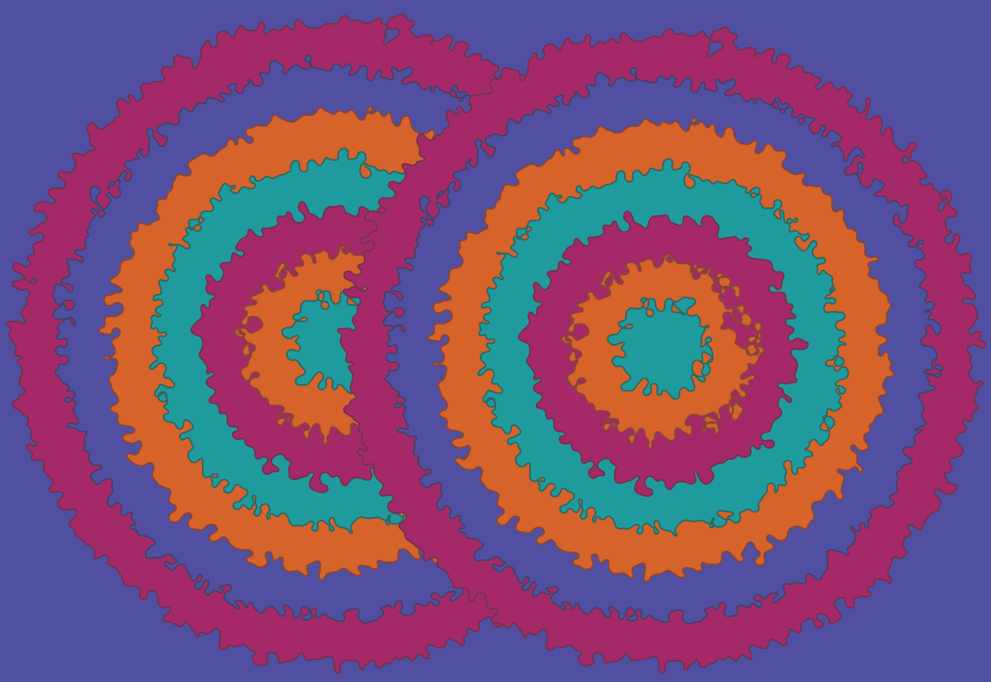
Wiskunde A

4 HAVO

Katern 3

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

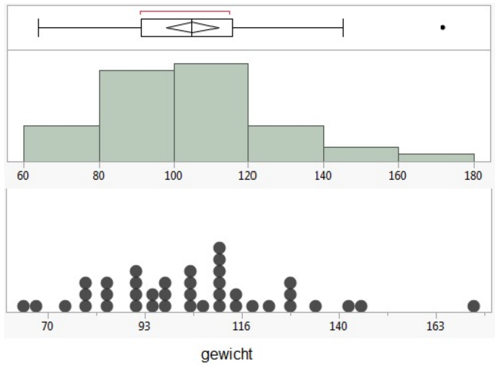
1

Data verwerken

1.1 Data presenteren

Inleiding

Een van de belangrijkste zaken in de statistiek is het goed ordenen van je gegevens, je data. Dat komt omdat je om goede uitspraken te kunnen doen, meestal met grote hoeveelheden gegevens moet werken. En over zo'n grote brij aan gegevens verlies je snel het overzicht. Het werken met overzichtelijke figuren als dotplots en staaf- of lijndiagrammen en het indelen in klassen is dan nuttig.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen discrete en continue variabelen en deze te onderscheiden;
- de data in dotplots en staafdiagrammen te interpreteren;
- de begrippen klassenbreedte en klassengrens.

Voorkennis

- de begrippen data, populatie, steekproef, aselect en representatief, kwantitatief en kwalitatief, absolute en relatieve frequentie;
- statistische variabelen herkennen en ordenen;
- verschillende diagrammen aflezen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen** met gegevens van 154 leerlingen.

a Hoe lang is het grootste meisje?

b Hoe lang is de grootste jongen?

c Welke lengte komt het meeste voor?

d Is het berekenen van gemiddelden een goede manier om de lengtes van de meisjes en de jongens met elkaar te vergelijken? Licht je antwoord toe.

Als je de lengtes van de jongens en de meisjes wilt vergelijken, kun je ze in beeld brengen zoals hieronder.

Figuur 1.2

e Waarom is goed vergelijken nu nog steeds lastig?

Opgave V2

Je hebt kennisgemaakt met kwalitatieve en kwantitatieve statistische variabelen.

a Noem van beide soorten variabelen een voorbeeld.

b Aan de variabele geslacht worden soms twee waarden toegekend: 0 = vrouw en 1 = man. Wordt de variabele daarmee kwantitatief?

c De lengte bij een bevolkingsonderzoek wordt gemeten in centimeters. Kun je daarvoor redenen aangeven?

d Je ziet twee weegschalen. Wat is het verschil tussen beide als het gaat om het aflezen van een gewicht?

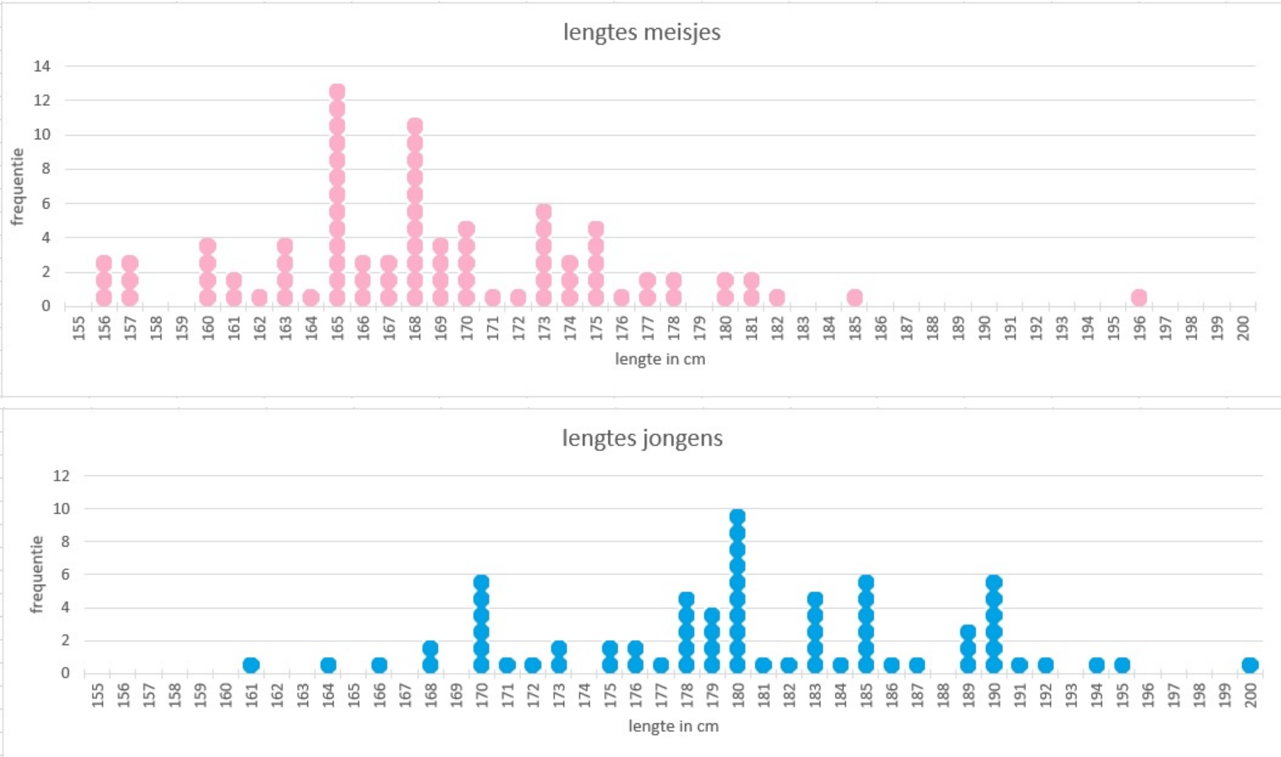
Figuur 1.3

e Bij een grafiek van het temperatuurverloop van een dag kun je een vloeiende lijn tekenen. Waarom kan dat niet bij een grafiek van de gemiddelde maandtemperatuur in een bepaald jaar?

Uitleg 1

Bekijk de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen** met gegevens van 154 leerlingen. Dit is een Excel-bestand met ruwe data. Zo'n grote brij aan gegevens is nogal onoverzichtelijk. Het werken met diagrammen helpt al iets.

Hier zie je twee dotplots waarmee je de lengtes van de jongens en van de meisjes kunt vergelijken.



Figuur 1.4

Omdat er 85 meisjes en 69 jongens zijn, is vergelijken nogal lastig. Het is beter om alle frequenties om te zetten naar relatieve frequenties. Zo'n relatieve frequentie wordt vaak gegeven als percentage.

Opgave 1

De dotplots in **Uitleg 1** geven de frequenties van de lengtes van de meisjes en de jongens afzonderlijk weer.

a Welke lengte komt bij de meisjes het meeste voor?

b Welke frequentie hoort daarbij?

c Hoeveel bedraagt de minimale lengte bij de meisjes?

d Hoeveel bedraagt de maximale lengte bij de meisjes?

e Bij de meisjes zit een meisje dat je met haar lengte als ‘uitschieter’ kunt beschouwen. Waar zit die uitschieter en waarom heet dit een uitschieter, denk je?

f Kun je op grond van wat je nu hebt gevonden de lengtes van meisjes en jongens vergelijken? En wat valt je in het bijzonder op als je de dotplots bekijkt?

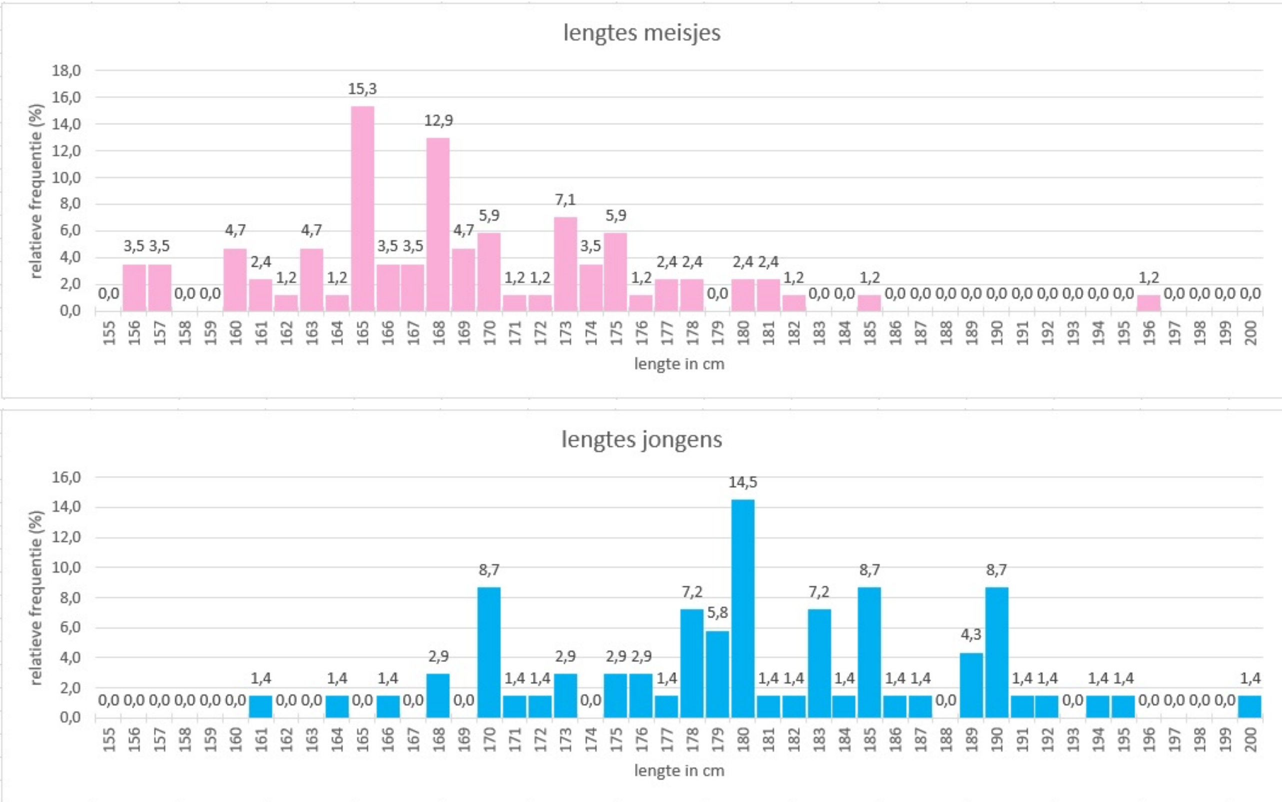
Opgave 2

Je kunt de lengtes van de jongens en de meisjes ook in staafdiagrammen zetten. Om beter te kunnen vergelijken, is het nuttig om alle frequenties uit de tabel om te zetten naar relatieve frequenties.

a Waarom is dat zo?

b Bereken het percentage dat hoort bij de lengte 175 cm bij de jongens vanuit de dotplot in één decimaal nauwkeurig. Doe dit ook voor deze lengte van de meisjes.

c Ga na of je uitkomsten per lengte overeenkomen met deze staafdiagrammen.



Figuur 1.5

d Hoeveel procent van de jongens is langer dan 180 cm?

e Hoeveel procent van de meisjes is langer dan 180 cm?

f Bekijk de 50% kleinste meisjes. Tussen welke waarden zit hun lengte? Hoe zit dat bij de jongens?

g Bekijk de 25% langste meisjes. Tussen welke waarden zit hun lengte? Hoe zit dat bij de jongens?

Opgave 3

Stel je maakt frequentietabellen en staafdiagrammen bij verschillende variabelen bij de 154 leerlingen uit de dataset. De volgorde waarin je de gemeten waarden zet, speelt een grote rol.

a Stel je bekijkt de variabele *profielkeuze*. Kun je daarbij een zinvol staafdiagram maken? Is de volgorde van de staven bij deze variabele van belang? En mag er tussenruimte tussen de staven zitten?

b Stel je bekijkt de variabele *huiswerk*. Kun je daarbij een zinvol staafdiagram maken?
Is de volgorde van de staven bij deze variabele van belang? Mag er tussenruimte tussen de staven zitten?

c Stel je bekijkt de variabele *geboortemaand*. Waarom is het bij deze dataset nauwelijks zinvol om bij geboortejaar een frequentietabel te maken?

d Bekijk de variabele *plezier*. Kun je daarbij een zinvol staafdiagram maken?
Is de volgorde van de staven dan van belang?
Mag er tussenruimte tussen de staven zitten?

Uitleg 2

In de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen** zitten verschillende soorten variabelen. Met kwantitatieve variabelen kun je rekenen, met kwalitatieve variabelen niet. Kwantitatieve variabelen kun je weer onderverdelen in discrete variabelen en continue variabelen.

- Discrete variabelen zijn variabelen die geen tussenwaarden kunnen aannemen.
  Bijvoorbeeld het geboortejaar, het cijfer voor wiskunde in 3 havo.
- Continue variabelen kunnen allerlei tussenwaarden aannemen.
  Bijvoorbeeld lengte, gewicht, cijfergemiddelde.

Als je dataset heel groot is, kun je ervoor kiezen om de gegevens in te delen in klassen. De daarbij horende diagrammen zijn beter met elkaar te vergelijken. In het **Practicum** kun je zien hoe dit in Excel gaat.

Deze tabel in Excel laat de lengtedata van de 154 havo 4-leerlingen in klassen verdeeld zien.

De klasse $170- < 175$ is de klasse van 170 tot 175 en bevat vanwege de afronding eigenlijk alle getallen vanaf 169,5 tot 174,5. Je kunt ook zeggen dat hij de discrete waarden 170,171,172,173 en 174 bevat.
Dat betekent dat de lengte 170 in deze klasse zit, maar dat de lengte 175 in de volgende klasse valt, namelijk in $175- < 180$. Vandaar dat in Excel de bovengrens 174 is omdat alle lengtes op gehele getallen zijn afgerond. Je ziet ook de klassenmiddens in de tabel. Bij een staafdiagram komen die onder het midden van elke staaf te staan.

klassen			meisjes	jongens
onder	midden	boven	freq	freq
150	152	154	0	0
155	157	159	6	0
160	162	164	12	2
165	167	169	34	3
170	172	174	16	10
175	177	179	10	14
180	182	184	5	18
185	187	189	1	11
190	192	194	0	9
195	197	199	1	1
200	202	204	0	1
			85	69

Figuur 1.6

Opgave 4

In de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen** zitten de volgende variabelen: *geslacht*, *geboortejaar*, *geboortemaand*, *gewicht*, *lengte*, *cijfergemiddelde*, *cijfer voor wiskunde*, *huiswerk*, *wiskundegroep*, *profiel* en *plezier*.
Geef voor elk van deze variabelen aan of ze kwalitatief of kwantitatief, discreet of continu zijn en welke waarden de variabelen kunnen aannemen.

Opgave 5

Om de lengtes van de 69 jongens en 85 meisjes goed te kunnen vergelijken, maak je eerst een klassenindeling en gebruik je de relatieve frequenties. In het **Practicum** kun je zien hoe dit in Excel gaat.

a Maak zelf een tabel met de relatieve frequenties bij de klassenindeling in de **Uitleg 2**.

b Zet de relatieve frequenties van de lengtes van de jongens en de meisjes in aparte staafdiagrammen. Op de horizontale as komt de lengte (cm). Op de verticale as de relatieve frequentie (%).

Kun je op grond van deze staafdiagrammen bepalen hoeveel procent van de jongens langer is dan 182 cm? Licht je antwoord toe.

c Welke voordeel heeft het groeperen van de metingen in klassen? En welk nadeel?

d Welk nadeel heeft het vergroten van de breedte van de klassen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een verzameling gegevens van één of meer statistische variabelen is een **dataset**. Als de data niet bewerkt zijn, spreek je van **ruwe data**. Om zulke data behorende bij een variabele overzichtelijk in beeld te krijgen, maak je een **frequentieverdeling**. Zo'n frequentieverdeling heeft de vorm van een tabel, de **frequentietabel**.

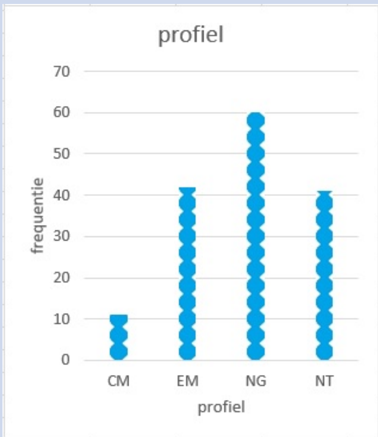
Om nog beter overzicht te krijgen, zet je de gegevens uit de tabel in een diagram. Bijvoorbeeld in een **dotplot** waarin het aantal punten bij elke waarde de frequentie aangeeft, of in een **staafdiagram** waarin de lengte van de staaf de absolute of de relatieve frequentie weergeeft.

In een dataset kunnen verschillende soorten variabelen zitten, kwalitatieve of kwantitatieve variabelen. Kwantitatieve variabelen kun je nog verdelen in:

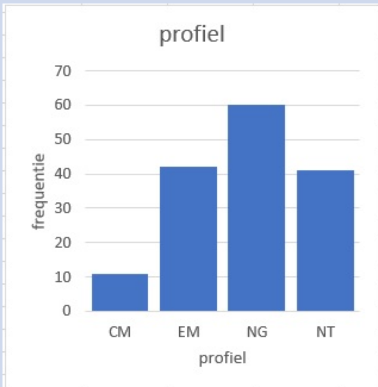
- **discrete variabelen**, deze variabelen nemen alleen vaste waarden aan.
- **continue variabelen**, deze variabelen nemen alle waarden aan.

Door de ruwe data in **klassen** in te delen, wordt je tabel overzichtelijker. Bij een klassenindeling is een gemiddelde alleen nog te schatten, omdat veel van de ruwe data in een klassenindeling niet meer terug te zien is.

De **modus** heeft betrekking op de variabele met de hoogste frequentie. Bij klassenindelingen is de klasse met de hoogste frequenties de **modale klasse**.



dotplot: elke dot is 4 lln



staafdiagram

Figuur 1.7

Bij het indelen in klassen is er verschil tussen continue en discrete variabelen:

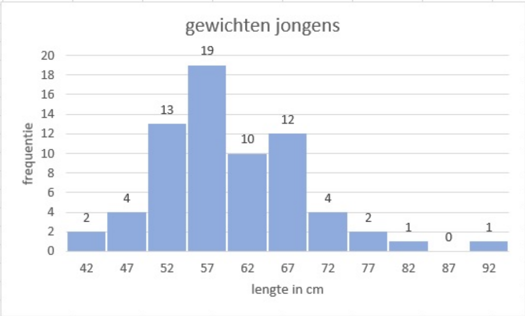
- Bij een discrete variabele, zoals *lengte afgerond op een geheel getal*, gebruik je de notatie $160 - 164$ voor de klasse met alle lengtes vanaf 160 tot en met 164. De **klassenbreedte** is 5 (er zijn vijf verschillende lengtes) en het **klassenmidden** is 162.
- Bij een continue variabele, zoals *lengte*, gebruik je de notatie $160- < 165$ voor de klasse met alle lengtes vanaf 160 tot aan 165. De **klassenbreedte** is 5 en het **klassenmidden** is $162{,}5$.

Het klassenmidden gebruik je voor het schatten van het gemiddelde van een frequentieverdeling.

Bij grote datasets ontkom je er - zeker bij diagrammen - vaak niet aan om met klassenindelingen te werken.

Voorbeeld 1

Bekijk het diagram van de frequentieverdeling van het gewicht van jongens uit de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen**.
Bereken bij de klasse met klassenmidden 57 voor deze jongens de bijbehorende relatieve frequentie. Waarom is het omrekenen naar percentages nodig als je de data van deze jongens wilt vergelijken met de data van de meisjes in deze dataset?



Figuur 1.8

Antwoord

Het totale aantal jongens is: $2+4+13+19+10+12+4+2+1+1 = 68$. Kennelijk heeft één van de jongens zijn gewicht niet willen geven. Het percentage jongens bij de klasse met klassenmidden 57 is: $\frac{19}{68} \times 100 = 27{,}9\%$.

Omrekenen naar percentages (relatieve frequenties) is nodig om frequentieverdelingen te kunnen vergelijken. Meestal laat je Excel het rekenwerk doen.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je het percentage jongens bij de klasse met klassenmidden 57 berekent.

a Bereken zelf het percentage jongens in de klasse $70- < 75$.

Vanuit een klassenindeling kun je het gemiddelde gewicht alleen nog maar schatten, want daarin staat niet meer de ruwe data. Je gebruikt daartoe de klassenmiddens.

b Schat het gemiddelde gewicht van deze jongens vanuit het gegeven staafdiagram.

Neem nu het databestand uit **Voorbeeld 1**.

c Bereken met behulp van Excel het gemiddelde gewicht van deze jongens.

d Maak nu zelf met behulp van Excel staafdiagrammen van de relatieve frequenties (in procenten) van de gewichten van zowel de meisjes als de jongens. Vergelijk hun gemiddelde gewichten vanuit de ruwe data.

Opgave 7

Je kunt een klassenindeling op verschillende manieren noteren.

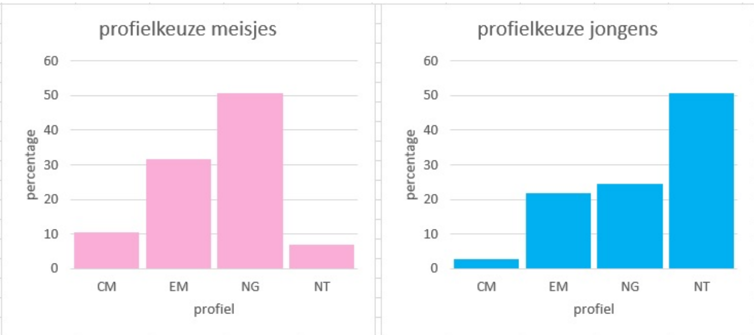
a Lengtes van de bladeren van een bepaald soort boom (cm) worden ingedeeld in de klassen $6{,}5- < 7{,}5$; $7{,}5- < 8{,}5$; enzovoort. Bepaal de klassenbreedte en de klassenmiddens.

b De leeftijden van de werknemers van een bepaald bedrijf worden in de volgende klassen ingedeeld: $20 - 24$, $25 - 29$, ..., $60 - 64$. Bepaal de klassenbreedte en de klassenmiddens.

c Bij een theater wordt bijgehouden hoeveel kaartjes er voor een voorstelling worden verkocht. De klasse $200 - 249$ geeft het aantal voorstellingen weer waarvoor 200 tot en met 249 kaartjes verkocht zijn. Bepaal de klassenbreedte en het klassenmidden van deze klasse.

d Bij welke variabelen uit een dataset is het zinvol/mogelijk om een klassenindeling te maken? Licht je antwoord toe. Gebruik de woorden kwantitatief of kwalitatief en continu of discreet.

Voorbeeld 2



Figuur 1.9

Bekijk de diagrammen van de frequentieverdeling van de profielkeuze van de leerlingen in de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen**.
Welke conclusies kun je trekken?

Antwoord

Je kunt beide diagrammen goed vergelijken, want in beide gevallen gaat het om relatieve frequenties.

Hieruit kun je onder andere concluderen:

- Het CM-profiel wordt weinig gekozen en meer door de meisjes dan de jongens.
- Het NG-profiel wordt vooral door de meisjes gekozen.
- Het NT-profiel wordt vooral door de jongens gekozen.

LET OP: dit geldt alleen voor deze 154 leerlingen. Je kunt nog beslist niet concluderen dat dit in het algemeen voor 4havo leerlingen geldt. Daarvoor moet je meer onderzoek doen en data verzamelen!

Opgave 8

Bekijk de twee diagrammen in **Voorbeeld 2**.

a Maak zelf de twee diagrammen.

b Hoeveel procent van de jongens kiest een N-profiel? En van de meisjes?

Je kunt ook onderzoeken hoe het zit met de keuze voor wiskunde A of B en de profielkeuze.

c Hoe zou je dat aanpakken?

Verwerken

Opgave 9

Ga van de variabelen na van welke soort ze zijn (kwalitatief of kwantitatief en discreet of continu) en welke waarden ze kunnen aannemen.

a Het *geboortejaar*.

b De *smaak van verschillende soorten rookworst*.

c De *temperatuur op de Noordpool in graden Celsius*.

d Het *gewicht van muizen in grammen*.

Opgave 10

Voor een bepaalde toets kun je maximaal 100 punten scoren. Je ziet de scores van een groep van veertig personen.

59 57 53 60 63 58 77 33 50 59 58 75 62 54 53 78 59 68 65 62
57 60 80 47 90 30 60 35 57 87 63 65 63 58 65 70 73 58 63 55

a Om welke soort variabele gaat het?

b Deel deze scores in klassen in, neem als laagste klasse $25- < 35$. Maak een frequentietabel.

c Maak bij deze tabel een staafdiagram met de relatieve frequenties.

d Personen die 55 of meer punten hebben behaald, scoren voldoende.
Hoeveel procent van deze groep scoorde voldoende?

e Je had ook als eerste klasse $30- < 40$ kunnen nemen. Wat is daarvan het nadeel?

Opgave 11

Je hebt een dataset **Sportprestaties van 74 brugklassers** (41 meisjes en 33 jongens).

In de gegevens zie je of het om een jongen of meisje gaat, de leeftijd van de leerling en de prestatie bij een sprint (in seconden), bij verspringen (cm) en bij vergooien met een kogel van 200 gram (m).

a Welke statistische variabelen tref je in deze dataset aan? Meld bij elke variabele om welke soort variabele het gaat.

b Bij het vergooien gaat het om de geworpen afstand in meters met een kogel van 200 gram. Eén jongen gooit met 40 meter het verst. Eén meisje gooit met 5 meter het minst ver. Welke klassenindeling is hierbij het meest geschikt? En als je de prestaties van de jongens en de meisjes wilt vergelijken, welke variabele kun je dan het best berekenen naar aanleiding van de frequenties? Licht je antwoord toe.

c Je ziet een frequentietabel van de vergooiprestaties met klassen van vijf meter. In Excel kun je relatief snel zelf zo'n tabel maken.

Maak met de klassenindeling staafdiagrammen voor de jongens (blauw) en de meisjes (rood) afzonderlijk in één figuur.

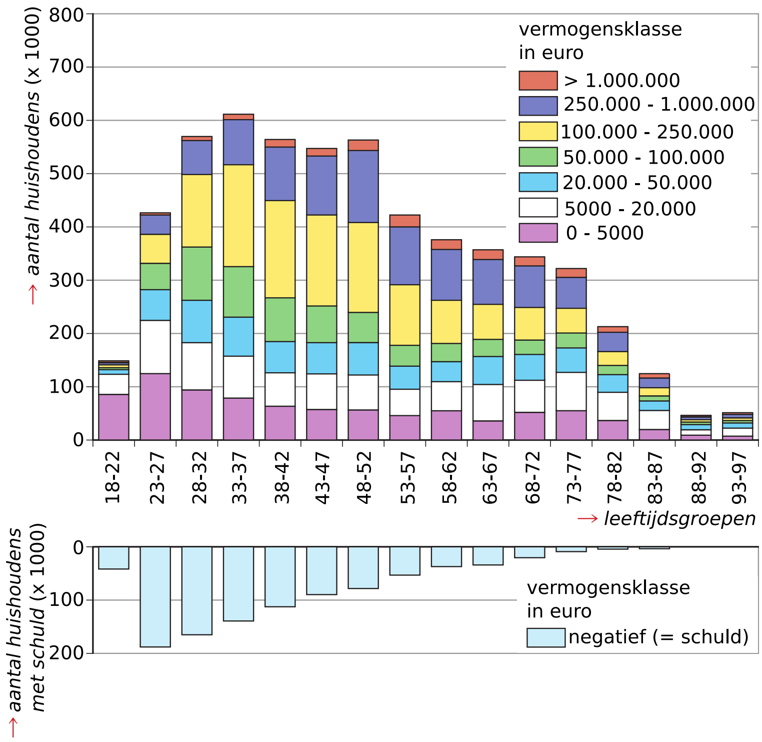
afstand			meisjes		jongens	
onder	midden	boven	freq	r.freq	freq	r.freq
0	2,5	5	0	0,0	0	0,0
5	7,5	10	1	2,4	0	0,0
10	12,5	15	11	26,8	0	0,0
15	17,5	20	18	43,9	3	9,1
20	22,5	25	9	22,0	7	21,2
25	27,5	30	2	4,9	11	33,3
30	32,5	35	0	0,0	6	18,2
35	37,5	40	0	0,0	5	15,2
40	42,5	45	0	0,0	1	3,0
			41	100,0	33	100,0

Figuur 1.10

d Wat valt je op bij de jongens en de meisjes wat het vergooien betreft?

Opgave 12

Het diagram geeft informatie over het vermogen of de schuld (euro) van huishoudens in land A, uitgesplitst naar de leeftijd van de hoofdkostwinner. Volgens de figuur zijn er in bijna alle leeftijdsgroepen huishoudens met een schuld.



Figuur 1.11

a Wat voor soort statistische variabele is *leeftijd*?

In de leeftijdsgroep 23-27 is het aantal huishoudens met een schuld het grootst.

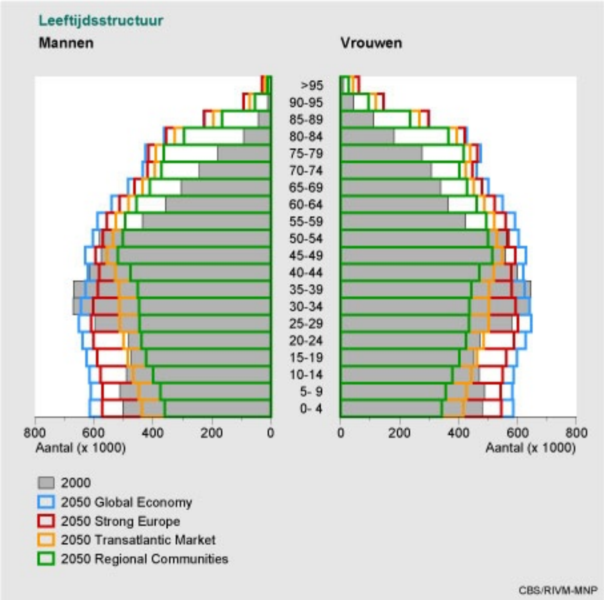
b Hoeveel procent van de huishoudens in de leeftijdsgroep van 23-27 heeft een schuld? Licht je antwoord toe en rond af op een geheel getal.

Je wilt weten hoeveel procent van de huishoudens in de leeftijdsgroep 33-37 een vermogen heeft tussen € 100000 en € 250000.

c Bereken dit percentage. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Opgave 13

Bekijk het leeftijdsdiagram voor Nederland in het jaar 2000. Er zijn vier verschillende prognoses voor 2050 gedaan.



Figuur 1.12

a Bepaal de klassenbreedte en het klassenmidden van de eerste klasse.

b Hebben alle klassen dezelfde breedte?

c Waarom staan in dit leeftijdsdiagram absolute frequenties en geen relatieve frequenties?

d Je kunt dit leeftijdsdiagram omzetten naar relatieve frequenties door percentages van het totale aantal Nederlanders te nemen of door percentages van de aantallen mannen en vrouwen afzonderlijk te nemen. Noem van elke mogelijkheid een voordeel en licht je antwoord toe.

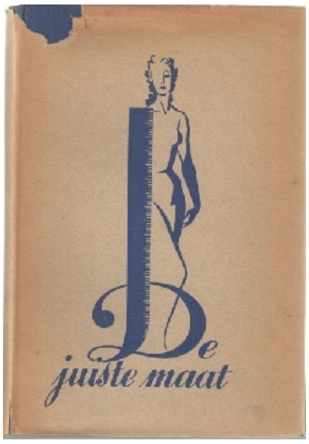
e Hoe kun je zien dat vrouwen gemiddeld langer leven dan mannen?

f De vier prognoses zijn gebaseerd op vier economische scenario's. Bij welk scenario is het vergrijzingsprobleem het sterkst in Nederland?

Toepassen

In 1951 verscheen bij uitgeverij Stafleu in Leiden het boek 'De Juiste Maat', met als ondertitel 'Lichaamsafmetingen van Nederlandse vrouwen als basis voor een nieuw maatsysteem voor damesconfectiekleding'. Auteurs van dit boek waren J. Sittig, Adviesbureau voor Toegepaste Statistiek, en prof. dr. H. Freudenthal, Rijksuniversiteit Utrecht. Het onderzoek was gehouden in opdracht van N.V. Magazijn De Bijenkorf, Amsterdam. In het kader van dit onderzoek zijn bij 5001 vrouwelijke klanten van de Bijenkorf vijftien lichaamsmaten opgemeten. Vervolgens is gekeken welke van deze maten het meest bruikbaar zijn om een **maatsysteem voor kleding** op te baseren.

Bekijk een deel van de uitkomst van het onderzoek in het bestand **Statistiek Bijenkorf 1947**.



Figuur 1.13

Opgave 14

Gebruik de dataset in **Toepassen**. Daarin vind je onder andere de mouwlengte van 5001 vrouwen in centimeters nauwkeurig gemeten.

mouw-lengte	frequentie
49	3
50	11
51	22
52	53
53	89
54	163
55	250
56	405
57	519
58	660
59	578
60	653
61	560
62	421
63	260
64	159
65	106
66	52
67	18
68	15
69	3
70	0
71	1

Figuur 1.14

a In de frequentietabel zie je de data. Met welke soort variabele heb je te maken?

b Maak een klassenindeling met klassen $45-49$, $50-54$, enzovoort. Maak daarbij een staafdiagram van relatieve frequenties in procenten nauwkeurig.

c Vergelijk deze klassenindeling met de gegeven frequentietabel en beschrijf voordelen en nadelen.

d Hoeveel procent van deze vrouwen heeft een mouwlengte van 65 cm of meer?

e Hoeveel procent van deze vrouwen heeft een mouwlengte van meer dan 65 cm?

