O richting punt P. Er zijn in elk roosterpunt twee keuzes: je gaat richting 'wel' of richting 'niet'. Je telt het aantal routes zonder omwegen van punt O naar punt P. Elke route (zonder omwegen) bestaat uit een route als NWNNWNWNN, drie keer 'wel' en zes keer 'niet'.

Het aantal routes naar een punt is telkens de som van het aantal routes naar het punt eronder en het aantal routes naar het punt links ervan. Je kunt dat in de figuur gemakkelijk natellen als je bedenkt dat je (bij het doorlopen van kortste routes) alleen naar rechts en omhoog kunt bewegen over de roosterlijnen. Dit telpatroon heet de **driehoek van Pascal** en kun je in een schema weergeven.

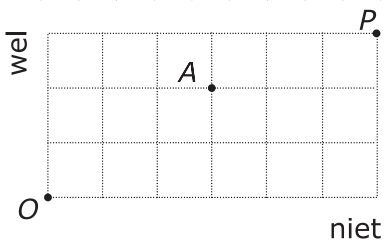
Je kunt het aantal routes NWNNWNWNN ook berekenen met **combinaties**. Je kiest drie uit de negen posities om een W neer te zetten. Daarbij speelt de volgorde binnen het groepje van 3 W's en 6 N's geen rol. Je vindt: $\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = 84$ routes.



Figuur 4.3

Voorbeeld 1

Hoeveel mogelijke routes (zonder omwegen) zijn er van O naar P? En hoeveel daarvan gaan langs punt A?



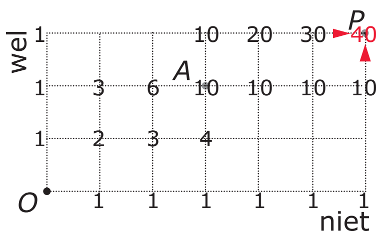
Figuur 4.4

Antwoord

Je telt het aantal routes van O naar P met de driehoek van Pascal en je komt op 84 routes.

Je kunt ook rekenen met combinaties: het aantal routes is $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$

Ook de routes langs A kun je tellen met de driehoek van Pascal. Bedenk dan wel dat de roosterpunten rechts van A geen routes van onderaf erbij krijgen en dat de roosterpunten boven A geen routes van links erbij krijgen. Anders maak je omwegen.



Figuur 4.5

Ook nu gaat rekenen sneller met combinaties:

- het aantal routes van O naar A is $\binom{5}{3} = 10$
- en het aantal routes van A naar P is $\binom{4}{3} = 4$.
- Het aantal routes via A is $10 \cdot 4 = 40$.

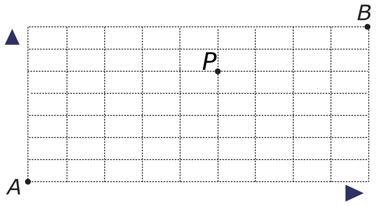
Opgave 3

Bekijk het rooster.

a Hoeveel kortste routes zijn er van A naar B?

b Hoeveel kortste routes zijn er van A naar P? En van P naar B?

c Hoeveel kortste routes zijn er van A naar B via P?



Figuur 4.6

Opgave 4

Een systeem heeft zeven schakelaars die ‘aan’ of ‘uit’ kunnen staan.

a Teken een bijpassend rooster om mee te tellen.

b Laat in het rooster zien op hoeveel manieren je nul van de zeven schakelaars kunt aanzetten.

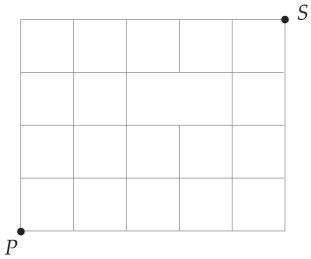
c Op hoeveel manieren kun je één van de zeven schakelaars aanzetten?

d Op hoeveel manieren kun je twee van de zeven schakelaars aanzetten?

e Je hebt de eerste drie schakelaars aangezet. Op hoeveel manieren kun je er nu nog twee van de resterende vier aanzetten?

Voorbeeld 2

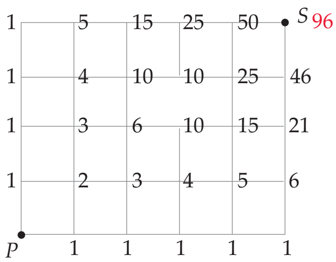
Hoeveel mogelijke routes (zonder omwegen) zijn er van P naar S?



Figuur 4.7

Antwoord

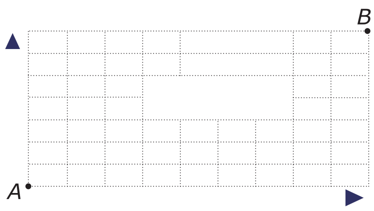
Je ziet dat er tussen twee roosterpunten geen weg is. Dus het aantal combinaties van vijf uit negen levert nu niet het goede antwoord op. Je kunt nu alleen het aantal routes uittellen met behulp van het telsysteem van de driehoek van Pascal. Let goed op wat er in de roosterpunten bij de ontbrekende weg gebeurt. Het totaal aantal routes is 96.



Figuur 4.8

Opgave 5

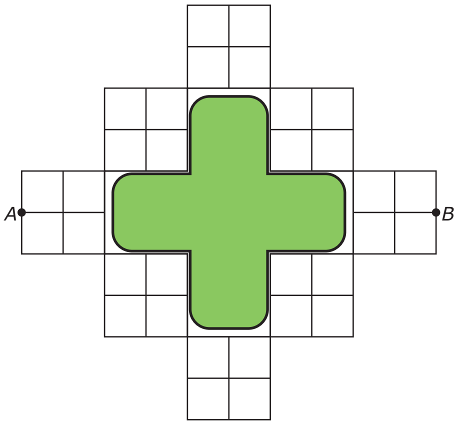
Op hoeveel manieren kun je in dit rooster van A naar B?



Figuur 4.9

Opgave 6

Je ziet een plattegrond van paden rond een kruisvormige vijver. De route van A naar B moet zo kort mogelijk zijn en mag niet buiten de paden komen.
Hoeveel routes van A naar B zijn er mogelijk?



Figuur 4.10

Voorbeeld 3

Als je met vijf muntstukken werpt, zijn er nogal wat mogelijkheden. Er kan bijvoorbeeld vijf keer munt boven liggen, maar dat kan ook twee keer zijn en dat kunnen ook nog steeds andere muntstukken betreffen.
Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

Antwoord

Je vindt alle 32 mogelijkheden door mogelijkheid voor mogelijkheid uit te werken.

- $5\times$ M en $0\times$ K: $\binom{5}{5} = 1$ mogelijkheid (MMMMM);
- $4\times$ M en $1\times$ K: $\binom{5}{4} = 5$ mogelijkheden (MMMMK, MMMKM, MMKMM, enzovoort);
- $3\times$ M en $2\times$ K: $\binom{5}{3} = 10$ mogelijkheden (MMMKK, MMKMK, MKMMK, enzovoort);
- $2\times$ M en $3\times$ K: $\binom{5}{2} = 10$ mogelijkheden (MMKKK, MKKMK, KKMMK, enzovoort);
- $1\times$ M en $4\times$ K: $\binom{5}{1} = 5$ mogelijkheden (MKKKK, KKKMK, KKMMK, enzovoort);
- $0\times$ M en $5\times$ K: $\binom{5}{0} = 1$ mogelijkheid (KKKKK).

Een simpel wegendiagram is nu veel handiger. Elk geldstuk heeft namelijk twee mogelijkheden, ‘kop’ of ‘munt’. Bij vijf geldstukken zijn er in totaal $2^5 = 32$ mogelijkheden.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**. Teken een rooster om mee te tellen. Geef er in aan hoe je het aantal mogelijkheden kunt vinden met drie keer munt.

Opgave 8

Je gooit met zes dobbelstenen en let op het aantal keer zes.

a Op hoeveel manieren kun je precies vier keer een zes gooien?

b Op hoeveel manieren kun je meer dan drie keer een zes gooien?

c Je gooit dertig keer met een dobbelsteen. Op hoeveel manieren kun je tien keer een zes gooien?

Verwerken

Opgave 9

Een hockeyer neemt acht keer een strafbal en let op het aantal keren dat hij raak schiet.

a Op hoeveel manieren kan hij drie keer raak schieten?

b Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

c Op hoeveel manieren kan hij minstens zes keer raak schieten?

d Op hoeveel manieren kan hij hoogstens zes keer raak schieten?

Opgave 10

Een schaakclub telt zeven leden. Als de leden bij elkaar komen, dagen ze elkaar uit voor een partijtje schaak.

a Teken een rooster om alle mogelijkheden te tellen voor iemand die twee willekeurige personen uitdaagt.

b Hoeveel mogelijkheden heeft een schaker om twee personen uit te dagen?

c Hoeveel mogelijkheden zijn er totaal voor de schaker?

d De zeven leden kunnen maximaal drie partijen tegelijk spelen. Er is dan altijd een lid over. Op hoeveel manieren kan dat?

Opgave 11

Een hypotheekverstrekker moet voor volgende week achttien gesprekken inplannen. De klanten die hij moet inplannen kunnen iedere dag van de week. Hij besluit maandag vijf gesprekken te voeren.

a Op hoeveel manieren kan hij vijf van de achttien klanten kiezen?

b Dinsdag plant hij maar drie gesprekken, want hij werkt die dag ook aan zijn administratie. Op hoeveel manieren kan hij die drie klanten nog kiezen?

c Op hoeveel manieren kan hij de overgebleven tien klanten nog over de resterende drie werkdagen verdelen?

d Op hoeveel manieren kan hij de overgebleven tien klanten nog over de drie resterende werkdagen verdelen als hij iedere dag minstens drie klanten wil bezoeken?

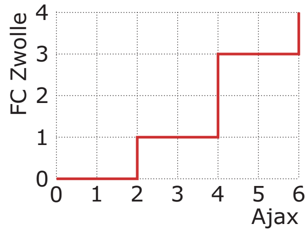
Opgave 12

Bij de voetbalwedstrijd Ajax - PEC Zwolle was de uitslag 6 - 4. Het scoreverloop is in de figuur weergegeven.

a Geef het scoreverloop door alle tussenstanden onder elkaar te zetten.

b Als je alleen de uitslag weet, hoeveel scoreverlopen zijn dan mogelijk?

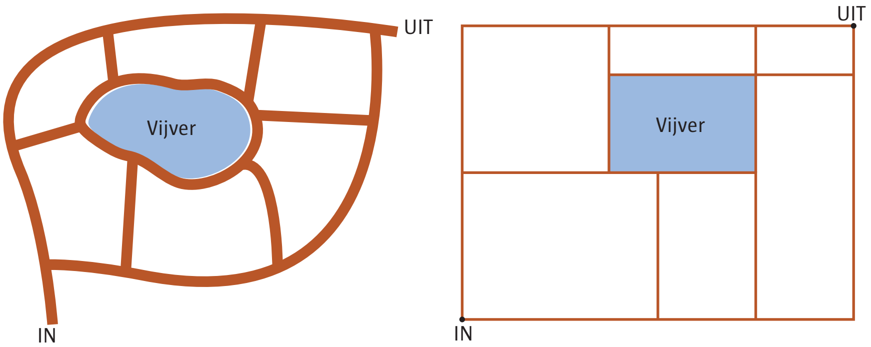
c Hoeveel scoreverlopen zijn er voor deze wedstrijd waarbij de tussenstand 4-1 was?



Figuur 4.11

Opgave 13

Je ziet een tuin met paden en een vijver. Deze plattegrond kun je schematisch weergeven in een rechthoekig rooster. Bereken met het rooster het aantal routes zonder omwegen dat je kunt lopen van de ingang naar de uitgang.



Figuur 4.12

Opgave 14

Een docent Engels maakt een meerkeuzetoets met zestien vragen. Op elk van de vragen is het antwoord A, B, C of D mogelijk.

a Hoeveel series antwoorden zijn er mogelijk als de docent besluit om acht keer antwoord B en acht keer antwoord D te kiezen?

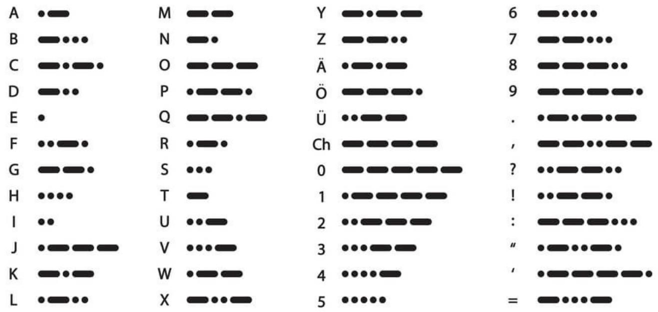
b Hoeveel series antwoorden zijn er mogelijk als de antwoorden A, B, C en D evenveel voorkomen?

c Hoeveel series antwoorden zijn er mogelijk als er bij de eerste zeven vragen geen C voorkomt en bij de laatste negen vragen precies vier keer een A en drie keer een B voorkomt?

Toepassen

Opgave 15: Morsecode

Je ziet het morsealfabet. Elke letter bestaat uit maximaal vier signalen; elk cijfer bestaat uit precies vijf signalen. Een signaal kan kort zijn (aangegeven door ·) of lang zijn (aangegeven door –).



Figuur 4.13

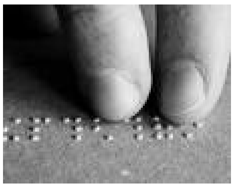
a Hoeveel tekens zijn er mogelijk met vijf signalen?

b Is het mogelijk om het alfabet weer te geven met maximaal vier signalen?

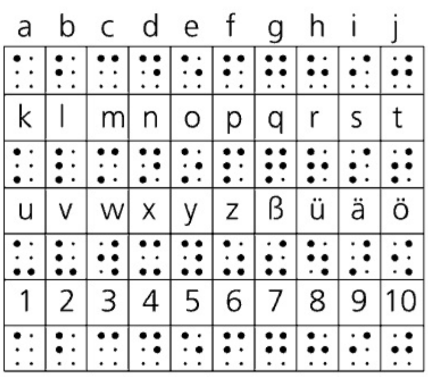
c Het is ook mogelijk om alle cijfers weer te geven met twee punten en drie strepen. Laat dat zien door alle mogelijkheden systematisch op te schrijven.

Opgave 16: Braille

Speciaal voor blinden en slechtzienden bestaat het Brailleschrift. In het Brailleschrift ontstaat elk teken door van 6 punten een aantal in reliëf weer te geven. De blinde kan het aantal en de positie van de punten voelen en zo het teken herkennen. Je ziet het alfabet en de cijfers in Braille.



Figuur 4.14



Figuur 4.15

a Op hoeveel manieren kun je een Brailleteken maken met 2 punten in reliëf?

b Op hoeveel manieren kun je een Brailleteken maken met 3 punten in reliëf?

c Hoeveel Brailletekens zijn er totaal mogelijk?

d Er zijn Brailletekens die op de kop hetzelfde zijn. Hoeveel Brailletekens met 2 punten betreft dit?

Testen

Opgave 17

Een klas van 24 leerlingen wordt verdeeld in vier teams van zes personen. De klas besluit de verdeling uitsluitend van het toeval te laten afhangen. Op hoeveel manieren kunnen ze de vier teams samenstellen?

Opgave 18

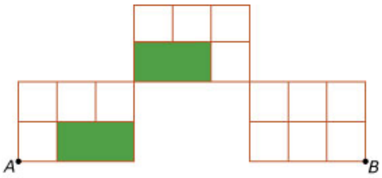
Je gaat codes maken van zeven letters met de letters A, B en C, bijvoorbeeld BAAACBC. Bereken de volgende aantallen.

a Het aantal codes met precies drie keer een A en twee keer een C.

b Het aantal codes met precies vier keer een A.

Opgave 19

Bepaal in het rooster het aantal kortste routes van A naar B.



