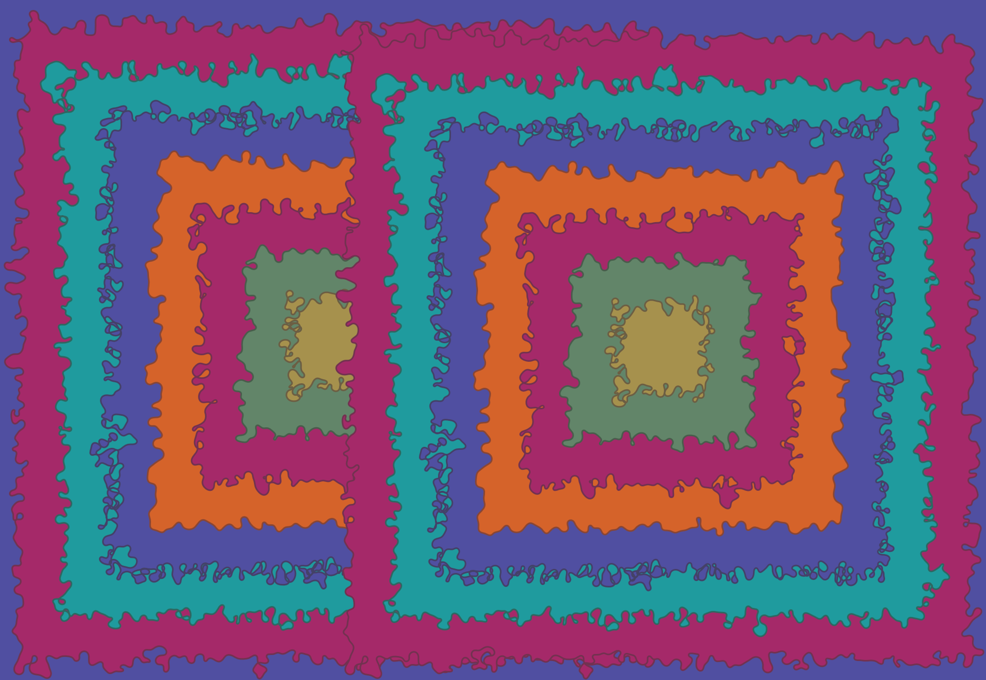
Wiskunde A

4 HAVO

Katern 1

ConTeXt College



Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

1

Rekenen en algebra

1.1 Getallen en variabelen

Inleiding

Bij de inrichting van een schap in een supermarkt moet je vaak al rekenen. Want hoe plaats je bijvoorbeeld 200 pakjes drinken zo goed mogelijk op de daarvoor bedoelde schapruimte? De lengte en de breedte van het rechthoekige vlak waarop ze moeten staan zijn soms vaste getallen, soms variabel. En dan kun je nog stapelen... Wiskunde gaat over getallen en variabelen, in dit onderdeel worden kennis en vaardigheden uit de voorgaande leerjaren herhaald.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- opnieuw werken met het decimale stelsel voor getallen;
- opnieuw rekenen met variabelen, alleen de basisbewerkingen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.

Voorkennis

- rekenen met getallen (met de hand en met de rekenmachine);
- het begrip variabele en hoe je ermee kunt rekenen.

Verkennen

Opgave V1

Stel je voor dat je vakken vult bij een supermarkt. Je moet 200 pakjes drinken in een schap plaatsen. Elk pakje heeft de vorm van een balk van 4,8 bij 3,8 bij 12,0 cm. Van elk pakje moet de voorkant duidelijk zichtbaar zijn, die voorkant is een rechthoek van 4,8 bij 12,0 cm. De schapruimte is een rechthoek van 54 cm breedte en 30 cm diepte. De ruimte tussen twee schappen boven elkaar is 30 cm.

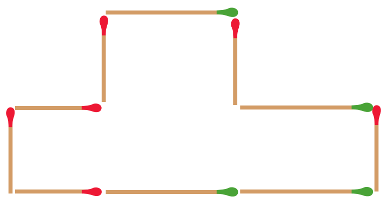
Figuur 1.2

a Kun je alle 200 pakjes kwijt op dit schap?

b Door een beetje schuiven kun je de lengte van de schapruimte variëren. Hoe groot moet je die lengte maken om alle pakjes wel kwijt te kunnen?

Opgave V2

Bekijk deze luciferfiguur. Hij is gemaakt van lange lucifers met een lengte van a cm en korte lucifers met een lengte van b cm.



Figuur 1.3

a Kies $a = 4{,}5$ cm en $b = 3$ cm. Teken de figuur en bereken de omtrek ervan.

b Bereken de oppervlakte van de figuur die je hebt getekend.

Neem nu aan dat a en b variabel zijn.

c Geef een formule voor de omtrek en de oppervlakte van deze figuur.

Uitleg

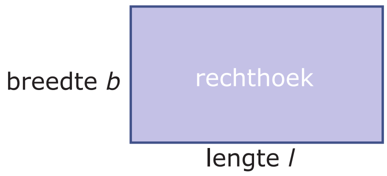
Bij het rekenen gebruik je getallen. Dat zijn decimale getallen, wat betekent dat het tientallige (decimale) stelsel wordt gebruikt. Bekijk bijvoorbeeld het getal $16302{,}54$. Het getal bestaat uit:

- 1 tienduizendtal is $1 \cdot 10000$
- 6 duizendtallen is $6 \cdot 1000$
- 3 honderdtallen is $3 \cdot 100$
- 0 tientallen is $0 \cdot 10$
- 2 eenheden is $2 \cdot 1$
- decimale komma
- 5 tienden is $5 \cdot 0{,}1$
- 4 honderdsten is $4 \cdot 0{,}01$

Op de rekenmachine gebruik je meestal de decimale punt in plaats van de decimale komma.

Soms zijn getallen nog onbekend. Als van een rechthoek lengte en breedte onbekend zijn, kun je er nog verschillende getallen voor kiezen. Je zegt dan dat de lengte en de breedte variabel of veranderlijk zijn. Deze variabelen stel je voor door letters. Meestal zijn dit kleine letters die cursief worden gedrukt. De lengte kun je hier l noemen en de breedte b. Voor deze rechthoek geldt dan:

- De omtrek is $l + b + l + b = 2 \cdot l + 2 \cdot b = 2l + 2b$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = lb$.



Figuur 1.4

Er is gebruikgemaakt van de afspraak dat je het maalteken $\cdot$ weglaat als daardoor geen misverstanden kunnen ontstaan. Bijvoorbeeld $2 \cdot a = 2a$ en $a \cdot b = ab$, maar $2 \cdot 3 \neq 23$.

Bij het rekenen met variabelen gebruik je dezelfde regels als bij het rekenen met getallen.

- Je weet $3 + 3 = 2 \cdot 3$. Zo is ook $a + a = 2 \cdot a = 2a$.
- Je weet $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$. Zo is ook $a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$.
- En dus is $2a + 5a = 7a$. De gelijksoortige termen $2a$ en $5a$ kun je optellen en aftrekken. Maar $2a + 5b$ kun je niet korter schrijven, de termen zijn ongelijksoortig.
- Je weet $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ en $2 + 3 = 3 + 2$. Zo is ook $a \cdot b = b \cdot a$ en $a + b = b + a$. Dit is de wisseleigenschap voor optellen en vermenigvuldigen.
- Je weet $3 \cdot 3 = 3^2$. Zo is ook $a \cdot a = a^2$.

Je ziet dat je veel uitdrukkingen met variabelen ook anders kunt schrijven. Je noemt dat het herschrijven of herleiden van een uitdrukking.
Zo is $2a + 5b + 3a + 4b$ te herleiden tot $5a + 9b$.

Opgave 1

Een pakje sinaasappelsap heeft de vorm van een balk met een lengte van $4{,}8$ cm, een breedte van $3{,}8$ cm en een hoogte van $12{,}0$ cm.

a Hoeveel cm^3 bedraagt de inhoud van zo'n pakje?

Het karton waarvan het pakje is gemaakt is groter dan de totale buitenoppervlakte van het pakje. Bepaalde delen worden naar binnen gevouwen.

b Bereken de totale buitenoppervlakte van het pakje.

Er bestaan veel pakjes en pakken drinken van die vorm. Noem de lengte l, de breedte b en de hoogte h.

c Welke formule kun je nu maken voor de inhoud V van zo'n pakje?

d Welke formule kun je maken voor de totale buitenoppervlakte A van zo'n pakje?

Opgave 2

Hier tref je enkele uitdrukkingen met variabelen aan. Herleid ze tot een zo eenvoudig mogelijke uitdrukking (dus een uitdrukking met zo min mogelijk tekens).

a $5 \cdot a + 6 \cdot b - 3 \cdot a - b$

b $4a \cdot a - 3a + 5a - a^2$

c $5p - 8pq - 6p + 2p \cdot 4q$

d $8x^2 - 5x^2 + 2x \cdot x$

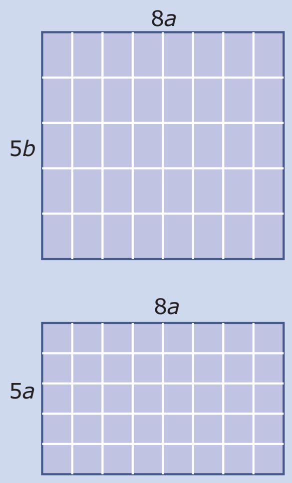
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Rekenen is het werken met getallen. Je gebruikt **decimale getallen**, je werkt in het tientallig stelsel. Er zijn vier hoofdbewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Verder ken je de bewerkingen machtsverheffen en worteltrekken.

