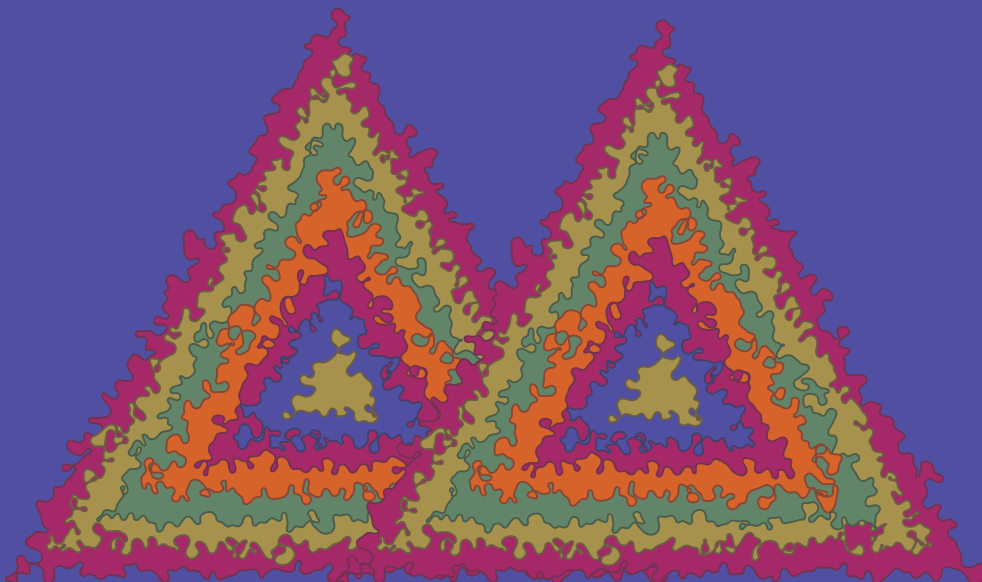


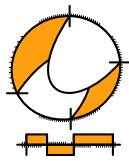
Wiskunde A

4 HAVO

Katern 2

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1	Werken met data	5
1.1	Data ordenen	6
1.2	Statistische variabelen	20
1.3	Diagrammen	31
1.4	Misleidingen	47
1.5	Totaalbeeld	59

2	Formules	67
2.1	Formules gebruiken	68
2.2	Grafieken maken	77
2.3	Vergelijkingen	87
2.4	Ongelijkheden	94
2.5	Meerdere variabelen	101
2.6	Totaalbeeld	109

Register 115

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Werken met data

1.1	Data ordenen	6
1.2	Statistische variabelen	20
1.3	Diagrammen	31
1.4	Misleidingen	47
1.5	Totaalbeeld	59

1.1 Data ordenen

Inleiding

Bij statistiek draait het allemaal om onderzoek. Het doel ervan is uitspraken doen; deze uitspraken moeten onderbouwd worden met cijfers, diagrammen en berekeningen. Je kunt bij een onderzoek nooit alle Nederlanders of alle jongeren onderzoeken. Je moet bij een onderzoek een goede selectie uit alle Nederlanders of uit alle jongeren bekijken. Hoe doe je dat? Het woord statistiek is afkomstig uit het Latijn: 'statisticum collegium'. Dit betekent: les over staatszaken. Je zou kunnen zeggen de analyse van staatsgegevens.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- statistische variabelen herkennen en ordenen;
- beoordelen of er conclusies getrokken kunnen/mogen worden.

Voorkennis

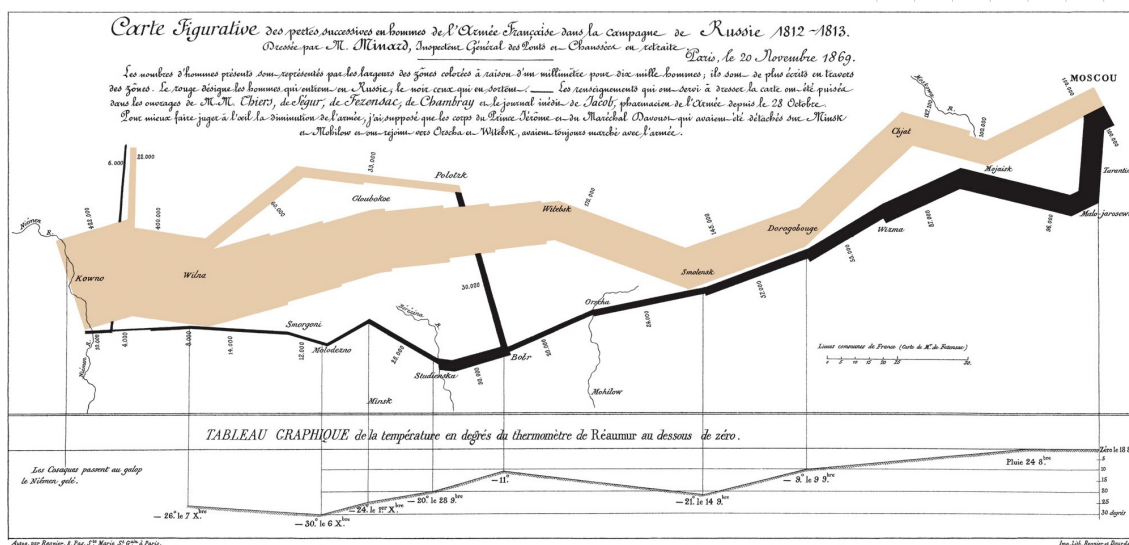
- rekenen met getallen, ook met procenten;
- tabellen en diagrammen interpreteren.

Verkennen

Opgave V1

In 1812 trok het Franse leger onder aanvoering van de Franse keizer Napoleon ten strijde tegen Rusland. Deze campagne begon aan de rivier de Niemen en leidde naar Moskou. Dit leger stuitte op flinke weerstand en werd bij Moskou verslagen. De terugtocht was vreselijk, mede door de extreme koude. Dit is de figuur die de Franse ingenieur Charles Joseph Minard (1781-1870) tekende om het verloop van deze Russische veldtocht weer te geven.

De kaart kun je ook bekijken op wikipedia.



Figuur 1.2

Je ziet dat het Franse leger met 422000 man uit Polen vertrok richting Moskou. Het aantal mensen waaruit het leger bestond is een statistische variabele.

- a Hoeveel mensen van dit leger kwamen aan in Moskou?
- b Hoeveel mensen kwamen weer bij het startpunt terug?
- c Hoeveel procent van dit Franse leger is tijdens de Russische veldtocht overleden?
- d Op de terugweg zijn ook af en toe de dagtemperaturen gemeten. Welke laagste dagtemperatuur is er gemeten?
- e De temperatuur is aangegeven in graden Réaumur ($^{\circ}\text{Re}$). Nu is 0°C hetzelfde als 0°Re en 100°C hetzelfde als 80°Re . Hoeveel graden was de laagste dagtemperatuur in $^{\circ}\text{C}$?

Opgave V2

Bekijk de figuur van Minard in de vorige opgave. Je kunt erin aflezen uit hoeveel personen Napoleons leger op bepaalde momenten bestond, hoe de gevolgde route er uitzag en met welke temperaturen het leger op de terugweg te maken kreeg. Bekijk nu vooral die terugweg.

- a Op welke twee manieren geeft dit diagram de grootte van het leger weer?
- b Welke andere twee variabelen worden er in getallen uitgedrukt?
- c Welke variabele wordt niet in een getal uitgedrukt? Hoe wordt die variabele zichtbaar gemaakt?
- d Maak voor de terugtocht een tabel waarin je bij elke datum die je in de figuur kunt aflezen de grootte van het leger tegen de temperatuur uitzet. Hoe zou je deze gegevens op een andere manier dan in Minards diagram grafisch kunnen voorstellen?
- e Welk doel heeft Minard waarschijnlijk gehad met zijn diagram? Licht je antwoord toe.

Opgave V3

Op de [website van het Centraal Bureau voor de Statistiek](#), afgekort CBS, vind je een schat aan informatie. Bekijk de startpagina van de website van het CBS. Op de startpagina stond op zeker moment deze informatie:



Figuur 1.3

- Hoeveel mensen telde Nederland op dat moment? En hoeveel nu?
- Het CBS spreekt in haar toelichting over een schatting van het aantal inwoners. Licht dit toe.
- Wat lees je af onder Kerncijfers Arbeid?
- Het percentage werklozen is begin 2009 aan het stijgen. Kun je op grond van alleen deze gegevens zeggen dat ook het aantal werklozen in die periode stijgt? Waarom is dit wel erg waarschijnlijk?

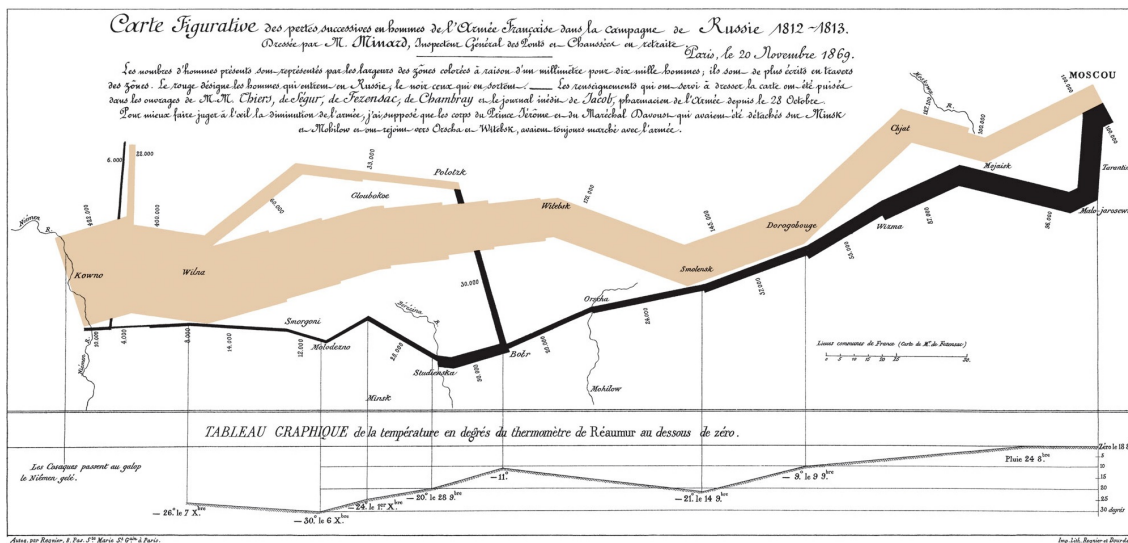
Uitleg

Het woord statistiek ontstond in de tijd van Napoleon, toen het bestuur van de verschillende Europese staten (in de achttiende eeuw) zo ingewikkeld werd dat een nauwkeurige kennis van staatszaken belangrijk werd.

Tegenwoordig moet je dat wat ruimer opvatten: ook bedrijven, onderzoeksinstituten en particulieren buiten de overheid verzamelen en ordenen gegevens en doen dus aan statistiek. Die gegevens worden in de vorm van tabellen, diagrammen, kaarten of een combinatie daarvan overzichtelijk weergegeven. Op de website van het [CBS \(Centraal Bureau voor de Statistiek\)](#) vind je hier veel voorbeelden van.

In de figuur van Minard gaat het om de soldaten van het Franse leger dat onder Napoleon naar Moskou trok. Deze soldaten vormen de elementen van een statistisch onderzoek naar hun wel en wee. Napoleons leger was de onderzochte populatie. Een van de onderwerpen van het onderzoek was het aantal soldaten afhankelijk van de vordering van de tocht. Dit aantal soldaten was een van de statistische variabelen die Minard onderzocht. De gegevens omtrent

het aantal soldaten op een bepaald punt tijdens de tocht vormen de door Minard verzamelde data. Data zijn dus statistische gegevens. In Minards diagram zijn ook data over andere variabelen te vinden.



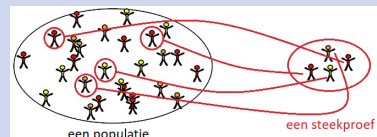
- g Hoe komt het dat het totale aantal Nederlanders gedeeld door de bevolkingsdichtheid niet voor elk jaar hetzelfde getal is? Geef minstens twee verklaringen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De wetenschap, de methodiek en de techniek van het verzamelen, bewerken, interpreteren en presenteren van gegevens heet **beschrijvende statistiek**. Een statistisch onderzoek kent diverse fasen:

- Je begint een statistisch onderzoek met een **onderzoeksvraag**.
- Je stelt vast over welke **populatie** (doelgroep) het onderzoek gaat. Bij een grote doelgroep neem je een deel van de groep, dit heet een **steekproef**. Deze steekproef moet **aselect** (volstrekt willekeurig samengesteld) en **representatief** (kenmerkend) zijn voor de populatie.
- Je stelt vast op welke **statistische variabele** het onderzoek betrekking heeft.
- Je verzamelt de bij die variabele passende **data** (de statistische gegevens). Deze data moet je meestal eerst **ordenen**. De verzamelde data geef je weer in de vorm van tabellen en diagrammen: tabellen zijn nauwkeuriger, diagrammen vaak overzichtelijker.
- Je probeert een (eerlijke) **conclusie** te trekken.



Figuur 1.5

Voorbeeld 1

Statistiek is het verzamelen, bewerken, interpreteren en presenteren van gegevens. Dat is waar onder andere het CBS zich mee bezig houdt.

Bekijk de tabel 'Bevolking; kerncijfers'.

Bevolking; kerncijfers naar diverse kenmerken			CBS juli 2009						
Onderwerpen	Onderwerpen	Perioden	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2008
Bevolking naar geslacht	Totale bevolking	aantal	10026773	11417254	12957621	14091014	14892574	15863950	16405399
	Mannen	aantal	4996251	5686152	6465081	6994280	7358482	7846317	8112073
Bevolkingsgroei	Totale bevolkingsgroei	aantal	5028522	5731102	6492540	7096734	7534092	8017633	8293326
	Totale bevolkingsgroei, relatief	per 1 000 inw.	17,3	12,2	12,5	8,3	7,9	7,8	4,9
Overleden	Levendgeborenen	aantal	229718	239128	238912	181294	197985	206619	184669
	Overleden	aantal	75929	87825	109619	114279	128824	140527	134996
Geboortefoverschot	Geboortefoverschot	aantal	153789	151303	129293	67015	69141	66092	49673
	Geboortefoverschot, relatief	per 1 000 inw.	15,2	13,2	9,9	4,7	4,6	4,2	3
Bevolkingsdichtheid	Bevolkingsdichtheid	aantal	309	352	384	415	439	468	486

Tabel 1.1

- Welke mogelijke onderzoeksvraag kun bij deze tabel opstellen?
- Stel vast over welke populatie (doelgroep) het onderzoek gaat.
- Stel vast op welke statistische variabelen het onderzoek betrekking heeft.
- De data zijn al verzameld en geordend in een tabel door het CBS. Noem een voordeel van het ordenen van data in een tabel en een voordeel van het ordenen van data in een diagram.
- Waarover kunnen er aan de hand van deze gegevens conclusies getrokken worden?
- Welke conclusie kan er getrokken worden over de bevolkingsdichtheid?

Antwoord

- Een mogelijke onderzoeksvraag is:
Hoe is het aantal Nederlanders in de loop van de jaren veranderd?
- De populatie is:
De Nederlandse bevolking.
- De variabelen zijn:
totale bevolking, aantal mannen, aantal vrouwen, totale bevolkingsgroei, aantal levendgeborenen, aantal overledenen, geboorteoverschot en bevolkingsdichtheid
Deze variabelen variëren met de tijd.
- Tabellen zijn nauwkeuriger, diagrammen vaak overzichtelijker.
- Er kunnen conclusies getrokken worden over:
totale bevolking, aantal mannen, aantal vrouwen, totale bevolkingsgroei, aantal levendgeborenen, aantal overledenen, geboorteoverschot en bevolkingsdichtheid.
- Een juiste conclusie over de bevolkingsdichtheid is:
De bevolkingsdichtheid is in de loop van de tijd toegenomen, dat betekent dat er steeds meer Nederlanders op één vierkante kilometer wonen.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Het CBS verzamelt dergelijke gegevens door het bevragen van de gemeenten in Nederland.

- Licht toe hoe je de waarden van *totale bevolkingsgroei*, *relatief* kunt berekenen uit de *totale bevolking* en de *totale bevolkingsgroei*.
- Laat met een berekening zien dat de waarde *totale bevolkingsgroei*, *relatief* voor 2008 klopt.
- Welke uitspraak zou je op grond van deze tabel kunnen doen over de variabele *totale bevolkingsgroei*, *relatief*?

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** komt ook de variabele *bevolkingsdichtheid* voor.

- Hoe berekent het CBS de bevolkingsdichtheid?
- Klopt het dat tussen 1950 en 2000 de oppervlakte van Nederland groter is geworden? Reken na hoeveel km^2 ongeveer.

Opgave 5

Bekijk nog eens de variabele *bevolkingsgroei*.

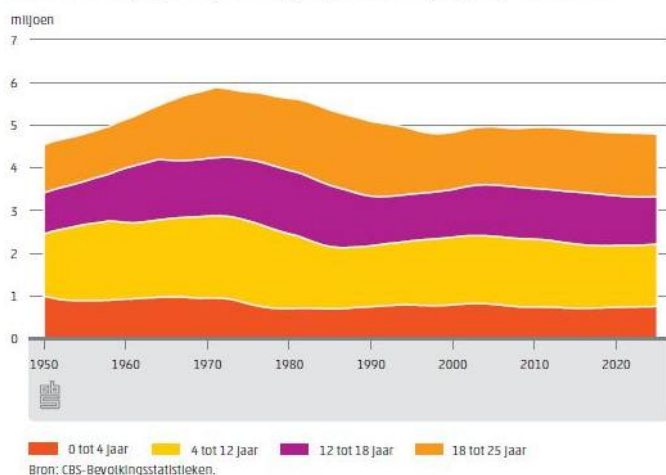
- Waaraan zie je dat deze variabele niet alleen kan worden bepaald uit *totale bevolking* en *geboorteoverschot*?
- Waar moet je om de bevolkingsgroei te berekenen ook nog rekening mee houden?
- In welke periode was het geboorteoverschot groter dan de bevolkingsgroei?
- Wat betekent dit?

Verwerken

Opgave 6

Het CBS doet in Nederland veel onderzoek en rapporteert hierover. Deze diagrammen komen uit de Jongerenmonitor 2013.

1.1.2 Aantal jongeren (0 tot 25 jaar) naar leeftijdsgroep, 1950-2025

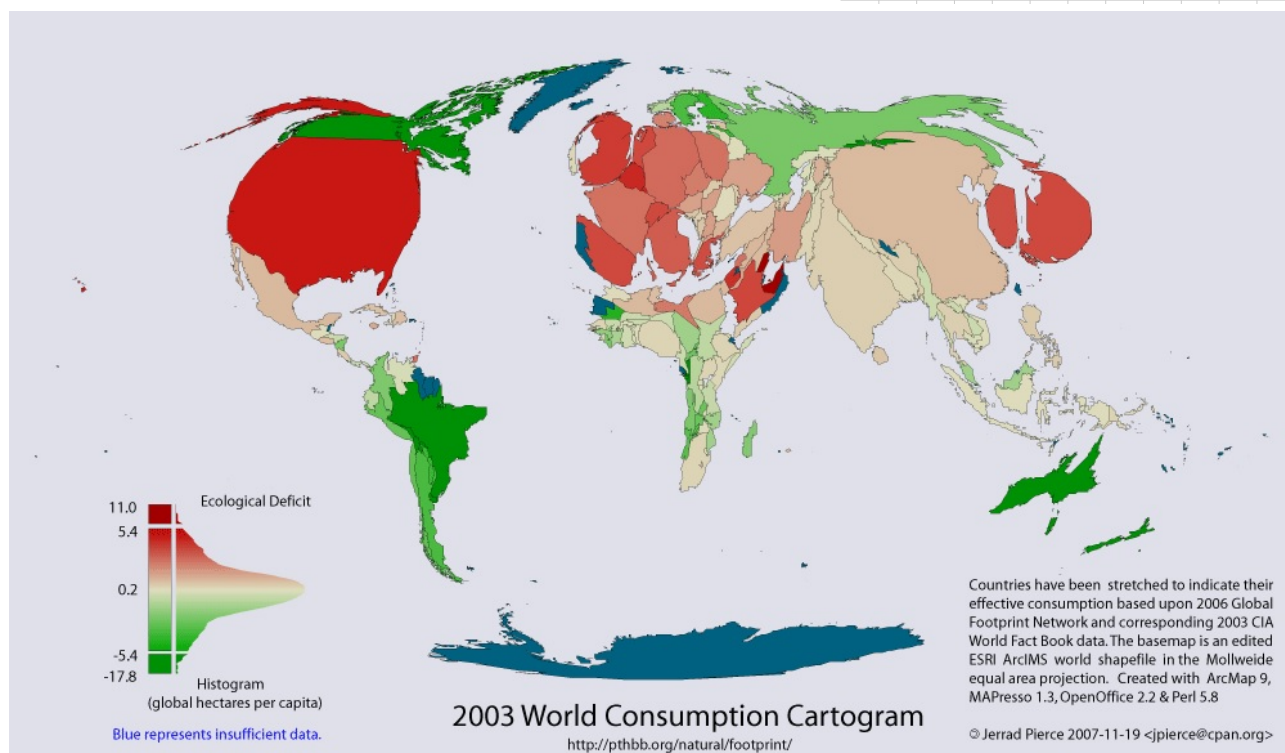


Figuur 1.6

- Wat is de populatie bij dit onderzoek van het CBS geweest?
- Wat is de definitie van jongeren in dit onderzoek geweest, denk je?
- Welke deelgroepen zijn onderscheiden?
- Welke variabele is in dit diagram weergegeven?

Opgave 7

De ecologische voetafdruk is een getal dat weergeeft welk deel van het aardoppervlak door een bepaalde bevolkingsgroep gebruikt wordt om van te leven. Dit getal wordt uitgedrukt in mondiale hectares.



Figuur 1.7

Deze vervormde wereldkaart geeft de ecologische voetafdruk van de gemiddelde inwoner van een bepaald land weer.

- Wat betekent het dat Nederland aan de donkere kant van het rood zit?
- Waarom zijn bijvoorbeeld Groenland en Portugal blauw gekleurd?
- Griekenland heeft een vergelijkbare ecologische voetafdruk als Nederland terwijl de welvaart er lager is. Geef daarvoor een verklaring.
- Welke data heb je nodig om deze wereldkaart te kunnen maken?

Opgave 8

In de tabel zie je het aantal kilometer fietspad op 23 januari 2013.

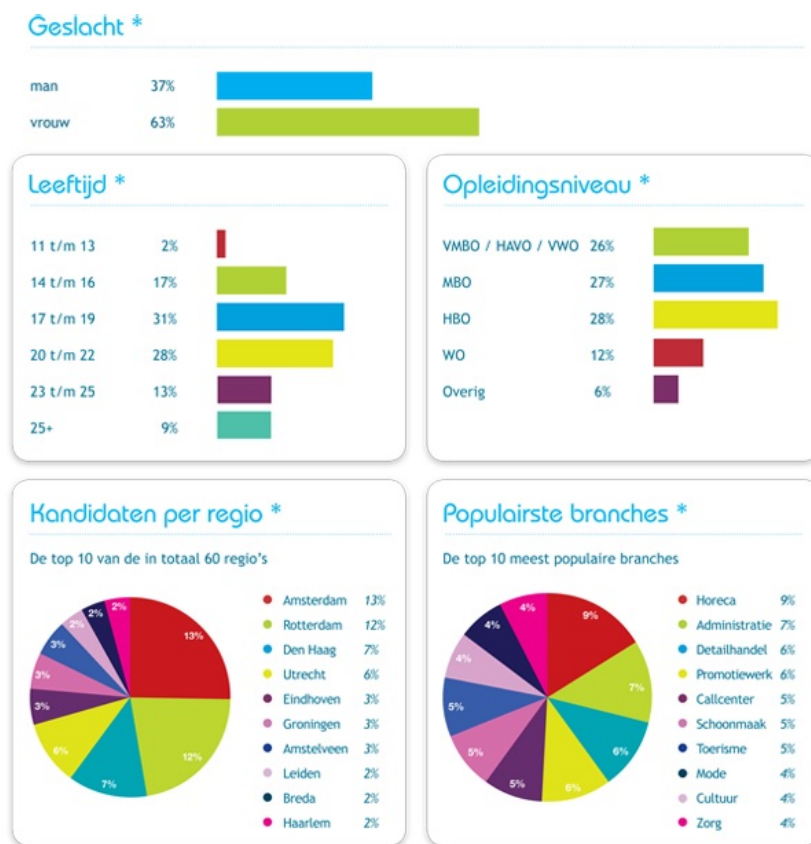
Provincie	lengte fietspad (km)	fietspad/opp (m/km ²)	fietskm per dag / km fietspad
Groningen	1600	700	882
Friesland	2000	599	848
Drenthe	2100	791	522
Overijssel	2800	837	1193
Flevoland	1500	1041	487
Noord-Holland	4200	1563	1601
Zuid-Holland	4800	1696	1583
Utrecht	1800	1306	1809
Noord-Brabant	5000	1019	1145
Gelderland	5000	997	982
Limburg	2000	918	1064
Zeeland	1400	764	660
Nederland	34600	1009	1157

Tabel 1.2

- Welke data heb je nodig om de tweede kolom in deze tabel te kunnen maken?
- Welke data heb je nodig om de derde kolom in deze tabel te kunnen maken?
- Waarom zou de derde kolom gemaakt zijn?
- Welke extra data zijn er nodig geweest om de vierde kolom te kunnen maken?
- Wat is de betekenis van de data in de vierde kolom?
- Drenthe profileert zich graag als fietsprovincie. Welke argumenten kan men daarvoor aandragen op basis van gegevens uit deze tabel?

Opgave 9

Aan 44000 jongeren is een aantal vragen gesteld. De resultaten staan in de diagrammen.



* Bovengenoemde cijfers hebben betrekking op de 44.000 actieve profielen uit de database van BijBanen.nl in juni 2008.

Figuur 1.8

- Welke data heb je nodig van de deelnemers om dit overzicht te kunnen maken?
- Voor wie zou dit overzicht gemaakt zijn?
- Maak een beschrijving van de deelnemers die zich ingeschreven hebben.
- Kun je nu zeggen dat 9% van alle mensen een bijbaan in de horeca heeft?

Opgave 10

Deze tabel stamt uit een onderzoek van het CBS naar vakanties van Nederlanders. Een lange vakantie is een vakantie met minstens vier overnachtingen.

Tabel 1 Participatie aan lange vakanties en aantal lange vakanties naar bestemming van enkele categorieën van de bevolking, 2008 (slot)

	Omvang van de populatie	Participatie aan lange vakanties	Gemiddeld aantal lange vakanties per participant	Totaal aantal lange vakanties	w.v.	
					in Nederland	in het buitenland
	x 1 000	%		x 1 000	%	
Woonprovincie						
Groningen	550	70	1,82	700	48	52
Friesland	620	71	2,10	930	45	55
Drenthe	470	68	1,88	600	41	59
Overijssel	1 080	74	1,92	1 530	38	62
Flevoland	360	83	1,99	590	42	58
Gelderland	1 900	74	1,96	2 770	34	66
Utrecht	1 140	82	2,14	2 000	32	68
Noord-Holland	2 440	77	2,09	3 890	31	69
Zuid-Holland	3 220	78	2,14	5 390	40	60
Zeeland	360	67	1,95	470	47	53
Noord-Brabant	2 310	75	1,95	3 370	33	67
Limburg	1 060	66	1,97	1 380	31	69
Totaal	15 510	75	2,03	23 630	36	64
Regionale indeling vakantiespreiding						
Regio Noord	5 520	74	2,01	8 270	37	63
Regio Midden	5 650	78	2,11	9 300	38	62
Regio Zuid	4 340	72	1,93	6 050	32	68
Totaal	15 510	75	2,03	23 630	36	64
Stedelijkheid gemeenten						
Zeer sterk stedelijk	2 610	75	2,12	4 140	32	68
Sterk stedelijk	4 380	77	2,06	6 990	37	63
Matig stedelijk	3 140	76	2,04	4 880	38	62
Weinig stedelijk	3 420	74	1,96	4 970	36	64
Niet stedelijk	1 960	71	1,90	2 650	38	62
Totaal	15 510	75	2,03	23 630	36	64

Bron: Continu Vakantie Onderzoek.

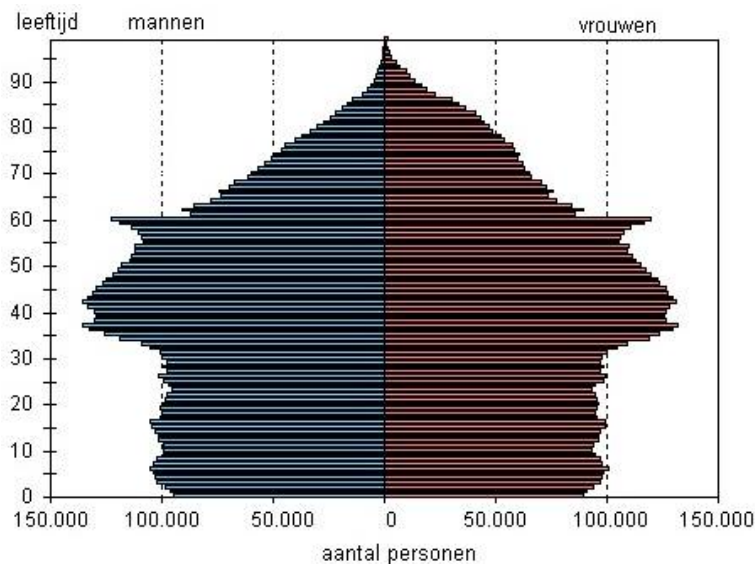
Tabel 1.3

- Welke data heb je nodig om dit overzicht te kunnen maken?
- Voor wie is deze informatie belangrijk?
- Hoe komen de data in de kolom 'gemiddeld aantal lange vakanties per participant' tot stand? Hoe kun je controleren of de getallen in de tabel kloppen?
- Een reisbureau concludeert dat mensen uit stedelijke gebieden meer behoefte aan lange vakanties hebben. Wat vind je van die conclusie?

Toepassen

Opgave 11: Demografische druk

Open het [bestand met data van de Nederlandse bevolking](#). Bekijk het tabblad 'Beschrijving'. Bekijk ook het leeftijdsdiagram uit 2008 voor de Nederlandse bevolking.



Figuur 1.9

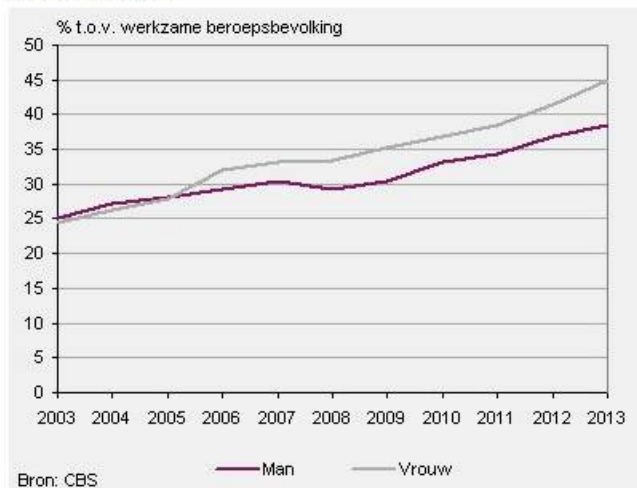
- Wat wordt verstaan onder 'demografische druk'?
- Laat zien hoe de demografische druk wordt berekend met de rest van de tabel.
- De 'grijze druk' neemt toe, de 'groene druk' neemt af. Wat betekent dit?
- Hoe kun je dit verschijnsel uit het leeftijdsdiagram afleiden?

Testen

Opgave 12

Bekijk de grafieken uit de Jongerenmonitor 2013. Ze gaan over het percentage flexwerkers onder jongeren ten opzichte van de werkzame bevolking.

Ontwikkeling flexibele arbeid niet-onderwijsvolgende jongeren (15 tot 27 jaar)

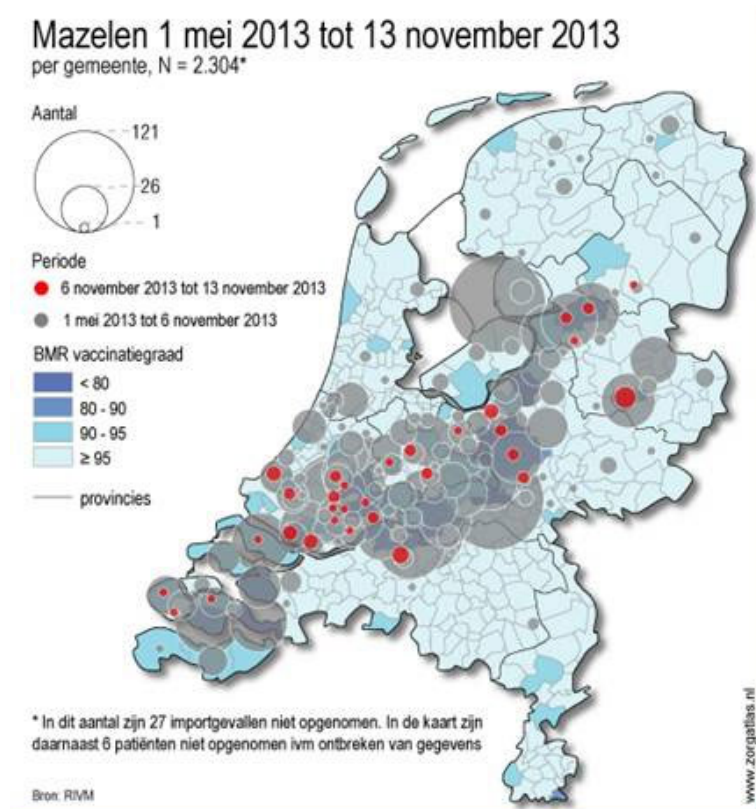


Figuur 1.10

- Welke doelgroepen worden hier vergeleken?
- Welke uitspraken kun je doen aan de hand van dit diagram?

Opgave 13

De landkaart van Nederland geeft het beeld weer van de mazelen-epidemie in de periode mei tot en met november 2013.