Figuur 4.16

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Tellen**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

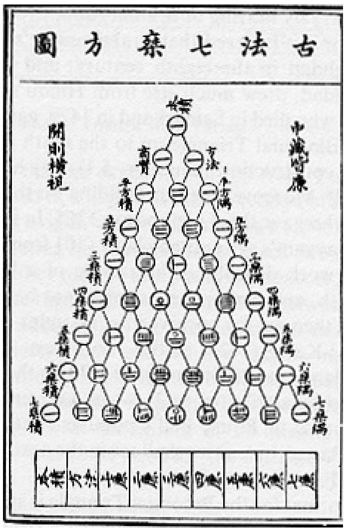
- wegendiagram — boomdiagram — uittellen
- macht — faculteit — permutaties
- combinaties
- driehoek van Pascal

Activiteitenlijst

- mogelijkheden tellen met behulp van diagrammen of uittellen
- machten gebruiken bij herhaling van mogelijkheden — faculteiten en permutaties gebruiken
- combinaties gebruiken — verschil tussen permutaties en combinaties herkennen
- combinaties toepassen bij routes in roosters — de driehoek van Pascal toepassen

Achtergronden

Hoewel de driehoek van Pascal is genoemd naar **Blaise Pascal (1623—1662)** was deze getallendriehoek al honderden jaren voor zijn geboorte bekend. Waarschijnlijk kende de Chinese geleerde Chia Hsien (omstreeks 1050) de driehoek van Pascal al en het is zeker dat de Perzische wetenschapper **Omar Khayyam (1048—1113)** er gebruik van maakte om wortels uit getallen te benaderen. Eén van de eerste weergaves van de driehoek van Pascal is van de Chinees **Yang Hui (1261—1275)**.
Pascal schreef er pas over in 1654 in zijn 'Traité du triangle arithmétique', waarin hij diverse eigenschappen van de getallen in deze driehoek liet zien.



Figuur 5.1

Testen

Opgave 1

In de Eredivisie spelen achttien voetbalclubs om het landskampioenschap van Nederland. Elk team speelt één keer thuis en één keer uit tegen elk ander team. Bij winst krijgt een team 3 punten, bij gelijkspel 1 punt en bij verlies 0 punten.

a Hoeveel wedstrijden worden er in totaal gespeeld?

b Hoeveel punten kan een team maximaal halen?

De Toto is een spel waarin je voetbaluitslagen voorspelt. Bij Toto13 voorspel je van dertien wedstrijden of de thuisclub wint, verliest of gelijkspeelt.

c Hoeveel verschillende Toto13-uitslagen zijn er mogelijk?

d Hoeveel Toto13-uitslagen zijn er met slechts twee foute voorspellingen?

e Hoeveel Toto13-uitslagen zijn er met hoogstens twee foute voorspellingen?

Opgave 2

Bij het dagmenu in een restaurant van de hamburgerketen BurgerChief heb je voor het ‘Chiefmenu’ keuze uit:

- Vooraf: tomatensoep of groentesoep.
- Hoofdgerecht: frites met cheeseburger, frites met dubbele hamburger of frites met beefburger.
- Drinken: cola of sinas.
- Nagerecht: chocoladepudding, vanillepudding of citroenpudding.

a Hoeveel menu's zijn er dan mogelijk?

b Hoeveel menu's zijn er mogelijk als iemand beslist een cheeseburger wil en niet van pudding houdt?

Opgave 3

In een vaas zitten negen balletjes, waarvan twee blauwe, drie rode en vier witte balletjes. De balletjes zijn genummerd. Frits haalt zonder te kijken een balletje uit de vaas, bekijkt de kleur en het nummer, legt het weer terug en haalt (na schudden) opnieuw zonder te kijken een balletje uit de vaas.

a Hoeveel mogelijkheden zijn er om twee balletjes te trekken?

b Hoeveel mogelijkheden zijn er met een wit en een rood balletje?

c Hoeveel mogelijkheden zijn er met minstens één blauw balletje?

d Beantwoord a, b en c nog eens als het balletje niet wordt teruggelegd.

e Fleur pakt vijftien keer achter elkaar een balletje uit de vaas en legt het balletje steeds terug. Ze heeft precies acht keer een blauwe balletje gepakt en vier keer een rode. Op hoeveel manieren heeft ze die balletjes kunnen pakken?

Opgave 4

De cijfers die in het venster van een eenvoudige rekenmachine verschijnen, worden gemaakt door een aantal opgelichte staafjes. Voor elk cijfer zijn maximaal zeven staafjes beschikbaar.

Figuur 5.2

a Staafje ‘aan’ wordt weergegeven door een 1, staafje ‘uit’ door een 0. Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

b Hoeveel symbolen met drie oplichtende staafjes zijn er?

c Hoeveel symbolen zijn er in totaal te maken?

d Er gaan twee staafjes kapot. Hoeveel symbolen zijn er dan nog met drie oplichtende staafjes te maken?

Opgave 5

Bij tennis wordt vaak het best-of-five systeem gespeeld. Dit betekent dat er maximaal vijf sets worden gespeeld. Degene die het eerst drie sets wint, heeft de partij gewonnen. A speelt tegen B.

a Hoeveel mogelijke wedstrijdverlopen zijn er?

b Het staat 1-0 voor A. Op hoeveel manieren kan A de wedstrijd winnen?

c Het staat 1-0 voor A. Op hoeveel manieren kan B de wedstrijd winnen?

Opgave 6

De leerlingenraad bestaat uit 22 personen, verdeeld over diverse jaargroepen. Er zitten 8 leerlingen uit de bovenbouw en 14 leerlingen uit de onderbouw in de raad. Er wordt een dagelijks bestuur gekozen van 5 personen.

a Op hoeveel manieren kun je dit dagelijks bestuur kiezen?

b De leden van het bestuur krijgen allemaal andere taken. Op hoeveel manieren kun je nu het bestuur kiezen als je ook let op de verschillende taken?

c Je let weer op de verschillende taken die de bestuursleden hebben. Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als het moet bestaan uit 2 leerlingen uit de onderbouw en 3 uit de bovenbouw?

d Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als er minstens 3 onderbouwleerlingen deel van moeten uitmaken?

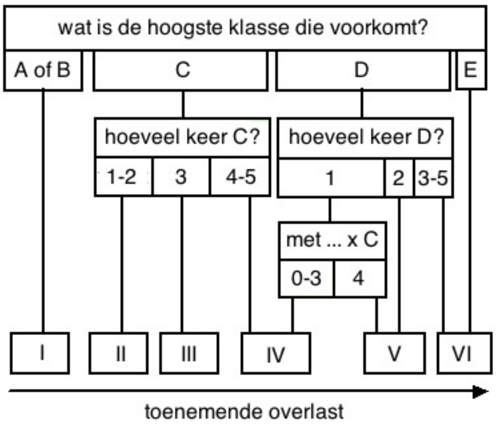
e Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als de voorzitter uit de bovenbouw moet komen?

Opgave 7

Om de leefbaarheid van een gebied te classificeren, wordt gekeken naar een aantal omgevingsfactoren die de leefbaarheid negatief kunnen beïnvloeden. Daarbij wordt gekeken naar vijf factoren die overlast kunnen veroorzaken. De factoren zijn lawaai, onveiligheid, geur, kankerverwekkende stoffen en giftige stoffen. De totale overlast wordt op de volgende manier vastgesteld.

Elk van de vijf factoren wordt gemeten en vervolgens ingedeeld in vijf beoordelingsklassen, van de laagste klasse A (nauwelijks overlast) tot en met de hoogste klasse E (grote overlast).

Met behulp van dit schema is de hindercode I, II, III, IV, V of VI te bepalen. Deze hindercode is een maat voor de totale overlast in een gebied.
Als de metingen van de vijf factoren het rijtje A-C-C-B-A opleveren (voor lawaai-onveiligheid-geur-kankerverwekkende stoffen-giftige stoffen), is de bijbehorende hindercode II.



Figuur 5.3

a Hoeveel verschillende rijtjes zijn er mogelijk met hindercode III? Licht je antwoord toe.

b Hoeveel verschillende rijtjes zijn er mogelijk met hindercode I? Licht je antwoord toe.

c Als één van de factoren één klasse hoger wordt, stijgt de hindercode. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de hindercode ook meer dan één niveau kan stijgen.

Toepassen

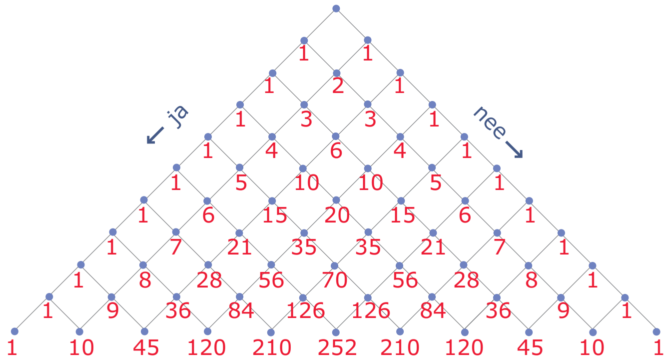
Opgave 8: Driehoek van Pascal

De **driehoek van Pascal** is een telsysteem met vele toepassingen.

Hier zie je het telsysteem weergegeven in een rooster. De naam ‘driehoek’ wordt door de figuur duidelijk opgeroepen. Het aantal routes naar één van de punten op de tiende rij is het aantal combinaties van r uit 10: $\binom{10}{r}$. Ga dit zelf na!

Om naar een punt op de tiende rij te komen, moet je 10 keer een ‘ja/nee’-keuze maken. Het aantal mogelijkheden om naar een punt op de tiende rij te komen is daarom in totaal 2^{10}.

Dus: $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 2^{10}$.



Figuur 5.4

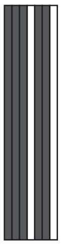
a Laat zien hoe je met behulp van combinaties de getallen op de tiende rij van de driehoek van Pascal kunt vinden.

b Laat zien hoe je vanuit de getallen op de tiende rij de getallen op de elfde rij van de driehoek van Pascal kunt vinden.

Opgave 9: BARcode

Bij het werken met allerlei codes zijn telproblemen voortdurend van belang. Zijn er voldoende pincodes voor iedereen? Zijn er voldoende postcodes voor iedereen? Kun je een goed systeem vinden voor het identificeren van artikelen in de winkel?

Bij het ontwerpen van een bepaald soort barcode (streepjescode) is men uitgegaan van een rechthoek die verdeeld is in 7 stroken. Iedere strook is 'zwart' of 'wit'. Hiernaast zie je de code voor het cijfer 7.


7

Figuur 5.5

a Hoeveel codes zijn er in totaal mogelijk voor zo'n rechthoek?

b Hoeveel codes zijn er mogelijk met precies 3 zwarte stroken?

Hier zie je een voorbeeld van een streepjescode.

8 710398 010148

Figuur 5.6

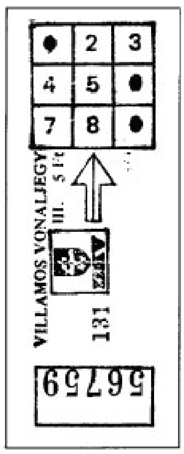
c Uit hoeveel rechthoekjes bestaat dit type barcode?

d Hoeveel verschillende barcodes zijn er van dit type mogelijk als ze uitsluitend uit cijfers bestaan?

Examen

Opgave 10: Metro in Boedapest

Als je in Boedapest met de metro wilt reizen, moet je eerst een kaartje kopen. Zo'n kaartje is voorzien van 9 vakjes met daarin de cijfers 1 tot en met 9 (zie figuur). Zodra je bent ingestapt, moet je je kaartje in een ponsapparaatje steken (volgens de pijlrichting en met de bedrukte zijde boven). Eén of meer (maximaal 9) cijfers worden dan in één keer weggeponst. Daarmee is aan het kaartje te zien in welke trein je reis is begonnen. Hier zie je een afbeelding van een gebruikt kaartje, waarbij de vakjes 1, 6 en 9 zijn voorzien van een gaatje.



Figuur 5.7

a Bereken op hoeveel verschillende manieren er in een kaartje 3 gaatjes kunnen worden geponst.

b In een kaartje worden 2 gaatjes geponst, die niet in dezelfde rij of kolom zitten. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er? Licht je antwoord toe.

Het aantal cijfers dat wordt weggeponst, mag variëren van 1 tot en met 9. Op een dag rijden er op het metronet 400 treinen.

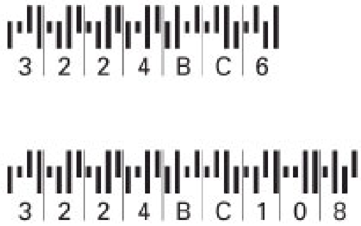
c Is het mogelijk dat in elke trein op een verschillende wijze gaatjes in een kaartje worden geponst? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 1992, tweede tijdvak)

Opgave 11: KIX

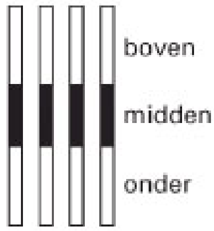
De KIX (KlantIndeX) is een streepjescode die gebruikt wordt om post machinaal te sorteren. Steeds meer bedrijven drukken op poststukken onder het adres de KIX af. Deze bedrijven krijgen daarvoor een korting op de verzendkosten.

Een adres wordt in Nederland volledig bepaald door de postcode en het huisnummer. De KIX bestaat daarom uit 4 cijfers en 2 letters voor de postcode en daarachter het aantal cijfers dat nodig is voor het huisnummer. In de figuur zie je twee voorbeelden van een KIX. Je ziet als voorbeeld de KIX van postcode 3224 BC met huisnummer 6 en van postcode 3224 BC met huisnummer 108. In de KIX heeft elk cijfer en elke letter een eigen symbool. Er wordt daarbij geen onderscheid gemaakt tussen hoofdletters en kleine letters. De letters B en b krijgen dus hetzelfde symbool.
Elk symbool bestaat uit 4 verticale strepen. Zie de laatste figuur.



Figuur 5.8

Het middelste stuk van elke streep is altijd zwart. Boven zijn er 4 stukken en onder zijn er 4 stukken. Elk van die 8 stukken kan wit of zwart zijn. Zo zijn er veel verschillende symbolen te maken waarbij het niet uitmaakt hoeveel van de 4 bovenste en de 4 onderste stukken zwart zijn gemaakt.



Figuur 5.9

a Bereken het aantal verschillende symbolen dat op die manier is te maken.

Bij een KIX-symbool zijn er van de 4 bovenste stukken precies 2 zwart. Ook van de 4 onderste stukken zijn er precies 2 zwart.
Bijvoorbeeld: de 3 heeft symbool , de B (of b) heeft symbool .
Zoals je bij de laatste streep van de 3 ziet, mag een streep ook helemaal zwart zijn, als er maar in totaal twee stukken boven en twee stukken onder zwart zijn.

b Hoeveel verschillende KIX-symbolen zijn er op deze manier te maken? Licht je antwoord toe.

Bij elk adres hoort een huisnummer. Huisnummers beginnen nooit met een 0. Bij sommige adressen komt er na het huisnummer een toevoeging, zoals bij het huisnummer 6A. Soms staat er zelfs een heel woord bij: 73 boven. Bij zo’n toevoeging wordt de KIX na het huisnummer aangevuld met eerst de letter X en daarna de letter(s) en/of cijfer(s) die nodig zijn voor de toevoeging.
De KIX is door het huisnummer (zie figuur) en door een eventuele toevoeging niet altijd even lang. We vatten dit samen in deze tabel.

altijd		soms	
postcode	huisnummer	scheidingsteken	toevoeging
4 cijfers en 2 letters	maximaal 5 cijfers	X	maximaal 6 tekens (letters en/of cijfers)
vaste lengte	variabele lengte	vaste lengte	variabele lengte

Tabel 5.1

Hier vind je twee voorbeelden van een KIX met 9 symbolen:

bij het adres:	Dorsvlegel 108, 3224 BC HELLEVOETSLUIS
hoort KIX:	3224BC108
in symbolen:	
bij het adres:	Wethouder Hekkingstraat 9A, 1234 HV JUINEN
hoort KIX:	1234HV9XA
in symbolen:	

Tabel 5.2

De postcode 6801 MG vormt het begin van een KIX van 9 symbolen. Er zijn aan de 6 symbolen van de postcode dus nog 3 symbolen toegevoegd.

c Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om bij postcode 6801 MG een correcte KIX van 9 symbolen te maken? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 2004, tweede tijdvak)

Opgave 12: IKB-code

Alle eieren die je in de winkel koopt, zijn tegenwoordig voorzien van een code. Een voorbeeld van zo'n code is 1-NL-4118801. Dit is de IKB-code. (IKB betekent integrale ketenbeheersing.) Hiermee is te achterhalen waar het ei vandaan komt.
In de tabel zie je hoe de IKB-code is opgebouwd.