Algebra is het rekenen met **variabelen**. Daarbij gelden dezelfde regels als bij rekenen. Als er geen misverstanden door ontstaan, laat je in de algebra het vermenigvuldigingsteken weg. Belangrijke situaties zijn:

- $a + a = 2a$ en $a + a + a = 3a$, enzovoort.
- $a \cdot a = a^2$ en $a \cdot a \cdot a = a^3$, enzovoort.
- $a \cdot b = ab$ en $a \cdot a \cdot b = a^2b$, enzovoort.
- **gelijksoortige termen** kun je optellen en aftrekken: $8a + 5a = 13a$ en $8a - 5a = 3a$.
- **ongelijksoortige termen** kun je niet optellen en aftrekken: $8a + 5b$ en $8a - 5b$ kun je daarom niet korter schrijven.



Figuur 1.5

Bekijk de figuren.

$8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$ en $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$.

Bij het optellen en vermenigvuldigen van termen maak je gebruik van de

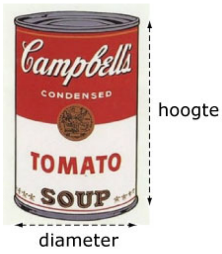
wisseleigenschap: $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$.

In de algebra is het gebruikelijk om uitdrukkingen zo kort en overzichtelijk mogelijk te schrijven door ze te **herleiden** met behulp van bovengenoemde eigenschappen. De variabelen zet je daarbij zoveel mogelijk in alfabetische volgorde. En verder schrijf je $1x$ als x en $0x$ als 0. Een losse nul laat je bij het optellen en het aftrekken weg.

Voorbeeld 1

Een blik heeft de vorm van een cilinder. De hoogte is $12{,}0$ cm en de diameter is $8{,}4$ cm. De inhoud van zo'n blik bereken je door de oppervlakte van de cirkelvormige bodem met de hoogte te vermenigvuldigen. De oppervlakte van een cirkel is πr^2. Hierbij is r de straal van de cirkel.

Bereken de inhoud van dit blik in cm^3 nauwkeurig. Schrijf een formule op voor de inhoud V van een cilindrisch blik met een hoogte h en een diameter d.



Figuur 1.6

Antwoord

De inhoud van dit blik is $\pi \cdot 4{,}2^2 \cdot 12{,}0 \approx 665$ cm^3.

Omdat de straal van elk cilindrisch blik $\frac{1}{2}d$ is, wordt de inhoud:

$V = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}d\right)^2 \cdot h = \frac{1}{4}\pi d^2 h$. De haakjes zijn nodig om aan te geven dat je eerst $\frac{1}{2}d$ moet nemen en de uitkomst daarvan moet kwadrateren. Dit heeft met het invullen van een variabele in een formule en met rekenvolgorde te maken.

Opgave 3

Je hebt 300 blikken (gebruik de afmetingen uit **Voorbeeld 1**). Ze moeten allemaal naast en achter elkaar op een schap in de winkel worden geplaatst. De verticale tussenruimte tussen twee schappen is 42 cm en elk schap is 48 cm breed (dat is van voor naar achter gemeten).

a Kun je alle blikken kwijt als je een schaplengte van 1 meter mag gebruiken?

b Hoeveel schaplengte heb je nodig om alle blikken te kunnen plaatsen?

Je hebt cilindervormige conservenblikken met hoogte h en diameter d en je plaatst er twaalf recht naast elkaar, vier recht achter elkaar en je stapelt ze twee lagen hoog.

c Schrijf een formule op voor het totale volume aan schapruimte die deze blikken innemen.

Opgave 4

Bekijk het cilindervormige blik uit **Voorbeeld 1**.

a Bereken de inhoud van een cilindervormig blik met een hoogte van $10{,}0$ cm en een diameter van $6{,}54$ cm in cm^3 nauwkeurig.

Om te berekenen hoeveel oppervlakte aan metaal er voor zo'n cilindrisch blik nodig is, moet je bedenken dat die oppervlakte bestaat uit twee cirkels en een rechthoek. Die rechthoek is de uitgerolde cilindermantel en heeft een oppervlakte van $2\pi r h$ als r de straal van de cilinder en h de hoogte ervan is.

b Leg uit waarom die oppervlakte $2\pi r h$ is.

c Bereken de oppervlakte aan metaal voor een cilindervormig blik met een hoogte van $10{,}0$ cm en een diameter van $6{,}54$ cm in cm^2 nauwkeurig.

d Schrijf een formule op voor de totale buitenoppervlakte A van een cilindrisch blik met hoogte h en diameter d.

Voorbeeld 2

Herleid de uitdrukkingen tot een zo eenvoudig mogelijke vorm (dus met zo min mogelijk tekens).

- $9a - 7a$
- $5a - 6b - a + 5b$
- $9a \cdot {-7a}$
- $2x \cdot {-4y} - 6 \cdot {-3xy}$

Antwoord

- $9a - 7a = 2a$
- $5a - 6b - a + 5b = 5a - a - 6b + 5b = 4a - b$
- $9a \cdot {-7a} = 9 \cdot {-7} \cdot a \cdot a = {-63a^2}$
- $2x \cdot {-4y} - 6 \cdot {-3xy} = {-8xy} - {-18xy} = {-8xy} + 18xy = 10xy$

Opgave 5

Herleid de uitdrukkingen tot een zo eenvoudig mogelijke vorm.

a $6p \cdot 3q - 3p \cdot {-4q}$

b ${-5xy} - 3x \cdot {-2y}$

c ${-3} \cdot {-2p} - 6 \cdot {-8p}$

Opgave 6

Met behulp van AlgebraKIT kun je het herleiden van uitdrukkingen oefenen. In het practicum vind je twee oefenvensters. In het linker venster oefen je het samennemen van gelijksoortige termen, in het rechter venster oefen je het vermenigvuldigen van variabelen.

Oefen jezelf met AlgebraKIT.

Voorbeeld 3

Een pakje drinken heeft de vorm van een balk van 4,8 bij 3,8 bij 12,0 cm. De pakjes worden verpakt in kartonnen dozen. Daarin kunnen twee lagen van deze pakjes op elkaar, dus die dozen hebben een hoogte van 24 cm. De fabrikant wil dat er 96 van deze pakjes in een doos passen. De afmetingen van de doos bepalen de prijs: hoe groter de oppervlakte aan karton, hoe duurder het karton. Welke afmetingen krijgt een zo goedkoop mogelijke doos voor deze pakjes drinken?

Antwoord

Er moeten 48 pakjes per laag in de doos passen. Maar dat kun je op verschillende manieren bereiken; de aantallen pakjes naast elkaar en achter elkaar zijn variabel.

Neem a pakjes naast elkaar, totale lengte $4{,}8a$. Neem b pakjes achter elkaar, totale breedte $3{,}8b$. Dit levert de volgende twee formules op:

- $a \cdot b = 48$
- $2 \cdot 4{,}8a \cdot 3{,}8b + 2 \cdot 4{,}8a \cdot 24 + 2 \cdot 3{,}8b \cdot 24$ is de totale oppervlakte aan karton.

Met behulp van een tabel kun je nu systematisch de oplossing zoeken.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Licht toe hoe je beide formules kunt afleiden.

b Schrijf de tweede formule uit het voorbeeld zo eenvoudig mogelijk.

c Maak nu een tabel met alle mogelijke gehele getallen voor a en b en bepaal bij welke combinatie de kosten van een doos het laagst zijn.

Opgave 8

Jannes en zijn moeder zijn samen 59 jaar. Jannes is geboren toen zijn moeder 23 jaar oud was.

Bereken hoe oud Jannes is door twee formules te maken.

Verwerken

Opgave 9

Het Empire State Building is 381 meter hoog vanaf de begane grond tot het topje van het gebouw. Het gebouw heeft 103 verdiepingen die samen 373 meter hoog zijn. Daarbovenop staat nog een torentje. Op de punt van dat torentje staat een antenne die 61 meter hoog is. De entree op de begane grond beslaat vier verdiepingen, de lobby is drie verdiepingen hoog. Op de 87e verdieping is het ‘Observatory’ dat elke dag open is en waar jaarlijks $3{,}5$ miljoen bezoekers komen. Je kunt er vanaf de begane grond (telt als eerste verdieping, als ‘first floor’) in net iets minder dan een minuut met één van de 73 liften komen.

Figuur 1.7

a Hoe hoog is de lobby?

b Je kunt met trappen naar boven tot de 103e verdieping. Een traptrede is 20 cm hoog. Hoeveel traptreden zijn er tot het ‘Observatory’?

c Met hoeveel meter per minuut gaat de lift naar het ‘Observatory’?

d Hoeveel bezoekers heeft het ‘Observatory’ gemiddeld per dag?

Opgave 10

Een pakje hagelslag heeft de vorm van een kartonnen balk met een vierkant grondvlak.

a Hoeveel cm^3 hagelslag kan daar maximaal in als het grondvlak $5{,}6$ bij $5{,}6$ cm en de hoogte $9{,}2$ cm is? Geef je antwoord in gehele cm^3.

b Bereken de totale buitenoppervlakte van zo'n doosje.

Er zijn doosjes met dezelfde vorm, alleen groter of kleiner. Het grondvlak is dan een vierkant van z bij z cm en de hoogte is h cm.

c Met welke formule kun je dan de inhoud V berekenen?

d Geef ook een formule voor de totale oppervlakte A van zo'n doosje.