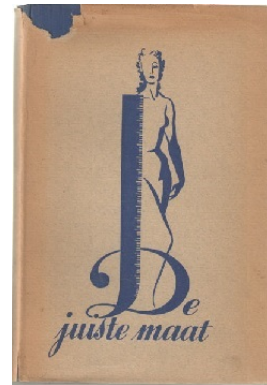
Figuur 1.11

- Welke data heb je nodig om deze kaart te kunnen maken?
- Hoe zijn de data geordend?
- Welke betekenis hebben de rode puntjes op de kaart?
- Voor wie is deze kaart vooral bedoeld?

1.2 Statistische variabelen

Inleiding

In 1947 deden de wiskundigen H. Freudenthal en J. Sittig in opdracht van warenhuis De Bijenkorf onderzoek naar de lichaamsafmetingen van 5001 vrouwen. De Bijenkorf wilde op grond daarvan een maatsysteem voor kleding opzetten. Beide wiskundigen pasten op de grote verzameling kwantitatieve gegevens statistische methoden toe. Ze maakten overzichtelijke verdelingen van de lengtes, de gewichten, de voetlengte, de kniehoogte, en dergelijke van hun steekproef. De resultaten werden gepubliceerd in een boek met titel 'De juiste maat'.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve variabelen;
- het verschil tussen relatieve en absolute frequenties.

Voorkennis

- het begrip statistische variabele;
- de basisvaardigheden van het werken met MS-Excel.

Verkennen

Opgave V1

Hier staan de gegevens over de gezinsomvang van leerlingen uit twee 4-havoklassen:

H4A: 3, 5, 2, 6, 5, 5, 2, 3, 4, 6, 4, 3, 5, 2, 5, 4, 4, 3, 4, 4, 5, 3, 7, 4, 4, 5, 2, 4

H4B: 4, 2, 5, 3, 4, 2, 4, 3, 5, 2, 3, 4, 6, 3, 3, 4, 3, 5, 4, 2, 4, 2, 5, 3

- a Van deze data is een tabel gemaakt. Verklaar de getallen in deze tabel.

gezinsomvang (aantal personen)	frequenties H4A	frequenties H4B
2	4	
3	5	
4	9	
5	7	
6	2	
7	1	

Tabel 2.1

- b Vul de tabel ook in voor H4B.

Je moet nog verder met de tabel rekenen, dus het is handig om met Excel te werken.

In de frequentietabel staan de absolute frequenties. Door ze allemaal te delen door het totale aantal leerlingen krijg je relatieve

frequenties die je ook kunt geven als percentages. Je kunt dan gemakkelijker beide tabellen vergelijken.

- c Maak een nieuwe tabel met relatieve frequenties.
- d Beschrijf de verschillen tussen H4A en H4B.

Uitleg

Er zijn grofweg twee soorten statistische variabelen:

- variabelen die in een getal zijn uit te drukken, bijvoorbeeld de lengte van een mens, de hoogte van het inkomen, de omvang van het gezin; dit zijn kwantitatieve variabelen;
- variabelen die een kenmerk zijn en niet in een getal zijn uit te drukken, bijvoorbeeld het geslacht, de kleur ogen, de godsdienst, de bloedgroep, de naam; dit zijn kwalitatieve variabelen.

Het is vaak handig om je gegevens te ordenen in frequentietabellen. Daarin hebben niet alleen de data een logische volgorde, maar is ook meteen te zien hoe vaak een bepaalde waarde van de statistische variabele voorkomt, de absolute frequentie. Om twee (verschillende) datasets goed te kunnen vergelijken, is het handiger om met relatieve frequenties (in procenten) te werken, dat wil zeggen de absolute frequenties gedeeld door het totale aantal, eventueel in procenten.

Opgave 1

In deze opgave wordt telkens een variabele beschreven die betrekking heeft op de werknemers van een bepaald bedrijf. Geef aan of het een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele betreft. Geef ook aan of het maken van een frequentietabel zinvol is.

- a De schoenmaat.
- b De lengte.
- c Het inkomen in euro.
- d De burgerlijke staat.
- e Het aantal dienstjaren bij het bedrijf.
- f Het aantal personen waaruit het huishouden van de betreffende werknemer bestaat.

Opgave 2

In deze tabel zie je de gegevens over de gezinsomvang van leerlingen uit twee 4-havoklassen.

- a Welk probleem doet zich voor als je de frequenties van beide groepen vergelijkt?
- b Wat zou je met deze frequenties nog moeten doen?
- c Maak een nieuwe tabel met relatieve frequenties.
- d Hoeveel procent van de leerlingen uit H4A komt uit een gezin met 6 of meer personen? En hoeveel bij H4B?

gezinsomvang (aantal personen)	frequenties H4A	frequenties H4B
2	4	5
3	5	7
4	9	7
5	7	4
6	2	1
7	1	0

Tabel 2.2

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Er bestaan verschillende soorten variabelen en dus verschillende soorten data. Een belangrijk onderscheidend kenmerk is:

- Een **kwantitatieve variabele** kan wel in een getal worden uitgedrukt (zoals lengte, hoogte van het inkomen, omvang van het gezin en dergelijke).
- Een **kwalitatieve variabele** beschrijft een bepaald kenmerk dat niet noodzakelijk in een getal wordt uitgedrukt (bijvoorbeeld geslacht, kleur ogen, godsdienst, bloedgroep, naam en dergelijke).

Bij veel statistische variabelen kun je een **frequentietabel** maken. Door te tellen hoe vaak een bepaalde waarde van die variabele voorkomt, krijg je de **absolute frequentie** van die waarde. Deel je die absolute frequentie door het totale aantal waarden, dan krijg je de **relatieve frequentie** van die waarde. Relatieve frequenties (vaak in procenten uitgedrukt) maken het vergelijken van twee datasets gemakkelijker.

Veel van de tabellen in deze paragraaf zijn beschikbaar als bestand. In het **Practicum** leer je hoe je met statistische gegevens kunt werken met MS-Excel.

Voorbeeld 1

In 1947 hielden de wiskundigen Freudenthal en Sittig een **statistisch onderzoek ten behoeve van een nieuw maatsysteem voor vrouwenkleding** in opdracht van het warenhuis De Bijenkorf. Onder andere maten zij de mouwlengte van 5001 vrouwen in cm nauwkeurig. Je ziet een frequentietabel met de data.

- Welke absolute en welke relatieve frequentie horen er bij een mouwlengte van 60 cm?
- Hoeveel procent van deze vrouwen had een mouwlengte vanaf 64 cm?

Antwoord

- Er zijn 653 vrouwen met een mouwlengte van 60 cm, de absolute frequentie is dus 653. De relatieve frequentie is nu $\frac{653}{5001} \approx 0,131$. Dat is ongeveer 13%.
- Een mouwlengte vanaf 64 cm betekent dat je met de mouwlengtes 64, 65, ..., 71 te maken hebt. Het gaat daarbij om $159 + 106 + 52 + 18 + 15 + 3 + 0 + 1 = 354$ vrouwen. En dat is: $\frac{354}{5001} \approx 0,071$. Dat is ongeveer 7%.

Opgave 3

Bekijk de tabel uit **Voorbeeld 1**.

- a Is mouwlengte een kwalitatieve of kwantitatieve statistische variabele?

- A. kwalitatieve
B. kwantitatieve

mouw- lengte	frequentie
49	3
50	11
51	22
52	53
53	89
54	163
55	250
56	405
57	519
58	660
59	578
60	653
61	560
62	421
63	260
64	159
65	106
66	52
67	18
68	15
69	3
70	0
71	1

Tabel 2.3

- b Maak zelf een tabel met relatieve frequenties voor de mouwlengtes.
- c Welk nut heeft de tabel voor De Bijenkorf, denk je?

Opgave 4

Bekijk de kruistabel die Freudenthal en Sittig maakten van de mouwlengte en de kniehoogte in cm van 5001 vrouwen.

Statistisch onderzoek 1947	
De Bijenkorf - Amsterdam	
5001 vrouwen met leeftijd > 18 jr.	
	knieshoogte in cm
	34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54
mouwlengte in cm	71 1 1
	70 1 3
	69 1 15
	68 2 2 1 3 3 2 2 18
	67 3 1 2 4 2 2 3 1
	66 4 5 5 4 6 10 7 7 3 1
	65 7 3 15 13 26 16 11 6 3 1 1 1
	64 1 2 2 5 5 13 22 26 31 22 18 4 4 4 159
	63 3 1 5 5 20 36 44 48 40 29 16 6 4 2 1 260
	62 2 6 15 21 61 61 84 62 59 27 14 6 1 2 421
	61 3 2 6 29 43 65 99 111 91 61 33 9 7 1 560
	60 3 5 17 40 68 112 117 121 84 49 31 2 2 2 653
	59 1 1 2 11 20 60 110 108 88 66 72 22 12 3 1 578
	58 3 8 21 50 72 110 141 103 90 34 22 5 1 660
	57 1 2 9 28 60 80 92 87 72 53 20 12 2 1 519
	56 1 2 4 13 30 50 79 82 60 40 32 8 3 1 405
	55 3 6 11 27 38 46 46 39 14 16 1 3 250
	54 4 7 11 17 32 37 23 14 8 4 1 1 3 163
	53 3 6 6 16 12 17 15 8 6 89
	52 1 2 3 5 9 13 10 5 4 1 53
	51 1 2 4 4 5 2 2 1 1 22
	50 1 3 3 3 11
	49 1 2 3
	1 3 19 34 76 178 313 495 632 738 675 665 466 343 195 88 45 18 12 2 3 5001

Figuur 2.2

- a Hoeveel procent van de onderzochte vrouwen heeft een mouwlengte van 60 cm?
- b Welke combinatie van mouwlengte en kniehoogte komt het meeste voor?
- c Hoeveel procent van de vrouwen met een mouwlengte van 60 cm heeft een kniehoogte van 50 cm?
- d Hoeveel procent van de onderzochte vrouwen heeft een mouwlengte van meer dan 68 cm en een kniehoogte van meer dan 50 cm?
- e Hoeveel bedroeg de gemiddelde mouwlengte van de 5001 vrouwen?
- f Hoeveel bedroeg de gemiddelde kniehoogte?

Opgave 5

Stel dat je het onderzoek van Freudenthal en Sittig dit jaar opnieuw zou uitvoeren. Je kunt nu (met de moderne hulpmiddelen) veel meer vrouwen in De Bijenkorf laten opmeten. Als je de resultaten wilt vergelijken met die van Freudenthal en Sittig, is het verstandig om met relatieve frequenties te werken. Laat met een rekenvoorbeeld zien waarom dat zo is.

Voorbeeld 2

In de tabel in het bestand **schoenmaten** vind je deze turftabel van de schoenmaten van mensen in de schoenenwinkel van v.O. in H. Maak zelf een frequentieverdeling (in Excel of een soortgelijk programma) door de bijbehorende kolommen met absolute frequenties en die met relatieve frequenties te maken.

Antwoord

Het is verstandig om het bestand eerst op je eigen pc op te slaan en er dan pas in te gaan werken! In het bestand **schoenmaten antwoord** vind je de absolute frequenties en de relatieve frequenties. Ga na hoe je het programma gebruikt om het rekenwerk voor je te doen. Als je op een cel klikt, kun je zien welke formule er wordt gebruikt om de inhoud van die cel te berekenen.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**. Sla het Excelbestand eerst op je eigen pc op. Als je het vervolgens opent kun je er in werken.

- Maak zelf in Excel een frequentietabel en een relatieve frequentietabel. Doe eventueel eerst het **Practicum**
- Voeg bij de absolute frequenties één waarneming 36 toe. Hoeveel getallen veranderen er in de frequentietabel?
- Hoeveel getallen veranderen er in de relatieve frequentietabel?

Verwerken

Opgave 7

Stel dat je een statistisch onderzoek houdt onder de leerlingen in je eigen jaargroep. Je verzamelt de volgende gegevens:

- het geslacht (mannelijk of vrouwelijk)
- de lichaamslengte
- het lichaamsgewicht
- de omvang van het gezin
- de afstand tot school
- de bloedgroep
- de kleur van de ogen
- de beoefende sport(en)

Sommige van deze variabelen geven een hoeveelheid of een grootte aan, andere geven een kenmerk aan.

- Welke statistische variabelen in dit onderzoek zijn kwalitatief?
- Welke statistische variabelen in dit onderzoek zijn kwantitatief?

Schoenmaten op zaterdag 14 juli 2007 in H bij schoenenzaak v.O.	
schoenmaat	aantal
36	III
37	IIII
38	IIII III
39	IIII IIII IIII III
40	IIII IIII II
41	IIII III
42	IIII IIII
43	IIII
44	I

Figuur 2.3

Opgave 8

Bekijk het diagram van het CBS uit de Jongerenmonitor 2019. Het geeft de hoeveelheid jongeren weer die zich houden aan een drietal gezondheidsrichtlijnen.

7.2.5 Volgen richtlijnen, 18-24 jaar, 2015/2018



Figuur 2.4

- Is de frequentie hier absoluut of relatief?
 A. relatief
 B. absoluut
- Welke zes vragen zijn er minimaal gesteld aan de jongeren om dit diagram te kunnen maken?
- Welke statistische variabelen in dit onderzoek zijn kwantitatief?
- Welke statistische variabelen in dit onderzoek zijn kwalitatief?

Opgave 9

Voor een biologiepracticum moet het aantal slakken op een stuk grond worden geteld. Het stuk grond wordt daartoe in stukken van 1 m^2 verdeeld. Iedere leerling telt het aantal slakken op vier van die stukken. Hier zie je de resultaten.

aantal slakken per m^2	2	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	16	14	7	4	2	3	1	1

Tabel 2.4

- Om welke statistische variabele gaat het hier?
- Hoeveel m^2 is de oppervlakte van het stuk grond?
- Hoeveel leerlingen hebben er geteld?
- Hoeveel slakken zijn er in totaal geteld?
- Hoeveel slakken zijn er gemiddeld per m^2 gevonden?

Opgave 10

De tabel laat het aantal geslaagden zien op havo en vwo gedurende drie schooljaren.

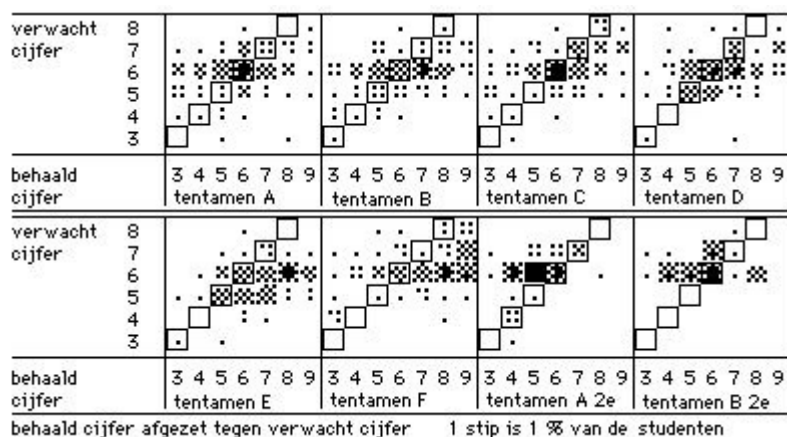
Voortgezet onderwijs; geslaagden naar onderwijssoort									
Onderwerpen	Aantal examenkandidaten			Aantal geslaagden			Percentage geslaagden		
Perioden	2005/'06	2006/'07	2007/'08 ^a	2005/'06	2006/'07	2007/'08 ^a	2005/'06	2006/'07	2007/'08 ^a
Onderwijssoort	aantal	aantal	aantal	aantal	aantal	aantal	%	%	%
Vwo	31633	32961	35150	29287	30331	32398	93	92	92
Vwo natuurprofiel totaal	14967	15940	17233	13750	14570	15723	92	91	91
Vwo natuur en techniek	3765	3510	3970	3476	3213	3662	92	92	92
Vwo natuur en gezondheid	9641	10268	11259	8771	9275	10097	91	90	90
Vwo natuur ongedeeld	1561	2162	2004	1503	2082	1964	96	96	98
Vwo maatschappijprofiel totaal	16657	17007	17908	15528	15747	16666	93	93	93
Vwo economie en maatschappij	10087	10142	10801	9413	9392	10112	93	93	94
Vwo cultuur en maatschappij	6359	6623	6858	5911	6126	6309	93	92	92
Vwo maatschappij ongedeeld	211	242	249	204	229	245	97	95	98
Havo	42983	44560	46313	38105	39755	41371	89	89	89
Havo natuurprofiel totaal	12008	12641	13634	10743	11181	12306	89	88	90
Havo natuur en techniek	3699	3618	3871	3319	3203	3492	90	89	90
Havo natuur en gezondheid	7360	7853	8704	6546	6906	7815	89	88	90
Havo natuur ongedeeld	949	1170	1059	878	1072	999	93	92	94
Havo maatschappijprofiel totaal	30974	31911	32679	27361	28571	29065	88	90	89
Havo economie en maatschappij	15705	16203	16959	13607	14321	14993	87	88	88
Havo cultuur en maatschappij	14751	15182	15264	13294	13778	13649	90	91	89
Havo maatschappij ongedeeld	518	526	456	460	472	423	89	90	93

Figuur 2.5

- Welke variabelen worden er onderzocht? Welke soort variabele betreft het?
- Waar vind je absolute frequenties en waar relatieve frequenties?
- Op de havo is in 2007/2008 het geslaagdenpercentage 89. Toon dit aan door een berekening.
- Het aantal examenkandidaten op de havo neemt absoluut gezien toe. Neemt het aantal examenkandidaten relatief bekeken ook toe?

Opgave 11

Je ziet kruistabellen van zes tentamens en twee hertentamens.



Figuur 2.6

- Welke statistische variabelen worden hier vergeleken?
- Hoe zie je of een tentamen slechter gemaakt is dan verwacht?
- Welke tentamens werden duidelijk slechter gemaakt dan de meeste studenten hadden verwacht?

- d Kun je zeggen dat de twee hertentamens moeilijker waren dan de bijbehorende eerste versies?

Toepassen

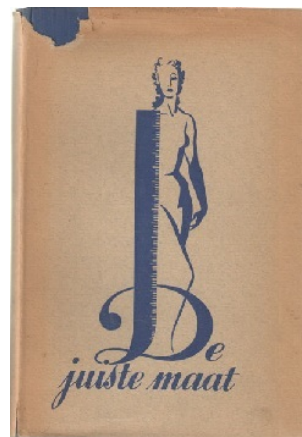
In 1951 verscheen bij uitgeverij Stafleu in Leiden het boek 'De Juiste Maat', met als ondertitel 'Lichaamsafmetingen van Nederlandse vrouwen als basis voor een nieuw maatsysteem voor damesconfectiekleding'. Auteurs van dit boek waren J. Sittig, Adviesbureau voor Toegepaste Statistiek, en prof. dr. H. Freudenthal, Rijksuniversiteit Utrecht. Het onderzoek was gehouden in opdracht van N.V. Magazijn De Bijenkorf, Amsterdam. In het kader van dit onderzoek zijn bij 5001 vrouwelijke klanten van de Bijenkorf vijftien lichaamsmaten opgemeten. Vervolgens is gekeken welke van deze maten het meest bruikbaar zijn om een **maatsysteem voor kleding** op te baseren.

Bekijk een deel van de uitkomst van het onderzoek in het bestand [Statistiek Bijenkorf 1947](#).

Opgave 12

Bekijk bij [Toepassen](#) de gegevens over lengte en gewicht van de 5001 gemeten vrouwen.

- Om welk type statistische variabelen gaat het hier?
- Welke klassenindeling is er gebruikt voor de variabele *lengte*? En voor de variabele *gewicht*?
- Maak een tabel van de relatieve frequenties van de lengtes van de vrouwen.
- Hoeveel procent van de vrouwen heeft een lengte vanaf (afgerond) 1,56 m tot en met 1,68 m?

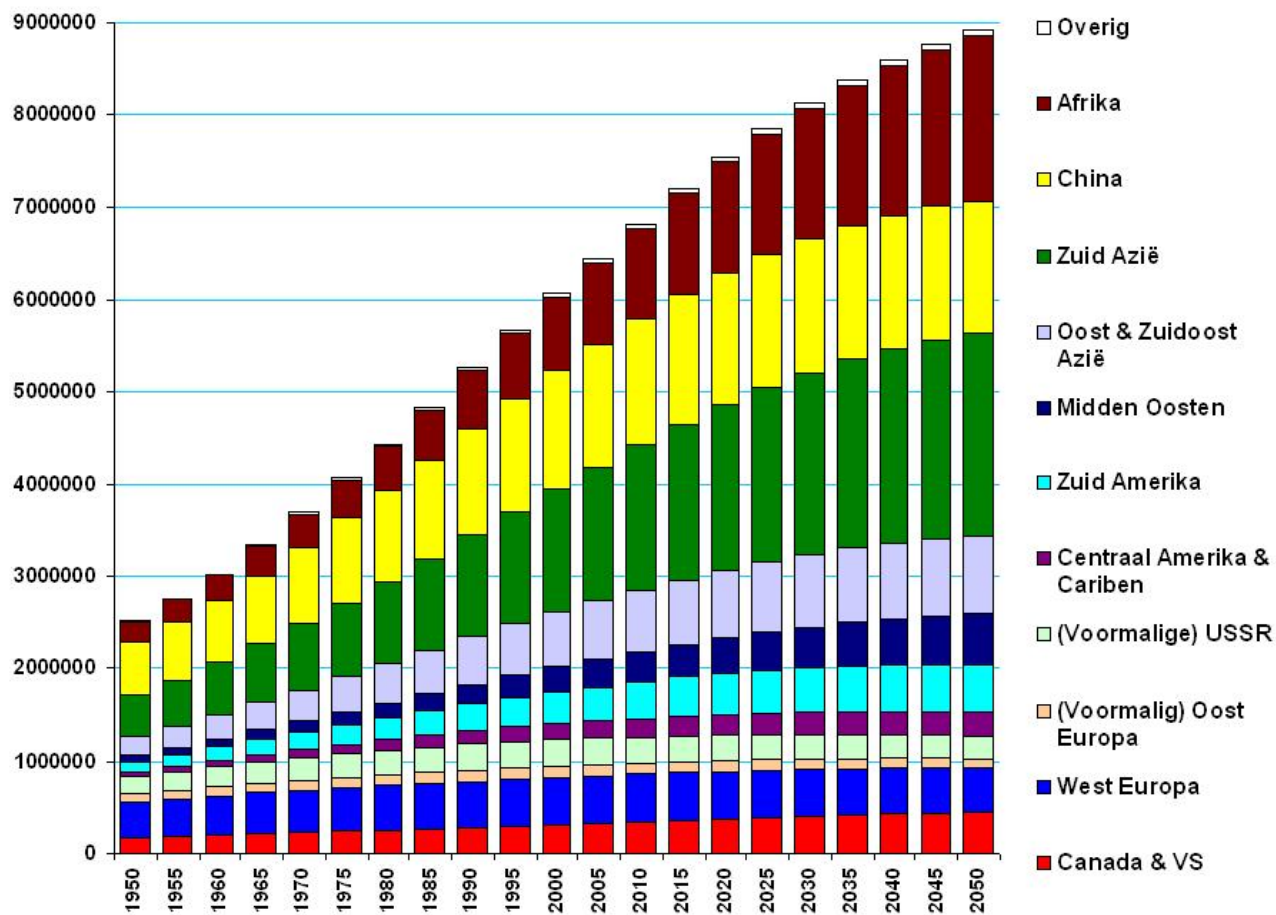


Figuur 2.7

Testen

Opgave 14

Bekijk de figuur met betrekking tot de geografische spreiding van de wereldbevolking. Deze stond op 22 september 1999 in NRC/Handelsblad.



Figuur 2.9

- Welke statistische variabelen zie je hier? Zijn ze kwantitatief of kwalitatief?
- Hoeveel miljard mensen zijn er volgens dit diagram in 100 jaar bijgekomen?
- In welk deel van de wereld komt er absoluut gezien het grootste aantal mensen bij in 100 jaar?
- In welk deel van de wereld komt er relatief gezien het grootste aantal mensen bij in 100 jaar?
- In 1950 woonde ongeveer de halve wereldbevolking in Azië. Hoe zit dat volgens deze voorspelling in 2050?

Practicum

Met **Excel** (een spreadsheetprogramma, een rekenblad) werken is bij statistiek eigenlijk onontbeerlijk. Je kunt er grote hoeveelheden gegevens in kwijt.

Als je nog nooit of heel weinig met Excel hebt gewerkt, doe dan eerst de practica:

- **Basistechnieken Excel**
- **Diagrammen met Excel**

Speciaal voor het werken met Excel bij het presenteren van tabellen en diagrammen met statistische data is het practicum:

- **Data presenteren**

1.3 Diagrammen

Inleiding

In 1947 deden de wiskundigen Freudenthal en Sittig in opdracht van warenhuis De Bijenkorf onderzoek naar de lichaamsafmetingen van 5001 vrouwen. De Bijenkorf wilde op grond daarvan een maatsysteem voor kleding opzetten. Beide wiskundigen pasten op de grote verzameling kwantitatieve gegevens statistische methoden toe. Ze maakten overzichtelijke verdelingen van de lengtes, de gewichten, de voetlengte, de kniehoogte en dergelijke van hun steekproef. Daarvan werden diagrammen gemaakt om een en ander duidelijk weer te geven.

Je leert in dit onderwerp

- diagrammen herkennen en benoemen;
- de voor- en nadelen van de keuze voor bepaalde diagrammen herkennen en benoemen.

Voorkennis

- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve variabelen;
- het verschil tussen relatieve en absolute frequenties;
- beoordelen of er conclusies getrokken kunnen/mogen worden.

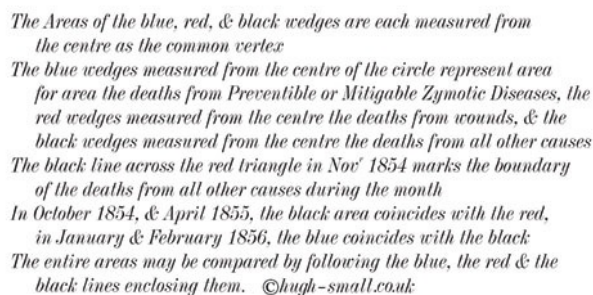
Verkennen

Opgave V1

Verpleegster Florence Nightingale was zo geschokt door het gebrek aan hygiëne onder het Britse leger dat vocht tijdens de Krimoorlog, dat ze bij terugkeer deze diagrammen maakte. Rood stelt 'dood door verwonding' voor, blauw is 'dood door ziektes als gevolg van de slechte omstandigheden' en zwart is 'dood door andere oorzaken'. Elk diagram is in twaalf sectoren verdeeld en bij elke sector is vanaf het *middelpunt* een deel rood gekleurd, een deel zwart en een deel blauw. Die drie delen overlappen elkaar! De oppervlakte van elke sector stelt het aantal militairen voor.



Figuur 3.1

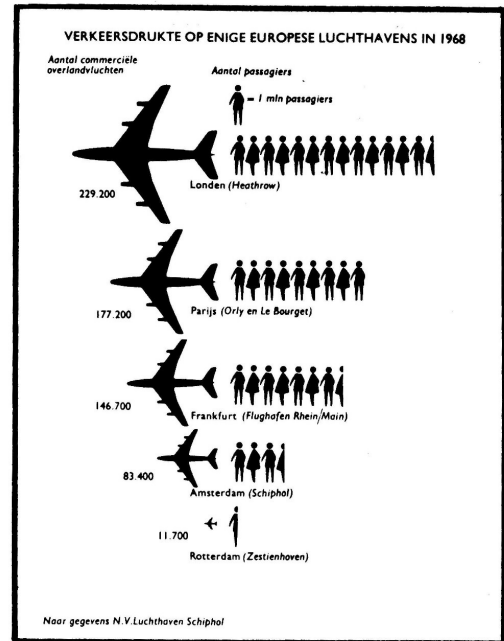


Opgave V2

In 1968 gaf de toenmalige N.V. Luchthaven Schiphol dit overzicht uit van de verkeersdrukte op enige Europese luchthavens.

naar: gegevens N.V. Luchthaven Schiphol

- Welke statistische variabelen zie je in de figuur?
- Welk voordeel heeft deze figuur ten opzichte van een tabel?
- Deze figuur zou je ook in twee staafdiagrammen kunnen weergeven. Hoe zouden die eruitzien?
- Welke boodschap zit er waarschijnlijk achter dit beeldddiagram?



Figuur 3.3

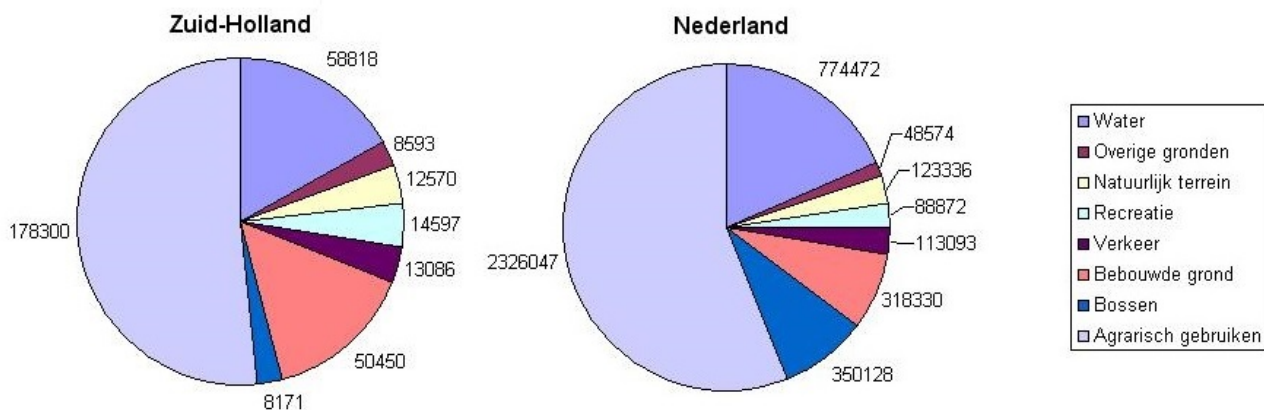
Uitleg

Als je data overzichtelijk wilt weergeven, dan zijn tabellen vaak niet erg handig. Je vindt er wel alle gegevens in, maar je mist overzicht; je kunt niet in één oogopslag zien wat er aan de hand is.

Er zijn veel soorten diagrammen. Je zult er in deze paragraaf een aantal voorbij zien komen. Het beeldddiagram, het staafdiagram, het lijndiagram en het cirkeldiagram ken je al. Vaak worden in diagrammen boodschappen verstopt. Dergelijke diagrammen bevatten soms teveel informatie en ogen ingewikkeld. De kunst is om met de keuze van een diagram een evenwicht te vinden tussen informatief en duidelijkheid. Je moet voorkomen dat mensen géén of foute conclusies gaan trekken.

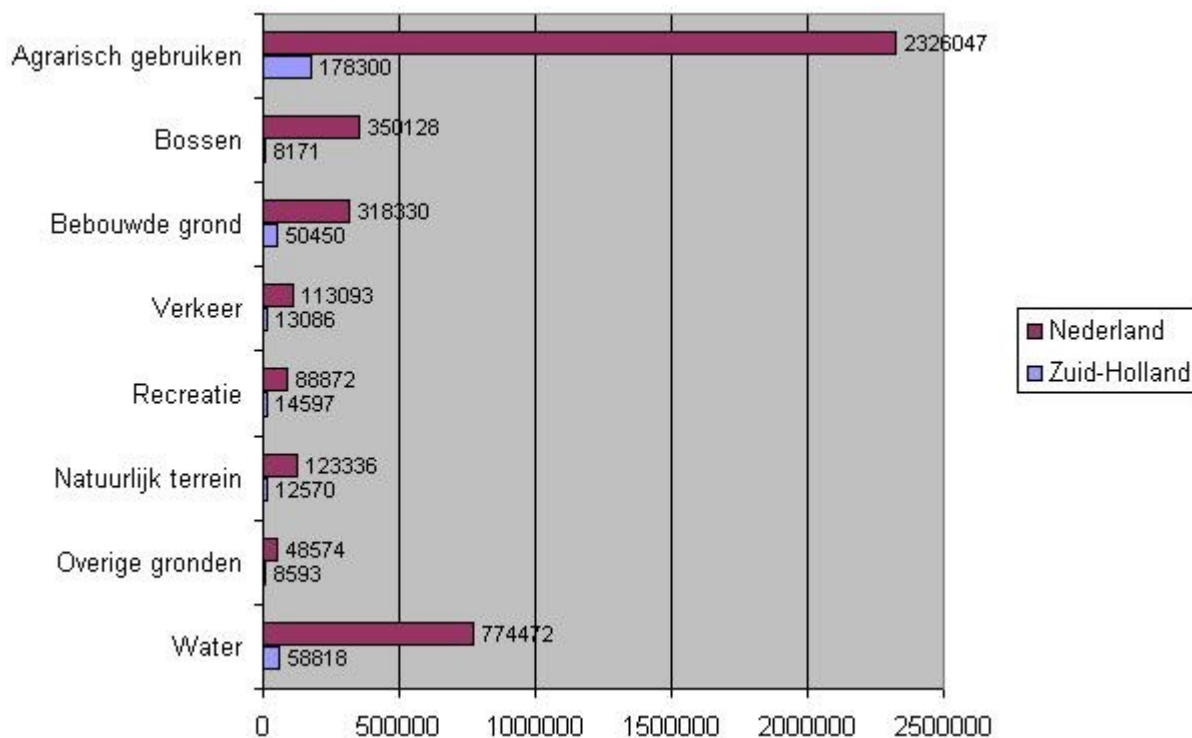
Opgave 1

In deze twee cirkeldiagrammen wordt het bodemgebruik per hectare van Zuid-Holland met dat van heel Nederland vergeleken.