Houderijsysteem	Land van herkomst	Nummer pluimveebedrijf	(Eventueel) stalnummer
0 = Biologisch	NL = Nederland	10000 tot en met 99999	00 tot en met 99
1 = Vrije uitloop	BE = België		
2 = Scharrel	DU = Duitsland		
3 = Kooi	FR = Frankrijk		

Tabel 5.3

Het ei met code 1-NL-4118801 is dus een vrije-uitloopei uit Nederland van pluimveebedrijf 41188 met stalnummer 01.

a Bereken hoeveel verschillende IKB-codes er mogelijk zijn.

b Hoeveel codes zijn er mogelijk voor Franse scharreleieren?

c Een Nederlands pluimveebedrijf met nummer 41188 wil voor elk type ei één stal gaan gebruiken. De pluimveehouder nummert zijn stallen vanaf 00. Hoeveel IKB-codes zijn hiervoor mogelijk?

d Hoeveel Nederlandse, Franse, Duitse en Belgische bedrijven kunnen er met de IKB-codering in totaal worden gecodeerd?

(naar: examen 2008, tweede tijdvak)

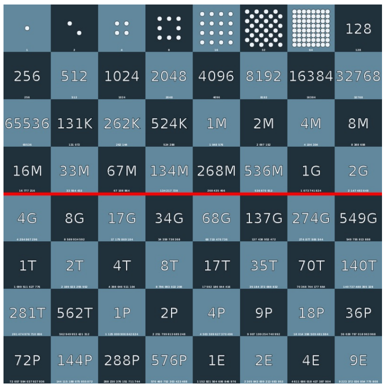
2

Exponentiële verbanden

2.1 Exponentiële groei

Inleiding

Groeiverschijnselen komen veel voor, denk aan het toenemen van geld dat je op de bank zet, het toenemen van de kosten als je meer km in de taxi zit, het groeien van de bevolking, enzovoorts. Soms is er sprake van toename met een vaste hoeveelheid per tijdseenheid, soms is er sprake van toename die afhankelijk is van de hoeveelheid zelf: hoe groter de hoeveelheid, hoe groter ook de toename per tijdseenheid. Bij exponentiële groei is de toename een vast percentage van de totale hoeveelheid.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei en afname, bijpassende formules opstellen;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Stel je voor dat je een heel groot vel papier hebt (A1-formaat). Het vel papier vouw je dubbel. Het dubbelgevouwen papier is dan twee lagen dik. Vouw je dit papier nogmaals dubbel, dan is het papier vier lagen dik. Een echt vel papier kun je natuurlijk steeds moeilijker dubbelvouwen. Wanneer je je het vel papier voorstelt als een onbegrensd vlak zonder dikte, kun je in principe blijven doorgaan met dubbelvouwen.

a Hoeveel lagen papier zijn er na twintig keer dubbelvouwen?

b Waarom zal dit met een A4tje nooit lukken?

c Stel dat het onbegrensde vel papier $0{,}15$ mm dik is.

Hoe dik is het aantal lagen na twintig keer vouwen?

d Van een ander vel papier is na net zo vaak vouwen het aantal lagen maar 5 cm dik. Hoe dik is dat papier?

Uitleg

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Het aantal bacteriën is dan verdubbeld. Bij een geschikte constante temperatuur (er gaan dan geen bacteriën dood) kan de groei van het aantal bacteriën verlopen als in de tabel.

tijd (uur)	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	6	12	24	48	96	192	384

Tabel 1.1

De hoeveelheid bacteriën wordt elk uur twee keer zo groot. Dat zie je door opeenvolgende waarden in de tabel op elkaar te delen.

$\frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = \frac{192}{96} = 2$

Je moet dus steeds met factor 2 vermenigvuldigen om de volgende waarde te vinden:

- Op tijdstip 0 heb je 6 bacteriën.
- Na 1 uur heb je $6 \cdot 2$ bacteriën.
- Na 2 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2$ bacteriën.
- Na 3 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2^3$ bacteriën, enzovoort.

Je zegt: de hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Voor de hoeveelheid bacteriën B na t uur geldt de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$. Je ziet dat er machten worden gebruikt voor het herhaaldelijk vermenigvuldigen. In dit geval zijn het machten met grondtal 2, dit getal is de groeifactor per uur. Omdat de variabele t in de exponent zit, spreek je van ‘exponentiële groei’.

Opgave 1

Lees de **Uitleg**.

a Wat versta je onder de ‘groeifactor’ per uur van het aantal bacteriën?

b Hoeveel procent bacteriën komt er elk uur bij?

c Hoeveel bacteriën heb je na 12 uur?

d Hoeveel bacteriën heb je na 13 uur?

e Hoeveel bacteriën heb je na 15 uur?

Opgave 2

De formule voor de bacteriegroei in de **Uitleg** is: $B = 6 \cdot 2^t$.

a Breng deze formule in beeld op de grafische rekenmachine. Zorg ervoor dat er minstens 24 uur bacteriegroei in beeld komt.

b Hoeveel bacteriën zijn er na 20 uur?

c Op welk tijdstip zijn er meer dan 60000 bacteriën? Rond af op twee decimalen.

d Op welk tijdstip is de hoeveelheid bacteriën dan weer verdubbeld (dus 120000 geworden)? Licht je antwoord toe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

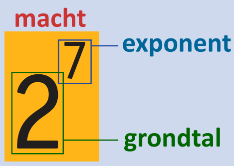
Bij exponentiële groei vermenigvuldig je per tijdseenheid een hoeveelheid steeds met hetzelfde getal. Dit getal g heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Voor g geldt: $g > 0$

Om uit een tabel vast te stellen of een hoeveelheid H exponentieel groeit, deel je opeenvolgende waarden van de hoeveelheid op elkaar (let op dat er steeds evenveel tijd verstreken is). Komt daar steeds hetzelfde uit, dan is er sprake van **exponentiële groei**. De hoeveelheid H groeit dan zo:

- Op $t = 0$ heb je de beginwaarde b.
- Op $t = 1$ heb je: $H = b \cdot g$
- Op $t = 2$ heb je: $H = b \cdot g \cdot g = b \cdot g^2$
- Op $t = 3$ heb je: $H = b \cdot g \cdot g \cdot g = b \cdot g^3$

Dus er geldt een formule van de vorm: $H = b \cdot g^t$

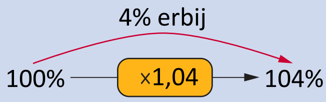
Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je t keer hetzelfde getal g, dan schrijf je dat als g^t. Dit is een **macht**, de groeifactor g heet het **grondtal**, t heet de **exponent**.



Figuur 1.2

Een voorbeeld van exponentiële groei is toename of afname met een vast percentage. Bij een groei met p procent hoort de groeifactor: $g = 1 + \frac{p}{100}$

Voor $p > 0$ neemt de hoeveelheid toe en is $g > 1$: **exponentiële toename**.
Voor $p < 0$ neemt de hoeveelheid af en is $g < 1$ (maar groter dan 0): **exponentiële afname**.



Figuur 1.3

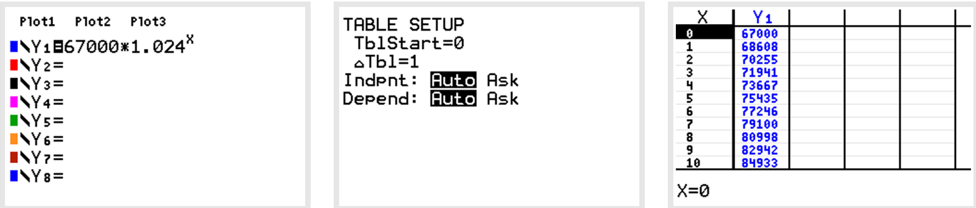
Voorbeeld 1

Het aantal inwoners van Dorenstad groeit volgens de formule: $N = 67000 \cdot 1{,}024^t$.
Hierin is t de tijd in jaren en N het aantal inwoners van Dorenstad (afgerond op duizendtallen). $t = 0$ in het jaar 2016. Met hoeveel procent per jaar groeit het aantal inwoners van Dorenstad volgens deze formule? In welk jaar heeft Dorenstad meer dan 100000 inwoners als deze groei zo doorgaat?

Antwoord

Er is sprake van exponentiële groei met een groeifactor van $1{,}024$. Elk jaar wordt het inwoneraantal met $1{,}024$ vermenigvuldigd, dus 100% is een jaar later 102,4%. Er komt jaarlijks 2,4% bij.

Als je deze formule invoert op de grafische rekenmachine heb je snel een tabel. Je kunt dan aflezen voor welke waarde van t je voor het eerst boven de 100000 zit. Je vindt $t = 17$. Het aantal inwoners zal dus in $2016 + 17 = 2033$ boven de 100000 komen.



Figuur 1.4

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe het aantal inwoners van Dorenstad exponentieel groeit. Het aantal inwoners van Amstvorde groeit volgens de formule $N = 110000 \cdot 1{,}013^t$ met t in jaren vanaf 2016.

a Waaraan zie je dat Amstvorde een grotere stad is dan Dorenstad?

b Waaraan zie je dat de procentuele groei in Amstvorde kleiner is dan in Dorenstad?

c Hoe groot is de groeifactor van het aantal mensen in Amstvorde per jaar? Hoe groot is het jaarlijkse groeipercentage?

d Hoe groot is de groeifactor van het aantal inwoners van Amstvorde per tien jaar? En hoe groot is het groeipercentage per tien jaar?

e Maak nu de grafieken van de groeiformules van de steden Dorenstad en Amstvorde in één figuur op de grafische rekenmachine. Zorg ervoor dat het snijpunt van beide grafieken in beeld komt.

f Bepaal met de grafische rekenmachine het jaar waarin Dorenstad groter wordt dan Amstvorde als hun groei precies zo zal doorgaan. Hoeveel inwoners heeft Dorenstad aan het einde van dat jaar?

Voorbeeld 2

Een krant zag in een reeks van jaren het aantal jaarabonnementen dalen.

tijd (jaar)	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen (×	970	941	913	885	859	833

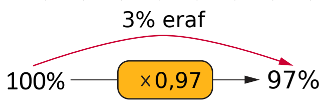
Tabel 1.2

Stel op grond van deze tabel een zo goed mogelijk passende formule op die het verloop van het aantal duizenden abonnementen A als functie van de tijd t in jaren beschrijft. Neem $t = 0$ voor 2010. Als het aantal abonnementen onder de 500000 zakt, raakt de krant in de problemen. In welk jaar is dat het geval als dit verloop niet wijzigt?

Antwoord

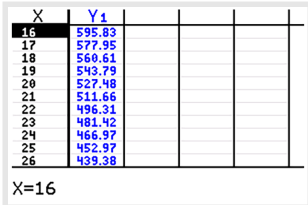
Je controleert eerst of je een exponentiële formule mag maken: de jaartallen nemen gelijkmatig toe. Deling van opeenvolgende aantallen abonnementen levert steeds (ongeveer) 0,97 op, dus de daling is een vorm van exponentiële groei.

De groeifactor $g \approx 0{,}97 < 1$, dus er is sprake van exponentiële afname. Het aantal abonnementen neemt jaarlijks met 3% af.
Een passende formule is daarom: $A(t) = 970 \cdot 0{,}97^t$.



Figuur 1.5

Maak een tabel van deze functie met de rekenmachine. Op $t = 21$ is de waarde van A ongeveer 512. En op $t = 22$ is de waarde van A ongeveer 496. Dus bij $t = 22$ komt het aantal abonnementen voor het eerst onder de 500000. De krant raakt in 2032 in de problemen.



Figuur 1.6

Opgave 4

Bekijk de tabel in **Voorbeeld 2**. Er is sprake van exponentiële afname.

a Controleer dat de groeifactor per jaar inderdaad telkens ongeveer $0{,}97$ is.

b Welke formule vind je voor het aantal abonnementen A als je $t = 0$ neemt in 2017?

c Laat zien dat de krant in 2032 inderdaad in de problemen raakt.

Opgave 5

Geef de groeifactor van de volgende groei- of afnamepercentages.

a 10% toename

b 100% toename

c $0{,}2$% toename

d 100% afname

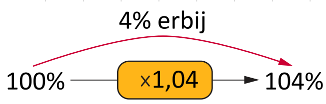
e $0{,}1$% afname

f 40% afname

Voorbeeld 3

Op 1 januari 2010 stond een bedrag van € 3500,00 op een spaarrekening. De bank gaf op deze rekening een rente van 4% per jaar. Neem aan dat dit vanaf 1 januari 2010 niet verandert.

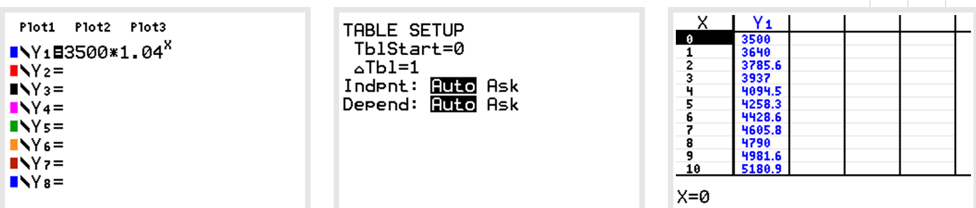
- Stel de formule op voor het saldo S op deze rekening afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010.
- Maak een tabel met de grafische rekenmachine en bekijk hoe het saldo zich ontwikkelt.
- Hoe groot zijn de groeifactor en het groeipercentage per drie jaar? En per vijf jaar?



Figuur 1.7

Antwoord

- Bij een procentuele toename van 4% per jaar hoort een groeifactor van $1{,}04$. Op $t = 0$ was het saldo € 3500,00. Een passende formule is daarom: $S = 3500 \cdot 1{,}04^t$
- Als je deze formule invoert op de grafische rekenmachine heb je snel een tabel.
- Per drie jaar is de groeifactor: $1{,}04^3 \approx 1{,}1249$ dus het groeipercentage is dan bijna $12{,}5$%. Per vijf jaar is de groeifactor: $1{,}04^5 \approx 1{,}22$, dus het groeipercentage is dan ongeveer 22%.



Figuur 1.8

Opgave 6

Iemand zet op 1 januari 2020 € 800,00 op een bankrekening tegen $0,6\%$ rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

a Hoe groot is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?

b Hoeveel staat er op de bankrekening op 1 januari 2025?

c Welke formule geldt voor het spaartegoed S uitgedrukt in t, waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2010 is?

d Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipercentage per vijf jaar.

e Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2040 kunt berekenen:

- $t = 20$ invullen in de formule;
- het tegoed op 1 januari 2010 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vier jaar;
- het tegoed op 1 januari 2010 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vijf jaar.

Opgave 7

Neem de tabel over en vul hem in:

procentuele toename per jaa	13	-6	0,3				
groeifactor per jaar				1,15	0,98	3,95	0,01

Tabel 1.3

Opgave 8

Van twee vogelsoorten die alleen op één bepaald eiland voorkomen, neemt het aantal de laatste jaren af.

tijd (jaar)	2004	2005	2006	2007	2008
aantal vogels soort A	5200	4888	4594	4319	4060
aantal vogels soort B	6400	6205	5998	5801	5598

Tabel 1.4

a Leg uit dat het aantal vogels van soort A exponentieel lijkt af te nemen. Hoe groot is de groeifactor per jaar?

b Hoeveel vogels van soort A zullen er in 2011 geweest zijn als de afname zo doorgaat?

c Het aantal vogels van soort B neemt ongeveer lineair af. Laat dat zien.

d In welk jaar zullen er van beide soorten vogels evenveel zijn als de groei zo doorgaat?

Verwerken

Opgave 9

De oppervlakte die door een snelgroeiende waterplant wordt bedekt, neemt elke dag met 50% toe.

a Met welk getal moet je de oppervlakte vermenigvuldigen als je de oppervlakte wilt weten die de waterplant morgen zal bedekken?

b Neemt de oppervlakte van de waterplant in twee dagen met 100% toe? Of met een ander percentage? Licht je antwoord toe.

c Is hier sprake van exponentiële groei? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Iemand koopt aandelen ter waarde van € 4000,00. De aandelen nemen gedurende de eerste vier jaar elk jaar 11% in waarde toe.

a Bereken de waarde van de aandelen na één jaar en na twee jaar.

b Hoeveel bedraagt de groeifactor van de waarde van de aandelen?

c Hoe kun je met behulp van de waarde na twee jaar de waarde na drie jaar berekenen?

d De waarde na vier jaar is € 6072,28. Hoe kun je hieruit met behulp van de groeifactor de waarde na drie jaar berekenen?

e In het zesde jaar stijgt de waarde van de aandelen van € 6740,23 naar € 7279,45. Met hoeveel procent is de waarde van de aandelen in het zesde jaar toegenomen? Wat is nu de groeifactor?