Opgave 11

Herleid.

a $6a + 9a$

b $6a \cdot 9a$

c $6a \cdot 9b$

d $6p - p$

Opgave 12

Veel vervoer vindt plaats per container. Als je veel te vervoeren of op te bergen hebt, kun je containers huren. Er bestaan verschillende typen en afmetingen. Dit zijn de specificaties van een 20ft-zeecontainer:
inhoud: 33,2 m^3
afmetingen ($l \cdot b \cdot h$ in cm) inwendig: $589 \cdot 234 \cdot 239$
deuropening ($b \cdot h$ in cm): $233 \cdot 228$.

a Ga na of de opgegeven inhoud van de zeecontainer ongeveer klopt.

In deze zeecontainer wil je zuiver rechthoekige dozen met een bodem van 30 bij 22 cm en een hoogte van 25 cm vervoeren.

b Hoeveel dozen kunnen er naast elkaar als je ze met de smalle kant naar voren zet?

c Hoeveel dozen kunnen er in totaal in de container?

Je wilt op deze manier (dus met de smalle kant naar voren) 486 van die dozen in een container. De vloeroppervlakte die je daarmee bedekt moet zo klein mogelijk zijn.

d Hoe ga je die dozen stapelen?

Opgave 13

Bereken voor $a = 10$, $b = 6$ en $c = -3$. Herleid eerst de uitdrukking.

a $5a \cdot -2b + 6b \cdot a$

b $6a \cdot -5b \cdot c$

c $5b \cdot 3c \cdot a - 3a \cdot 2b \cdot c$

Toepassen

Opgave 14: Hardloopwedstrijd

Dion en Jaap hebben meegedaan aan een hardloopwedstrijd. Het aantal hardlopers dat eerder dan Dion bij de finish kwam, is gelijk aan het aantal hardlopers dat na hem eindigde. Het aantal hardlopers dat eerder dan Jaap bij de finish kwam, is driemaal zo groot als het aantal hardlopers dat na hem eindigde. In de eindranglijst staan tussen Dion en Jaap nog tien andere deelnemers. Er zijn geen hardlopers tegelijk over de finish gekomen en iedereen is gefinisht. Hoeveel hardlopers deden er mee aan deze wedstrijd?

Testen

Opgave 15

Je wilt de muren van je kamer wit verven met muurverf. Die kamer is netjes rechthoekig en $3{,}50$ meter breed en $4{,}2$ meter lang. De hoogte van de kamer is overal $2{,}80$ meter . Verder zit er in je kamer een deur van 1 meter breed en $2{,}15$ meter hoog en een raam van $1{,}80$ meter breed en $0{,}95$ meter hoog. Muurverf koop je in potten waarmee je 24 m^2 kunt schilderen. Je moet wel twee keer schilderen om alles netjes dekkend te krijgen. Zo'n pot muurverf kost € 16,80.

Hoeveel kost het je aan muurverf?

Opgave 16

Bereken voor $p = 5$, $q = -6$ en $r = 4$. Herleid eerst de uitdrukking.

a $2p - q + 5p - q$

b $2p \cdot -q \cdot 3r$

c $2p \cdot 5q + 3r \cdot 5r$

d $15p \cdot 3pr - 4p^2 \cdot -5r$

Practicum

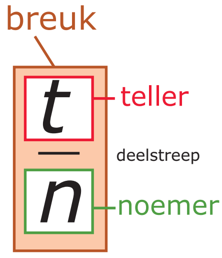
Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **het samennemen van uitdrukkingen met variabelen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.2 Breuken

Inleiding

Je hebt al leren werken met breuken: je kunt ze optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Toch is het nuttig om dit nog even te herhalen, zeker als daarin ook variabelen voorkomen. Je kunt dan later veel gemakkelijker werken met formules waarin breuken voorkomen.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- opnieuw rekenen met breuken, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen;
- rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen.

Voorkennis

- rekenen met getallen (met de hand en met de rekenmachine) en met breuken;
- het begrip variabele en hoe je ermee kunt rekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al rekenen met breuken. Neem bijvoorbeeld $\frac{5}{8}$ en $\frac{3}{10}$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken $\frac{5}{8} - \frac{3}{10}$, het verschil van deze breuken.

c Hoeveel is het product van beide breuken?

d Bereken het quotiënt van beide breuken, deel de grootste door de kleinste.

Opgave V2

Je kunt op dezelfde manier rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen. Werk met de breuken $\frac{6}{p}$ en $\frac{4}{q}$. Neem aan dat $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken $\frac{6}{p} - \frac{4}{q}$, het verschil van deze breuken.

c Hoeveel is het product van beide breuken?

d Bereken $\frac{6}{p} \Big/ \frac{4}{q}$.

e Waarom moet je aannemen dat $p \neq 0$ en $q \neq 0$?

Uitleg

Bij het rekenen met breuken is het gelijknamig maken van twee (of meer) breuken een belangrijke vaardigheid. Daarmee zorg je ervoor dat de noemers gelijk worden, zodat het gelijksoortige breuken worden. Je zoekt daartoe het kleinste getal dat van beide noemers een veelvoud is. Dit heet het kleinste gemeenschappelijke veelvoud of kortweg k.g.v. van beide noemers.

- Als je $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het k.g.v. van 5 en 4. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is 20 en de breuken worden $\frac{8}{20}$ en $\frac{15}{20}$.
- Als je $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het k.g.v. van 6 en 4. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is 12 en de breuken worden $\frac{10}{12}$ en $\frac{9}{12}$.
- Als je $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het k.g.v. van b en d. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is bd en de breuken worden $\frac{ad}{bd}$ en $\frac{bc}{bd}$.
- Als je $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{2a}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het k.g.v. van a en $2a$. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is $2a$ en de breuken worden $\frac{4}{2a}$ en $\frac{3}{2a}$.

Nu kun je deze breuken optellen, aftrekken en delen. Bij het vermenigvuldigen van breuken is gelijknamig maken niet nodig; je vermenigvuldigt de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.

Soms kun je breuken vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bijvoorbeeld:

- $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ (teller en noemer delen door 12)
- $\frac{4a}{6a^2} = \frac{2}{3a}$ (teller en noemer delen door $2a$)

Let op! De noemer van een breuk kan niet gelijk zijn aan 0.

Bij $x \cdot 0 = 5$ kun je geen waarde voor x invullen die de vermenigvuldiging kloppend maakt. Delen door 0 heeft geen betekenis.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je breuken gelijknamig maakt om ze te kunnen optellen, aftrekken en delen. Neem de breuken $\frac{5}{a}$ en $\frac{4}{b}$.

a Maak beide breuken gelijknamig.

b Bereken nu $\frac{5}{a} + \frac{4}{b}$, $\frac{5}{a} - \frac{4}{b}$ en $\frac{5}{a} \Big/ \frac{4}{b}$.

c Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 2

Neem de breuken $\frac{5}{3a}$ en $\frac{4}{5a}$.

a Maak beide breuken gelijknamig.

b Bereken nu $\frac{5}{3a} + \frac{4}{5a}$, $\frac{5}{3a} - \frac{4}{5a}$ en $\frac{5}{3a} \Big/ \frac{4}{5a}$.

c Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 3

Neem de breuken $\frac{6x}{2xy}$ en $\frac{5}{3y}$.

a Welke van beide breuken kun je nog vereenvoudigen? Doe dat eerst.

b Tel beide breuken op.

c Vermenigvuldig beide breuken.

Theorie en voorbeelden

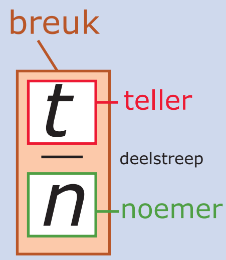
Om te onthouden

Je kunt al **rekenen met breuken**: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
Het rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen gaat net zo.

- Bij optellen en aftrekken maak je de breuken eerst **gelijknamig**:
  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad+bc}{bd}$ en $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad-bc}{bd}$
- Bij vermenigvuldigen moet je tellers en noemers afzonderlijk vermenigvuldigen:
  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$
- Bij delen maak je de breuken eerst gelijknamig:
  $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} / \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad}{bc}$ (beide breuken met $b \cdot d$ vermenigvuldigen)

Er is één maar: door 0 delen heeft geen betekenis. In de berekeningen hierboven moet daarom steeds gelden $b \neq 0$ en $d \neq 0$ en bij de deling moet ook gelden $c \neq 0$.

Kijk goed of je de breuken waarmee je werkt nog kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bij het gelijknamig maken zoek je het **kleinste gemeenschappelijke veelvoud** of kortweg k.g.v. van de noemers van de breuken.



Figuur 2.2

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{2}{p}$ en $\frac{3}{2q}$ (met $p \neq 0$ en $q \neq 0$). Tel beide breuken op, vermenigvuldig ze en deel de eerste door de tweede.

Antwoord

- Optellen: $\frac{2}{p} + \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 2q}{p \cdot 2q} + \frac{3 \cdot p}{2q \cdot p} = \frac{4q}{2pq} + \frac{3p}{2pq} = \frac{4q+3p}{2pq}$
- Vermenigvuldigen: $\frac{2}{p} \cdot \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 3}{p \cdot 2q} = \frac{6}{2pq} = \frac{3}{pq}$
- Delen: $\frac{2}{p} / \frac{3}{2q} = \frac{4q}{2pq} / \frac{3p}{2pq} = \frac{4q}{3p}$

Opgave 4

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{5}{3a}$ en $\frac{4}{b}$ met $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken het product van beide breuken.

c Deel $\frac{5}{3a}$ door $\frac{4}{b}$.

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{3}{4}a$ en $\frac{1}{2a}$ met $a \neq 0$.

d Bereken de som van beide breuken.

e Bereken het product van beide breuken.

f Deel $\frac{3}{4}a$ door $\frac{1}{2a}$.