Testen

Opgave 15

Ga van de variabelen na van welke soort ze zijn (kwalitatief of kwantitatief en discreet of continu) en welke waarden ze kunnen aannemen.

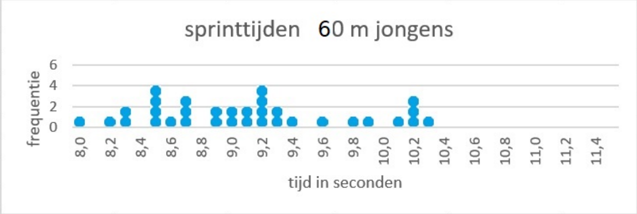
a Het *aantal dieren* van de verschillende zoogdiersoorten in een natuurgebied.

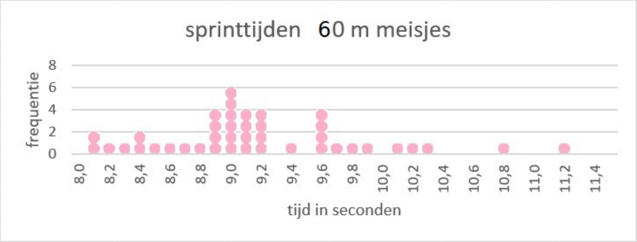
b De *hoogte* van een zoogdier.

c De *afhankelijkheid van natuurbeheer* van een diersoort.

Opgave 16

Je ziet diagrammen van de sprinttijden uit de dataset **Sportprestaties van 74 brugklassers**.





Figuur 1.15

a Zijn deze diagrammen dotplots?

b Welke soort variabele is hier gebruikt?

c Kun je met deze dotplots de twee deelgroepen goed vergelijken?

d Maak bij deze dotplots staafdiagrammen met relatieve frequenties en een klassenindeling van $8{,}0 - < 8{,}5$, $8{,}5 - < 9{,}0$, etc.

e Welke conclusies kun je nu trekken?

Practicum

Met **Excel** (een spreadsheetprogramma, een rekenblad) werken is bij statistiek eigenlijk onontbeerlijk. Je kunt er grote hoeveelheden gegevens in kwijt. Die gegevens kun je ordenen en presenteren. Bekijk de eerste drie delen van het practicum:

- **Data presenteren**

Je kunt ook data analyseren en presenteren met de app ‘Data analyse’ van **VUstat**. Daarin kun je eigen databestanden vanuit Google Drive toevoegen, maar er zijn ook diverse datasets beschikbaar. Ga hiervoor naar:

- **Data analyse VUstat**

1.2 Centrum en spreiding

Inleiding

Een dataset bestaat meestal uit zoveel gegevens dat je ze moet groeperen in klassen en/of in overzichtelijke figuren. Je wilt ze vaak karakteriseren door een paar eenvoudig te bepalen getallen die aangeven waar het centrum van de dataset zit en hoeveel de gegevens gespreid liggen. De belangrijkste centrummaten ken je wel, denk maar aan modus en gemiddelde, maar ze worden nu toch nog even op een rijtje gezet. Ook worden enkele bijbehorende spreidingsmaten besproken.

Je leert in dit onderwerp

- een reeks waarnemingen samen te vatten met centrummaten, zoals gemiddelde, mediaan en modus;
- een reeks waarnemingen samen te vatten met spreidingsmaten, zoals spreidingsbreedte en interkwartielafstand;
- een reeks waarnemingen samen te vatten in een boxplot en deze boxplot te interpreteren.

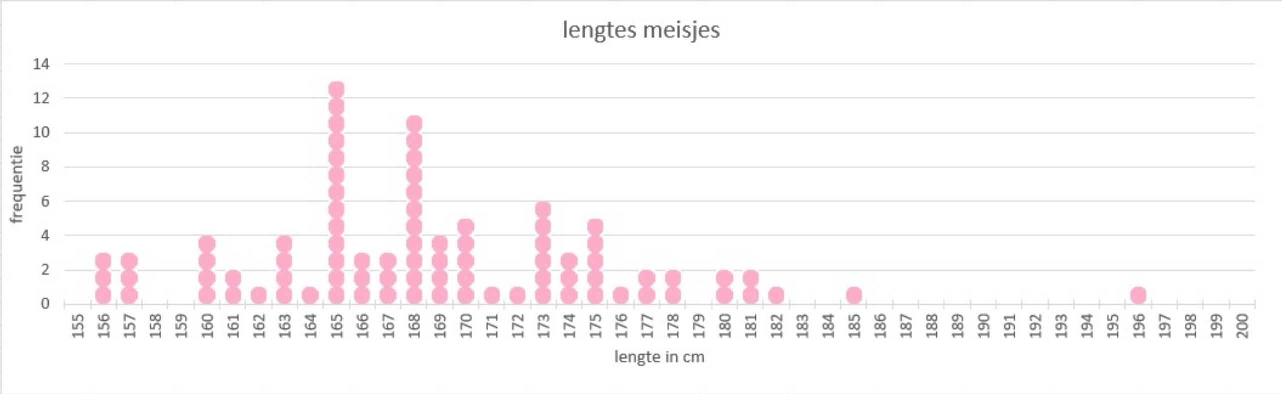
Voorkennis

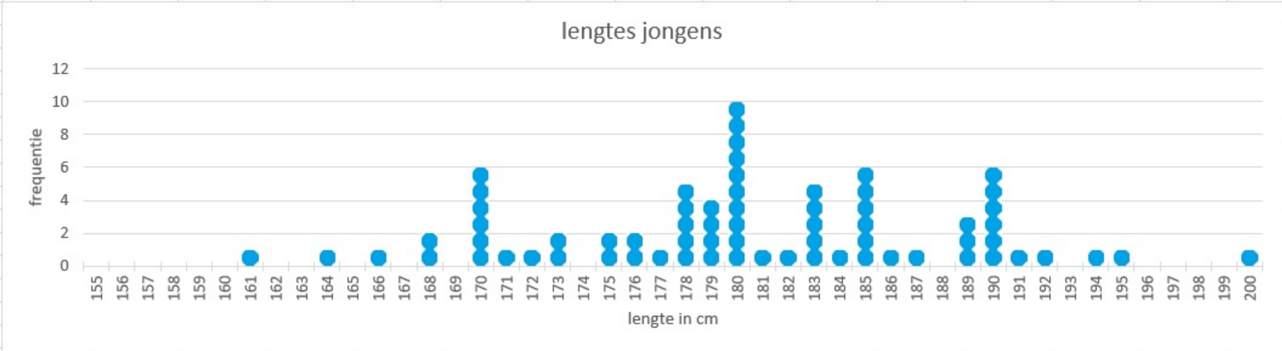
- de begrippen data, populatie, steekproef, aselect en representatief, kwantitatief en kwalitatief, absolute en relatieve frequentie, discrete en continue variabele, klassenbreedte, klassenmidden en klassengrens;
- dotplots en staafdiagrammen en andere diagrammen interpreteren.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de dotplots gemaakt vanuit de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen**.





Figuur 2.1

a Waar zou je bij beide deelgroepen het midden van de frequentieverdeling plaatsen? Licht je antwoord toe.

b De mediaan is de lengte die op de helft van de verdeling zit, dus waar 50% van de lengtes onder zit (en dus ook 50% erboven). Bepaal de mediaan van de lengtes van de meisjes. Doe dat ook bij de jongens.

c Bij welke deelgroep zijn de gegevens het meest verspreid? Licht je antwoord toe.

d Laat bij de dotplot van de meisjes de twee grootste scores weg. Maakt dat veel verschil voor de mediaan? En voor de spreiding van de verdeling?

e Beantwoord dezelfde vragen als bij d voor de jongens.

f Bereken voor de lengte van de jongens de spreidingsbreedte. En voor de meisjes.

g De beide spreidingsbreedtes verschillen nauwelijks. Vind je dat de spreiding van de lengtes van de jongens en de meisjes vrijwel even groot is?

Je kunt een dataset in groepen van 25% verdelen, dus vier kwarten met even veel data. Deze groepen hebben de volgende vijf grenzen: het minimum, het eerste kwartiel Q_1, de mediaan, het derde kwartiel Q_3 en het maximum.

h Welke lengtes hebben de 25% kleinste jongens?

i Laat met een berekening zien dat 25% van de langste meisjes inderdaad de lengtes 173 tot en met 197 cm heeft.

j Bepaal nu zowel voor de jongens als voor de meisjes uit de dotplots de grenzen van de vier kwarten. Verwerk dit in een schets.

Uitleg 1

Om snel belangrijke informatie over een grote dataset te krijgen, probeer je de dataset met een paar maten (getallen) samen te vatten. Je gebruikt hiervoor centrummaten en spreidingsmaten.

De bekende centrummaten zijn:

- de modus: de meest voorkomende waarde (bij een klasseindeling zeg je: modale klasse);
- de mediaan: de middelste waarde;
- het gemiddelde: alle waarden opgeteld en gedeeld door het totaal aantal waarden.

Een bekende maat voor de spreiding is de spreidingsbreedte. Bekijk je bijvoorbeeld een frequentieverdeling van lengtes van meisjes, dan is de spreidingsbreedte het verschil tussen de langste lengte en de kortste lengte van de meisjes. Als het langste meisje 197 cm is en het kleinste meisje 156 cm, is de spreidingsbreedte $197 - 156 = 41$ cm.

Bekijk wel eerst of centrummaten zinnig zijn voor je dataset. Bij de variabele *geboortejaar* is het gemiddelde bijvoorbeeld niet zinvol. En de spreidingsbreedte van het *profiel* van havo 4-leerlingen is ook onzinnig.

In het **Practicum** kun je vinden hoe je centrum- en spreidingsmaten kunt berekenen met de grafische rekenmachine en ook hoe dit gaat met Excel of VUstat.

Opgave 1

Bekijk de dotplots van de lengtes van de jongens en de meisjes gemaakt vanuit de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen**. Deze opgave kun je met Excel maken.

Zie de figuur in **Opgave V1**.

a Maak van de lengtes van de jongens een overzicht met de drie centrummaten en de spreidingsbreedte. Je kunt dit ook met de grafische rekenmachine doen.

b Waarom zou je bij de meisjes de waarden 196 een uitschieter noemen? Heb je bij de jongens ook uitschieters?

c Welke centrummaat wordt door deze uitschieters sterk beïnvloed?

d Vind je het verantwoord om uitschieters weg te laten bij het samenvatten van een frequentieverdeling? Geef argumenten voor en tegen.

Opgave 2

Een bedrijf heeft 25 werknemers in vaste dienst met een volledige werkweek. De nettoweeklonen van deze werknemers zijn in klassen verwerkt in de frequentietabel. De weeklonen zijn verdeeld in klassen met een breedte van 50. De ruwe data zijn niet bekend.

a Waarom kun je vanuit de frequentietabel de gemiddelde lengte niet precies uitrekenen, maar alleen nog schatten?

b Bepaal de klassenmiddens en bereken hiermee dit geschatte gemiddelde.

c Welke klasse is de modale klasse?

d In welke klasse zit de mediaan?

nettoweekloon (in €)	aantal werknemers
$400- < 450$	2
$450- < 500$	3
$500- < 550$	4
$550- < 600$	8
$600- < 650$	3
$650- < 700$	2
$700- < 750$	2
$750- < 800$	1

Tabel 2.1

Opgave 3

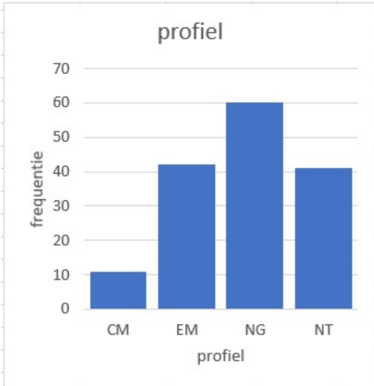
Bekijk het staafdiagram van de profielkeuzes van 154 havo 4-leerlingen.

a Waarom kun je geen spreidingsbreedte vaststellen?

b Je kunt wel vaststellen welk profiel de meeste jongens of de meeste meisjes hebben. Waarom kun je dat toch geen centrummaat noemen?

c Bestaat er een zinvolle centrummaat voor deze statistische variabele?

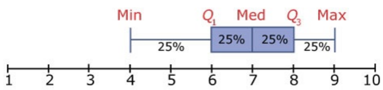
d "Het staafdiagram van de profielkeuzes van de jongens is veel schever dan dat van de meisjes." Waarom is zo'n uitspraak hier niet zinvol?



Figuur 2.2

Uitleg 2

Bekijk de boxplot van de verdeling van de (gehele) eindcijfers van een groep examenkandidaten. In zo'n boxplot zijn de resultaten van deze groep in vier kwarten met evenveel eindcijfers verdeeld. De bovengrenzen van die delen heten kwartielen.



Figuur 2.3

Een boxplot heeft dus vijf grenzen:

- De linkergrens met het laagste getal.
- De bovengrens Q_1 van het eerste kwart, de mediaan van de eerste helft.
- De bovengrens Q_2 van het tweede kwart, de mediaan.
- De bovengrens Q_3 van het derde kwart, de mediaan van de tweede helft.
- De rechtergrens met het hoogste getal.

Bestaan de waarnemingen uit een oneven aantal waarden, dan wordt de mediaan van de hele set niet meegenomen om Q_1 en Q_3 te berekenen.

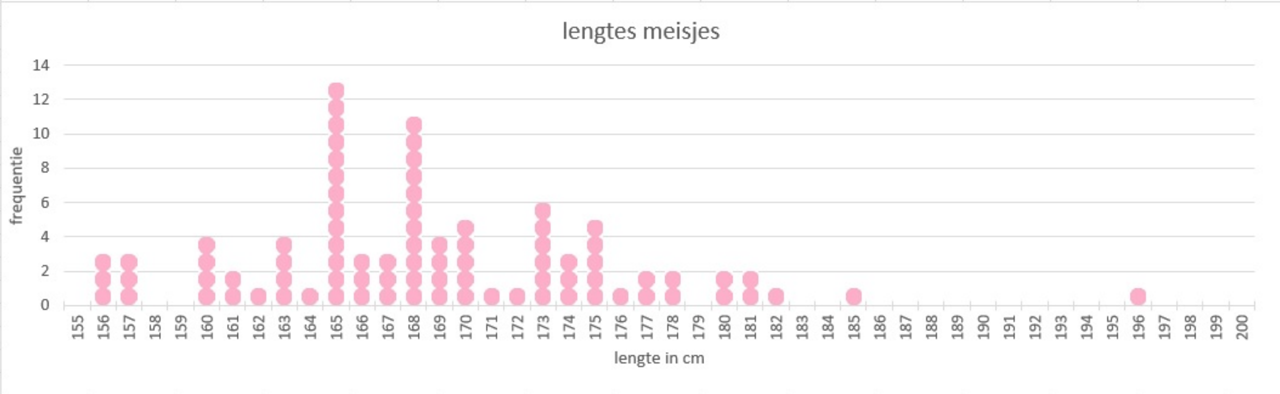
In het eerste kwart zitten de eerste 25%-waarden. Het kwartiel Q_1 is de bovengrens van die 25%- waarden, dus het cijfer 6.
De mediaan (de middelste) is de bovengrens van 50% van de waarden, dus het cijfer 7.

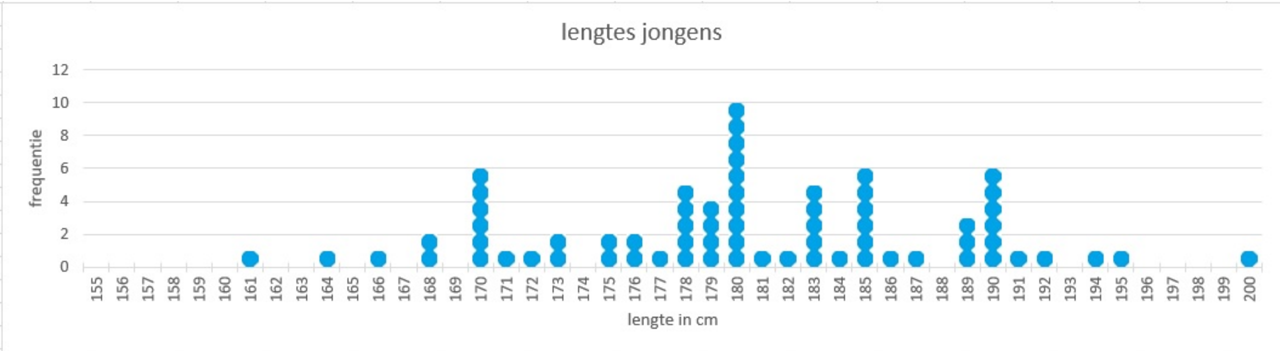
Het derde kwartiel Q_3 is de bovengrens van 75% van de waarden, dat is het cijfer 8.
De 'interkwartielafstand' is het verschil tussen het eerste kwartiel (Q_1) en het derde kwartiel (Q_3), dus $Q_3 - Q_1 = 8 - 6 = 2$.

Een waarde die meer dan $1{,}5$ keer de interkwartielafstand onder het eerste kwartiel of boven het derde kwartiel zit, wordt opgevat als een uitschieter.

Opgave 4

Bekijk de dotplots van de lengtes van de jongens en de meisjes gemaakt vanuit de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen**. Deze opgave kun je met Excel maken.





Figuur 2.4

a Bepaal van de lengtes van de jongens het minimum, het maximum, de kwartielen en de mediaan. Hoe groot is de interkwartielafstand?

Lees in **Uitleg 2** nog eens wanneer je een gegeven een uitschieter noemt.

b Laat zien dat bij de jongens de waarden 161 en 200 cm uitschieters zijn.

c Laat deze uitschieters weg en maak een nieuw overzicht van de drie centrummaten en de twee spreidingsmaten.

d Welke spreidingsmaat wordt door deze uitschieters sterk beïnvloed en welke niet?

e Welke centrummaat wordt door deze uitschieters sterk beïnvloed?

f Vind je het verantwoord om uitschieters weg te laten bij het samenvatten van een frequentieverdeling? Geef argumenten voor en tegen.

Opgave 5

Een bedrijf heeft 25 werknemers in vaste dienst met een volledige werkweek. De nettoweeklonen van deze werknemers zijn in klassen verwerkt in een frequentietabel. De weeklonen zijn verdeeld in klassen met een breedte van 50. De ruwe data zijn niet bekend.

Waarom kun je met alleen een klassenindeling geen nauwkeurige boxplot maken?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een frequentieverdeling kun je samenvatten met **centrummaten**:

- het **gemiddelde**, het evenwichtspunt van de verdeling (niet zichtbaar in een boxplot);
- de **mediaan**, de middelste waarde van de verdeling, op de helft van de boxplot;
- de **modus**, de meest voorkomende waarde (niet zichtbaar in een boxplot).

Daarnaast gebruik je **spreidingsmaten**:

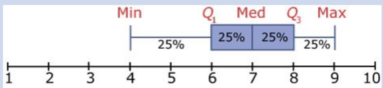
- de **spreidingsbreedte**, maximum − minimum (zichtbaar in een boxplot);
- de **interkwartielafstand**, $Q_3 - Q_1$ (zichtbaar in een boxplot).

Een frequentieverdeling kun je ook samenvatten in kwarten. Je krijgt de 5-getallensamenvatting.

- het **minimum**, de laagste waarde;
- het **eerste kwartiel** Q_1, de bovengrens van het eerste kwart;
- de **mediaan** Q_2, de bovengrens van het tweede kwart (dus precies op de helft);
- het **derde kwartiel** Q_3, de bovengrens van het derde kwart;
- het **maximum**, de hoogste waarde.

De Q is afkomstig van het Engels woord 'quartile'.

Je kunt de kwarten of kwartielen zichtbaar maken met een **boxplot**. De 'box' is het gebied tussen Q_1 en Q_3. Elk kwart bevat 25% van de waarnemingen.



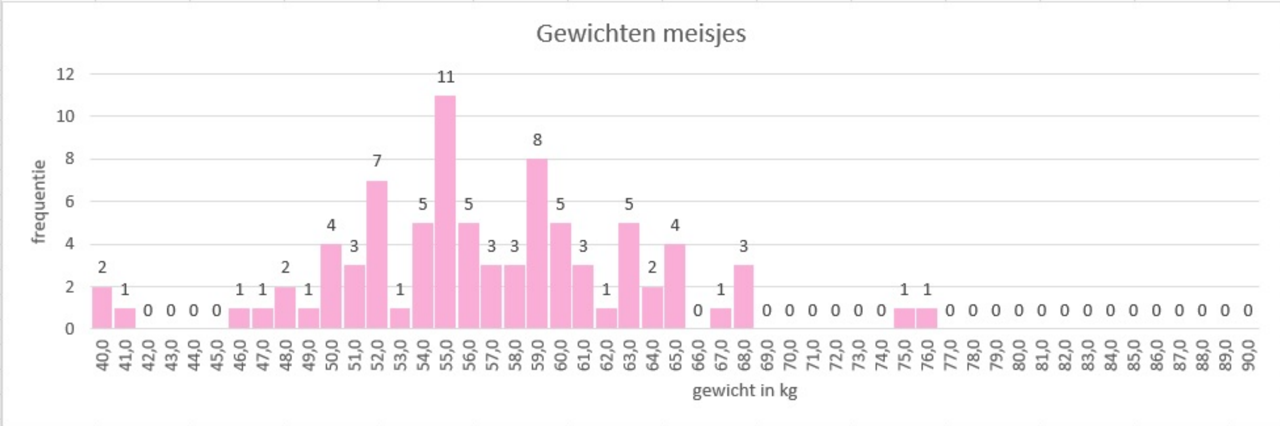
Figuur 2.5

Als je veel data hebt, is een boxplot overzichtelijker dan een dotplot of een staafdiagram. Met een boxplot verlies je echter ook informatie. In een boxplot kun je namelijk alleen nog het kwart aanwijzen waarin een bepaalde waarde zit.

Een **uitschieter** is een waarde die meer dan $1{,}5$ keer de interkwartielafstand onder het eerste kwartiel of boven het derde kwartiel zit. Een uitschieter zie je niet in een boxplot, maar wel in een dotplot en ook in een staafdiagram.

Voorbeeld 1

Bekijk het staafdiagram met de gewichten van de 84 meisjes uit de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen**.



Figuur 2.6

Bereken de mediaan en het gemiddelde van de gewichten in één decimaal nauwkeurig. Bereken ook de spreidingsbreedte en de kwartielafstand. Ga na welke van deze centrum- en spreidingsmaten het meest zinvol is. Je kunt de centrummaten handmatig uitrekenen of met de grafische rekenmachine.

Antwoord

De mediaan verdeelt de gewichten in twee gelijke delen (ze staan al op volgorde). Omdat van 84 meisjes het gewicht bekend is, neem je hiervoor het gemiddelde van het 42^e en het 43^e gewicht. Het 42^e gewicht is 56 kg en het 43^e ook, dus de mediaan is 56 kg.

Het gemiddelde gewicht bereken je vanuit de ruwe data. Je kunt het ook berekenen vanuit het gegeven staafdiagram. Houd dan wel rekening met de frequenties. Ga na, dat je $\approx 56{,}8$ kg krijgt.

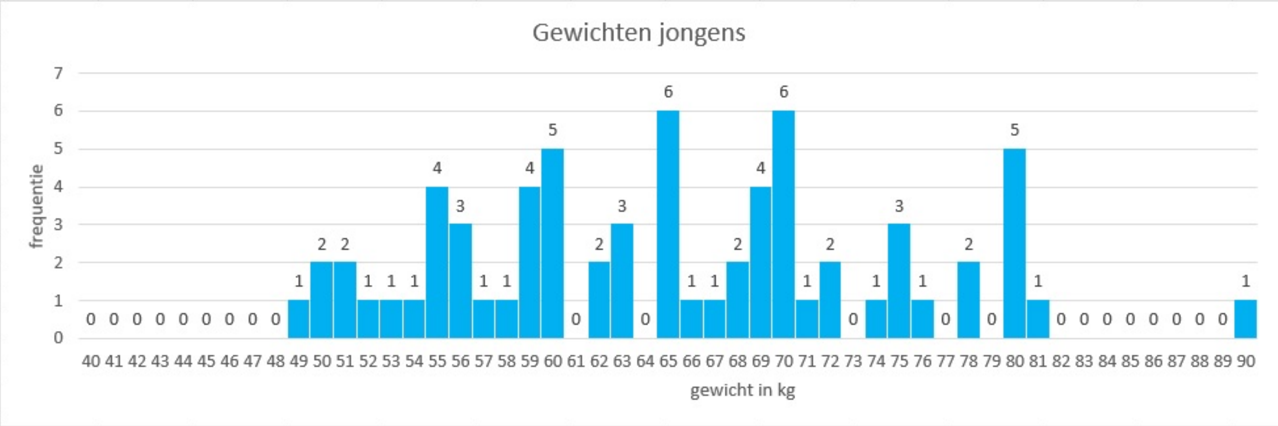
De spreidingsbreedte is hier $76 - 40 = 36$ kg.

Voor de kwartielafstand moet je beide kwartielen Q_1 en Q_3 bepalen. Q_1 verdeelt de eerste helft van de gewichten weer in twee gelijke delen en is dus het gemiddelde van het 21^e en het 22^e gewicht. Dus $Q_1 = 52$ kg. En op dezelfde manier is $Q_3 = 60{,}5$ kg. De kwartielafstand is daarom $60{,}5 - 52 = 8{,}5$ kg.

Hoe zinvol zijn nu al die maten? De modale lengte zegt niet veel over de verdeling. In dit geval zit die lengte nog redelijk in het midden, maar dat is toeval. Juist de waarden die meer in het midden zitten, komen weinig voor. De mediaan is een zinvolle maat, 50% van de lengtes zit eronder en 50% zit erboven. Ook het gemiddelde is een zinvolle maat: het is het evenwichtspunt van de verdeling. De kwartielafstand is als maat voor de spreiding geschikter dan de spreidingsbreedte: die laatste maat wordt nogal eens bepaald door de uitschieters bij deze verdeling. Dat geldt voor de kwartielafstand niet.

Opgave 6

Bekijk het staafdiagram met de gewichten van de jongens uit de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen**.



Figuur 2.7

a Bereken de mediaan en het gemiddelde van de gewichten van de jongens.

b Waarom is de modus niet vast te stellen?

c Bepaal de spreidingsbreedte en de kwartielafstand.

d Er is bij de jongens één uitschieter. Welke centrummaat en/of spreidingsmaat verandert het sterkst als je deze uitschieter weglaat?

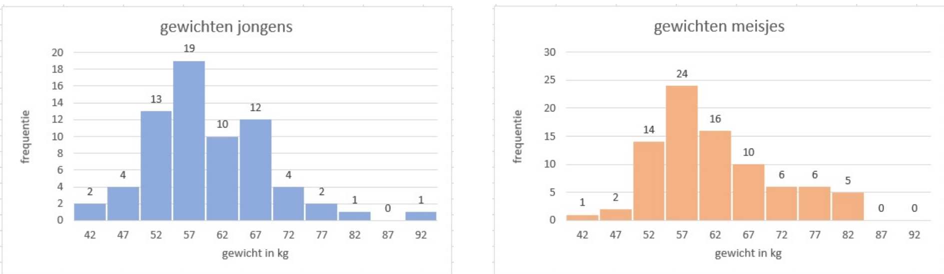
e Veranderen de centrum- en/of de spreidingsmaten als je alle absolute frequenties omrekent naar relatieve frequenties?

f Hoeveel wegen de 25% lichtste jongens?

g Hoeveel procent van de jongens weegt meer dan 78 kg?

Opgave 7

Bekijk de frequentieverdelingen van de gewichten van jongens en meisjes. Ze zijn gegroepeerd in klassen. De vraag is of je bij een indeling in klassen de centrummaten nog kunt berekenen.



Figuur 2.8

a Waarom kun je vanuit deze frequentieverdelingen de mediaan niet meer vaststellen?

In welke klasse zit de mediaan bij de meisjes? En bij de jongens?

b Maak bij deze klassenindeling frequentietabellen voor de gewichten van de jongens en de meisjes en voeg daaraan de klassenmiddens toe. Doe dit zowel in Excel als met je grafische rekenmachine. (Bekijk in het **Practicum** hoe je dit kunt doen.)

c Maak deze frequentieverdelingen met je grafische rekenmachine.

d Waarom kun je met deze klassen het gemiddelde alleen nog maar schatten?

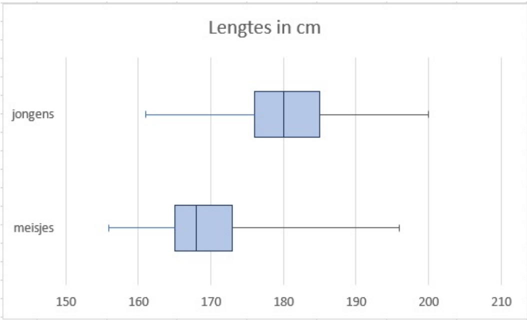
e Geef een schatting van het gemiddelde met behulp van de klassenmiddens voor zowel de jongens als voor de meisjes. Doe dit zowel met behulp van Excel als met behulp van de grafische rekenmachine.

f Wijken je antwoorden af van die in **Voorbeeld 1**?

Voorbeeld 2

Je kunt een dataset met de lengte van meisjes en jongens in groepen van 25% verdelen, dus vier kwarten met evenveel data. Deze groepen hebben de volgende vijf grenzen: het minimum, het eerste kwartiel, de mediaan, het derde kwartiel en het maximum. De boxplots maken dat goed zichtbaar. De beide middelste kwarten vormen de box.

Welke lengtes hebben de 25% kleinste jongens?



Figuur 2.9

Antwoord

In de bovenste boxplot zie je de lengte van de 25% kleinste jongens: van 161 tot 176 cm.

Opgave 8

Bekijk de boxplots in **Voorbeeld 2**.

a Hoeveel procent van de meisjes is langer dan 165 cm?

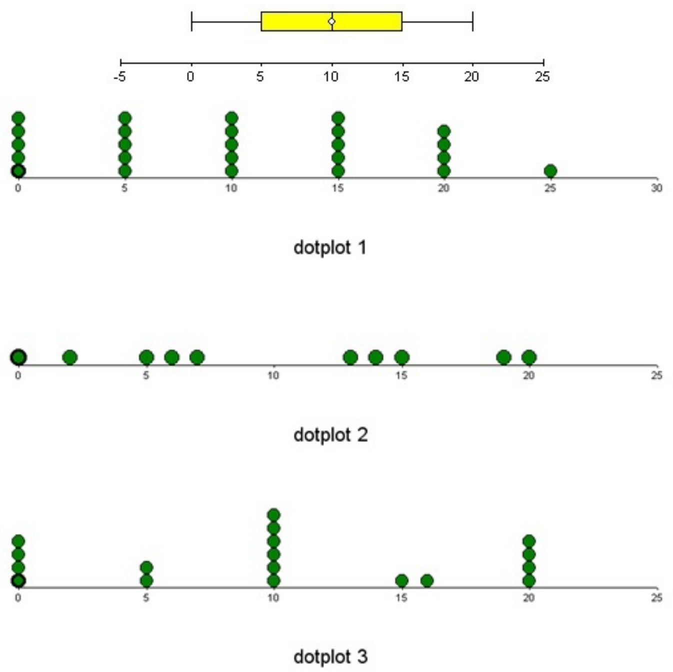
b Hoeveel procent van de meisjes is langer dan het derde kwartiel? En hoeveel procent heeft een lengte tussen de mediaan en het derde kwartiel?

c Waaraan kun je zien dat meer dan 75% van de meisjes kleiner is dan de langste van de 25% kleinste jongens?

d Kun je aan de boxplot zien hoe de data binnen de box verspreid zijn?

Opgave 9

Bekijk de boxplot en een aantal dotplots. De dotplots verschillen erg van vorm.



Figuur 2.10

a Verander bij elke dotplot één waarneming van plaats zodat de dotplot de verdeling van de boxplot goed weergeeft.

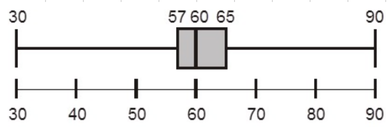
b Verzin zelf een dotplot die goed weergegeven wordt door deze boxplot.

Verwerken

Opgave 10

Voor een toets kun je maximaal honderd punten scoren. Je ziet hoe een groep van veertig personen de toets heeft gemaakt. Van de scores is ook een samenvatting gemaakt in de vorm van een boxplot.

59 - 57 - 53 - 60 - 63 - 58 - 77 - 33 - 50 - 59
58 - 75 - 62 - 54 - 53 - 78 - 59 - 68 - 65 - 62
57 - 60 - 80 - 47 - 90 - 30 - 60 - 35 - 57 - 87
63 - 65 - 63 - 58 - 65 - 70 - 73 - 58 - 63 - 55



Figuur 2.11

a Hoe groot is de gemiddelde score op één decimaal nauwkeurig?

b Lees de kwartielen af uit de boxplot.

c Welke centrummaat vat de data het beste samen?

d Maak bij deze gegevens een frequentietabel met klassen $25- < 35$, $35- < 45$, etc.
Maak met behulp van deze frequentietabel een schatting van het gemiddelde.

e Waarom is dit een handige klassenindeling als het eindcijfer wordt berekend door de score door 10 te delen en je snel wilt kunnen vaststellen hoeveel onvoldoendes (eindcijfer lager dan 5,5) er zijn?

Opgave 11

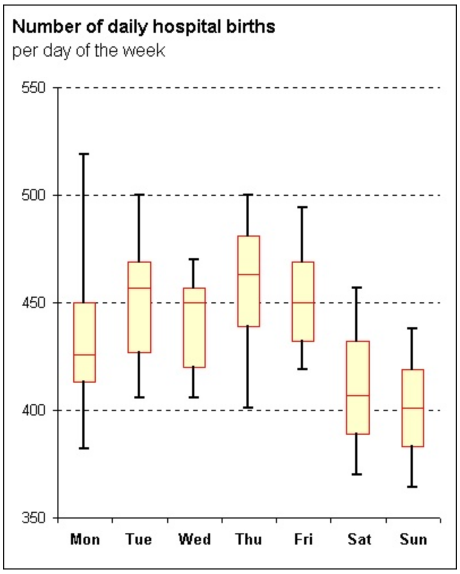
Bekijk de boxplots van het aantal geboortes in ziekenhuizen per dag voor de verschillende dagen van de week.

a Op welke dag van de week is de spreidingsbreedte van het aantal geboortes in ziekenhuizen het grootst? Waarom kun je de dagen niet goed vergelijken met behulp van de spreidingsbreedtes?

b Welke conclusie kun je trekken uit deze boxplots? Er zijn meerdere conclusies.

c Hoeveel procent van de zondagen zijn er minder dan vierhonderd geboortes in ziekenhuizen?

d Benader het gemiddelde aantal bevallingen op donderdagen.



Figuur 2.12

Opgave 12

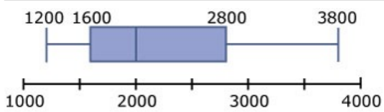
In een bedrijf met 120 medewerkers is het modale salaris ongeveer € 1600,00 per maand. Het gemiddelde salaris is € 1800,00 per maand. Het hoogste salaris is dat van de algemeen directeur. Deze boxplot vat de verdeling van de salarissen samen.

Bereken steeds het modale salaris en het gemiddelde salaris. En wat gebeurt er met de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand als

a alle medewerkers een loonsverhoging krijgen van 3%?

b alle medewerkers een maandelijkse toeslag krijgen van € 200,00?

c het salaris van de algemeen directeur met € 840,00 per maand verhoogd wordt?