Opgave 11

Elk jaar wordt op 1 januari het aantal herten in een natuurgebied geteld. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

a Stel een formule op voor de ‘groei’ van het aantal herten vanaf het jaar 2014.

b Bereken het aantal herten in het jaar 2024.

c Bereken het groeipercentage per tien jaar.

d In welk jaar is het aantal herten gehalveerd?

Opgave 12

Een kapitaal van € 10415,00 wordt gedurende tien jaar belegd in aandelen. In de tabel zie je de groei van het kapitaal in de eerste zes jaar.

tijd (jaar)	1	2	3	4	5	6
kapitaal (euro)	10415	10850	11300	11760	12250	12760

Tabel 1.5

Onder rendement wordt hier verstaan de procentuele toename van het belegde kapitaal per jaar.

a Maak duidelijk dat het kapitaal in de eerste zes jaar bij benadering exponentieel toeneemt.

b Bereken voor deze periode het rendement (per jaar).

c Maak een tabel van een kapitaal van € 10000,00 dat tien jaar wordt belegd bij een rendement van 8% per jaar.

d Na hoeveel jaar is dit kapitaal verdubbeld?

e Iemand belegt een kapitaal van € 10000,00 gedurende tien jaar. Stel dat hij de eerste vijf jaar een rendement van 14% per jaar behaalt en de daarop volgende vijf jaar 4% per jaar. Bereken het kapitaal K na vijf jaar en na tien jaar.

f Laat met een berekening zien of het de belegger, in vergelijking met de vorige situatie, meer oplevert als het rendement de eerste vijf jaar 4% is en de volgende vijf jaar 14%.

Opgave 13

Twee scholen hebben te maken met teruglopende leerlingenaantallen.

tijd (jaar teldatum 1 sept.)	2009	2010	2011	2012	2013
aantal leerlingen school 1	1050	998	948	900	855
aantal leerlingen school 2	1050	1000	960	890	850

Tabel 1.6

a Bij een van beide scholen neemt het leerlingenaantal jaarlijks met een vast percentage af. Bij welke school is dat en met welk percentage?

b Hoe groot is het groeipercentage in tien jaar?

c In deze situatie heeft het geen zin om naar kleinere tijdseenheden dan een jaar te kijken. Waarom niet?

Toepassen

Opgave 14: Sparen voor een scooter

Bij de geboorte van Marijn heeft zijn vader bedacht dat hij op 16 jarige leeftijd wel een (elektrische) scooter zou willen rijden. Hij heeft een bedrag op een spaarrekening gezet dat elk jaar 4% rente geeft. Na 16 jaar is het bedrag € 2750,00 geworden.

a Hoe groot is de groeifactor in 16 jaar?

b Hoeveel heeft de vader van Marijn gestort?

Opgave 15: Internetsparen

Er zijn nogal wat verschillende internetspaarrekeningen. In deze opgave worden er twee vergeleken: een gewone spaarrekening en één met opnamekosten. Deze laatste geeft wel een iets hogere rente, maar als je het spaarsaldo opneemt, betaal je een percentage van het opgenomen bedrag aan opnamekosten. Als je bijvoorbeeld € 2500,00 van je rekening haalt en de bank rekent 1% opnamekosten, dan moet je € 25,00 aan opnamekosten betalen. Je krijgt dus maar € 2475,00 uitbetaald.

Je stort € 10000,00 op een gewone internetspaarrekening met een rentepercentage op jaarbasis van $1{,}85$. Je stort ook € 10000,00 op een internetspaarrekening die 1% opnamekosten rekent, maar wel $2{,}65$% rente op jaarbasis geeft. Na zes jaar neem je van beide rekeningen het totale spaarsaldo op.

a Bereken bij elk van beide internetspaarrekeningen het bedrag dat je uiteindelijk in handen krijgt.

b Stel voor beide internetspaarrekeningen een bijbehorende formule op voor het totale bedrag B dat je na t jaar kunt opnemen.

c Bereken in maanden nauwkeurig op welke termijn de internetspaarrekening zonder opnamekosten het aantrekkelijkst is.

Testen

Opgave 16

In de tabel hieronder zie je de grootte van een spaartegoed op 1 januari in een aantal opeenvolgende jaren.

jaar	2005	2006	2007	2008	2009	2010
tegoed in €	1000,00	1040,00	1081,60	1124,86	1169,86	1216,65

Tabel 1.7

a Bereken het verschil tussen de bedragen in 2005 en 2006. Hoe zou de tabel eruit zien als de groei na 2006 zich lineair zou voortzetten?

b Je kunt uit a concluderen dat de groei van het spaartegoed niet lineair is. Ga na dat het tegoed exponentieel groeit.

c Hoeveel bedraagt de groeifactor? En het groeipercentage?

d Hoe groot zal het tegoed zijn op 1 januari 2020?

Opgave 17

Iemand betaalt op 1 januari 2002 een huur van € 300 (per maand). Er wordt een jaarlijkse huurverhoging verwacht van $5{,}5$%.

a Is hier sprake van exponentiële groei?

b Bereken de huur op 1 januari 2003 en op 1 januari 2004.

c Met hoeveel procent stijgt de huur per twee jaar?

Opgave 18

Iemand koopt vlak voor de crisis in 2008 voor € 5000,00 aandelen. In de volgende jaren blijkt dat de aandelen elk jaar 12% in waarde dalen.

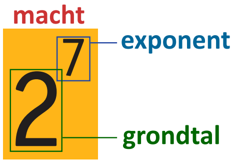
a Stel een formule op voor de waarde van de aandelen $W(t)$, waarin t de tijd in jaren sinds de aankoop van de aandelen is.

b Na hoeveel jaar is de waarde van de aandelen minder dan € 1000 geworden?

2.2 Rekenen met machten

Inleiding

In de formules voor exponentiële groei komen machten voor. Om er mee te kunnen werken moet je dus met machten kunnen rekenen. Waarschijnlijk heb je dat wel geleerd, maar hier worden de belangrijkste rekenregels voor machten nog even opnieuw uitgelegd.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- rekenen met machten;
- de rekenregels voor machten toepassen bij exponentiële groei.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met formules en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Stel dat de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B = 5 \cdot 2^t$, met de tijd t in uren.

a Op $t = 4$ heb je $5 \cdot 2^4 = 80$ bacteriën. Hoeveel heb je er nog weer vier uur later?

b De groeifactor per uur is 2. Hoeveel is de groeifactor per dag?

c Welke tijd hoort bij de groeifactor $\left(2^{24}\right)^7$?

Uitleg

Voor de hoeveelheid bacteriën B na t uur geldt de formule $B = 6 \cdot 2^t$. Door te denken aan bacteriegroei en deze functie B kun je een aantal rekenregels voor machten afleiden.

Allereerst heb je op $t = 0$ volgens de formule $6 \cdot 2^0$ bacteriën. Omdat je weet dat dit precies 6 moet zijn, is: $2^0 = 1$

Na 3 uur heb je $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$. Dit is het aantal bacteriën na 7 uur, dus $6 \cdot 2^7$. Conclusie: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Als je machten van 2 vermenigvuldigt, tel je de exponenten op.

Na 7 uur heb je $6 \cdot 2^7$ en 4 uur eerder $6 \cdot 2^{7-4}$ (namelijk het moment dat $t = 3$). Dit is het aantal bacteriën na 3 uur, dus $6 \cdot 2^3$. Conclusie: $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$. Als je machten van 2 deelt, trek je de exponenten af.

De groeifactor per uur is 2. Per drie uur is die groeifactor $2^3 = 8$. Het aantal bacteriën na 12 uur kun je op twee manieren berekenen: $6 \cdot 2^{12}$ of $6 \cdot 8^4$. Dus moet $\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$. Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^3$$

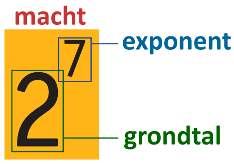
$$\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$$

$$2^0 = 1$$

Figuur 2.2

Je hebt nu gerekend met machten van 2. Dit getal is de groeifactor van de hoeveelheid bacteriën. Dit is het grondtal van de macht.

Deze rekenregels gelden heel algemeen voor alle grondtallen en exponenten. Alleen met grondtal 0 moet je voorzichtig zijn.



Figuur 2.3

Opgave 1

Welke berekeningen zijn juist?

a $2^3 \cdot 2^5 = 2^{15}$

b $11^{50} \cdot 11^{50} = 11^{100}$

c $3^7 + 2^7 = 5^7$

d $\left(2^2\right)^3 = 2^6$

Opgave 2

Schrijf als één macht. Gebruik de rekenregels.

a $2^4 \cdot 2^{14}$

b $3^3 \cdot 3^5$

c $\frac{5^9}{5^4}$

d $\left(6^3\right)^6$

e $g^3 \cdot g^5$

f $\frac{\left(g^4\right)^5}{g^6 \cdot g^{10}}$

Theorie en voorbeelden

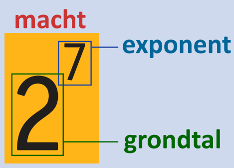
Om te onthouden

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je t keer hetzelfde getal g, dan schrijf je dat als g^t. Dit is een **macht**, de groeifactor g heet het **grondtal**, t heet de **exponent**, waarbij t (voorlopig) een positief geheel getal is.

Voor $t = 0$ is de afspraak: $g^0 = 1$.

In het algemeen gelden voor een willekeurig grondtal g en willekeurige positieve gehele n en m de volgende **rekenregels**:

- $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$
- $\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$
- $\left(g^n\right)^m = g^{n \cdot m}$



Figuur 2.4

Voorbeeld 1

Als één macht schrijven:

- $\left(2^3\right)^4 \cdot 2^{10} = 2^{12} \cdot 2^{10} = 2^{22}$
- $\frac{3^{16}}{3 \cdot 3^4} = \frac{3^{16}}{3^5} = 3^{11}$
- $2^{10} + 7 \cdot 2^{10} = 1 \cdot 2^{10} + 7 \cdot 2^{10} = 8 \cdot 2^{10} = 2^3 \cdot 2^{10} = 2^{13}$
- $0{,}9^4 \cdot \left(0{,}9^2\right)^3 = 0{,}9^4 \cdot 0{,}9^6 = 0{,}9^{10}$
- $\frac{\left(x^5\right)^3}{x^6 \cdot x^4} = \frac{x^{15}}{x^{10}} = x^5$

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** gebruik je de rekenregels voor machten. Schrijf de volgende uitdrukkingen als één macht.

a $2^3 \cdot \left(2^4\right)^2$

b $4^5 \cdot 2^3$

c $\frac{\left(5^2\right)^4}{5 \cdot 5^3}$

d $\frac{5^6}{5^2 \cdot 5^4}$

e $\left(x^4\right)^6 \cdot x^5$

f $\frac{g^a \cdot g^{2a}}{\left(g^a\right)^2}$

Voorbeeld 2

Een spaartegoed staat uit tegen $0{,}5\%$ rente per maand. De bank wil de rente per half jaar bijschrijven of zelfs jaarlijks. Met welke rentepercentages moeten ze dan werken? Geef beide percentages in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De groeifactor van het spaartegoed per maand is $1{,}005$.

De groeifactor per half jaar is dan: $1{,}005^6 \approx 1{,}0304$. Het rentepercentage per half jaar is dus $3{,}04$. Dat is iets meer dan $6 \cdot 0{,}5 = 3\%$.

Op dezelfde manier is de groeifactor per jaar $\left(1{,}005^6\right)^2$ of $1{,}005^{12}$ en dat is ongeveer $1{,}0617$. Het rentepercentage per jaar is dus $6{,}17$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je omrekent van een groeifactor per maand naar een groeifactor per half jaar en een groeifactor per jaar. Bekijk ook de bijbehorende groeipercentages. De groeifactor per uur is $1{,}02$.

a Hoeveel bedraagt het groeipercentage per uur?

b Hoeveel is de groeifactor per dag? En het groeipercentage per dag?

c De groeifactor per uur wordt $0{,}91$. Hoe groot is het groeipercentage per uur?

d Hoeveel is de groeifactor per dag? En het groeipercentage per dag?

Opgave 5

Iemand zet op 1 januari 2000 op een bankrekening € 800,00 tegen $1{,}6$% rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

a Hoe groot is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?

b Hoeveel staat er op de bankrekening op 1 januari 2005? Laat zien hoe je dat berekent.

c Welke formule geldt voor het spaartegoed $S(t)$, waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2000 is?

d Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipercentage per vijf jaar.

e Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2020 kunt berekenen:

- $t = 20$ invullen in de formule;
- het tegoed op 1 januari 2000 vermenigvuldigen met de groeifactor per twintig jaar;
- het tegoed op 1 januari 2000 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vier jaar;
- het tegoed op 1 januari 2000 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vijf jaar.

Voorbeeld 3

Bereken.

$\frac{4^{100} \cdot 8^{200}}{16^{199}}$

Antwoord

Reken zonder grafische rekenmachine.

Reken met de rekenregels en met machten van 2.

Ga maar na: $4 = 2^4$, $8 = 2^3$ en $16 = 2^4$.

$$\frac{(2^2)^{100} \cdot (2^3)^{200}}{(2^4)^{199}} = \frac{2^{200} \cdot 2^{600}}{2^{796}} = \frac{2^{800}}{2^{796}} = 2^4 = 16$$

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 3**. Gebruik de rekenregels voor machten om de uitdrukkingen als één macht te schrijven.

a $\frac{4^{107} \cdot 2^{80}}{8^{96}}$

b $\left(\frac{1}{3}\right)^{83} \cdot \left(3^{40}\right)^2$

c $\frac{4^6 \cdot 64^4}{16^2}$

Verwerken

Opgave 7

In een ondiep meer van 1000 km^2 begint riet te groeien. Op 1 januari 2005 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 1 km^2. Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. In 2010 constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar twee keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

a Hoeveel is de groeifactor per jaar?

b Maak een tabel voor de met riet bedekte oppervlakte voor de eerste vijf jaar.

c Hoe groot is de groeifactor per tien jaar?

d Na hoeveel jaar is het hele meer begroeid met riet?

Opgave 8

Schrijf als één macht.

a $7^2 \cdot 7^3 \cdot 7^1$

b $\frac{5^{312}}{5^{309}}$

c $3^{69} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{60}$

d $\frac{x^{12} \cdot x^{15}}{\left(x^6\right)^3}$

Opgave 9

De concentratie van een bepaalde vervuilende stof in het water neemt langzaam af met een vast percentage van 13 per uur. Op $t = 0$ is de concentratie 150 mg per liter.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur? Stel een formule op voor de concentratie C als functie van de tijd t in uren.

b Na hoeveel uur is de concentratie gehalveerd?

c Met hoeveel procent neemt de concentratie per dag af?

Opgave 10

Bereken.

a $3^{110} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{109}$

b $\left(\frac{3}{4}\right)^{235} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{236}$

Opgave 11

Bereken:

$\frac{4^{180} \cdot 2^{60}}{8^{112} \cdot 4^{42}}$

Toepassen

Opgave 12: Getallenpuzzel

Wat zijn de laatste vier cijfers van 5^{2017}?

Testen

Opgave 13

Schrijf als één macht: $\frac{17^{31} \cdot 17^{54}}{(17^4)^{21}}$.

Opgave 14

Iemand betaalt een huur van € 950,00 (per maand). Er wordt een jaarlijkse huurverhoging verwacht van 4%.

a Stel een formule op waarmee je voor volgende jaren de huur per maand kunt berekenen.

b Maak een tabel waarmee je kunt uitzoeken hoe lang het duurt tot de huur meer dan € 1300,00 per maand is geworden.

c Hoe groot is de groeifactor van de maandelijkse huur per 4 jaar?

d Bereken met behulp van de groeifactor per 4 jaar de groeifactor per 20 jaar.

e Bereken het groeipercentage per 20 jaar.

f Na hoeveel jaar is de huur per maand voor het eerst meer dan verdubbeld?