Opgave 5

Bekijk vooraf of je breuken kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Misschien hoef je niet eens met breuken te rekenen. Zo is $\frac{12a^2b}{3ab} = 4a$. Herleid de volgende uitdrukkingen (neem aan dat alle variabelen ongelijk aan 0 zijn).

a $\frac{2x}{4xy} + \frac{6}{3y}$

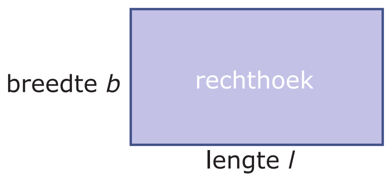
b $\frac{-3b}{ab} / \frac{2a}{a^2}$

c $\frac{2xy}{x} - \frac{15x}{3}$

d $\frac{4xy}{2x} \cdot \frac{6x}{3}$

Voorbeeld 2

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek $21{,}4$ cm. Je wilt de lengte en de breedte bepalen.



Figuur 2.3

Antwoord

Dergelijke problemen met twee variabelen kun je oplossen met behulp van tabellen en grafieken. Je neemt voor de lengte bijvoorbeeld l en voor de breedte b. De gegevens leveren dan op:

- De omtrek is $2l + 2b = 21{,}4$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = 24$.

Deze formules kun je met behulp van de balansmethode herleiden tot de vorm $l = ...$:

- Uit de formule voor de omtrek volgt $l = 10{,}7 - b$.
- Uit de formule voor de oppervlakte volgt $l = \frac{24}{b}$.

Je zegt wel dat l nu is uitgedrukt in b. Dat doe je om gemakkelijker tabellen en grafieken te kunnen maken. Probeer daarmee de juiste waarden voor lengte en breedte te vinden.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Herleid zelf de twee formules.

b Maak een tabel waarin beide formules staan. In deze tabel kun je opzoeken bij welke waarde van b er bij beide formules eenzelfde waarde voor l uitkomt. Welke waarden voor b en l vind je?

Opgave 7

Herleid de formules tot een vorm waarin y is uitgedrukt in x. Neem aan dat $x \neq 0$ en $y \neq 0$.

a $2x + 5y = 10$

b $5x - 2xy = 10$

c $2x \cdot 3y = 9$

d $\frac{2x}{3y} = 9$

Verwerken

Opgave 8

Reken met de twee breuken $\frac{2x}{y}$ en $\frac{x}{3y}$. Neem aan dat $x \neq 0$ en $y \neq 0$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken het product van beide breuken.

c Bereken $\frac{2x}{y} - \frac{x}{3y}$.

d Bereken $\frac{2x}{y} / \frac{x}{3y}$.

e Bereken de som van de breuken $\frac{2x}{y}$ en $\frac{y}{3x}$.

f Bereken het product van de breuken $\frac{2x}{y}$ en $\frac{y}{3x}$.

Opgave 9

Herleid tot een vorm met niet meer dan één breuk.

a $\frac{1}{2x} + \frac{3}{y}$

b $\frac{15xy}{3x} - \frac{12y^2}{4y}$

c $\frac{y}{4x} \cdot \frac{2x^2}{3y}$

Opgave 10

Herleid eerst en bereken vervolgens als $a = 4$ en $b = -3$.

a $\frac{6a}{ab} \cdot \frac{5b}{3a}$

b $\frac{4}{3b} - \frac{1}{b}$

c $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$

d $\frac{2a}{ab} / \frac{6}{b}$

Opgave 11

Herleid de formules tot een vorm waarin y is uitgedrukt in x.

a $y \cdot 3x = 6$

b $3y + x = 6$

c $\frac{3y}{2x^2} = \frac{1}{x}$

d $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 2$

Opgave 12

Van een rechthoek is de oppervlakte 30 cm^2 en de omtrek 23 cm. Hoe lang zijn de zijden van deze rechthoek?

Stel bij dit probleem formules op en bereken het antwoord met behulp van tabellen.

Toepassen

Opgave 13: Moeder en dochter

Hatice en haar moeder schelen 23 jaar in leeftijd. Als je hun leeftijden vermenigvuldigt, kom je op 624. Hoe oud is Hatice?

Stel bij dit probleem formules op en bereken het antwoord.

Opgave 14: Karpers

In een vijver zwemmen rode en gele karpers. Twee vijfde van de karpers is geel, de rest is rood. Drie kwart van de gele karpers is een vrouwtje. In totaal zijn er evenveel vrouwtjeskarpers als mannetjeskarpers. Welk gedeelte van de totale karperpopulatie bestaat uit rode mannetjeskarpers?

Testen

Opgave 15

Herleid de uitdrukkingen eerst tot één breuk. Bereken dan voor $p = 3$ en $q = -6$.

a $\frac{2}{p} - \frac{3}{2q}$

b $\frac{2}{p} \cdot \frac{3}{2q}$

c $\frac{2}{p} / \frac{3}{2q}$

Opgave 16

Herleid de formules tot een vorm waarin y is uitgedrukt in x en vereenvoudig de uitdrukking die je krijgt zoveel mogelijk. Neem aan dat $x \neq 0$ en $y \neq 0$. Bereken vervolgens de waarde van y als $x = 5$.

a $\frac{3}{x} = \frac{y}{4} + 1$

b $\frac{3}{x} = xy + 1$

c $\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$

Opgave 17

Een rechthoekig weiland met een oppervlakte van 6912 m^2 is 24 meter langer dan dat het breed is.

Hoe breed is dit weiland? Gebruik formules om je antwoord te vinden.

Practicum

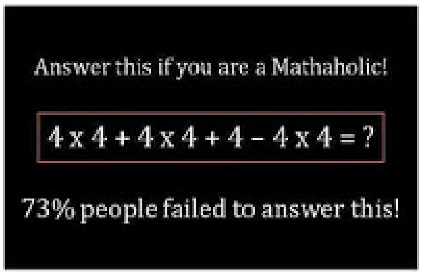
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het rekenen met breuken met variabelen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.3 Rekenvolgorde

Inleiding

Bij het rekenen moet je een zekere volgorde in acht nemen, anders krijg je onbedoelde uitkomsten. Die rekenvolgorde kun je echter beïnvloeden met haakjes. En soms is het ook weer handig om die haakjes weg te werken; bepaalde uitdrukkingen met variabelen kun je dan overzichtelijker maken.



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- de rekenvolgorde toepassen;
- haakjes wegwerken in uitdrukkingen met variabelen.

Voorkennis

- rekenen met getallen (met de hand en met de rekenmachine);
- rekenen met wortels;
- het begrip variabele en hoe je ermee kunt rekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je zit met drie vriend(inn)en op een terras en jij trakteert jullie vieren op een kop koffie met een appelpunt. De koffie kost € 2,25 per kop en een appelpunt is € 3,10.

a Je wilt even uitrekenen hoeveel dit samen gaat kosten, pakt een rekenmachine en toetst in $2{,}25 + 3{,}10 \cdot 4$. Wat gaat daar fout?

b Hoe moet dit worden ingevoerd op de rekenmachine (als één berekening)?

c Hoeveel moet je dus in totaal betalen?

Opgave V2

Je wilt de uitdrukking $8x - 4(5 - 2x)$ korter schrijven.

a Wat moet je dan als eerste doen?

b Schrijf deze uitdrukking zo kort mogelijk.

Uitleg 1

Bij het rekenen moet je de juiste rekenvolgorde hanteren:

- H: eerst doe je wat binnen haakjes staat;
- MW: vervolgens machten en wortels van links naar rechts;
- VD: daarna vermenigvuldigen en delen van links naar rechts;
- OA: ten slotte optellen en aftrekken van links naar rechts.

Je ziet dat machten en wortels gelijkwaardig zijn. Hetzelfde geldt voor vermenigvuldigen en delen en voor optellen en aftrekken. Met haakjes kun je de volgorde beïnvloeden: wat binnen haakjes staat doe je eerst.

In de rekenvolgorde zijn machtsverheffen en worteltrekken opgenomen.
Machtsverheffen: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.
Worteltrekken: $\sqrt{81} = 9$ want $9^2 = 81$.
Wortels kun je met elkaar vermenigvuldigen: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

Wortels kun je op elkaar delen: $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$.

Optellen en aftrekken kan pas als je de wortels hebt uitgerekend of benaderd.
Je kunt wel gelijksoortige wortels optellen of aftrekken. Bijvoorbeeld: $7\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

Haakjes gebruik je om de volgorde van het rekenen naar je hand te zetten. Als je eerst $3{,}10$ en $2{,}25$ wilt optellen en de uitkomst daarvan met 4 wilt vermenigvuldigen, dan schrijf je $(3{,}10 + 2{,}25) \cdot 4 = 21{,}40$. Als je de haakjes vergeet komt er heel wat anders uit!

Deze rekenvolgorde gebruik je ook bij het rekenen met variabelen.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.
Bereken zonder rekenmachine.

a $8 \cdot 5 - \frac{4}{2}$

b $40 - \frac{5+7}{3}$

c $\frac{6}{4+2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{8+4}$

d $\frac{5^3}{25} - 5^{6-4}$

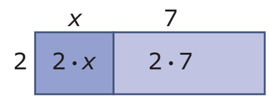
Uitleg 2

Bij het rekenen met variabelen wil je soms uitdrukkingen vereenvoudigen door haakjes weg te werken.

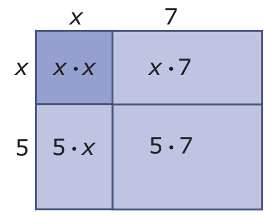
Figuur 1 laat zien dat:
$2 \cdot (x+7) = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2x + 14$. Het product van de factoren 2 en $x+7$ herleid je zo tot de tweeterm $2x + 14$.