Figuur 2.13

Opgave 13

Als je in de sportzaal een tijdje een bepaalde oefening hebt gedaan, gaat je polsslag omhoog. In het tweezijdige steelbladdiagram vind je wat data. Van elke sporter werd één keer voor en één keer na de oefening de polsslag gemeten. De tientallen staan in de stam (rood), de eenheden op een blad (zwart).

polsslag voor de oefening		polsslag na de oefening
9 8 3 2 0	5	9
7 6 6 4 1 0 0	6	2 4 7 8 8
9 6 2	7	1 1 4 4 8
3 1	8	2 4 9 9
	9	2 5

Figuur 2.14

a Waarom zegt de modale polsslag hier weinig over het centrum van de verdeling? Is de modale polsslag een zinvol getal?

b Bereken de gemiddelde polsslag voor en ook na de oefening in één decimaal nauwkeurig. Is het gemiddelde bij deze gegevens een bruikbare centrummaat om te vergelijken?

c Is het wel handig om de polsslag voor en na de oefening apart in beeld te brengen?

Opgave 14

Bekijk de dataset met de gegevens over de **Sportprestaties van 74 brugklassers**. Werk in Excel.

a Bereken voor het vergooien alle centrummaten en alle spreidingsmaten vanuit de ruwe data.

b Waarom kun je dit altijd beter vanuit de ruwe data doen dan vanuit een klassenindeling?

c Probeer conclusies te trekken over het vergooien. Gebruik daarbij de centrum- en de spreidingsmaten. Welke centrum- en spreidingsmaten zijn hier zinvol?

Toepassen

Opgave 15: Hematocrietwaarde

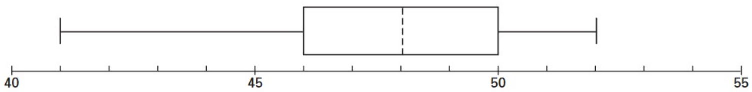
Uit de wielersport komen regelmatig berichten over dopinggebruik. Wielrenners lijken naar verboden middelen te grijpen om hun prestaties te verhogen. Een van de meest genoemde stoffen is erytropoëtine, kortweg EPO. Dit middel bevordert de aanmaak van rode bloedlichaampjes, waardoor de zuurstoftransportfunctie van het bloed wordt vergroot. Je gaat hierdoor beter presteren.
De hematocrietwaarde is de hoeveelheid rode bloedlichaampjes als percentage van de totale hoeveelheid bloed. Die hematocrietwaarde stijgt als een wielrenner EPO gaat gebruiken.
Bij een wielerwedstrijd in 1997 heeft men de hematocrietwaarde van een aantal wielrenners gemeten. De meetresultaten staan in de tabel.

hematocrietwaarde	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
frequentie	2	3	5	11	15	8	4	3	2	1	0	0	1	2	0	0	1

Tabel 2.2

a Bereken de gemiddelde hematocrietwaarde van deze wielrenners.

Ook in 1998 en 1999 heeft men bij deze wielerwedstrijd van een aantal wielrenners de hematocrietwaarde gemeten. In 1998 was de gemiddelde hematocrietwaarde $45{,}9$. De hematocrietwaarden uit 1999 zijn verwerkt in deze boxplot.



Figuur 2.15

b Toon aan dat, op grond van de boxplot, de gemiddelde hematocrietwaarde in 1999 groter was dan in 1998.

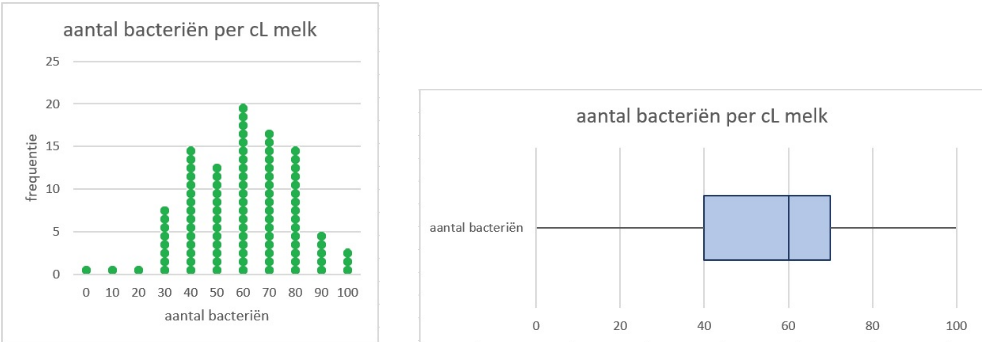
(bron: examen havo wiskunde A in 2002, eerste tijdvak)

Opgave 16: Bacteriën in melk

Een bedrijf haalt elke dag melk bij honderd boeren in de regio op. Voordat de melk in de transporttank gaat, wordt bij elke boer een monster van de melk genomen. In het lab wordt de melk onderzocht op het voorkomen van bacteriële vervuiling. Daartoe wordt in elk monster het aantal fecale bacteriën per centiliter geteld. De totale hoeveelheid melk die elke dag wordt opgehaald, heet een 'dagproductie'.
De dienst die verantwoordelijk is voor de kwaliteitsbewaking, stelt als eis een maximum van 100 fecale bacteriën per milliliter. In de tabel staan honderd waarden gegeven die het lab in een bepaalde dagproductie heeft gevonden. De laborante heeft berekend dat het gemiddelde 59 bacteriën per centiliter is. Ze heeft voor haar analyse ook nog twee representaties gemaakt.

aantal bacteriën	freq
0	1
10	1
20	1
30	8
40	15
50	13
60	20
70	17
80	15
90	5
100	3

Tabel 2.3



Figuur 2.16

a De laborante heeft het gemiddelde aantal bacteriën in de honderd monsters berekend. Is dit ook het gemiddelde van de gehele dagproductie? Licht je antwoord toe.

b Het laboratorium is alert op uitschieters omdat die op bijzonderheden kunnen wijzen. Vaak zijn dat meetfouten. Het lab hanteert een eigen vuistregel voor uitschieters: waarden die liggen buiten het interval mediaan $+1{,}5\cdot$ interkwartielafstand en $-1{,}5\cdot$ interkwartielafstand. Ga na hoeveel uitschieters er zijn.

c De laborante besluit de twee monsters die het laagste scoorden opnieuw te meten. Dat levert in beide gevallen een score van vijftig bacteriën op en daarmee een nieuwe dataset. Beredeneer dat in deze nieuwe set het gemiddelde groter en de spreidingsbreedte kleiner is dan in de oorspronkelijke dataset.

d Beredeneer wat er verandert aan de mediaan en aan de interkwartielafstand.

(bron: voorbeeldopgaven syllabus, 2014)

Testen

Opgave 17

Voor een practicum biologie worden regenwormen gevangen. De lengte van die regenwormen vind je in de tabel.

a Kijk naar de manier waarop de klassen zijn gemaakt. Hoe nauwkeurig zijn de regenwormen gemeten? Bij welke klasse hoort een regenworm die 3,0 cm lang is?

b Welke klasse is de modale klasse?

c Teken met je grafische rekenmachine een staafdiagram van de relatieve frequenties.

d In welke klasse zit de mediaan? Kun je precies zeggen hoe groot die mediaan is?

e Bereken een schatting van het gemiddelde.

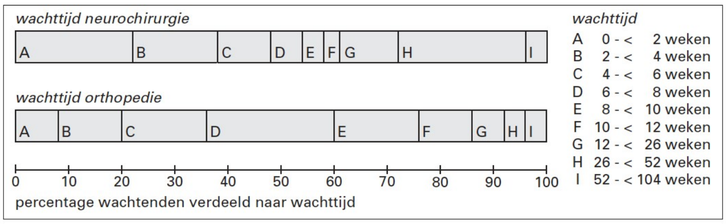
lengte regenworm (cm)	*aantal*
$0{,}0 - < 3{,}0$	4
$3{,}0 - < 6{,}0$	8
$6{,}0 - < 9{,}0$	17
$9{,}0 - < 12{,}0$	22
$12{,}0 - < 15{,}0$	23
$15{,}0 - < 18{,}0$	17
$18{,}0 - < 21{,}0$	6
$21{,}0 - < 24{,}0$	2
$24{,}0 - < 27{,}0$	1

Tabel 2.4

Opgave 18

In de gezondheidszorg staan veel mensen op een wachtlijst, bijvoorbeeld voor een behandeling in een ziekenhuis of voor een plaats in een verzorgingshuis. De regering wil dat minder mensen op een wachtlijst staan. Ook wil men dat mensen die op een wachtlijst staan, minder lang hoeven te wachten. Voor alle specialismen, waaronder neurochirurgie en orthopedie, heeft men de wachtlijsten in kaart gebracht. Men heeft bekeken hoeveel mensen op een wachtlijst staan en hoelang ze moeten wachten. In de figuur staat een weergave van de wachttijd bij neurochirurgie en bij orthopedie. In de figuur kun je bijvoorbeeld over de wachtenden op een behandeling bij neurochirurgie aflezen:

- bijna 40% van de mensen is binnen vier weken aan de beurt en
- meer dan 25% moet 25 weken of langer wachten.

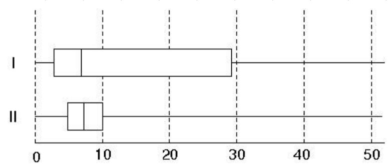


Figuur 2.17

a Hoeveel procent van de wachtenden bij neurochirurgie moet tussen de vier en de tien weken wachten? Licht je antwoord toe.

b Beide afdelingen kunnen op grond van de gegevens in de figuur beweren dat ze het beter doen dan de andere afdeling. Noem voor elke afdeling een argument dat ze kunnen aanvoeren.

c De gegevens uit de figuur zijn verwerkt in twee boxplots. Geef aan welke boxplot bij welke afdeling hoort.



Figuur 2.18

Practicum

Als je met niet al te grote datasets te maken hebt, kun je met de **grafische rekenmachine** de gegevens verwerken, analyseren en presenteren. Hoe dat gaat zie je in de practica:

- **Statistiek en de TI84**
- **Statistiek en de TInspire**
- **Statistiek en de Casio fx-CG50**
- **Statistiek en de HPprime**
- **Statistiek en de NumWorks**

Met **Excel** (een spreadsheetprogramma, een rekenblad) werken is bij statistiek eigenlijk onontbeerlijk. Je kunt er grote hoeveelheden gegevens in kwijt. Die gegevens kun je ordenen en presenteren. Bekijk de eerste vier delen van het practicum:

- **Data presenteren**

Je kunt ook data analyseren en presenteren met de app 'Data analyse' van **VUstat**. Daarin kun je eigen databestanden vanuit Google Drive toevoegen, maar er zijn ook diverse datasets beschikbaar. Ga hiervoor naar:

- **Data analyse VUstat**

1.3 Verdelingen typeren

Inleiding

Als je frequentieverdelingen bij datasets in beeld brengt, dus in diagrammen verwerkt, krijg je soms mooie symmetrische plaatjes. Maar lang niet altijd: sommige verdelingen zijn scheef, sommige erg grillig. Maar ook kun je met meerdere toppen te maken hebben.

Je leert in dit onderwerp

- de vorm van frequentieverdelingen te typeren;
- een cumulatief frequentiepolygoon te gebruiken en te interpreteren.

Voorkennis

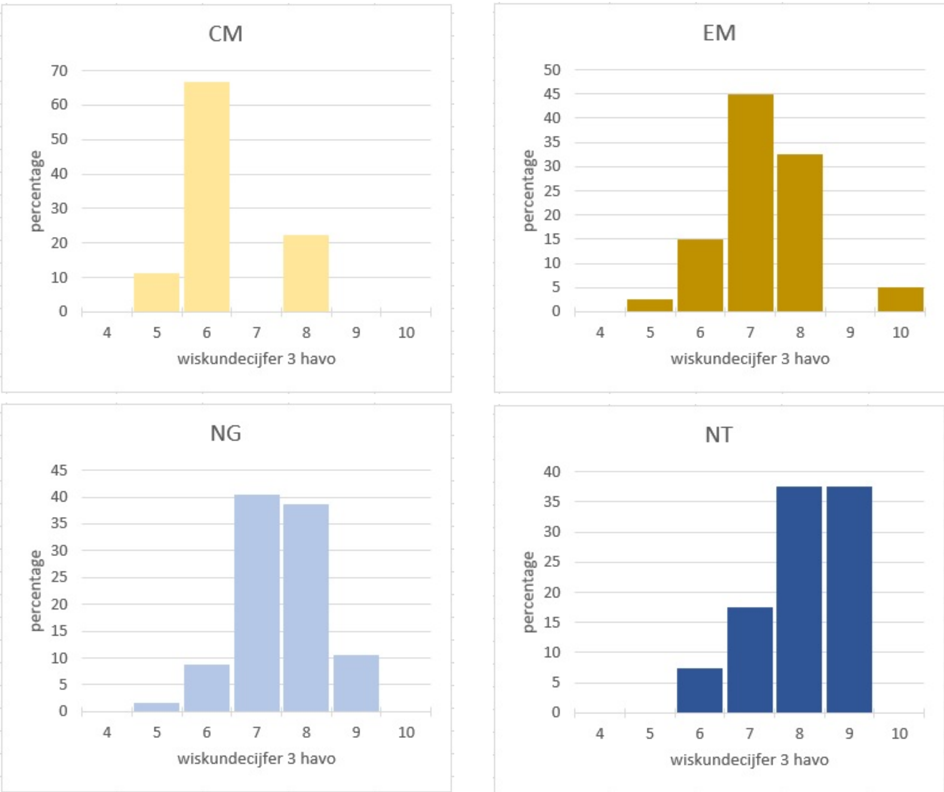
- de begrippen data, populatie, steekproef, aselect en representatief, kwantitatief en kwalitatief, absolute en relatieve frequentie, discrete en continue variabele, klassenbreedte, klassenmidden en klassengrens;
- de verschillende centrummaten en spreidingsmaten berekenen;
- allerlei diagrammen interpreteren.

Verkennen

Opgave V1

Gebruik weer de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen**.

Je ziet diagrammen met de wiskundecijfers in 3 havo voor de leerlingen in de verschillende profielen. Kijk per profiel naar de verdeling van de cijfers voor wiskunde in 3 havo.



Figuur 3.1

a Wat valt je op aan de verschillen in vorm van deze frequentieverdelingen? Beschrijf je opmerkingen per profiel.

b Bij welke van deze vier verdelingen liggen de mediaan en het gemiddelde het dichtst bij elkaar? Hoe zie je dat aan het diagram?

c De verdeling van de wiskundecijfers in havo 3 voor het NT-profiel is een scheve verdeling. Waarom zou je deze verdeling scheef noemen, denk je?

d Welke verdeling is het meest symmetrisch?

Opgave V2

Bekijk de verdeling van het profiel NG nog eens. Ga ervan uit dat alle frequenties hele percentages zijn.

a Hoeveel procent van de NG-leerlingen had in 3 havo een wiskundecijfer lager dan of gelijk aan 7?

b Hoeveel procent van die leerlingen had in 3 havo een wiskundecijfer lager dan of gelijk aan 8?

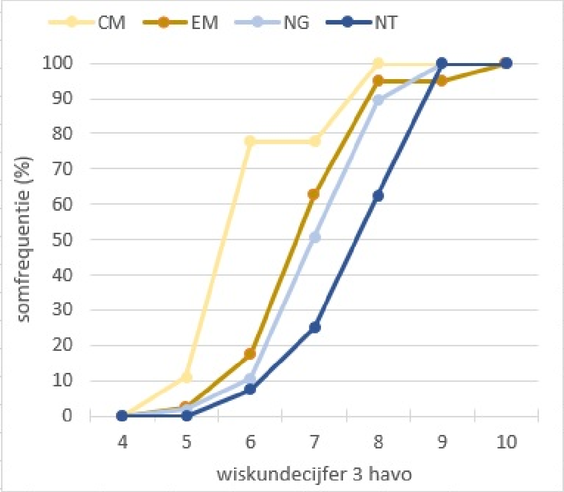
Je noemt de frequenties die je bij a en b hebt berekend wel 'somfrequenties'. Bij somfrequenties tel je bij de frequentie van bijvoorbeeld het cijfer 7 ook de frequenties van alle voorgaande cijfers op: je stapelt de frequenties als het ware op elkaar. In dit geval stapel je relatieve frequenties op elkaar.

c Maak een tabel waarin bij elk cijfer de relatieve somfrequentie staat.

d Welk percentage had een cijfer lager dan of gelijk aan 5?

e Bekijk het lijndiagram.

Welke conclusie kun je uit dit diagram trekken?



Figuur 3.2

Uitleg

Bij een statistische variabele zijn veel verschillende verdelingen mogelijk.

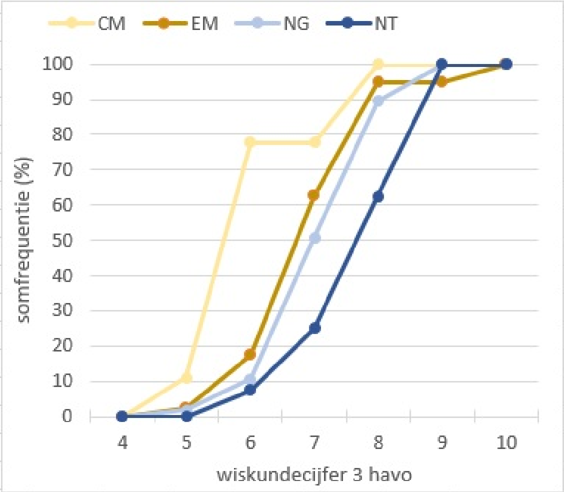
Als je frequentieverdelingen bij datasets in beeld brengt, dus in diagrammen verwerkt, krijg je soms mooie symmetrische plaatjes, maar lang niet altijd. Sommige verdelingen zijn scheef, sommige erg grillig. Maar ook kun je met meerdere toppen te maken hebben.

Let bijvoorbeeld eens op de vorm en de verdeling van een staafdiagram. Is het diagram scheef of juist symmetrisch? Zijn er meerdere toppen of is er juist sprake van een opvallende gelijkmatigheid? Zijn er veel uitschieters?

Een frequentieverdeling kun je ook in beeld brengen met behulp van somfrequenties: dat is de totale frequentie voor een waarde opgeteld bij alle waarden daaronder. Je stapelt de frequenties dus op elkaar: bij elke frequentie tel je die van de voorgaande waarden (of klassen) op. Je noemt dit de cumulatieve frequenties ('cumuleren' betekent 'opstapelen').

Je kunt een lijndiagram maken van die somfrequenties (cumulatieve frequenties). Zo'n lijndiagram noem je een 'cumulatief frequentiepolygoon'.

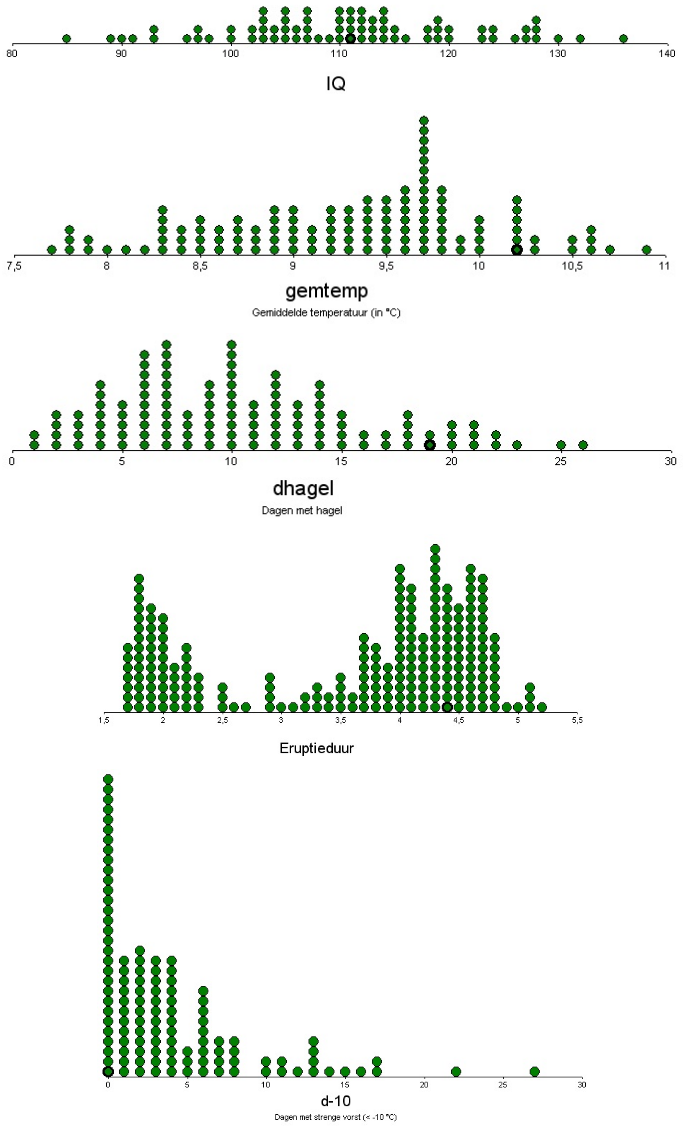
Als je te maken hebt met een klassenindeling, verbind je om een lijndiagram van de cumulatieve frequenties te krijgen, de frequenties van de rechterklassengrenzen met elkaar.



Figuur 3.3 cumulatieve frequentiepolygonen

Opgave 1

Bekijk de dotplots van een aantal datasets. Beschrijf van elke dataset de vorm van de verdeling. Is er sprake van symmetrie, een gelijkmatige verdeling, meerdere toppen of uitschieters?



Figuur 3.4

Opgave 2

Je ziet diagrammen van de lengteverdeling van sporters. De lengtes zijn ingedeeld in klassen met een klassenbreedte van 5 cm. Eén ervan gaat over basketballers, één over hardlopers en één over gewichtheffers.

a Welk diagram is het meest gelijkmatig, welk diagram heeft meerdere toppen en welk diagram vind je het meest symmetrisch?

b Welk diagram hoort bij de basketballers, welk bij de hardlopers en welk bij de gewichtheffers? Licht je antwoord toe.

c Bij welk van deze diagrammen zitten de mediaan en het gemiddelde beide ongeveer in het midden van de verdeling?

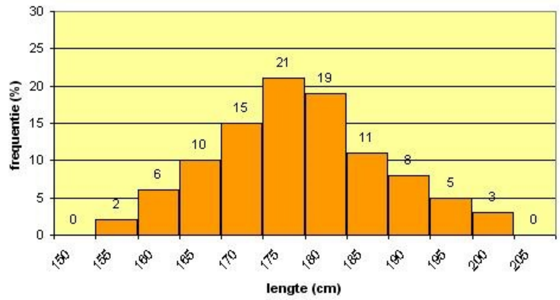


diagram I

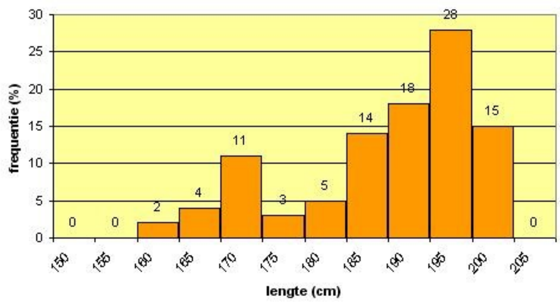


diagram II

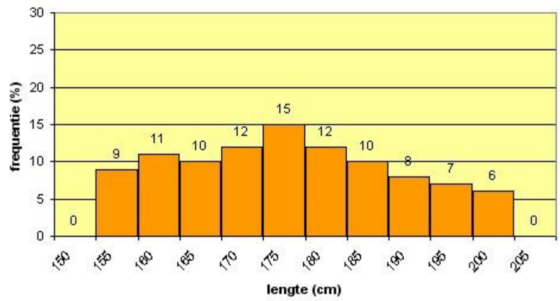


diagram III

Figuur 3.5

Opgave 3

Je kunt de lengteverdelingen in de vorige opgave ook vergelijken met behulp van somfrequentiepolygonen of cumulatieve frequentiepolygonen.

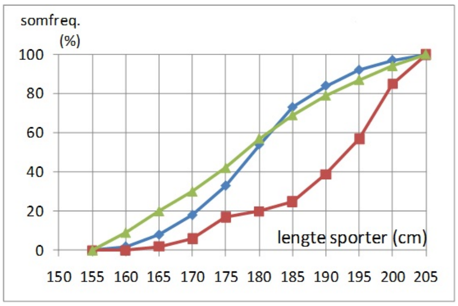
a Welke klassenindeling is er bij de diagrammen gebruikt? Wat zijn de klassenmiddens?

b Neem diagram I. Hoeveel procent van de sporters is kleiner dan 170 cm?

c Maak een tabel van de klassen bij diagram I met daarbij de cumulatieve frequenties.

d Waarom moet je bij klassen de somfrequenties boven de rechterklassengrenzen uitzetten?

e Je ziet drie somfrequentiepolygonen (cumulatieve frequentiepolygonen) die bij de drie diagrammen horen. Geef aan welk diagram bij welke kleur hoort.

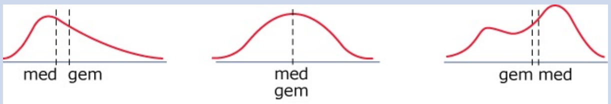


Figuur 3.6

f Wat kun je uit de cumulatieve frequentiepolygonen aflezen over de lengteverdelingen van de sporters?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 3.7

Bij de **vorm van een frequentieverdeling** let je op:

- de symmetrie
- de scheefheid
- het aantal toppen
- de uitschieters
- de gelijkmatigheid

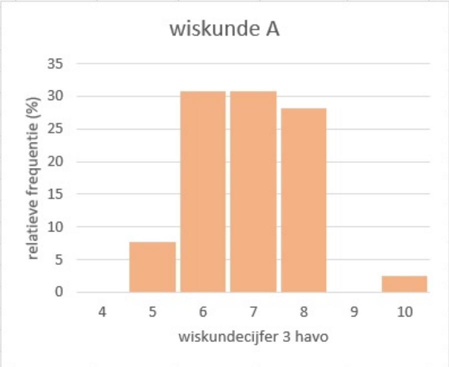
Bij een symmetrische verdeling vallen mediaan (med) en gemiddelde (gem) vrijwel samen. Dat zie je in het middelste diagram. Je ziet ook dat daarvan het aantal uitschieters in de staart links en rechts ongeveer gelijk is.

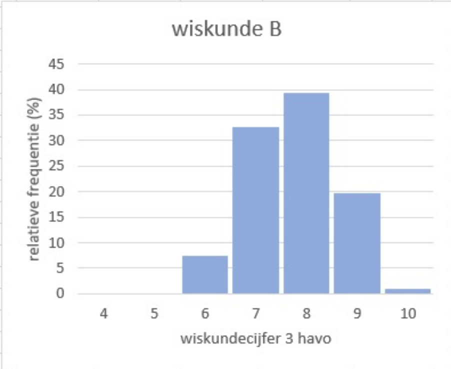
De **somfrequentie** of **cumulatieve frequentie** is de totale frequentie van een waarde plus die van alle kleinere waarden. Je stapelt de frequenties op elkaar: bij elke frequentie tel je de voorgaande frequenties op. Een lijndiagram van de somfrequenties van een verdeling noem je een **somfrequentiepolygoon** of **cumulatief frequentiepolygoon**. Bij een klassenindeling worden de somfrequenties bepaald door de frequenties van een klasse bij alle voorgaande klassen op te tellen. Deze somfrequenties zet je in een diagram uit boven de rechterklassengrenzen.

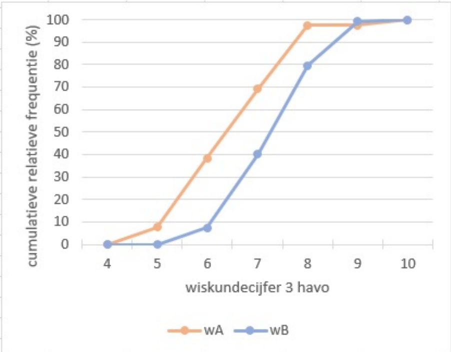
Voorbeeld 1

Gebruik weer de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen**.

Je wilt nagaan of leerlingen die wiskunde B kiezen, beter waren in wiskunde in de onderbouw dan leerlingen die wiskunde A kiezen. Daartoe bekijk je de variabele cijfers (het eindcijfer voor wiskunde in havo 3) voor elk van deze deelgroepen.







Figuur 3.8

Het linker diagram lijkt redelijk symmetrisch met als top het cijfer 8. De mediaan van deze gegevens is 8 en het gemiddelde is 7,7. Het rechter diagram is in het midden meer gelijkmatig en er is geen echte top. De mediaan van deze gegevens is 7 en het gemiddelde 6,9. Het cijfer 10 wijkt behoorlijk veel af van de andere cijfers, maar is nog net geen uitschieter.

Bekijk de somfrequentiepolygonen van beide verdelingen.

Je ziet dat de wiskunde B-leerlingen stelselmatig hogere cijfers hebben (op de uitschieter na). Ongeveer 40% van de A-leerlingen had bijvoorbeeld een wiskundecijfer 6 of lager, tegen nog geen 10% van de B-leerlingen.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Alle percentages zijn gehele getallen.

a Waarom zijn geen van beide verdelingen scheef?

b Reken de gemiddelden en de medianen van beide verdelingen na.

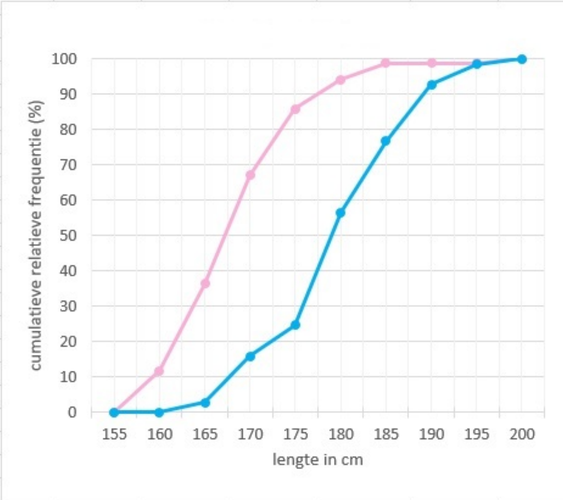
c De somfrequenties zijn uitgezet tegen de gehele cijfers 5, 6, 7, 8, 9, 10. Is dat hier correct?

d Hoeveel procent van de leerlingen met wiskunde A heeft een cijfer 7 of lager? En hoeveel procent van de leerlingen met wiskunde B heeft zo'n cijfer? Kun je nu iets zeggen over het aantal leerlingen met een 7 of lager?

Opgave 5

Bekijk de frequenties (in procenten) van de lengtes van de 154 meisjes en jongens in een brugklas.

klassen			meisjes		jongens	
onder	midden	boven	freq	%	freq	%
150	152,5	155	0	0	0	0
155	157,5	160	10	12	0	0
160	162,5	165	21	25	2	3
165	167,5	170	26	31	9	13
170	172,5	175	16	19	6	9
175	177,5	180	7	8	22	32
180	182,5	185	4	5	14	20
185	187,5	190	0	0	11	16
190	192,5	195	0	0	4	6
195	197,5	200	1	1	1	1
			85	100	69	100



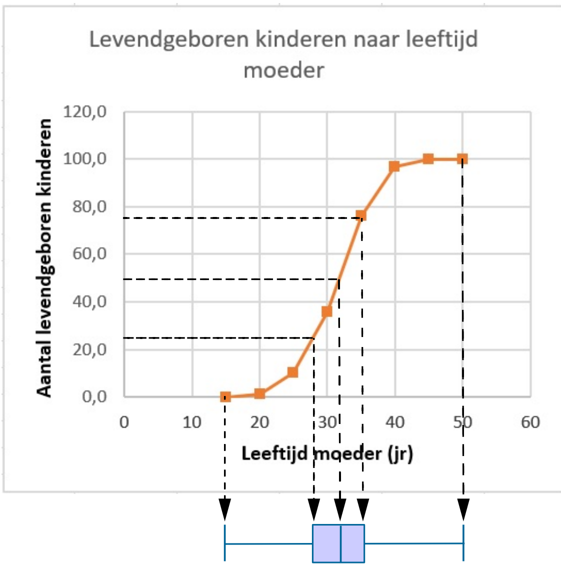
Figuur 3.9

a Welke somfrequentiepolygoon hoort bij de meisjes en welke bij de jongens? Licht je antwoord toe.

b Welke conclusie kun je uit dit cumulatief frequentiepolygoon trekken?

Voorbeeld 2

Bekijk het cumulatieve relatieve frequentiepolygoon van deze klassenindeling van levendgeborenen naar leeftijd van de moeder. Je ziet hoe hierbij een passend boxplot is gemaakt.
Zoek voor de boxplot de vijf getallen om de frequentieverdeling samen te vatten: minimum, Q_1, Q_2 (mediaan), Q_3 en maximum.



Figuur 3.10

Antwoord

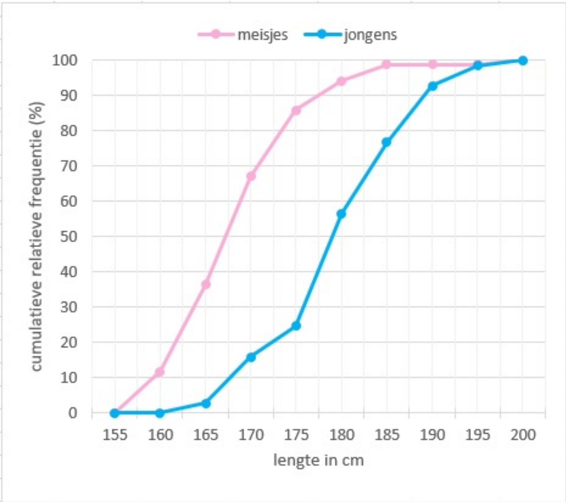
Lees bij 50% de mediaan af, bij 25% het eerste kwartiel en bij 75% het derde kwartiel. Minimum en maximum zitten bij 0% en bij 100%.

Je ziet:

- het minimum is 15
- het eerste kwartiel Q_1 is 28
- de mediaan Q_2 is 31,5
- het derde kwartiel is 35
- het maximum is 50

Opgave 6

Bepaal vanuit deze cumulatieve frequentiepolygonen de vijf getallen om beide frequentieverdelingen afzonderlijk samen te vatten in een boxplot.

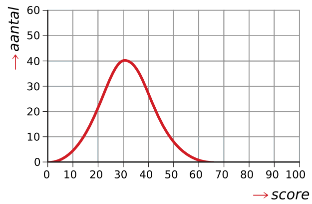


Figuur 3.11

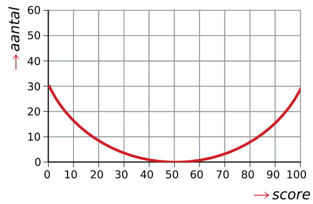
Verwerken

Opgave 7

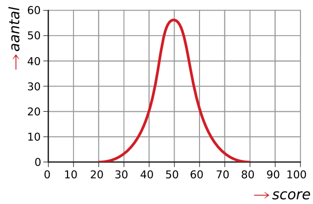
Bekijk deze frequentieverdelingen.



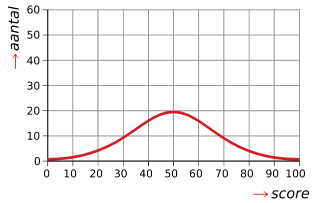
A



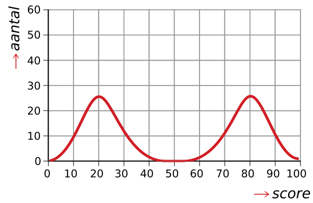
B



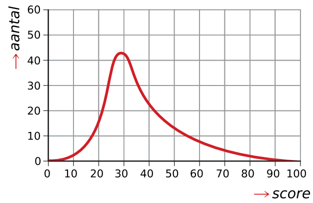
C



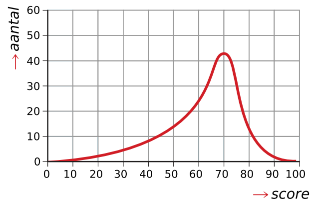
D



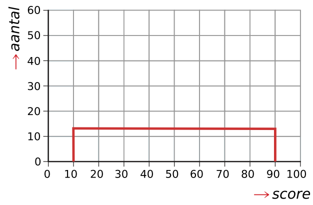
E



F



G



H

Figuur 3.12

a Welke van deze verdelingen zijn symmetrisch?