Opgave 15

Een bepaalde soort vlinders wordt in een natuurgebied in zijn voortbestaan bedreigd. In 2007 werden er nog 4600 exemplaren van geteld. In de volgende jaren blijkt dat de aantallen elk jaar met 12% afnemen.

a Stel een formule op voor het aantal vlinders van die soort $N(t)$, waarin t de tijd in jaren na 2007 is.

b Na hoeveel jaar is het aantal vlinders minder dan 1000 geworden?

c Bereken het groeipercentage per vijf jaar.

d Met welk getal moet je het aantal vlinders na vijf jaar vermenigvuldigen om het aantal na tien jaar te krijgen? Bereken het aantal vlinders na tien jaar.

e Bereken het groeipercentage per tien jaar.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het rekenen met machten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.3 Reëele exponenten

Inleiding

Tot nu toe kun je bij exponentiële groei eigenlijk alleen wat zeggen op tijdstippen die gehele positieve waarden hebben. En dat is natuurlijk niet wenselijk, je wilt weten hoeveel bacteriën er zijn na $1{,}5$ uur, of $2{,}3$ uur voor het begintijdstip.
Je gaat nu kijken hoe het met decimale en/of negatieve exponenten zit.
In het algemeen zul je leren werken met alle mogelijke reële exponenten.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken en/of negatieve exponenten;
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Stel dat de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B(t) = 12 \cdot 2^t$, met $t = 0$ is 12:00 uur.

a Hoeveel bacteriën zullen er geweest zijn om 11:00 uur? En om 10:00 uur?

b Hoe bereken je de hoeveelheid bacteriën als je teruggaat in de tijd? Kan dat ook zonder formule met alleen de groeifactor?

c Kun je ook het aantal bacteriën bepalen om 14:15 uur? Gaat dit ook zonder formule?

Uitleg

Stel dat voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt: $B = 12 \cdot 2^t$ met $t = 0$ om 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt de hoeveelheid bacteriën. Als je aanneemt dat dit voor 12:00 uur ook het geval was, dan zullen er om 11:00 uur $\frac{12}{2} = 6$ bacteriën in het schaaltje hebben gezeten.

Figuur 3.2

De hoeveelheid bacteriën op $t = -1$ moet dus 6 zijn. Ga met behulp van de rekenmachine na dat dit overeenkomt met $12 \cdot 2^{-1}$.

Zo krijgen negatieve exponenten betekenis.

De hoeveelheid bacteriën om 14:15 uur kun je berekenen door met decimale exponenten te werken. Om 14:15 uur geldt $t = 2{,}25$. Het aantal bacteriën is op dat moment:

$B = 12 \cdot 2^{2{,}25} \approx 57{,}08 \approx 57$

Zo krijgen ook decimale exponenten betekenis.

De groeifactor per uur van de hoeveelheid bacteriën is 2.
De groeifactor per dag is $2^{24} = 16777216$.

De groeifactor per kwartier ($0{,}25 = \frac{1}{4}$) is $2^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}19$.
Zo hebben ook gebroken exponenten betekenis.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Kijk goed wanneer er negatieve exponenten worden gebruikt.

a Wat moet je in de formule $B = 12 \cdot 2^t$ voor t invullen om de hoeveelheid bacteriën om 8:00 uur te berekenen?

b Bereken het aantal bacteriën om 8:00 uur.

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg**. Kijk goed wanneer er gebroken exponenten worden gebruikt.

a Wat moet je in de formule $B = 12 \cdot 2^t$ voor t invullen om de hoeveelheid bacteriën om 14:30 uur te berekenen?

b Bereken het aantal bacteriën om 14:30 uur.

Opgave 3

Bekijk de **Uitleg**.

a Hoe groot is de groeifactor per drie uur?

b Hoe groot is de groeifactor per vier uur?

c Hoe groot is de groeifactor per vijf uur?

d Hoe groot is de groeifactor per half uur?

e Hoe groot is de groeifactor per kwartier?

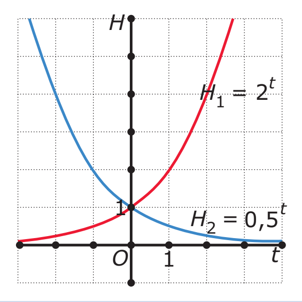
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Altijd is $g > 0$.

De algemene formule voor **exponentiële groei** is: $H = b \cdot g^t$
Hierin is H de hoeveelheid en t de tijd.

In feite mag t alle reële waarden aannemen, ook breuken en/of negatieve getallen. En daarom zijn bij exponentiële groei de grafieken vloeiende kromme lijnen.



Figuur 3.3

Ook kun je nu de groeifactor g per tijdseenheid omrekenen naar de groeifactor per (bijvoorbeeld) een halve tijdseenheid of een $\frac{1}{n}$-de tijdseenheid.

- De groeifactor per $\frac{1}{2}$ tijdseenheid is: $g^{\frac{1}{2}}$
- De groeifactor per $\frac{1}{n}$ tijdseenheid is: $g^{\frac{1}{n}}$

Voorbeeld 1

Een spaartegoed staat uit tegen 5% rente per jaar. De bank kan de rente per half jaar bijschrijven of zelfs maandelijks. Met welke rentepercentages moeten ze dan werken? Geef beide percentages in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De groeifactor van het spaartegoed per jaar is $1{,}05$. Noem de groeifactor per half jaar g: de groeifactor per half jaar $g = 1{,}05^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}0247$.

Het rentepercentage per half jaar is dus $2{,}47$.

Op dezelfde manier is de groeifactor per maand $1{,}05^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}0041$. Het rentepercentage per maand is dus $0{,}41$.

Opgave 4

Bij een bank krijg je $2{,}1\%$ rente per jaar. Wat is het rentepercentage per maand, afgerond op twee decimalen?

Opgave 5

Iemand zet op 1 juli 2014 een bedrag van € 7500,00 op de bank tegen een rente van $4{,}2\%$ per jaar. Wat is zijn kapitaal op 1 januari 2016?

a Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per jaar.

b Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per half jaar.

c Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per maand.

Voorbeeld 2

Thomas Robert Malthus leefde in het begin van de 19e eeuw. Hij dacht dat de groei van de wereldbevolking exponentieel zou kunnen zijn. In de tabel zie je het aantal mensen op aarde in de 19e eeuw.

tijd (jaar)	1800	1820	1840	1860	1880	1900
aantal mensen (mln)	1000	1102	1216	1340	1477	1629

Tabel 3.1

Stel een model op voor de bevolkingsgroei per jaar, vanaf 1800, in de vorm van een passende formule. Maak er een grafiek bij en bereken hoeveel mensen er in 1600 en in 2000 volgens dit model geweest kunnen zijn.

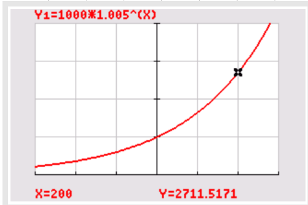
Antwoord

Om een formule op te stellen, moet je de groeifactor berekenen. Van 1800 tot 1820 wordt het aantal mensen vermenigvuldigd met: $\frac{1102}{1000} = 1{,}102$. Controleer dat dit voor elke volgende periode van twintig jaar ook ongeveer zo is. Vanaf 1800 tot 1900 groeide de wereldbevolking met een vrijwel constante groeifactor per twintig jaar van $1{,}102$. De groeifactor per jaar is dan: $1{,}102^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}005$

Neem je de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1800 en het aantal miljoenen mensen N, dan is: $N = 1000 \cdot 1{,}005^t$.

In 1600 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{-200} \approx 369$ miljoen mensen zijn geweest. In 2000 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{200} \approx 2712$ miljoen mensen zijn geweest.

In werkelijkheid waren dat er nog veel meer, namelijk meer dan 6000 miljoen.



Figuur 3.4

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je de groei van de wereldbevolking in de 19e eeuw.

a Maak zelf de grafiek zoals je die in het voorbeeld ziet.

b Bereken de aantallen mensen in 1600 en in 2000 met behulp van de groeifactor per twintig jaar. Ontstaan er verschillen met de antwoorden in het voorbeeld?

c Doe dit nog eens met behulp van de groeifactor per vijf jaar. Rond de groeifactor per vijf jaar ook af op drie decimalen.

Voorbeeld 3

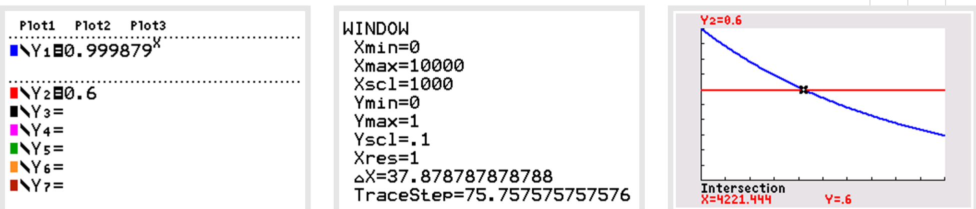
De ouderdom van hele oude voorwerpen wordt bepaald met de zogenoemde koolstof-14-methode. Koolstof-14 is een bepaalde variant van koolstof, een stof die in levende wezens voorkomt en dus ook in mummies, oude houten en leren voorwerpen, en dergelijke. De concentratie van deze variant neemt exponentieel af nadat een levend wezen is gestorven. Voor dat moment is de concentratie koolstof-14 gelijk aan die in onze atmosfeer, na die tijd wordt die concentratie kleiner. De halveringstijd van deze stof is nauwkeurig bekend, namelijk 5736 jaar.

Stel dat bij een bepaalde mummie de concentratie koolstof-14 is afgenomen met 40%. Er is dan dus nog 60% van de oorspronkelijke concentratie over. Hoe bereken je de leeftijd van die mummie?

Let op dat je de groeifactor per jaar in voldoende decimalen opschrijft. En let ook op dat je op de grafische rekenmachine rekent met het onafgeronde antwoord.

Antwoord

De halveringstijd is 5736 jaar. Als g de groeifactor per jaar is, geldt dus: $g^{5736} = 0{,}5$. Hieruit bereken je de groeifactor per jaar: $g = 0{,}5^{\frac{1}{5736}} \approx 0{,}999879$. Als t de leeftijd van de mummie is, moet $0{,}999879^t = 0{,}6$. Deze exponentiële vergelijking los je op met de grafische rekenmachine. Je vindt $t = 4221$ jaar. De mummie is ongeveer 4221 jaar oud.



Figuur 3.5

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** wordt de koolstof-14-methode voor het dateren van oude voorwerpen besproken.

a Bereken de groeifactor per eeuw. Rond je antwoord af op drie decimalen.

b Bereken met behulp van de groeifactor per eeuw de leeftijd van een oud gebruiksvoorwerp waarvan de koolstof-14-concentratie 38% is.

Verwerken

Opgave 8

Bereken de gevraagde percentages in één decimaal nauwkeurig.

a Een hoeveelheid groeit met 36% per jaar. Bereken het groeipercentage per maand.

b Een hoeveelheid neemt met 14% per week af. Bereken het percentage dat de hoeveelheid per dag afneemt.

Opgave 9

Bereken de gevraagde percentages in één decimaal nauwkeurig.

a Een hoeveelheid is in twee jaar verviervoudigd. Bereken het groeipercentage per maand.

b Van een hoeveelheid is na drie weken nog maar een derde deel over.
Bereken het percentage waarmee de hoeveelheid per dag afneemt.

Opgave 10

Om 9:00 uur waren er 500 bacteriën. Dit aantal groeit exponentieel. Je ziet een tabel met het aantal bacteriën op bepaalde tijdstippen.

tijd	9:00	12:00	15:00	18:00
bacteriën	500	1500	4500	13500

Tabel 3.2

a Bereken in drie decimalen nauwkeurig de groeifactor per uur.

b Stel de formule op van de hoeveelheid bacteriën N na t uur met $t = 0$ om 9:00 uur.

c Hoeveel bacteriën waren er om 6:00 uur?

d Hoe laat waren er 250 bacteriën? Gebruik de formule die je bij b hebt gevonden.

Opgave 11

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1{,}1^t$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (jaar) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

a Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 januari 2025?

b Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 augustus 2025?

c Hoe groot is de groeifactor per jaar?

d Wat is het groeipercentage per maand?

e Bereken het aantal inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

Opgave 12

Op 1 januari 2012 had iemand een kapitaal van € 7969,24 op zijn spaarrekening staan. Het kapitaal heeft jaren vastgestaan tegen een rente van 6%. De rente werd elk jaar bijgeschreven.

a Bereken de grootte van het kapitaal op 1 januari 2011, 1 januari 2010 en 1 januari 2009.

b In welk jaar had het kapitaal een grootte van € 5618,00?

c De spaarder heeft waarschijnlijk een bedrag in duizenden ingelegd toen hij begon met sparen. Wanneer is de spaarder begonnen met sparen en met welk bedrag?

Opgave 13

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel. In drie uur tijd is het aantal gegroeid van 1200 (om 10:00 uur) naar 3000.

a Hoe groot is de groeifactor per drie uur?

b Bereken het groeipercentage per uur.

c Welke formule kun je opstellen voor de groei van deze kolonie als H de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren voorstelt? Neem $t = 0$ op het moment dat er 1200 bacteriën zijn.
Rond de groeifactor af op drie decimalen.

d Op welk moment waren er nog 600 bacteriën? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 14: Wereldbevolking

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in 1500 jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs $1{,}2$ miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot $2{,}4$ miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking $4{,}8$ miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

a In de tekst is sprake van verschillende perioden. Bereken voor die perioden waarin de wereldbevolking zich heeft verdubbeld het groeipercentage per jaar in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken ook voor de andere perioden het groeipercentage per jaar in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 15: Radioactiviteit

De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie. Doordat de fall-out op het gras komt, krijgt het hooi een te hoog jodium-131 gehalte. Melk van koeien die met dit hooi gevoerd worden is niet meer voor consumptie geschikt. Na een ongeluk in een kerncentrale bevat hooi in de omtrek van de centrale zes keer het toegestane gehalte jodium-131. De halveringstijd van jodium-131 is acht dagen. Hoeveel dagen moet het hooi bewaard blijven voordat het weer aan koeien gevoerd kan worden?

Testen

Opgave 16

In een vijver is sterke algengroei. Op het tijdstip dat men begint met meten zit er in een liter water 10 gram algen. Deze concentratie algen blijkt per week met 15% toe te nemen.

a Geef een formule waarmee je de concentratie algen kunt berekenen. Neem t voor de tijd in weken, met $t = 0$ het tijdstip waarop men begon met meten.

b Neem aan dat ook voor de meting de concentratie algen groeide met 15% per week. Hoeveel bedroeg de concentratie drie weken voor het begin van de meting? Rond af op één decimaal.

c Hoeveel bedroeg de concentratie twee dagen voor het begin van de meting? Geef het antwoord weer in één decimaal nauwkeurig.

d Na hoeveel dagen is de hoeveelheid algen verdubbeld?

Opgave 17

Van een bepaalde soort vlinders daalt het aantal exponentieel. In een zeker seizoen ($t = 0$) zijn er ongeveer 6000 van deze vlinders. Vijf seizoenen later zijn er nog maar ongeveer 4300.

a Bereken de groeifactor per jaar van deze soort vlinders.

b Stel een formule op voor het aantal vlinders van deze soort als functie van t (in jaren).

c Met hoeveel procent neemt het aantal vlinders per jaar af?

d Hoeveel bedraagt de halveringstijd voor het aantal vlinders van deze soort?

e Bereken na hoeveel jaar het aantal vlinders voor het eerst minder dan 1000 zal zijn.

2.4 Exponentiële functies

Inleiding

Bij exponentiële groei horen formules van de vorm $y = b \cdot g^x$. Je gaat nu deze exponentiële functies nader bestuderen. De groeifactor (het grondtal) is steeds positief.

Je leert in dit onderwerp

- wat een exponentiële functie is en de karakteristieken ervan bepalen;
- een exponentiële functie opstellen vanuit twee gegeven punten;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met formules en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van de hoeveelheid bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren. Bekijk de grafiek van $y = 6 \cdot 2^x$.

a Welke snijpunten met de assen heeft deze grafiek?

b Zijn er extremen? Zijn er asymptoten?

c Welke karakteristieken hebben formules van de vorm $y = b \cdot g^x$?

Uitleg

Bekijk de applet.

Met de grafische rekenmachine kun je grafieken bekijken van formules van de vorm $y = b \cdot g^x$. Deze formules komen onder andere voor bij exponentiële groei en heten exponentiële functies. Bekijk een grafiek met b een positief getal op de grafische rekenmachine.

- Als $g > 1$ is de grafiek voortdurend toenemend stijgend.
- Als $g = 1$ is de grafiek constant.
- Als $0 < g < 1$ is de grafiek voortdurend afnemend dalend.
- Er zijn geen nulpunten, de x-as is een horizontale asymptoot.
- Er is geen minimum of maximum.

Je moet dit zorgvuldiger beredeneren dan alleen op grond van een grafiek. Bedenk je dat door vermenigvuldigen met een getal groter dan 1, elk positief getal alleen maar groter kan worden. Neemt x toe, dan worden de y-waarden groter. Neemt x af, dan worden de y-waarden kleiner, maar nooit negatief of 0. Vandaar dat er geen nulpunt is. De grafiek komt dus nooit op de x-as, maar wel steeds dichter erbij. Een vergelijkbare redenering geldt voor $0 < g < 1$.