Figuur 2 laat zien dat:
$(x+5) \cdot (x+7) = x \cdot x + 7 \cdot x + 5 \cdot x + 5 \cdot 7 = x^2 + 12x + 35$. Het product van de factoren $x+5$ en $x+7$ herleid je zo tot de drieterm $x^2 + 12x + 35$.

Een product bestaat uit factoren en een optelling (of aftrekking) uit termen. Je ziet in de eerste figuur dat de factor 2 wordt verdeeld over de twee termen van de factor $x+7$. In de tweede figuur gebeurt iets soortgelijks.



Figuur 1



Figuur 2

Figuur 3.2

Opgave 2

In **Uitleg 2** zie je hoe je in uitdrukkingen met variabelen de haakjes kunt wegwerken.

a Maak een rechthoek waarmee je laat zien dat:
$5(2x+3) = 10x+15$.

b Maak een rechthoek waarmee je laat zien dat:
$(2x+3)(x+4) = 2x^2+11x+12$.

c Werk van $x(2x+3)$ de haakjes weg.

Je kunt van $x(2x-3)$ de haakjes wegwerken door de uitdrukking te schrijven als $x(2x-3) = x(2x+{-3})$.

d Wat krijg je dan als je het antwoord zo ver mogelijk herleidt?

e Werk van $(x+5)(2x-3)$ de haakjes weg.

f Laat zien dat ${-(x-3)} = {-x}+3$.

Opgave 3

Werk de haakjes weg en herleid.

a $3(a+4b)$

b $3a(a-4b)$

c $(x+3)(x+5)$

d $(2x-4)(x-5)$

e $4(3p+2)+5(4-p)$

f $3(2p+4)-(4-p)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Rekenvolgorde:

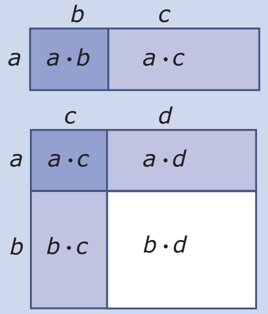
- H: eerst voer je uit wat binnen haakjes staat;
- MW: vervolgens machten en wortels van links naar rechts;
- VD: daarna vermenigvuldigen en delen van links naar rechts;
- OA: ten slotte optellen en aftrekken van links naar rechts.

Als je met variabelen rekent moet je de juiste rekenvolgorde hanteren.
Soms is het gemakkelijk om uitdrukkingen met variabelen te vereenvoudigen door **haakjes weg te werken**.

De figuren laten zien dat:

- $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$. Het product van de factoren a en $b+c$ herleid je tot de **tweeterm** $ab+ac$.
- $(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$. Het product van de factoren $a+b$ en $c+d$ herleid je tot de **vierterm** $ac+ad+bc+cd$.

Een product bestaat uit **factoren** en een optelling (of aftrekking) uit **termen**. Je ziet in de bovenste figuur dat de factor a wordt verdeeld over de twee termen van de factor $b+c$. In de onderste figuur gebeurt iets soortgelijks.



Figuur 3.3

Voorbeeld 1

Voer de volgende berekeningen uit zonder de rekenmachine te gebruiken. Controleer ze daarna met de rekenmachine.

- $2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{2+6}{2^3}$
- $\sqrt{40+10} \cdot \sqrt{2} - \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{2^5-12}$

Antwoord

- $2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{2+6}{2^3} =$

  $2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{8}{8} =$

  $8 + 6 - 4 \cdot 1 =$

  $14 - 4 = 10$
- $\sqrt{40+10} \cdot \sqrt{2} - \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{2^5-12} =$

  $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{16} \cdot \frac{5}{32-12} =$

  $\sqrt{100} - 4 \cdot \frac{5}{20} =$

  $10 - \frac{20}{20} = 10 - 1 = 9$

Opgave 4

Bereken zonder de rekenmachine te gebruiken.

a $4 \cdot 2^5 - \frac{400}{\sqrt{16}}$

b $\frac{(2^3+3^2)^2}{17} - \sqrt{64}$

c $\left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^2$

d $\frac{2^{1+\sqrt{25}}}{12-2 \cdot \frac{6}{3}}$

Opgave 5

Zet haakjes in de uitdrukkingen, zodat er een goede berekening staat.

a $3^4 / 8 - 5 = 27$

b $2^5 - \sqrt{256} / 2^3 = 2$

c $3 \cdot 3^2 / \sqrt{49} - 4 = 27$

Voorbeeld 2

Werk in de uitdrukkingen de haakjes weg en herleid.

- $3(5+2x)$
- $-2k(k-4)$
- $(p+3)(p-4)$
- $2(x+1)(x-1)$
- $2(q+1)-2(2-q)$
- $q(q+1)-(q-1)$

Antwoord

- $3(5+2x)=3\cdot 5+3\cdot 2x=15+6x$
- $-2k(k-4)=-2k(k+-4)=-2k\cdot k+-2k\cdot -4=-2k^2+8k$
- $(p+3)(p-4)=(p+3)\cdot(p+-4)=p\cdot p+-4\cdot p+3\cdot p+3\cdot -4=p^2-p-12$
- $2(x+1)(x-1)=2\left(x^2-x+x-1\right)=2\left(x^2-1\right)=2x^2-2$
- $2(q+1)-2(2-q)=2q+2-4+2q=4q-2$
- $q(q+1)-(q-1)=q^2+q-q+1=q^2+1$

Opgave 6

Bekijk van de uitdrukking $-(2x+4)^2+5x$ de uitwerkingen. Er is een fout gemaakt. Ontdek de fout en bereken vervolgens het juiste antwoord.

$$(-2x-4)^2+5x$$
$$(-2x-4)(-2x-4)+5x$$
$$4x^2+8x+8x+16+5x$$
$$4x^2+21x+16$$

Opgave 7

Werk in de uitdrukkingen de haakjes weg en herleid.

a $2x+3(4-x)$

b $(2k+3)(k+4)$

c $4x(x-y+5)$

Opgave 8

In het **practicum** kun je het wegwerken van haakjes oefenen met behulp van AlgebraKIT.

Oefen jezelf tot je (vrijwel) geen fouten meer maakt.

Verwerken

Opgave 9

Werk in de uitdrukkingen de haakjes weg en herleid.

a $2a(a+5)$

b $2a-(a+5)$

c $(2a-1)(a+5)$

d $3(2a-1)-4(a+5)$

Opgave 10

Welk getal moet er op de plaats van de puntjes staan?

a $8 \cdot -3 + ... = 12$

b $-3 \cdot \frac{3-8}{...} = 7{,}5$

c $\frac{3 \cdot 16}{8 - ...} = 4{,}8$

d $\frac{-19{,}6}{...} + 12{,}8 = 10$

Opgave 11

Herleid de formules tot de kortst mogelijke vorm. Neem aan dat $x \geq 0$.

a $y = 2x - 4(x - 3)$

b $y = (x + 3)(x + 4) + (1 - x)(1 + x)$

c $y = \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 1)$

d $y = 2x(x - 3) - (x - 1)^2$

Opgave 12

Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{15}{3} + 2 - (1 + 2)^2$

b $\frac{15}{3+2} - 1 + 2^2$

c $\frac{15}{3} + 2 \cdot (1 + 2)^2$

d $\frac{15}{3+2} - \sqrt{5 + 2^2} = \frac{15}{5} - \sqrt{9} = 3 - 3 = 0$

Opgave 13

Bereken.

$\frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt{600}}{\sqrt{2 + 2^6}}$

Toepassen

Opgave 14: Rekenpuzzle

Bereken.

$$\left(\left(\sqrt{2} + 1\right)^7 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^7\right)^2 - \left(\left(\sqrt{2} + 1\right)^7 - \left(\sqrt{2} - 1\right)^7\right)^2$$

Testen

Opgave 15

Bereken.

a $\frac{3^4 - 1}{2^4} + 4 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

b $\frac{3^4 - 1}{2^4 + 4} - \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

Opgave 16

Werk de haakjes weg en schrijf zo kort mogelijk.

a $2(p+3)-4(4-2p)$

b $(x+3)(4-2x)$

c $(2x+3)^2-4x(x-3)$

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het wegwerken van haakjes**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.4 Eenheden

Inleiding

De meter (symbool m) is de eenheid voor lengte in het ‘Système international d'unités’ (SI). Hij is sinds 1983 gedefinieerd als de afstand die licht in 1/299792458 seconde in vacuüm aflegt. De meter is een van de zeven SI-basiseenheden en staat aan de basis van het metrieke stelsel. Rechtstreeks van de meter afgeleid zijn de oppervlakte-eenheid m^2 (vierkante meter) en de volume-eenheid m^3 (kubieke meter). Zo zijn er ook eenheden voor massa, tijd, temperatuur, elektrische stroom, hoeveelheid stof en lichtsterkte.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- opnieuw werken met eenheden (met name voor lengte, massa, tijd en temperatuur);
- opnieuw (samengestelde) eenheden omrekenen;
- werken met grote getallen en de wetenschappelijke notatie.

Voorkennis

- de eenheden voor lengte, oppervlakte en inhoud, voor tijd, temperatuur en massa;
- de voorvoegsels voor eenheden zoals milli-, centi-, deci-, deca-, hecto- en kilo-;
- eenheden omrekenen.

Verkennen

Opgave V1

De standaard lengtemaat is de meter.

a Wat betekent ‘centimeter’? Hoeveel centimeter gaan er in 1 meter?

b Wat betekent ‘hectometer’? Hoeveel meter gaan er in 1 hectometer?

c Hoeveel cm is 1 hm?

Een meter is de afstand die licht in $\frac{1}{299792458}$ seconde in vacuüm aflegt.

d Hoeveel meter legt het licht in 1 seconde in vacuüm af? Hoeveel kilometer is dat?