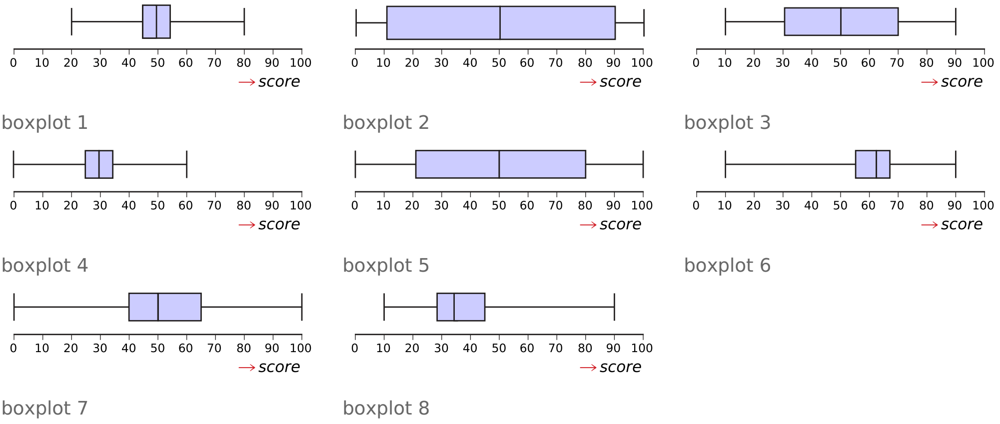
b Welke van deze verdelingen zijn eentoppig?

c Welke van deze verdelingen zijn links scheef?

(naar: Mathematics Assessment Project, Classroom challenges, maart 2015)

Opgave 8

Bekijk deze frequentieverdelingen in de vorm van boxplots.



Figuur 3.13

a Welke van deze verdelingen zijn symmetrisch?

b Welke van deze verdelingen zijn links scheef?

(naar: Mathematics Assessment Project, Classroom challenges, maart 2015)

Opgave 9

Bekijk de relatieve frequenties bij de klassenverdeling van de leeftijdsopbouw van leraren in het primair onderwijs en het voortgezet onderwijs in de jaren 1995 en 2005.

Leeftijdsopbouw leraren				
	po		vo	
leeftijd	1995	2005	1995	2005
20 - 24	3,7	6,1	0,7	3,3
25 - 29	11,9	15,6	5,3	9,9
30 - 34	12,3	11,1	8,7	9,7
35 - 39	18,2	8,1	14,5	8,8
40 - 44	21,3	10,6	21,0	10,9
45 - 49	18,3	16,6	22,5	16,3
50 - 54	9,5	16,7	17,3	19,4
55 - 59	4,4	12,7	9,1	17,1
60 - 64	0,5	2,5	1,0	4,5
	100,0	100,0	100,0	100,0

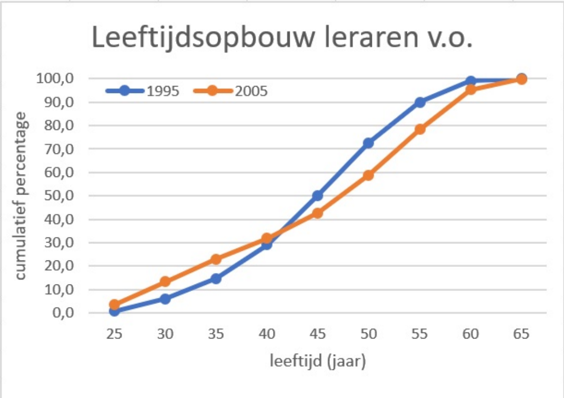
Tabel 3.1

a Maak staafdiagrammen voor de leeftijdsopbouw in 1995 en in 2005 van de leraren in het p.o. en die in het v.o. Beschrijf de verschillen tussen beide verdelingen.

b Leg uit waar je de nieuwe instroom van leraren in het primair onderwijs aan herkent.

c Bepaal de klassenmiddens en geef daarmee een schatting van de gemiddelde leeftijden in het primair onderwijs in 1995 en in 2005.

d Bekijk de cumulatieve relatieve frequentiepolygonen voor het voortgezet onderwijs. Lees de kwartielen af voor 2005.



Figuur 3.14

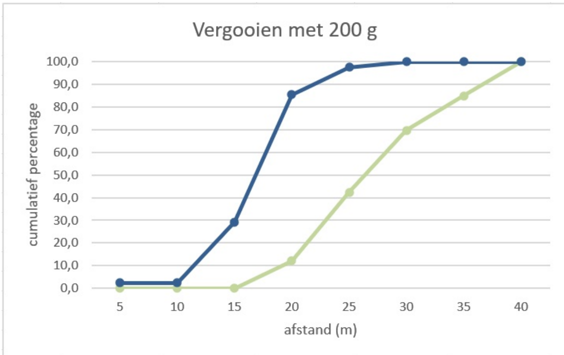
Opgave 10

Je ziet de cumulatieve frequentieverdelingen van de prestaties van 74 brugklassers met vergooien.

a Vergelijk de twee cumulatieve relatieve frequentieverdelingen. De jongens bleken verder te kunnen gooien dan de meisjes. Welke is van de jongens en welke van de meisjes denk je? Licht je antwoord toe. En wat is de minst verre worp van de meisjes en wat is de minst verre worp van de jongens?

b Je wilt een uitspraak doen over de spreiding van de verdelingen aan de hand van de cumulatieve relatieve frequentiepolygonen. Bepaal voor de meisjes en de jongens met behulp van de grafiek de mediaan, de spreidingsbreedte en de kwartielafstand.

Wat kun je concluderen uit deze spreidingsmaten?

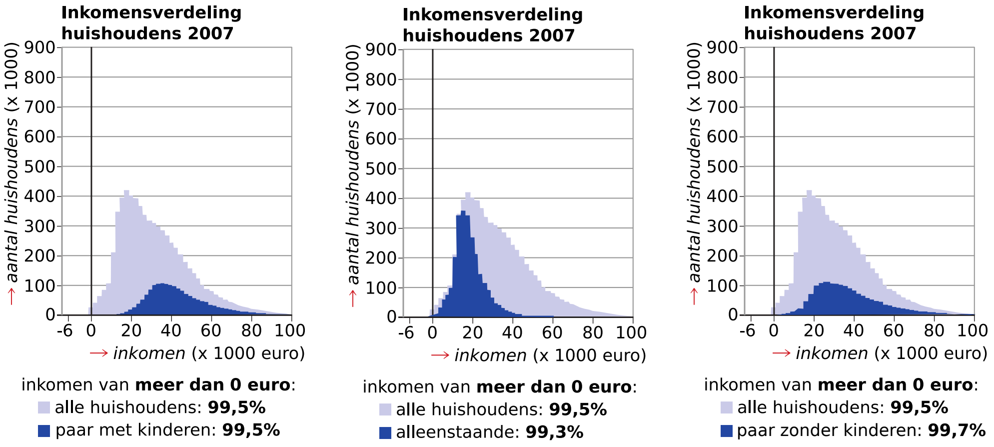


Figuur 3.15

Opgave 11

Je ziet drie staafdiagrammen die de inkomensverdeling in Nederland in 2007 in kaart brengen.

Het gestandaardiseerd inkomen is het besteedbaar inkomen gecorrigeerd voor verschillen in grootte en samenstelling van het huishouden. Dus alle inkomens worden herleid tot het inkomen van een eenpersoonshuishouden.



Figuur 3.16

a Beschrijf de vormen van al deze verdelingen.

b Bepaal voor elke verdeling de spreidingsbreedte.

c Ga voor elke verdeling na hoe het modale inkomen, de mediaan en het gemiddelde ten opzichte van elkaar liggen.

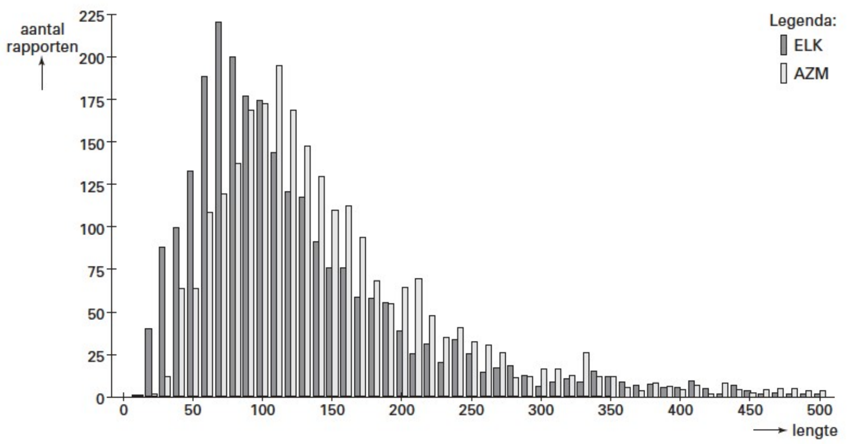
d Vergelijk de inkomensverdelingen van de deelgroepen ‘paar met kinderen’, ‘paar zonder kinderen’ en ‘alleenstaanden’. Probeer ook een verklaring voor de verschillen te geven.

(bron: CBS)

Toepassen

Opgave 12: Medische rapporten

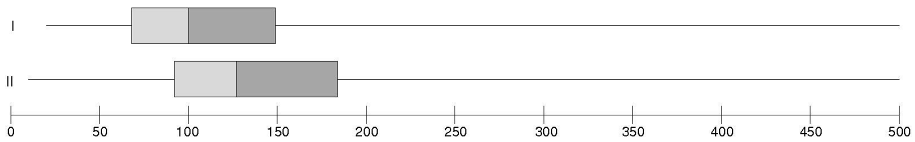
In ziekenhuizen worden vaak medische rapporten geschreven. Bij een onderzoek naar de inhoud van dergelijke rapporten zijn 2500 rapporten van het Elkerliek Ziekenhuis (ELK) in Deurne vergeleken met 2500 rapporten van het Academisch Ziekenhuis Maastricht (AZM). Van elk rapport is de lengte bepaald; de lengte van een rapport is het aantal woorden dat het bevat. In de figuur zijn de gegevens weergegeven in een gecombineerd staafdiagram met klassenbreedte 10.



Figuur 3.17

a Beschrijf de overeenkomst in de vorm van de twee verdelingen.

b Welke van deze boxplots, I of II, hoort bij de rapporten van het ELK? Licht je antwoord toe.



Figuur 3.18

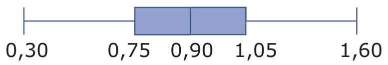
c Kun je op grond van de twee boxplots concluderen dat er een verschil is tussen de lengtes van de rapporten in de twee ziekenhuizen? Beargumenteer je antwoord.

d Uit het onderzoek bleek dat de mediaan en het gemiddelde die horen bij de rapporten van het AZM niet even groot zijn. Geef met een redenering, dus zonder een berekening, aan of de mediaan groter of kleiner is dan het gemiddelde.

(bron: pilotexamen wiskunde A in 2004, tweede tijdvak)

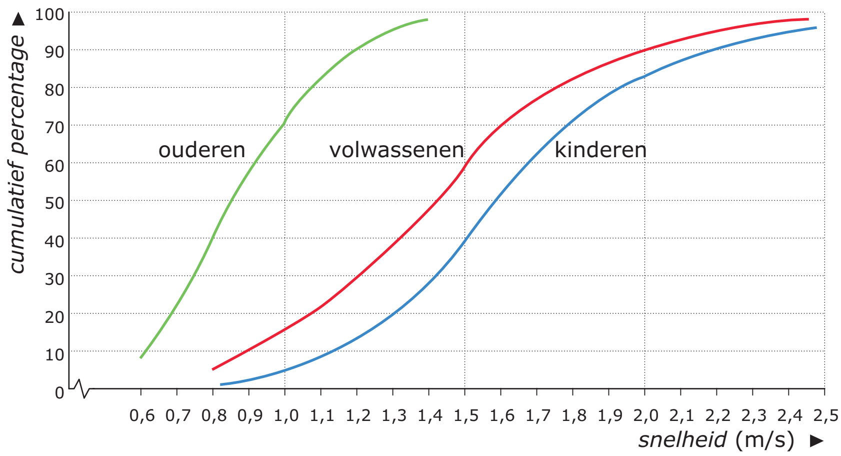
Opgave 13: Loopsnelheden van voetgangers

Men heeft onderzoek gedaan naar de loopsnelheden van voetgangers. Bij dit onderzoek zijn de voetgangers in drie leeftijdsgroepen verdeeld, namelijk kinderen, volwassenen en ouderen. Met de gegevens uit het onderzoek heeft men een boxplot gemaakt voor de loopsnelheden van de groep ouderen.



Figuur 3.19

De snelheden die bij de boxplot vermeld zijn, zijn in meters per seconde. Meer gedetailleerde informatie over de groepen zie je in de figuur.



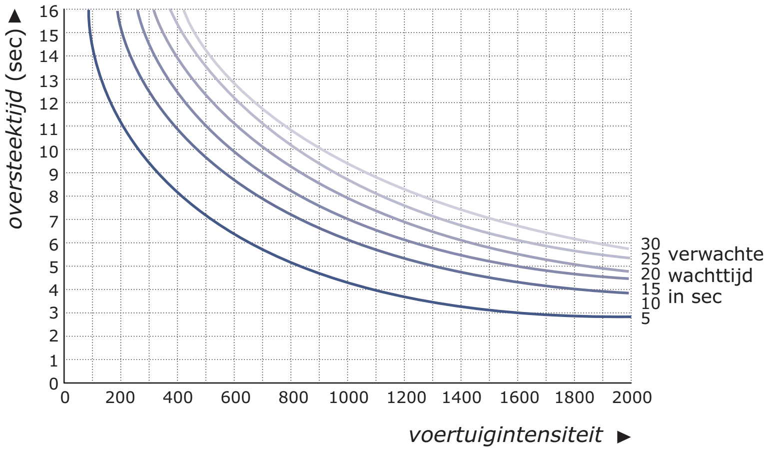
Figuur 3.20

Op de verticale as staat een cumulatief percentage; dit houdt in dat afgelezen kan worden hoeveel procent van de mensen van de verschillende groepen loopt met de aangegeven snelheid of een lagere snelheid. Zo kun je aflezen dat voor de groep ouderen bij een snelheid van 1 m/s het cumulatieve percentage 80 is. Dus bijna 80% van de ouderen loopt met een snelheid van 1 m/s of langzamer. Aan de hand van onder andere deze gegevens wordt een model gemaakt voor de tijd die mensen nodig hebben om een weg over te steken. Neem aan dat de loopsnelheden ook voor het oversteken van een weg gelden. We bekijken het oversteken van een twintig meter brede weg. Er wordt recht overgestoken, dus men loopt daarbij twintig meter.

a Leg uit hoe de boxplot voor de oversteektijden van ouderen uit de grafiek is ontstaan.

b Kun je de vorm van de verdeling van de oversteektijd bij ouderen typeren?

Tot nu toe heb je alleen gekeken naar de tijd van het oversteken zelf. Als je bij een weg aankomt, kun je niet altijd meteen oversteken; soms moet je een aantal seconden wachten. Deze wachttijd hangt samen met de drukte op de weg en de benodigde oversteektijd. De drukte op de weg wordt aangegeven met het aantal voertuigen dat per uur passeert (voertuigintensiteit). Omdat ouderen in het algemeen minder snel lopen, zullen voor deze groep de benodigde oversteektijd en dus ook de wachttijd groter zijn dan bijvoorbeeld voor kinderen. Er is een model gemaakt voor de samenhang tussen oversteektijd, voertuigintensiteit en verwachte wachttijd.



Figuur 3.21

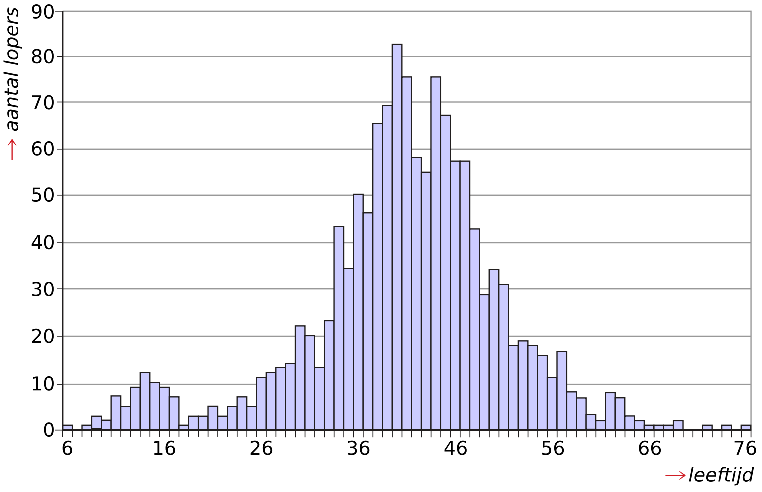
c Leid de grafiek af die het verband aangeeft tussen de oversteektijd en de verwachte wachttijd bij een voertuigintensiteit van 800. Noem de coördinaten van minimaal vijf punten van de grafiek voor wachttijden van 5 tot en met 30 seconden.

(naar: examen wiskunde A in 1994, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 14

Je ziet de leeftijden van de deelnemers aan een hardloopwedstrijd in 2010.



Figuur 3.22

a Beschrijf de vorm van deze verdeling. Gebruik woorden als symmetrie, scheefheid, toppen, staart, uitschieters en gelijkmatigheid.

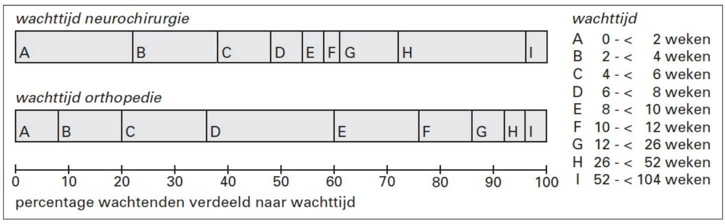
b Hoe kun je zien dat het niet om een cumulatieve frequentie (somfrequentie) gaat?

c Wat kun je zeggen over de centrummaten bij deze verdeling? En over de spreidingsmaten?

d Welke leeftijdsgroepen zullen wat meer gestimuleerd moeten worden om mee te doen, kijkend naar deze verdeling?

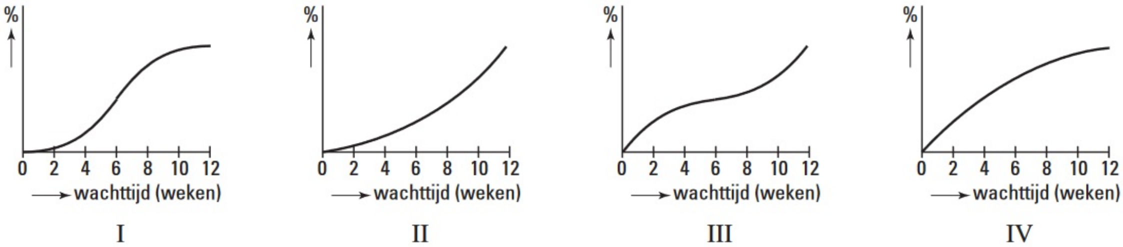
Opgave 15

De wachtlijsten voor neurochirurgie en orthopedie zijn in kaart gebracht. Je ziet hoeveel mensen op een wachtlijst staan en hoelang ze moeten wachten.



Figuur 3.23

Je ziet vier cumulatieve frequentiepolygonen (I, II, III en IV) voor de eerste twaalf weken.



Figuur 3.24

Welke van deze vier cumulatieve frequentiepolygonen past het best bij de wachttijden tot twaalf weken bij neurochirurgie? Licht je antwoord toe.

(naar: examen havo wiskunde A in 2003, tweede tijdvak)

1.4 Normale verdeling

Inleiding

Je hebt nu naar frequentieverdelingen leren kijken en centrummaten en spreidingsmaten leren gebruiken. Maar er is nog een spreidingsmaat die vooral belangrijk is bij een veel voorkomende frequentieverdeling: de normale verdeling. Deze verdeling heeft de typerende klokvorm.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de standaardafwijking te berekenen en te interpreteren;
- de normale verdeling te herkennen en te typeren.

Voorkennis

- de begrippen data, populatie, steekproef, aselect en representatief, kwantitatief en kwalitatief, absolute en relatieve frequentie, discrete en continue variabele, klassenbreedte, klassenmidden en klassengrens;
- de verschillende centrummaten en spreidingsmaten berekenen;
- allerlei diagrammen interpreteren.

Verkennen

Opgave V1

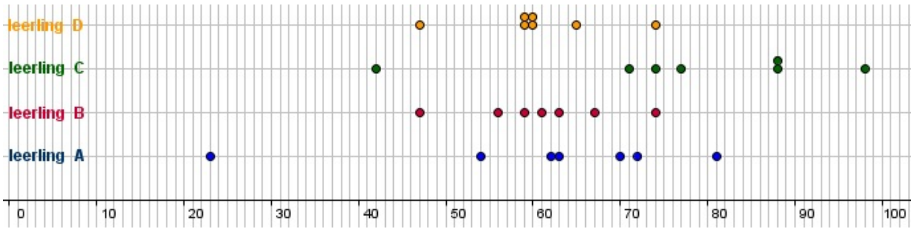
Je ziet de SE-cijfers (schoolexamencijfers) van enkele leerlingen aan het eind van havo 5. Het eindcijfer is het gemiddelde van deze cijfers.

	se1	se2	se3	se4	se5	se6	se7
A	7,2	6,3	7,0	2,3	6,2	8,1	5,4
B	5,9	7,4	5,6	6,7	6,1	6,3	4,7
C	8,8	9,8	7,4	8,8	5,7	7,3	4,2
D	7,4	6,0	6,0	6,5	5,9	5,9	4,7

Tabel 4.1

a Welke eindcijfers krijgen deze leerlingen?

b In de figuur is voor iedere leerling elk SE-cijfer aangegeven door een bolletje op een getallenlijn (de komma in het cijfer is weggelaten). Geef in deze figuur per leerling de gemiddelde SE-cijfers aan.



Figuur 4.2

c De leerlingen A en B hebben hetzelfde gemiddelde. Toch is hun cijferbeeld nogal verschillend. In welk opzicht?

d De spreiding van de cijfers van A en C is vrijwel hetzelfde. Waarin verschilt hun cijferbeeld vooral?

e Bepaal bij elke leerling de spreidingsbreedte van hun cijfers.

f De leerlingen B en D hebben vrijwel dezelfde spreidingsbreedte. Zou je de spreiding van hun cijfers ook hetzelfde willen noemen?

Opgave V2

Een andere maat voor de spreiding kun je vinden door te kijken hoe ver elk cijfer van het gemiddelde af ligt. Je doet dit door van elk cijfer het verschil met het gemiddelde te berekenen. Bekijk die verschillen voor leerling A met het gemiddelde $6,1$.

leerling A		
A	A - gem	(A - gem)²
7,2	1,1	1,27
6,3	0,2	0,05
7,0	0,9	0,86
2,3	-3,8	14,22
6,2	0,1	0,02
8,1	2,0	4,12
5,4	-0,7	0,45
	0,0	20,99

gem =	6,1
var =	3,00
sd =	1,73

Figuur 4.3

	se1	se2	se3	se4	se5	se6	se7	
A	7,2	6,3	7,0	2,3	6,2	8,1	5,4	cijfer
	1,1	0,2	0,9	-3,8	0,1	2,0	-0,7	verschil

Figuur 4.4

a Bereken het gemiddelde van deze verschillen. Wat valt je daarbij op?

b Het gemiddelde van deze verschillen is geen goede spreidingsmaat. Dat komt doordat de negatieve afwijkingen wegvallen tegen de positieve. Door te kwadrateren verdwijnen die mintekens. Bekijk hoe je dat bij leerling A aan kunt pakken.

Je ziet dat eerst een kolom met de verschillen met het gemiddelde wordt gemaakt. Daarna een kolom met de kwadraten van deze verschillen. De variantie var is het gemiddelde van de kwadraten van de verschillen. Reken dat getal na.

c Welke verschillen leveren een grote bijdrage aan de variantie en welke niet?

De wortel uit de variantie van A heet de ‘standaardafwijking’ van de set cijfers van A; hier afgekort met sd.

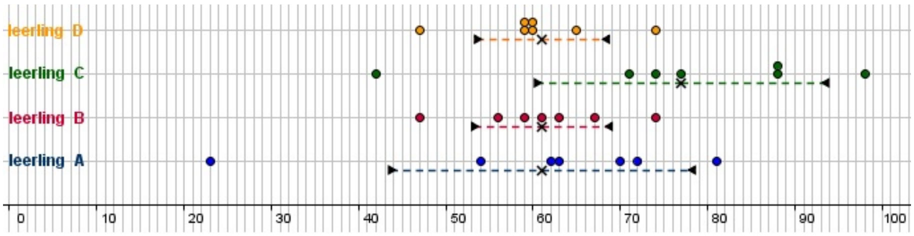
d Maak voor leerling B ook zo’n tabel en bereken op dezelfde manier de standaardafwijking.

e Bereken de standaardafwijking van de cijfers van de leerlingen C en D.

Uitleg 1

Je hebt naar frequentieverdelingen leren kijken en centrummaten en spreidingsmaten leren gebruiken. Maar er is nog een belangrijke spreidingsmaat, namelijk de standaardafwijking. De standaardafwijking houdt rekening met de afwijking vanaf het gemiddelde van elke waarde. Het is een soort gemiddelde afwijking ten opzichte van het gemiddelde.

Je ziet in één figuur vier sets met cijfers van vier leerlingen. De gemiddelden zijn aangegeven met × en je ziet de standaardafwijkingen links en rechts van het gemiddelde.



Figuur 4.5

Van leerling A zijn de cijfers (zie figuur): 2,3, 5,4, 6,2, 6,3, 7,0, 7,2 en 8,1.

cijfer	cijfer – gemiddelde	(cijfer – gemiddelde)^2
2,3	-3,8	14,44
5,4	-0,7	0,49
6,2	0,1	0,01
6,3	0,2	0,04
7,0	0,9	0,81
7,2	1,1	1,21
8,1	2,0	4,00
som van de kwadraten		21,00

Tabel 4.2

Je berekent zo'n standaardafwijking van bijvoorbeeld leerling A als volgt:

- Je bepaalt eerst het gemiddelde van zijn cijfers, dat is 6,1.
- Dan bepaal je van elk cijfer het verschil met het gemiddelde, de zogenoemde ‘deviatie’.
- Elke deviatie kwadrateer je (om geen negatieve afwijkingen te krijgen).
- Van die kwadraten van de deviaties bereken je het gemiddelde. Daarmee heb je de variantie van de verzameling cijfers gevonden: variantie = $\frac{\text{som van de kwadraten van de deviaties}}{\text{totale aantal}}$
- De standaardafwijking is de wortel uit de variantie.

De variantie is dus $\frac{21,00}{7} \approx 3,5$ en de standaardafwijking is $\sqrt{\frac{21,00}{7}} \approx 1,87$.

Je kunt de standaardafwijking ook met de grafische rekenmachine berekenen, zie het **Practicum**.

De standaardafwijking is de meestgebruikte spreidingsmaat bij statistisch onderzoek. Deze afwijking van het gemiddelde wordt links en rechts vanaf het gemiddelde uitgezet.

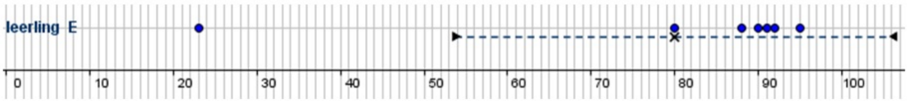
Opgave 1

In **Uitleg 1** zie je hoe de standaardafwijking wordt berekend van de cijfers van leerling A.

Doe dit zelf van leerling B.

Opgave 2

Lees **Uitleg 1**. Bekijk de gegevens van een vijfde leerling E.



Figuur 4.6

a In de verdeling van de cijfers van leerling E zie je een uitschieter: een $2{,}3$. Daarom is de getekende standaardafwijking ongeschikt om de spreiding van de verdeling te beschrijven. Licht dit toe.

b Stel dat leerling E de $2{,}3$ mag herkansen en dat hij dan een $7{,}9$ haalt. Welke richting zal het gemiddelde dan opgaan en wat betekent dit voor de standaardafwijking, denk je? Geeft de standaardafwijking de spreiding nu beter weer?

Opgave 3

Stel je voor dat de laatste drie behaalde cijfers twee keer zo zwaar meetellen als de eerste vier cijfers. Bij leerling E zijn die laatste drie cijfers $9{,}0$ en $8{,}8$ en $2{,}3$. Je noemt het eindcijfer in zo'n geval een ‘gewogen gemiddelde’.

a Waarom moet je de laatste cijfers nu twee keer in de berekeningen van het gemiddelde en de standaardafwijking opnemen?

b Bereken het gewogen gemiddelde van deze leerling E met de bijbehorende standaardafwijking. Maak een tabel met cijfer, frequentie, frequentie min gemiddelde en (frequentie - gemiddelde)^2. Bereken vervolgens de variantie en de standaardafwijking.

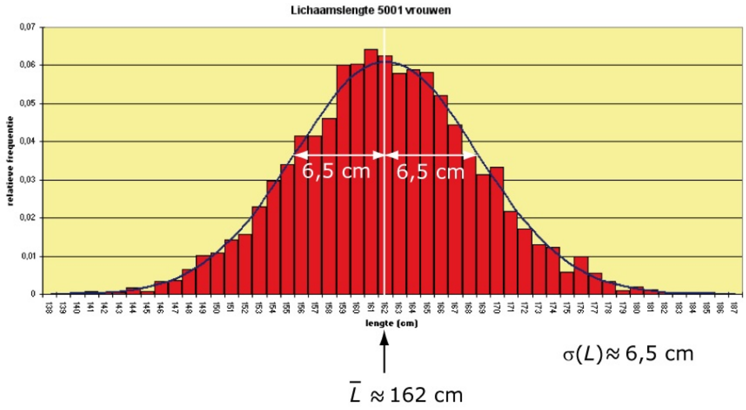
Opgave 4

Op welke van de drie spreidingsmaten heeft een uitschieter geen invloed?

Uitleg 2

Je ziet een staafdiagram van de lengtes van 5001 vrouwen uit de dataset **Statistiek Bijenkorf 1947**.

Die verdeling heeft een vrijwel zuivere 'klokvorm'. Je noemt dit een normale verdeling, elke normale verdeling heeft zo'n klokvorm. De gemiddelde lengte $\overline{L} \approx 162$ cm en de standaardafwijking $\sigma(L) \approx 6{,}5$ cm zijn in de figuur aangegeven.



Figuur 4.7

Beide getallen leggen de normale verdeling volledig vast, ze zijn karakteristiek voor deze normale verdeling. De standaardafwijking geef je aan met een Griekse letter s, de 'sigma' in $\sigma(L)$. Voor het gemiddelde gebruik je ook wel een Griekse letter m, de 'mu' in $\mu(L)$. Op grond van alleen het gemiddelde en de standaardafwijking kan elke normale verdeling worden getekend.

Opgave 5

Bekijk de dataset **Gegevens 154 havo 4-leerlingen**. Je vindt daar de lengtes van 154 leerlingen. Bekijk de lengtes van jongens en meisjes afzonderlijk.

a Laat met behulp van de grafische rekenmachine of met Excel zien dat de jongens een gemiddelde lengte van 180 cm hebben met een standaardafwijking van 8 cm en dat de meisjes een gemiddelde lengte van 169 cm hebben met een standaardafwijking van 7 cm.

De lengtes van de jongens en de meisjes van deze groep leerlingen vormen geen normale verdeling omdat de groep daarvoor te klein is. Maar stel je voor dat de gevonden gemiddelden en de gevonden standaardafwijkingen wel bij een normale verdeling zouden horen.

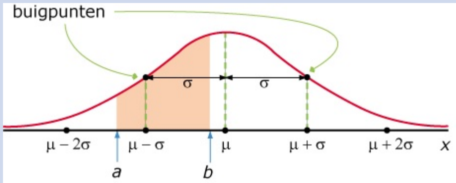
b Maak dan een schets van deze normale verdelingen. Let vooral goed op de correcte schaalverdeling op de lengte-as.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Symmetrische verdelingen met de vorm van een klok laten zich goed beschrijven door de centrummaat het **gemiddelde** en de spreidingsmaat de **standaardafwijking** of **standaarddeviatie**.

Die symmetrische verdeling noem je **normale verdeling**.



Figuur 4.8

In deze normale verdeling zie je het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ aangegeven.

Je berekent de standaardafwijking σ zo:

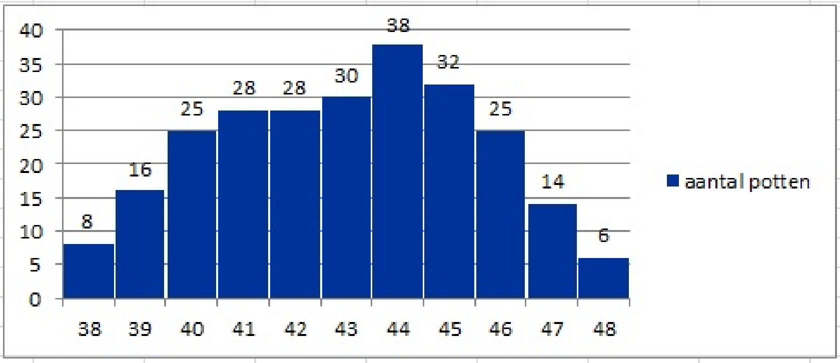
- Je bepaalt het gemiddelde.
- Dan bepaal je van elke waarde van de variabele het verschil met het gemiddelde, dat is de **deviatie** van die waarde.
- Al die deviaties kwadrateer je om negatieve afwijkingen te voorkomen.
- Van die kwadraten van de deviaties bereken je het gemiddelde. Het getal dat je dan krijgt, heet de **variantie** van de verzameling cijfers.
- De standaardafwijking is de wortel uit de variantie.

Elke normale verdeling wordt bepaald door twee getallen: het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ. De buigpunten van de kromme zitten precies één standaardafwijking $(1 \cdot \sigma)$ van de symmetrieas af.

Voorbeeld 1

Van 250 potten met augurken (uitlekgewicht 370 gram) is geteld hoeveel augurken de potten bevatten. Van het resultaat zie je een tabel en een staafdiagram.

aantal augurken	aantal potten
38	8
39	16
40	25
41	28
42	28
43	30
44	38
45	32
46	25
47	14
48	6
	250



Figuur 4.9

Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het aantal augurken per pot.

Antwoord

In de praktijk bereken je dit met Excel of met de grafische rekenmachine. Ook de grafische rekenmachine kan met zo'n frequentietabel het gemiddelde en de standaardafwijking berekenen. Deze uitwerking is bedoeld om je nog een keer te laten zien welke stappen je handmatig uitvoert om de standaardafwijking σ te krijgen.

Bekijk de tabel. Let daarbij goed op het meewegen van de frequenties.

aantal augurken	aantal potten			
A	*f*	*A* * *f*	(*A* - *μ*)^2	(A - *μ*)^2 * *f*
38	8	304	25	200
39	16	624	16	256
40	25	1000	9	225
41	28	1148	4	112
42	28	1176	1	28
43	30	1290	0	0
44	38	1672	1	38
45	32	1440	4	128
46	25	1150	9	225
47	14	658	16	224
48	6	288	25	150
	250	10750		1586
μ =	10750 / 250 =	43		
var =	1586 / 250 =	6,344		
σ =		2,52		

Tabel 4.3

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Laat met een berekening zien hoe het gemiddelde μ wordt berekend.

b Bij het berekenen van de variantie wordt van elk aantal augurken het kwadraat van het verschil met het gemiddelde (de deviatie) berekend. Laat zien dat de waarde 39 inderdaad 16 wordt.

c Waarom is de laatste kolom in de tabel $(A - \mu)^2 \cdot f$ nodig?

d Hoe wordt de standaardafwijking σ berekend? Controleer die berekening.