Figuur 3.4

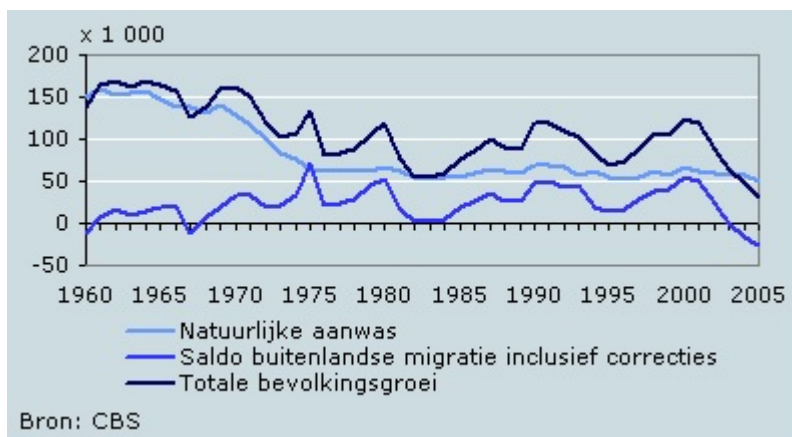
- Welke statistische variabele zie je?
Is deze variabele kwantitatief of kwalitatief?
- Laat met een berekening zien hoe groot de relatieve frequentie en de sectorhoek van 'bebouwde grond' in Zuid-Holland is.
- De getallen in beide diagrammen verschillen nogal, toch kun je in één oogopslag zien dat er in Zuid-Holland relatief gezien veel minder bossen zijn dan in Nederland. Hoe zie je dat?
- Bij een cirkeldiagram gaat het eigenlijk om de oppervlakte van een cirkelsector. Wat is er dan mis als je de eerste figuur met de tweede figuur vergelijkt?
- Dezelfde gegevens kun je ook in een staafdiagram met absolute frequenties weergeven. Wat geeft deze figuur beter weer?



Figuur 3.5

Opgave 2

De diagrammen geven een beeld van de groei van de Nederlandse bevolking.



Figuur 3.6

- Wat voor soort diagrammen zijn het?
- Beschrijf wat je hieruit kunt aflezen.
- Hoe leid je het diagram van de totale bevolkingsgroei uit de andere twee diagrammen af?
- Welke conclusie kun je trekken uit het diagram?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

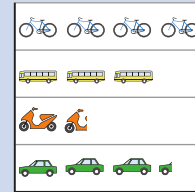
In een tabel heb je vaak alle data nauwkeurig voorhanden, maar een **diagram** geeft vaak beter overzicht en duidelijker een bepaald verloop weer. Er zijn veel soorten diagrammen:

- in een **beelddiagram** worden de waarden of de frequenties weergegeven door de oppervlakte van een figuur of het aantal figuren;
- in een **staafdiagram** worden de waarden of de frequenties weergegeven door de lengtes van rechthoekige staven;
- in een **lijndiagram** worden de waarden of de frequenties weergegeven door punten in een assenstelsel die door rechte lijnstukken met elkaar worden verbonden;
- in een **cirkeldiagram** worden de waarden of de frequenties weergegeven door de oppervlakte van een cirkelsector; je rekent daarbij relatieve frequenties in procenten om naar hoeken (100% is 360°);
- in een **kaartdiagram** worden de gegevens in de vorm van een kaart gepresenteerd;
- in een **puntenwolk** of **spreidingsdiagram** worden twee variabelen tegen elkaar uitgezet en worden de gegevens aangeduid door punten in een assenstelsel (past bij een kruistabel).

Bij statistiek probeer je de gegevens zo eerlijk en overzichtelijk mogelijk weer te geven en de lezer/kijker niet te beïnvloeden of voor de gek te houden.

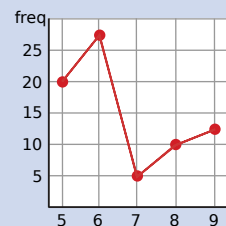
Van gegevens die in Excel beschikbaar zijn kun je gemakkelijk diagrammen maken, zie het [Practicum](#).

woon/werkverkeer
1 icoon = 10 werknemers

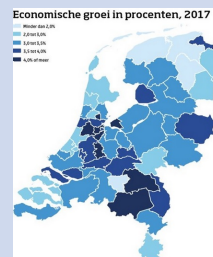


beelddiagram

Resultaten test

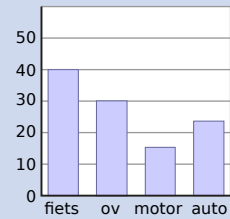


lijndiagram

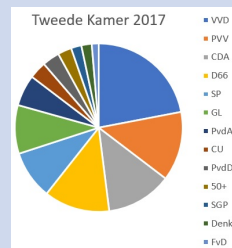


kaartdiagram

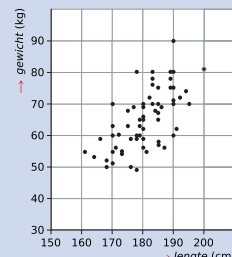
woon/werkverkeer



staafdiagram



cirkeldiagram

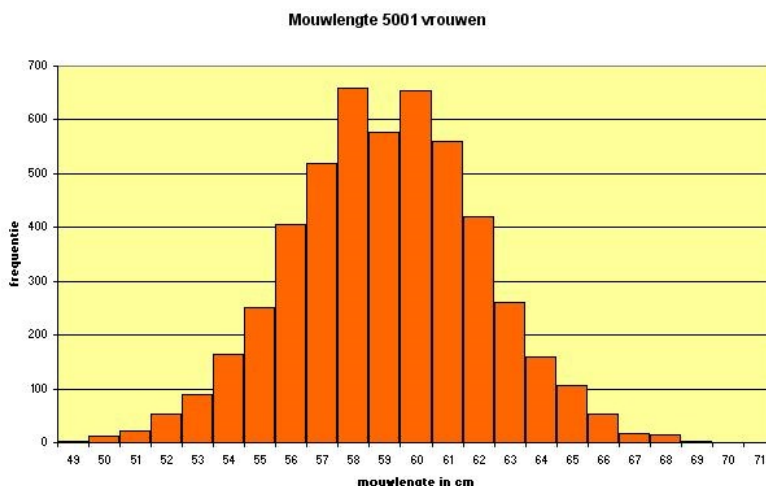


puntenwolk

Figuur 3.7

Voorbeeld 1

Bekijk de tabel en het staafdiagram van de mouwlengte van 5001 vrouwen die Freudenthal en Sittig maakten bij hun onderzoek. Wat zijn de voordelen van een tabel en wat die van een staafdiagram?



Figuur 3.9

mouw- lengte	frequentie
49	3
50	11
51	22
52	53
53	89
54	163
55	250
56	405
57	519
58	660
59	578
60	653
61	560
62	421
63	260
64	159
65	106
66	52
67	18
68	15
69	3
70	0
71	1

Figuur 3.8

Antwoord

Bij een tabel staan de exacte aantallen waar je mee kunt gaan rekenen. Bijvoorbeeld een gemiddelde of een relatieve frequentie.

Bij een staafdiagram zie je het verloop van de mouwlengte beter. Je kunt heel makkelijk zien welke lengtes veel of weinig voorkomen.

Opgave 3

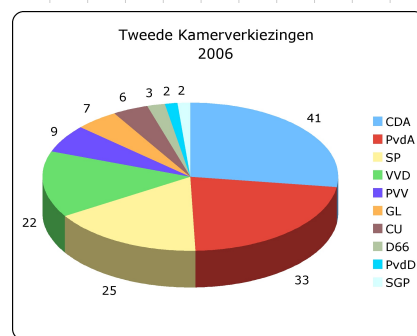
Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Hoe maak je een lijndiagram uit het staafdiagram?
- Hoe maak je een cirkeldiagram bij de data over de mouwlengtes van de 5001 vrouwen die Freudenthal en Sittig hebben onderzocht?
- Is een cirkeldiagram hier een geschikte manier om de gegevens te presenteren? Licht je antwoord toe.

Opgave 4

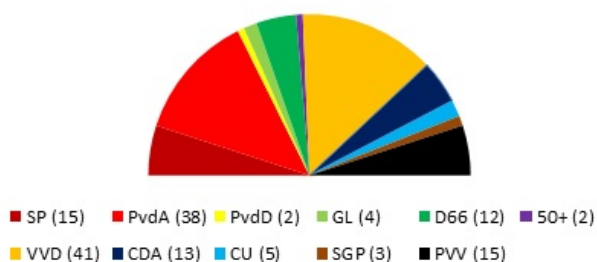
Dit cirkeldiagram geeft de uitslag van de Tweede Kamerverkiezingen in 2006.

- Stellen de getallen percentages voor of aantallen Kamerzetels?
- Welke informatie gaat er verloren als je hier een staafdiagram van maakt?
- Welke informatie, die politici wel belangrijk vinden, is niet zichtbaar?
- Je ziet een half cirkeldiagram bij de Tweede Kamerverkiezingen van 2012. Waarom is er voor dit plaatje gekozen?



Figuur 3.10

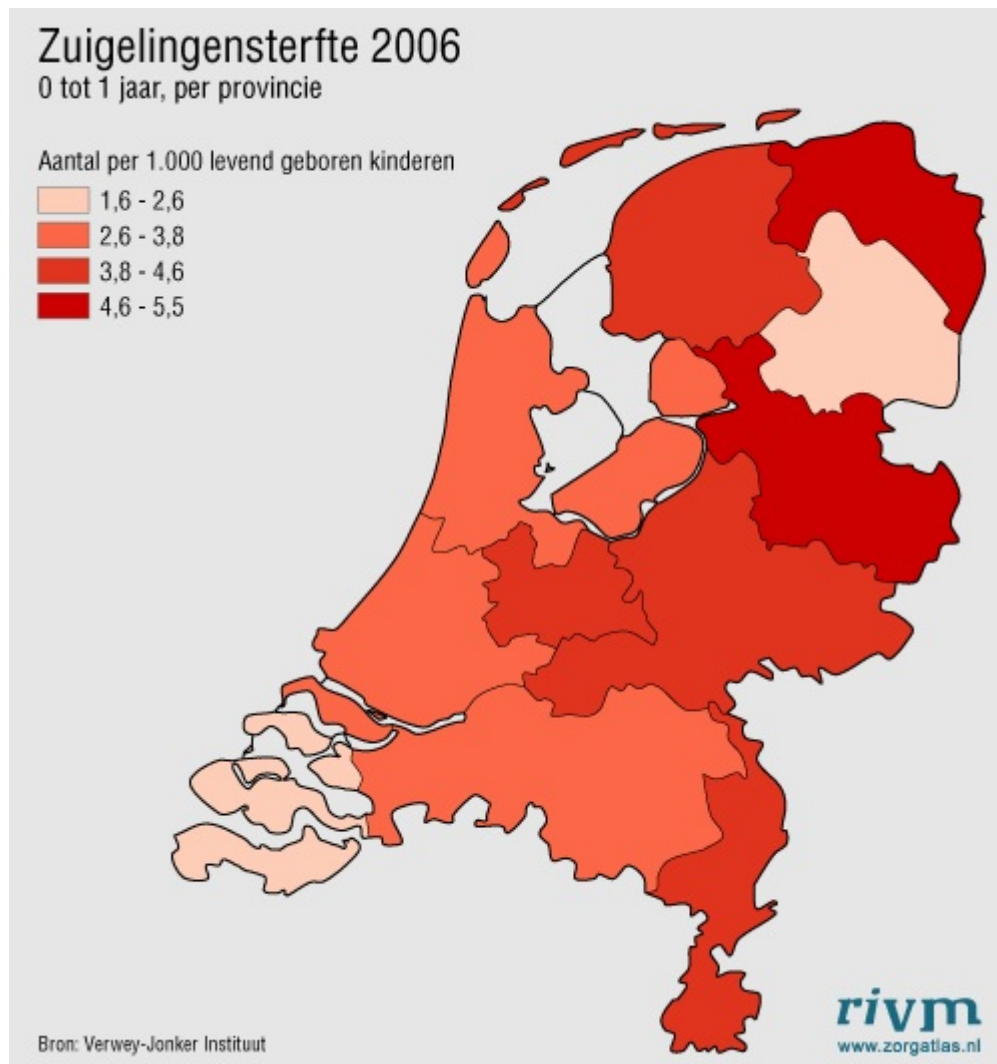
Zetelverdeling Tweede Kamer



Figuur 3.11 bron: Wikipedia

Opgave 5

Het kaartdiagram geeft informatie over de zuigelingensterfte in Nederland.



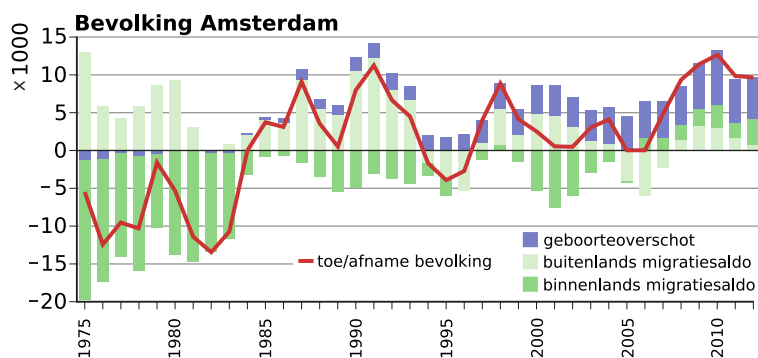
Figuur 3.12

- Waarom zou voor deze presentatievorm zijn gekozen?
- Wat is het nadeel van deze presentatievorm?
- Kun je hierbij een staafdiagram of een lijndiagram maken? Beschrijf de nadelen daarvan.

Verwerken

Opgave 6

Het diagram geeft informatie over de bevolking van Amsterdam.

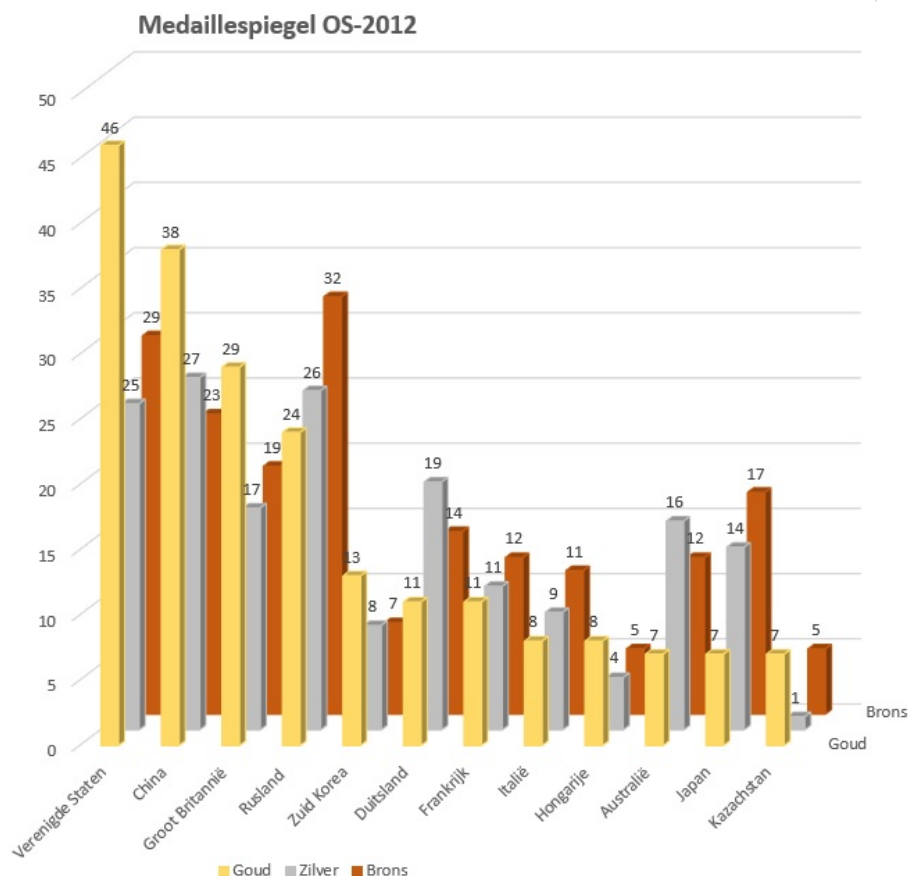


Figuur 3.13

- Welke variabelen zie je in het diagram? Geef aan of ze kwalitatief of kwantitatief zijn en of ze absoluut of relatief zijn.
- Welke soorten diagrammen tref je in de figuur aan?
- Er is een onderscheid tussen groen/paars en rood. Waarom zou dat zijn?
- Andries denkt dat Amsterdam begin jaren '90 maximaal 14000 inwoners heeft gehad en sindsdien is gekrompen. Welke gedachtefout maakt Andries?

Opgave 7

Je ziet de medaillespiegel van de Olympische Spelen van 2012 in Londen, met alleen de beste twaalf landen.



Figuur 3.14

- Welke statistische variabelen zie je in het diagram?
- Zijn de variabelen kwantitatief of kwalitatief?
- Wat geeft elke staaf in het diagram weer?
- Waarom is er een 3D-diagram gebruikt?
- Welk land heeft de meeste gouden medailles gewonnen?
- Welk land won de meeste bronzen medailles?
- Deze gegevens kun je ook in een (gestapeld) staafdiagram weer-
geven.
Wat is daarvan het voordeel? En wat is het nadeel?

Opgave 8

Bekijk de kruistabel van Freudenthal en Sittig in **Opgave 4**.

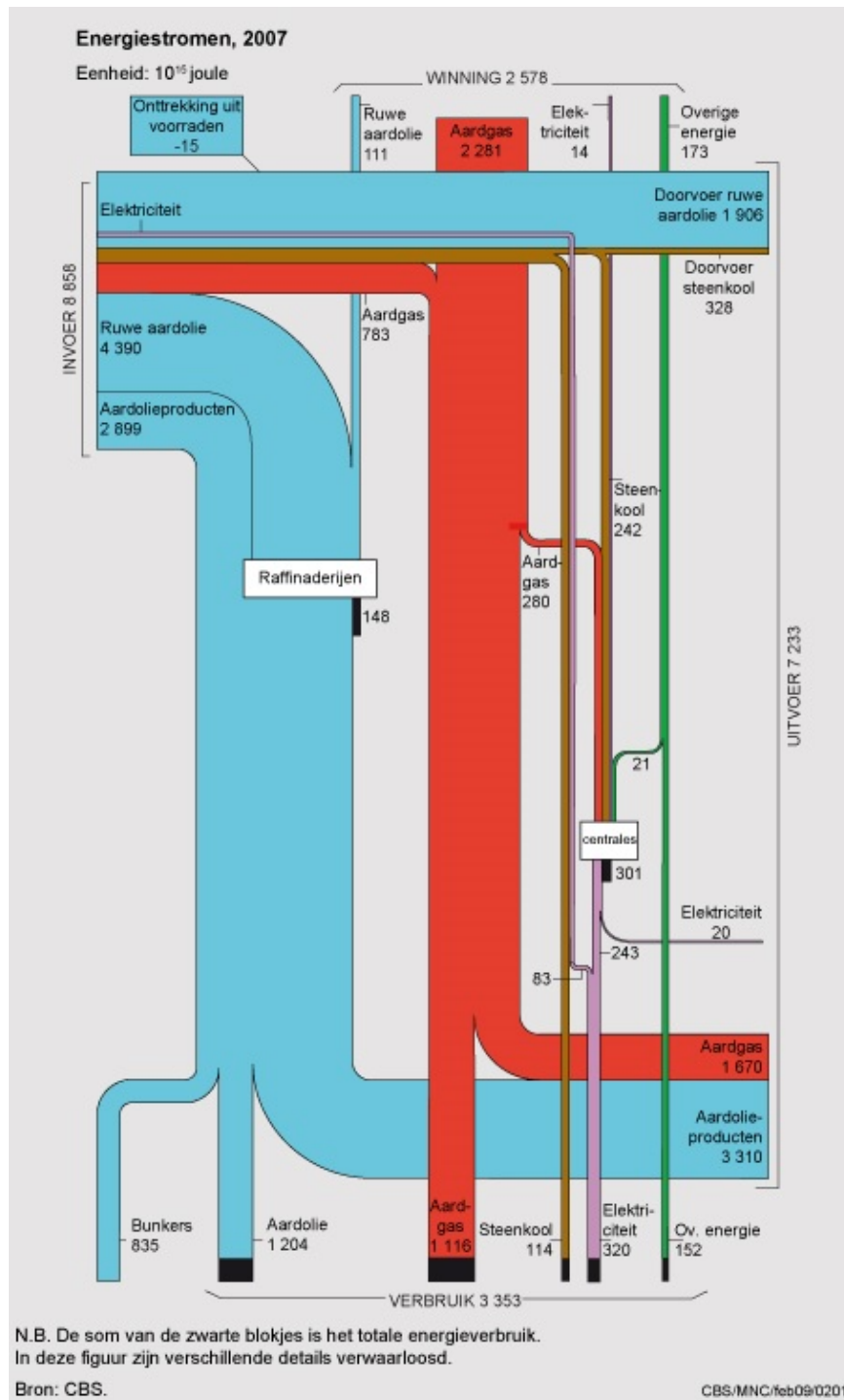
Statistisch onderzoek 1947																									
De Bijenkorf - Amsterdam																									
5001 vrouwen met leeftijd > 18 jr.																									
		kniehoogte in cm																							
		34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54			
mouwlengte in cm	71																			1			1		
	70																								
	69																	1				1	3		
	68										2	2	1		3	3	2	2					15		
	67											3	1	2	4	2	2	3		1			18		
	66											4	5	5	4	6	10	7	7	3		1	52		
	65							1		2	7	3	15	13	26	16	11	6	3	1	1	1	106		
	64					1		2	2	5	5	13	22	26	31	22	18	4	4	4			159		
	63						3	1	5	5	20	36	44	48	40	29	16	6	4	2	1		260		
	62						2	6	15	21	61	61	84	62	59	27	14	6	1	2			421		
	61					3	2	6	29	43	65	99	111	91	61	33	9	7	1				560		
	60					3	5	17	40	68	112	117	121	84	49	31	2	2	2				653		
	59			1	1	2	11	20	60	110	108	88	66	72	22	12	3	1		1			578		
	58				3	8	21	50	72	110	141	103	90	34	22	5	1						660		
	57			1	2	9	28	60	80	92	87	72	53	20	12	2	1						519		
	56		1	2	4	13	30	50	79	82	60	40	32	8	3		1						405		
	55			3	6	11	27	38	46	46	39	14	16	1	3								250		
	54			4	7	11	17	32	37	23	14	8	4	1	1	3	1						163		
	53			3	6	6	16	12	17	15	8	6											89		
	52		1	2	3	5	9	13	10	5	4	1											53		
	51		1	2		4	4	5	2	2	1	1											22		
50	1					3		1	3		3											11			
49			1	2																		3			
		1	3	19	34	76	178	313	495	632	738	675	665	466	343	195	88	45	18	12	2	3	5001		

Figuur 3.15

- Welke gegevens uit deze tabel zijn nodig voor het maken van een staafdiagram van de variabele *kniehoogte* (in cm)?
- Wat moet je doen om een staafdiagram met relatieve frequenties van de variabele *kniehoogte* te tekenen? Geef een rekenvoorbeeld.
- Wat zijn de verschillen tussen de staafdiagrammen bij a en bij b?

Opgave 9

Het stroomdiagram stelt de energiebalans van Nederland voor. Je vindt er de hoeveelheid energie die Nederland zelf opwekt en invoert. Je vindt er ook de energie die we verbruiken dan wel doorvoeren/uitvoeren naar het buitenland. De gebruikte eenheid is 10^{15} joule.



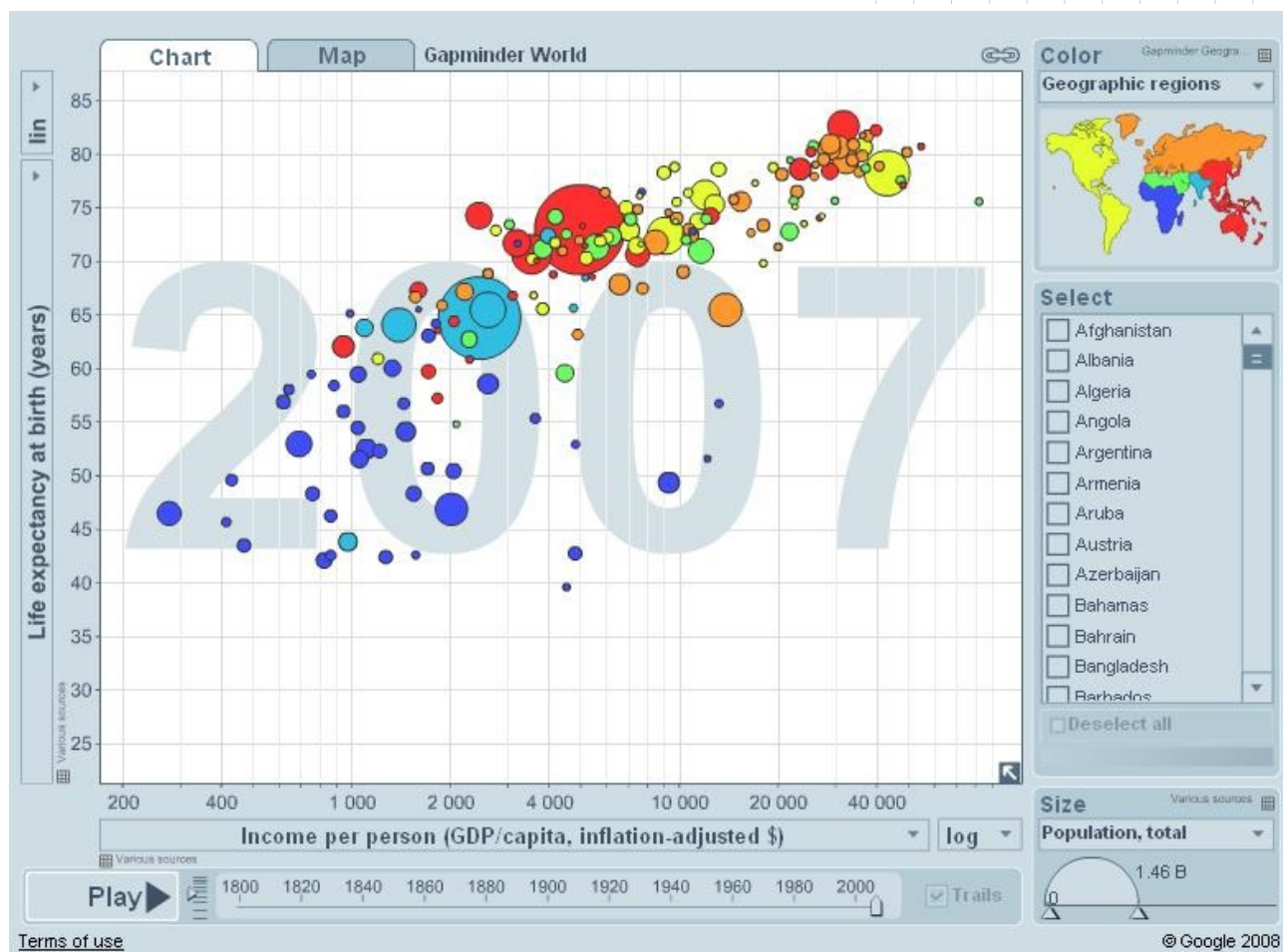
Figuur 3.16

- Welke statistische variabelen zie je in de figuur? Noem er minimaal zes.
- Wat laat de figuur zien?

- c Welke vier verschillende staafdiagrammen kun je van de figuur maken?
- d Welke conclusies kun je trekken uit de figuur? Noem er minimaal twee.

Opgave 10

Statistiek is betekenisvol als gegevens door de jaren heen vergeleken kunnen worden en als je een ontwikkeling kunt zien. Mooie diagrammen met gegevens over landen vind je via Gapminder.



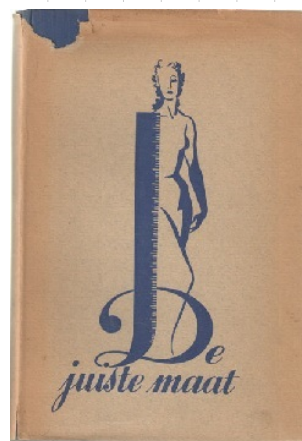
Figuur 3.17

- a Welke statistische variabelen zie je in dit diagram? Geef aan of ze kwalitatief of kwantitatief zijn.
- b Welke betekenis heeft de grootte van elke punt?

Toepassen

In 1951 verscheen bij uitgeverij Stafleu in Leiden het boek 'De Juiste Maat', met als ondertitel 'Lichaamsafmetingen van Nederlandse vrouwen als basis voor een nieuw maatsysteem voor damesconfectiekleding'. Auteurs van dit boek waren J. Sittig, Adviesbureau voor Toegepaste Statistiek, en prof. dr. H. Freudenthal, Rijksuniversiteit Utrecht. Het onderzoek was gehouden in opdracht van N.V. Magazijn De Bijenkorf, Amsterdam. In het kader van dit onderzoek zijn bij 5001 vrouwelijke klanten van de Bijenkorf vijftien lichaamsmaten opgemeten. Vervolgens is gekeken welke van deze maten het meest bruikbaar zijn om een **maatsysteem voor kleding** op te baseren.

Bekijk een deel van de uitkomst van het onderzoek in het bestand **Statistiek Bijenkorf 1947**.



Figuur 3.18

Opgave 11

Bekijk bij **Toepassen** de gegevens over lengte en gewicht van de 5001 gemeten vrouwen.

- Maak een staafdiagram van de relatieve frequenties van de lengtes van deze vrouwen.
- Wat valt je op aan de vorm van dit staafdiagram?
- Hoeveel procent van de vrouwen is kleiner dan 160 cm?
- Hoeveel procent van de vrouwen heeft een lengte vanaf (afgerond) 1,56 m tot en met 1,68 m?

Opgave 12

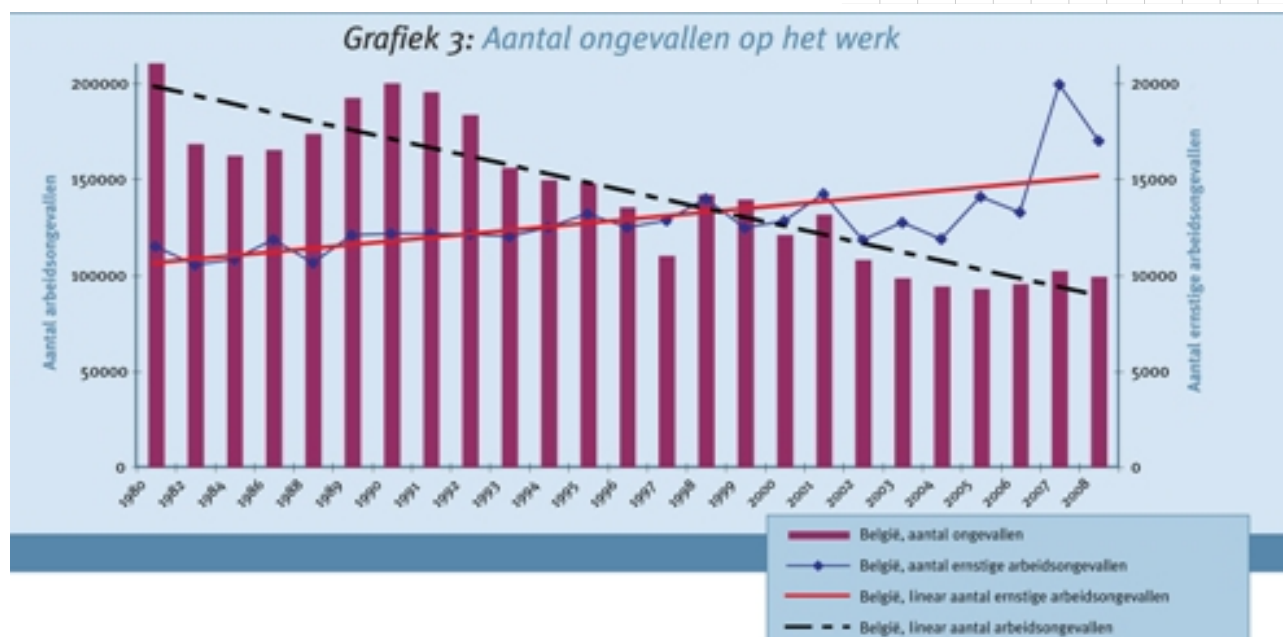
Bekijk bij **Toepassen** de gegevens over lengte en gewicht van de 5001 gemeten vrouwen.

- Maak een staafdiagram van de relatieve frequenties van de gewichten van deze vrouwen.
- Is dit staafdiagram ook zo symmetrisch als dat van de lengtes?
- Hoeveel procent van de vrouwen is zwaarder dan 80 kg?

Testen

Opgave 13

Bekijk het diagram van het aantal ongevallen op de werkplek in Vlaanderen in de periode 1985-2002.