Opgave V2

De standaard oppervlaktemaat is de vierkante meter (m^2).

a Waarom is 1 m^2 gelijk aan 100 dm^2?

De standaard inhoudsmaat is de kubieke meter (m^3), ook wel ‘kuub’ genoemd.

b Waarom is 1 m^3 gelijk aan 1000 dm^3?

Uitleg 1

Er bestaan standaardmaten voor onder andere lengte, tijd, massa en temperatuur. Zo is meter de standaardmaat voor de lengte en gram de standaardmaat voor de massa. Elke meter van een meetlat of een rolmaat moet even groot zijn als de standaardmeter, elke gram van een gewicht moet even groot zijn als de standaardgram, enzovoort. Voor veelvouden van een standaardmaat, of delen van een standaardmaat, worden voorvoegsels gebruikt. In de tabel zie je de bekendste.

hoeveelheid	voorvoegsel	symbool
duizend = 1000	kilo	k
honderd = 100	hecto	h
tien = 10	deca	da
eenheid = 1		
tiende = $0{,}1$	deci	d
honderdste = $0{,}01$	centi	c
duizendste = $0{,}001$	milli	m

Tabel 4.1

Dus:

- $6{,}3$ kg = $6{,}3 \times 1000$ g = 6300 g
- 1 liter = $100 \times 0{,}01$ L = 100 cL
- 12 dam = 12×10 m = 120 m = 120×100 cm = 12000 cm

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe het eenhedenstelsel in elkaar zit en welke voorvoegsels je gebruikt bij veelvouden of delen daarvan. Het gaat dan steeds om veelvouden van 10 of om het delen door 10. Reken om.

a 1250 m = ... hm

b $3{,}14$ g = ... mg

c 12 g = ... kg

d $4{,}5$ daL (decaliter) = ... mL

e $7{,}2$ km = ... cm

Opgave 2

De omtrek van de aarde is ongeveer 40000 km. Je woont 5 km van school en daar fiets je een kwartier over.

Hoeveel dagen zou je in dit tempo moeten fietsen om dezelfde afstand af te leggen als de omtrek van de aarde?

Opgave 3

Sommige computers hebben een harde schijf met een opslagruimte van $1{,}2$ TB. Een TB (Terabyte) is 1 biljoen byte, een GB (Gigabyte) is 1 miljard byte en een MB is 1 miljoen byte (ongeveer). Ga ervan uit dat foto's een bestandsgrootte hebben van 8 MB.

Hoeveel foto's kun je dan op een harde schijf van $1{,}2$ TB plaatsen?

Uitleg 2

Grote getallen zoals 135 miljard = 135000000000 zijn door het grote aantal cijfers moeilijk te lezen. Je schrijft zo'n getal daarom als volgt:

$135000000000 = 1{,}35 \cdot 100000000000 = 1{,}35 \cdot 10^{11}$.

Ook kleine getallen zoals 32 miljoenste = 0,000032 zijn door het grote aantal cijfers moeilijk te lezen. Je schrijft zo'n getal daarom als volgt:

$0{,}000032 = 3{,}2 \cdot 0{,}00001 = 3{,}2 \cdot \frac{1}{100000} = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$.

Deze manier van opschrijven van getallen noem je de wetenschappelijke notatie. Het getal dat voor de macht van 10 staat is altijd minstens 1 en kleiner dan 10.

$$0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{10^0}{10^1} = 10^{-1}$$
$$0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{10^0}{10^2} = 10^{-2}$$
$$0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{10^0}{10^3} = 10^{-3}$$
enz.

Figuur 4.2

Opgave 4

Schrijf de getallen in de wetenschappelijke notatie en schrijf ze met het symbool < in de juiste volgorde.

a 7650000, 897600000, 659300

b 0,0000891; 0,1120002; 0,034

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Enkele bekende **standaardmaten** zijn:

- de meter voor lengte;
- de gram voor massa;
- de seconde voor tijd;
- de liter voor volume.

Voor veelvouden van een standaardmaat, of delen van een standaardmaat, worden voorvoegsels gebruikt, zie tabel. Maar er bestaan meer voorvoegsels, bijvoorbeeld ‘Mega-’ (M) voor miljoen, ‘Giga-’ (G) voor miljard, ‘Tera-’ (T) voor biljoen. En ook ‘micro-’ (μ) voor miljoenste, ‘nano-’ voor miljardste, enzovoort.
En er zijn meer standaardmaten.

hoeveelheid	voorvoegsel	symbool
duizend = 1000	kilo	k
honderd = 100	hecto	h
tien = 10	deca	da
eenheid = 1		
tiende = 0,1	deci	d
honderdste = 0,01	centi	c
duizendste = 0,001	milli	m

Tabel 4.2

Getallen met veel nullen schrijf je vaak in de **wetenschappelijke notatie**. Je schrijft een groot getal dan in de vorm $a \cdot 10^n$ en een klein getal in de vorm $a \cdot 10^{-n}$, waarbij $1 \leq a < 10$ en n een positief, geheel getal is.

- $4200000 = 4{,}2 \cdot 10^6$
- $0{,}00042 = 4{,}2 \cdot 10^{-4}$

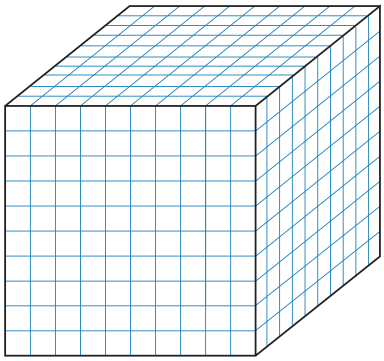
Bij het **rekenen met machten** (ook die van 10) moeten bij vermenigvuldigen de exponenten worden opgeteld en bij delen de exponenten van elkaar worden afgetrokken.

$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$$
$$\frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$$

Figuur 4.3

Voorbeeld 1

Je ziet een kubus waarvan alle ribben 1 meter lang zijn. De voorkant heeft een oppervlakte van 1 m^2 en de inhoud (het volume) van de kubus is 1 m^3.
Hoeveel dm^2 bedraagt de oppervlakte van de kubus? En hoeveel liter is de inhoud van deze kubus?



Figuur 4.4

Antwoord

De kubus heeft zes gelijke vierkante grensvlakken (zijvlakken) die elk 10 dm bij 10 dm zijn, dus elk een oppervlakte van 100 dm^2 hebben. De totale oppervlakte is daarom 600 dm^2.
Een liter is een kubieke decimeter: 1 liter = 1 dm^3. De inhoud van de kubus is $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ dm^3 en dus ook 1000 liter.

Opgave 5

Reken om.

- **a** 1250 dm^2 = ... m^2
- **b** 1250 dm^3 = ... m^3
- **c** 3,14 m^2 = ... cm^2
- **d** 3,14 m^3 = ... cm^3
- **e** 12 L = ... cm^3
- **f** 250 mm^3 = ... cL

Opgave 6

Een literpak yoghurt heeft de vorm van een rechthoekig blok met een bodem van 7 bij 7 cm en een hoogte van 19,5 cm.

- **a** Gaat er inderdaad 1 liter yoghurt in zo'n pak? Licht je antwoord toe.
- **b** Hoeveel cm^2 karton is er ongeveer nodig voor het pak yoghurt?

Voorbeeld 2

Bij snelheid worden de samengestelde eenheden km/h of m/s gebruikt. Regelmatig moet je omrekenen van km/h naar m/s of omgekeerd:

- 1 km/h = 1000 meter /3600 s = $\frac{1}{3,6}$ m/s
- 1 m/s = 3600 m/h = 3,6 km/h

Een auto die in de bebouwde kom 50 km/h rijdt, heeft dus een snelheid van $\frac{50}{3,6} \approx 13,89$ m/s.

Een deeltje dat met 120 m/s voortbeweegt, heeft een snelheid van $120 \cdot 3,6 = 432$ km/h.

Opgave 7

Op 16 augustus 2009 liep Usain Bolt op de 100 meter een wereldrecord van 9,58 seconden. Op dat moment was het wereldrecord 100 meter voor vrouwen 10,49 seconden en stond het sinds 16 juli 1988 op naam van Florence Griffith-Joyner.

- **a** Hoeveel meter zou Usain Bolt op de finishlijn hebben voorgelegen als hij tegen Florence had gelopen tijdens hun recordloop?
- **b** Hoeveel km/h liep Usain Bolt gemiddeld?

Opgave 8

Met behulp van een regenmeter bepaal je hoeveel mm water per m^2 er in een bepaalde tijdsperiode is gevallen. Er is in drie uur tijd op een bepaalde plaats 42 mm water per m^2 gevallen.

a Hoeveel liter water is dat per m^2?

b Een open cilindervormige regenbak heeft een diameter van $0{,}8$ meter. Hoeveel liter water is daar gemiddeld per uur bijgekomen?

Opgave 9

De soortelijke massa (of 'dichtheid') van een bepaalde stof is de massa per dm^3 of per cm^3. Zo heeft gewoon water een soortelijke massa van $0{,}998$ kg/dm^3.

a Hoeveel g/cm^3 is de soortelijke massa van water?

b Hoeveel is de massa van 1 m^3 water? (Hoeveel kilogram 'weegt' 1 m^3 water?)

c Goud heeft een soortelijke massa van $19{,}2$ kg/dm^3. Een gouden ring heeft een volume van $0{,}4$ mL. Wat is de massa van deze ring?