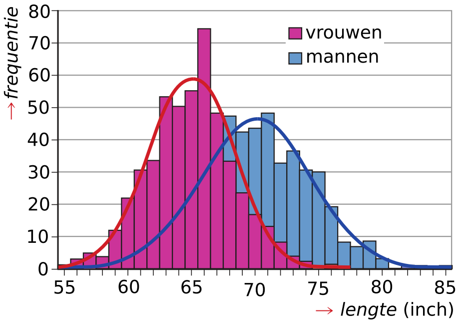
Opgave 7

In **Uitleg 2** kwam je de verdeling tegen van de lengtes van de vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf. Bekijk de dataset **Statistiek Bijenkorf 1947** en zoek daarin de lengtes van deze vrouwen op.
Bereken μ en σ met behulp van Excel.

Voorbeeld 2

Je ziet een verdeling van de lengtes van een groep mannen en ook een verdeling van de lengtes van een groep vrouwen. De lengtes zijn gegeven in inches.

Schat zowel van de mannen als van de vrouwen de gemiddelde lengte en de bijbehorende standaardafwijking. Geef je antwoorden in gehele inches.



Figuur 4.10

Antwoord

Bekijk de twee geschetste normale verdelingen en schat hun buigpunten.

Voor de mannen geldt:

- De gemiddelde lengte is ongeveer 70 inches.
- De bijbehorende standaardafwijking is ongeveer 70–65 = 5 inches.

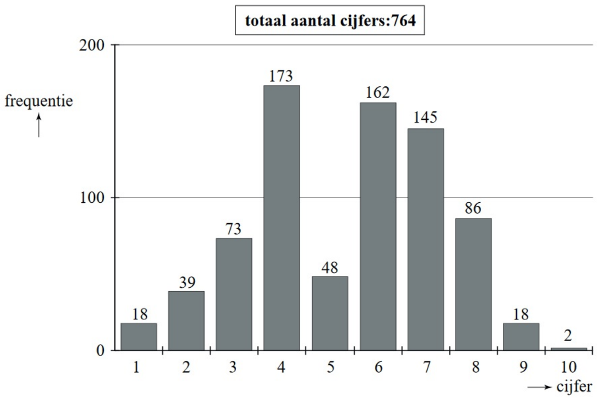
Voor de vrouwen geldt:

- De gemiddelde lengte is ongeveer 65 inches.
- De bijbehorende standaardafwijking is ongeveer 65–61 = 4 inches.

Opgave 8

In januari 2008 verscheen er in de NRC een artikel over de becijfering van een tentamen Recht. In de figuur zie je de verdeling van de cijfers voor dat tentamen.

De schrijvers van het artikel waren erg kritisch.



Figuur 4.11

a Wat is opvallend aan deze verdeling van cijfers?

b Het gemiddelde is 5,37. Bereken de standaardafwijking in twee decimalen nauwkeurig.

c De schrijvers van het artikel verwachtten een normale verdeling. Schets de verdeling die zij voor ogen hadden, met gemiddelde 5,4 en standaardafwijking 1,9.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak)

Verwerken

Opgave 9

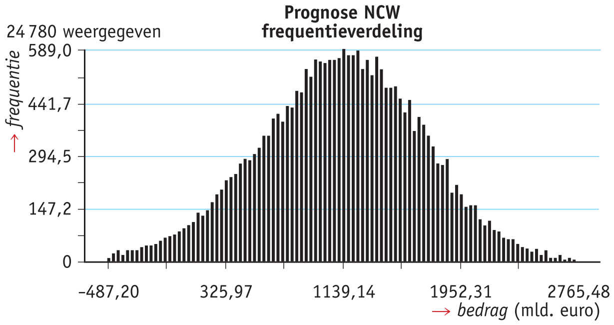
In een grote dataset worden de twee grootste uitschieters naar boven weggestreept.

a Beredeneer wat de gevolgen zijn voor de drie centrummaten.

b Beredeneer wat de gevolgen zijn voor de drie spreidingsmaten.

Opgave 10

In een kamerstuk van de Tweede Kamer staat de volgende frequentieverdeling. Deze verdeling benadert de normale verdeling. Op de horizontale as staat het bedrag in miljarden euro's. Maak uit de grafiek een schatting van het gemiddelde en de standaarddeviatie.



Figuur 4.12

Opgave 11

De cijfers bij een toets wiskunde van dertig leerlingen worden voor alle leerlingen met een 0,5 verhoogd. De cijfers zijn (in de oude situatie) normaal verdeeld met gemiddelde 5,3 en standaardafwijking 1,2.
Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de cijfers wiskunde na de verhoging.

Opgave 12

Voor deze opgave kun je het beste met Excel rekenen, maar met de grafische rekenmachine lukt het ook.

Je ziet de tabel met mouwlengtes van de 5001 vrouwen uit de dataset **Statistiek Bijenkorf 1947**.

a Bereken de gemiddelde mouwlengte μ en de standaarddeviatie σ.

b Hoeveel procent van de mouwlengtes zit tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$?

c Hoeveel procent van de mouwlengtes zit tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$?

mouw-lengte	frequentie
49	3
50	11
51	22
52	53
53	89
54	163
55	250
56	405
57	519
58	660
59	578
60	653
61	560
62	421
63	260
64	159
65	106
66	52
67	18
68	15
69	3
70	0
71	1

Tabel 4.4

Opgave 13

Bekijk de dataset met de gegevens over de **Sportprestaties van 74 brugklassers**. De gesprongen afstand is een variabele D. Werk met Excel.

a Bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie van D.

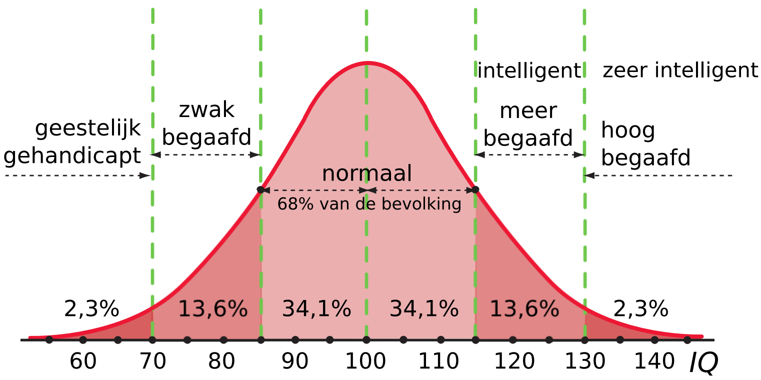
b Hoeveel procent van de prestaties zit onder het gemiddelde?

c Hoeveel procent van de resultaten zit tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$?

Toepassen

Opgave 14: Intelligentiequotiënt

In het begin van de vorige eeuw werd er veel waarde gehecht aan het zogenoemde ‘intelligentiequotiënt’ van met name kinderen. In 1904 werd de Franse psycholoog Alfred Binet door de Franse overheid gevraagd een test te ontwerpen om ‘slimme’ van ‘domme’ kinderen te onderscheiden.
Binet ontwierp een intelligentietest waarmee hij de intelligentieleeftijd van een kind vaststelde. Wanneer de intelligentieleeftijd wordt gedeeld door de werkelijke leeftijd, en met 100 vermenigvuldigd, dan krijg je het IQ. Dit IQ is normaal verdeeld met een gemiddelde dat op 100 is gesteld. Zo is de Stanford-Binet Intelligentieschaal ontwikkeld.



Figuur 4.13

a Welk gemiddelde en welke standaardafwijking heeft het IQ volgens de Stanford-Binet Intelligentieschaal?

b Hoeveel procent van de mensen heeft een minder dan normale intelligentie?

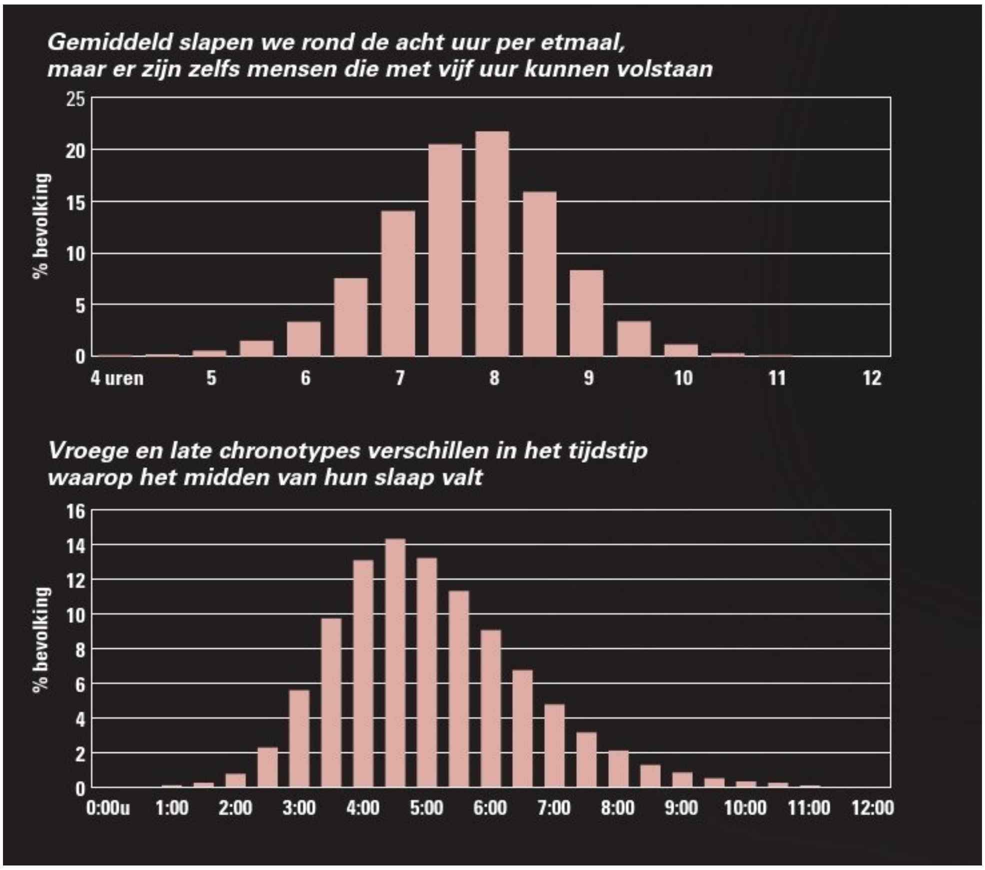
c Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van boven de 145?

d Welk IQ heeft de intelligentste 10% van de bevolking?

Testen

Opgave 15

Hier zie je twee staafdiagrammen die informatie geven over het aantal uren slaap en het tijdstip van in slaap vallen van de Nederlanders.



Figuur 4.14

a Welke van deze twee frequentieverdelngen kun je het beste benaderen met een normale verdeling?

b Schat gemiddelde μ en standaardafwijking σ van dit diagram.

c Hoeveel procent van de bevolking kan volstaan met minder slaap dan $\mu - \sigma$?

d Hoeveel procent van de bevolking moet meer dan $\mu + \sigma$ slapen?

(bron: slaapmlb.blogspot.nl)

Practicum

Als je met niet al te grote datasets te maken hebt, kun je met de **grafische rekenmachine** de gegevens verwerken, analyseren en presenteren. Hoe dat gaat zie je in de practica:

- **Statistiek en de TI84**
- **Statistiek en de TInspire**
- **Statistiek en de Casio fx-CG50**
- **Statistiek en de HPprime**
- **Statistiek en de NumWorks**

Met **Excel** (een spreadsheetprogramma, een rekenblad) werken is bij statistiek eigenlijk onontbeerlijk. Je kunt er grote hoeveelheden gegevens in kwijt. Die gegevens kun je ordenen en presenteren. Bekijk de eerste vier delen van het practicum:

- **Data presenteren**

Je kunt ook data analyseren en presenteren met de app 'Data analyse' van **VUstat**. Daarin kun je eigen databestanden vanuit Google Drive toevoegen, maar er zijn ook diverse datasets beschikbaar. Ga hiervoor naar:

- **Data analyse VUstat**

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van het onderwerp **Data verwerken** doorgewerkt. Het is nu tijd om een overzicht over het geheel te krijgen.

Begrippenlijst

- discrete, continue variabele — dotplot — klassenindeling, klassenbreedte, klassenmidden
- centrummaten: gemiddelde, modus en mediaan — spreidingsmaten: spreidingsbreedte en interkwartielafstand — boxplot
- symmetrische, scheve, meertoppige verdelingen — cumulatieve frequenties of somfrequenties — cumulatief frequentiepolygoon
- de standaardafwijking of standaarddeviatie — de normale verdeling

Activiteitenlijst

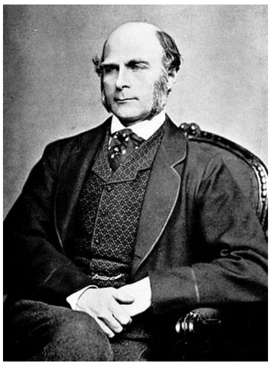
- discrete en continue variabelen van elkaar onderscheiden — dotplots interpreteren — klassenindelingen maken
- frequentieverdelingen samenvatten met behulp van centrummaten en spreidingsmaten — een boxplot tekenen en interpreteren
- frequentieverdelingen typeren — een cumulatief frequentiepolygoon tekenen en interpreteren
- de standaardafwijking berekenen — gemiddelde en standaardafwijking schatten vanuit een gegeven normale verdeling

Achtergronden

Met de toepassing van de kansrekening op het verzekeringswezen ontstond ook voor het eerst de behoefte tot het bijhouden van bevolkingsgegevens. En zo werd een klimaat geschapen voor de ontwikkeling van de statistiek. In 1662 publiceerde de Brit John Graunt zijn ‘Natural and Political Observations’, waarin een eerste statistische analyse voorkwam van de wekelijkse lijst van sterfgevallen in en om London, de zogenaamde ‘Bills of mortality’. En in 1693 kwam de astronoom Edmond Halley met een levensverwachtingstabel gebaseerd op de sterftecijfers van de stad Breslau.

In de achttiende eeuw zette zich deze statistische traditie verder voort. Daarnaast vonden in de kansrekening de nodige ontwikkelingen plaats: de normale verdeling werd bedacht door de Britse wiskundige De Moivre en door de Belg Adolphe Quetelet in het begin van de negentiende eeuw toegepast op de sociale statistiek. De echte start van de **mathematische statistiek** is echter toe te schrijven aan Francis Galton en vond plaats aan het einde van de negentiende eeuw.

Francis Galton (1822—1911) was een neef van Charles Darwin, de bioloog die de evolutietheorie opzette. Hij paste statistische methoden toe bij de analyse van sociale gegevens en erfelijke eigenschappen. Hij dacht dat de normale verdeling de mate van variatie van fysieke eigenschappen aangaf. Hij werkte met het begrip **standaarddeviatie** als maat voor de spreiding van de normale verdeling. In tegenstelling tot Quetelet dacht hij niet zozeer in termen van 'foute afwijkingen van het juiste gemiddelde', maar als noodzakelijke verscheidenheid in het licht van de evolutietheorie. Galton paste zijn statistische theorieën vooral toe op de eugenetica, de studie van erfelijke eigenschappen.

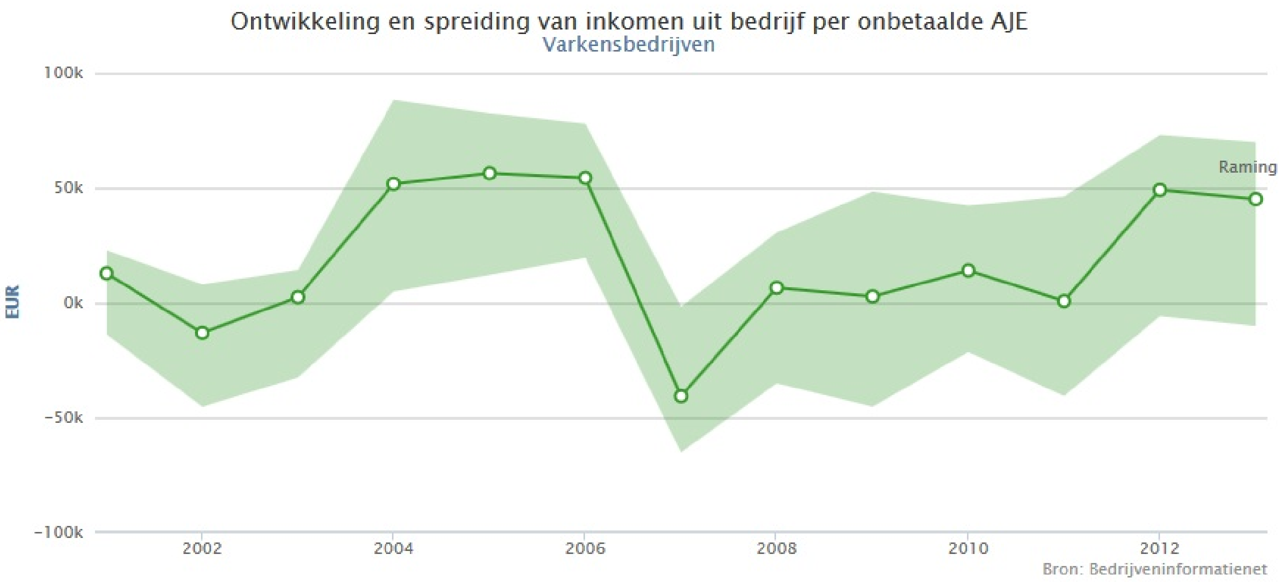


Figuur 5.1

Testen

Opgave 1

Bekijk de grafiek over ontwikkeling en spreiding van inkomen uit varkensbedrijven.
De groene lijn stelt het gemiddelde inkomen voor. De groene strook stelt de groep van 30% bedrijven voor die onder of boven het gemiddelde zitten. Een arbeidskracht die per jaar 2000 uur of meer werkt, wordt gezien als 1 arbeidsjaareenheid (AJE).



Figuur 5.2

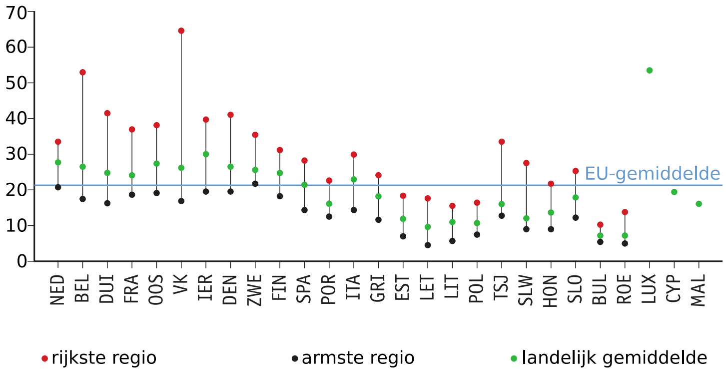
a Bekijk de grafiek in het jaar 2012. Schat hoeveel procent van de varkensbedrijven een negatief inkomen had. Verwacht men voor 2013 dat dit percentage toe- of afneemt?

b Schat hoeveel procent van de bedrijven in 2007 een negatief inkomen had.

c Het verschil in inkomen tussen de 30%-bovengrens en de 30%-ondergrens is hier de spreidingsmaat. Schat de spreiding in 2000, 2005 en 2010.

Opgave 2

Bekijk het diagram over de regionale spreiding van het bruto regionaal product per inwoner. Het betreft regio's in Europa. Het rode (bovenste) bolletje van de drie bolletjes geeft de rijkste regio per land, het groene (middelste) bolletje de gemiddelde regio, het zwarte (onderste) bolletje de armste regio. Op de verticale as vind je bedragen in duizenden euro/jaar.



Figuur 5.3

a Welke spreidingsmaat zie je hier weergegeven?

b In welk land is de spreiding het grootst?

c Waarom zeggen deze verschillen in dit diagram niets over de verschillen tussen de inwoners in een land?

d Waarom is van Luxemburg, Malta en Cyprus alleen het landelijk gemiddelde gegeven?

Opgave 3

Uit onderzoek van het gemengde boerenbedrijf bleek het houden van kippen een belangrijke rol te spelen bij het tot stand komen van het inkomen van deze boeren. Daarom werd de boeren gevraagd het aantal kippen op hun bedrijf op te geven.

aantal kippen	aantal bedrijven
1 - 10	5
11 - 20	12
21 - 30	19
31 - 40	24
41 - 50	33
51 - 60	52
61 - 70	69
71 - 80	75
81 - 90	108
91 - 100	120
101 - 110	123
111 - 120	101
121 - 130	85
131 - 140	79
141 - 150	60
151 - 160	43
161 - 170	21
171 - 180	9
181 - 190	4
191 - 200	2

Tabel 5.1

a Waarom kun je geen dotplot maken van deze gegevens?

b Schat de centrummaten mediaan en gemiddelde. Onderbouw je schatting.

c Schat de drie spreidingsmaten. Onderbouw je schatting.

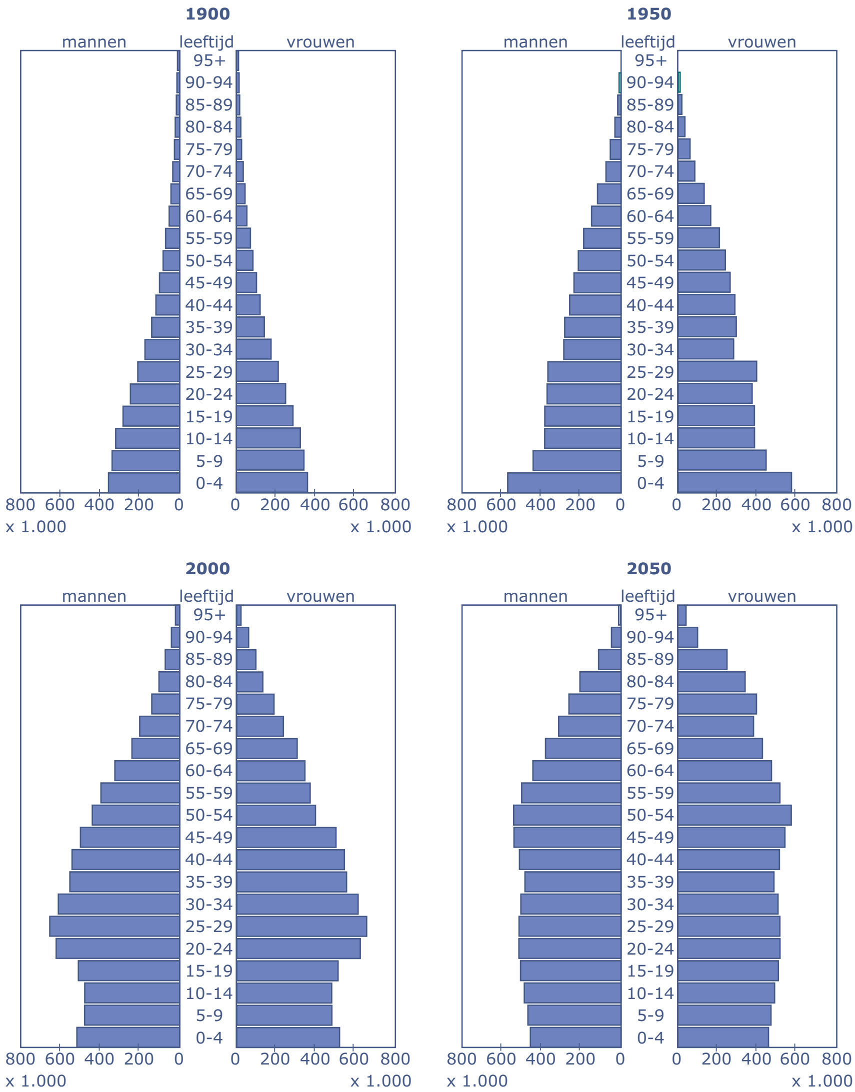
d Hoeveel procent van de bedrijven heeft meer dan 160 kippen?

e Hoeveel procent van de bedrijven heeft minder dan 41 kippen?

f Hoe kun je de verdeling karakteriseren zonder er een diagram van te maken?

Opgave 4

Bekijk de vier leeftijdsdiagrammen van Nederland.



Bron: Bevolkingsprognose Midden Variant

Figuur 5.4

a Wat voor soort diagrammen zijn dit?

b Hoeveel kinderen van 0 – 4 jaar waren er naar schatting in 1900, 1950 en 2000?

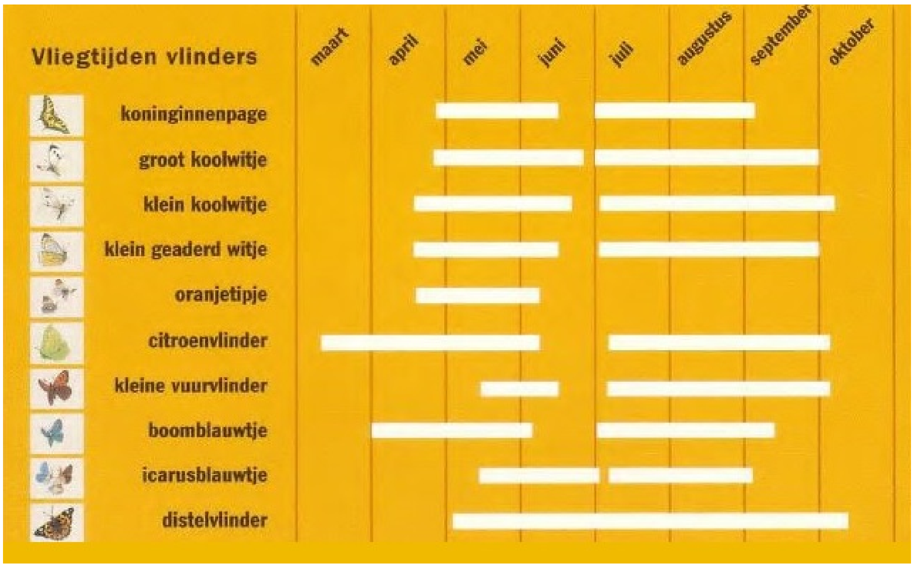
c Waar vind je de kinderen die in 1950 in de klasse 0 – 4 jaar zaten terug in de piramides van 2000 en 2050?

d Noem in elk van de vier diagrammen de modale klasse. Wat valt je op?

e Hoe onderbouw je de uitspraak met getallen dat het percentage 85-plussers sinds 1900 flink is toegenomen en nog verder zal toenemen?

Opgave 5

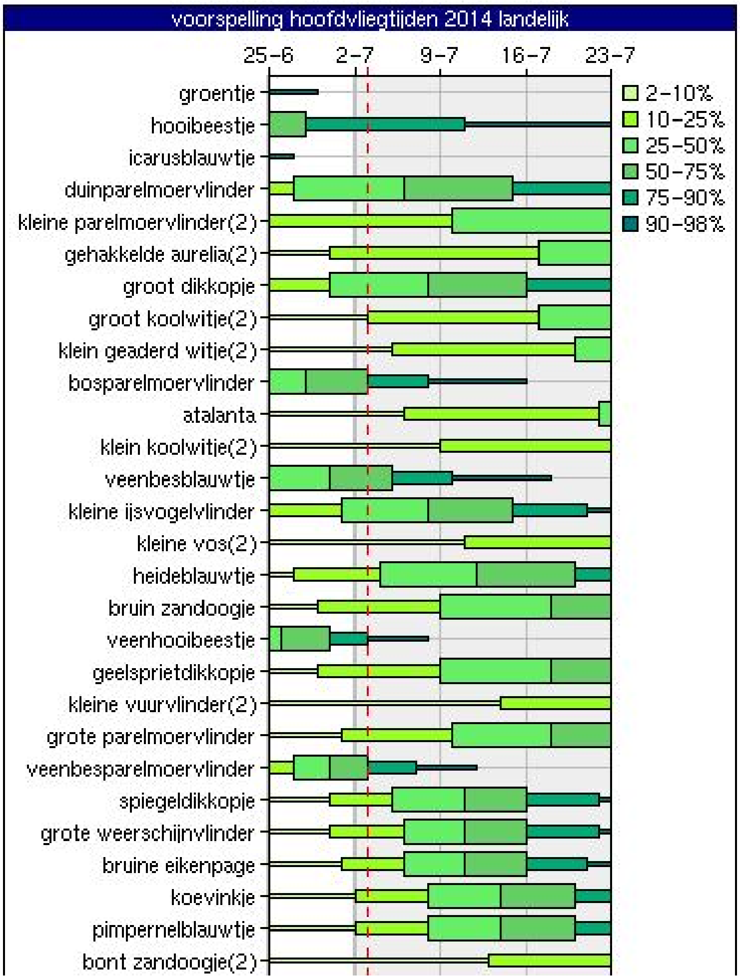
De Vlinderstichting geeft op verschillende manieren informatie over vlinders. Bekijk de tabel met vliegtijden van de meest voorkomende vlinders.



Tabel 5.2

De Vlinderstichting doet op haar site een voorspelling over de vliegtijd van vlinders die binnenkort moeten gaan vliegen. Per soort (en per generatie) wordt middels een tijdbalk gepresenteerd wanneer de hoofdvliegtijd waarschijnlijk zal beginnen. Het eerste (smalste) deel van de balk start op de dag waarop wordt verwacht dat 2% van de totale generatie gaat vliegen en eindigt op 10%.

De zes volgende balken staan voor respectievelijk 2 - 10%, 10 - 25%, 25 - 50%, 50 - 75%, 75 - 90% en 90 - 98% van de populatie.



Figuur 5.5

a Voor wie is, denk je, de tabel bedoeld? En voor wie de tijdbalk?

b De vorm van de voorspellingen lijkt op die van boxplots.
Welk verschil is er met boxplots?

c De tabel geeft soms twee periodes aan bij de meest voorkomende vlinders. Wat is de betekenis daarvan? En hoe kun je dat terugzien in de tijdbalk?

d Wat is de betekenis van de box in de tijdbalk van de duinparelmoervlinder?

e Vergelijk de vliegtijden van het icarusblauwtje in de tabel met de tijdbalk. Wat valt je op? Wat zou dat kunnen betekenen?

Toepassen

Opgave 6: Reactiesnelheden

Verzin een manier om iemands reactiesnelheid te meten. Maak vervolgens een histogram van de verdeling van zijn reactiesnelheden. Doe dit voor meerdere personen en zet de gegevens in de computer.

a Maak voor een aantal personen een histogram van de reactiesnelheden.

b Beschrijf de vorm van deze histogrammen.

c Bereken de centrummaten en spreidingsmaten die zinvol zijn en leg uit waarom ze dat zijn.

2

Lineaire verbanden

2.1 Recht evenredig

Inleiding

Nogal wat variabelen die we in het dagelijks leven tegenkomen, zijn recht evenredig met een andere variabele. In dit onderdeel leer je wat recht evenredig zijn inhoudt en hoe je een recht evenredig verband tussen variabelen kunt beschrijven met formules en weergeven met grafieken.

Je leert in dit onderwerp

- recht evenredige verbanden herkennen;
- een formule bij een recht evenredig verband opstellen;
- een grafiek bij een recht evenredig verband maken;
- berekeningen bij een recht evenredig verband uitvoeren.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij formules, ook met de grafische rekenmachine.

Verkennen

Opgave V1

In welke van de volgende gevallen is het verband tussen beide variabelen recht evenredig? Probeer er steeds een mogelijke formule bij te bedenken.

a Je beltegoed afhankelijk van je gebelde minuten bij een prepaid abonnement.

b De omtrek van een cirkel afhankelijk van de diameter.

c De lengte van een stuk kaars dat is opgebrand afhankelijk van de brandtijd bij een zuiver cilindervormige kaars.

d De lengte van een stuk kaars afhankelijk van de brandtijd bij een zuiver cilindervormige kaars.

e De temperatuur van het water afhankelijk van de diepte onder water.

f Het bedrag dat je betaalt voor het kopen van dollars met euro's.

Uitleg

Een winkelier verkoopt een artikel voor € 12,50 per stuk.

De totale opbrengst TO in euro's bereken je uit het aantal artikelen q dat hij verkoopt. De formule daarvoor is:

$TO = 12{,}50 \cdot q$

Je ziet de grafiek die hierbij hoort. Deze grafiek

- is een rechte lijn en
- gaat door $(0{,}0)$.

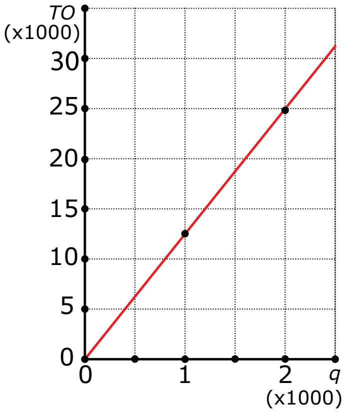
Bij zo'n grafiek en formule geldt ook altijd:

- De tabel bij zo'n formule en grafiek is een verhoudingstabel.

Bij zo'n formule, grafiek en tabel geldt dus:

- Als je niets verkoopt, heb je geen opbrengst.
- Als je 2 keer zo veel verkoopt, heb je ook 2 keer zoveel opbrengst.
- Als je 3 keer zo veel verkoopt, heb je ook 3 keer zoveel opbrengst, enzovoort.

Zo'n verband tussen TO en q noem je een recht evenredig verband.



Figuur 1.1

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. De prijs van elektriciteit is op een zeker moment € 0,22 per kWh (kilowattuur).

a Is het bedrag dat je betaalt voor het verbruik van elektriciteit, recht evenredig met het aantal kWh dat je verbruikt?

b Welke formule geldt voor de kosten van het elektriciteitsverbruik E afhankelijk van het aantal verbruikte kWh a?

c Je verbruikt gemiddeld met een elektrische auto 15 kWh per 100 km. Zijn in dit geval de kosten voor het energieverbruik recht evenredig met het aantal gereden kilometers k?

d Welke formule geldt voor het verband tussen E en k?

e Zijn de totale kosten voor een auto recht evenredig met het aantal gereden kilometers? Geef een toelichting.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

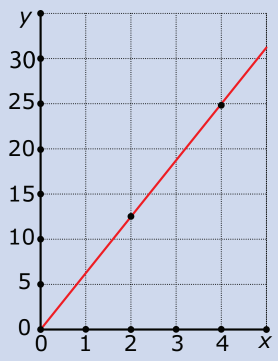
Bekijk de applet: Recht evenredig

Als een verband tussen x en y **recht evenredig** is, dan gelden de volgende eigenschappen:

- De formule kan worden geschreven als: $y = a \cdot x$.
- De grafiek is een rechte lijn door $(0,0)$.
- De tabel is een verhoudingstabel.
- Als x bijvoorbeeld 2 keer zo groot wordt, wordt y ook 2 keer zo groot; dit geldt voor alle waarden van x en y.

Als een van deze eigenschappen geldt, gelden de andere eigenschappen ook. Als een van deze eigenschappen niet geldt, gelden de andere eigenschappen ook niet.

- a noem je de **evenredigheidsconstante**.
- a is ook het **hellingsgetal** van de grafiek die erbij hoort.



Figuur 1.2

Voorbeeld 1

Een fietser rijdt met een constante snelheid van A naar B. Op tijdstip $t = 0$ start hij bij A en 12 minuten later heeft hij precies 5 km afgelegd. Met hoeveel kilometer per uur fietst hij? Geef een formule voor de afgelegde afstand a vanaf A in kilometers afhankelijk van de tijd t in uren.

Antwoord

Bij een constante snelheid en afstand 0 op $t = 0$, hoort altijd de berekening:

afgelegde afstand = snelheid · tijd, dus: $a =$ snelheid $\cdot t$.

Dit is de formule van een recht evenredig verband tussen a en t, dus de snelheid is de evenredigheidsconstante. Deze kun je uitrekenen door a te delen door t:

snelheid $= \frac{5}{12}$ km/min $= 25$ km/h.

De formule wordt: $a = 25 \cdot t$.

Opgave 2

Een auto rijdt met een constante snelheid van 120 km/h over de snelweg van A naar B. Op $t = 0$ vertrekt de auto uit A. Zijn afgelegde afstand ten opzichte van A is a km.

a Geef een formule voor a als functie van t (uur).

b Hoe groot is de snelheid van de auto in km/min?

c Wat is de betekenis van de evenredigheidsconstante hier?

d Hoe ziet de formule voor a eruit als a in meters en t in seconden wordt gemeten?

e Hoort bij een twee keer zo grote waarde van t ook een twee keer zo grote waarde van a? Licht je antwoord toe.