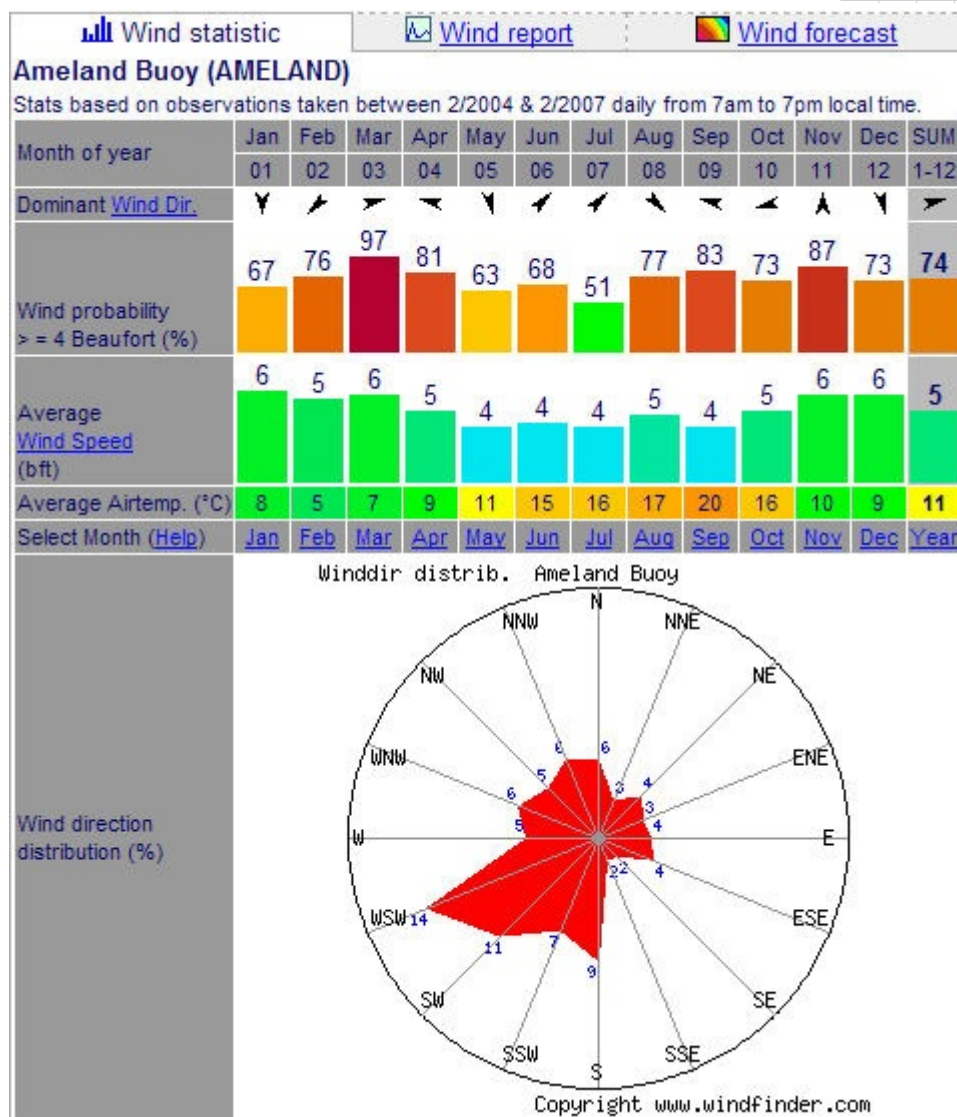


Figuur 3.19

- Welk soort diagrammen zie je in dit overzicht?
- Over welke populatie en welke statistische variabelen gaat dit diagram?
- Hoeveel bedroeg het aantal ongevallen op de werkplek in 2000? Hoeveel daarvan waren ernstig? Hoeveel procent is dat?
- Welk misverstand kan bij het diagram heel snel ontstaan?
- Tussen welke statistische variabelen probeert het diagram een verband te leggen?
- Noem een voor- en een nadeel van het diagram.

Opgave 14

Bekijk de diagrammen van de windgegevens op Ameland in de loop van het jaar. De windkracht wordt gemeten in Beaufort: 4 bft komt overeen met matige wind.



Figuur 3.20

- Over welke statistische variabelen gaan de diagrammen?
- Met betrekking tot de wind op Ameland in juli kun je drie gegevens uit de figuur aflezen. Welke drie?
- De figuur 'windrichting verdeling (%)' is geen cirkeldiagram, maar eigenlijk meer een lijndiagram. Licht dat toe.
- Hoe zou het diagram eruitzien wanneer het als een normaal lijndiagram zou zijn getekend? Welk nadeel heeft dat?

Practicum

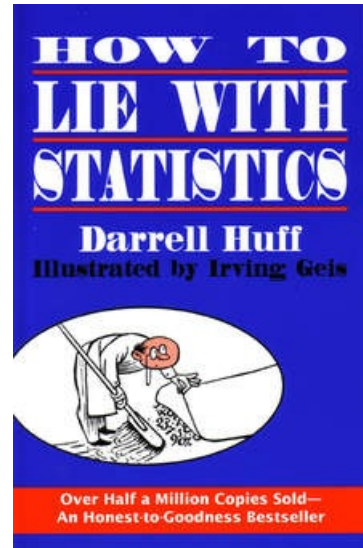
Met **Excel** (een spreadsheetprogramma, een rekenblad) werken is bij statistiek eigenlijk onontbeerlijk. Je kunt er grote hoeveelheden gegevens in kwijt en daar diagrammen bij maken. Bekijk het practicum:

- **Data presenteren**

1.4 Misleidingen

Inleiding

Er bestaat een bekend boek met de titel 'How to lie with statistics'. Dit boek staat vol met misleidingen in statistische figuren. Soms worden stukken van de as weggelaten om een stijging of daling sterker te maken dan hij in werkelijkheid is. Maar er zijn meer manieren om statistieken te manipuleren. Een vroegere Britse politicus zei het zo: 'Er zijn leugens, grote leugens en statistiek'. Kijk daarom altijd kritisch naar statistieken!



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- misleidingen en fouten in diagrammen herkennen en benoemen.

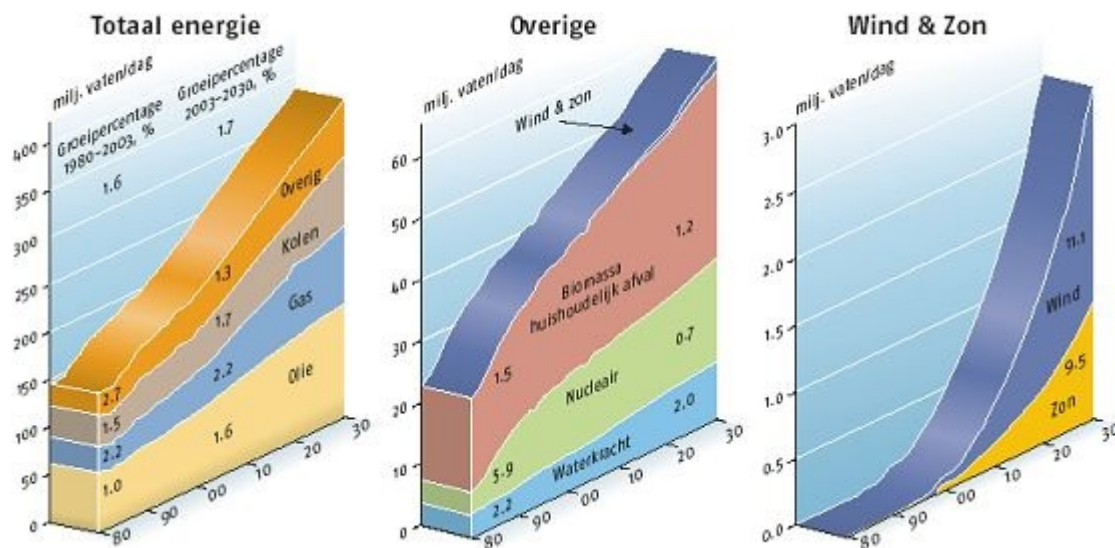
Voorkennis

- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve variabelen;
- het verschil tussen relatieve en absolute frequenties;
- beoordelen of er conclusies getrokken kunnen/mogen worden.

Verkennen

Opgave V1

De volgende diagrammen komen uit 'ExxonMobil's Energy Outlook 2004'.



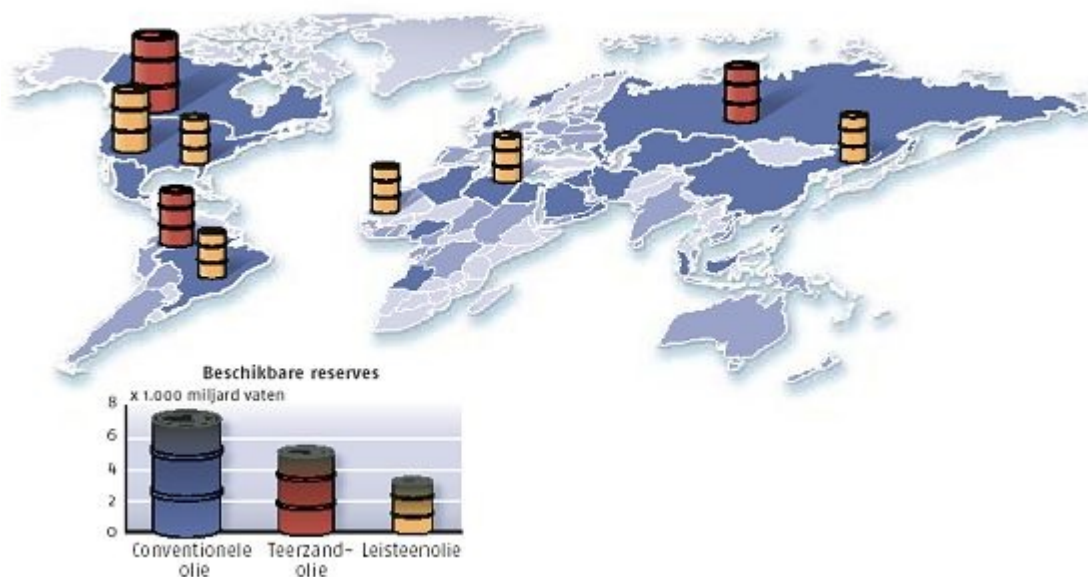
Figuur 4.2

Het bijbehorende onderschrift luidde: 'In het eerste van de drie diagrammen is goed te zien dat de wereld voor zijn energievoorziening zeker de eerste vijftientig jaar grotendeels van fossiele brandstoffen afhankelijk blijft. Olie blijft de belangrijkste energiedrager, maar de productie van gas en steenkool groeit ook flink. Het tweede diagram is een detaillering van het oranje vlak in het eerste (overige energiedragers). De groei van kernenergie stagneert enigszins doordat het maatschappelijk omstreden blijft. Voor de sector windmolens en zonnepanelen (derde diagram) is niet meer dan een bijrol weggelegd, ondanks de indrukwekkende groeicijfers'.

- Is het makkelijk om het percentage fossiele brandstoffen te berekenen in 2000?
- Stijgt dat percentage in 2030 volgens dit scenario?
- Ondersteunen deze diagrammen de uitspraak dat de eerste vijftientig jaar de energievoorziening grotendeels van fossiele brandstoffen afhankelijk blijft?
- In de derde grafiek lijkt het alsof er een enorme toename van het gebruik van windenergie en zonne-energie zal plaatsvinden. Waarom is er toch volgens Exxon maar een bijrol voor die sector weggelegd?
- Waarom zie je dat de ontwikkeling van kernenergie volgens Exxon zal gaan stagneren?

Exxon is in zijn vooruitblik 2004 niet pessimistisch over het vinden van olie. Men verwacht tot het einde van deze eeuw voldoende olie te kunnen winnen, alleen zal het dan niet alleen conventione-

le aardolie zijn. Exxon's Outlook 2004 toont een diagram met de volgende beschikbare oliereserves en belangrijkste vindplaatsen.



Figuur 4.3

Bijschrift bij deze figuur: 'Er is in ieder geval genoeg aardolie tot het einde van deze eeuw. De kleurschakering geeft aan hoe waarschijnlijk het is dat de getoonde reserves ook daadwerkelijk gewonnen kunnen worden: hoe donkerder, hoe waarschijnlijker. Op de wereldkaart zijn de vindplaatsen per land weergegeven: conventionele oliebronnen in blauw, teerzandolie in rood en leisteenolie in geel.'

- f Waar denkt men bij Exxon kan er veel teerzandolie worden gewonnen?
- g Op hoeveel miljard vaten wordt de voorraad teerzandolie geschat?
- h Wat bepaalt de beschikbare hoeveelheid reserves: de hoogte van een vat of de inhoud van een vat? Wat is er dus niet correct in deze figuur?

Uitleg

Met statistieken en vooral met diagrammen wil iemand meestal een bepaald verloop van een variabele tot uitdrukking brengen. Vaak worden diagrammen gebruikt om meningen weer te geven en af en toe worden daarbij grafische trucs gebruikt om een bepaald verloop te overdrijven. Dit zijn **misleidingen**. Daarom is het erg belangrijk om kritisch te kijken naar diagrammen.

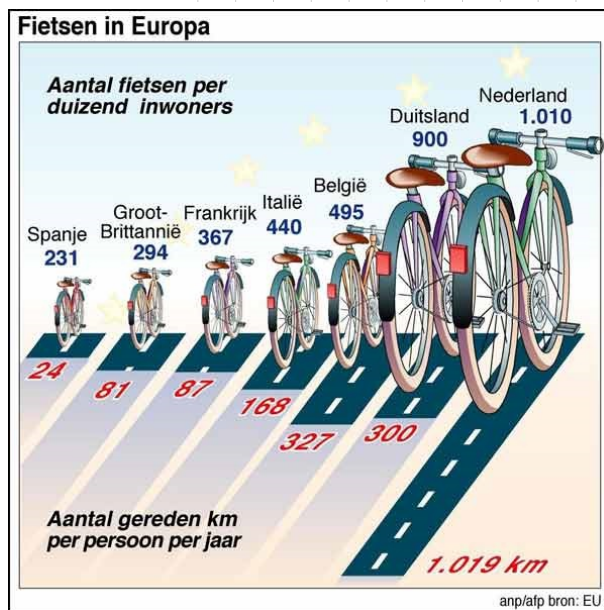
Kijk goed naar:

- de keuze van de eenheden;
- de keuze van een nulpunt op een schaalverdeling;
- de manier van vergroten of verkleinen van figuren om een grotere of kleinere hoeveelheid aan te geven;
- het feit dat het bij sommige diagrammen gaat om een oppervlakte en niet alleen om een lengte of een breedte;
- of een figuur scheve assen heeft, of een 3D-vertanding.

Opgave 1

Wij Nederlanders, we doen nauwelijks iets anders dan fietsen. Kijk maar.

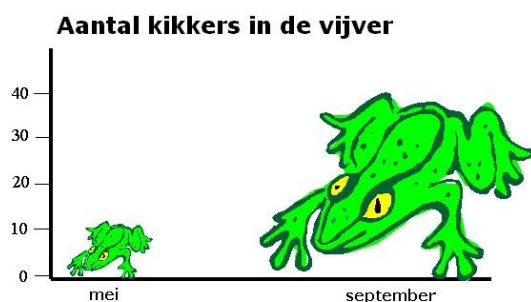
- Welk land heeft vermoedelijk de meeste fietsen?
- Welke informatie ontbreekt om dit met zekerheid te kunnen zeggen?
- Hoeveel kilometer fietsen we per persoon in Nederland per jaar gemiddeld?
- Het rechter deel van de figuur is eigenlijk een staafdiagram. De lengte van de staaf past dan bij de grootte van de waarde die hij aangeeft. Klopt dat hier wel? Licht je antwoord toe met een voorbeeld.
- Waarom zijn, zo bekeken, de fietsen ook een staafdiagram? Klopt dat staafdiagram dan?



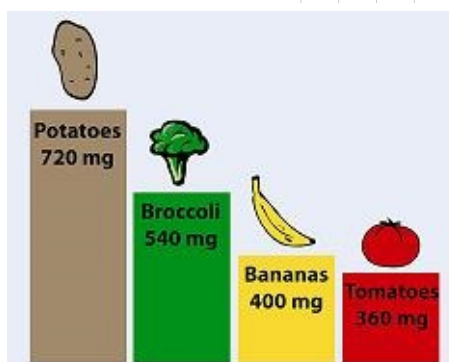
Figuur 4.4

Opgave 2

Bekijk de figuren.



figuur a



figuur b

Figuur 4.5

- Figuur a laat zien hoe het aantal kikkers in de vijver toeneemt. Hoe heeft de maker van de figuur van overdrijving gebruikgemaakt?
- In figuur b leggen aardappelhandelaren uit dat er in aardappelen 720 mg kalium per portie zit. Hoeveel is dat bij broccoli, bij bananen en bij tomaten? Waarom is het staafdiagram misleidend?

Voorbeelden

Voorbeeld 1

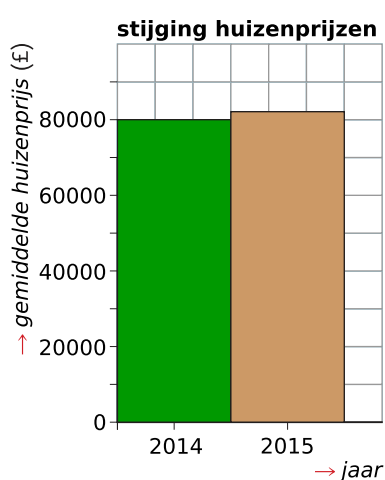
Bekijk de gemiddelde huizenprijzen (in Britse ponden) voor een woonhuis in Wales voor de jaren 2014 en 2015.

Waarom is dit beeld misleidend? Hoe zouden deze gegevens wel moeten worden weergegeven?

Antwoord

Op de verticale as wordt de indruk gewekt dat de huizenprijs drie keer zo hoog is geworden. Dat is natuurlijk niet zo: de prijs is nu 82000 terwijl het 80000 was.

Het staafdiagram geeft een eerlijker beeld als je op de verticale as bij 0 begint:

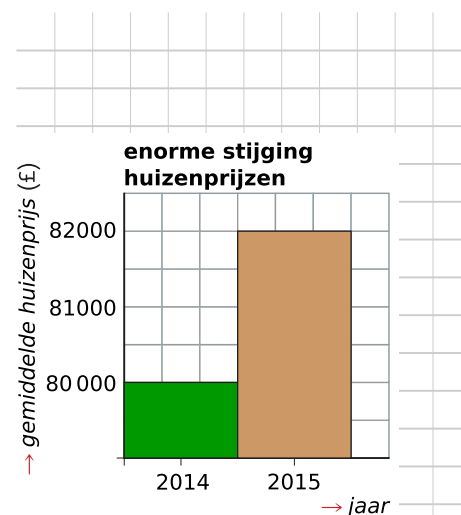


Figuur 4.7

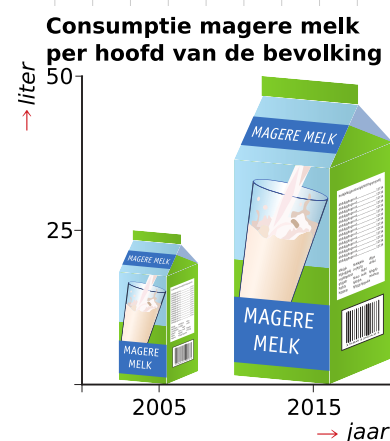
Opgave 3

Bekijk het beelddiagram over de verdubbeling van de melkconsumptie tussen 2005 en 2015.

- Wat is er misleidend aan het diagram?
- Doe een voorstel om het diagram aan te passen zodat dit minder misleidend is.



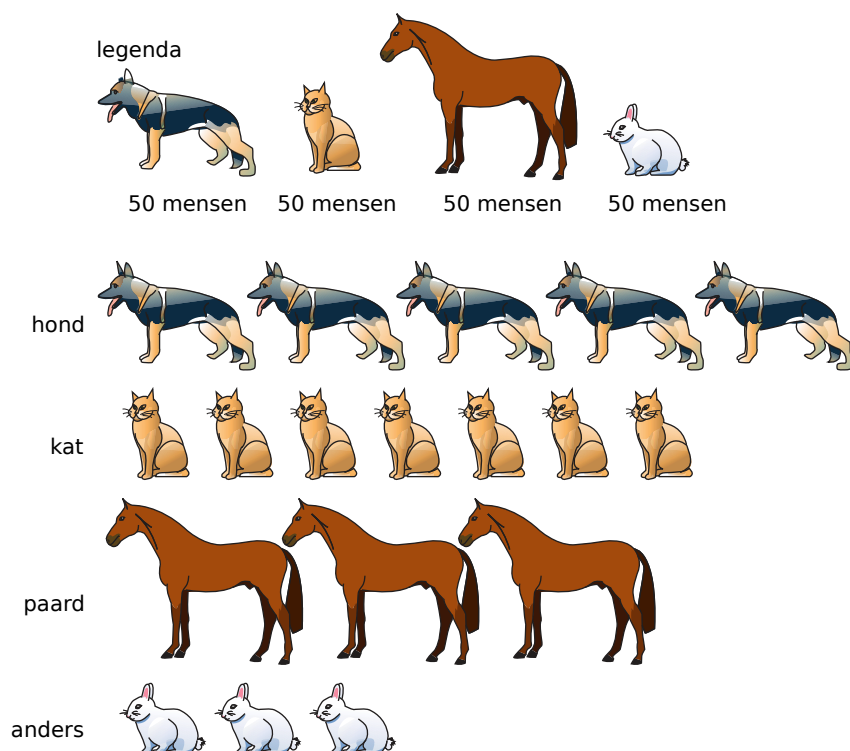
Figuur 4.6



Figuur 4.8

Opgave 4

In dit beelddiagram wil de tekenaar de verdeling van soorten huisdieren in een gemeente weergeven. Wat is er misleidend aan het beelddiagram?

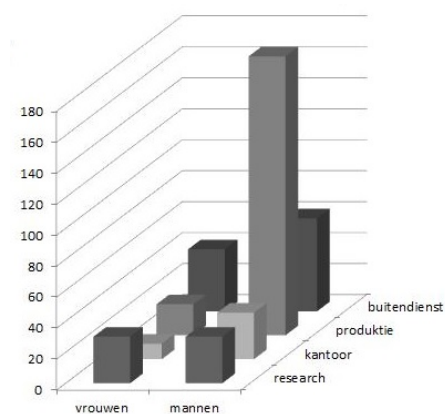


Figuur 4.9

Verwerken

Opgave 5

Wat is er misleidend aan het diagram?



Figuur 4.10

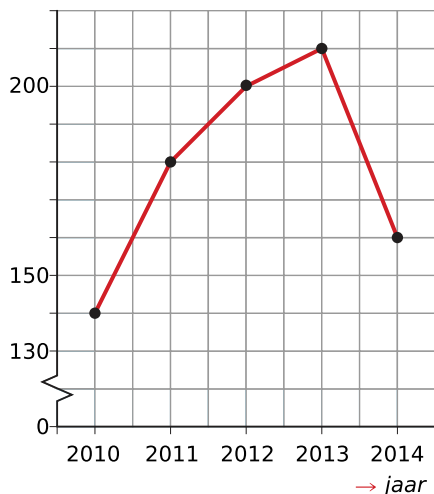
Opgave 6

Een school voor voortgezet onderwijs heeft van 2010 tot 2014 het aantal geslaagde leerlingen van de havo bijgehouden. Dit staat weergegeven in de tabel.

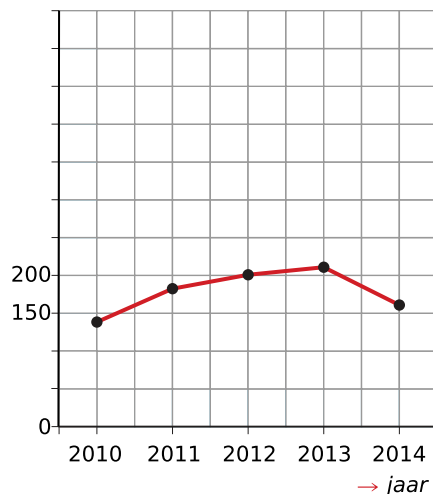
jaar	2010	2011	2012	2013	2014
geslaagden	140	180	200	210	160

Tabel 4.1

De beide lijndiagrammen geven de data uit de tabel weer maar met verschillende schalen. Geef hier commentaar op.



figuur a



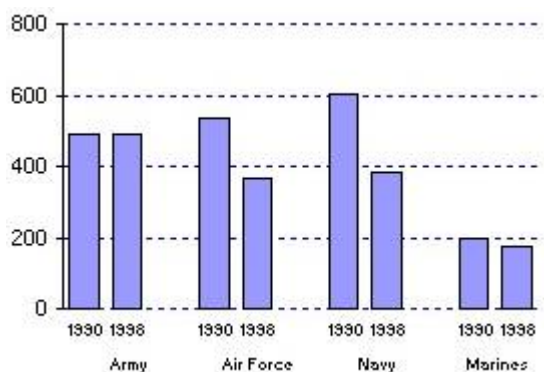
figuur b

Figuur 4.11

Opgave 7

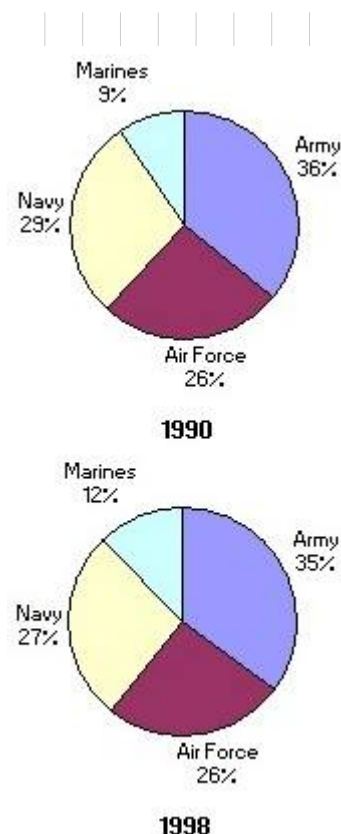
De twee cirkeldiagrammen geven de uitgaven aan het militaire apparaat in de VS weer in twee verschillende jaren. De VS leveren geen recente gegevens.

- Kun je op grond van deze figuur vaststellen dat de mariniers in 1998 een groter budget hadden dan in 1990?
- Welke informatie ontbreekt in de figuur?
- In het staafdiagram zie je werkelijke uitgaven in miljoenen dollars. Schat met hoeveel het totale budget voor het militaire apparaat in de VS in deze jaren is afgenomen.



Figuur 4.13

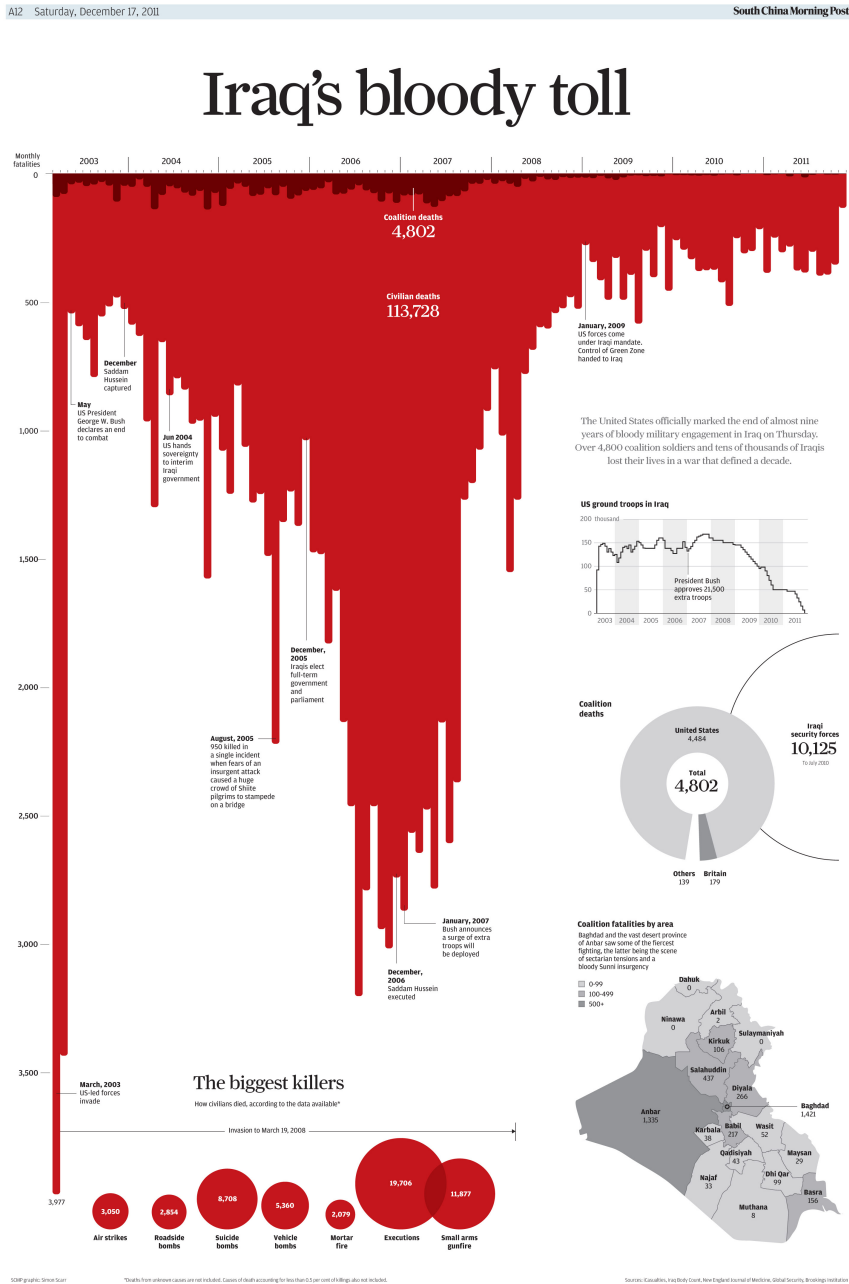
- Stel dat de uitgaven met 20% omlaag zijn gegaan. Wat zou dit betekenen voor het cirkeldiagram voor 1998?



Figuur 4.12

Opgave 8

Wat is er misleidend aan het diagram over de bloedige prijs van de oorlog in Irak?

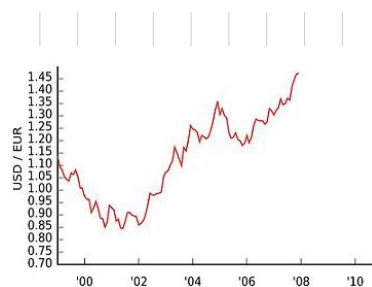


Figuur 4.14

Opgave 9

Deze figuur geeft de koers van de US dollar weer in de loop van de jaren. Er zijn behoorlijke schommelingen, maar in de figuur wordt dat toch wel overdreven.

- Wat wordt bedoeld met USD/EUR?
- Hoeveel moest een Europeaan voor een dollar betalen toen de dollar op zijn dieptepunt was (de dollar het minste waard was ten opzichte van de euro)?
- Leg uit hoe de overdrijving in de figuur ontstaat. (Er zijn twee oorzaken.)

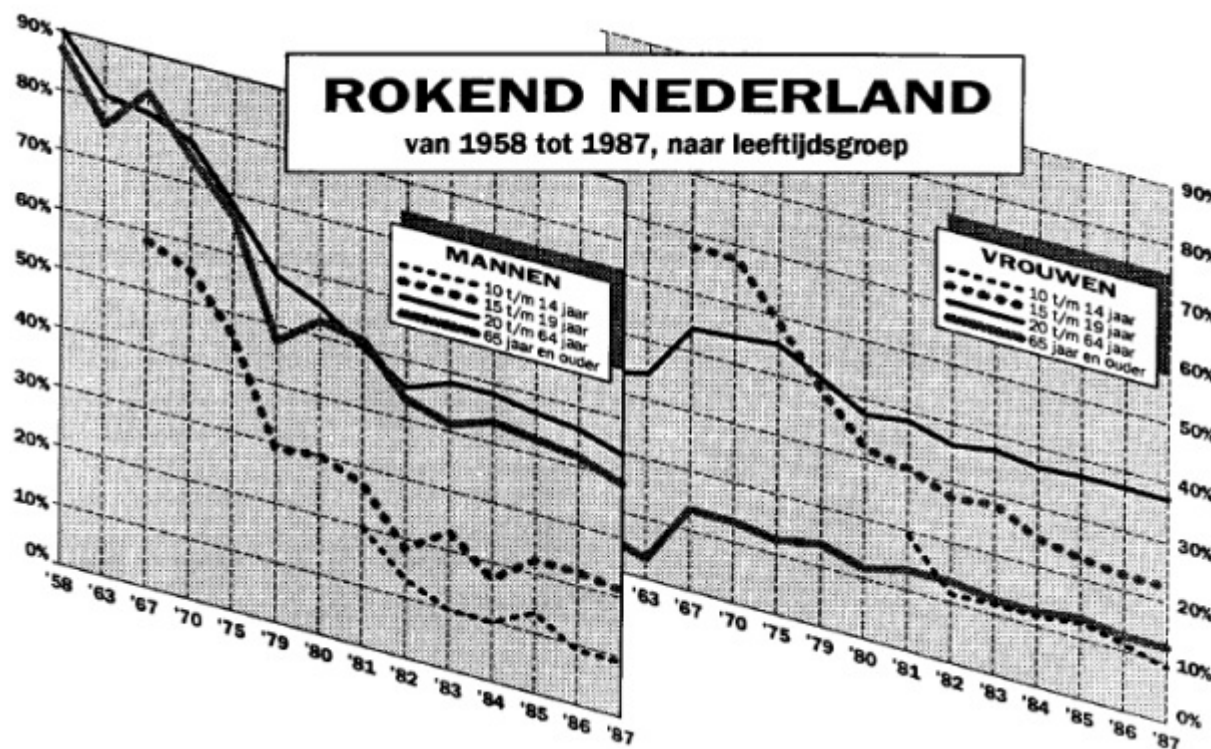


Figuur 4.15

Toepassen

Opgave 10: Rookgedrag

De lijndiagrammen komen uit een krantenartikel uit 1988. Volgens de linker grafiek rookte in 1958 nog 90% van de mannen in de leeftijdsgroep van 20 tot 65 jaar. In 1987 was dit percentage gedaald tot 43%. Deze sterke daling wordt door de tekenaar op een misleidende wijze benadrukt.



Figuur 4.16

- Wat veroorzaakt deze misleiding?
- Bekijk het diagram van de mannen van 15 tot 20 jaar. De grafiek ziet er ook voor de jaren 1982 tot 1987 dalend uit. Daalt het percentage rokers van die categorie ook werkelijk?
- Bij welke van deze acht diagrammen is er vrijwel nooit van daling sprake?

In het krantenartikel stond:

Een overzicht van de rookgewoonten in Nederland in 1987 gaf, net als in de jaren daarvoor, opnieuw een daling te zien van het aantal rokers in ons land. Hoewel de betrekkelijk snelle daling in de jaren zeventig en het begin van de jaren tachtig is afgenomen, heeft die tendens zich de afgelopen drie jaar gestabiliseerd op een daling van 1% per jaar. Kon in 1958 worden becijferd dat 60% van de Nederlandse mannen en vrouwen in de leeftijdsgroep van 15 tot 65 jaar rookte, volgens cijfers van de Stichting Volksgezondheid en Roken was dat in 1987 afgenomen tot 37%.