Voorbeeld 3

Een bepaald soort bacterie heeft een massa van $2{,}4 \cdot 10^{-5}$ gram. Op een plant bevinden zich $3{,}2$ miljoen van deze bacteriën. Wat is de totale massa van die bacteriën? En hoeveel van die bacteriën wegen samen 1 kg?

Antwoord

De totale massa van de bacteriën op de plant is ongeveer:
$2{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{6} = 7{,}68 \cdot 10^{1} \approx 77$ gram.

Om 1 kg van die bacteriën te krijgen, moet je er

$\frac{1 \cdot 10^3}{2{,}4 \cdot 10^{-5}} \approx 0{,}42 \cdot 10^{8} = 4{,}2 \cdot 10^{7}$ hebben.

Opgave 10

Reken met getallen in de wetenschappelijke notatie.

a Een voetbalveld is ongeveer 102 m bij 64 m. Bereken hoeveel mm^2 de oppervlakte van een voetbalveld ongeveer is. Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie.

b De afstand tot de dichtstbijzijnde ster bedraagt ongeveer $4{,}0 \cdot 10^{13}$ km. Hoelang doet een raket, die met een snelheid van $5{,}2 \cdot 10^{4}$ km/h voortbeweegt, over deze afstand? Geef je antwoord in duizenden jaren.

c In de buurt van de evenaar kan met zonnecellen ongeveer $1{,}5 \cdot 10^{7}$ W/km^2 (W = watt) aan elektrisch vermogen worden opgewekt. De totale vermogensbehoefte van de mensheid is geschat op ongeveer 10 TW (1 TW (TeraWatt) = 10^{12} W). Hoe groot is het gebied dat met zonnecellen zou moeten worden bedekt als je uitsluitend door middel van zonne-energie in die vermogensbehoefte wilt voorzien?

Verwerken

Opgave 11

Reken om.

a 42500 m = ... km

b 42500 cm^2 = ... m^2

c 4,25 L = ... cm^3

d 4,25 L = ... cL

Opgave 12

Schrijf in de wetenschappelijke notatie.

a 123 miljoen

b 614000000000

c 0,00001496 miljard

d 0,00000000000042

Opgave 13

Reken om.

a 3,6 kg/m^3 = ... g/L

b 12 g/cm^3 = ... kg/L

c 120 km/h = ... m/s

d 12 m/s = ... km/h

Opgave 14

Kubieke centimeter wordt ook wel afgekort tot cc. Van een scooter van 50 cc heeft de zuiger een totale cilinderinhoud van 50 cm^3.

a Hoeveel liter is dat?

b Hoeveel cc heeft een motor met een totale cilinderinhoud van 0,25 L?

c Een automotor heeft soms wel een cilinderinhoud van 2 L. Hoeveel cc is dat?

Opgave 15

Veel vervoer gebeurt per container. Als je veel te vervoeren of op te bergen hebt kun je containers huren. Er bestaan verschillende typen en afmetingen. Dit zijn de specificaties van een 20ft-zeecontainer:
inhoud: 33,2 m^3.
afmetingen ($l \cdot b \cdot h$ in cm) inwendig: $589 \cdot 234 \cdot 239$.
deuropening ($b \cdot h$ in cm): $233 \cdot 228$.

a Leg uit waarom 1 ton eigenlijk 1 Megagram zou moeten heten.

b De container heeft een massa van 2260 kg. Hoeveel ton is dat?

De container met inhoud mag maximaal 24000 kg wegen.

c Hoeveel ton aan inhoud kun je in zo'n container kwijt? Hoeveel 2-literpakken bronwater is dat (een liter bronwater heeft een massa van 1 kg)?

Opgave 16

De gemiddelde afstand van de aarde tot de zon wordt de astronomische eenheid AE genoemd. 1 AE is ongeveer 150 miljoen kilometer.

a De planeet Mars heeft een gemiddelde afstand van 228 miljoen kilometer van de zon. Hoeveel AE is dat?

b Neptunus is de planeet in ons zonnestelsel die het verst van de zon af staat, gemiddeld maar liefst ongeveer dertig keer zo ver als de aarde. Hoeveel kilometer staat Neptunus ongeveer van de zon af? Geef je antwoord in miljoenen kilometer.

De lichtsnelheid is ongeveer $3 \cdot 10^5$ km/s.

c Hoelang is het zonlicht onderweg naar de aarde?

Een lichtjaar is de afstand die het licht in 1 jaar aflegt.

d Hoeveel kilometer is dat?

e Hoeveel AE is dat?

Alpha Centauri is de helderste ster in het sterrenbeeld Centaur (Centaurus). Deze ster bevindt zich het dichtst bij ons zonnenstelsel. De afstand tot de zon bedraagt $4{,}36$ lichtjaar.

f Hoeveel kilometer is Alpha Centauri van onze zon verwijderd? Neem aan dat het licht met een snelheid van 300000 km per seconde gaat.

Toepassen

Opgave 17: Leontine

Leontine is 1 miljard seconden oud.

Zou ze bij jou in de klas kunnen zitten?

Opgave 18: Snelste route

Je moet van punt A naar punt B. Je kunt twee verschillende routes nemen. Route I is 30 km lang. Dit is korter dan route II, maar hier geldt een maximum snelheid van $22{,}22...$ m/s. Op route II geldt een maximum snelheid van $27{,}78...$ m/s. Route II is precies 5 km langer dan route I. Welke route kun je het beste nemen als je haast hebt?

Testen

Opgave 19

Reken om.

a $2{,}5$ km = ... dam

b 55 µm = ... mm

c 15 m^3 = ... L

d 12 hectare (hm^2) = ... m^2

Opgave 20

Sven Kramer reed op 17 november 2007 de 5 km schaatsen in 6:03,32. Dit betekent dat hij er 6 minuten en 3,32 seconden over deed.

a Met hoeveel km/h schaatste hij gemiddeld?

Een cheetah (jachtluipaard) haalt een topsnelheid van wel 108 km/h. Dat houdt hij echter niet langer dan zo'n 500 m vol.

b Hoeveel seconden houdt de cheetah deze snelheid vol?

Opgave 21

Een ijzeren staaf heeft een lengte van 1,20 m en een vierkante doorsnede van 5 cm bij 5 cm. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

a Hoeveel kg weegt deze staaf?

De staaf wordt verchroomd, dus aan alle kanten van een laag chroom voorzien. Die laag chroom is overal 1 mm dik. De staaf wordt hierdoor 1800 gram zwaarder.

b Bereken met behulp hiervan de soortelijke massa van chroom.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het omrekenen van eenheden van lengte, oppervlakte en volume en het gebruik van de wetenschappelijke notatie**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Rekenen en algebra**. Het gaat daarin vooral over het rekenen, ook met letters en eenheden. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- getal, decimale stelsel — variabele — gelijksoortige termen, herleiden
- breuk, teller en noemer — k.g.v. (kleinste gemeenschappelijke veelvoud)
- rekenvolgorde — haakjes
- eenheid en voorvoegsel — de belangrijkste eenheden van lengte, oppervlakte, inhoud, massa en tijd — samengestelde eenheid — wetenschappelijke notatie

Activiteitenlijst

- basisbewerkingen met getallen en het decimale stelsel — basisbewerkingen met variabelen
- rekenen met breuken, ook met variabelen — breuken vereenvoudigen
- rekenen in de juiste volgorde, ook met variabelen — haakjes wegwerken
- werken met eenheden, eenheden omrekenen — samengestelde eenheden omrekenen — rekenen met de getallen in de wetenschappelijke notatie

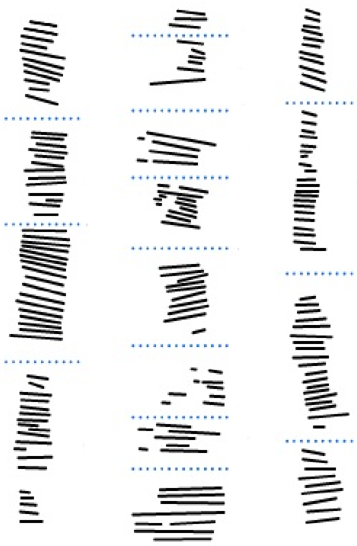
Achtergronden

Rekenen doet de mens al zolang er getallen bestaan en dat is al heel lang: de eerste tekenen dat er met getallen werd gewerkt is het **Ishango-beentje**, een stukje bot dat ongeveer 22.000 jaar oud is en kerfjes heeft die duiden op getallen.

Volgens Wikipedia:

De kerven zijn aangebracht in drie kolommen:

- Linkerkolom:
  Oplopend, de priemgetallen van tussen 10 en 20, zijnde 11, 13, 17, 19.
  De som van deze kolom is 60.
- Middenkolom:
  De getallen 3, 6, 4, 8, 10, 5(?),5 ,7.
  De som van deze kolom is 48.
- Rechterkolom:
  Getallen die 1 eenheid van een tiental verschillen, nl. 11, 21, 19 en 9.
  De som van deze kolom is 60.