Opgave 3

Een auto rijdt met een constante snelheid van 120 km/h over de snelweg van A naar B. B ligt 60 km van A af. Op $t = 0$ bevindt de auto zich in A. Zijn afgelegde afstand ten opzichte van B is b kilometers.

a Geef een formule voor het verband tussen b en t (uur).

b Is b recht evenredig met t? Hoe zie je dit aan de grafiek van b als functie van t?

c Hoe ziet de formule voor b eruit als b in meters en t in seconden wordt gemeten?

d Hoort bij een twee keer zo grote waarde van t ook een twee keer zo grote waarde van b, bij een drie keer zo grote waarde ook, enzovoort? Licht je antwoord toe.

Voorbeeld 2

Wij (Nederlanders) gebruiken meestal de temperatuurschaal van Celsius. Wetenschappers gebruiken vaak de temperatuurschaal van Kelvin. Ook worden andere temperatuurschalen nog steeds gebruikt:

- De temperatuurschaal van Réamur (in gebruik bij de verwerking van suiker): het aantal graden Réamur bereken je door het aantal graden Celsius te delen door 10 en dan te vermenigvuldigen met 8.
- De temperatuurschaal van Fahrenheit (in gebruik in de Verenigde Staten): het aantal graden Fahrenheit bereken je door het aantal graden Celsius te delen door 10, dan te vermenigvuldigen met 18 en er vervolgens nog 32 bij te tellen.

Laat zien dat het aantal graden Réamur R wel recht evenredig is met het aantal graden Celsius, maar het aantal graden Fahrenheit (F) niet.

Antwoord

Om te laten zien dat een verband wél recht evenredig is, moet je een formule maken. Voor het omrekenen van °C naar °R kun je uit de gegevens de formule $R = 0{,}8 \cdot C$ afleiden. Dit is een formule van een recht evenredig verband.

Om te laten zien dat iets niet waar is, geef je een tegenvoorbeeld. Voor het omrekenen van C naar F, onderzoek je of er bij 0 °C ook 0 °F uitkomt. Dat is niet zo, dus het verband is niet recht evenredig. Een andere aanpak is: controleren of er bijvoorbeeld bij 200 °C twee zo veel uitkomt als bij 100 °C.

Opgave 4

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

a Licht toe hoe de formule $R = 0{,}8C$ is ontstaan.

b Als C twee keer zo groot wordt, geldt dit dan ook voor R?

c Uit de gegevens kun je de formule $F = 1{,}8 \cdot C + 32$ afleiden. Licht toe hoe deze formule ontstaat.

d Als C twee keer zo groot wordt, geldt dit dan ook voor F? Licht je antwoord toe.

Opgave 5

Voor de temperatuurschaal van Kelvin geldt dat het aantal kelvin te berekenen is door 273 bij het aantal graden Celsius op te tellen.

a Welke formule geldt voor het omrekenen van het aantal graden Celsius C naar het aantal kelvin K?

b Is K recht evenredig met C? Licht je antwoord toe.

Verwerken

Opgave 6

Bij welke van de formules is y recht evenredig met x? Geef in die gevallen de evenredigheidsconstante.

a $y = 3x + 1$

b $y = 3x$

c $y = x + 3$

d $y = \frac{x}{3}$

e $y = \frac{1}{3}x$

f $x + 3y = 0$

Opgave 7

Leg uit in welke van de situaties er sprake is van een recht evenredig verband.

a Uien betaal je per kilogram. Is het bedrag dat je betaalt voor een hoeveelheid uien recht evenredig met het gewicht?

b Uien betaal je per kilogram. Is de prijs van een hoeveelheid uien recht evenredig met het aantal uien?

c Is de afgelegde weg recht evenredig met de tijd als je met een constante snelheid rijdt?

d Is de afgelegde weg recht evenredig met de tijd als een auto uit stilstand optrekt?

e Is de lengte van een rechthoek recht evenredig met de breedte als het gaat om gelijkvormige rechthoeken?

f Is de lengte van een rechthoek recht evenredig met de breedte als het gaat om rechthoeken met dezelfde omtrek?

Opgave 8

Een loodgieter rekent € 30,00 voorrijkosten en daarbovenop rekent hij € 22,50 per gewerkt uur.

a Leg uit waarom het verband tussen zijn arbeidsloon en het aantal gewerkte uren recht evenredig is.

b Leg uit waarom het verband tussen de totale kosten die hij in rekening brengt, en het aantal gewerkte uren niet recht evenredig is.

c Welke formule geldt voor zijn totale kosten TK afhankelijk van het aantal gewerkte uren u?

Opgave 9

De marathon van Rotterdam is een slijtageslag. Het laatste stuk is een vrijwel vlak stuk. Vanaf de Erasmusbrug moet dan nog een lus met een lengte van zes km worden gelopen. Een deelnemer begint na drie uur lopen aan het laatste stuk. Hij loopt het laatste stuk met een vrijwel constante snelheid. Na drie kwartier loopt hij over de finish op de Coolsingel en heeft hij totaal 42 km afgelegd.

a Met welke snelheid heeft hij het laatste deel van de tocht gelopen?

b Stel, t is de tijd in uren en $t = 0$ op het moment dat deze deelnemer aan het laatste stuk van de marathon van Rotterdam begint. Verder is a de afgelegde afstand. Welke formule voor a geldt voor het laatste deel van de loop van deze deelnemer?

Opgave 10

Fietser 1 gaat met een constante snelheid van 20 kilometer per uur (km/h) van A naar B. Fietser 2 gaat met een constante snelheid van 25 km/h van B naar A. De afstand tussen A en B is voor beide fietsers 150 kilometer. a is de afstand tot A in kilometer en t is de tijd in uren.

a Teken in een a,t-assenstelsel de grafiek van beide fietstochten.

b Stel voor beide fietsers een passende formule op voor het verband tussen a en t.

c Bij welke fietser is a recht evenredig met de tijd t?

d Bepaal met de grafische rekenmachine het tijdstip waarop beide fietsers elkaar passeren.

Opgave 11

Vroeger reden auto's op benzine en soms op diesel.

Ga ervan uit dat benzine € 1,82 per liter kost en dat je met benzine gemiddeld 1 op 12 (1 liter per 12 kilometer) rijdt.
Ga er ook van uit dat diesel € 1,51 per liter kost en dat je met diesel gemiddeld 1 op 25 rijdt. Het aantal kilometers dat iemand in een jaar aflegt is a.

a Stel een formule op voor de brandstofkosten K (in euro) van een auto die op benzine rijdt, afhankelijk van het aantal afgelegde kilometers in een jaar.

b Stel een formule op voor de brandstofkosten K (in euro) van een auto die op diesel rijdt, afhankelijk van het aantal gereden kilometers in een jaar.

c Een auto die op diesel rijdt, is duurder in aanschaf en bovendien duurder qua wegenbelasting dan eenzelfde auto op benzine. Als dit betekent dat de auto op diesel per jaar € 800,00 duurder is, hoeveel kilometer per jaar moet je dan minimaal rijden als je een dieseluitvoering wilt kopen?

Toepassen

Opgave 12: Kolibries

Figuur 1.3

De kolibrie kan door de zeer snelle vleugelslag (gemiddeld zo'n 50 slagen per seconde, afhankelijk van de grootte van de vogel) in de lucht stil blijven hangen. Door deze snelle vleugelslag kan de kolibrie als enige vogel ook achteruit vliegen. Deze vogel kan zelfs recht omhoog en recht omlaag vliegen. Kolibries worden daarom de ‘helikopters’ onder de vogels genoemd. De jongen worden gedurende de eerste vier weken van hun leven 140 keer per dag door de vrouwtjeskolibrie gevoerd met nectar en insecten. De mannetjeskolibrie bemoeit zich niet met zijn kroost. De voedervluchten van de vrouwtjeskolibrie duren gemiddeld $2{,}5$ minuut. We gaan er voor het gemak van uit dat de vrouwtjeskolibrie tijdens de voederperiode al haar vliegtijd besteedt aan het voederen van haar jongen.

a Is het aantal vleugelslagen die de vrouwtjeskolibrie maakt, evenredig met het aantal vliegminuten?

b Stel een formule op die het verband weergeeft tussen v (het aantal vleugelslagen van de vrouwtjeskolibrie in de voederperiode) en m (het aantal vliegminuten).

c Bereken het aantal vleugelslagen dat een vrouwtjeskolibrie in de voederperiode per dag maakt.

Opgave 13: Stadswandeling

Bij een stadswandeling in Amsterdam gebruikt Nigel een stadskaart met een schaal van $1 : 20000$.

a Is het werkelijke aantal meters recht evenredig met het aantal centimeters op de stadskaart?

b Stel een formule op die het verband weergeeft tussen w (het werkelijke aantal meters) en k (het aantal centimeter op de kaart).

c De afstand van station Amsterdam Centraal naar het Museumplein is op de kaart 16 cm hemelsbreed. Nigel weet dat hij daar nog 30% bij op moet tellen om aan de loopafstand te komen. Hij loopt met een snelheid van 7 kilometer per uur. Bereken in minuten nauwkeurig hoeveel tijd Nigel nodig heeft om van Amsterdam Centraal naar het Museumplein te lopen.

Testen

Opgave 14

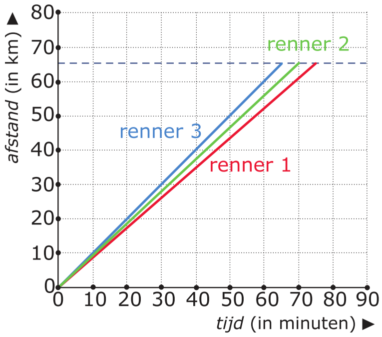
In de Tour de France wordt een aantal keren een tijdrit gereden. In deze grafieken vind je gegevens over een tijdrit van 65 km.

a Welke renner heeft de tijdrit gewonnen?

b Bereken van iedere renner de gemiddelde snelheid. Rond waar nodig af op één decimaal nauwkeurig.

c Schrijf voor elke grafiek een passende formule voor het verband tussen a in kilometers en t in uren.

d Waarom kunnen deze grafieken nooit het werkelijke verloop van deze tijdrit correct beschrijven?



Figuur 1.4

Opgave 15

In een inkjetprinter gaan inktpatronen. Zo'n inktpatroon kost € 42,50. Je kunt er (gemiddeld) 500 afdrukken mee maken.

a Welk bedrag ben je aan inkt kwijt als je 1800 afdrukken per jaar maakt?

b Met welke formule kun je de jaarlijkse kosten voor inkt berekenen?

c Zijn de jaarlijkse kosten voor inkt recht evenredig met het aantal afdrukken? Zo ja, hoe groot is dan de evenredigheidsconstante?

d Zijn de jaarlijkse kosten voor het werken met deze printer ook recht evenredig met het aantal afdrukken? Licht je antwoord toe.

2.2 Lineaire formules

Inleiding

Veel situaties die wij in het dagelijks leven tegenkomen, zijn te beschrijven als lineair verband tussen twee variabelen. In dit onderdeel leer je lineaire verbanden herkennen, er formules voor opstellen en deze formules te gebruiken om grafieken te maken en berekeningen uit te voeren.

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- een formule bij een in woorden beschreven lineair verband opstellen;
- de grafiek van een lineair verband tekenen;
- berekeningen met lineaire verbanden uitvoeren.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij formules;
- werken met eenvoudige lineaire verbanden;
- de begrippen hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) en begingetal.

Verkennen

Opgave V1

De kosten voor het verbruik van leidingwater zijn in een bepaalde regio € 0,93 per kubieke meter (m$^{3)}$ en het vastrecht is € 62,00 per jaar. Hierbij past de formule $K = 0{,}93 \cdot a + 62$, waarin a het jaarverbruik (m^3) en K de jaarlijkse kosten zijn.

a Breng de grafiek van K als functie van a mooi in beeld op de grafische rekenmachine.

b In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag gebruikt. Zijn er jaren dat een huishouden in deze regio meer dan € 1000,00 aan water kwijt is?

Uitleg

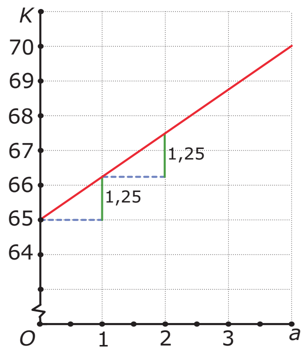
De kosten voor leidingwater zijn in een bepaalde regio € 1,25 per verbruikte kubieke meter en het vastrecht is € 65,00 per jaar. Hierbij past de formule:

$K = 1{,}25 \cdot a + 65$

waarin a het jaarverbruik (m^3) en K de jaarlijkse kosten.

Zelfs als je geen water verbruikt, betaal je € 65,00 vastrecht per jaar voor de aansluiting. Dus bij $a = 0$ hoort $K = 65$.

Vervolgens zorgt elke extra kubieke meter water die je verbruikt, voor een toename van K met $1{,}25$. Dit betekent dat elke toename van a met 1 een stijging van K met $1{,}25$ tot gevolg heeft. Zie de figuur. De grafiek wordt daarom een rechte lijn en het getal $1{,}25$ bepaalt hoe steil die rechte lijn loopt.



Figuur 2.2

Je zegt dat er een lineair verband tussen a en K bestaat ('linea recta' betekent 'volgens een rechte lijn'). Het getal $1{,}25$ noem je het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt van de lijn.

In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag verbruikt. Dit betekent 45260 liter per persoon per jaar. Als een gemiddeld huishouden uit vier personen bestaat, dan is dit 181040 liter per jaar voor zo'n huishouden. Omgerekend naar kubieke meter is dit $181{,}04$ m^3 per jaar. Met behulp van de formule $K = 1{,}25 \cdot a + 65$ bereken je de kosten voor een gemiddeld huishouden in deze regio. Dit is € 291,30 per jaar.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. In een andere regio zijn de jaarlijkse kosten K voor het verbruik van water € 1,20 per m^3 met een vastrechtbedrag van € 70,00 per jaar.

a Welke formule beschrijft het verband tussen K en a, als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?

b Met hoeveel neemt K toe als a met 1 m^3 toeneemt?

c Wat betaal je in deze regio als je geen water verbruikt?

d Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 195 m^3 water. Hoeveel moeten ze dat jaar betalen?

e Bij welke vensterinstellingen van de grafische rekenmachine krijg je de grafiek van K zo in beeld dat voor een verbruik tot 300 m^3 de kosten zijn af te lezen uit de grafiek?

f Voor welke waarde van a geldt: $K = 250$? Licht je antwoord toe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

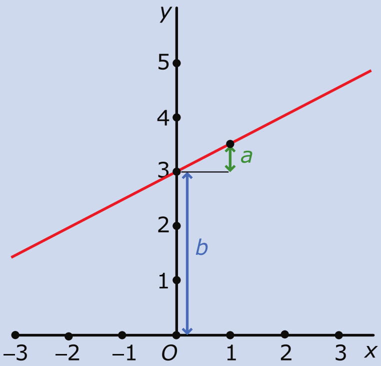
Bekijk de applet: Lineaire verbanden

Als er een **lineair verband** tussen y en x is, heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waarin:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname van y per stap van 1 van x;
- b het **begingetal**, de uitkomst bij $x = 0$.

Je zegt ook wel dat y een **lineaire functie** is van x.

De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0,b)$. Als je de waarde van x daarna met 1 verhoogt, neemt de uitkomst met a toe en als a negatief is, af. Het hellingsgetal a heet ook wel de **richtingscoëfficiënt**, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.



Figuur 2.3

Voorbeeld 1

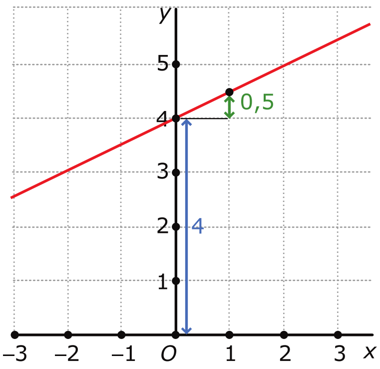
Bekijk de applet: Lineaire verbanden

Teken de grafiek bij het lineaire verband met de formule $y = 0{,}5x + 4$.

Antwoord

Er zijn twee manieren om dit te doen:

- Manier I: het begingetal is 4, dus de grafiek 'start' in $(0{,}4)$. Het hellingsgetal is $0{,}5$, dus vanaf het punt $(0{,}4)$ ga je elke keer dat de x-waarde met 1 toeneemt, $0{,}5$ omhoog om een nieuw punt te vinden. Dit betekent dat de grafiek ook door $(1; 4{,}5)$, $(2{,}5)$ en $(3; 5{,}5)$ gaat.
- Manier II: zoek twee punten van de grafiek.
  Bij $x = 0$ hoort $y = 4$.
  Bij $x = 6$ hoort $y = 7$.
  Trek de lijn door de twee bijbehorende punten $(0{,}4)$ en $(6{,}7)$.



Figuur 2.4

Opgave 2

Bekijk **Voorbeeld 1**.
Gegeven is een lineair verband $y_1 = -0{,}2x + 6$.

a Waaraan kun je zien dat de bijbehorende grafiek dalend is?

b Plot de grafiek en bepaal behalve het hellingsgetal ook de snijpunten met de assen.

c Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafiek met de x-as.

d Het lineaire verband y_2 heeft hetzelfde hellingsgetal, maar de grafiek gaat door $(10{,}9)$. Bepaal de formule van y_2.

Opgave 3

Elk lineair verband heeft een formule van de vorm $y = ax + b$.

a Neem $a = 2$ en $b = 3$ en breng de grafiek van dit verband in beeld op de grafische rekenmachine. Gaat de grafiek door $(99{,}200)$?

b Neem $a = 2$. Bekijk de grafieken van de lineaire verbanden voor verschillende waarden van b. Voor welke waarde van b gaat de bijbehorende grafiek door het punt $(99{,}200)$?

c Neem $b = 3$. Bekijk de grafieken van de lineaire verbanden voor verschillende waarden van a. Voor welke waarde van a gaat de bijbehorende grafiek door het punt $(99{,}200)$?

Voorbeeld 2

Als een loodgieter een reparatie bij iemand uitvoert, vraagt hij voorrijkosten, een uurtarief en materiaalkosten. Een loodgieter vraagt € 35,00 aan voorrijkosten en het uurtarief is € 28,50. Als je niet op de materiaalkosten let, zijn de arbeidskosten A in euro's alleen afhankelijk van de gewerkte tijd t in uren. Stel een formule voor A op.

Antwoord

Deze loodgieter kost als je hem belt om te komen, in elk geval € 35,00. Elk gewerkt uur kost nog eens € 28,50, dus t uur werken kost $t \cdot 28{,}50$ euro.

De formule is dus: $A = 28{,}50 \cdot t + 35$.

Opgave 4

Voor een rit met een taxi betaal je € 3,50 voorrijkosten en nog eens € 1,20 per gereden kilometer. Hierbij past een lineair verband tussen de ritprijs R en het aantal gereden kilometers a. In **Voorbeeld 2** zie je hoe je in zo'n situatie een formule voor dit lineaire verband opstelt.

a Stel een formule op die het verband tussen R en a beschrijft.

b Welk getal is de richtingscoëfficiënt van R?

c Waarom heeft het nulpunt van R hier geen betekenis?

d Hoeveel betaal je voor een rit van 16 km?

e Hoeveel kilometer heb je gereden als je € 31,10 moet betalen?

f Betaal je voor een twee keer zo lange rit ook twee keer zo veel?

Voorbeeld 3

De temperatuur van de buitenlucht hangt onder sommige omstandigheden lineair af van de hoogte boven de zeespiegel. Zeker bij een wandeling in de bergen of bij een ballonvaart kun je dat goed merken. Een vuistregel is dat elke 100 meter stijging een temperatuurdaling van $0{,}6$ °C betekent. Stel je voor dat het op 0 meter hoogte 24 °C is. Welke formule kun je opstellen voor de temperatuur (°C) afhankelijk van de hoogte (meter)? Bepaal met de grafische rekenmachine op welke hoogte de temperatuur voor het eerst onder 0 °C komt.

Antwoord

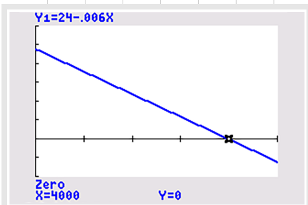
De temperatuurdaling per meter is: $\frac{0{,}6}{100} = 0{,}006$ °C

De formule is daarom $T = -0{,}006 \cdot h + 24$ als h de hoogte in meters en T de temperatuur in °C.

Maak vervolgens met de grafische rekenmachine een geschikte grafiek. Zorg ervoor dat het nulpunt (snijpunt met de x-as) in beeld komt.

Bepaal met de grafische rekenmachine dat de temperatuur 0 °C is als $h = 4000$ meter.

Het nulpunt kun je ook uitrekenen door de vergelijking $24 - 0{,}006h = 0$ op te lossen.



Figuur 2.5

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** heb je gezien dat de temperatuur lineair afhangt van de hoogte boven de zeespiegel.

a Licht toe hoe je aan de formule $T = -0{,}006h + 24$ komt.

b Bereken algebraïsch het nulpunt van T.

c Geef aan welke vensterinstellingen je gebruikt om de grafiek van T goed in beeld te krijgen.

d Hoe hoog is de temperatuur volgens de formule op de top van Mount Everest (8848 meter boven de zeespiegel) als het op een hoogte van 0 meter 24 °C is?

Verwerken

Opgave 6

Het huren van een bepaald type auto bij een autoverhuurbedrijf kost per week $g = 0{,}09k + 75$. Hierbij is k het aantal gereden kilometers en g de kosten in euro's.

a Het verhuurbedrijf vraagt een vast bedrag per week. Welk bedrag is dat?

b Hoe groot zijn de kosten per gereden kilometer?

c Geef de formule voor de kosten van een huurauto die per week € 12,50 duurder is en die per kilometer € 0,10 kost.

Opgave 7

Bereken van de volgende lineaire formules algebraïsch de snijpunten van de bijbehorende grafieken met de assen. Doe dat zonder de grafische rekenmachine te gebruiken.

a $y_1 = 3x - 5$

b $y_2 = x - 4$

c $y_3 = -0{,}5x + 4$

d $y_4 = -2(x + 3)$

Opgave 8

Bekijk de tabel.

gewerkte uren u	0	2	5	9	10
kosten k (euro)	65	135	240	380	415

Tabel 2.1

a Leg uit waarom tussen k en u een lineair verband kan bestaan.

b Waaruit blijkt dat k niet recht evenredig is met u?

c Welke formule past bij de tabel?

d Bereken met de juiste formule de kosten als er zes uur is gewerkt.

e Bereken de kosten als er 2 uur en 50 minuten is gewerkt.

Opgave 9

De winst w (euro) van een feestavond hangt af van het aantal bezoekers n.
De formule is: $w = 2{,}5n - 300$.

a Bereken de winst als het aantal bezoekers 200 is.

b Wat is de betekenis van -300 in deze formule?

c Wat is de betekenis van het getal $2{,}5$?

d Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van w met de horizontale as. Wat is de betekenis van dit punt?

Opgave 10

Chiara en Leyla werken op zaterdag in de supermarkt en verdienen daar € 4,50 per uur. Zij overwegen om voor een callcenter te gaan werken om klanten te werven voor het energiebedrijf. Het basisloon ligt daar met € 3,20 per uur weliswaar wat lager, maar bij het callcenter krijg je per geworven klant een extra bedrag van € 2,00.

a Chiara wil op zaterdag maximaal acht uur werken. Onderzoek hoeveel klanten Chiara moet werven om bij het callcenter meer te gaan verdienen dan bij de supermarkt.

b Leyla denkt dat zij op zaterdag in staat is om drie, vier of vijf klanten te werven. Teken grafieken van het dagloon van Leyla in deze situaties. Onderzoek met deze grafieken hoelang (uur) Leyla maximaal mag doen over het werven van klanten om niet minder te gaan verdienen dan in de supermarkt. Rond af op halve uren nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 11: Gala

De vertegenwoordiger van het volleybalmerk ‘Gala’ verkoopt in Nederland via internet volleyballen voor € 48,00 per stuk. Het merk stelt daarnaast een bedrag van € 1000,00 beschikbaar aan de vertegenwoordiger om het merk te promoten. De vertegenwoordiger koopt de ballen in voor € 30,00 per stuk. Daarnaast heeft hij vaste kosten van € 2500,00.

a Stel formules op voor de kosten k en de opbrengst r afhankelijk van het aantal verkochte volleyballen b.

b Maak de grafieken van k en r met de grafische rekenmachine en ga met behulp van deze grafieken na hoeveel volleyballen de vertegenwoordiger moet verkopen om winst te maken.

Opgave 12: Fooi

Uit Amerikaans onderzoek in horecagelegenheden blijkt dat er tussen de fooi F in dollars en de hoogte van de rekening R in dollars een lineair verband bestaat. Een onderzoeker vond de volgende gegevens:
Bij een rekening van \$ 20,00 hoort een fooi van \$ 4,00.
Bij een rekening van \$ 80,00 hoort een fooi van \$ 13,00.

a Stel een formule op bij dit lineaire verband tussen F en R.

b Een ober brengt een klant een rekening van \$ 45,00. Hoeveel fooi kan de ober verwachten?

Testen

Opgave 13

Een waterleidingbedrijf vraagt naast een bedrag van € 0,08 per kubieke meter (m^3) water een vast bedrag van € 40,00 per jaar aan haar klanten.

a Maak een tabel voor het verband tussen het aantal verbruikte m^3 water w en het te betalen bedrag p. Teken de grafiek van p als functie van w.

b Wat betaalt iemand die geen water gebruikt per jaar? Waar vind je dit terug in de grafiek?

c Geef de formule voor het verband tussen p en w.

d Wat verandert er aan de grafiek en aan de formule als het vaste bedrag wordt verhoogd tot € 50,00?

Opgave 14

Gegeven is het lineaire verband: $y = 4x + 10$.

a Bereken de snijpunten van de grafiek van dit verband met de x-as en de y-as.

b De grafiek van dit verband wordt drie eenheden in de y-richting omlaag geschoven.

Welke formule hoort bij de nieuwe grafiek die daardoor ontstaat?

c De grafiek van een andere lineaire functie gaat door de punten $(0,10)$ en $(10,15)$.

Welke formule past bij deze grafiek?

2.3 Lineaire modellen

Inleiding

Op grond van meetresultaten kun je een lineair verband tussen twee variabelen veronderstellen. Dat is bijvoorbeeld het geval als meetpunten bij een verband tussen twee variabelen (vrijwel) op een rechte lijn liggen. In dit onderdeel leer je hoe je bij een aantal meetpunten een passende lineaire formule (lineair model) op kunt stellen.

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband herkennen in de grafische weergave van meetpunten;
- bij een lineair verband dat is gegeven door een aantal meetpunten een passende formule opstellen;
- lineair interpoleren en extrapoleren.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten).

Verkennen

Opgave V1

De bevolking van een stad is de laatste decennia gestaag gegroeid. In de tabel vind je enkele gegevens.

jaartal	1960	1970	1980	1990	2000	2010
aantal inwoners (×10000	2,1	3,3	4,6	5,8	7,0	8,3

Tabel 3.1

a Maak bij deze tabel een grafiek.

b Je kunt een rechte lijn trekken die het verloop van de bevolkingsgroei van deze stad redelijk benadert. Teken die lijn en voorspel het aantal inwoners in 2020 en 2030.

Uitleg

Bekijk de applet: Lijn door twee punten

Je ziet in een assenstelsel de twee punten A en B getekend. Door deze punten gaat een lijn. Tussen x en y bestaat een lineair verband. Stel een formule op voor dit verband.

Het gevraagde verband is lineair en heeft dus de vorm: $y = ax + b$. Je moet a en b vinden.

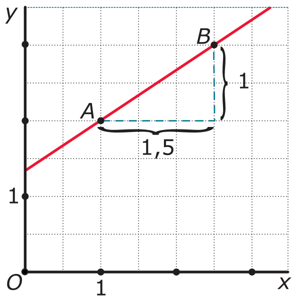
Lees twee coördinaten af: $A(1,2)$ en $B(2{,}5; 3)$. Je ziet als x toeneemt met $2{,}5 - 1$, dan neemt y toe met $3 - 2$.

De toename per eenheid, de helling is: $a = \frac{3-2}{2{,}5-1} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$

Vul het hellingsgetal in de formule in: $y = \frac{2}{3}x + b$.

Bereken het begingetal door bijvoorbeeld $A(1,2)$ in te vullen: $2 = \frac{2}{3} \cdot 1 + b$ en dus $b = 1\frac{1}{3}$.

De gevraagde formule is: $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.



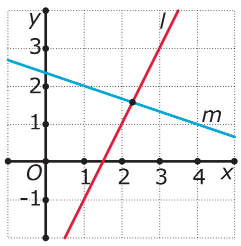
Figuur 3.1

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je een formule opstelt bij een lineair verband waarvan twee punten gegeven zijn. Bij een lineair verband hoort een grafiek die door de punten $(-3,2)$ en $(17,10)$ gaat. Stel een formule voor dit verband op.

Opgave 2

Je ziet twee lijnen l en m. Het zijn grafieken bij een lineair verband. Stel bij elk van deze lijnen een passende formule op.



Figuur 3.2

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Lijn door twee punten

De formule van een lijn door de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ heeft de vorm $y = a \cdot x + b$.
a is het hellingsgetal; b de uitkomst bij $x = 0$

- $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- b bereken je door de coördinaten van één van de twee punten in te vullen.

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door meetpunten en kun je door die punten een rechte lijn trekken. Niet alle punten hoeven helemaal op deze lijn te liggen. De formule bij de lijn noem je dan een **lineair model** voor het verband tussen y en x.

Toepassingen van het gebruik van lineaire formules en modellen zijn:

- Het berekenen van tussenliggende waarden door te doen alsof de grafiek tussen de meetwaarden lineair is. Dit is **lineair interpoleren**.
- Het berekenen van waarden die eerder of verder liggen. Dus voorspellen, door te doen alsof de grafiek lineair verder loopt. Dit is **lineair extrapoleren**.

Voorbeeld 1

De bevolking van een stad is de laatste jaren gestaag gegroeid. In de tabel vind je gegevens.

tijd (jaar)	1960	1970	1980	1990	2000	2010
aantal inwoners (×10000	2,1	3,8	5,3	6,6	8,3	9,8

Tabel 3.2

Hoe groot zal het aantal inwoners in 2020 en 2030 zijn?

Antwoord

Dit is extrapoleren, ofwel waarden voorspellen.

Kies eerst namen voor de variabelen:
N is het aantal inwoners ($\times 100000$).
t is de tijd in jaren vanaf 1960, dus $t = 0$ in 1960.

Als je bij de tabel van de bevolking van deze stad een grafiek tekent, lijken de meetpunten ongeveer op een rechte lijn te liggen. Hoewel de groei dus niet precies lineair is, kun je doen alsof het verband lineair is. Je tekent dan een rechte lijn die zo goed mogelijk door de meetpunten gaat.

De formule heeft dus de vorm: $N = a \cdot t + b$.

Een lijn die goed het verloop van de meetpunten beschrijft, gaat door: $(20; 5{,}3)$ en $(50; 9{,}8)$. Daarmee bereken je $a = 0{,}15$.

De formule wordt dan: $N = 0{,}15 \cdot t + b$.

Eén van beide punten invullen geeft: $b = 2{,}3$.

Het lineaire model is dus: $N = 0{,}15t + 2{,}3$.

Met deze formule kun je voorspellen hoe groot het aantal inwoners in 2020 en 2030 zal zijn.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Teken een t,N-assenstelsel met daarin de punten die bij de tabel horen. Ga na dat er door de meetpunten inderdaad ongeveer een rechte lijn gaat door de punten $(20; 5{,}3)$ en $(50; 9{,}8)$.

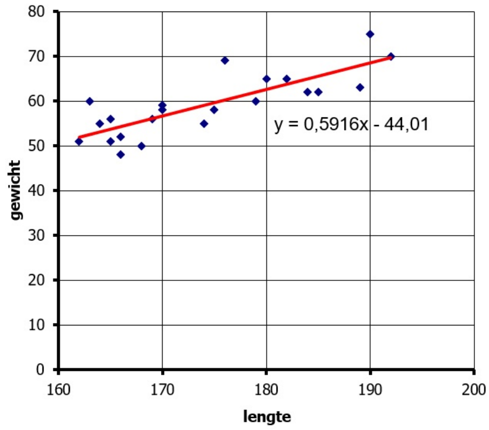
b Bereken a en b.

c Controleer of de gevonden formule bij de overige meetpunten ongeveer de juiste waarden oplevert.

d Voorspel het aantal inwoners van deze stad in 2020 en 2030.

Voorbeeld 2

Van 22 scholieren in een havo 4-klas zijn lengte en gewicht gemeten en in Excel ingevoerd. Excel kan daar een zogenoemde 'trendlijn' doorheen tekenen. Deze trendlijn geeft een verband tussen lengte L (centimeter) en gewicht G (kilogram). Stel het daarbij passende model op.



Figuur 3.3

Antwoord

De vorm van de formule is: $G = a \cdot L + b$.

De lijn gaat ongeveer door: $(160,50)$ en $(190,67)$.
Dus $a \approx 0,57$.

De formule wordt: $G = 0,57L + b$.

Bijvoorbeeld $(160,50)$ invullen geeft: $b \approx -41,2$.

De gevraagde formule is: $G = 0,57 \cdot L - 41,2$.

Je ziet overigens dat Excel een iets andere formule geeft. Dat komt omdat Excel de formule niet baseert op het aflezen van punten waar de lijn door zou moeten gaan.

Opgave 4

Bekijk de trendlijn in **Voorbeeld 2**.

a Voer de berekening van a en b uit.

b Waarom komt er dezelfde waarde van b uit als je de andere afgelezen coördinaten zou gebruiken om b te berekenen?

c Stel dat je afleest dat de rechte lijn door $(170,56)$ en $(195,70)$ gaat, wat wordt het model dan?

d Bepaal met het model dat je bij c hebt gevonden hoe zwaar een scholier van $1,60$ m uit deze groep zou moeten zijn.

Opgave 5

Een cilindervormige kaars is $1,5$ uur na het aansteken 25 cm lang en 4 uur na het aansteken nog 20 cm lang. In dit geval kun je aannemen dat de lengte L (centimeter) afhangt van de brandtijd t (uur) en dat dit verband lineair is.

a Bereken het hellingsgetal van dit lineaire verband. Welke betekenis heeft dit getal in de praktijk?

b Stel een formule voor L op.

c Bereken met behulp van de formule na hoeveel uur deze kaars is opgebrand.

Voorbeeld 3

Scholen krijgen geld van de overheid. Hoeveel geld hangt af van het aantal leerlingen. Hier zie je het aantal leerlingen van een school in de loop van een aantal jaren. Alle tellingen vonden plaats op 1 oktober.

jaartal	2011	2012	2013	2014
aantal leerlingen	1320	1462	1526	1442

Tabel 3.3

Het door een berekening voorspellen van het aantal leerlingen in bijvoorbeeld 2015 en 2016 noem je extrapoleren (buiten de meetpunten voorspellen).

Het berekenen van het aantal leerlingen tussen twee bekende meetpunten, bijvoorbeeld 2011 en 2012, noem je interpoleren. Interpoleren heeft hier geen zin, het aantal leerlingen wijzigt immers tijdens een schooljaar bijna niet.

Bepaal met behulp van deze gegevens door lineair extrapoleren hoe het leerlingenaantal in de jaren na 2014 zal verlopen.

Antwoord

De veranderingen zijn: $+142$ in 2012, $+64$ in 2013 en -84 in 2014. En nu moet je een keuze maken:

- Een voorspelling aan de hand van de laatste twee meetpunten: het laatste jaar waren er 84 leerlingen minder en die terugloop zal zo blijven doorgaan. Dat betekent dat het aantal leerlingen a na 2014 kan worden voorspeld door: $a = 1442 - 84 \cdot t$. Hierin is t het aantal jaren na 2014.
- Een voorspelling waarbij je het eerst en het laatst bekende jaar gebruikt: de laatste drie jaren kwamen er gemiddeld $\frac{142+64-84}{3} = 40$ leerlingen bij. Het aantal leerlingen a na 2014 kan worden voorspeld door: $a = 1442 + 40 \cdot t$. Hierin is t de tijd in jaren na 2014.