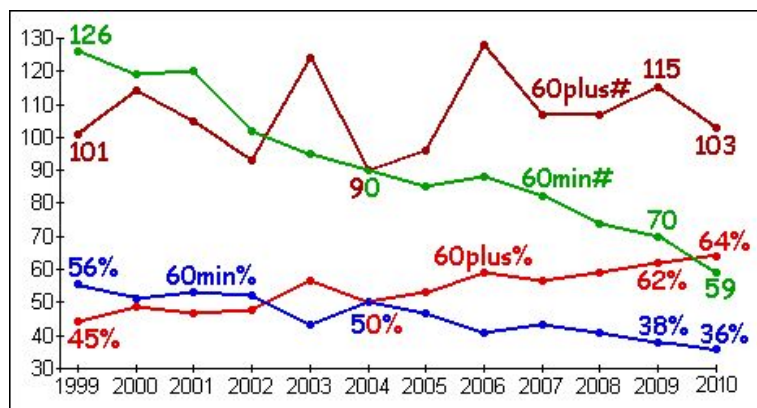
Een lezer van dit artikel denkt dat die 37% niet kan kloppen. Hij redeneert zo:

- de laatste drie jaar was er een daling van 1%;
 - volgens de tekst en de figuur was de daling in de periode daarvoor nog sterker;
 - in 1958 was het percentage rokers 60;
 - in de 29 jaar van de periode 1958-1987 is daar zeker $29 \cdot 1\% = 29\%$ van af gegaan, dus in 1987 moet het percentage minder dan 31% zijn.
- d Leg uit waarom het percentage van 37% wel correct kan zijn als je de 1% daling per jaar goed interpreteert.

Testen

Opgave 11

Je ziet een diagram over fietsslachtoffers in Nederland.

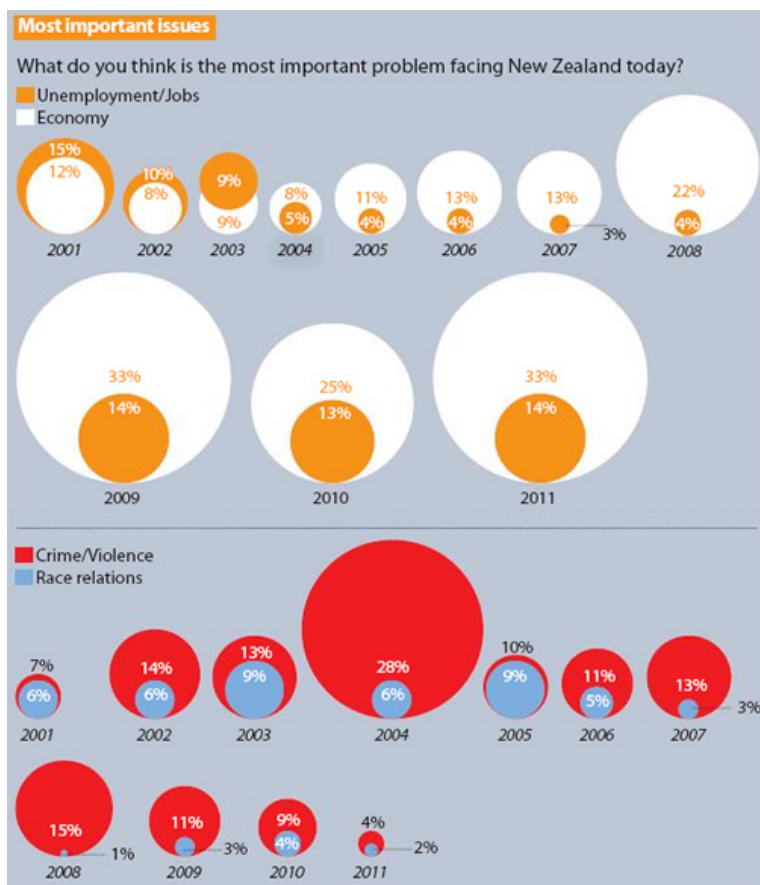


Figuur 4.17

- Wat zou met 60plus en 60min bedoeld worden?
- Wat is er mis met de grafiek?
- De grafiek heeft als voordeel dat je de procenten kunt narekenen. Leg uit hoe je aan 36% komt in 2010.
- Wat willen de makers van de grafiek aantonen?
- Wat zijn de gevolgen van de fout in de grafiek?

Opgave 12

Je ziet een overzicht van wat de meest belangrijke problemen in Nieuw-Zeeland waren in een overzicht uit 2012.



Figuur 4.18

- Wat is de betekenis van de kleuren?
- Welke vragen roept de presentatie van het diagram op?
- Wat is er mis met dit diagram?
- Wat zijn de gevolgen van deze fout?

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van het onderwerp **Kijken naar data** door-
gewerkt. Het is nu tijd om een overzicht over het geheel te krijgen.

Begrippenlijst

- statistiek — populatie — elementen — variabele — data
- meetbaar — kwalitatief — kwantitatief
- beelddiagram — staafdiagram — lijndiagram — cirkeldiagram
— kaartdiagram — puntenwolk

Activiteitenlijst

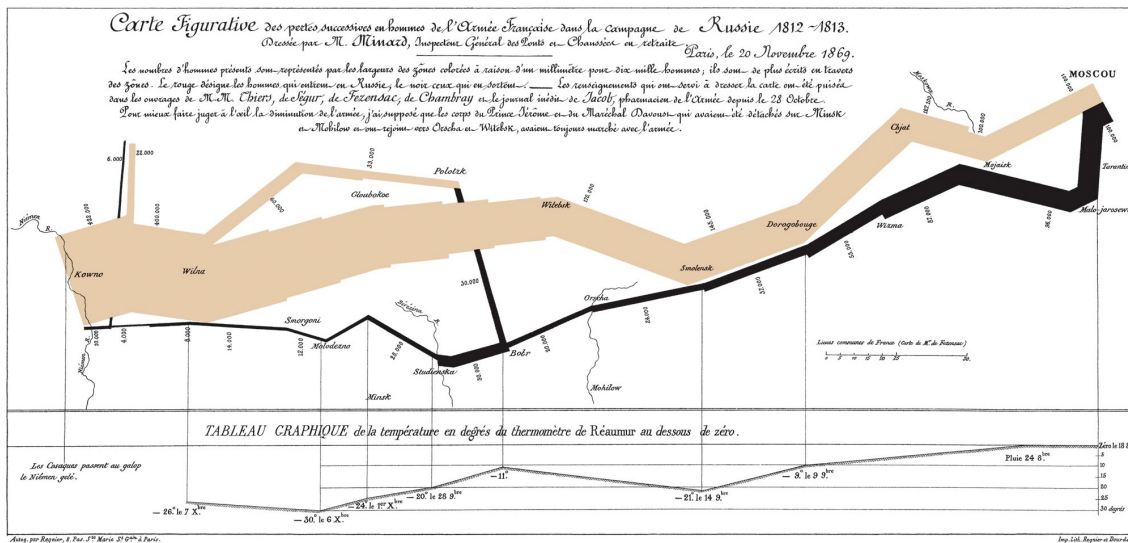
- de populatie en de objecten van een statistisch onderzoek her-
kennen — de te onderzoeken variabele herkennen — soorten
data herkennen
- verschillende soorten variabelen en hun data herkennen
- verschillende soorten diagrammen herkennen en op grond
daarvan de wijze van aflezen eruit herkennen — een aantal ba-
sisdiagrammen zelf kunnen tekenen
- kritisch kijken naar statistisch materiaal

Achtergronden

De beschrijvende statistiek ontstond pas toen staten en centrale
overheden een belangrijke rol gingen spelen. Immers: vooral cen-
trale overheden zijn geïnteresseerd in globale overzichten van de
bevolking, omdat het aantal mensen waarover zij verantwoordelijk
is te groot is om van iedereen alles te weten.

Via **Historische hoogtepunten van de grafische verwerking**
kun je veel informatie vinden over het ontstaan van statistieken en
de mensen die daarin een rol hebben gespeeld.

Hier zie je Minard's beroemde diagram van de tocht van Napoleon naar Rusland nog eens.



Figuur 5.1

Testen

Opgave 1

Dit beelddiagram geeft informatie over het gemiddelde aantal geboorten en de sterften in Duitsland per vier jaar, in de periode 1911 - 1926.

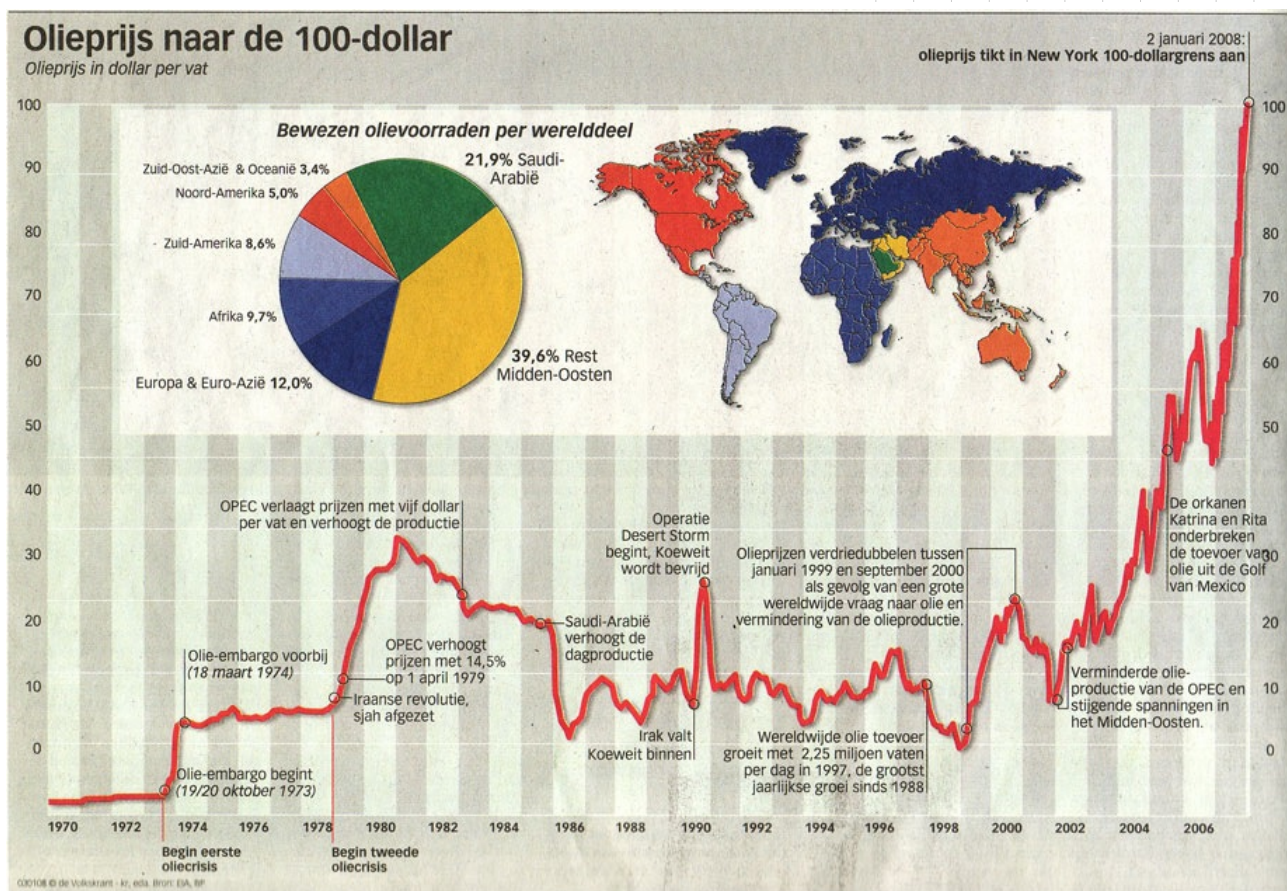


Figuur 5.2

- Waaraan herken je de periode van de Eerste Wereldoorlog?
- Hoeveel bedroeg het geboorteoverschot in de jaren vóór de Eerste Wereldoorlog?
- Hoeveel bedroeg het geboorteoverschot in de jaren na de Eerste Wereldoorlog?

Opgave 2

Bekijk de infographic.



Figuur 5.3

- Welke soorten diagrammen tref je in deze infographic aan?
- Waarom is het kaartje eigenlijk geen kaartdiagram maar een legenda?
- Hoeveel procent van de totale bewezen olievoorraad zit in het Midden-Oosten? Waarom wordt er gesproken over de 'bewezen' olievoorraad?
- Bekijk de verticale schaal van het lijndiagram. Wat is daar merkwaardig aan?
- Wat was er aan de hand tijdens de eerste en de tweede oliecrisis?
- Welke gevolgen had dit?
- Wat probeert men met het diagram weer te geven?

Opgave 3

Je ziet een overzicht van het aantal kilometers autowegen (80 km/h) van diverse landen.

Country	Total network length of all motorways ^[3] (km)	Length of motorways per capita ^[3] (mm)	Motorway density ^[3] (m of motorway per square km)
Austria	1720	204.41	20.51
Belgium	1763	167.73	54.17
Canada	16900	534.59	1.69
Czech Republic	1050 ^[4]	100.31	13.31
Denmark	1340	236.04	31.09
Finland	739 ^[5]	140.60	2.19
France	11392	172.74	17.78
Germany	12845	159.40	35.98
Great Britain	3555	60.41	15.46
Hungary	1361	137.36	14.63
Iceland	(37) ^[6]	(115) ^[6]	(0.36) ^[6]
Ireland	663 ^[7]	149.9	9.43
Italy	6661	111.60	21.94
Japan	7383	57.79	19.54
South Korea	4044 ^[8]	80.88	40.36
Luxembourg	147	319.57	56.84
Mexico			
Netherlands	2274	139.01	54.76
New Zealand	171	41.3	0.64
Norway	194	41.81	0.6
Poland	2549	60.49	7.46
Portugal	2647	249.32	28.65
Slovakia	580	107.4	11.83
Spain	16214	347.16	32.04
Sweden	1740	192.31	3.87
Switzerland	1361	182.46	32.97
Turkey	2100 ^[9]	25.83 ^[10]	2.61 ^[10]
USA	75008	253.05	7.79

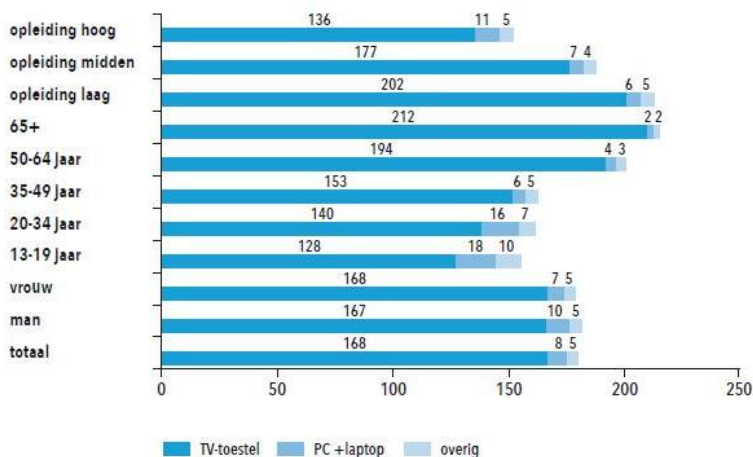
Figuur 5.4 bron: Wikipedia

- Welke data van landen heb je nodig om de getallen in de derde kolom, lengte van de autowegen per bewoner, te kunnen berekenen?
- Welke data van landen heb je nodig om de getallen in de vierde kolom te kunnen berekenen?
- Wat betekenen de getallen 139,01 en 54,76 die bij Nederland staan?
- Welk argument zullen voorstanders van de aanleg van autowegen gebruiken om een weg aan te leggen?
- En welk argument zouden tegenstanders kunnen gebruiken om het te voorkomen?
- Welke gegevens zou je nog willen hebben om te kunnen beoordelen of er genoeg autowegen zijn?

Opgave 4

Er wordt veel onderzoek gedaan naar gebruik van media. In een publicatie van zo'n onderzoek zie je de volgende figuur.

Grafiek 5.2 Gemiddeld aantal minuten kijken per apparaat per dag, naar doelgroepen (bron Media:Tijd 2014)



Figuur 5.5

- Welke statistische variabelen worden hier met elkaar vergeleken?
- Zijn het kwalitatieve of kwantitatieve variabelen?
- Hoeveel zinvolle staafdiagrammen kun je uit deze grafiek afleiden?
- Van welk diagram kun je een zinvol lijndiagram maken?
- De absolute gegevens van de leeftijdsgroep 65+ worden omgerekend naar relatieve gegevens: 98% kijkt naar tv, 1% kijkt naar pc of laptop, en 1% kijkt naar overige apparaten. Wat wordt er vergeten?
- Wat zijn de relatieve gegevens van de doelgroep(en) waartoe jij behoort?

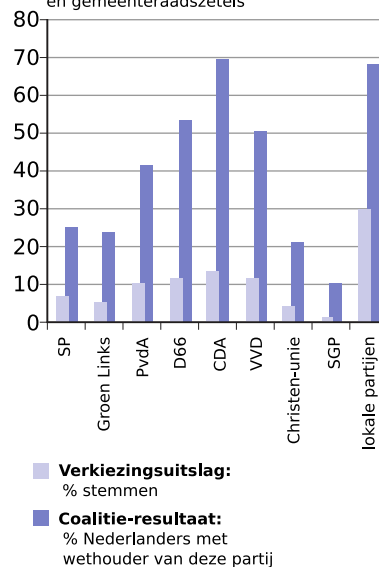
Opgave 5

Bekijk het staafdiagram wat is gemaakt naar aanleiding van de gemeenteraadsverkiezingen.

- Welke statistische variabelen worden hier vergeleken?
- Lees de getallen van de VVD af en leg ze uit.
- Vergelijk D66 en VVD. Welke partij is naar verhouding succesvoller geweest met het aantal wethouders?
- In de krant staat: "GroenLinks is verhoudingsgewijs net zo efficiënt: bijna vijf keer zo veel Nederlanders krijgen een GroenLinks-wethouder dan er op die partij hebben gestemd." Hoe komt men aan die vijf?
- Wat is er mis met deze redenering?
- Welke kritische opmerkingen kun je maken bij de vergelijking die het staafdiagram maakt?

CDA sterkste in verzilveren bescheiden verkiezingsuitslag

Vergelijking behaalde stemmen en gemeenteraadszetels



Figuur 5.6

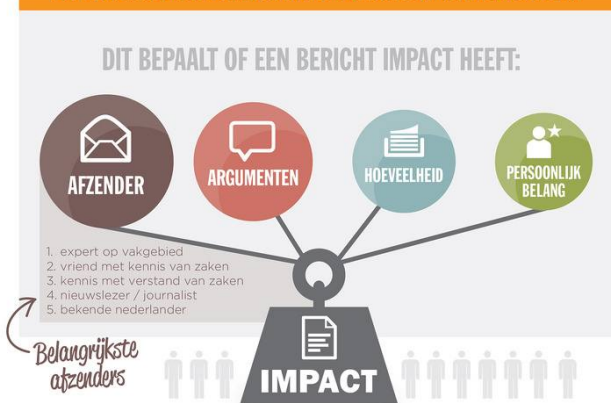
SOCIAL MEDIA IMPACT 2013 (#SMING13)

Het aantal berichten over o.a. financiële instellingen op social media neemt nog steeds toe. Maar hoe impactvol en betrouwbaar vinden consumenten deze berichtgeving? En in hoeverre verschilt de betrouwbaarheid en impact van Social Media van traditionele media (zoals tv, radio) en online media (zoals nieuwssites, blogs)? Om daar antwoord op te geven heeft de ING voor de tweede keer het Social Media impact onderzoek uitgevoerd.

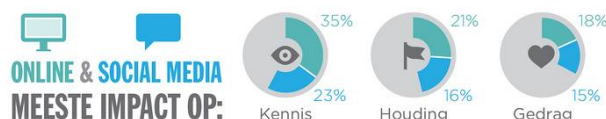
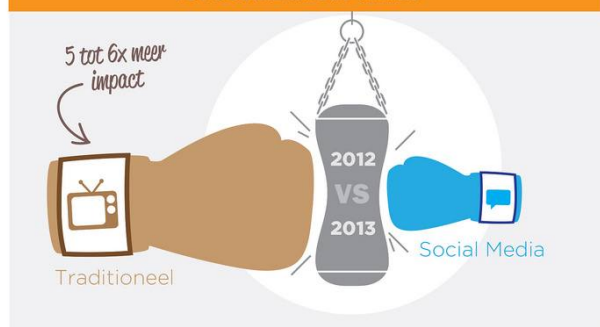
BUZZ OP SOCIAL MEDIA GEGROEID TOV VORIG JAAR



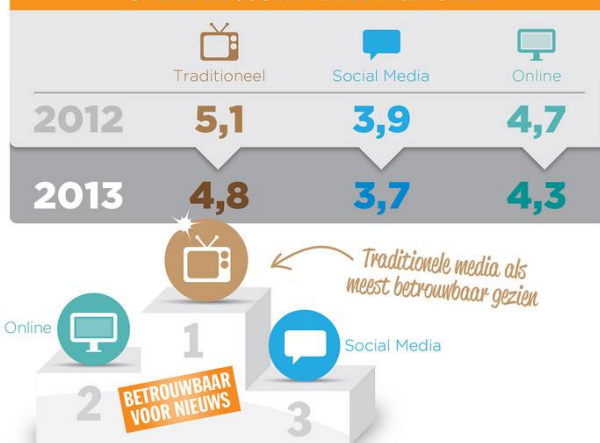
DE AFZENDER, GEBRUIKTE ARGUMENTEN, HOEEVEELHEID BERICHTEN EN PERSOONLIJK BELANG BEPALEN IMPACT VAN BERICHTEN



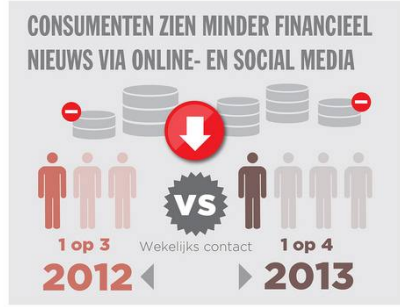
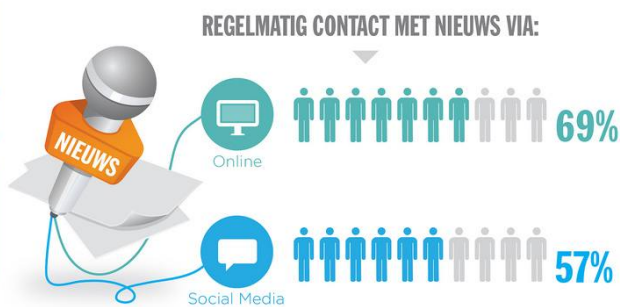
IMPACT TRADITIONELE MEDIA IN VERGELIJKING TOT SOCIAL MEDIA GELIJK



BETROUWBAARHEID VAN TRADITIONELE, ONLINE EN SOCIAL MEDIA AFGENOMEN



CONSUMENT ZIET REGELMATIG NIEUWSBERICHTEN, MAAR KOMT MINDER VAAK IN CONTACT MET FINANCIËEL NIEUWS



Voor meer informatie: Externe Communicatie ING Nederland

✉ pers@ing.nl

☎ 020 - 576 41 90

🐦 @INGnl_nieuws



Figuur 5.7

2

Formules

2.1	Formules gebruiken	68
2.2	Grafieken maken	77
2.3	Vergelijkingen	87
2.4	Ongelijkheden	94
2.5	Meerdere variabelen	101
2.6	Totaalbeeld	109

2.1 Formules gebruiken

Inleiding

De grafische rekenmachine kan heel snel grafieken maken bij formules die een verband tussen twee variabelen weergeven. Maar dan moeten ze wel in de juiste vorm staan: hij kan alleen werken met formules waarbij duidelijk is voor welke variabele getallen worden ingevuld (de invoervariabele) en welke variabele dan moet worden uitgerekend. Ook mogen er natuurlijk niet meerdere uitkomsten mogelijk zijn. Verbanden die aan deze eisen voldoen, noem je 'functies'.

Soms moet je de formule een andere vorm geven om hem in de grafische rekenmachine te kunnen invoeren.

Je leert in dit onderwerp

- formules herleiden tot ze de juiste vorm hebben voor de grafische rekenmachine;
- met het begrip functie werken;
- grafieken maken met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- werken met variabelen (met letters);
- tabellen maken en daarbij grafieken tekenen.

Verkennen

Opgave V1

Iemand wil een stuk hei afgrenzen om er schapen te laten grazen met 360 meter gaas. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,5 hectare (dus 5000 m²).

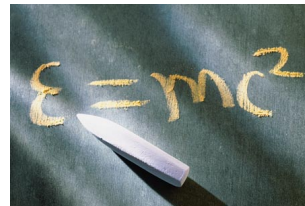
De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk hei.

- Om welke variabele grootheden gaat het in dit probleem?
- Stel bij dit probleem passende formules op.
- Los het verder op, bijvoorbeeld met behulp van tabellen en grafieken.

Uitleg

'De oppervlakte van een rechthoek kun je uitrekenen door de lengte en de breedte met elkaar te vermenigvuldigen.' Deze zin kun je inkorten tot $A = l \cdot b$, als je de oppervlakte van de rechthoek voorstelt door de variabele A , de lengte door de variabele l en de breedte door de variabele b . Zo'n ingekorte zin heet een 'formule'. Formules zijn overzichtelijker dan zinnen, maar je moet onthouden wat de variabelen voorstellen.

Lengte en breedte zijn grootheden waarbij een eenheid (bijvoorbeeld centimeter) hoort.



Figuur 1.1



Figuur 1.2

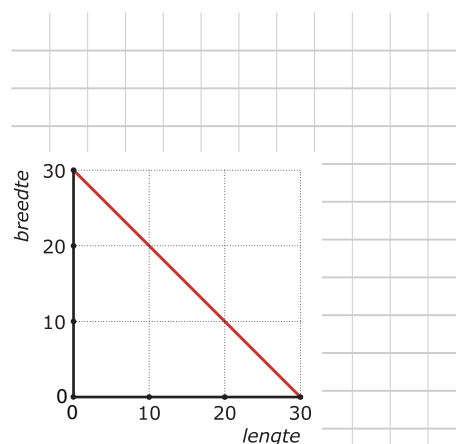
In formules schrijf je alleen variabelen, geen eenheden. Bij toepassingen moet je wel zorgen dat de eenheden kloppen: als lengte en breedte in meter zijn, dan is de oppervlakte in vierkante meter. In veel formules komt een 'isgelijktteken' voor.

Een formule zoals $2l + 2b = 60$ beschrijft een verband tussen twee variabelen, namelijk l en b . l kan bijvoorbeeld de lengte van een rechthoek zijn en b de breedte. Om een grafiek van dit verband te maken schrijf je de formule als $b = 30 - l$.

Nu is b uitgedrukt in l . Je zegt dat b een functie is van l . Bij het herleiden van formules maak je gebruik van de algebraïsche technieken die je eerder hebt geleerd.

Formules van de vorm $y = \dots$ kun je in de grafische rekenmachine invoeren. Hoe je dat doet, vind je in het practicum.

Maar er zijn ook formules die geen verband tussen twee variabelen beschrijven. De vergelijking $2t + 40 = 300$ beschrijft geen verband tussen twee variabelen. Je kunt er geen grafiek bij tekenen. Deze vergelijking kun je oplossen: $t = 130$, want $2 \cdot 130 + 40 = 300$.

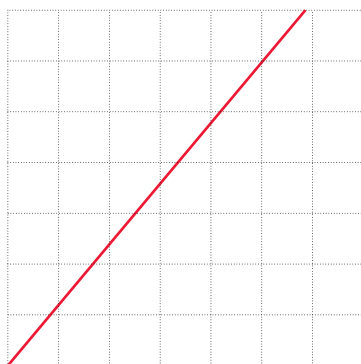


Figuur 1.3

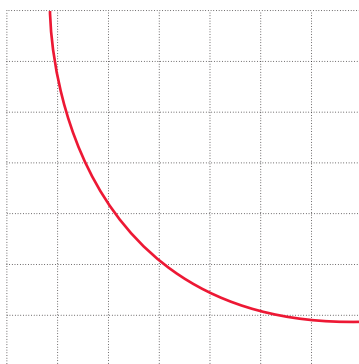
Opgave 1

Gebruik de formule: *oppervlakte rechthoek* = *lengte* × *breedte*.

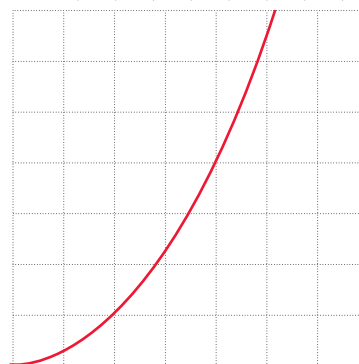
- Stel dat gegeven is: $\text{lengte} = 6$ m. Vul dit in de formule in. Geef de formule die hierdoor ontstaat.
- Stel je voor dat: $\text{oppervlakte rechthoek} = 12 \text{ m}^2$. Schrijf op hoe de formule dan wordt.
- Van een rechthoek is bekend dat het een vierkant is. Schrijf de formule op die het verband tussen oppervlakte en lengte beschrijft.
- De grafieken horen bij de formules uit vraag a, b en c. Neem de drie grafieken over en schrijf bij elke grafiek de juiste formule. Zet de juiste variabelen bij de assen en maak er een goede schaalverdeling bij.



grafiek I



grafiek II



grafiek III

Figuur 1.4

Opgave 2

De omtrek van een rechthoek is twee keer de lengte l en twee keer de breedte b .

In formulevorm: $omtrek = 2l + 2b$.

Als de omtrek 60 cm is, dan geldt: $2l + 2b = 60$.

Bekijk de formule $2l + 2b = 60$ in de [Uitleg](#).

- Waarom kun je de formule in deze vorm niet in de grafische rekenmachine invoeren?
- De formule is te herleiden tot $b = 30 - l$. Laat zien hoe dat gaat.
- Voer de formule in de grafische rekenmachine in. Neem voor het venster de standaardinstellingen. Schrijf de formule op die je invoert.
- Waarom krijg je geen grafiek in beeld?
- Stel je venster zo in dat $0 \leq x \leq 30$ en $0 \leq y \leq 30$. Waarom krijg je de hele grafiek in beeld?

Theorie en voorbeelden

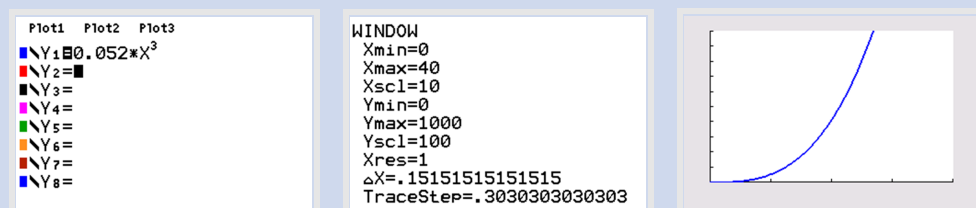
Om te onthouden

De grafische rekenmachine kan heel snel grafieken maken bij formules die een verband tussen twee variabelen weergeven. Maar dan moeten ze wel in de juiste vorm staan: hij kan alleen werken met formules waarbij duidelijk is voor welke variabele getallen worden ingevuld (de invoervariabele) en welke variabele dan moet worden uitgerekend. Ook mogen er natuurlijk niet meerdere uitkomsten mogelijk zijn. Verbanden die aan deze eisen voldoen, noem je 'functies'.

Bij een formule die het verband tussen de variabelen x en y beschrijft, noem je y een **functie** van x , wanneer deze formule de vorm $y = \dots$ heeft. De x -waarden zijn de **invoerwaarden**, de y -waarden de **uitkomsten**. In de bijbehorende grafiek komen de y -waarden altijd op de verticale as.

- In de formule $y = 30 - x$ is y een functie van x . Voer je $x = 3$ in, dan is de uitkomst $y = 17$. Kortweg: $y(3) = 17$.
- In de formule $P = 0,052v^3$ is P een functie van v . Voer je $v = 10$ in, dan is de uitkomst $P = 52$. Kortweg: $P(10) = 52$. Voor de grafische rekenmachine schrijf je $y = 0,052x^3$.

Formules van de vorm $y = \dots$ kun je op de grafische rekenmachine invoeren. Hoe je dat doet, vind je in het [Practicum](#). Het maken van de grafiek van een functie op de grafische rekenmachine wordt 'plotten' genoemd.



Figuur 1.5

Soms moet je een formule **herleiden** (ook wel **herschrijven** genoemd) om hem als functie te kunnen invoeren in de grafische rekenmachine. Bij het herleiden van formules geldt:

- aan beide zijden van een isgelijktteken mag je hetzelfde optellen of aftrekken;
- aan beide zijden van een isgelijktteken mag je met hetzelfde vermenigvuldigen of door hetzelfde delen (behalve vermenigvuldigen of delen met 0);
- soms moet je eerst de haakjes wegwerken.

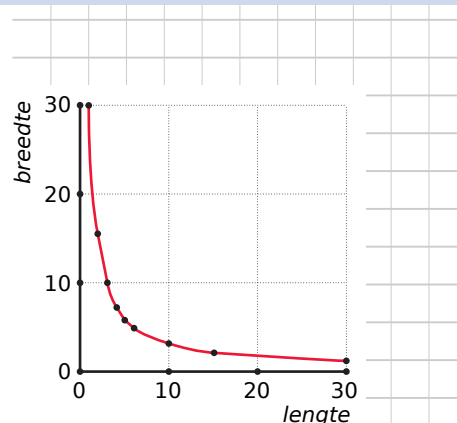
Voorbeeld 1

De formule $\text{lengthe} \times \text{breedte} = 30$ kun je korter schrijven als $l \cdot b = 30$. Je kunt er een grafiek bij tekenen. Hoe maak je hier een grafiek bij op de grafische rekenmachine?

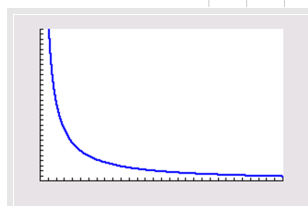
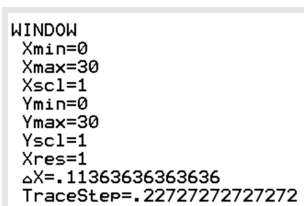
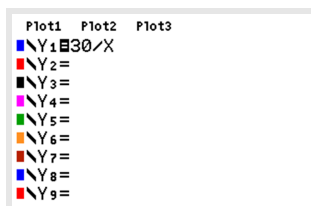
Antwoord

Daarvoor moet je de formule herleiden tot de vorm $l = \dots$ of $b = \dots$. Stel, je kiest voor de vorm $l = \dots$. Dit betekent dat je l opvat als functie van b . De formule wordt dan $l = \frac{30}{b}$.