Opgave 1

Bekijk grafieken van verbanden van de vorm $y = b \cdot g^x$ met de grafische rekenmachine.

a Neem $b = 1$ en $g = 2$. Welke formule krijg je voor dit verband? Wordt y ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

b Neem $b = 1$ en $g = 3$. Welke formule krijg je voor dit verband? Wordt y ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

c Neem $b = 1$ en $g = 1$. Welke formule krijg je voor dit verband? Wordt y ooit 0? Is de grafiek stijgend of dalend?

d Neem $b = 1$ en $g = 0{,}5$. Welke formule krijg je voor dit verband? Wordt y ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

e Neem $b = 2$ en $g = 1{,}5$. Welke formule krijg je voor dit verband? Wordt y ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

f Neem $b = -2$ en $g = 1{,}5$. Welke formule krijg je? Wordt y ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

Opgave 2

Welke eigenschappen heeft de grafiek van een formule van de vorm $y = b \cdot g^x$ als $b < 0$? (Maak verschil tussen $g > 1$, $g = 1$ en $0 < g < 1$.)

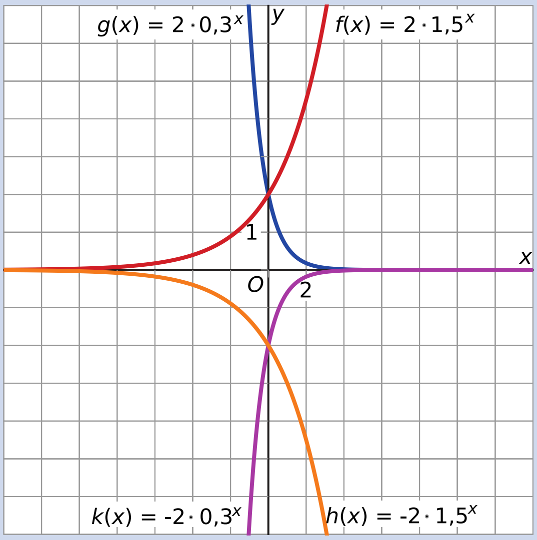
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Exponentiële functies

De grafiek van het **exponentiële verband** $y = b \cdot g^x$ heeft de volgende karakteristieken:

- De grafiek snijdt de y-as in het punt $(0,b)$.
- Als $b > 0$ en $g > 1$, is de grafiek stijgend. Naar links (voor afnemende x) nadert de grafiek de x-as. Je kunt de functiewaarde zo dicht bij 0 krijgen als je wilt door x voldoende klein te nemen.
- Als $b > 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek dalend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek x-as.
- Als $b < 0$ en $0 < g < 1$ is de grafiek stijgend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek x-as.
- Als $b < 0$ en $g > 1$, is de grafiek dalend. Naar links (voor afnemende x) nadert de grafiek de x-as.
- Als $g = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = b$.



Figuur 4.1

Voorbeeld 1

In het water van een meer is verontreiniging ontdekt. Er wordt op een bepaald moment 40 mg/L (milligram per liter) van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Gelukkig wordt deze stof op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan worden gemeten met een nauwkeurigheid van gehele mg/L. Het blijkt dat de concentratie exponentieel vervalt met 20% per dag.

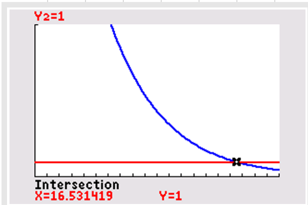
Na hoeveel dagen is de concentratie van deze stof in het meer minder dan 1 mg/L?

Antwoord

De 'groeifactor' per dag is $0{,}80$. Op $t = 0$ is er 40 mg/L gemeten. Voor de concentratie C (mg/L) geldt dus: $C = 40 \cdot 0{,}80^t$.

Omdat de groeifactor tussen 0 en 1 ligt, is dit een dalende exponentiële grafiek. Echter, zo'n exponentiële formule komt nooit op 0 uit, hoe groot je t ook kiest. Is de stof dan nooit verdwenen? Theoretisch inderdaad niet, maar in de praktijk is de stof niet meer meetbaar als de concentratie onder de 1 mg/L zakt (dat volgt uit de nauwkeurigheid van meten). Om te bepalen na hoeveel dagen de concentratie van deze stof minder dan 1 mg/L is, moet je de ongelijkheid $40 \cdot 0{,}80^t < 1$ oplossen.

Dat doe je met de grafische rekenmachine. Je vindt: $t > 16{,}5$.



Figuur 4.2

Opgave 3

Lees in **Voorbeeld 1** over de exponentiële afname van de concentratie van een (verontreinigende) stof in het water van een meer.

a Leg uit waarom de groeifactor per dag $0{,}80$ is.

b Breng de grafiek van C in beeld op de grafische rekenmachine.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig vanaf welk tijdstip de concentratie niet meer meetbaar is. Dus vind de waarde van t waarvoor $40 \cdot 0{,}8^t < 1$.

Voorbeeld 2

In een stedelijk gebied liggen twee middelgrote steden: A met 750000 inwoners en B met 620000 inwoners op 1 januari 2013. In A groeide het aantal inwoners de laatste jaren gemiddeld met 2,5% per jaar, in B was dat 3,1%.
Na hoeveel jaren is B groter dan A als deze ontwikkeling zo doorgaat?

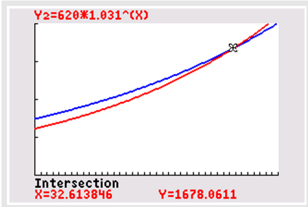
Antwoord

Dat B harder groeit dan A is duidelijk. Als A het aantal inwoners van A voorstelt en B dat van B, dan geldt: de groeifactor van A is $1{,}025$, die van B is $1{,}031$. Neem A en B in duizendtallen, en t de tijd in jaren vanaf 1 januari 2013, dan zijn de groeifuncties:

- $A = 750 \cdot 1{,}025^t$
- $B = 620 \cdot 1{,}031^t$

De bijbehorende grafieken maak je op de grafische rekenmachine en je bepaalt het snijpunt. Ga na dat je $t = 32{,}6138...$ vindt.

Conclusie: 33 jaar na 1 januari 2013 is B groter als je ervan uitgaat dat er steeds op 1 januari wordt geteld.



Figuur 4.3

Opgave 4

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

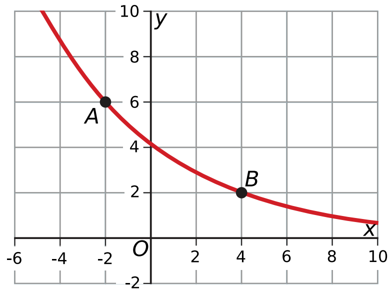
a Waaraan zie je dat stad B harder groeit dan stad A?

b Ga na dat je voor het snijpunt van beide grafieken inderdaad $t = 32{,}6138...$ vindt.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Een exponentiële functie heeft de vorm $y = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $A(-2{,}6)$ en $B(4{,}2)$.
Stel een bijpassende formule op. Rond b en g af op twee decimalen.



Figuur 4.4

Antwoord

Bepaal eerst de groeifactor g. Ga je van $A(-2{,}6)$ naar $B(4{,}2)$, dan gaat x van -2 naar 4 en neemt dus met 6 toe.

Daarbij wordt y dan vermenigvuldigd met $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Voor het grondtal g geldt daarom: $g = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 0{,}83$.

Voor punt B geldt: $y = 2$ als $x = 4$.
Dus moet $b \cdot 0{,}83^4 = 2$ en dus: $b \approx 4{,}21$.

De bijpassende formule is dus: $y = 4{,}21 \cdot 0{,}83^x$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** wordt uitgelegd hoe je de formule opstelt van een exponentieel verband als twee punten van de grafiek zijn gegeven. Stel de formule op van het exponentiële verband waarvan de grafiek gaat door $(0{,}200)$ en $(14{,}350)$.

a De beginwaarde kun je direct zien. Hoe groot is de beginwaarde?

b Hoe groot is de groeifactor van het verband? Rond af op drie decimalen.

c Schrijf de formule voor het exponentiële verband op.

Opgave 6

Van een exponentiële functie $y = b \cdot g^x$ is gegeven dat $y = 200$ als $x = 10$. Verder hoort bij $x = 14$ een y-waarde van 350. Stel de bijpassende formule op. Rond g af op drie decimalen en b op gehelen.

Verwerken

Opgave 7

In 2000 heeft iemand € 10000,00 op een spaarrekening gezet. De rente was toen 5% per jaar en werd bijgeschreven op de spaarrekening.

a Stel een bijpassende formule op voor het saldo S met t in jaren na het moment waarop het startbedrag op de spaarrekening is geplaatst. Schrijf op bij welke vensterinstellingen de grafiek goed in beeld komt.

b Hoelang duurt het voor het spaartegoed is gegroeid tot € 15000,00?

c Hoelang duurt het voor het spaartegoed zich verdubbeld heeft?

Opgave 8

Een saldo van € 4000,00 kan ontstaan zijn doordat ooit iemand € 1,00 op een spaarrekening zette tegen 5% rente.

a Wanneer moet die € 1,00 dan op de spaarrekening gezet zijn? Geef je antwoord in één jaar nauwkeurig.

b Kun je dit antwoord ook vinden door een geschikte grafiek van $S = 4000 \cdot 1{,}05^t$ te tekenen?

c Stel je voor dat je de grafiek van S steeds verder naar links door trekt. Zal de grafiek ooit de horizontale as snijden? Licht je antwoord toe. Wat betekent dit voor de grafiek van S?

Opgave 9

De smartphone is niet meer weg te denken. Eind 2001 waren er in Nederland ongeveer 12 miljoen aansluitingen op het mobiele netwerk. Eind 2009 waren het er al 20 miljoen. In deze periode was er sprake van exponentiële groei.
Bereken met welk percentage het aantal mobiele aansluitingen jaarlijks toenam.

Opgave 10

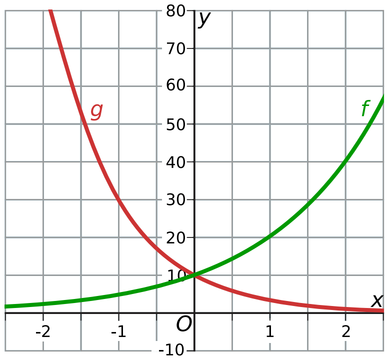
Een huurder betaalt een huur van € 650,00 en vindt de jaarlijkse huurverhoging van $5{,}5$% te veel. Hij herinnert zich nog dat exponentiële groei veel harder gaat dan lineaire groei. Hij stelt zijn verhuurder daarom voor om de huur elk jaar met € 50 te verhogen.

Na hoeveel jaar gaat dit de huurder voordeel opleveren?

Opgave 11

Bekijk deze grafieken van twee exponentiële functies.

Geef van beide functies het functievoorschrift.



Figuur 4.5

Toepassen

Opgave 12: Centenarians

In Engeland wordt iemand die de leeftijd van 100 jaar bereikt, aangeduid met de titel ‘centenarian’. Vanaf 1967 begon het totale aantal centenarians bij benadering exponentieel te groeien. Waren er op 1 januari 1967 zo’n 1000 centenarians, op 1 januari 2009 was dit aantal gestegen tot 9600.

a Bereken het groeipercentage per jaar in deze periode.

De groei van het aantal centenarians komt voornamelijk voor rekening van vrouwen. Op 1 januari 2009 was $\frac{7}{8}$ deel van de 9600 centenarians vrouwelijk. Voor de toekomst gaat men in Engeland uit van de volgende aannames:

- Het aantal centenarians stijgt vanaf 1 januari 2009 met $8{,}0\%$ per jaar.
- Het aantal vrouwelijke centenarians blijft in de toekomst $\frac{7}{8}$ deel van het totaal.

b Bereken het te verwachten aantal vrouwelijke centenarians op 1 januari 2034 in Engeland.

c Vanaf welk jaar zullen er in Engeland meer dan 100000 centenarians zijn?

(naar: pilotexamen wiskunde A in 2013, eerste tijdvak)

Opgave 13: Radioactief afval

Op een afgelegen terrein wordt op 6 januari 2017 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval er al tien jaar heeft gelegen. De straling blijkt 2000 Bq (becquerel) te zijn. Vier maanden later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt nu ongeveer 1630 Bq te zijn. De straling neemt exponentieel af.

a Bepaal hoeveel Bq de straling een jaar geleden was. En hoe groot is de straling over $2{,}5$ jaar?

b Stel een formule op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 6 januari 2017.

c Vanaf welke datum is de straling minder dan 1000 Bq?

Testen

Opgave 14

Een bepaalde hoeveelheid H groeit vanaf $t = 0$ volgens $H = 200 \cdot 1{,}03^t$.

a Hoe zie je aan de formule dat er echt van toename sprake is?

b Vanaf welke waarde van t (in drie decimalen nauwkeurig) is de hoeveelheid 200% groter geworden dan op $t = 0$?

c Neem aan dat ook voor $t = 0$ deze hoeveelheid met 3% per tijdseenheid groeide. Voor welke waarden van t is de hoeveelheid kleiner dan $0{,}01$?

Opgave 15

Iemand betaalt op 1-1-2010 een huur van € 850,00 per maand. Jaarlijks wordt in januari zijn huur met $5{,}5\%$ verhoogd.

a Stel een formule op voor de huur per maand H afhankelijk van de tijd t in jaren na 2010.

b Vanaf welke datum is de huur hoger dan € 1000,00 per maand?

Opgave 16

De grafiek van een exponentiële functie gaat door de punten $(2{,}80)$ en $(8{,}200)$. Stel een bijpassende formule op.

2.5 Logaritmische schalen

Inleiding

Exponentiële groei is vaak ook nogal een explosieve groei. Je hebt al snel te maken met veel grotere getallen dan waarmee je begon, of (bij een groeifactor tussen 0 en 1) met heel kleine positieve getallen. Dat is lastig bij het maken van grafieken waaruit je met enige nauwkeurigheid wilt kunnen aflezen. Het lukt bijna niet om in één grafiek zowel de (kleine) beginwaarden als de (hele grote) waarden na verloop van tijd te laten zien.
Er is echter speciaal grafiekenpapier bedacht om dit probleem op te lossen. Het is zo gemaakt, dat de grafiek van een exponentiële formule er op dit papier als een rechte lijn uitziet.

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische schalen te werken;
- logaritmisch grafiekenpapier te gebruiken;
- het voorschrift van exponentiële formules op te stellen vanaf enkellogaritmisch papier.

Voorkennis

- werken met exponentiële formules;
- werken met logaritmen.

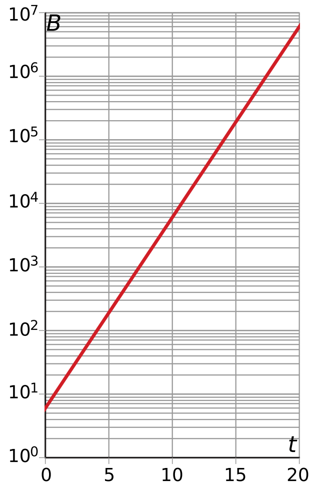
Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur. Hier zie je een grafiek van B als functie van t. Op de verticale as is een bijzondere schaalverdeling gebruikt.

a Wat is er voor bijzonders aan die schaalverdeling?

b Teken zelf eens zo'n schaalverdeling op de verticale as en maak de grafiek van B als functie van t.



Figuur 5.1

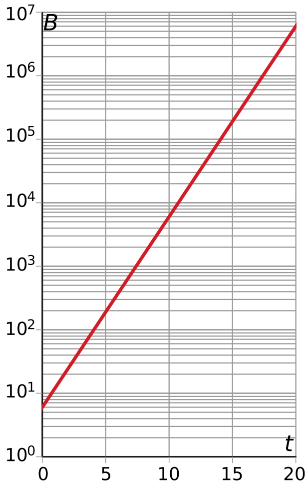
Uitleg

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur. Bekijk de grafiek van B als functie van t. Op de B-as is een zogenaamde logaritmische schaalverdeling gebruikt.

In plaats van een lineaire verdeling zoals $0, 1, 2, 3, 4$, enzovoort, zet je dan de machten van 10 neer: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 enzovoort.

Om de uitkomsten voor B op de juiste plek te zetten, gebruik je een 10-logaritme. Bijvoorbeeld op $t = 12$ heb je $B = 6 \cdot 2^{12} = 24576$ bacteriën. Dat getal ligt tussen 10^4 en 10^5. De logaritme van dat getal is: $\log(24576) \approx 4{,}39$. Je zet het daarom op 4,39 eenheden boven de horizontale as, want $10^{4,39} = 10^{0,39} \cdot 10^4 \approx 2{,}45 \cdot 10^4$.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal.