Beide voorspellingen gaan uit van een lineair verband. Daarom heet dit lineair extrapoleren. Het werkelijke verloop van het aantal leerlingen zal er wel ergens tussenin liggen.

Opgave 6

Bekijk de tabel.

q	10	20	30	40	50	60	70	80
p	22,6	41,3	64,7	78,8	94,8	121,3	138,5	166,2

Tabel 3.4

a De waarde van p voor $q = 15$ kun je vaststellen door lineair interpoleren. Je gaat uit van een lineair verband tussen p en q waarvan de grafiek door $(10; 22{,}6)$ en $(20; 41{,}3)$ gaat. Stel een formule op voor dat lineaire verband en bereken de waarde van p voor $q = 15$.

b Bereken op dezelfde manier de waarde van p voor $q = 42$ door lineair interpoleren.

c Bereken de waarde van p voor $q = 84$ door lineair extrapoleren.

Verwerken

Opgave 7

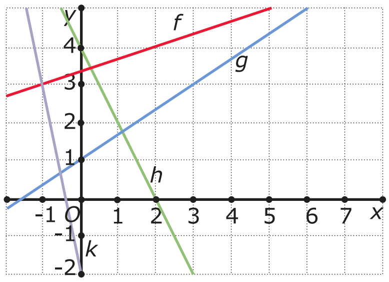
Je ziet vier grafieken van lineaire verbanden.

a Stel een formule van f op.

b Stel een formule van g op.

c Stel een formule van h op.

d Stel een formule van k op.



Figuur 3.4

Opgave 8

Een zuiver cilindervormige kaars is aan het opbranden. Het verband tussen de kaarslengte L (centimeter) en de brandtijd t (uur) is lineair. Na 2 uur branden is de kaars 12 cm lang, na 5 uur branden heeft hij nog een lengte van 6 cm. Stel een formule op voor L.

Opgave 9

Bij een eenparige beweging beweegt een voorwerp met een constante snelheid langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven met de formule: $s(t) = s(0) + v \cdot t$, met $s(t)$ de afgelegde weg (meters) na t seconden.

a Wat houdt $s(0)$ in?

b Wat houdt v in?

Je volgt een auto die op een Franse tolweg door een automatisch tolpoortje rijdt. Neem $s(0) = 0$ en $v = 30$ meter per seconde (m/s) voor deze auto.

c Geef de formule en teken de bijbehorende grafiek van de afgelegde weg $s(t)$.

Een andere auto is al eerder door het tolpoortje gereden en heeft 400 meter voorsprong op de auto uit b. Deze auto heeft een snelheid van 20 meter per seconde.

d Geef de formule die bij de beweging van deze auto hoort en teken de bijbehorende grafiek bij de afgelegde weg van de tweede auto in hetzelfde assenstelsel als de grafiek van de afgelegde weg van de eerste auto.

e Bereken op welk tijdstip de eerste auto de tweede auto inhaalt.

Opgave 10

Mensen verbruiken veel olie. Gelukkig wordt er nog regelmatig nieuwe olie gevonden, maar ooit raakt de olie op. De ‘reserves’ olie is de hoeveelheid olie die naar schatting nog uit de grond gehaald kan worden. De ‘olieconsumptie’ is de hoeveelheid olie die gebruikt wordt. Hoeveelheden olie worden uitgedrukt in vaten. Eén vat is 159 liter olie.

In 2003 was de olieconsumptie in de Verenigde Staten 20071000 vaten per dag. In 2003 hadden de Verenigde Staten ongeveer 293 miljoen inwoners.

a Bereken de olieconsumptie in de Verenigde Staten in 2003 in liters per inwoner per dag.

Aan het eind van 2003 waren de reserves in de hele wereld $1147{,}7$ miljard vaten. Als de wereldolieconsumptie per jaar steeds gelijk zou blijven aan die van 2003, dan zouden deze reserves 41 jaar later helemaal verbruikt zijn: er is dan geen olie meer.

b Bereken hoeveel vaten olie per dag in de wereld geconsumeerd werden in 2003. Geef je antwoord in miljoenen.

c Je mag aannemen dat er geen nieuwe olie wordt gevonden. Stel formules op die beschrijven hoe de reserves R en de consumptie C (beide in miljarden vaten) in de loop van de tijd t (jaar) vanaf eind 2003 ($t = 0$) veranderen.

Opgave 11

Er bestaat een verband tussen het aantal ademhalingen A dat een mens per minuut maakt, en de polsslag P in slagen per minuut. Een arts onderzoekt een groepje van vijftien mensen en krijgt de volgende meetwaarden:

A	16	16	19	20	20	23	24	26	27	28	30	34	36	41	44
P	57	59	66	68	71	70	72	84	82	80	91	94	105	116	120

Tabel 3.5

a Zet de gegevens uit de tabel in een grafiek. Zet A op de horizontale as.

b Bestaat er een lineair verband tussen A en P? Licht je antwoord toe.

c Trek een rechte lijn door de punten $(16{,}57)$ en $(44{,}120)$. Geeft deze lijn een zo goed mogelijke weergave van het verband? Licht je antwoord toe.

d Stel een formule op bij de getekende lijn.

e Bereken met behulp van de formule het aantal polsslagen bij 20, 24 en 28 ademhalingen per minuut. Wijken deze waarden veel af van de gemeten waarden?

f Bereken met behulp van de formule het aantal polsslagen van iemand met 32 ademhalingen per minuut.

g Het aantal polsslagen uit f kun je ook benaderen door het gemiddelde van 91 en 94 te nemen. Waarom? Ligt deze waarde dicht bij de waarde die je bij f berekend hebt?

Opgave 12

Een onderzoeker wil weten of er een verband bestaat tussen het aantal eitjes N dat een zalm legt en de lengte L (centimeter) van een zalm. Je ziet de door hem gevonden gegevens in de tabel.

L	52	58	66	68	73	74	78	90
N	5620	7410	9805	10390	11890	12200	13380	17010

Tabel 3.6

a Onderzoek of er bij benadering een lineair verband bestaat tussen N en L.

Stel in dat geval een formule op voor N, waarbij je de kleinste en grootste waarde van L uit de tabel gebruikt.

b Geef een zo goed mogelijke schatting van het aantal eitjes dat een zalm van 85 cm lengte legt.

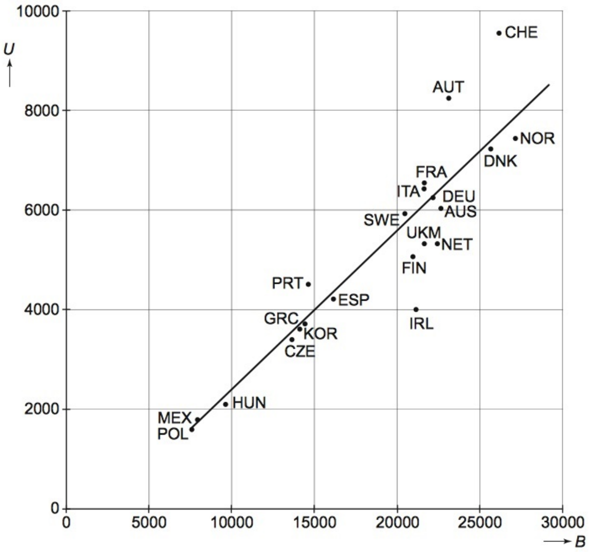
c Een zalm legt 4500 eitjes. Hoe lang zal deze zalm ongeveer zijn?

d Bereken met behulp van lineair extrapoleren het aantal eitjes dat een zalm van 120 cm lengte legt. Denk je dat dit een realistische schatting oplevert? Licht je antwoord toe.

Toepassen

Opgave 13: Onderwijsuitgaven

De OESO (Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling) doet jaarlijks onderzoek naar de onderwijsuitgaven van de landen die bij deze organisatie zijn aangesloten. In de grafiek is voor deze landen af te lezen hoeveel geld de overheid uitgeeft per leerling per jaar in het voortgezet onderwijs.



Figuur 3.5

Op de horizontale as staat B, het bruto binnenlands product (bbp) per hoofd van de bevolking in euro's. Verticaal staat U, de uitgaven per leerling per jaar in euro's. Nederland staat in de grafiek met NET aangegeven.

In Nederland zijn de uitgaven per leerling per jaar voor alle schoolsoorten in het voortgezet onderwijs (vmbo, havo en vwo) ongeveer gelijk. Een havo leerling behaalt het diploma gemiddeld in $5{,}4$ jaar.

a Bereken hoeveel geld de Nederlandse overheid gemiddeld uitgeeft aan de havo-opleiding van een leerling die een havo-diploma behaalt.

In de grafiek is een lijn getrokken die zo goed mogelijk bij de punten past. Een land dat op de lijn ligt en een bbp van € 10000,00 heeft, zou dan € 2400,00 per leerling per jaar uitgeven. Een land op de lijn met een bbp van € 25000,00 zou dan € 7200,00 per leerling per jaar uitgeven.

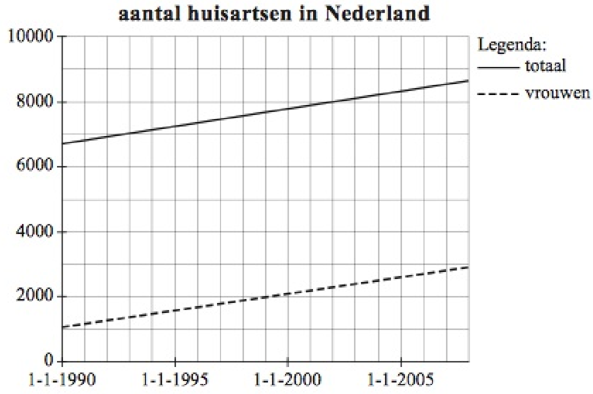
Het punt van de Verenigde Staten ligt op die lijn en heeft met € 36800,00 het hoogste bbp van alle landen. Door deze hoge waarde van B is dit punt niet zichtbaar in de grafiek.

b Stel een vergelijking van de lijn op en bereken daarmee de uitgaven per leerling per jaar in de Verenigde Staten.

(bron: examen havo wiskunde A in 2006, eerste tijdvak)

Opgave 14: Vrouwelijke huisartsen

Een jaar of veertig geleden was een vrouwelijke huisarts nog een uitzondering. Maar hun aantal neemt toe. Bekijk de figuur. Ga ervan uit dat het verband lineair is.



Figuur 3.6

Op 1 januari 1990 waren er 1078 vrouwelijke huisartsen en op 1 januari 2008 bleek dit aantal gestegen tot 2980. Het aantal vrouwelijke huisartsen H_V na t jaar, met $t = 0$ op 1 januari 1990, is te schrijven als: $H_V = a \cdot t + 1078$. De waarde van a is ongeveer 106.

a Bereken a in één decimaal nauwkeurig.

Ook het totaal aantal huisartsen H_T neemt vanaf 1 januari 1990 toe. Hiervoor geldt de formule: $H_T = 107 \cdot t + 6703$, met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 1990.

Als de stijging van het totaal aantal huisartsen en van het aantal vrouwelijke huisartsen zich op dezelfde manier voortzet als in de formules voor H_T en H_V is beschreven, komt er een moment dat er evenveel vrouwelijke als mannelijke huisartsen zullen zijn.

b Onderzoek in welk jaar dat zal zijn.

(bron: pilotexamen wiskunde A havo in 2013, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 15

Het aantal eenpersoonshuishoudens in Nederland is in de periode 2000 - 2013 lineair toegenomen.
Volgens gegevens van het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) waren er in Nederland in 2010: 2670 $(\times 1000)$ en in 2013: 2802 $(\times 1000)$ éénpersoonshuishoudens.

Stel een formule op voor het aantal eenpersoonshuishoudens N (in duizendtallen) als functie van de tijd t. Kies $t = 0$ in 2000.

Opgave 16

De overheid is er door allerlei maatregelen in geslaagd het aantal verkeersdoden tussen 1970 en 2010 terug te dringen. De cijfers staan in de tabel:

jaar	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
aantal doden	3516	3005	2521	1997	1488	1277	1158	817	640

Tabel 3.7

a Laat zien dat het aantal verkeersdoden in de periode 1970-1990 (ongeveer) lineair afneemt.

b Schat met behulp van lineair interpoleren het aantal verkeersdoden in 1982.

c Geef een formule voor het verband tussen het aantal verkeersdoden N en de tijd t (in jaren) voor de gehele periode 1970-1990. Neem $t = 0$ in 1970.

d Bepaal met behulp van lineair extrapoleren het aantal verkeersdoden in 2020. Gebruik daarvoor de gegevens uit de periode

2005-2010. Waarom is het lineair extrapoleren met deze gegevens riskant?

2.4 Lineaire verbanden vergelijken

Inleiding

Stel je hebt een loodgieter nodig. Bedrijf A rekent € 25,00 per uur en € 30,00 voorrijkosten. Bedrijf B rekent € 27,50 per uur en € 18,00 voorrijkosten. (Materiaalkosten zijn bij beide even hoog.)
De klus lijkt minstens een dagdeel te duren, welke van beide bedrijven is dan het voordeligst?
Om te berekenen vanaf hoeveel uur bedrijf A goedkoper is dan B kun je een lineaire ongelijkheid oplossen.

Je leert in dit onderwerp

- problemen te beschrijven als lineaire vergelijking of ongelijkheid;
- lineaire vergelijkingen en ongelijkheden systematisch oplossen.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten);
- formules opstellen bij lineaire verbanden.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt een loodgieter nodig. Bedrijf A rekent € 20,00 per uur en € 50,00 voorrijkosten. Bedrijf B rekent € 37,50 per uur en € 15,00 voorrijkosten. De materiaalkosten zijn bij beide loodgieters even hoog.

De klus lijkt minstens een dagdeel te duren; welke van beide bedrijven is het voordeligst?

Om te berekenen vanaf hoeveel uur bedrijf A goedkoper is dan bedrijf B kun je een lineaire ongelijkheid oplossen.

a Welke ongelijkheid hoort bij dit probleem?

b Los de ongelijkheid op met de grafische rekenmachine.

c Kun je de ongelijkheid ook oplossen zonder de grafische rekenmachine? Hoe dan?

Figuur 4.1

Uitleg

Je hebt een loodgieter nodig. Bedrijf A rekent € 25,00 per uur en € 30,00 voorrijkosten. Bedrijf B rekent € 27,50 per uur en € 18,00 voorrijkosten.
Je wilt berekenen vanaf hoeveel uur werk bedrijf A goedkoper is dan bedrijf B. Materiaalkosten zijn bij beide bedrijven even hoog, dus daar houd je geen rekening mee.

De kosten K (euro) die afhangen van het aantal gewerkte uren a zijn:

- Bedrijf A: $K_{\text{A}} = 30 + 25a$.
- Bedrijf B: $K_{\text{B}} = 18 + 27{,}5a$.

Deze kosten zijn gelijk als $K_{\text{A}} = K_{\text{B}}$, dus als $30 + 25a = 18 + 27{,}5a$.

Los deze vergelijking op met de balansmethode:

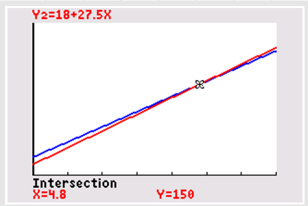
$$\begin{aligned} 30 + 25a &= 18 + 27{,}5a \\ 12 + 25a &= 27{,}5a \\ 12 &= 2{,}5a \\ a &= 4{,}8 \end{aligned}$$

A is dus even duur als B bij $4{,}8$ gewerkte uren.

Door $a = 4{,}8$ in te vullen in één van de kostenformules, vind je ook de kosten: € 150,00.

Ook met de grafische rekenmachine vind je dit.

Als de x-waarden, de gewerkte uren, groter zijn dan $4{,}8$, dan zijn de y-waarden, de kosten, van A kleiner dan die van B.



Figuur 4.2

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg** met het oplossen van een ongelijkheid met de balansmethode.

Gegeven is:

- Bedrijf A: $K_{\text{A}} = 50 + 2b$
- Bedrijf B: $K_{\text{B}} = 15 + 12b$

Je lost op: $K_{\text{A}} < K_{\text{B}}$.

a Los eerst de vergelijking $50 + 2b = 15 + 12b$ op met de balansmethode.

b Bereken de kosten bij de berekende waarde van b.

c Maak vervolgens de grafieken van K_{A} en K_{B} op de grafische rekenmachine.

Kies geschikte vensterinstellingen.

d Lees de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.

Opgave 2

Los de ongelijkheid $600 - 0{,}5x \leq 400 + 1{,}5x$ op met de balansmethode.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je van twee lineaire verbanden

$y_1 = ax + b$ en

$y_2 = cx + d$

het snijpunt wilt berekenen, geldt:

$y_1 = y_2$ dus $ax + b = cx + d$.

Dit is een **lineaire vergelijking**.

Een lineaire vergelijking kun je oplossen met de balansmethode of met de grafische rekenmachine.

De **ongelijkheid** $y_1 < y_2$ oplossen, doe je zo:

- Los de bijbehorende vergelijking $y_1 = y_2$ op.
- Teken de grafieken y_1 en y_2.
- Lees de oplossing van de ongelijkheid af.

Voorbeeld 1

Een fabriek produceert een artikel dat voor € 12,50 per stuk wordt verkocht. Het maken van een exemplaar kost € 7,50 en de vaste maandelijkse productiekosten zijn € 10000,00. Voor de bedrijfsleiding is de vraag van belang: “Hoeveel exemplaren van dit artikel moeten er maandelijks worden verkocht om winst te maken?” Bereken ook de kosten als er net geen winst, maar ook geen verlies gemaakt wordt.

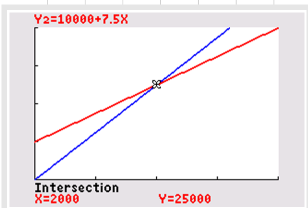
Antwoord

Winst maken betekent: inkomsten R (euro) zijn groter dan de kosten K (euro). Je wilt het aantal verkochte producten berekenen, dus je zoekt formules voor R en K die afhangen van het aantal verkochte exemplaren q.

Stel deze formules op:

- inkomsten: $R = 12{,}50q$
- kosten: $K = 10000 + 7{,}5q$

Maak hierbij grafieken op de grafische rekenmachine en los de vergelijking $R = K$ op.
Als je de vergelijking oplost met de balansmethode krijg je een idee van de geschikte vensterinstellingen.



Figuur 4.3

$$\begin{aligned} 12{,}50q &= 10000 + 7{,}5q \\ 5q &= 10000 \\ q &= 2000 \end{aligned}$$

Er wordt winst gemaakt bij een verkoop van meer dan 2000 artikelen.

Als de inkomsten en de kosten gelijk zijn, zijn de inkomsten en de kosten $12{,}50 \cdot 2000 = 25000$ euro.

Opgave 3

Twee kaarsen branden gelijkmatig op. Het verband tussen de lengte L (centimeter) van elke kaars en de brandtijd t (uur) is lineair. Op $t = 0$ worden beide kaarsen aangestoken. Kaars I heeft op dat moment een lengte van 30 cm en brandt met $1{,}5$ cm per uur op. Kaars II heeft dan een lengte van 22 cm en brandt met $0{,}5$ cm per uur op.

a Stel voor elk van deze kaarsen een formule op voor L als functie van t.

b Breng de bijpassende grafieken in beeld met de grafische rekenmachine.

c Bepaal met de grafische rekenmachine vanaf welk tijdstip kaars II langer is dan kaars I.

d Hoe lang zijn de kaarsen als ze even lang zijn?

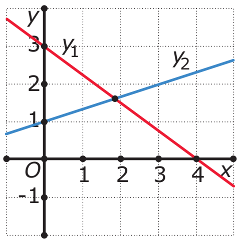
e In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de bijbehorende gelijkheid met de balansmethode kunt oplossen. Doe dat hier ook.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Ongelijkheid oplossen

Gegeven zijn de lineaire verbanden y_1 en y_2. Gebruik de balansmethode en los op:

$y_1 \geq y_2$



Figuur 4.4

Antwoord

Maak eerst formules met behulp van roosterpunten die op de lijn liggen.

- $y_1 = -\frac{3}{4}x + 3$
- $y_2 = \frac{1}{3}x + 1$

Los de vergelijking $-\frac{3}{4}x + 3 = \frac{1}{3}x + 1$ op met de balansmethode: $x = \frac{24}{13}$.

De oplossing van de ongelijkheid volgt uit de grafiek: $x \leq \frac{24}{13}$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** wordt de ongelijkheid $y_1 \geq y_2$ opgelost.

a In het voorbeeld gaat de grafiek van y_1 door $A(0,3)$ en $B(4,0)$. Laat zien hoe je de bijbehorende formule opstelt. Laat ook zien hoe je de formule opstelt van y_2 waarvan de grafiek door de punten $C(0,1)$ en $D(3,2)$ gaat.

b Los de vergelijking $y_1 = y_2$ met de balansmethode op.

c Leg uit hoe je de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken afleest.

d Door in de applet de vier gegeven punten te verplaatsen, kun je andere situaties oefenen.

Voorbeeld 3

Los op, gebruik de balansmethode: $\frac{15-2x}{3} < \frac{x}{5} + 10$.

Antwoord

Dat gaat bijvoorbeeld zo:

$$\begin{aligned} \frac{15-2x}{3} &= \frac{x}{5} + 10 && \text{beiden zijden } \times 15 \\ 75 - 10x &= 3x + 150 && \text{beide zijden } -75 \\ -10x &= 3x + 75 && \text{beide zijden } -3x \\ -13x &= 75 && \text{beide zijden } / -13 \\ x &= \frac{75}{-13} = -\frac{75}{13} \end{aligned}$$

Met behulp van een grafiek op de grafische rekenmachine vind je de oplossing van de ongelijkheid: $x > -\frac{75}{13}$. Maak als toelichting altijd even een schets van die grafieken.

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** zie je hoe een lineaire ongelijkheid met gebruik van de balansmethode wordt opgelost. Los de lineaire ongelijkheden op met de balansmethode.

a $25g - 150 < 18g + 60$

b $0{,}8x + 15200 \geq 2x + 8400$

c $\frac{1}{3}x - 25 > 16 + \frac{1}{2}x$

d $\frac{2 \cdot g - 8}{4} + 4 \geq 6$

Verwerken

Opgave 6

Een leerlingenvereniging heeft een filmavond georganiseerd voor alle leerlingen van de school. Voor de filmavond heeft de vereniging € 400,00 uitgegeven. Om de gemaakte kosten te betalen, vraagt de vereniging € 2,50 voor een toegangskaartje. Noem de gemaakte winst W en het aantal leerlingen dat komt kijken l.

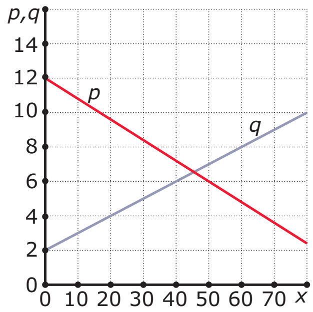
a Geef de formule voor W afhankelijk van l.

b Hoeveel kaartjes moet de vereniging verkopen om geen winst en geen verlies te draaien?

c Hoeveel kaartjes zijn er verkocht als de winst groter is dan € 1000?

Opgave 7

Bekijk de grafieken en los op: $p \leq q$. Rond je antwoord af op twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 4.5

Opgave 8

Twee personen willen vanaf het station met de taxi naar huis gebracht worden. Ze hebben de keuze tussen de treintaxi en de gewone taxi. De treintaxi kost een vast bedrag van € 3,00 per persoon, de gewone taxi rekent € 2,25 per rit en € 0,75 per gereden minuut.

a Geef een formule voor de kosten K van de gewone taxi, afhankelijk van het aantal minuten m dat de rit duurt.

b Bepaal bij welk aantal minuten het voordeliger wordt om een treintaxi te nemen.

c Bereken wat de rit kost bij dit aantal minuten.

d Beide taxi's rijden door de stad gemiddeld 60 km/h. De twee personen wonen in hetzelfde gebouw, op een afstand van 6 km van het station. Welk type taxi raad je deze personen aan? Licht je antwoord toe met een berekening.

Opgave 9

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op met de balansmethode.

a $55 - 6k = 4k - 25$

b $12 - 4x \geq 36 + 2x$

c $25 - 1\frac{2}{3}t > 30 - 3t$

d $1200 + 0{,}08a \geq 30 + 0{,}11a$

e $\frac{6-2x}{5} = \frac{4-x}{4}$

f $200 - (80 - x) = 4(x + 15)$

Opgave 10

Een fabriek produceert een artikel dat voor € 10,00 wordt verkocht. Het maken van een exemplaar kost € 6,50 en de vaste kosten voor het onderhoud van de fabriek, de machines, de lonen, enzovoort zijn € 83000,00. Elk geproduceerd exemplaar wordt verkocht.

a Stel formules op voor de totale opbrengst TO en de totale kosten TK als functie van het geproduceerde aantal q.

b De waarde van q waarbij opbrengst en kosten gelijk zijn, heet het ‘break-even-point’. Bepaal dit ‘break-even-point’ met behulp van de grafische rekenmachine.

c Bereken dit ‘break-even-point’ ook met de balansmethode.

d Bereken de totale opbrengst en de totale kosten in het ‘break-even-point’.

e Bij welke waarden van q wordt er winst gemaakt?

f Bij welke productie wordt er € 50000 winst gemaakt?

Toepassen

Opgave 11: Toets lineaire verbanden

De klassen 4 HA en 4 HB hebben eenzelfde toets gemaakt over lineaire verbanden. De 54 leerlingen in de twee klassen haalden samen gemiddeld een $6{,}4$. De leerlingen uit klas 4 HA haalden gemiddeld een $6{,}8$. De leerlingen uit klas 4 HB haalden gemiddeld een $5{,}9$.

Hoeveel leerlingen zitten er in klas 4 HA?

Opgave 12: Kangoeroewedstrijd

Bij de kangoeroewedstrijd (een internationale wiskundige puzzelwedstrijd voor middelbare scholieren) kom je regelmatig problemen tegen die op te lossen zijn door het probleem te beschrijven met een vergelijking. Hieronder vind je daar een paar voorbeelden van.

a Over drie jaar zal Steven drie keer zo oud zijn als drie jaar geleden. Over vier jaar zal Steven ... keer zo oud zijn als vier jaar geleden. Welk getal moet er op de puntjes staan?

b In een winkel hebben twee cd's dezelfde prijs. Een van de cd's wordt 5% goedkoper, de andere wordt 15% duurder. Daardoor gaan ze € 6,00 in prijs verschillen. Hoeveel euro gaat de duurste cd kosten?

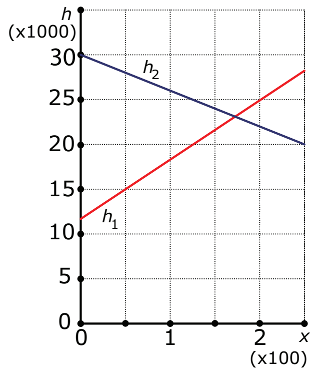
c Anna, haar moeder en haar vader zijn alle drie in januari jarig. In mei 2007 was Anna’s leeftijd $\frac{1}{6}$ van die van haar moeder. In mei 2008 was haar leeftijd $\frac{1}{6}$ van die van haar vader. Hoeveel jaar is Anna's vader ouder dan haar moeder?

d Fred en Karel gaan tegen elkaar hardlopen. Omdat Karel $\frac{9}{8}$ keer zo snel loopt als Fred, begint Karel met een halve ronde achterstand. Ze starten gelijktijdig. Hoeveel rondes heeft Fred gelopen als Karel hem voor de eerste keer inhaalt?

Testen

Opgave 13

Je ziet twee grafieken van de lineaire verbanden h_1 en h_2.
Los op: $h_1 \leq h_2$.



Figuur 4.6

Opgave 14

Een autoverhuurbedrijf verhuurt een Toyota voor € 75,00 per week. De benzinekosten worden geschat op € 0,12 per kilometer. Het bedrijf verhuurt ook een Renault voor € 100,00 per week. De benzinekosten van de Renault zijn ongeveer € 0,10 per kilometer.

a Je wilt de Toyota voor een week huren en je hebt € 125,00. Hoeveel kilometer kun je dan rijden? Beantwoord dezelfde vraag voor de Renault.

b Geef formules voor de kosten per week van de Toyota en de Renault, afhankelijk van het aantal gereden kilometers.

c Teken met de grafische rekenmachine de grafieken voor de kosten per week van de Toyota en de Renault. Schrijf op welke vensterinstellingen je gebruikt.

d Bereken zowel algebraïsch als met grafische rekenmachine vanaf welk aantal kilometer de Renault goedkoper is.

Opgave 15

Een bedrijf produceert pennen. De productiekosten zijn € 0,25 per pen, de vaste kosten € 100,00 per dag. De pennen worden verkocht voor € 1,50. Vanaf welk aantal verkochte pennen per dag maakt het bedrijf winst?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van lineaire vergelijkingen en ongelijkheden**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

2.5 Ongelijkheden en gebieden

Inleiding

Bij een muziekvoorstelling werden twee soorten kaartjes verkocht: een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. Als er nu voor € 1200,00 aan kaartjes is verkocht, dan past daarbij een vergelijking als $2{,}50k + 4{,}50v = 1200$ als k het aantal kinderkaartjes en v het aantal kaartjes voor volwassenen is.

Figuur 5.1

Dit is ook een lineair verband, maar niet van de vorm $y = a \cdot x + b$. In dit onderdeel leer je werken met lineaire verbanden van de vorm $px + qy = r$.

Je leert in dit onderwerp

- lineaire verbanden van de vorm $px + qy = r$ herleiden tot de vorm $y = ax + b$;
- combineren van lineaire verbanden van de vorm $px + qy = r$: snijpunt uitrekenen;
- combineren van lineaire ongelijkheden: het juiste gebied in een assenstelsel weergeven.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten);
- lineaire vergelijkingen oplossen;
- lineaire ongelijkheden oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Een theatervoorstelling trekt tweehonderd bezoekers. Een kinderkaartje kost € 7,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 15,00. In totaal is er voor € 2775,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt twee vergelijkingen met twee onbekenden.

a Welke twee vergelijkingen passen bij dit probleem?

b Zijn het lineaire verbanden tussen deze variabelen?

Uitleg 1

Een muziekvoorstelling trekt driehonderd bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken.

Figuur 5.2

Noem bijvoorbeeld het aantal kinderen k en het aantal volwassenen v. Dan is:

- $k + v = 300$;
- $2{,}5k + 4{,}5v = 1110$.

Wil je weten hoeveel volwassenen er waren, dan herleid je beide formules tot de vorm $k = ...$

- $k = -v + 300$
- $k = -1{,}8v + 444$

Je ziet dat beide formules horen bij een lineair verband. Je kunt de bijbehorende rechte lijnen tekenen. Ook kun je de waarden van v van het snijpunt berekenen door de vergelijking $-v + 300 = -1{,}8v + 444$ op te lossen.

Vaak zal een dergelijke situatie wat complexer zijn: er zijn bijvoorbeeld maximaal driehonderd plaatsen en er moet (om voldoende toezicht voor de kinderen te hebben) per twee kinderen minstens een volwassene in de zaal aanwezig zijn. Hoe krijg je nu de mogelijkheden in beeld?

Opgave 1

Bekijk het probleem in **Uitleg 1**. Je gaat het probleem verder oplossen.

a Leg uit hoe je beide vergelijkingen herleidt naar de vorm $k = ...$.

b Maak vervolgens de grafieken van beide lineaire verbanden op de grafische rekenmachine. Kies geschikte vensterinstellingen.

c Met welke vergelijking kun je nu het snijpunt van beide lijnen berekenen? Voer de berekening uit en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

Opgave 2

Van een rechthoek is de omtrek 90 centimeter. De lengte van de rechthoek is 21 centimeter meer dan de breedte. Je wilt de lengte en de breedte uitrekenen.

a Welke twee vergelijkingen in l (voor de lengte) en b (voor de breedte) kun je hierbij opstellen?

b Herleid beide vergelijkingen tot de vorm $l = ...$ Maak vervolgens de grafieken van beide lineaire verbanden op de grafische rekenmachine. Kies geschikte vensterinstellingen.

c Met welke vergelijking kun je het snijpunt van beide lijnen berekenen? Voer die berekening uit en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

d Hoe groot worden de lengte en de breedte?

Uitleg 2

In een circustent kunnen maximaal 500 bezoekers. Een volwassene mag maximaal twee kinderen meenemen. Kinderen mogen alleen naar binnen onder begeleiding van een volwassene.

Je onderzoekt hoeveel kinderen er maximaal in de tent mogen zijn.

Noem het aantal kinderen k en het aantal volwassenen v.

Je kunt dan het verhaal vertalen in ongelijkheden:

- $k + v \leq 500$
- $v \geq \frac{1}{2}k$, met $k \geq 0$ en $v \geq 0$

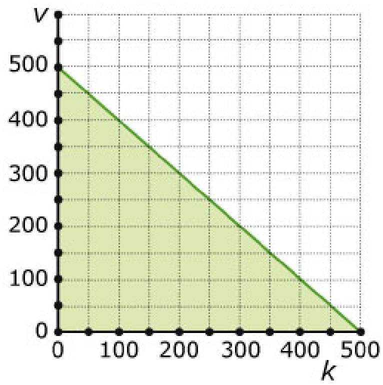
Deze ongelijkheden breng je in beeld door een k,v-assenstelsel te tekenen.
Zet de ongelijkheid $k + v \leq 500$ om in de gelijkheid: $k + v = 500$. Dit herleid je tot $v = -k + 500$ als v op de verticale as komt. Teken de lijn en houd rekening met $k \geq 0$ en $v \geq 0$.

Kleur nu het gebied dat aan de ongelijkheden voldoet.
Als je twijfelt aan welke kant van de lijn je moet kleuren, neem dan een punt dat niet op de lijn ligt. Ga daarvan na of het voldoet aan $k+v \leq 500$. Als het punt voldoet, kleur dan alle punten aan die kant van de lijn. Zo niet, dan kleur je de punten aan de andere kant van de lijn.

Je krijgt de figuur hiernaast.

Maar je hebt nog geen antwoord op de vraag. Want nu lijkt het of er 500 kinderen in de tent mogen. Maar dan kunnen er geen volwassenen meer bij.

Je hebt de ongelijkheid $v \geq \frac{1}{2}k$ nog niet verwerkt.



Figuur 5.3

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**. Je lost de laatste ongelijkheid zelf op.

a Licht toe hoe je aan de twee ongelijkheden $k+v \leq 500$ en $v \geq 0{,}5k$ komt.

b Licht toe hoe je uit $k + v = 500$ de formule $v = -k + 500$ krijgt.

c Neem de figuur uit de uitleg over en geef er in geel ook het gebied van de ongelijkheid $v \geq 0{,}5k$ in aan.

d Bereken met de vergelijkingen het maximale aantal kinderen dat in de zaal mag zitten.

Opgave 4

Op een kaasboerderij worden kaas en boter gemaakt van melk onder de voorwaarden:

- Voor 1 kilogram kaas is 9,8 kilogram melk nodig.
- Voor 1 kilogram boter is 22,5 kilogram melk nodig.
- Er is 1000 kilogram melk in voorraad.
- Er wordt twee keer zo veel boter als kaas gemaakt.

a Noem de hoeveelheid boter b en de hoeveelheid kaas k. Stel twee vergelijkingen op.

b Herleid beide vergelijkingen tot de vorm $k = ...$

c Maak de grafieken van beide lineaire functies op de grafische rekenmachine. Kies geschikte vensterinstellingen. Met welke vergelijking kun je het snijpunt van beide lijnen berekenen? Voer die berekening uit en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

d Bereken hoeveel kg boter en kaas er wordt gemaakt als alle melk wordt gebruikt.