Voor de rekenmachine voer je de formule in als $Y1=30/X$. Je moet ook de vensterinstellingen aanpassen: X loopt van 0 tot 30 en Y ook. Als het goed is, krijg je dan een nette grafiek. Vergelijk hem met de grafiek in dit voorbeeld.



Figuur 1.6



Figuur 1.7

Opgave 3

Je wilt een grafiek maken bij de formule $2l + 2b = 100$.

- Hoe doe je dat zonder de grafische rekenmachine te gebruiken?
- Hoe doe je dat met de grafische rekenmachine?
- Waarom moet je de formule eerst herleiden?
- Bij welke waarde van b geldt $l = 7,5$?

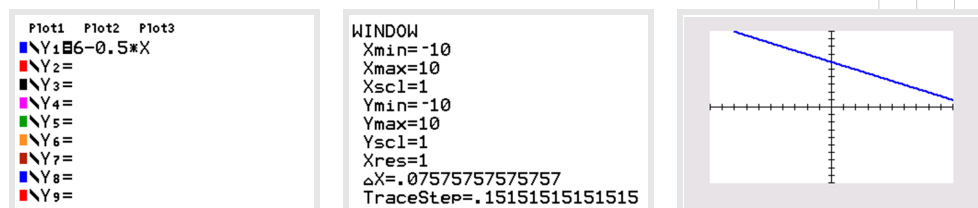
Voorbeeld 2

De formule $x + 2y = 12$ beschrijft een verband tussen x en y . Herleid de formule zo, dat y is uitgedrukt in x en teken dan met de grafische rekenmachine de bijpassende grafiek.

Antwoord

$$\begin{aligned} x + 2y &= 12 \\ 2y &= 12 - x && \text{beide zijden } -x \\ y &= 6 - 0,5x && \text{beide zijden } /2 \end{aligned}$$

Je hebt de variabele y geschreven als functie van x . Nu kun je de formule op de grafische rekenmachine invoeren.



Figuur 1.8

Opgave 4

Schrijf de formules zo, dat y is uitgedrukt in x en plot de grafiek op de grafische rekenmachine.

- $3x + y = 6$
- $x \cdot y = 12$
- $x = 4 - y$
- $2x - 3y = 6$
- $x^2 + 4y = 8$
- $0,5x + 1,5y = 12$

Opgave 5

Bij welke van deze formules kun je een grafiek maken? Schrijf in dat geval de formule zo, dat je hem op de grafische rekenmachine kunt invoeren.

- $inhoud = 3r^2$
- $inhoud = l \cdot b \cdot h$
- $4(a - b) = 4a - 4b$
- $l \cdot b = 20$

Opgave 6

De *Body Mass Index (BMI)* geeft de verhouding weer tussen gewicht en lengte en zegt iets over een gezond gewicht. Je berekent de *BMI* met de formule: $BMI = \frac{G}{l^2}$. Hierin is l je lengte in meter en G je gewicht in kilogram. Een *BMI* tussen de 20 en de 25 betekent een gezond gewicht.

- Bereken de *BMI* van iemand die 180 cm lang is en 78 kg weegt.
- Bij een *BMI* van 20 kun je een grafiek maken van iemands gewicht afhankelijk van zijn lengte. Plot de grafiek.

- c Plot in hetzelfde venster de grafiek met een $BMI = 25$.
- d Peter is 180 cm lang. Bepaal welk gewicht voor Peter gezond is, in kilogram nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Gegeven is de formule $2(y + 3) + x = 4$. Als je hier y wilt uitdrukken in x , dan moet je eerst de haakjes wegwerken. Voor het wegwerken van haakjes gelden de volgende rekenregels:

$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y \text{ en } (a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Voorbeelden van haakjes wegwerken zijn:

- $-2 \cdot (x - y) = -2 \cdot x - -2 \cdot y = -2x + 2y$
- $x \cdot (3 - x) = x \cdot 3 - x \cdot x = 3x - x^2$
- $2 - (x - 5) = 2 - 1 \cdot x - 1 \cdot -5 = 2 - x + 5 = 7 - x$
- $(x + 3)(x - 5) = (x + 3)(x + -5) = x \cdot x + x \cdot -5 + 3 \cdot x + 3 \cdot -5 = x^2 - 2x - 15$
- $(p - 5)^2 = (p - 5)(p - 5) = p^2 - 5p - 5p + 25 = p^2 - 10p + 25$

Let er wel op dat het wegwerken van haakjes geen automatisme wordt. Soms kun je met een formule juist veel eenvoudiger werken als je de haakjes gewoon laat staan. Denk ook steeds na of het wegwerken wel is toegestaan.

- Goed: $\frac{x+6}{2} = \frac{x}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2}x + 3$
- Fout: $\frac{6}{x+2} = \frac{6}{x} + \frac{6}{2} = \frac{6}{x} + 3$

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je de uitdrukking $2(y + 3) + x = 4$. Werk de haakjes weg en druk y uit in x .

Opgave 8

Schrijf de uitdrukkingen zonder haakjes.

- a $3x \cdot (x - 2y)$
- b $2a - (9a + 6)$
- c $-5p \cdot (1 - 3p)$
- d $30p^2 - p \cdot (20p + 100)$

Opgave 9

Schrijf de uitdrukkingen zonder haakjes.

- a $(x + 2) \cdot (x + 4)$
- b $2(b + 4)(b - 2)$
- c $(l + 3)\left(\frac{1}{l} + 6\right)$
- d $(5c - 4)^2$

Verwerken

Opgave 10

Schrijf indien mogelijk de formules als optelling van twee breuken en vereenvoudig die breuken zo ver mogelijk.

a $\frac{x+12}{3}$

b $\frac{x}{x+7}$

c $\frac{x+5}{x+6}$

d $\frac{15x+3}{x}$

Opgave 11

Teken met de grafische rekenmachine een grafiek bij elke formule die een verband beschrijft tussen twee variabelen.

a $\text{inhoud kubus} = r^3$

b $s = 400 - 5t^2$

c $a^2 + b^2 = c^2$

d $2x + 5 = -x + 7$

Opgave 12

Schrijf de formules zo, dat y een functie is van x .

a $2x + 4y = 10$

b $2x - 3y + 6 = 0$

c $8x = 0,5y$

d $2x \cdot y = 0,5$

Opgave 13

Schrijf zonder haakjes.

a $-2x(x^2 + 6x)$

b $-2x - (x^2 + 6x)$

c $(t + 20)(t - 5)$

d $(x + 2)(x - 1)$

e $(a - 3)(a + 3)$

f $(6x - 3)^2$

Opgave 14

Een boer heeft een rechthoekig stuk land. De omtrek daarvan is 300 m.

a Wat is de lengte van het stuk land als de breedte 50 m is?

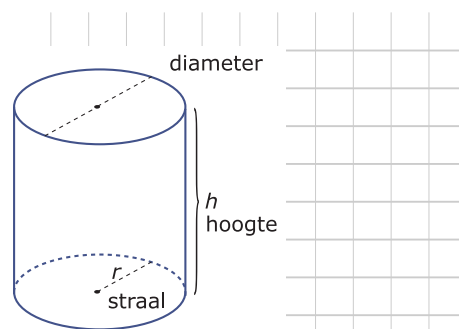
b Geef een formule waarbij je de lengte l van het stuk land uitdrukt in de breedte b .

c Teken de grafiek van de bij b gevonden formule met de grafische rekenmachine.

Opgave 15

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Hierin is V de inhoud (het volume), r de straal in centimeter en h de hoogte in centimeter.

- In welke eenheid moet V worden uitgedrukt?
- Hoeveel bedraagt de inhoud van een blikje met een diameter van 80 mm en een hoogte van 16 cm? Rond af op een geheel getal.
- Welke formule geeft het verband tussen V en r voor blikjes met een hoogte van 16 cm?
- Plot de grafiek van de formule die je bij c hebt gevonden.
- Van andere blikjes ligt de inhoud vast: $V = 0,75$ L. Welk verband is er nu tussen r en h ?



Figuur 1.9

Toepassen

Opgave 16: Maximale opbrengst

Een ondernemer verkoopt een bepaald artikel. Er bestaat een verband tussen de hoeveelheid q die per maand van dit artikel wordt verkocht en de prijs p (in euro per verkochte eenheid). Dit verband wordt beschreven door de formule: $q = 4000 - 20p$.

- Hoeveel eenheden van dit artikel verkoopt hij in een bepaalde maand als hij € 50,00 per eenheid rekent?
- De ondernemer koopt dit artikel in voor € 30,00 per eenheid. Wil hij geen verlies lijden, dan is dit zijn laagste verkoopprijs. Hoeveel artikelen moet hij minimaal verkopen, wil hij geen verlies lijden?
- Negatieve waarden voor q zijn onmogelijk. Tot hoever zou de verkoopprijs dus kunnen oplopen?
- De opbrengst per maand bereken je door de prijs p per stuk te vermenigvuldigen met de verkochte hoeveelheid per maand. Laat zien dat $R = 4000p - 20p^2$.
- Maak een tabel voor de opbrengst waarbij $p = 30, 40, 50, 60, \dots, 200$. Gebruik de grafische rekenmachine.
- Bij welke prijs heeft deze ondernemer de grootste maandelijkse opbrengst?

Testen

Opgave 17

Bij welke van de vergelijkingen kun je een grafiek maken? Schrijf op hoe je die vergelijking als formule in de grafische rekenmachine moet invoeren.

- $a + b = 8$
- $4x^2 - 25 = 135$
- $R = 50p - 2p^2$

Opgave 18

Schrijf zonder haakjes.

- a $p(2p + 1)$
- b $(4 + k)(5 - 2k)$
- c $(b + 5)^2$

Opgave 19

Een boer heeft een zuiver vierkant stuk land. Hij staat een strook van 3 m breed aan de zuidelijke kant van zijn land af voor de aanleg van een fietspad. Ter compensatie krijgt hij aan de oostelijke kant een strook van 3 m terug.

- a Noem de oorspronkelijke lengte van het land x (in meter) en de oppervlakte A . Hoe groot is dan de oppervlakte van het land vóór de aanleg van het fietspad? Schrijf op als een vergelijking.
- b Hoe groot is de oppervlakte van het land na de aanleg van het fietspad? Schrijf op als een vergelijking. Let op de haakjes!
- c Laat door uitwerken van de haakjes zien dat de boer spijt zal hebben van de compensatieregeling.

Practicum

Met een grafische rekenmachine moet je echt leren werken. Zo'n machine heeft veel mogelijkheden. Met de volgende practica leer je de basistechnieken.

- [Basistechnieken TI84](#)
- [Basistechnieken TIInspire](#)
- [Basistechnieken Casio fx-CG50](#)
- [Basistechnieken HPprime](#)
- [Basistechnieken NumWorks](#)

Grafieken kun je ook goed maken met Excel. Dat rekenbladprogramma zit tegenwoordig op bijna elke pc. Met de volgende practica leer je enkele basistechnieken.

- [Grafieken bij tabellen](#)
- [Formules en grafieken](#)

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het wegwerken van haakjes**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met krijg je een nieuwe opgave.

[Werk met AlgebraKIT.](#)

2.2 Grafieken maken

Inleiding

Een grafische rekenmachine is erg handig als je grafieken van functies wilt bekijken. Maar er is één probleem: hoe krijg je de grafiek goed in beeld? Je weet wel dat je de instellingen van het venster kunt aanpassen (toch?), maar dan moet je wel weten welke instellingen handig zijn. Dat moet je proberen te achterhalen uit de situatie waarbinnen je de formule gebruikt. Zowel je invoerwaarden als je uitkomsten moeten redelijk zijn.

Je leert in dit onderwerp

- grafieken goed in beeld krijgen op de grafische rekenmachine;
- de karakteristieken van functies herkennen en vinden met behulp van de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- grafieken maken op de grafische rekenmachine;
- formules herschrijven tot ze als functie kunnen worden ingevoerd.

Verkennen

Opgave V1

Een zwembad heeft een ligweide van 20000 m^2 . Neem aan dat elke persoon die op die ligweide ligt een oppervlakte van 1 m^2 inneemt.

- Geef een formule voor de oppervlakte A in m^2 per persoon als functie van het aantal bezoekers a in duizendtallen.
- Maak een grafiek van deze functie.
- Welke uitkomsten krijg je als a heel groot wordt?
- Wat gebeurt er met de oppervlakte A als het aantal bezoekers a twee keer zo groot wordt en wat als a drie keer zo klein wordt?
- Wat gebeurt er met de oppervlakte A als het aantal bezoekers a erg klein is?

Uitleg

Voor een rit in een taxi betaal je € 3,20 voorrijkosten en € 1,20 per gereden kilometer. Noem het aantal gereden kilometers a . Dan zijn de kosten K , dus $K = 1,20a + 3,20$.

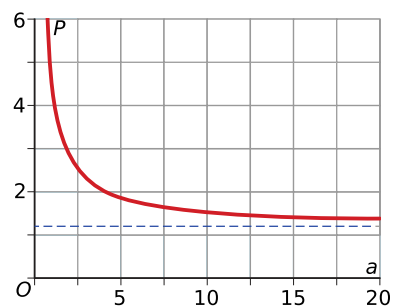
Ook de prijs P per gereden kilometer hangt af van het aantal gereden kilometers a .

Er geldt: $P = 1,20 + \frac{3,20}{a}$.

De grafiek van deze functie heeft geen snijpunten met de a -as, maar wel geldt:

- Als a (het aantal gereden kilometers) heel groot wordt, benaderen de uitkomsten het getal 1,20. Je ziet dat als je een tabel bij de functie maakt. Dit betekent dat de grafiek steeds dichterbij de lijn $P = 1,20$ komt te liggen. Deze lijn heet de **horizontale asymptoot** van de grafiek van P .
- Als a dicht bij 0 komt, worden de uitkomsten steeds groter: $P(0,1) = 33,20$; $P(0,01) = 321,20$; $P(0,001) = 3201,20$; $P(0,0001) = 32001,20$, enzovoort. Het getal 0 zelf mag je echter niet voor a invullen; delen door 0 kan niet. Dit betekent dat de grafiek steeds dichterbij de lijn $a = 0$ (de verticale as) komt te liggen. Dit is de **verticale asymptoot** van de grafiek van P .

Als je de grafiek van de functie tekent, zorg je ervoor dat dit soort karakteristiek gedrag ook zichtbaar wordt.



Figuur 2.1

Opgave 1

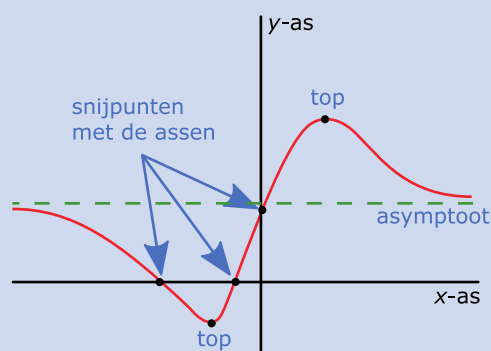
Bekijk de **Uitleg** en vooral het begrip 'asymptoot'. Van een kopieerapparaat worden de maandelijkse kosten per kopie weergegeven door $K = \frac{200}{a} + 0,075$. Hierin is a het aantal kopieën per maand en K zijn de kosten in euro per kopie.

- Bereken de kosten per kopie als er 10000 kopieën per maand met deze machine worden gemaakt.
- Welke waarde benaderen de kosten per kopie als het aantal kopieën heel erg groot is?
- Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van K ?
- Als er in een maand geen kopieën worden gemaakt, kun je niet spreken van de kosten per kopie. Het minimale aantal kopieën waarbij dit nog wel kan, is 1. Hoeveel bedragen de kosten per kopie maximaal?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een grafische rekenmachine is erg handig als je grafieken van functies wilt bekijken. Maar er is één probleem: hoe krijg je de grafiek goed in beeld? Je weet dat je de instellingen van het venster kunt aanpassen, maar dan moet je wel weten welke instellingen handig zijn. Dat moet je proberen te achterhalen uit de situatie waarbinnen je de formule gebruikt. Zowel je invoerwaarden als je uitkomsten moeten redelijk zijn.



Figuur 2.2

Als je de grafiek van een functie goed in beeld hebt, zijn alle **kenmerken** zichtbaar. Dat kunnen zijn:

- de **snijpunten met de assen**, dat zijn de nulpunten en het snijpunt met de y-as;
- de **asymptoten**;
- de **toppen**, de punten met (lokale) maxima en minima, die je met de grafische rekenmachine kunt opzoeken.

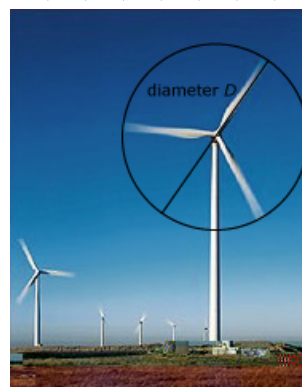
In de figuur zie je een top met een **maximum** (de rechter top) en een top met een **minimum** (de linker top). Een maximum is een grootste y-waarde, een minimum een kleinste y-waarde.

Heb je die allemaal in beeld, dan kun je met een grafische rekenmachine de kenmerken vinden. Bekijk in het **Practicum** het stukje 'Functiewaarden, nulpunten en toppen'.

Voorbeeld 1

Je kunt met windmolens elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wielklemt D in meter en van de windsnelheid v in meter per seconde. Het vermogen van een zeker type windmolen met $D = 10$ meter wordt gegeven door de formule: $P = 0,052 \cdot v^3$.

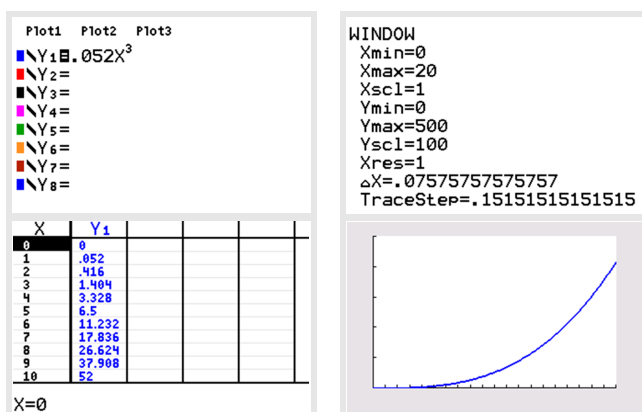
Met de grafische rekenmachine kun je hierbij een grafiek maken. Maak een goede grafiek.



Figuur 2.3

Antwoord

Je voert de formule in als $Y1=0.052 \cdot X^3$. Maar wat zijn verstandige vensterinstellingen? Kijk allereerst naar de invoerwaarden, dus die voor de windsnelheid v . Negatieve windsnelheden bestaan niet, dus je begint bij $v = 0$. Vervolgens kun je opzoeken dat stormkracht begint bij ongeveer 20,8 m/s. Dan zal men windmolens vast niet laten draaien. Dus lijkt maximaal $v = 20$ m/s wel genoeg en stel je voor het venster in: $0 \leq x \leq 20$. Bekijk vervolgens de tabel: P blijkt van 0 tot 416 te lopen, dus $0 \leq y \leq 416$. Nu kun je het venster goed instellen.



Figuur 2.4

Opgave 2

Bekijk [Voorbeeld 1](#).

- Maak de grafiek van $P = 0,052v^3$ met de grafische rekenmachine.
- Bekijk hoe die grafiek eruitziet in de standaardinstellingen van het venster. Waarom zijn die standaardinstellingen niet geschikt in dit geval?

Opgave 3

Met het [Practicum](#) leer je in het stukje 'Functiewaarden, nulpunten en toppen' hoe je snijpunten met de assen en toppen van een functie kunt bepalen. Neem de formule $y = -0,1 \cdot x^2 + 2x$.

- Maak hierbij een grafiek op de grafische rekenmachine. Gebruik de standaardinstellingen van het venster.
- Is de grafiek een rechte lijn?
- Verander de instellingen van het venster. Neem $-5 \leq x \leq 25$. Waarom zijn deze instellingen beter?
- Bepaal de snijpunten van de grafiek met de x-as. Bekijk in het practicum hoe dat moet.
- Bepaal de top van de grafiek.

Voorbeeld 2

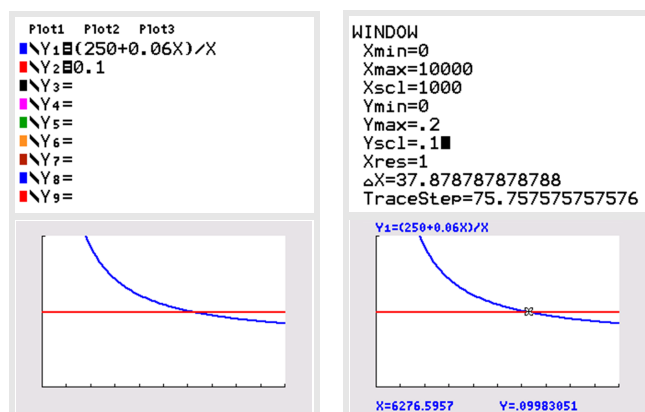
Voor een kopieerapparaat bedraagt de maandelijkse huur € 250,00 waarbij nog een bedrag van € 0,06 per kopie komt. Op school staat een kopieerapparaat voor de leerlingen. Ze betalen € 0,10 per kopie. Geef een formule voor de prijs per kopie (P) als functie van het aantal kopieën (a) en maak er een grafiek bij. Bij welke waarde van a maakt de school winst?

Antwoord

Als er a kopieën worden gemaakt, dan kost dit $250 + 0,06a$ euro. De prijs per kopie krijg je door te delen door het aantal kopieën a :

$$P = \frac{250 + 0,06a}{a}$$

Het aantal kopieën zal maandelijks in de duizendtallen lopen, bijvoorbeeld tot 10000 stuks. De prijs per kopie zal bij weinig kopieën boven de 10 eurocent en altijd boven de 6 eurocent liggen. Neem bijvoorbeeld a van 0 t/m 10000 en P van 0 t/m 0,20 (in euro). Je krijgt zo een nette grafiek, vooral als je $P = 0,10$ er gelijk bij zet. Als je nu over een van de grafieken loopt, dan zie je dat de school bij ongeveer 6276 kopieën minder dan 10 eurocent per kopie kwijt is en dus winst begint te maken. Met de tabel vind je dat bij 6250 kopieën de kosten precies 10 eurocent zijn. Dus vanaf 6251 kopieën maakt de school winst.



Figuur 2.5

Opgave 4

Voor een abonnement voor mobiele telefonie betaal je € 24,00 per maand en nog eens 8 eurocent per belminuut. De totale kosten per maand hangen dus af van het aantal belminuten per maand. Die totale kosten kun je omrekenen naar kosten per belminuut.

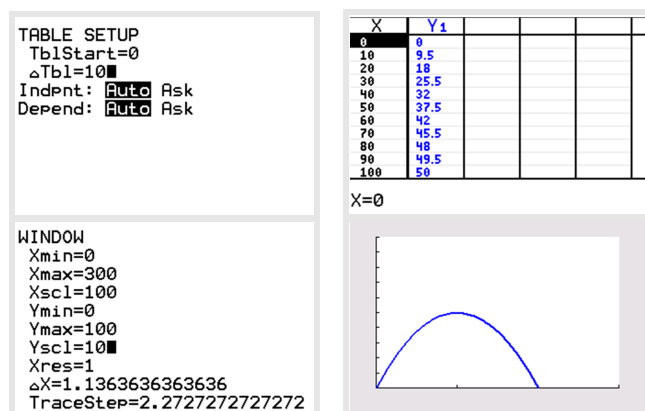
- Leg uit dat er voor de kosten K per belminuut geldt: $K = 0,08 + \frac{24}{a}$ waarin a het aantal belminuten in een maand voorstelt.
- Plot op de grafische rekenmachine een grafiek bij deze formule. Neem aan dat $0 < a \leq 240$. Bekijk eventueel het voorbeeld.
- Welke asymptoten heeft de grafiek van K ? Licht je antwoord toe.
- Bij hoeveel belminuten betaal je 12 eurocent per minuut?

Voorbeeld 3

Als de luchtweerstand geen rol speelt, is de baan van een afgeschoten voorwerp P een parabool. Stel je voor dat die baan wordt beschreven door $h = -0,005x^2 + x$. Hierin is x de horizontale afstand die het voorwerp heeft afgelegd (in meter) en h de bijbehorende hoogte boven de grond (in meter). Bereken hoe hoog het voorwerp dan maximaal komt.

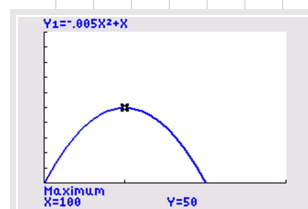
Antwoord

Hoe die baan eruitziet, kun je je waarschijnlijk wel voorstellen: deze parabool is een mooie boog die op de grond begint en op de grond eindigt. Het voorwerp komt vast wel tientallen meters ver, dus bekijk je een tabel met x in stappen van 10 m.



Figuur 2.6

Het voorwerp lijkt ook na 60 m nog omhoog te gaan. Dus neem je bijvoorbeeld X van 0 tot 300 en Y van 0 tot 100. Je krijgt dan inderdaad een mooie parabool in beeld. Het maximum kan de rekenmachine voor je berekenen. Het is ook in de tabel af te lezen.



Figuur 2.7

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** gaat het over een parabolische baan met $h = -0,005x^2 + x$.

- Als je de grafiek met de grafische rekenmachine wilt maken, zijn de standaardinstellingen van het venster niet geschikt. Waarom niet?
- Om het hoogste punt te kunnen bepalen, moet je de grafiek goed in beeld hebben. Hoe bepaal je welke waarden van x je moet instellen?
- Maak vervolgens met de grafische rekenmachine een geschikte tabel om te bekijken welke functiewaarden er allemaal voorkomen.
- Bij welke vensterinstellingen komt de hele baan in beeld?
- Bepaal nu de maximale hoogte van het voorwerp boven de grond.

Verwerken

Opgave 6

Een schuin naar boven gerichte waterstraal van een fonteintje vormt door de zwaartekracht een parabool. De waterboog wordt beschreven door: $h = -0,012a^2 + a$. Hierin is a de horizontale afstand tot de fonteinsproeier en h de hoogte tot het wateroppervlak van de vijver, beide in centimeter.

- Bereken hoe hoog de waterboog is (ten opzichte van het wateroppervlak van de vijver) op 25 cm afstand van de fonteinsproeier.
- Breng met de grafische rekenmachine de waterboog goed in beeld. Welke vensterinstellingen heb je gebruikt?
- Bereken hoe hoog de waterboog maximaal komt (ten opzichte van het wateroppervlak van de vijver). Rond af op twee cijfers achter de komma.

Opgave 7

Breng van deze formules de grafieken in beeld. Is er sprake van een top, een horizontale asymptoot of een verticale asymptoot? Denk om het gebruik van haakjes en de instellingen van het venster!

- $R = 250p - 0,5p^2$
- $k = 0,04 + \frac{200}{a}$
- $N = \frac{60}{30+0,5d}$

Opgave 8

Het vermogen van een windmolen hangt af van de dubbele wiel-lengte D in meter en van de windsnelheid v in meter per seconde. Het vermogen van een zeker type windmolen met $D = 10$ m wordt gegeven door de formule: $P = 0,045v^3$.

- Bereken het vermogen van de windmolen bij een windsnelheid van 15 m/s.
- Waarom is het niet redelijk negatieve waarden voor v in te vullen?
- Breng met de grafische rekenmachine de grafiek van het vermogen van de windmolen goed in beeld.

Opgave 9

Voor de totale kosten (TK) bij de productie van een bepaald artikel geldt: $TK = 100 + 0,1q^2$ waarin q het aantal exemplaren voorstelt.

- Bereken de gemiddelde kosten per exemplaar bij een productie van 120 stuks.
- Stel een formule op voor de gemiddelde kosten per exemplaar (GK) als functie van q .
- Welke verticale asymptoot heeft de functie GK ?
- Waarom is er nu geen horizontale asymptoot?

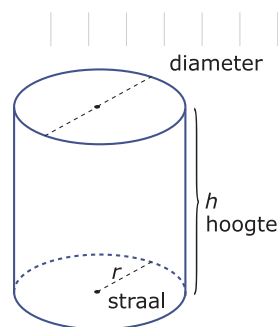
Opgave 10

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Hierin is V de inhoud (het volume), r de straal in centimeter en h de hoogte in centimeter. Neem een blikje waarvoor $h = 10$ cm. Nu is V een functie van r .

- Schrijf de formule van deze functie op.
- Breng de grafiek van deze functie zo in beeld dat je bij $V = 1000$ nog kunt aflezen hoe groot r is. Bepaal vervolgens de waarde van r op één decimaal nauwkeurig.

Voor een blikje waarvan de diameter en de hoogte gelijk zijn, geldt: $h = 2r$.

- Schrijf een bijpassende formule op voor V als functie van r .
- Bepaal nu op één decimaal nauwkeurig de waarde van r van zo'n blik als de inhoud 0,5 L is.



Figuur 2.8

Opgave 11

Voor een kopieerapparaat bedraagt de maandelijkse huur € 200,00 waarbij nog een bedrag van € 0,04 per kopie komt. K stelt de totale kosten (in euro) voor en a is het aantal kopieën dat er maandelijks (gemiddeld) wordt gemaakt.

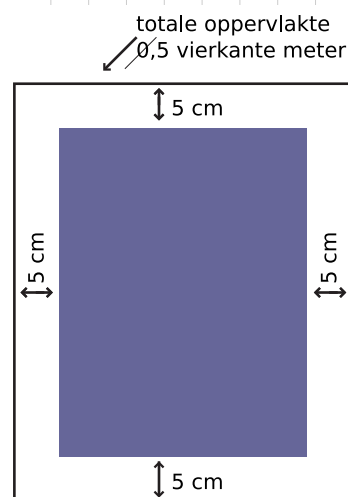
- Schrijf een formule op voor K als functie van a .
- Iemand die een kopie maakt, betaalt 10 eurocent per kopie. Schrijf een formule op voor de maandelijkse inkomsten I als functie van a .
- Hoeveel kopieën moeten er per maand worden gemaakt als 10 eurocent per kopie kostendekkend is?

Toepassen

Opgave 12: Fotolijst

Je wilt een foto plaatsen in een fotolijst van $0,5 \text{ m}^2$. Aan alle kanten wil je een passe-partout (een witte strook) van 5 cm. Je vraagt je af welke afmetingen de foto nu nog kan hebben en komt daarbij op de vergelijking $(l + 10) \cdot (b + 10) = 5000$.

- Laat zien hoe je aan deze vergelijking komt en wat de variabelen l en b betekenen.
- Herschrijf de formule tot l een functie is van b . Breng de grafiek van deze formule in beeld.
- Controleer of alle in beeld gebrachte afmetingen ook mogelijk zijn.
- Bij nader inzien wil je dat de foto een vierkant wordt. Welke maat voor de lijst moet je kopen? Rond af op één decimaal nauwkeurig.



Figuur 2.9

Opgave 13: Domino-day

Bij Domino Day worden miljoenen dominostenen in rijen neergezet. Door de eerste steen van zo'n rij om te stoten, valt de hele rij om. De dominostenen staan op onderling gelijke afstanden van elkaar. De snelheid waarmee de rij omvalt, hangt af van de hoogte van de dominostenen. Je kunt die snelheid met de volgende formule berekenen:

$$\text{snelheid} = 50 \times \sqrt{\text{hoogte dominosteen}}$$

Hierin is *snelheid* de snelheid van de rij omvallende dominostenen in centimeter per seconde (cm/s) en *hoogte dominosteen* in centimeter.

- Laat met een berekening zien dat dominostenen met een hoogte van 9 cm omvallen met een snelheid van 150 cm/s.
- Een rij dominostenen met een hoogte van 9 cm is 10 km lang. Het tijdstip waarop de eerste steen wordt omgestoten, is 19:00 uur. Ga ervan uit dat alle dominostenen omvallen. Bereken het tijdstip waarop alle stenen omgevallen zijn.
- Breng met de grafische rekenmachine de grafiek van de snelheid van de dominostenen goed in beeld. Welke vensterinstellingen heb je gebruikt?
- Je wilt de snelheid 1,5 keer zo groot maken als de snelheid bij dominostenen met een hoogte van 9 cm. Daarom ga je andere domino-stenen gebruiken. Bereken op twee decimalen nauwkeurig hoeveel centimeter de hoogte van deze andere dominostenen volgens de formule zou moeten zijn. Laat zien hoe je aan je antwoord komt en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

(bron: examen wiskunde vmbo-gl/tl in 2007, tweede tijdvak)

Opgave 14: Opbrengst, kosten, winst

Bij een bepaald artikel is het verband tussen de verkochte hoeveelheid q en de prijs p (in euro): $q = 10000 - 20p$.

Voor de opbrengst R (in euro) geldt: $R = p \cdot q$.

Voor de kosten K (in euro) geldt: $K = 15000 + 100q$.

Voor de winst geldt: $W = R - K$.

- Stel een formule op voor R als functie van q .
- Welke waarden kunnen p en q aannemen?
- Schrijf W als functie van q .
- Maak een grafiek van de formule voor de winst. Let op de waarden die q kan aannemen en zorg voor een zodanige grafiek dat alle mogelijke waarden van W in beeld komen. De winst loopt in de tonnen!
- Bepaal voor welke verkochte hoeveelheid de winst maximaal is.

Testen

Opgave 15

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar het ontkiemen van zaden. De kiemtijd K is de tijd waarin 50% van de zaden ontkiemt. Proefondervindelijk is een verband tussen temperatuur en kiemtijd gebleken. De kiemtijd K is geteld in dagen en de temperatuur T is gemeten in $^{\circ}\text{C}$. Dit verband wordt gegeven door:

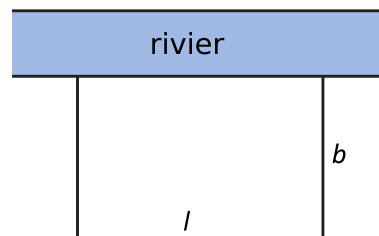
$$K = \frac{80}{T-4}.$$

- Boven welke temperatuur is de helft van de zaden al binnen tien dagen ontkiemd?
- Welke waarden voor T zijn nu zinvol?
- Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?
- Welke waarden kan K aannemen?