Figuur 5.2

Opgave 1

Als je voor de grafiek van de exponentiële functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ op de B-as een speciale (logaritmische) schaalverdeling gebruikt, ziet de grafiek eruit als een rechte lijn, zie de **Uitleg**.

a Zijn op deze schaalverdeling de afstanden tussen twee maatstreepjes steeds even groot?

b Laat zien dat de punten die horen bij $B(5)$ en $B(10)$ goed zijn getekend.

In feite staat op de verticale as de waarde van B op de plek van $\log(B)$. Neem maar eens een gewoon stuk roosterpapier en maak een assenstelsel met $\log(B)$ uitgezet tegen t.

c Maak eerst een tabel van $\log(B)$ afhankelijk van t.

d Zet de bijbehorende punten in een assenstelsel. Als het goed is, krijg je een rechte lijn als grafiek.

e Met de eigenschappen van logaritmen kun je laten zien dat $\log(B)$ ook echt een lineaire functie van t is. Toon aan dat $B = 6 \cdot 2^t$ is te herleiden tot $\log(B) = \log(2) \cdot t + \log(6)$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $y = 2 \cdot 3^x$.

a Maak een grafiek van $\log(y)$ uitgezet tegen x. Neem x van 0 tot 15.

b Vervang de getallen op de verticale as door de bijbehorende y-waarden. Je krijgt dan weer een grafiek van y als functie van x, maar nu met een logaritmische schaal op de verticale as.

c Lees uit de laatste grafiek af hoe groot $y(10)$ is en controleer het antwoord met het gegeven functievoorschrift.

Theorie en voorbeelden

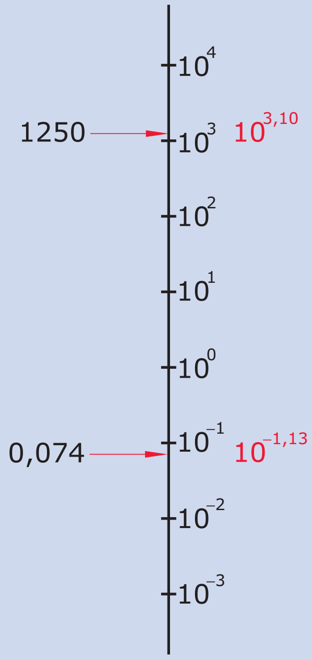
Om te onthouden

Bij een **logaritmische schaalverdeling** zet je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar uit. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen in dezelfde schaalverdeling plaatsen. Met behulp van de 10-**logaritme** ([LOG] op je rekenmachine) kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- $\log(1250) \approx 3{,}10$ dus $1250 \approx 10^{3,10}$.
  Je plaatst 1250 dus op 3,10 eenheden boven 10^0, net boven 10^3.
- $\log(0{,}074) \approx -1{,}13$ dus $0{,}074 \approx 10^{-1,13}$.
  Je plaatst 0,074 dus op 1,13 eenheden onder 10^0, net onder 10^{-1}.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal. Er bestaat ook speciaal **enkellogaritmisch papier**.

Omdat elke rechte lijn op enkellogaritmisch papier de grafiek is van een exponentiële functie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een exponentieel verband bestaat en om een bijpassende formule op te stellen.



Figuur 5.3

Voorbeeld 1

Laat zien hoe je op een logaritmische schaal de getallen 7250 en 0,002 aan kunt geven. Laat ook zien, hoe je af kunt lezen welke waarden a en b hebben.

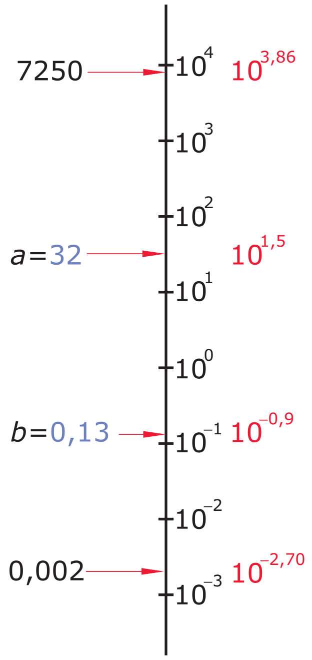
Antwoord

Eerst 7250 en 0,002 omrekenen:

- $\log(7250) \approx 3{,}86$ dus $7250 \approx 10^{3,86}$. Je plaatst 7250 dus op 3,86 eenheden boven 10^0, dat is tussen 10^3 en 10^4.
- $\log(0{,}002) \approx -2{,}70$ dus $0{,}002 \approx 10^{-2,70}$. Je plaatst 0,002 dus op 2,70 eenheden onder 10^0, dat is tussen 10^{-2} en 10^{-3}.

Nu aflezen:

- $a \approx 10^{1,5} \approx 32$
- $b \approx 10^{-0,9} \approx 0{,}13$



Figuur 5.4

Opgave 3

Je weet nu hoe je getallen kunt plaatsen op een logaritmische schaal en hoe je van zo'n schaal waarden kunt aflezen. Teken zelf zo'n logaritmische schaal.

a Geef de getallen 20, 20000 en 0,02 op deze schaal aan.

b Gebruik deze schaal om groottes te vergelijken. Begin met een mens van 1,80 m groot. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.

c De Mount Everest is ongeveer 8,884 km hoog. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.

d Een amoebe is een eencellig organisme met een afmeting van 0,003 tot 0,8 millimeter.
Geef deze getallen op je schaalverdeling aan.

e Op je schaalverdeling is a het getal dat midden tussen 10^3 en 10^4 in zit. Bereken a in gehelen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Voor de groei van het aantal inwoners van de gemeente V geldt de formule: $A = 16000 \cdot 1{,}012^t$. Hierin is A het aantal inwoners en t de tijd in jaren. Maak eerst een tabel. Rond af op twee decimalen.

Teken de grafiek van A afhankelijk van t op **enkellogaritmisch papier** voor de 50 jaren vanaf $t = 0$.

Antwoord

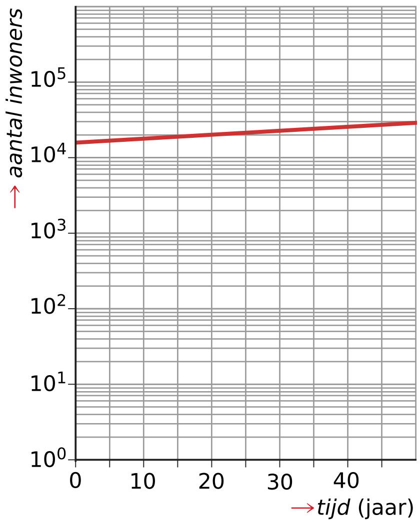
De tabel wordt zo:

t	0	10	20	30	40	50
A	16000,00	18027,07	20310,95	22884,18	25783,42	29049,96

Tabel 5.1

Gebruik het logaritmisch papier om de grafiek te tekenen met behulp van de gegevens in de tabel.

Om de uitkomsten voor A op de juiste plek op de logaritmisch verdeelde A-as te zetten, gebruik je een 10-logaritme.
Bijvoorbeeld op $t = 10$ heb je $A = 16000 \cdot 1{,}012^{10} \approx 18027{,}07$ inwoners. Dat getal ligt tussen $10000 = 10^4$ en $100000 = 10^5$, want de logaritme van dit getal is: $\log(18027{,}07) \approx 4{,}26$. Je zet het daarom op $4{,}26$ eenheden boven de horizontale as, bij $10^{4{,}26}$ dus, ongeveer bij $1{,}8 \cdot 10^4$.
Doe je dit ook voor de andere t-waarden, dan krijg je de grafiek.



Figuur 5.5

Opgave 4

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

Voor de groei van het aantal inwoners van de gemeente W geldt de formule $B = 9500 \cdot 1{,}029^t$. Hierin is B het aantal inwoners en t de tijd in jaren.

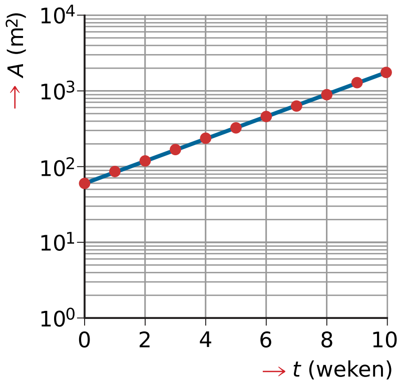
a Maak een tabel zoals in het voorbeeld met het aantal inwoners B in t jaren.

b Teken de grafiek van B afhankelijk van t op hetzelfde logaritmische papier als de grafiek uit het voorbeeld.

c Groeit het aantal inwoners van W het aantal inwoners van de gemeente V voorbij in deze 50 jaar? Zo ja, in welk jaar? Lees af in de grafiek en controleer met de grafische rekenmachine.

Voorbeeld 3

Je ziet een grafiek van de groei van een waterplant. De grafiek geeft het verband weer tussen de oppervlakte A (m^2) en de tijd t (week). Stel een bijpassende formule op.



Figuur 5.6

Antwoord

De grafiek is een rechte lijn met alleen op de verticale as een logaritmische schaal. Er bestaat daarom een exponentieel verband tussen A en t: $A = b \cdot g^t$

Uit de figuur lees je af:

- bij $t = 0$ hoort $A \approx 60$
- bij $t = 8$ hoort $A \approx 900$

De groeifactor per 8 weken is ongeveer $\frac{900}{60}$. De groeifactor per week is ongeveer: $\left(\frac{900}{60}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}40$.

Je vindt dus: $A = 63 \cdot 1{,}40^t$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** zie je een rechte lijn in een assenstelsel waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft. Daarbij kun je een formule opstellen van de vorm: $A = b \cdot g^t$.

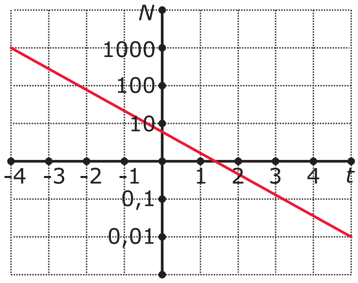
a Lees de waarden voor A bij $t = 2$ en $t = 10$ af.

b Stel met behulp van deze waarden een formule voor A op. Ga na dat je ongeveer hetzelfde vindt als in het voorbeeld.

c Waarom is het handig om de waarde bij $t = 0$ te gebruiken?

Opgave 6

Bekijk deze grafiek die het verband tussen N en t weergeeft.



Figuur 5.7

a Welke coördinaten heeft het snijpunt van de twee assen?

b Lees twee waarden voor N uit de grafiek af en stel een formule op voor N.

c Bereken ter controle met die formule het snijpunt met de getekende t-as.

d Waarom heeft het geen zin om te vragen naar de oplossingen van $N = 0$?

Verwerken

Opgave 7

Teken een rechte lijn door de punten $(2{,}40)$, $(4{,}400)$ en $(6{,}4000)$ op logaritmisch papier.

a Waarom hoort bij de lijn door deze punten een exponentieel verband?

b Geef een formule bij dit exponentiële verband.

Opgave 8

De bevolking van een middelgrote stad groeit vanaf 1 januari 2000 met (ongeveer) 6% per jaar. Op 1 januari 2000 zijn er 80000 inwoners.

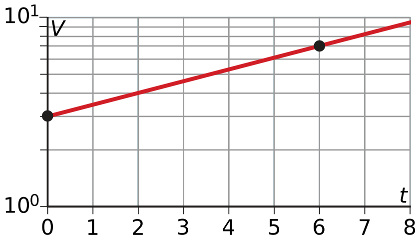
a Stel een formule op voor het aantal inwoners A afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2000.

b Teken een bijpassende grafiek op enkellogaritmisch papier.

c Lees uit die grafiek het aantal inwoners af op 1 januari 2015. Controleer je antwoord met behulp van de formule.

Opgave 9

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend die het verband tussen een toenemende hoeveelheid V en de tijd t weergeeft.



Figuur 5.8

a Geef een formule voor V.

b Bereken de waarde van t waarvoor $V(t) = 10$ in twee decimalen nauwkeurig. Controleer je antwoord met de grafiek.

c Voor negatieve waarden van t heeft de grafiek een snijpunt met de t-as. Bereken de bijbehorende waarde van t in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Gegeven zijn de exponentiële verbanden $N_1 = 10 \cdot 5^t$ en $N_2 = 5 \cdot 10^t$.

a Welke grafiek gaat het steilst wanneer beide verbanden op enkellogaritmisch papier worden getekend?

b Teken de beide grafieken op enkellogaritmisch papier. Neem voor t de waarden 0 tot en met 4.

c Heeft het snijpunt op enkellogaritmisch papier een betekenis? Zo ja, welke?

Opgave 11

Deze tabel met gegevens hoort bij een bacteriecultuur. t is gegeven in uren en N in aantallen.

t	0	1	2	3	4	5	6
N	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 5.2

a Maak met behulp van deze tabel een tabel waarin $\log(N)$ wordt uitgezet tegen t.

b Teken de bijbehorende grafiek. Kun je deze grafiek benaderen door een rechte lijn? Is er sprake van exponentiële groei?

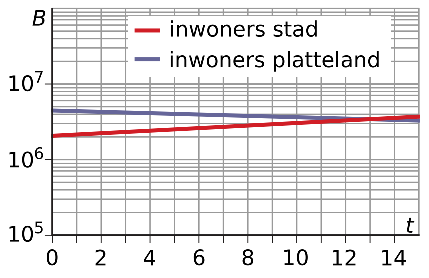
c Stel een formule op die het verband tussen $\log(N)$ en t beschrijft.

d Stel ook een formule op die het verband tussen N en t beschrijft.

Toepassen

Opgave 12: Van platteland naar stad

In China zie je de laatste jaren een steeds groter wordend verschil tussen het aantal inwoners op het platteland en in de steden. Veel jeugd verlaat het platteland om in de stad te gaan wonen. Zo ook in Kunming, de hoofdstad van de zuidwestelijke provincie Yunnan. Op 1 januari 2000 had de regio rond Kunming naar schatting $6{,}5$ miljoen inwoners, waarvan $2{,}055$ miljoen mensen in de stad woonden. De formule van het aantal inwoners afhankelijk van de tijd t (jaar) is: $B = 2055000 \cdot 1{,}04^t$ met $t = 0$ op 1 januari 2000.



Figuur 5.9

Bekijk de grafiek.

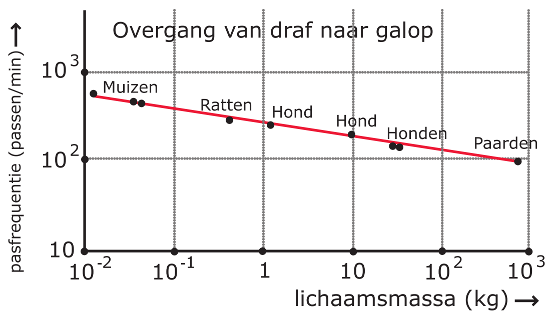
a In welk jaar woonden er $2{,}5$ miljoen mensen in de stad Kunming?

b Het aantal inwoners op het platteland in de regio Kunming nam na 1 januari 2000 per jaar met 2% af. Stel een bijpassende formule op voor het aantal inwoners op het platteland.

c In welk jaar was het aantal inwoners in de stad gelijk aan het aantal inwoners op het platteland?

Opgave 13: Pasfrequentie

Zoogdieren gaan bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) over van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt, hangt af van de lichaamsmassa (kg). Noem de lichaamsmassa m (kg) en de pasfrequentie P. De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden.



Figuur 5.10

a Waaraan kun je zien dat op beide assen van deze grafiek een logaritmische schaal is gebruikt?

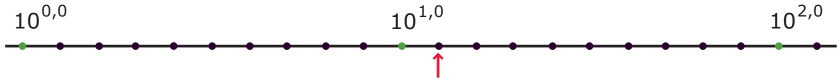
b Omdat op beide assen een logaritmische schaal is gebruikt, is in feite $\log(P)$ uitgezet tegen $\log(m)$. Voor het punt dat hoort bij paarden, geldt dan ongeveer $\log(m) = 2{,}9$ en $\log(P) = 2{,}0$. Bepaal zelf de bijpassende waarden van het punt dat bij een kleine hond hoort.

c Leid nu een formule af die het verband tussen $\log(P)$ en $\log(m)$ beschrijft.

Testen

Opgave 14

Teken een getallenlijn met een logaritmische schaalverdeling (neem deze figuur over).