Opgave 5

Stel dat je een groep van dertig personen van drinken wilt voorzien. Je wilt literpakken appelsap en sinaasappelsap kopen. Je hebt minstens zes pakken nodig, maar meer dan tien zou overdreven zijn. Je beschikt over € 20,00 om deze frisdrank te kopen. Appelsap kost € 1,80 per literpak, sinaasappelsap kost € 2,10 per literpak. Neem als variabelen het aantal pakken appelsap x en het aantal pakken sinaasappelsap y.

a Aan welke vijf ongelijkheden moeten deze variabelen voldoen?

b Teken een assenstelsel en geef daarin het gebied aan dat voldoet aan de vijf ongelijkheden.

c Beide variabelen kunnen alleen gehele waarden aannemen. Hoeveel oplossingen zijn er mogelijk?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Lineaire ongelijkheid

Situaties kunnen soms wiskundig worden beschreven met ongelijkheden zoals: $k + v \leq 500$ of $5k + 3v \geq 10000$.

Om met deze ongelijkheden te kunnen rekenen, maak je er eerst een vergelijking van: $5k + 3v = 10000$

Zo'n vergelijking heeft met de variabelen x en y de algemene vorm: $px + qy = r$, waarin p, q en r getallen zijn. Omdat je $px + qy = r$ kunt schrijven als $y = ax + b$, is $px + qy = r$ een **lineair verband** tussen de variabelen x en y.

De bij dit lineaire verband horende **lineaire ongelijkheid** heeft de vorm:

$px + qy \leq r$ of $px + qy \geq r$

De punten (x,y) die aan zo'n ongelijkheid voldoen, vormen een **vlakdeel** met als **grenslijn** de lijn $px + qy = r$. De x-as en de y-as zijn ook vaak grenslijnen van zo'n vlakdeel.

Een **vlakdeel tekenen** van een ongelijkheid:

- Teken de grenslijn.
- Kies een punt dat niet op de grenslijn ligt en controleer of het aan de ongelijkheid voldoet.
  Met bijvoorbeeld het punt $(0,0)$ reken je makkelijk.
- Kleur het vlakdeel waarvoor de ongelijkheid geldt.

Soms moet je meerdere grenslijnen tekenen om een vlakdeel in te sluiten.

Opmerking 1:
Ongelijkheden kunnen ook de vorm $px + qy > r$ of $px + qy < r$ hebben. De grenslijn hoort dan niet bij het vlakdeel. Die situatie komt niet of nauwelijks voor.

Opmerking 2:
Er zijn grafische rekenmachines die een grafiek in de vorm $px + qy = r$ of een bijbehorende ongelijkheid kunnen tekenen.

Voorbeeld 1

Welke waarden voor x en y voldoen aan de vergelijkingen $3x + y = 10$ en $x + 2y = 15$?

Antwoord

Herleid beide formules tot de vorm $y = ax + b$.

- $3x + y = 10$ tot $y = -3x + 10$
- $x + 2y = 15$ tot $y = -0{,}5x + 7{,}5$

Je vindt x en y door de coördinaten van het snijpunt te berekenen.

Er zijn twee manieren:

1. Met de grafische rekenmachine: maak grafieken en bepaal het snijpunt.
2. Los de volgende vergelijking op en bereken met de gevonden x-waarde de y-waarde.

$$\begin{aligned} -3x + 10 &= -0{,}5x + 7{,}5 \\ -2{,}5x &= -2{,}5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Door in een van de formules $x = 1$ in te vullen, vind je $y = 7$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Laat zien hoe je beide formules herleidt tot de vorm $y = ax + b$.

b Gebruik de balansmethode. Welke waarden voor x en y voldoen aan $2x + 4y = 7$ en $3x - 4y = 8$?

c Gebruik de grafische rekenmachine. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig. Welke waarden voor p en q voldoen aan $p + 4q = 12$ en $3p - 2q = 6$?

Opgave 7

In een klein theater zijn twee soorten plaatsen: zaal en balkon. Voor een bepaalde voorstelling kost een zaalplaats € 12,50 en een balkonplaats € 15,00. Er worden die avond 216 kaarten verkocht met een totale opbrengst van € 2930,00.

Hoeveel mensen hadden een balkonplaats?

Voorbeeld 2

Geef in een assenstelsel het gebied aan met de punten die voldoen aan de ongelijkheden: $2x + 3y \leq 120$, $x + y \geq 30$, met $0 \leq x \leq 45$ en $y \geq 0$.

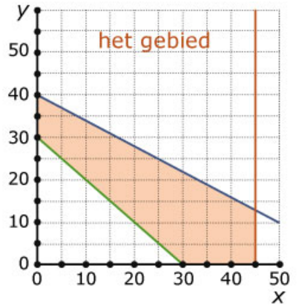
Antwoord

Behalve de x-as en de y-as zijn de grenslijnen:

- $2x + 3y = 120$, dus $y = -\frac{2}{3}x + 40$
- $x + y = 30$, dus $y = -x + 30$
- $x = 45$

Teken eerst een assenstelsel met zowel $x \geq 0$ als $y \geq 0$.

Teken nu per ongelijkheid de grenslijn en ga na of (bijvoorbeeld) het punt $(0,0)$ voldoet. Als dit zo is, dan zit je gebied aan de kant van de grenslijn waar dit punt ligt. Hiermee bepaal je aan beide grenslijnen het juiste gebied.



Figuur 5.4

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**.
Teken in een x,y-assenstelsel het gebied dat voldoet aan de ongelijkheden:
$x \geq 1$, $x \leq 4$, $x + 3y \leq 7$ en $x - 3y \leq 10$.

Opgave 9

Een rijwielhandelaar krijgt een aanbod van een fietsfabriek: hij kan een bepaald type fiets inkopen voor € 650,00 per stuk. Een fiets met elektrische trapondersteuning kan hij inkopen voor € 1300,00. Hij kan niet meer dan veertig fietsen in voorraad hebben en beschikt over maximaal € 39000,00 om te investeren. Verder koopt hij minstens tien fietsen met (elektrische) trapondersteuning in, omdat hij verwacht die gemakkelijk te kunnen verkopen.

a Noem het aantal gewone fietsen dat de rijwielhandelaar inkoopt g en het aantal fietsen met trapondersteuning t en beschrijf alle ongelijkheden waaraan deze twee variabelen moeten voldoen.

b Geef in een g,t-assenstelsel het gebied aan waarin aan alle bij a gevonden ongelijkheden wordt voldaan.

Op een gewone fiets wordt € 250,00 winst gemaakt en op een fiets met trapondersteuning € 400,00. De winkelier wil zo veel mogelijk winst maken met de verkoop van deze fietsen.

c Hoeveel fietsen van elke soort kan de winkelier het best inkopen?

Verwerken

Opgave 10

Bereken x en y.

a Met de balansmethode als: $x + 3y = 10$ en $x + y = 4$.

b Met de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig als: $2x - y = 10$ en $3x + 5y = 4$.

Opgave 11

In een x,y-assenstelsel wordt een gebied bepaald door de lineaire ongelijkheden:

- $x + 2y \leq 10$
- $y \leq 2x$
- $0 \leq x \leq 8$
- $y \geq 0$

Teken dit gebied en lees de coördinaten van de hoekpunten af.

Opgave 12

Een winkelier wil twee nieuwe merken waspoeder aan zijn klanten aanbieden. Beide merken zitten in dozen van vijf kilogram verpakt. Beide soorten dozen hebben dezelfde afmetingen. De winkelier heeft elke dag ruimte voor hoogstens vijftig van deze dozen waspoeder en hij wil in elk geval vijftien dozen van beide merken hebben staan aan het begin van de dag. Hij vult zijn schap met deze waspoeders uitsluitend aan het begin van elke dag bij. Merk A kost € 4,50 per doos, merk B kost € 5,25 per doos. a is het aantal dozen van merk A en b dat van merk B.

a Welke ongelijkheden gelden voor a en b?

b Geef in een assenstelsel alle mogelijke combinaties (a,b) weer.

Op een zekere dag heeft de winkelier voor precies € 183,00 aan dozen waspoeder van die twee merken verkocht.

c Welke vergelijking in a en b hoort hierbij?

d Hoeveel dozen waspoeder van merk A heeft de winkelier die dag verkocht?

Opgave 13

Om een heg te kunnen maken, koopt iemand jonge groenblijvende planten: 20 thuja´s en 12 jeneverbessen. Deze planten kosten samen € 267,00. Na het planten blijven 2 jeneverbessen over, maar zijn er 5 thuja's te weinig. Bij het tuincentrum worden de 2 jeneverbessen geruild voor 5 thuja's. De bijkomende kosten zijn € 18,00.

a Noem de prijs van een thuja t en die van een jeneverbes j. Welke twee lineaire verbanden zijn er tussen t en j?

b Wat kost een thuja en wat kost een jeneverbes?

Opgave 14

Een koffiebranderij gebruikt twee soorten koffie: Arabica en Robusta. Na het branden en fijnmalen worden de twee soorten koffie gemengd tot de melanges ‘goudmerk’ en ‘zilvermerk’. Goudmerk is een mengsel van 400 gram Arabica koffie en 100 gram Robusta koffie. Zilvermerk is een mengsel van 200 gram Arabica koffie en 300 gram Robusta koffie. De koffiebranderij kan dagelijks maximaal 6000 kg Arabica koffie en 6000 kg Robusta koffie verwerken tot maximaal 20000 pakken zilvermerk en 12000 pakken goudmerk, elk van 500 gram. Noem het aantal pakken goudmerk g en het aantal pakken zilvermerk z.

a Welke ongelijkheden gelden voor g en z?

b Geef in een assenstelsel alle mogelijke combinaties (g,z) weer.

De winst voor de koffiebranderij op een pak goudmerk is € 0,80 en die op een pak zilvermerk is € 0,50.

c Bij hoeveel verkochte pakken goudmerk en pakken zilvermerk per dag maakt deze fabrikant de meeste winst?

Toepassen

Opgave 15: Tablets

Een bedrijf assembleert twee typen tablets: type A en type B. Er is voor elk type tablet een assemblagelijn opgezet waarin per uur hoogstens 50 tablets kunnen worden samengesteld. Met het maken van tablet A is een werknemer 1 uur bezig. Het maken van tablet B kost een werknemer $1{,}5$ uur. Er zijn elk uur 90 werknemers bezig met de assemblage van deze tablets. Er kunnen maximaal 70 tablets per uur worden verpakt. Noem a het aantal tablets per uur van type A en b het aantal tablets per uur van type B.

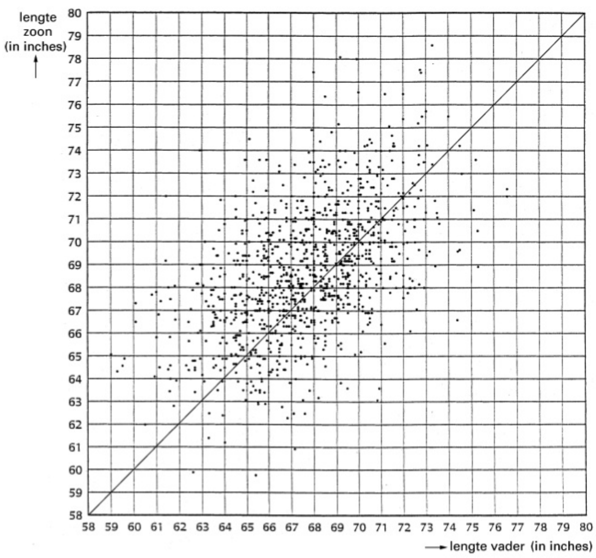
a Aan welke ongelijkheden moeten a en b voldoen?

b Teken het gebied in een a,b-assenstelsel met alle mogelijke combinaties (a,b).

c Tablet A wordt verkocht voor € 240,00 per stuk, tablet B voor € 300,00 per stuk. Hoeveel bedraagt de maximale opbrengst bij de verkoop van deze tablets als de hele productie ook daadwerkelijk wordt afgezet?

Opgave 16: Vaders en zonen

De Engelsman Karl Pearson was een van de grondleggers van de moderne statistiek. Hij heeft zich vaak beziggehouden met de statistiek van biologische onderwerpen. Ongeveer een eeuw geleden onderzocht hij, samen met zijn collega Alice Lee, of in Engeland zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders. Zij vergeleken de lengtes van 1064 zonen en hun vaders. De zonen studeerden allen aan een Londonse universiteit.



Figuur 5.5

In de grafiek zie je een overzicht van de resultaten. Elke stip stelt een vader-zoon-paar voor. De lengte van de vader staat op de horizontale as, de lengte van de zoon op de verticale as. De lengtes zijn gegeven in inches (1 inch $= 2{,}54$ centimeter).

In de grafiek is een lijn getekend. Als een stip op deze lijn ligt, zijn de vader en de zoon precies even lang. We noemen een vader en zijn zoon ongeveer even lang als ze minder dan 2 inch in lengte verschillen.

a Geef de ongelijkheden die horen bij het gebied dat hoort bij vaders en zonen die ongeveer even lang zijn.

b Kun je aan de hand van het aangegeven gebied in a concluderen dat de zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders? Licht je antwoord toe.

(naar: examen wiskunde A in 2003, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 17

Teken in een assenstelsel het gebied dat voldoet aan de lineaire ongelijkheden: $x + 5y \leq 15$; $0 \leq x \leq 5$ en $y \geq 0$.

Opgave 18

In een bak zitten 1000 pakjes. In een aantal van die pakjes zit een cadeautje ter waarde van € 9,00; in de overige pakjes zit een cadeautje ter waarde van € 1,00. Het totale bedrag aan cadeautjes is € 3000,00. Je wilt berekenen hoeveel pakjes met een cadeautje van € 9,00 er in de bak zitten. Je noemt het aantal pakjes met een cadeautje van € 9,00 x en het aantal andere pakjes y.

a Aan welke twee formules moeten x en y voldoen?

b Bereken de waarden x en y die aan beide formules voldoen.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Lineaire verbanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd, kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

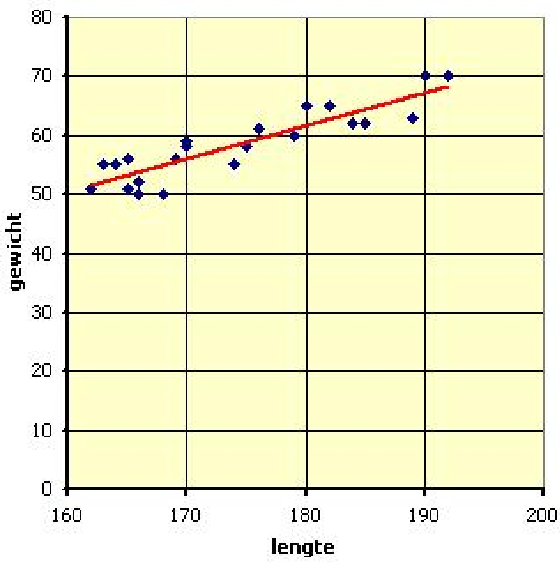
- recht evenredig — evenredigheidsconstante — hellingsgetal
- lineaire functie — hellingsgetal = richtingscoëfficiënt
- lineair model
- lineaire vergelijking — lineaire ongelijkheid
- lineaire vergelijking en lineaire ongelijkheid met twee variabelen

Activiteitenlijst

- een recht evenredig verband tussen twee variabelen herkennen
- een lineaire functie herkennen — hellingsgetal en begingetal gebruik om de grafiek te tekenen — een lineaire functie opstellen vanuit een begingetal en een hellingsgetal
- een lineaire functie opstellen vanuit twee gegeven punten
- lineaire vergelijkingen en ongelijkheden systematisch oplossen
- gebieden bij lineaire ongelijkheden tekenen — eenvoudige stelsels lineaire vergelijkingen oplossen

Achtergronden

In praktijksituaties wordt een verband tussen twee variabelen vaak onderzocht door te meten. Een eenvoudig voorbeeld is het verband tussen lengte en gewicht bij mensen. Langere mensen zullen gemiddeld wel zwaarder zijn dan kleinere, dus het lijkt er op dat er tussen lengte L (cm) en gewicht G (kg) een verband bestaat. Dat kun je voor scholieren in 4-havo bijvoorbeeld onderzoeken door een steekproef te nemen (bijvoorbeeld alle havo 4-leerlingen van een bepaalde school) en daarvan lengte en gewicht te meten. Als je die gegevens in een Excelbestand zet en vervolgens een grafiek (kies grafiektype 'Spreiding') maakt, kun je bekijken of er als grafiek ongeveer een rechte lijn uitkomt. In Excel kun je de rechte lijn die het beste bij je meetpunten past, laten tekenen (Invoegen: Trendlijn). Zelf kun je er dan wel een formule bij maken. Excel past hierbij lineaire regressie toe. Het verband is alleen betrouwbaar als je meetpunten ook echt redelijk dicht bij de getekende trendlijn liggen.



Figuur 6.1

Testen

Opgave 1

Los de lineaire vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $\frac{1}{6}x + 5 = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x$

b $40 + 0{,}16a \leq 36 + 0{,}18a$

c $\frac{3x-5}{4} + 2 > \frac{1}{8}x + 1\frac{1}{2}$

d $25(x - 10) = 110 - 20x$

Opgave 2

Een zwembad vraagt € 3,00 toegang per bezoek. Met een abonnement is de toegang € 1,25 per bezoek. Een abonnement kost € 17,50 per jaar. Bereken algebraïsch vanaf welk aantal bezoeken per jaar het voordeliger is om een abonnement te kopen.

Opgave 3

Twee hardlopers lopen 1000 meter in een vrijwel constant tempo. Ton loopt met een snelheid van 15 km per uur, Henk met een snelheid van 12 km per uur. Henk begint 2 minuten eerder aan de 1000 meter dan Ton.

a Hoe groot zijn hun snelheden in meters per minuut?

b Hoeveel meter ligt Henk op Ton voor als Ton aan zijn 1000 meter begint?

c Voor Ton geldt de formule $a = 250t$, waarin t de tijd en a de afgelegde afstand (vanaf de start van de 1000 meter). Welke eenheden zijn er gebruikt? Is voor Ton a recht evenredig met t?

d Welke formule met dezelfde variabelen geldt dan voor Henk? Is voor Henk a recht evenredig met t?

e Breng beide grafieken in beeld. Wie is het eerst aan het einde van de 1000 meter gekomen en hoeveel ligt hij dan op de ander voor?

Opgave 4

De huurprijs van een kopieerapparaat is opgebouwd uit € 225,00 per maand en € 0,06 per gemaakte kopie.

a Geef een formule voor de huurprijs h in euro's per maand, afhankelijk van het aantal gemaakte kopieën n.

b Hoeveel kopieën zijn er gemaakt als de huur € 378,96 is?

Een andere firma biedt een gelijkwaardig kopieerapparaat aan tegen de huurprijs van € 0,10 per gemaakte kopie, zonder daarbij een vast bedrag per maand te rekenen.

c Bij welk aantal gemaakte kopieën is deze tweede aanbieder voordeliger?

Opgave 5

Rachel hangt verschillende gewichten aan een veer en meet de uitrekking. m is de massa van de gewichten in grammen, u is de uitrekking van de veer in centimeters. Ze zet de meetwaarden in een tabel.

m	10	20	30	40	50	60	70	80
u	4,8	10,3	15,1	19,7	25,0	29,8	35,2	40,1

Tabel 6.1

a Zet de punten in een assenstelsel. Waarom is er sprake van een lineair verband (bij benadering)?

b Geef de formule die u uitdrukt in m.

c Als er 50 gram aan de veer hangt, is de totale lengte l van de veer 35 cm. Geef de formule die l uitdrukt in m.

Een tweede veer is zonder gewicht eraan 8 cm lang en met 10 gram eraan $15{,}5$ cm lang.

d Geef de formule die de lengte l van deze tweede veer uitdrukt in m.

e Er is een massa die ervoor zorgt dat de totale lengte van beide veren gelijk is. Bereken deze massa.

Opgave 6

Iemand investeert € 10000 die voor hem wordt belegd in twee aandelenfondsen A en B. De aandelen in fonds A leveren minder winst op, maar er is weinig risico dat deze aandelen sterk in waarde zullen dalen. De aandelen in fonds B lijken meer winst te gaan opleveren, maar er is een groter risico aan verbonden. Fonds A levert na een jaar een winst van 10% op, fonds B levert dat jaar 14% winst op. In totaal wordt er € 1180 winst aan deze investeerder uitgekeerd. a is het bedrag dat voor hem in fonds A is belegd, b is het bedrag dat in fonds B is belegd.

a Aan welke twee formules moeten a en b voldoen?

b Bereken met behulp van een vergelijking hoeveel geld er voor de investeerder in fonds A is belegd.

Opgave 7

Een fabrikant produceert twee soorten papieren zakdoekjes in pakjes van tien stuks. In een wit pakje zitten geurloze zakdoekjes, in een groen pakje zitten zakdoekjes met een mentholgeur. Voor de productie van deze zakdoekjes is nodig:

- voor een pakje geurloze zakdoekjes: 20 gram papier en 1 wit hoesje
- voor een pakje mentholzakdoekjes: 25 gram papier, 1 centiliter mentholoplossing en 1 groen hoesje

Per dag is beschikbaar: 100 kilogram papier, 20 liter mentholoplossing, 3000 witte hoesjes en 2500 groene hoesjes. x is het aantal pakjes geurloze zakdoekjes dat per dag wordt geproduceerd en y is het aantal geproduceerde pakjes mentholzakdoekjes per dag.

a Aan welke ongelijkheden moeten x en y voldoen?

b Teken het gebied met alle mogelijke combinaties (x, y) in een assenstelsel.

De winst op een pakje geurloze zakdoekjes is € 0,08 en die op een pakje mentholzakdoekjes is € 0,09.

c Bereken de maximale winst die haalbaar is.

Opgave 8

In de zeventiger jaren bestonden verschillende tarieven voor het gebruik van aardgas (voor het gemak zijn de bedragen omgerekend van gulden in euro). In een bepaalde gemeente geldt dan:

- bij een jaarverbruik tot en met 600 kubieke meter (m^3): vastrecht € 21,00 per jaar en daarbovenop € 0,13 per verbruikte m^3 (klein verbruik)
- bij een jaarverbruik van meer dan 600 kubieke meter (m^3): vastrecht € 48,00 per jaar en daarbovenop € 0,08 per verbruikte m^3 (groot verbruik)

a De grafiek voor het jaarverbruik valt in twee delen uiteen. Voor elk van die delen zijn de jaarlijkse kosten een lineaire functie van a, het aantal verbruikte m^3. Geef van elk van die lineaire functies een formule.

b Teken een grafiek van de jaarlijkse kosten K voor het gasverbruik a lopend van 0 tot 900 kubieke meter (m^3).

c Een tuinder die aan de meterstand ziet dat hij op een jaarverbruik van ongeveer 590 m^3 uit zal komen, verbrandt gas af. Wat denk je dat gas afbranden is en waarom doet de tuinder dat?

d Vanaf welk jaarverbruik levert het gas afbranden een besparing op?

e Welke maatregelen kan het gasbedrijf treffen om gas afbranden te voorkomen?

Toepassen

Opgave 9: Afgelegde weg, snelheid en versnelling

In Nederland geldt op sommige plaatsen een maximumsnelheid van 100 km/uur. Een automobilist rijdt omdat er verder vrijwel geen verkeer op de weg is toch 140 km/uur op zo'n weggedeelte. Een verdekt opgestelde motoragent ziet hem voorbijschieten en zet de achtervolging in. Neem $t = 0$ op het moment dat de motor op topsnelheid is. Dit is 16 seconden nadat de auto de motoragent passeert; de motor heeft dan 300 m afgelegd. Neem ook aan dat de auto met een constante snelheid rijdt en de motor een constante topsnelheid van 200 km/h heeft.

a Hoeveel meter voorsprong heeft de auto op het moment dat de motor op topsnelheid is?

b Stel een formule op voor de afgelegde weg $a(t)$ van de auto. Kies geschikte eenheden.

c Stel een formule op voor de afgelegde weg $m(t)$ van de motor op topsnelheid.

d Hoeveel seconden nadat hij op topsnelheid rijdt heeft de motor de auto ingehaald?

Opgave 10: Cijfers vaststellen

Bij het bepalen van het cijfer van een toets wordt uitgegaan van een lineair verband tussen de score s en het cijfer c. Neem aan dat de maximale score 80 punten is. Bij een score van 80 punten hoort als cijfer een 10, bij een score van 0 punten hoort als cijfer een 1. De omslagscore is de score waarbij het cijfer $5{,}5$ (dus net voldoende) is.

a Met welke formule kun je de score omzetten naar een cijfer?

b Hoeveel bedraagt de omslagscore?

Als een toets zeer slecht wordt gemaakt, dan kun je als docent de cijfers wat ophogen door de omslagscore te veranderen. Bijvoorbeeld verlaag je de omslagscore met 5 punten. Nog steeds levert een score van 0 punten een 1 en een score van 80 punten een 10 op. De grafiek van c als functie van s bestaat dan uit twee lineaire gedeelten.

c Welke twee formules heb je nu nodig om het cijfer te berekenen?

d Welk cijfer krijgt iemand die zonder ophogen een 6 zou krijgen?

Is een toets daarentegen erg gemakkelijk, dan kan de docent de cijfers naar beneden bijstellen door de omslagscore te verhogen. Stel dat een docent met zichzelf afspreekt dat hij achteraf de omslagscore met maximaal 5 punten zal verlagen of verhogen, afhankelijk van de resultaten van de toets.

e Je zou zonder bijstelling een $5{,}8$ halen. Welk cijfer kan dit maximaal nog worden? En minimaal?

Opgave 11: Economisch evenwicht

Economen werken vaak met stelsels vergelijkingen. Het gaat daarbij om variabelen als prijs, hoeveelheid, inkomsten, winst, en dergelijke. Een voorbeeld daarvan is een model van vraag en aanbod op een graanmarkt. Vraag en aanbod in een periode hangen af van de prijs gedurende die periode, zoals je in de tabel kunt zien. Bij een (te) lage prijs ontstaat er een grote vraag en een laag aanbod. Daardoor gaat de prijs weer omhoog.

	prijs per ton	totale vraag	totale aanbod
	p	q_v	q_a
periode 1	€ 200,00	5000 ton	2000 ton
periode 2	€ 400,00	4000 ton	5000 ton
periode 3	€ 600,00	3000 ton	8000 ton

Tabel 6.2

Er zijn drie variabelen, namelijk p (de prijs per ton in euro), q_v (de totale vraag in ton) en q_a (het totale aanbod in ton). Economen zijn geïnteresseerd in de waarde voor p waarbij vraag en aanbod in evenwicht zijn. Dus: $q_v = q_a$.

a Teken in één figuur de grafieken van q_a uitgezet tegen p en van q_v uitgezet tegen p.

De grafieken suggereren dat je lineaire formules voor q_a en q_v afhankelijk van p kunt opstellen.

b Stel deze formules op.

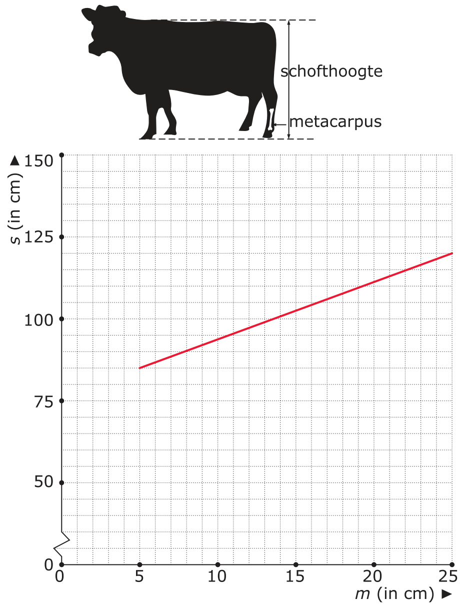
c Bereken de evenwichtsprijs, dus de prijs waarvoor $q_v = q_a$.

d Wat gebeurt er met de evenwichtsprijs als de vraag afneemt?

Examen

Opgave 12: Schofthoogte

Oudheidkundigen proberen informatie te krijgen over de voedselsituatie van vroegere bewoners van een nederzetting. Uit botjes in afvalputten blijkt welke dieren men vroeger at en soms ook hoeveel. Niet bekend is hoeveel voedsel een rund uit die tijd opleverde, maar daarover zou de grootte van het dier informatie kunnen geven. Als maat voor de grootte neemt men de schofthoogte. Meestal ontbreken er botten die nodig zijn om de schofthoogte te bepalen. Vaak treft men wel een middenvoetsbeentje (metacarpus) aan. Men heeft voor twee runderrassen, A en B, kunnen vaststellen dat er tussen de metacarpus en de schofthoogte een verband bestaat. Dat verband verschilt per ras. De grafiek geeft het verband tussen de schofthoogte s en de lengte van de metacarpus m voor ras A.



Figuur 6.2

a Stel de formule op die bij deze grafiek past.

Voor ras B geldt de formule: $s = 5m + 16$, met $5 \leq m \leq 25$.

b Neem de grafiek over en teken in rood de grafiek bij de formule van ras B in die figuur.

c Bereken in millimeters nauwkeurig bij welke waarde van m de schofthoogten van beide rassen gelijk zijn.

In theorie zou bij opgegeven waarden van m en s van een dier vastgesteld kunnen worden of het een dier van ras A of van ras B betreft, met uitzondering van de situatie zoals bedoeld in c. In werkelijkheid is het verband tussen de lengte van de metacarpus en de schofthoogte niet zo precies als de formules aangeven. We nemen aan dat bij elke lengte van de metacarpus de schofthoogte kan variëren van 2 cm onder de aangegeven waarde tot 2 cm erboven.

d Bepaal met behulp van de grafieken bij welke lengtes van de metacarpus er problemen kunnen optreden bij het vaststellen van het ras.

Uit de schofthoogte kan bij benadering het levend gewicht van een rund worden afgeleid. Er blijkt een verband te bestaan dat nagenoeg lineair is. Gegevens over dit verband staan in de tabel.

schofthoogte (cm)	levend gewicht ras A (kg)	levend gewicht ras B (kg)
110	400	380
120	470	435

Tabel 6.3

De lengte van een gevonden metacarpus is 21 cm. Het botje kan van een rund van ras A of van ras B zijn.

e Bereken voor een rund van ras A en voor een rund van ras B het levend gewicht bij een metacarpus van 21 cm.

(bron: examen havo wiskunde A in 1990, eerste tijdvak)

Opgave 13: Veldkrekels

Onderstaande tekst is ontleend aan het *Brabants Dagblad* van 28 mei 1997.

> De veldkrekel is een toonkunstenaar. Moeiteloos sjirpt hij een hoge C. Het tempo van de roepzang is afhankelijk van het weer. Bij fris weer laat de veldkrekel gemiddeld één sjirp per seconde horen, bij warm weer wel gemiddeld vijf,met alle variaties daartussen. Sterker, de veldkrekel kan eigenlijk wel als een thermometer gebruikt worden.
> De onderzoeker M. Duijm heeft daar eens een berekening voor uitgedokterd. Het rekenvoorschrift luidt: neem het gemiddelde aantal sjirpen per vijf seconden, tel er zeven bij op, en je weet de temperatuur in graden Celsius.
> Midas Dekkers evenwel hanteert een rekenvoorschrift waarbij je moet uitgaan van het gemiddeld aantal sjirpen per minuut. Je trekt er veertig van af, deelt de uitkomst door zeven en telt er tien bij op.

Stel dat een krekel op een zeker moment gemiddeld $2{,}4$ sjirpen per seconde maakt. Als we met de twee rekenvoorschriften de temperatuur op dat moment berekenen, vinden we twee heel verschillende uitkomsten.

a Hoeveel graden verschillen die uitkomsten? Licht je antwoord toe.

b Stel voor M. Duijm en voor Midas Dekkers de formule op die de temperatuur t (in °C) uitdrukt in het gemiddeld aantal sjirpen n per seconde.

Voor het verschil dat bij a gevonden is, is een eenvoudige verklaring: niet alle krekels sjirpen hetzelfde. Het rekenvoorschrift van Duijm geldt voor de veldkrekel, terwijl Dekkers het heeft over de sneeuwboomkrekel. Bij alle soorten krekels sjirpen de mannetjes om wijfjes te lokken. De wijfjes herkennen hun eigen soort aan de sjirpsnelheid, dus aan het aantal sjirpen per seconde.

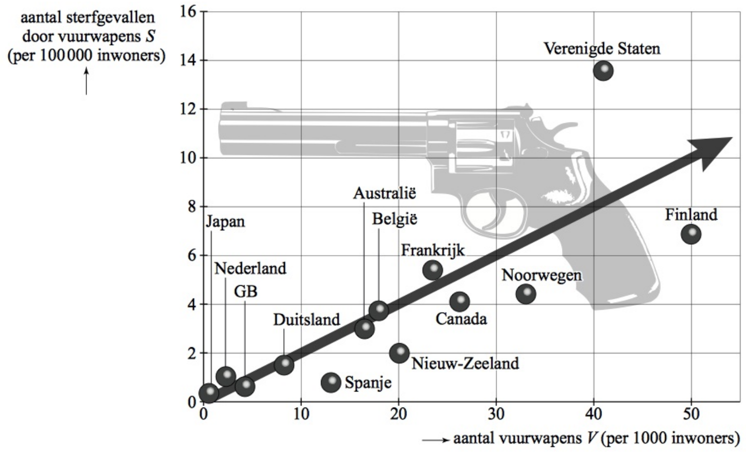
c Bij welke temperatuur kan het veldkrekelvrouwtje geen verschil horen tussen een veldkrekelmannetje en een sneeuwboomkrekelmannetje? Licht je antwoord toe door algebraïsch een bijpassende vergelijking op te lossen.

(naar: examen wiskunde A havo 1999, tweede tijdvak)

Opgave 14: Vuurwapens

De regels omtrent het vuurwapenbezit zijn per land verschillend. Deze regels staan ook wel eens ter discussie. Tegenstanders van vuurwapenbezit beweren dat het gebruik van wapens toe zal nemen als mensen makkelijker aan vuurwapens kunnen komen.

Voorstanders van vuurwapenbezit zeggen dat het niet de wapens zijn die doden, maar de mensen. Zij vinden dat mensen vrij moeten zijn om een vuurwapen aan te schaffen, omdat meer vuurwapens niet betekent dat er dan ook meer gebruik van wordt gemaakt.



Figuur 6.3

Het vuurwapenbezit en het aantal dodelijke slachtoffers door vuurwapens is in een aantal landen onderzocht. De onderzoeksresultaten zie je in de grafiek.

De grafiek geeft het verband weer tussen het jaarlijkse *aantal sterfgevallen door vuurwapens* S (per 100000 inwoners) en het *aantal vuurwapens* V (per 1000 inwoners). Behalve de gegevens van een aantal landen is in de grafiek ook een trendlijn getekend. Voor landen op de trendlijn is er sprake van een evenredig verband tussen S en V.

Zowel voorstanders als tegenstanders van vuurwapenbezit kunnen de grafiek gebruiken als steun voor hun standpunt.

a Geef een argument dat voorstanders uit deze grafiek kunnen halen en geef een argument dat tegenstanders uit de grafiek kunnen halen.

Nederland heeft ongeveer 17 miljoen inwoners, de Verenigde Staten ongeveer 295 miljoen.

b Bereken met behulp van de grafiek hoeveel keer zo groot het jaarlijks aantal sterfgevallen door vuurwapens in de Verenigde Staten is, vergeleken met Nederland.

In 2005 heeft de bevolking van Brazilië zich in een referendum uitgesproken tegen het beperken van de verkoop van vuurwapens. En dat terwijl er in dit land met 180 miljoen inwoners jaarlijks zo'n 40000 mensen sterven door vuurwapengebruik.

Ga ervan uit dat Brazilië op de trendlijn ligt, zodat je gebruik kunt maken van het evenredige verband tussen S en V.

c Bereken met behulp van dit evenredige verband het totaal aantal vuurwapens in Brazilië.

(bron: examen havo wiskunde A in 2009, eerste tijdvak)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

Math4all

www.math4all.nl