Opgave 16

Boer Voortman zet voor zijn paard een weilandje af. Hij heeft daarvoor nog 200 m gaas. Het weiland wordt zuiver rechthoekig. Omdat het weiland tegen een brede rivier aan komt te liggen, hoeft hij alleen de twee breedtes en de lengte van gaas te voorzien.

- Druk de lengte l van het weiland uit in de breedte b .
- Druk de oppervlakte A van het weiland uit in b .
- Breng met de grafische rekenmachine de grafiek bij de formule voor A in beeld.
- Voor welke waarde van b is de oppervlakte van het weiland zo groot mogelijk?



Figuur 2.10

Practicum

Als je met functies werkt, wil je alle karakteristieken (nulpunten, toppen en asymptoten) in beeld. In het volgende practicum kun je nalezen hoe dat gaat. Bekijk alleen het stukje 'Functiewaarden, nulpunten en toppen'. De rest heb je pas later nodig.

- [Functies en de TI84](#)
- [Functies en de Tinspire](#)
- [Functies en de Casio fx-CG50](#)
- [Functies en de HPprime](#)
- [Functies en de NumWorks](#)

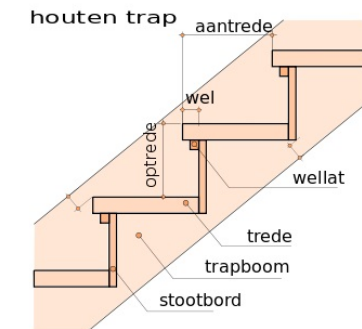
2.3 Vergelijkingen

Inleiding

Een architect wil een goede trap ontwerpen. Hij gebruikt daarvoor de formule: $2 \cdot \text{optrede} + \text{aantrede} = \text{paslengte}$. Hij gaat uit van een paslengte van 70 cm. Voor de optrede wil hij 16 cm nemen. Vult hij deze gegevens in de formule in, dan krijgt hij de vergelijking: $32 + \text{aantrede} = 70$.

Hij kan dus als aantrede nemen: $\text{aantrede} = 70 - 32 = 38$ cm.

Op deze manier heeft hij de vergelijking opgelost. Het getal 38 maakt de vergelijking kloppend: $32 + 38 = 70$.



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen oplossen met behulp van algebra;
- vergelijkingen oplossen met behulp van de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- formules schrijven als functies;
- werken met technieken als terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en haakjes uitwerken.

Verkennen

Opgave V1

Voor een kopieerapparaat bedraagt de maandelijkse huur € 300,00 waarbij nog een bedrag van € 0,05 per kopie komt. Op school staat zo'n apparaat voor de leerlingen. Leerlingen betalen € 0,10 per kopie.

- Bij welk aantal kopieën per maand speelt de school quitte?
- Heb je deze vraag opgelost met een vergelijking? Zo nee, welke vergelijking zou dat dan moeten zijn?

Uitleg

Voor een kopieerapparaat bedraagt de maandelijkse huur € 250,00 waarbij nog een bedrag van € 0,06 per kopie komt. Op school staat een kopieerapparaat voor de leerlingen. Ze betalen € 0,10 per kopie.

De vraag: "Bij welk aantal kopieën per maand speelt de school quitte?" kun je vertalen naar een vergelijking.

- Noem het aantal kopieën per maand a .
- De kosten voor de school bedragen dan maandelijks $250 + 0,06 \cdot a$ euro.
- De opbrengst van de school is maandelijks $0,10 \cdot a$ euro.

De school speelt quitte als $250 + 0,06 \cdot a = 0,10 \cdot a$.

Dit is een typisch voorbeeld van een vergelijking: je vergelijkt kosten en opbrengst en vraagt je af wanneer beide gelijk zijn. In dit geval kun je de vergelijking oplossen met de balansmethode. Daarna vind je: $a = 6250$.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt een probleem opgelost.

- Welke vergelijking wordt daarbij afgeleid?
- Laat zien hoe je deze vergelijking met de balansmethode oplost.

Opgave 2

Doe nu van het **Practicum** het stukje 'Snijpunten van functies'. Bekijk goed hoe je met de grafische rekenmachine een vergelijking kunt oplossen door de coördinaten van de snijpunten van grafieken te bepalen. Los vervolgens de vergelijking uit de uitleg op met behulp van de grafische rekenmachine.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Elke wiskundige zin met een isgelijkteken is een **vergelijking**. Bekijk de voorbeelden.

- Voor een rechthoek met lengte l , breedte b en een omtrek van 100 geldt $2l + 2b = 100$.
- Voor een vierkant met oppervlakte A en zijde z geldt: $A = z^2$.
- Voor het aantal kopieën a per maand geldt $250 + 0,06 \cdot a = 0,10 \cdot a$.
- Een getal en zijn kwadraat zijn samen 90. Hoeveel bedraagt dat getal? Dus kortweg: $x + x^2 = 90$.

Vergelijkingen zoals de eerste twee, beschrijven een **verband** tussen twee variabelen. Daarvan kun je een grafiek maken.

In de laatste twee gevallen kun je de vergelijking oplossen. Dat betekent een waarde voor de onbekende zoeken die de gegeven zin, de gegeven vergelijking, waar maakt. Daarvoor bestaan verschillende technieken, zoals de **balansmethode** en de **terugrekenmethode**. In de voorbeelden zie je nog eens hoe die methoden werken. Je noemt dit **algebraïsch oplossen**.

Je kunt vergelijkingen ook door de grafische rekenmachine laten oplossen. In het **Practicum** zie je in het stukje 'Snijpunten van functies' hoe dit in zijn werk gaat.

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $\frac{1}{2}(x + 8) = -7 + x$ op met de balansmethode.

Antwoord

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x + 8) &= -7 + x \\ \frac{1}{2}x + 4 &= -7 + x && \text{haakjes wegwerken} \\ \frac{1}{2}x &= -11 + x && \text{beide zijden } -4 \\ -\frac{1}{2}x &= -11 && \text{beide zijden } -x \\ x &= 22 && \text{beide zijden } \cdot -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Je kunt dit antwoord nog controleren door aan beide zijden van de gegeven vergelijking voor x het getal 22 in te vullen.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Los de vergelijkingen op met de balansmethode. Indien nodig rond af op twee cijfers achter de komma.

- a $3t - 400 = 700$
- b $3t - 400 = 700 - 2t$
- c $2300 - 0,15 \cdot p = 1600 + 0,42 \cdot p$
- d $2 \cdot (3x - 5) = 2x - 5$

Opgave 4

Je kunt de vergelijking $\frac{1}{2}(x + 8) = -7 + x$ ook oplossen door eerst links en rechts van het isgelijktteken te vermenigvuldigen met 2. Los de vergelijking op deze manier op en controleer of je hetzelfde antwoord krijgt.

Voorbeeld 2

In de vergelijking $2(x - 4)^2 = 32$ komt de onbekende x maar op één plek voor. Je kunt de vergelijking oplossen met terugrekenen.

Antwoord

Eerst heen rekenen vanuit x :

$$x \rightarrow \boxed{-4} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{(\dots)^2} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{\times 2} \rightarrow 32$$

Figuur 3.2

Vervolgens ga je terugrekenen:

$$x \leftarrow \boxed{+4} \leftarrow \dots \leftarrow \boxed{\pm\sqrt{\dots}} \leftarrow \dots \leftarrow \boxed{/2} \leftarrow 32$$

Figuur 3.3

Je vindt: $x = \pm\sqrt{\frac{32}{2}} + 4$ en dus $x = 0$ en/of $x = 8$.

Weer controleren door terug invullen!

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**. Los de vergelijkingen op door terugrekenen.

- a $3t - 400 = 700$
- b $(3t - 20)^2 = 1600$
- c $3(p - 2)^2 = 81$
- d $7c + 5 = 26$
- e $(x + 6)^2 = 16$
- f $\frac{(x+2)^2}{4} = 64$

Voorbeeld 3

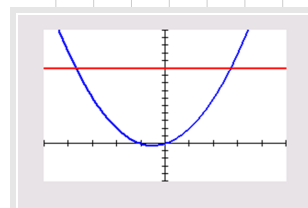
De vergelijking $x + x^2 = 10$ kun je oplossen met de grafische rekenmachine. Los de vergelijking met de grafische rekenmachine op.

Antwoord

Eerst maak je de grafieken van $y_1 = x + x^2$ en $y_2 = 10$ op de grafische rekenmachine. Breng ze zo in beeld dat alle snijpunten zichtbaar zijn. De grafieken snijden elkaar tweemaal. De vergelijking heeft twee oplossingen.

Vervolgens heeft de grafische rekenmachine een routine om de snijpunten van twee grafieken te berekenen. In het **Practicum** in het stukje 'Snijpunten van functies' kun je zien hoe dit gaat.

Je laat de grafische rekenmachine eerst het ene snijpunt berekenen. Op dezelfde manier bepaal je vervolgens het andere snijpunt. Op twee decimalen nauwkeurig is de volledige oplossing: $x \approx 2,70$ en/of $x \approx -3,70$.



Figuur 3.4

Opgave 6

Niet alle vergelijkingen kun je met de balansmethode of door terugrekenen systematisch oplossen. In **Voorbeeld 3** kun je nalezen hoe je met de grafische rekenmachine vergelijkingen oplost. Los de vergelijkingen ook met de grafische rekenmachine op. Geef je oplossingen in drie decimalen nauwkeurig.

- a $x^3 = 4 - x$
- b $\frac{600}{a} = 18 + a$

Opgave 7

Los de vergelijkingen op met de grafische rekenmachine. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

- a $x^3 + 2x = 16$
- b $x + \sqrt{x} = 10$
- c $l + \frac{10}{l} = 10$
- d $\frac{300}{p+4} = 20$

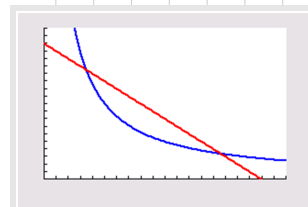
Voorbeeld 4

Als je 360 m afrastering beschikbaar hebt voor een rechthoekig veld met een oppervlakte van 0,5 ha, dan geldt: $l \cdot b = 5000$ en $2l + 2b = 360$ als je voor de lengte (in meter) de variabele l en voor de breedte (in meter) de variabele b kiest. Zoek nu waarden voor l en b die aan beide formules voldoen.

Antwoord

Schrijf de formules als: $l = \frac{5000}{b}$ en $l = 180 - b$.

Dan voer je ze op de grafische rekenmachine in als $y_1 = \frac{5000}{x}$ en $y_2 = 180 - x$. Om een goede grafiek te krijgen kies je verstandige grenzen van de waarden van x (de breedte) en y (de lengte). Je ziet dat de grafieken twee snijpunten hebben. In die punten geldt de vergelijking: $\frac{5000}{b} = 180 - b$. Je kunt de snijpunten met de grafische rekenmachine vinden. De gevonden x -waarden zijn de oplossingen van de vergelijkingen; de waarden van b die hem waar maken.



Figuur 3.5

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 4** hoe je vanuit twee gegeven formules één vergelijking afleidt. Die vergelijking los je vervolgens op.

- Voer de twee formules in op de grafische rekenmachine.
- Laat nu de grafische rekenmachine de snijpunten van beide grafieken bepalen. Rond af op twee cijfers achter de komma.
- Welke oplossing heeft je vergelijking?

Verwerken

Opgave 9

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Indien nodig rond af op twee cijfers achter de komma.

- $4t + 50 = 200$
- $4t^2 + 50 = 200$
- $6p - 20 = 12 + 4p$
- $x^2 + 4 = 20$
- $(x - 5)^2 = 4$
- $4(a - 2) - 20 = 0$
- $\frac{12}{v} = 400$
- $2x^2 - 2 = 6x^2 + 14$

Opgave 10

Los de vergelijkingen op met behulp van de grafische rekenmachine. Zoek alle oplossingen. Indien nodig rond af op twee cijfers achter de komma.

- $\sqrt{x} = 6 - x$
- $x^4 = 2 + x$

Opgave 11

Voor het verbruik van water moet je een vast bedrag per jaar betalen. Dat heet 'vastrecht'. Verder betaal je een bedrag per verbruikte m^3 . Een waterleidingbedrijf heeft voor dit jaar die bedragen zo vastgesteld:

- vastrecht: € 38,00
- prijs per m^3 : € 1,75

De totale jaarlijkse kosten TK voor het waterverbruik hangen dus af van het aantal m^3 (a) dat verbruikt is.

- Verklaar waarom geldt: $TK = 38 + 1,75a$.
- Het waterleidingbedrijf schat dat een bepaald gezin dit jaar tussen de 140 en de 160 m^3 water zal verbruiken. Geef aan tussen welke waarden de kosten voor het gezin in een jaar zullen liggen.
- Het gezin wil de kosten voor waterverbruik per jaar terugbrengen tot onder de € 250,00. Hoeveel water in m^3 mogen ze dan maximaal verbruiken?

Opgave 12

Bereken bij deze formules de waarde van de ene variabele als de andere variabele 0 is.

- $2p - 3q = 600$
- $W = -0,25q(0,5q - 100)$
- $k^2 + (l + 2)^2 = 100$
- $a = \frac{1200}{600 + 0,2d}$

Opgave 13

Sommige kaarsen zijn bijna zuiver cilindervormig. Stel je voor dat je zo'n kaars wilt maken met een lengte van 20 cm. Je neemt een lont met een diameter van 3 mm en dompelt die een aantal keer in een bad met vloeibaar kaarsvet. Elke onderdompeling wordt de diameter van de kaars 1 mm groter. Het volume kaarsvet V in de kaars hangt af van het aantal onderdompelingen a .

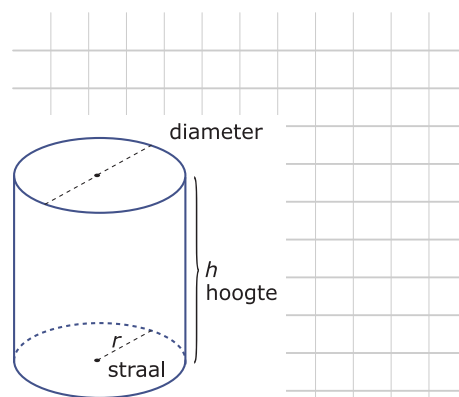
- Geef een formule voor V als functie van a .
- Breng de grafiek van deze functie met de grafische rekenmachine in beeld.
- Na hoeveel onderdompelingen is de hoeveelheid kaarsvet ongeveer 106 cm^3 ? Lees je antwoord eerst uit de grafiek af en bereken het daarna door de bijbehorende vergelijking algebraïsch op te lossen.

Toepassen

Opgave 14: Oppervlakte groenteblik

Voor de totale oppervlakte A van een cilindervormig groenteblik met straal r en hoogte h geldt: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

- Leg uit hoe je deze formule zelf kunt afleiden.
- Bereken in cm^2 nauwkeurig de oppervlakte van een groenteblik met een diameter van 20 cm en een hoogte van 30 cm.
- Een groenteblik met een oppervlakte van 1000 cm^2 heeft een hoogte van 20 cm. Bereken de diameter in mm nauwkeurig.
- Van een groenteblik met een oppervlakte van 1000 cm^2 zijn de hoogte en de straal even groot. Bereken de diameter in mm nauwkeurig.



Figuur 3.6

Testen

Opgave 15

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

- $1,25t + 5,50 = 1,85t$
- $0,15(p - 2)^2 = 1,35$
- $12 - x^2 = 0$
- $600 \cdot g^2 = 5000$

Opgave 16

Los de vergelijking $0,12q + \frac{600}{q} = 30$ op met behulp van de grafische rekenmachine. (Eventuele benaderingen op één decimaal nauwkeurig.)

Practicum

Vergelijkingen kun je heel goed met de grafische rekenmachine oplossen. Je hebt de Solver al gezien bij het practicum 'Basistech-nieken'. Maar je kunt ook heel goed gebruikmaken van de Intersect-functie die snijpunten van twee functies voor je berekent. In dit practicum zie je bij 'Snijpunten van functies' hoe dit in zijn werk gaat.

- [Functies en de TI84](#)
- [Functies en de TIInspire](#)
- [Functies en de Casio fx-CG50](#)
- [Functies en de HPprime](#)
- [Functies en de NumWorks](#)

2.4 Ongelijkheden

Inleiding

Als je wilt weten bij welke windsnelheid een windmolen meer dan bijvoorbeeld 20 kW aan vermogen levert, dan moet je een ongelijkheid oplossen. Hetzelfde geldt als je wilt weten vanaf hoeveel gereden kilometers per jaar een auto op benzine duurder is dan een auto op diesel. Of hoeveel uur de ene kaars langer brandt dan de andere.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- ongelijkheden algebraïsch oplossen;
- ongelijkheden oplossen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- formules schrijven als functies en dan de grafieken goed in beeld brengen;
- werken met technieken als terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en haakjes uitwerken.

Verkennen

Opgave V1

Kaars I is 25 cm groot en brandt in 8 uur tijd volledig op. Kaars II is 20 cm groot en brandt in 10 uur volledig op. Beide kaarsen branden gelijkmatig. Per uur brandt er steeds een vast aantal centimeters op.

Kaars I is het grootste, maar brandt het snelste op. Hoe lang (in minuten nauwkeurig) is kaars I groter dan kaars II?

Uitleg

In een kaarsenfabriek maken ze twee soorten kaarsen. Kaars I is 25 cm groot en brandt in acht uur tijd volledig op. Kaars II is 20 cm groot en brandt in tien uur tijd volledig op. Beide kaarsen branden gelijkmatig. Per uur brandt er steeds een vast aantal centimeter op.

Kaars I is het grootst, maar brandt het snelst op. Hoeveel langer (in minuten nauwkeurig) brandt kaars I vergeleken met kaars II?

Deze vraag kun je oplossen met de grafische rekenmachine. Je maakt dan eerst formules van de lengte L (in centimeter) van elke kaars afhankelijk van de tijd t (in uren).

- Kaars I: in acht uur is er 25 cm opgebrand, dus

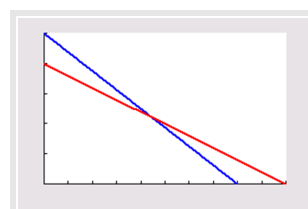
$$\frac{25}{8} = 3,125 \text{ cm/uur.}$$

De bijpassende formule is $L_I = 25 - 3,125t$.

- Kaars II: in tien uur is er 20 cm opgebrand, dus $\frac{20}{10} = 2 \text{ cm/uur.}$

De bijpassende formule is $L_{II} = 20 - 2t$.

Wanneer je de grafieken plot op de grafische rekenmachine, neem dan de langste lengte en de langste brandtijd van de kaarsen voor de vensterinstellingen zodat je zeker weet dat beide grafieken goed in beeld zijn. Het snijpunt van beide grafieken laat je door de rekenmachine bepalen. Je vindt $t \approx 4,44$. Kaars I is langer vanaf $t = 0$ tot en met $t = 4,44$ uur. Omdat een uur 60 minuten heeft en geen 100 moet je dit omrekenen naar minuten. Dat is iets minder dan vier uur en 27 minuten.



Figuur 4.2

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe de vraag: “Hoeveel langer brandt kaars I dan kaars II?” met de grafische rekenmachine wordt opgelost.

- Leg uit dat de formule $25 - 3,125t > 20 - 2t$ hier wordt opgelost.
- Voor het snijpunt van de twee grafieken wordt de grafische rekenmachine gebruikt. Nodig is dat niet. De vergelijking $25 - 3,125t = 20 - 2t$ kun je met de balansmethode oplossen. Laat zien dat je dan dezelfde oplossing vindt.
- Je vindt $t \approx 4,444...$ Hoe bereken je dan dat kaars I vier uur en 27 minuten langer brandt dan kaars II?

Opgave 2

Kaars I is 25 cm groot en brandt in acht uur tijd volledig op. Kaars II is 20 cm groot en brandt in tien uur tijd volledig op. Kaars III is 30 cm groot en brandt in zes uur tijd volledig op.

Hoelang is kaars III de grootste kaars als alle drie de kaarsen tegelijk worden aangestoken?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Vragen als: “Hoe hard moet je fietsen om er minder dan acht minuten over te doen?” of: “Hoeveel punten moet je scoren om meer dan een 6 voor je proefwerk te halen?” zijn voorbeelden van ongelijkheden.

Je herkent ongelijkheden aan groterdan- of kleinerdantekens.

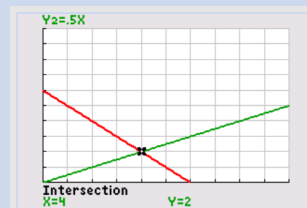
Zo is $-x + 6 = 0,5x$ een vergelijking en $-x + 6 > 0,5x$ een **ongelijkheid**.

Zo'n ongelijkheid los je op door in één figuur de grafieken te tekenen van $y_1 = -x + 6$ en $y_2 = 0,5x$. Je ziet dat voor $x = 4$ geldt dat $y_1 = y_2$, dat voor $x < 4$ geldt dat $y_1 > y_2$ en dat voor $x > 4$ geldt dat $y_1 < y_2$.

De oplossing van de ongelijkheid is daarom $x < 4$.

Op dezelfde wijze kun je ook werken met ongelijkheden waarin het gaat om ‘kleiner dan’ ($<$), ‘kleiner dan of gelijk aan’ ($\leq$) en ‘groter dan of gelijk aan’ ($\geq$) en ‘groter dan’ ($>$).

Als je een ongelijkheid algebraïsch moet oplossen, dan los je de bijbehorende vergelijking algebraïsch op (bijvoorbeeld met de balansmethode). Vervolgens lees je de oplossing van de ongelijkheid af uit de grafieken.



Figuur 4.3

Voorbeeld 1

Een verfhandelaar heeft een mengmachine van € 2000,00 gekocht. De inkoopprijs van de verf en de kosten van het mengproces samen komen op € 5,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 7,50 per liter. Hij maakt winst als de opbrengst TO groter is dan de totale kosten TK . Met voorraadkosten wordt geen rekening gehouden. Bereken vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst gaat maken.

Antwoord

Er geldt: $TK = 2000 + 5q$ en $TO = 7,5q$. Hierin is q de verkochte hoeveelheid verf.

Nu moet: $TO > TK$, dus de ongelijkheid is $7,5q > 2000 + 5q$.

Met de grafische rekenmachine breng je de grafieken van TO en TK in beeld. Het snijpunt moet zichtbaar zijn. Vervolgens bereken je dit snijpunt door de vergelijking $7,5q = 2000 + 5q$ op te lossen. Je vindt (bijvoorbeeld met de grafische rekenmachine) als oplossing voor de vergelijking $q = 800$ liter.

De oplossing voor de ongelijkheid lees je uit de grafiek af: $q > 800$. Dus vanaf 800 liter verkochte verf gaat de verfhandelaar winst maken.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de ongelijkheid $7,5q > 2000 + 5q$ oplost met de grafische rekenmachine.

- Los de vergelijking $7,5q = 2000 + 5q$ algebraïsch op.
- Schrijf de juiste oplossing van de ongelijkheid op.

Voorbeeld 2

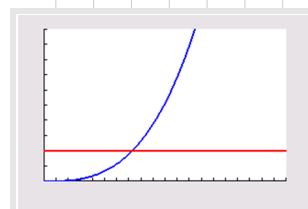
Je kunt met windmolens elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de wieklengte en van de windsnelheid v . Het vermogen van een zekere windmolen wordt gegeven door: $P = 0,052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kilowatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien is 20 meter. Bereken vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt.

Antwoord

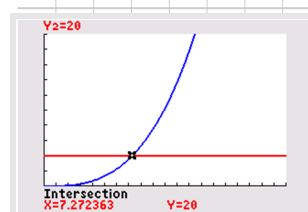
Het oplossen van zo'n ongelijkheid gaat met de grafische rekenmachine:

- Je voert $Y1=0.052X^3$ en $Y2=20$ in en brengt de grafieken goed in beeld.
- Je bepaalt het snijpunt van beide grafieken: (7,27; 20).
- Je leest de oplossing van de ongelijkheid uit de figuur af: $v > 7,27$.

Belangrijk is nog het aantal decimalen waarop je moet afronden. Het gegeven antwoord is op twee decimalen nauwkeurig juist. Moet je echter op één decimaal nauwkeurig afronden, dan is het antwoord: $v > 7,3$. Je weet dan dat je antwoord ergens boven de 7,25 ligt.



Figuur 4.4



Figuur 4.5

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je hoe de ongelijkheid $0,052v^3 > 20$ wordt opgelost. Daarbij wordt de grafische rekenmachine gebruikt.

- Los deze ongelijkheid zelf op.
Bij een algebraïsche aanpak bereken je eerst de oplossingen van de vergelijking $0,052v^3 = 20$ met behulp van terugrekenen.
- Laat zien dat je dan dezelfde oplossing vindt.
- Wat is het voordeel van een algebraïsche aanpak?

Opgave 5

Stel je voor dat je al jaren in een auto op benzine rijdt. De benzineprijs blijft echter maar stijgen en je vraagt je af of je niet beter een gastank kunt laten inbouwen en op biogas kunt gaan rijden. De kosten per kilometer zijn ongeveer 12,5 eurocent aan benzine.

- Stel een formule op voor de benzinekosten per jaar (B in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers (a).
- Een gastank kost (inclusief inbouwen) € 1250,00. Je kosten per kilometer gaan omlaag, want gas kost 80 eurocent per liter en je rijdt

10 km op 1 liter gas. Je wilt de gastank in één jaar terugverdienen. Stel een formule op voor de kosten in het eerste jaar dat je op gas rijdt (G), afhankelijk van het aantal kilometers (a).

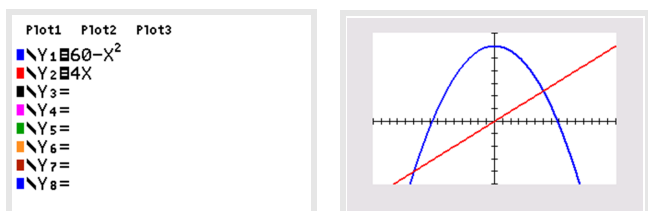
- c Je wilt weten hoeveel kilometer je moet rijden om de gastank er weer uit te hebben. Welke ongelijkheid hoort daar bij?
- d Los deze ongelijkheid algebraïsch op met a in kilometers nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Los op: $60 - x^2 \geq 4x$.

Antwoord

Je bekijkt eerst de grafieken van $y_1 = 60 - x^2$ en $y_2 = 4x$.



Figuur 4.6

Bij de meeste waarden van x zijn de functiewaarden verschillend. Alleen bij de snijpunten zijn de functiewaarden gelijk. De snijpunten vind je door op te lossen: $60 - x^2 = 4x$. Je vindt met de grafische rekenmachine: $x = -10 \vee x = 6$.

Lees nu uit de figuur af dat de oplossing van de ongelijkheid is: $-10 \leq x \leq 6$.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je de ongelijkheid $60 - x^2 \geq 4x$ oplost.

- a Los zelf deze ongelijkheid met de grafische rekenmachine op. Zorg voor de juiste vensterinstellingen.
- b Welke oplossing heeft de ongelijkheid $60 - x^2 < 4x$? De oplossing bestaat uit twee delen.

Verwerken

Opgave 7

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- a $10 - 2x > 4x + 8$
- b $60 - x^2 \leq -4$
- c $600 + 0,05x > 800 + 0,025x$

Opgave 8

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- a $3(a - 7) - 9 < 0$
- b $(m - 6)^2 > 16$
- c $\frac{14}{v-5} \leq 2$

Opgave 9

Los deze ongelijkheid met de grafische rekenmachine op:
 $x^2 - x > 90$.

Opgave 10

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat deze molen levert, hangt af van de wieklengte en van de windsnelheid v . Stel, het vermogen van een windmolen wordt gegeven door: $P = 0,05v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kilowatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien is 20 meter. Bereken vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 25 kW bedraagt. Rond je antwoord af op één decimaal.

Opgave 11

Stel, je hebt op 1 januari 2014 een auto gekocht en betaalt € 5,00 per dag. Daarnaast heb je onderhoudskosten van 1,5 eurocent per gereden kilometer. Je hebt ten slotte nog benzinekosten. Je kunt met een liter benzine 15 km rijden en een liter benzine kost € 1,50.

- Hoeveel eurocent per kilometer ben je kwijt aan benzine en onderhoud samen?
- Hoeveel kost je deze auto per jaar als je er 16000 km mee rijdt?
- Stel een ongelijkheid op bij de vraag: hoeveel kilometer per jaar mag je maximaal met deze auto rijden als je minder dan € 4000,00 kwijt wilt zijn dat jaar? Los daarna die ongelijkheid algebraïsch op.
- Eigenlijk geldt het onderhoudsabonnement van 1,5 eurocent per gereden kilometer pas vanaf 15000 km/jaar. Rijd je minder, dan betaal je alsof je 15000 km/jaar rijdt. Stel een formule op voor de jaarlijkse kosten K als functie van het aantal gereden kilometers.

Opgave 12

Twee auto's rijden op de A1, beide met een (ongeveer) constante snelheid. Bestuurder A houdt een snelheid van 110 km/h aan. Bestuurder B rijdt met 120 km/h. Als bestuurder B bij de IJsselbrug bij Deventer komt, ligt hij 24 km achter op bestuurder A. Het tijdstip waarop dat gebeurt, is $t = 0$. De afstand (in kilometer) tot Deventer wordt steeds groter en wordt voorgesteld door a .

- Stel bij beide auto's een formule voor a als functie van t op.
- Bereken na hoeveel minuten auto A door B wordt ingehaald.
- Bereken algebraïsch na hoeveel tijd auto B precies 4 km voor ligt op A.

Toepassen

Opgave 13: Vuurpijl

Een vuurpijl wordt de lucht in geschoten. De hoogte van de pijl (in meter) is $h = -5t^2 + 20t$; met t in seconden.

- Maak de grafiek met de grafische rekenmachine.
- Bereken na hoeveel seconden de pijl de hoogte van 15 m bereikt.
- Bereken hoeveel seconden de pijl hoger is dan 15 meter.

Opgave 14: Dagje Amsterdam

Je wilt met een vriend(in) een dagje naar Amsterdam. Jullie willen weten of het slimmer is om een auto te lenen om de reis van 's-Hertogenbosch naar Amsterdam af te leggen óf om de trein te nemen. Een enkele reis 's-Hertogenbosch – Amsterdam met de trein kost € 14,70. Met de auto betaal je € 0,125 per kilometer. De afstand tussen 's-Hertogenbosch en Amsterdam is 81 kilometer. Maar als je met de auto gaat, moet je ook parkeerkosten betalen. In Amsterdam kost dit € 4,00 per uur.

Bereken het aantal uren u dat jullie in Amsterdam moeten doorbrengen zodat de reis met de trein goedkoper is dan de reis met de auto. Bereken dit eerst algebraïsch. Controleer daarna je antwoord door twee grafieken te tekenen.

Testen

Opgave 15

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- $6 - x < 4x - 3$
- $\frac{10}{x} \geq 0,25$
- $(2x - 6)^2 < 16$

Opgave 16

Los deze ongelijkheid op (op twee decimalen nauwkeurig) met de grafische rekenmachine: $x^3 > 6 - x$.

Opgave 17

De afstand tussen Utrecht en Enschede is 144 km.

Fietser A gaat met 18 km/h van *Utrecht* naar *Enschede*.

Fietser B gaat met 24 km/h van *Enschede* naar *Utrecht*.

Beide fietsers starten tegelijkertijd.

- Je wilt weten hoe lang fietser A dichterbij Utrecht is dan fietser B. Welke ongelijkheid hoort daar bij als t de tijd in uren is?
- Los deze ongelijkheid algebraïsch op.
- Beantwoord de vraag in minuten nauwkeurig.

2.5 Meerdere variabelen

Inleiding

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen (in kilowatt) dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wielengte D (in meter) en van de windsnelheid v (in meter per seconde). Het vermogen van een windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Met de grafische rekenmachine kun je hierbij voor verschillende waarden van D grafieken maken van P als functie van v .

Je leert in dit onderwerp

- werken met formules met meer dan twee variabelen;
- werken met grafiekenbundels en nomogrammen;
- formules combineren.

Voorkennis

- formules schrijven als functies en dan de grafieken goed in beeld brengen;
- werken met technieken als terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en haakjes uitwerken.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen (in kilowatt) dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wielengte D (in meter) en van de windsnelheid v (in meter per seconde). Het vermogen van een windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$.

Met de grafische rekenmachine kun je hierbij voor verschillende waarden van D grafieken maken van P als functie van v .

- Maak grafieken van P als functie van v voor $D = 10, 20, 30$ m.
- In een bepaald gebied is de windsnelheid gemiddeld $v = 5$ m/s. Bij welke diameters levert deze windmolen een vermogen van tussen de 10 kW en de 20 kW? Kun je daarbij je grafieken gebruiken?

Uitleg

Het vermogen (in kilowatt) dat een windmolen levert, hangt af van de dubbele wielengte D (in meter) en van de windsnelheid v (in meter per seconde). Het vermogen wordt gegeven door de formule: $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Dit is een formule met drie variabelen: het geleverde vermogen hangt zowel van de windsnelheid als van de grootte van de wieken af. Daarom kun je hierbij niet zo eenvoudig een grafiek maken.

Zie de figuur in **Opgave V1**.



Figuur 5.1

Met de grafische rekenmachine kun je voor verschillende vaste waarden van D grafieken maken van P als functie van v .

- Voor $D = 10$ krijg je $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot 10^2$ en dus $P = 0,013v^3$.
- Voor $D = 20$ krijg je $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot 20^2$ en dus $P = 0,052v^3$.
- Voor $D = 30$ krijg je $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot 30^2$ en dus $P = 0,117v^3$.

Zo maak je een grafiekenbundel bij P als functie van v . Je kunt dan aflezen hoe het vermogen van de windsnelheid afhangt bij een bepaalde wielengte. Je kunt ook voor v een aantal vaste waarden kiezen en een grafiekenbundel maken bij P als functie van D . Dan kun je aflezen welke diameter een molen moet hebben om bij een bepaalde gemiddelde windsnelheid een bepaald vermogen te leveren.

Opgave 1

Bekijk in de [Uitleg](#) de formule voor het vermogen van de windmolen.