Figuur 5.11

a Welk getal hoort bij het pijltje?

b Teken een pijltje dat hoort bij het getal 2.

c Geef aan waar $5{,}5$ en waar $10^{0{,}5}$ moeten staan. Doe dit ook bij 55 en $10^{1{,}5}$.

d Geef ook $3\frac{1}{4}$ en $10^{\frac{1}{4}}$ aan.

Opgave 15

Bij een biologisch experiment groeit in een vijver een waterplant. De waterplant bedekt een steeds groter deel van het wateroppervlak. Elke week meet men de oppervlakte die de waterplant bedekt. De meetwaarden staan in de tabel.

aantal weken (t)	0	1	2	3	4	5	6
oppervlakte (A in dm^2)	40	57	89	134	200	305	447

Tabel 5.3

a Zet de punten $(0{,}40)$, $(1{,}57)$, ..., $(6{,}447)$ uit op enkellogaritmisch papier.

b Trek door deze punten zo goed mogelijk een rechte lijn.

c Van welk type groei is hier sprake? Waar zie je dat aan?

d Stel een formule op voor de oppervlakte die de waterplant bedekt, afhankelijk van de tijd t in weken.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Exponentiële verbanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd, kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- exponentiële groei — groeifactor — macht, grondtal, exponent
- rekenregels voor machten
- algemene formule voor exponentiële groei
- exponentiële functie — exponentiële vergelijking en ongelijkheid
- logaritmische schaal — enkellogaritmisch papier

Activiteitenlijst

- formule voor exponentiële groei opstellen bij gegeven groeifactor (groeipercentage) en beginwaarde
- rekenregels voor machten toepassen — groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden
- eigenschappen van exponentiële functies toepassen — exponentiële functie opstellen bij gegeven punten van de grafiek
- werken met logaritmische schalen — formule opstellen bij exponentiële groei bij gegeven tabel, punten of grafiek (op enkellogaritmisch papier)

Achtergronden

Thomas Robert Malthus (1766—1834) was een Brits geestelijke die zich veel bezighield met demografische en economische vraagstukken. In 1798 publiceerde hij ‘An Essay on the Principle of Population’, waarin hij aannam dat de totale bevolking exponentieel groeit, terwijl de middelen van bestaan lineair toenemen. Dit leidt tot de beschikbaarheid van steeds minder grond (voedsel/energie) per mens en dus een daling in welvaart, de ‘Malthusiaanse catastrofe’.
Op grond hiervan meende hij dat de totale bevolking een maximale omvang zou hebben, het ‘Malthusiaans plafond’. Hij veronderstelde dat de mensheid deze maximale omvang binnen afzienbare tijd zou bereiken en dat alleen middels hongersnood, epidemieën en oorlogen het aantal mensen binnen de grenzen van het Malthusiaans plafond zou kunnen blijven. Malthus geldt als één der eerste economen. In de tweede helft van de negentiende eeuw werd deze opinie fel bestreden, onder andere door Karl Marx en Friedrich Engels die in Malthus' catastrofe slechts een gevolg van de kapitalistische samenleving zagen. Ook economen als John Maynard

Figuur 6.1

Smith en Ronald Fisher trokken Malthus' pessimistische kijk in twijfel. In de twintigste eeuw heeft niets van een Malthusiaanse catastrofe plaatsgevonden. Wel verscheen in 1972 het 'De grenzen aan de groei'. Dit is een geschrift van de **Club van Rome** die als doelstelling heeft de wereld bekend te maken met problemen als bevolkingsgroei, voedselproductie, industrialisatie, uitputting natuurlijke hulpbronnen en vervuiling. Ook zij maakten veel gebruik van exponentiële groeimodellen.

Testen

Opgave 1

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld, groeit de laatste jaren met 2% per jaar. In 2000 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?

b Geef een formule voor het aantal passagiers p op tijdstip t in jaren na 2000.

c Als de groei zo doorgaat, hoelang duurt het dan voor het huidige aantal passagiers verdubbeld is?

d Hoeveel passagiers waren er in 1997?

e Hoe groot is de groeifactor per tien jaar?

f Hoe groot is de groeifactor per kwartaal?

Opgave 2

In de gemeente Zaandam groeit het aantal inwoners sinds 2000 met ongeveer $3{,}2$% per jaar. In het jaar 2000 had de gemeente Zaandam in totaal 97452 inwoners. Het aantal woningen in Zaandam was toen 35505.

a Geef een formule voor het aantal inwoners A van Zaandam waarbij je ervan uitgaat dat de groei onverminderd met hetzelfde percentage doorgaat.

b Neem aan dat alle inwoners van Zaandam in één van die 35505 woningen woonden. Hoeveel inwoners telde Zaandam in 2000 gemiddeld per woning? Rond af op twee decimalen.

c De gemeente Zaandam liet om de bevolkingsgroei op te vangen jaarlijks gemiddeld 1350 woningen bijbouwen. Als je het aantal mensen per woning constant houdt, hoeveel mensen kan Zaandam dan jaarlijks meer huisvesten?

d Tot welk jaar kan Zaandam zijn bevolking huisvesten als er gemiddeld 1350 woningen per jaar bijkomen en het aantal personen per woning ongewijzigd blijft?

Opgave 3

Een doorzichtige kunststof absorbeert een deel van het licht dat er doorheen valt. Elke laag van 1 cm absorbeert 20% van het licht.

a Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per cm kunststof?

b Hoeveel procent van het licht wordt geabsorbeerd door een laag van 2,5 cm dikte?

c Hoe dik moet de laag kunststof zijn om 90% van het licht te absorberen?

d Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per mm kunststof?

Opgave 4

Iemand haalt een fles melk uit de koelkast en zet er een fles cola voor in de plaats. De temperatuur van de fles melk neemt hierdoor langzaam toe tot kamertemperatuur, de temperatuur van de fles cola neemt juist af tot koelkasttemperatuur. De formules voor de temperaturen T_1 en T_2 (°C) in de flessen, afhankelijk van de tijd t (min) zien er zo uit:
$T_1 = 19 - 13 \cdot 0{,}78^t$ en $T_2 = 6 + 13 \cdot 0{,}78^t$.

a Teken de grafieken van beide formules in één figuur. Laat t hierbij lopen van 0 tot 25.

b Welke van de formules hoort bij de fles melk, en welke bij de fles cola? Licht je antwoord toe.

c Wat is de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles cola?

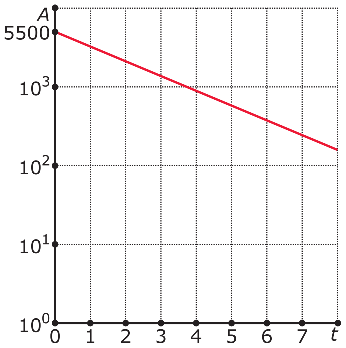
d Wat is de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles melk?

e Hoeveel bedraagt de kamertemperatuur?

f Vanaf welk tijdstip is de cola kouder dan de melk?

Opgave 5

In sommige dorpen in delen van Rusland is nog weinig werkgelegenheid en daarom trekken steeds meer mensen er weg. In de grafiek is het aantal inwoners A van zo'n dorp uitgezet tegen de tijd t in jaren. Het tijdstip $t = 0$ komt overeen met het jaar 2000. In dat jaar zijn er 5500 inwoners.



Figuur 6.2

a Waaruit concludeer je dat er sprake is van een exponentieel verband?

b Waren er in 2006 meer of minder dan 600 inwoners?

c Bepaal de groeifactor en geef een formule voor het aantal inwoners afhankelijk van de tijd (jaar).

d Iemand doet de volgende uitspraak: “Het aantal inwoners wordt nooit nul, maar komt wel steeds dichter bij nul.”
Geef argumenten waarom je het met deze persoon eens of oneens bent.

Toepassen

Opgave 6: Radioactief verval

Een natuurkundige toepassing van exponentiële functies vind je bij radioactiviteit.

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven.
Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4{,}468 \cdot 10^9$ jaar.
Het verval van U-238 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t. Begin je met 1 kg U-238, dan heb je na $4{,}468$ miljard jaar nog $0{,}5$ kg over (plus $0{,}5$ kg Th-234). Je kunt dus het beste de tijd in miljarden jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer $0{,}8563$. En $A = 1000 \cdot 0{,}8563^t$ gram.

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2001 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.

c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.

d Als je de halveringstijd weet, kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot 750 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

Opgave 7: Wereldbevolking

Omstreeks 1970 bedroeg de wereldbevolking ongeveer $3{,}6$ miljard en zij groeide per jaar met 2,1%.

a Hoe groot was toen de groeifactor?

b Als we ervan uitgaan dat die groeifactor door de jaren heen gelijk is gebleven, hoeveel mensen leefden er dan in 1971, 1988, 1900 en het jaar 0?

c B is de bevolking na t jaren, gerekend vanaf 1970 ($t = 0$). Geef B als functie van t door een formule.

d Je hebt nu een model van de bevolkingsgroei gemaakt, gebaseerd op gegevens uit 1970. Volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 is in 2050 het aantal mensen op aarde nog geen 9 miljard. Klopt dat met de formule die je bij c hebt gevonden?

e Waaraan kun je zien dat de bevolkingsgroei dan niet meer exponentieel loopt? Kun je daar redenen voor geven?

Opgave 8: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip ‘zuurgraad’ gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $[H_3O^+]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $[H_3O^+] = 10^{-7}$ mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van 10^{-7}: pH $= -\log(10^{-7}) = 7$. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: pH $= -\log[H_3O^+]$.

a Bij geconcentreerd zwavelzuur is $[H_3O^+] = 18$ mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?

b Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van $11{,}5$. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie in mol/L?

c Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie van zure regen?

d Vanaf welke H_3O^+ concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?

e De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijk pH van de huid is ongeveer $5{,}5$. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie dan?

Examen

Opgave 9: Ureumgehalte

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 gram toeneemt.
Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo ververst worden dat de wettelijke norm van 2 gram ureum per cm^3 water niet overschreden wordt. In een model gaan we ervan uit dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken. Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 m^3 ververst wordt (dus 3% van het totaal).
We beginnen de eerste dag met 0 gram ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 gram ureum in het water. Na verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 gram ureum over.

a Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 gram ureum in het water zit.

b In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

c Stel U is de hoeveelheid ureum aan het begin van een zekere dag. Toon aan dat de hoeveelheid ureum aan het begin van de daaropvolgende dag gelijk is aan $0{,}8U + 400$.

We starten in het model weer met 0 gram ureum aan het begin van de eerste dag. De hoeveelheid ureum in gram (U_n) aan het begin van de n-de dag kan rechtstreeks berekend worden met de formule:
$U_n = 2000 - 2500 \cdot 0{,}8^n$.

d Leg uit met behulp van deze formule dat aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm voldaan wordt.

e In de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden. Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(bron: examen wiskunde A havo 1989, tweede tijdvak)

Opgave 10: Sparen, sparen en sparen

Nederland is een echt spaarland. Jaarlijks worden er miljarden euro's gestort op spaarrekeningen.
Er zijn verschillende soorten spaarrekeningen. In deze opgave bekijken we er drie: de groeirekening, de depositorekening en de renteklimrekening.
We storten op elk van de drie spaarrekeningen een bedrag van € 10000,00 dat voor een periode van 10 jaar op de spaarrekening blijft staan.

Groeirekening

De groeirekening is de bekendste soort. Het rentepercentage op deze rekening is $3{,}5$% per jaar. Het is een ‘rente op rente’-rekening: na een jaar wordt de rente bijgeschreven op de rekening, zodat het volgende jaar rente wordt berekend over een hoger bedrag G. Na elk jaar wordt het bedrag op de rekening dus hoger. Het bedrag G dat na t-jaar op de groeirekening staat, kun je bereken met de formule: $G = 10000 \cdot 1{,}035^t$. Het bedrag op de groeirekening is na 10 jaar nog niet verdubbeld. Maar als je de rekening nog langer laat doorlopen, komt er een jaar dat het bedrag op de rekening voor het eerst twee keer zo hoog is. Het bedrag is zelfs nog hoger dan € 20000.

a Bereken na hoeveel jaar dat is.

Depositorekening

De depositorekening is een spaarrekening met een rentepercentage van $4{,}0$% per jaar. De rente over elk jaar is € 400. Dat bedrag wordt steeds bijgeschreven op een aparte betaalrekening. Op de betaalrekening krijg je geen rente, zodat het bedrag op de betaalrekening lineair toeneemt. De rente van $4{,}0$% lijkt gunstiger dan een rente van $3{,}5$%. Toch heb je na tien jaar bij de depositorekening in totaal minder rente gekregen dan bij de groeirekening. Een bank introduceert een nieuwe depositorekening die in tien jaar evenveel rente oplevert als de groeirekening.

b Bereken het rentepercentage per jaar van die nieuwe depositorekening. Geef je antwoord in één decimaal.

Renteklimrekening

De renteklimrekening is een soort depositorekening. Ook hier wordt jaarlijks de rente bijgeschreven op een aparte betaalrekening die geen rente oplevert. Bij de renteklimrekening wordt het rentepercentage elk jaar hoger. In deze tabel kun je aflezen welke bedragen er na t-jaar sparen op de renteklimrekening R en op de betaalrekening B staan.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
B	0	300	615	950	1310	1700	2130	2615	3165	3775	4475

Tabel 6.1

In de volgende tabel staan de rentepercentages voor het t-de jaar.

t-de jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rentepercentage	3,00	3,15	3,35	3,60	3,90	4,30				

Tabel 6.2

c Bereken het rentepercentage voor het zevende jaar. Geef je antwoord in twee decimalen.

d De renteklimrekening geeft in tien jaar € 4475,00 rente. Wat dit betreft is het de beste van de drie spaarrekeningen. De groeirekening is de op één na beste.
Bereken het rentepercentage per jaar dat een groeirekening moet hebben om in 10 jaar € 4475,00 rente te geven. Geef je antwoord in twee decimalen.

(bron: examen wiskunde A havo 2004, tweede tijdvak)

Opgave 11: De wet van Moore

Het Amerikaanse bedrijf Intel is een zeer grote producent van computerchips. Gordon Moore was in 1968 één van de oprichters van het bedrijf.
Deze opgave gaat over het aantal transistoren in een computerchip. (Een transistor is een elektronische schakeling.)
In 1965 deed Moore daar een voorspelling over:
‘Het aantal transistoren in een computerchip zal tussen 1965 en 1975 exponentieel groeien.’

Moore heeft meer dan gelijk gekregen: de voorspelling is zelfs tot het jaar 2000 uitgekomen! Zijn voorspelling is men de Wet van Moore gaan noemen.
In de tabel zie je hoeveel transistoren er in de chips van Intel zitten. Ook zie je in welk jaar die chips op de markt zijn gebracht.

introductiejaar	naam chip	aantal transistoren
1971	4004	2250
1972	8008	2500
1974	8080	5000
1978	8086	29.000
1982	286	120.000
1985	386	275.000
1989	486 DX	1.180.000
1993	Pentium I	3.100.000
1997	Pentium II	7.500.000
1999	Pentium III	24.000.000
2000	Pentium IV	42.000.000

Tabel 6.3

In de tabel zie je dat het aantal transistoren tussen 1971 en 1972 met 250 toeneemt.
Stel dat het aantal transistoren in de jaren daarna lineair toe zou nemen met 250 per jaar.

a In welk jaar zou dan het aantal van 5000 transistoren per chip zijn bereikt? Licht je antwoord toe.

In werkelijkheid is de toename dus exponentieel. Zo is in de periode van 1971 tot 2000 het aantal transistoren per chip toegenomen van 2250 tot 42 miljoen.

b Bereken hiermee de groeifactor per jaar in vier decimalen nauwkeurig.

De Wet van Moore in formulevorm is: $A = 2250 \cdot 1{,}404^t$.
Hierin is A het aantal transistoren per chip en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1971. In de Pentium II-chip zitten volgens de tabel 7500000 transistoren. Dat aantal transistoren wijkt nogal af van de voorspelling volgens de Wet van Moore.

c Bereken hoeveel procent dit aantal afwijkt van de voorspelling volgens de formule van de Wet van Moore.

d Met behulp van de formule kunnen we voorspellen wanneer er 1 miljard transistoren in een computerchip zitten. Bereken hoeveel jaar na 1971 dit het geval is.

(bron: examen wiskunde A havo 2005, eerste tijdvak))

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 4

7. Tellen
8. Exponentiële verbanden

Math4all
www.math4all.nl

Werkblad bij Opgave 1 op pagina 31.

Werkblad bij Opgave 2 op pagina 31.