- Bereken het vermogen van een windmolen van dit type bij een rotordiameter van 12 meter en een windsnelheid van 5 m/s.
- Bij welke windsnelheid levert deze windmolen (rotordiameter 12 meter) een vermogen van 7000 W?
- P hangt alleen van v af bij $D = 10$. Teken met de grafische rekenmachine een grafiek bij dit verband. Schrijf de ingevoerde formule en de vensterinstellingen op.
- Maak ook grafieken met de grafische rekenmachine van het verband tussen P en v voor $D = 15$ en $D = 8$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

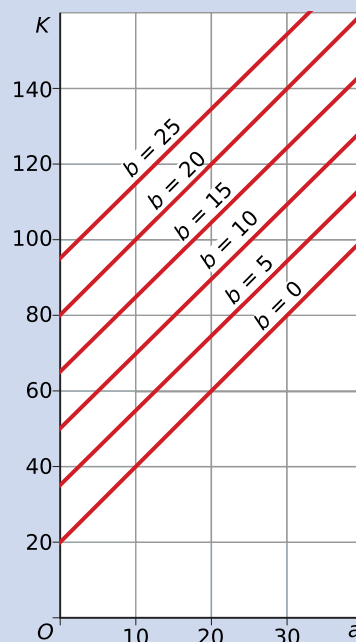
Een formule zoals $K = 2a + 3b + 20$ beschrijft een **verband tussen drie variabelen**. Weet je twee van de drie variabelen, dan kun je de derde uitrekenen. Als bijvoorbeeld $a = 10$ en $b = 5$, dan is $K = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 20 = 55$.

Weet je één van de drie variabelen, dan blijft er een verband tussen de andere twee over. Als bijvoorbeeld $b = 5$, dan is $K = 2a + 3 \cdot 5 + 20 = 2a + 35$. Hierbij kun je een grafiek maken. Kies je voor b een rijtje vaste waarden, zoals $b = 0, b = 5, b = 10, b = 15, b = 20$ en $b = 25$, dan kun je een **grafiekenbundel** maken voor K als functie van a . Bij elke b -waarde hoort een nieuwe grafiek, dus je krijgt zes grafieken in dit geval.

In toepassingen zoals rekenmodellen is vaak sprake van meerdere formules met meerdere variabelen. Soms kun je dan het aantal variabelen en het aantal formules terugbrengen door een paar formules met elkaar te combineren. Als bijvoorbeeld gegeven is dat $b = 3a - 2$, dan krijg je:

$$K = 2a + 3(3a - 2) + 20 = 2a + 9a - 6 + 20 = 11a + 14.$$

Dus als je de twee formules combineert, krijg je $K = 11a + 14$. Zie ook [Voorbeeld 3](#).



Figuur 5.2

Voorbeeld 1

Een bekende maat voor iemands gezondheid is de queteletindex (QI) of ook wel *Body Mass Index (BMI)* genoemd. De QI is een maat voor het al dan niet hebben van overgewicht.

De bijbehorende formule is $QI = \frac{G}{l^2}$,

waarin G het gewicht in kilogram en l de lengte in meter is.

Je ziet hier een grafiekenbundel voor G als functie van l voor bepaalde waarden van de QI . Bij een QI vanaf 20 tot 25 heb je een normaal gewicht.

Maak zelf deze grafiekenbundel op de grafische rekenmachine. Hoe zwaar is iemand van 1,75 meter met een normaal gewicht?

Antwoord

Om deze grafiekenbundel op de grafische rekenmachine te maken moet je de waarden $QI = 20$, $QI = 25$ en $QI = 30$ kiezen.

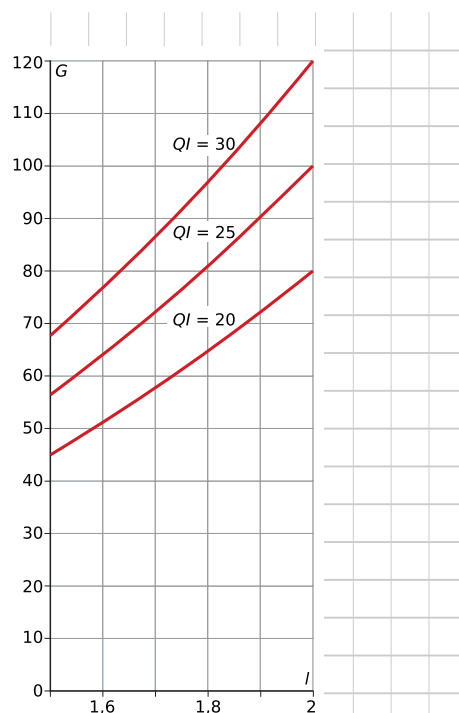
Bij $QI = 20$ hoort $\frac{G}{l^2} = 20$ en dus $G = 20 \cdot l^2$.

Zo vind je bij de andere waarden van QI de formules $G = 25 \cdot l^2$ en $G = 30 \cdot l^2$.

Deze drie formules voer je in: $Y1=20*X^2$, $Y2=25*X^2$ en $Y3=30*X^2$.

Het venster loopt voor l (dus x) van 1,50 tot 2,00 en voor G (dus y) van 0 tot 120.

Met de formules bepaal je dat iemand van 1,75 m met een normaal gewicht tussen de $20 \cdot 1,75^2 = 61,25$ en $25 \cdot 1,75^2 = 76,5625$ kg weegt.



Figuur 5.3

Opgave 2

Bekijk de formule voor de queteletindex in [Voorbeeld 1](#).

- Over welke drie variabelen gaat deze formule?
- Stel je voor dat $l = 1,95$. Welke formule geeft het verband tussen QI en G ? Maak de grafiek van QI als functie van G op de grafische rekenmachine.
- Stel je voor dat $G = 65$. Welke formule geeft het verband tussen QI en l ? Maak de grafiek van QI als functie van l op de grafische rekenmachine.
- Stel je voor dat $QI = 20$. Welke formule geeft het verband tussen G en l ? Maak de grafiek van G als functie van l op de grafische rekenmachine.

Opgave 3

Gebruik weer de formule voor de queteletindex.

- Maak de grafiekenbundel van [Voorbeeld 1](#) op de grafische rekenmachine.
- Hoe zwaar is iemand van 1,90 m met een normaal gewicht?

Voorbeeld 2

De formule voor de queteletindex is: $QI = \frac{G}{l^2}$.

Je ziet een nomogram waarmee je de QI snel kunt bepalen. Welke QI heeft iemand van 1,85 meter met een gewicht van 80 kg? Controleer de uitkomst met de formule.

Antwoord

Uit het nomogram lees je $QI \approx 23$ af. Met de formule: $QI = \frac{80}{1,85^2} \approx 23,4$. Beide waarden stemmen goed overeen. Controleer nog een paar waarden.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je een nomogram bij de formule voor de queteletindex.

- Bepaal zo nauwkeurig mogelijk de queteletindex van iemand met een lengte van 1,75 meter die 75 kg weegt. Licht je antwoord toe.
- Iemand met een lengte van 1,75 meter heeft een gezond gewicht. Tussen welke twee waarden ligt dat gewicht?
- De hoogste queteletindex die iemand met een gezond gewicht kan hebben, is 25. Maak een tabel en een grafiek van het mogelijke gewicht afhankelijk van de lengte. Lees daarbij het gewicht af bij lengtes van 1,60, 1,70, 1,80, 1,90 en 2,00 meter.
- Hoe kun je de grafiek bij c controleren met de grafische rekenmachine?

Opgave 5

Je kunt in het nomogram in **Voorbeeld 2** zien wanneer iemand valt in een van de categorieën 'ondergewicht', 'normaal gewicht', 'overgewicht' en 'ernstig overgewicht'.

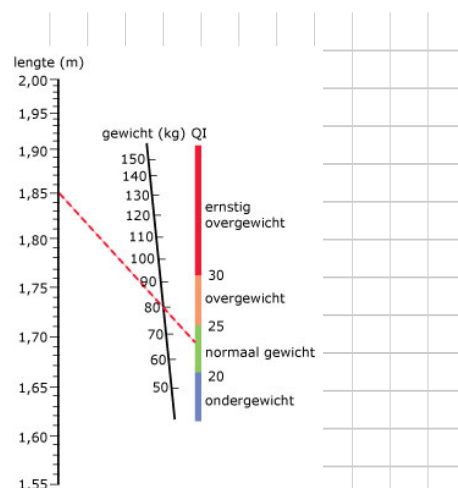
Teken zelf op roosterpapier een grafiekenbundel bij de formule van de queteletindex en geef daarin deze vier categorieën aan.

Voorbeeld 3

In **Voorbeeld 1** tref je de formule aan voor de queteletindex: $QI = \frac{G}{l^2}$. Er zijn mensen die beweren dat je een gezond gewicht hebt als het voldoet aan de formule $G = 100(l - 1)$. Laat zien dat in dit geval de QI inderdaad tussen de 20 en de 25 blijft voor normale lengtes.

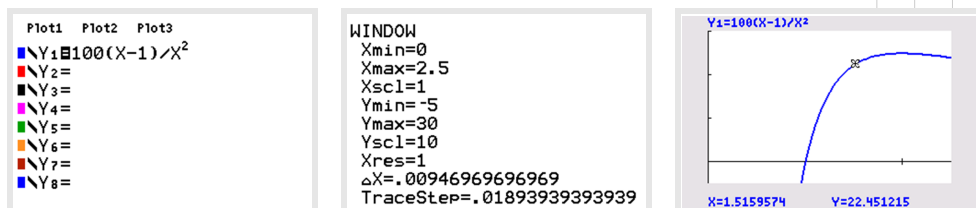
Antwoord

Je kunt beide formules combineren door in de formule voor QI de variabele G te vervangen door $100(l - 1)$. Je krijgt dan: $QI = \frac{100(l-1)}{l^2}$.



Figuur 5.4

Van deze formule kun je met de grafische rekenmachine een grafiek maken. Je zult dan zien dat voor lengtes tussen de 1,50 m en de 2,20 m de QI inderdaad tussen de 20 en de 25 ligt.



Figuur 5.5

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je de formule voor een gezond gewicht en die voor de queteletindex met elkaar kunt combineren.

- Maak zelf de grafiek van de QI van iemand met een gezond gewicht als functie van l .
- Ga na dat voor lengtes tussen de 1,50 meter en de 2,20 m de QI inderdaad tussen de 20 en de 25 ligt.

Opgave 7

- Gegeven zijn de formules $R = 2p + 3q + 20$ en $q = 3p - 2$. Druk R uit in p .
- Gegeven zijn de formules $K = -2t - 5v$ en $t = v - 3$. Druk K uit in v .
- Gegeven zijn de formules $2z = 3x - 4y$ en $z = 2x + 1$. Deze twee formules kun je combineren tot de vorm $y = ax + b$. Welke getallen zijn a en b ?
- Gegeven is de formule $Z = \frac{7x}{5y}$. Neem $Z = 2$ en druk y uit in x .

Verwerken

Opgave 8

Een gemeente wil het water in haar buitenzwembad op 20 °C houden. Dit hoopt men te bereiken door een verwarmingsinstallatie aan te leggen. Omdat je in de zomermaanden ook van de warmte van de zon kunt profiteren, voorspelt een verwarmingsdeskundige dat de verwarmingskosten k zullen voldoen aan de formule: $k = 800 - 60u - 50t$, waarin u het gemiddeld aantal zonuren per dag is en t het gemiddeld aantal graden Celsius dat de buitentemperatuur afwijkt van de 20 °C. k wordt gerekend in euro per dag.

- Welke betekenis heeft het getal 800 in deze formule?
- Op een bepaalde dag is de gemiddelde temperatuur 16 °C. Dan is $t = -4$. Als er die dag 3,5 zonuren zijn, hoe hoog zijn dan de verwarmingskosten?
- Onder welke omstandigheden blijft de temperatuur van het zwembad kosteloos op 20 °C? Beschrijf een paar mogelijke situaties.
- Teken op roosterpapier een grafiekenbundel voor k afhankelijk van u voor $t = -2$, $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$ en $t = 2$.

- e Geef in je grafiekenbundel aan hoe hoog de verwarmingskosten zijn als op een bepaalde dag de zon zes uur schijnt en de temperatuur 22 °C is. Bereken dit antwoord ook met de formule.
- f In een bepaalde week varieert de temperatuur tussen 18 °C en 22 °C. Het aantal uren zon per dag varieert van vier uur tot maximaal tien uur. Tussen welke twee bedragen liggen de totale verwarmingskosten voor het zwembad in die week?

Opgave 9

Het vermogen van een windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Voor een bepaalde waarde van D (de rotor-diameter) vind je een verband tussen P en v . P is het vermogen in kW en v de snelheid in m/s.

- a Maak met de grafische rekenmachine een tabel met $D = 5$, $D = 10$, $D = 15$ en $D = 20$. Teken vervolgens deze grafiekenbundel. Ga ervan uit dat $0 \leq v \leq 40$.
- b Lees in de grafiekenbundel de waarde van P af als $v = 30$ en $D = 10$. Omschrijf hoe je dat doet. Controleer je antwoord met de formule.
- c In de grafiekenbundel kun je zien hoe het vermogen bij een bepaalde diameter afhangt van de windsnelheid. Arceer het gebied waarvoor geldt: de diameter ligt tussen de 10 en de 20 meter en de windsnelheid is maximaal 90 km/h.
- d Hoeveel bedraagt het maximale vermogen dat kan worden opgewekt met de gegevens uit c?

Opgave 10

Op een camping zijn de prijzen: € 10,00 voor een volwassene, € 5,00 per kind en € 3,00 per standplaats. De bedragen zijn per dag.

- a Druk de prijs P uit in aantal volwassenen v en aantal kinderen k .
- b Een oom en tante zonder kinderen gaan naar de camping. Ze weten nog niet hoeveel neefjes en nichtjes ze zullen uitnodigen, maar ze willen niet meer dan € 50,00 betalen. Hoeveel kinderen kunnen ze uitnodigen?
- c Stel dat $k = 2v + 1$. Druk P uit in v .
- d Teken een grafiekenbundel van de prijs. Neem als aantal volwassenen 2, 4, 6 en 8.
- e Welke combinaties van volwassenen en kinderen kun je maken voor € 93,00?

Opgave 11

De ANWB adviseert om bij het autorijden een afstand d (in meter) te bewaren die de helft is van je eigen snelheid v in km/h.

- a Geef de formule van d als functie van v .

Gemiddeld is een auto 4 m lang. De afstand tussen de voorbumpers van twee auto's is dus $s = 4 + d$ m. Neem aan dat alle auto's zich aan het advies van de ANWB houden, 4 m lang zijn en dezelfde snelheid v hebben.

- b** De tijd t in seconden tussen twee auto's is nu te berekenen met de formule: $t = \frac{3,6s}{v}$. Licht dit toe.
- c** Stel een formule op voor t als functie van v door formules te combineren.
- d** Het aantal auto's N dat per minuut een bepaald punt passeert, is: $N = \frac{60}{t}$. Schrijf de formule op van N als functie van v .
- e** Er passeren 29,9 auto's per minuut. Hoe hoog is de snelheid v van deze autostroom in km per uur?

Opgave 12

Sophie verkoopt armbandjes en kettinkjes. Haar dagloon L (in euro) wordt gegeven door de formule $L = 1,50 \cdot a + 2,50 \cdot k + 25$. Hierin is a het aantal armbandjes dat ze verkoopt en k het aantal kettinkjes.

- a** Stel dat Sophie twintig armbandjes en acht kettinkjes op een dag verkoopt. Wat is dan haar dagloon?
- b** Stel dat Sophie op een dag twee keer zoveel armbandjes heeft verkocht als kettinkjes. Druk eerst L uit in k en bereken dan hoeveel armbandjes en kettinkjes ze heeft verkocht als haar dagloon € 80,00 is.
- c** Gegeven is nu dat $a = 2 \cdot k - 4$ en $L = 85$. Hoeveel armbandjes en kettinkjes heeft ze verkocht?
- d** Op een dag heeft Sophie binnen twee uur alle dertig kettinkjes verkocht. Ze wil die dag een dagloon van meer dan € 100,00 halen. Hoeveel armbandjes moet ze dan die dag verkopen?

Toepassen

Opgave 13: Brandstofverbruik

Hoeveel brandstof een personenauto verbruikt, hangt onder andere af van de af te leggen afstand, de rijstijl en het wachten voor verkeerslichten. Je gaat dit met behulp van een wiskundig model nader onderzoeken. In dit model wordt het brandstofverbruik B (in mL) van een auto berekend met de volgende formule: $B = a \cdot L + b \cdot S + c \cdot D$ met:

- L = ritlengte in km;
- S = aantal stops onderweg;
- D = totale wachttijd voor verkeerslichten in seconden.

a en b zijn getallen die van de rijnsnelheid V (in km/h) afhangen en c is een constante. Voor a , b en c geldt: $a = 170 - 4,55V + 0,049V^2$, $b = 0,0077V^2$ en $c = 0,39$. Je laat in dit model optrekken en afremmen buiten beschouwing, zodat je in de uitdrukkingen voor a en b steeds een constante waarde voor V kunt invullen.

- a Neem een rit over een km met een snelheid van 50 km/h, twee stops onderweg en een totale wachttijd van 40 seconden. Bereken het totale brandstofverbruik.
- b Bereken hoeveel procent brandstof er verbruikt wordt met stoppen en wachten tijdens deze rit.
Twee auto's staan voor een stoplicht. 600 meter verderop staat nog een stoplicht. Als de auto's tussen de twee stoplichten met een snelheid van 50 km/h rijden, springt het tweede stoplicht precies op tijd op groen en kunnen ze doorrijden. Houd geen rekening met afremmen en versnellen. Auto 1 rijdt tussen de twee stoplichten steeds met een snelheid van 50 km/h en kan dus doorrijden bij het tweede stoplicht. Auto 2 rijdt met een snelheid van 70 km/h, zodat deze zal moeten stoppen en wachten bij het tweede stoplicht.
- c Laat met een berekening zien dat auto 2 ruim 12 seconden voor het verkeerslicht moet wachten.
- d Bekijk de eerste 900 meter na het eerste stoplicht. Na het tweede stoplicht komt er geen verkeerslicht meer. Auto 1 rijdt ook daar 50 km/h en auto 2 rijdt daar weer 70 km/h. Onderzoek of auto 2 meer dan twee keer zo veel brandstof nodig heeft als auto 1.

Testen

Opgave 14

Bij de verkoop van een bepaald artikel gelden de formules $TO = p \cdot q$ en $q = 200 - 0,5p$, waarin TO de totale maandelijkse opbrengst bij de verkoop van dat artikel is. p is de prijs (in euro) en q is de verkochte hoeveelheid per maand.

- a Combineer deze twee formules tot een formule voor TO als functie van q .
- b Voor de maandelijkse winst TW geldt: $TW = TO - TK$, waarin $TK = 40q + 9000$ de totale maandelijkse kosten voor dit artikel zijn. Stel een formule op voor TW .
- c Bij welke verkoopcijfers wordt winst gemaakt?

Opgave 15

Het subsidiebedrag B dat een sportclub jaarlijks ontvangt, hangt af van het aantal seniorleden s en het aantal junioren j . Er geldt: $B = 1000 + 10j + 5s$.

- a Hoeveel subsidie krijgt een sportclub met 60 junioren en 115 senioren?
- b Maak op roosterpapier bij deze formule een grafiekenbundel met $B = 1000$, $B = 1500$, $B = 2000$ en $B = 2500$.
- c In een bepaald jaar ontvangt men een subsidie van € 1600,00. Er zijn dat jaar 80 senioren. Geef in je grafiek aan hoeveel junioren de club dat jaar heeft. Bereken dit aantal met de formule.
- d Al jarenlang ontvangt men een subsidie van tussen de € 1500,00 en de € 1800,00. Geef in je grafiek het bijbehorende gebied aan.
- e Het aantal seniorleden blijft ook al jaren constant, ongeveer tachtig personen. Tussen welke aantallen heeft het aantal juniorleden dan gevarieerd?

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Formules**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- verband tussen twee variabelen — functie, invoerwaarde, uitkomst — gelijkwaardige formules
- grafieken — snijpunten met assen — toppen — asymptoten
- vergelijking — oplossing van een vergelijking
- ongelijkheid — oplossing van een ongelijkheid
- verband tussen drie variabelen — grafiekenbundel

Activiteitenlijst

- formules herschrijven (balansmethode) — een variabele uitdrukken in een andere variabele
- karakteristieken van grafieken bepalen
- vergelijkingen oplossen met de balansmethode en/of terugrekenen
- ongelijkheden oplossen
- grafiekenbundel tekenen — verbanden met meerdere variabelen combineren

Achtergronden

Het gebruik van formules is een betrekkelijk recente ‘uitvinding’.

De Franse amateurwiskundige **François Viète (1540–1603)** was de eerste die een systematische symbolische notatie voor algebraïsche problemen bedacht. Hij gebruikte letters voor onbekenden: klinkers voor variabelen en medeklinkers voor constanten (die hij als eerste coëfficiënten noemde). Zijn bijdrage aan de theorie van het oplossen van vergelijkingen is mede daardoor heel groot, want voor die tijd moesten alle oplossingsmethoden in woorden worden omschreven...

Al eerder had de theoloog **Nicole d'Oresme (1323–1382)** voor zijn natuurkundige onderzoeken de grafiek uitgevonden. Maar pas nadat **René Descartes (1596–1650)** de beschrijving van rechte en kromme lijnen met behulp van formules bedacht, werd het gebruik van grafieken zoals wij die tegenwoordig kennen langzamerhand gemeengoed. Descartes gebruikte voor variabelen letters achterin het alfabet (vaak x , y en z) en voor constanten letters voor in het alfabet. Dat doen wiskundigen tegenwoordig nog steeds... Daarom weet je dat de formule $y = ax + b$ een (lineair) verband beschrijft tussen x en y , waarin a en b constanten zijn.



Figuur 6.1 François Viète

Testen

Opgave 1

Los deze vergelijkingen algebraïsch op. Geef eventueel benaderingen van je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

- a $1220 + 0,35q = 2056 + 0,12q$
- b $-0,15(x + 25)^2 + 15 = 0$
- c $4 \cdot t^2 = 12$
- d $\frac{350}{20+0,25d^2} = 7$

Opgave 2

Los de vergelijking $x^2 + \sqrt{2x} = 20$ op met behulp van de grafische rekenmachine. Geef een benadering in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Los de ongelijkheden op met de grafische rekenmachine. Rond indien nodig af op één decimaal.

- a $2 \cdot x^3 + 7x < 10$
- b $2 \cdot x^2 + 5 > 7x$

Opgave 4

Vanaf een toren wordt een vuurpijl afgeschoten. De hoogte h van de vuurpijl hangt af van de tijd t dat deze onderweg is. Er geldt: $h = 100 + 40t - 5t^2$. Hierin is h in meter en t in seconden gemeten.

- a Breng de grafiek van h in beeld op de grafische rekenmachine.
- b Op welke hoogte boven de begane grond werd de vuurpijl afgeschoten? Na hoeveel seconden was de vuurpijl weer op diezelfde hoogte?
- c Na hoeveel seconden was de vuurpijl op het hoogste punt in zijn baan? Hoeveel meter boven de begane grond was hij op dat moment?
- d Na hoeveel seconden kwam de vuurpijl op de grond terecht?
- e Kun je met deze gegevens de baan van de vuurpijl in beeld brengen? Verklaar je antwoord.

Opgave 5

De voeding van een melkkoe bestaat vooral uit ruwvoer, zoals gras en hooi. Om een melkkoe meer melk te laten geven, wordt deze bijgevoerd met krachtvoer. De onderzoekers hebben een verband geformuleerd tussen de hoeveelheid krachtvoer die een koe krijgt en de hoeveelheid melk die zij produceert. Er geldt: $M = -0,04 \cdot V^2 + 1,05 \cdot V + 27,2$. Hierin is V de hoeveelheid krachtvoer in kg per dag en M de melkproductie in kg per dag.

Voor de melkveehouder is vooral de winst W in euro per koe per dag belangrijk. De winstformule bij een melkprijs van € 0,29 per kg en een krachtvoerprijs van € 0,20 per kg is: $W = 0,29 \cdot M - 0,20 \cdot V$.

- a Bereken de winst W wanneer een koe 4 kg krachtvoer per dag krijgt.

Als je de formule van M invult in de formule van W , ontstaat een formule die je kunt herleiden tot de vorm $W = a \cdot V^2 + b \cdot V + c$.

- b** Laat deze herleiding zien.

(bron: examen wiskunde A in 2014, eerste tijdvak)

Opgave 6

De opbrengst R (in euro) bij de verkoop van een bepaald artikel hangt af van het aantal stuks q dat je verkoopt en van de prijs p (in euro) per stuk. In bepaalde economische omstandigheden hangt de verkochte hoeveelheid q af van de prijs p volgens de formule: $q = 4000 - 200p$.

- a** Bereken de opbrengst bij een prijs van € 2,50 per stuk.
- b** Bij welke prijs per stuk is er een opbrengst van € 18000,00?
- c** Laat zien dat er een maximale opbrengst is van € 20000,00.
- d** De verkoop van een bepaald product levert een zekere opbrengst op, maar brengt ook vaak kosten met zich mee. De winst is daarvoor lager dan de opbrengst. Geef twee redenen waarom er kosten worden gemaakt. Geef ook een reden waarom die kosten van q af zullen hangen.
- e** Er is een verband tussen R en q . Stel een formule op die dat verband aangeeft.
- f** Voor de kosten K geldt: $K = 5000 + 15q$. Voor de winst W geldt: $W = R - K$. Stel een formule op voor de winst afhankelijk van q en bereken bij welke verkochte hoeveelheid de winst maximaal wordt.

Toepassen

Opgave 7: Koolmonoxide

Koolmonoxide (CO) is één van de stoffen die via de uitlaat van een auto de lucht inkomt. De hoeveelheid CO die uitgestoten wordt is afhankelijk van de temperatuur van de motor en van de rijsnelheid.

Voor de CO-uitstoot bij de warme motor geldt: $u = 4,4 + \frac{196,0}{v}$. Bij

een koude motor geldt: $u = 6,9 + \frac{298,5}{v}$. Hierin is u de uitstoot in gram per kilometer en v de snelheid in kilometer per uur.

- a** Hoe kun je aan de formules zien dat de uitstoot afneemt als de snelheid toeneemt?
- b** De uitstoot van een koude motor bedroeg 14 g/km. Hoe hard reed deze auto?
- c** Iemand is geïnteresseerd in het verschil tussen de uitstoot bij een koude en bij een warme motor. Hij onderzoekt hoeveel procent de uitstoot bij een koude motor meer is dan bij een warme motor. Dat percentage hangt af van de snelheid. Hoe groot is dat percentage bij een snelheid van 30 kilometer per uur?

- d Er bestaan ook formules waarbij de CO-uitstoot gegeven wordt afhankelijk van de ritlengte en de rijtijd. Voor een warme benzinemotor geldt: $u_{\text{tot}} = 4,4L + 0,054T$. Hierin is u_{tot} de totale hoeveelheid CO in gram uitgestoten tijdens de rit, L de ritlengte in kilometers en T de rijtijd in seconden. Laat zien hoe deze formule kan ontstaan uit de eerste formule voor de CO-uitstoot bij een warme motor.

Opgave 8: Windmolens

Windmolens kunnen elektriciteit opwekken. Voor een zekere windmolen wordt dat aangegeven door de formule: $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en D de rotordiameter in m.

- a Ga uit van een windmolen met een diameter van 24 m. Bij welke windsnelheid in km/h wordt een vermogen van 26 kW opgewekt?
- b Ga weer uit van een vermogen van 26 kW. Welke diameter de windmolen moet hebben, kun je dan nog berekenen. Stel een formule op die D uitdrukt in v .
- c In een bepaald gebied ligt de windsnelheid tussen de 7,2 en de 36 km/h. Als je een (gemiddeld) vermogen van 26 kW met een windmolen wilt opwekken, tussen welke waarden kies je dan de diameter van die molen?

Opgave 9: Macro-economische modellen

Bij macro-economische modellen wordt de huishouding van een compleet land met meerdere formules en variabelen beschreven. De volgende vergelijkingen vormen zo'n macro-economisch model:

$$EV = C + I + O$$

$$C = 0,75 \cdot (Y - B)$$

$$I = 29$$

$$O = 40$$

$$B = 0,2 \cdot Y + 12$$

$$Y = EV$$

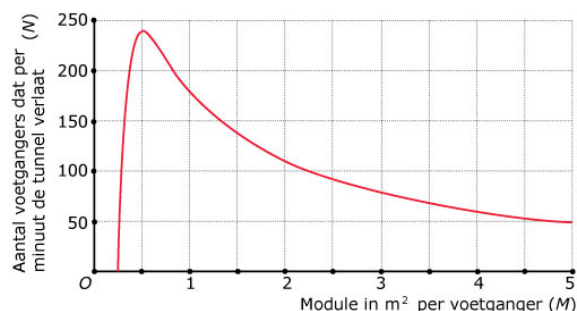
Bij de variabelen EV , C , I , O , B en Y gaat het om miljarden euro. De eerste vergelijking van het model noemen economen wel de definitievergelijking, want eigenlijk spreek je met die vergelijking alleen af wat je onder de effectieve vraag verstaat. De daarop volgende vier vergelijkingen heten de gedragsvergelijkingen. Die laten zien hoe voor een bepaalde economie C , I , O en B van het nationaal inkomen Y afhangen. In deze economie geven de particulieren bijvoorbeeld driekwart van het totale te besteden inkomen $Y - B$ uit aan consumptiegoederen. De zesde vergelijking is de evenwichtsvoorwaarde: de vraag is even groot als het nationaal inkomen.

Door deze zes vergelijkingen met elkaar te combineren kun je het nationaal inkomen van dit land uitrekenen en daarmee alle variabelen. Laat zien hoe dat gaat.

Examen

Opgave 10: Treinreizigers te U

Treinreizigers kunnen op een station de uitgang van dat station alleen bereiken via een voetgangerstunnel. De tunnel is 30 meter lang en 3 meter breed. De snelheid van de voetgangersstroom in de tunnel is afhankelijk van de drukte. Een maat voor de drukte is de module, dat is het gemiddeld aantal vierkante meter per voetganger.



Figuur 6.2

- a Op zeker moment bevinden zich 120 mensen in de tunnel, die allen in de richting van de uitgang lopen. Bereken voor deze situatie de module.

Het verband tussen de snelheid van de voetgangersstroom V en de module M wordt gegeven door de formule $V = 87 - \frac{26}{M+0,5}$ met V in meter per minuut en M in m^2 per voetganger.

- b Bereken de module bij een snelheid van 50 meter per minuut. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- c Wanneer een voetganger ongehinderd kan lopen, is zijn snelheid ongeveer 5 km/h. Onderzoek of dat in overeenstemming is met de formule.

Er bestaat een verband tussen de waarde van M en het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat (N). Het verband tussen M en N staat grafisch weergegeven in de figuur.

- d Schat zo nauwkeurig mogelijk hoeveel voetgangers er per minuut de tunnel verlaten in geval de snelheid van de voetgangersstroom 70 meter per minuut is.
- e Een belangrijk gegeven bij het ontwerpen van een tunnel is het maximale aantal mensen dat in korte tijd kan worden verwerkt. Bij welke snelheid is het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat maximaal? Licht je antwoord toe.

(bron: examen havo wiskunde A in 1989, tweede tijdvak)

Opgave 11: Knikkers in een pot

Op een braderie zie je wel eens een glazen pot staan, helemaal gevuld met even grote knikkers. Tegen betaling van een bepaald bedrag mag je raden hoeveel knikkers er in de pot zitten. Degene die het aantal precies raadt of er het dichtst bij zit, wint een prijs. Uit onderzoek blijkt dat de knikkers ongeveer 64% van de beschikbare ruimte innemen. Dit gegeven maakt het mogelijk een redelijke schatting te geven van het aantal knikkers in de pot. Hiervoor gebruiken we het volgende stappenplan:

- Bepaal de diameter van een knikker en bereken daarmee de inhoud van een knikker.
- Bereken 64% van de inhoud van de glazen pot en deel dit door de inhoud van één knikker. Het afgeronde antwoord is een redelijke schatting van het aantal knikkers in de pot.

De inhoud van een knikker is te berekenen met de formule:

$$I_{\text{knikker}} = 0,5236d^3$$

Hierin is d de diameter van de knikker in cm en I_{knikker} de inhoud van een knikker in cm^3 .

Een glazen pot met een inhoud van 800 cm^3 is helemaal gevuld met knikkers, die elk een diameter van 1,3 cm hebben.

- a** Geef een redelijke schatting van het aantal knikkers in de pot.

Het stappenplan kan worden vertaald in twee formules:

$$I_{\text{knikker}} = 0,5236d^3$$

$$K = \frac{0,64 \cdot I_{\text{pot}}}{I_{\text{knikker}}}$$

De afgeronde waarde van K is het aantal knikkers in de pot en I_{pot} is de inhoud van de glazen pot in cm^3 . Je kunt uit deze formules een formule afleiden voor K , uitgedrukt in I_{pot} en d . Deze formule is van de vorm

$$K = a \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3}$$

- b** Laat zien hoe je deze formule afleidt en rond de waarde van a af op drie decimalen.

(naar: examen havo wiskunde A in 2016, tweede tijdvak)



Figuur 6.3

a

absolute frequentie 22
algebraïsch oplossen 88
aselect 10
asymptoten 79

b

balansmethode 88
beelddiagram 36
beschrijvende statistiek 10

c

cirkeldiagram 36
conclusie 10

d

data 10
diagram 36

f

frequentietabel 22
functie 70

g

grafiekenbundel 102

h

herleiden 71
herschrijven 71
horizontale asymptoot 78

i

invoerwaarden 70

k

kaartdiagram 36
karakteristieken 79
kwalitatieve variabele 22
kwantitatieve variabele 22

l

lijndiagram 36

m

maximum 79
minimum 79
misleidingen 49

o

onderzoeksvraag 10
ongelijkheid 96
ordenen 10

p

populatie 10
puntenwolk 36

r

relatieve frequentie 22
representatief 10

s

snijpunten met de assen 79
spreidingsdiagram 36
staafdiagram 36
statistische variabele 10
steekproef 10

t

terugrekenmethode 88
toppen 79

u

uitkomsten 70

v

verband 88
verband tussen drie variabelen 102
vergelijking 88
verticale asymptoot 78

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

- 3. Werken met data**
- 4. Formules**



www.math4all.nl