Figuur 5.1

Testen

Opgave 1

Bereken.

a $\frac{42}{4+\frac{6}{2}} - 5$

b $\frac{9 \cdot 6+6}{(3+2) \cdot 4}$

c $\frac{4^3}{2 \cdot 2^3}$

d $\frac{\sqrt{2^3 \cdot 3^2}}{\sqrt{2^3 - 2 \cdot 3}}$

Opgave 2

Vereenvoudig de uitdrukkingen.

a $4p^2 + 6p - p(p+3)$

b $\left(x^2-3\right)\left(x^2+3\right) - x^3(x+2)$

c $(p+1)^2 - (p-1)(p+1)$

d $(\text{-}2a)^3 \cdot 3b^2 - 6ab \cdot \text{-}a^2b$

Opgave 3

Schrijf de uitdrukkingen als één breuk.

a $\frac{4}{a} + \frac{5}{b}$

b $\frac{4}{10}p \cdot \frac{5p}{8p^2}$

c $\frac{2}{3k} + \frac{3}{k} \cdot \frac{5}{k}$

d $\frac{\text{-}p}{3q} \Big/ \frac{2}{5q}$

Opgave 4

Herleid de uitdrukkingen tot y is uitgedrukt in x.

a $x - 2y = 6$

b $2xy = 13$

c $\frac{x}{2y} = 12$

d $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 1$

Opgave 5

Reken om.

a 80 km/h = ... m/s

b 32 m/s = ... km/h

c 320 cm^3 = ... L

d 0,03 g/cm^3 = ... kg/L

Opgave 6

Bereken als $p = 4$, $q = -5$ en $r = 3$.

a $\frac{3p^2q}{-4pqr}$

b $(-2p)^4 + \frac{6p^6}{-2p^2}$

c $4q(2r + p) - 2p(1 + 2q)$

Opgave 7

Op de 5000 meter langebaanschaatsen behaalde Nederland op de Olympische Spelen van 2014 alle drie de medailles. Eerste was Sven Kramer in 6:10,76, dus hij deed 6 minuten en $10{,}76$ seconden over deze afstand. Tweede was Jan Blokhuijsen in 6:15,71.

a Bereken van beide rijders de gemiddelde snelheid in km/h.

b Stel dat beiden tegen elkaar zouden hebben gereden. Hoeveel meter zou Sven Kramer dan voor hebben gelegen op Jan Blokhuijsen toen hij als eerste over de finish kwam?

Opgave 8

Je leest dat de aarde in 23 uur, 56 minuten en 04 seconden om zijn Noord-Zuid-as draait en dat op de evenaar de omtrek van de aarde $4{,}0075 \cdot 10^7$ m is.
Met welke snelheid draai jij dan om de aardas als je op de evenaar staat?

Opgave 9

Je legt een terras aan met een totale oppervlakte van 34 m^2. Het terras wordt belegd met stenen met zand er onder. Dit zandbed krijgt overal een diepte van 20 cm. Vanwege het inklinken van het zand moet je 15% extra zand meenemen. Je stenen zijn rechthoekige blokken van 30 cm bij 15 cm. Vanwege het breukverlies (op de randen van het terras gebruik je stukken van stenen en dan verlies je altijd wel wat) neem je 10% extra stenen. Je maakt in je terras ook een vijvertje: een kunststofbak van 1 m bij $1{,}5$ m met een diepte van 40 cm.

a Hoeveel van die stenen ga je bestellen?

b Hoeveel kuub zand bestel je voor het zandbed?

c Hoeveel liter water gaat er maximaal in de vijver?

Toepassen

Opgave 10: Harmonisch gemiddelde

Je vliegt heen en weer van Amsterdam naar Moskou. Op de heenreis is je gemiddelde snelheid 900 km/uur, op de terugreis is je gemiddelde vliegsnelheid 960 km/uur vanwege de weersomstandigheden. In beide gevallen is de gevlogen afstand hetzelfde.

a Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Wikipedia: Harmonisch gemiddelde: ‘ De gemiddelde snelheid van twee ritten over dezelfde afstand, gereden met verschillende maar constante snelheid, is het harmonisch gemiddelde van de beide snelheden. Als de heenreis wordt gereden met 100 km/uur en de terugreis met 120 km/uur, is de gemiddelde snelheid van de totale rit het harmonisch gemiddelde van de twee snelheden, 109 km/uur. Als in plaats van de lengte, de tijdsduur van de ritten gelijk is, dient men het rekenkundig gemiddelde te gebruiken.'

b Laat zien dat deze uitspraak correct is.

Examen

Opgave 11: Zuinig rijden

Tijdens rijlessen leer je om in de auto bij 20 km per uur van de eerste naar de tweede versnelling te schakelen. Daarna ga je bij 40 km per uur naar de derde versnelling, bij 60 km per uur naar de vierde en ten slotte rond de 90 km per uur naar de vijfde. Iedere versnelling heeft een ideale snelheid. Maar is dat ook de zuinigste snelheid? Om dit te onderzoeken heeft men met dezelfde auto steeds met andere snelheden en in een andere versnelling telkens hetzelfde traject afgelegd en daarbij steeds de literafstand L (de afstand die je met 1 liter benzine kunt afleggen) gemeten. Een deel van de resultaten staat in de tabel.

literafstand bij 80 km per uur			
versnelling	3	4	5
literafstand L (km)	16,92	19,63	21,68

Tabel 5.1

Je ziet dat je bij 80 km per uur het beste in de vijfde versnelling kunt rijden, omdat je dan 21,68 km kunt afleggen met 1 liter benzine.

Je rijdt op dit traject met een snelheid van 80 km per uur. Je begint met een volle tank van 35,0 liter benzine en je rijdt die tank helemaal leeg.

a Bereken hoeveel km je in de vijfde versnelling meer kunt afleggen dan in de vierde versnelling.

In de volgende tabel staat de literafstand L voor verschillende snelheden in de vijfde versnelling.

literafstand in de vijfde versnelling						
snelheid v (km/h)	40	50	60	70	80	90
literafstand L (km)	29,03	27,19	25,35	23,51	21,68	19,84

Tabel 5.2

Je legt in de vijfde versnelling een traject van 300 km af. Als je 80 km per uur rijdt, heb je deze afstand sneller afgelegd dan wanneer je 60 km per uur rijdt. Maar je verbruikt wel meer benzine.

b Bereken hoeveel liter benzine je meer verbruikt als je de afstand met een snelheid van 80 km/h aflegt. Geef je antwoord in hele liters nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde A in 2011, eerste tijdvak, gedeelte)

Opgave 12: Nieuwe tijden

Swatch, het trendy Zwitserse horlogemerk, heeft een nieuw tijdsysteem bedacht naast het huidige tijdsysteem. In ons gewone tijdsysteem geven we de tijd aan in uren, minuten en seconden. Het nadeel hierbij is dat het niet overal op aarde even laat is. Daarom moet je goed nadenken hoe laat je vanuit Nederland moet bellen om bijvoorbeeld iemand in New York tijdens zijn lunch te bereiken. In dat nieuwe tijdsysteem is het overal op de wereld even laat. Het nieuwe systeem werkt als volgt. Een etmaal van 24 uur wordt verdeeld in 1000 eenheden, beats genaamd. Daarbij heeft men afgesproken dat 000 beat valt op middernacht in Zwitserland, waar Swatch vandaan komt. Wanneer het daar 570 beat is, is het overal op de wereld 570 beat. De notatie in beats is als volgt: @570.

Figuur 5.2

a Toon aan dat 1 beat $86{,}4$ seconden duurt.

De aarde is verdeeld in 24 verschillende tijdzones. Deze zones zijn vastgelegd ten opzichte van de nulmeridiaan die door Greenwich in Groot-Brittannië loopt. Zo ligt Zwitserland net als Nederland in tijdzone GMT+1. Dat wil zeggen dat het hier 1 uur later is dan op de nulmeridiaan. De stad New York, waar het 5 uur vroeger is dan op de nulmeridiaan, ligt in tijdzone GMT−5.

Je neemt vanuit Taiwan om @470 contact op met iemand in Nederland.

b Bereken in minuten nauwkeurig hoe laat het dan in Nederland is volgens het gewone tijdsysteem.

In de figuur zie je een horloge dat de tijd weergeeft volgens beide tijdsystemen.

c Van welke tijdzone geeft dit horloge de tijd aan? Licht je antwoord toe.

Met een formule kan elk tijdstip in Zwitserland (in uren, minuten en seconden) worden omgerekend naar beats. Deze formule is van de volgende vorm:

$B = a \cdot U + b \cdot M + c \cdot S$

Hierbij zijn U, M en S respectievelijk de aantallen uren, minuten en seconden in het huidige tijdsysteem en B de bijbehorende tijd in beats.

d Bereken in vier decimalen nauwkeurig de waarden van a, b en c.

(bron: examen havo wiskunde A in 2002, eerste tijdvak)

2

Tabellen en grafieken

2.1 Tabellen

Inleiding

Tabellen kom je overal tegen. Sla maar eens een krant op, bekijk het TV-journaal, of lesmateriaal van veel andere vakken. Een geweldige bron voor allerlei tabellen is bijvoorbeeld het Centraal Bureau voor de Statistiek, het CBS. Het gaat er steeds om informatie in getallen beknopt en overzichtelijk weer te geven. Maar je moet er wel zorgvuldig en kritisch mee om leren gaan... In dit onderdeel bekijk je verschillende soorten tabellen en leer je ze interpreteren.

Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- het verschil tussen absolute en relatieve gegevens herkennen;
- tabellen interpreteren.

Voorkennis

- in een tabel een kolom van een rij onderscheiden;
- een beetje verstandig rekenen.

Verkennen

Opgave V1

Via internet kun je tabellen zoeken. Google helpt je natuurlijk, maar de sites van de meeste instanties en/of bedrijven kun je gemakkelijk zelf vinden.

Ga naar **www.cbs.nl** (de site van het CBS).

a Zoek een tabel met het verloop van de bevolking van Nederland in de jaren 1900 - heden.

b Zoek op de site van het CBS een tabel met de prijsindexen van bestaande koopwoningen van je eigen provincie. Welk jaar was de index 100? En wat betekent dat? Hoeveel bedraagt de prijsindex nu?

c Kies op de site van het CBS voor THEMA-CIJFERS-BEVOLKING. Aan welke rij(en) kun je zien dat Nederlanders steeds ouder worden (vergrijzing)?

Opgave V2

Een verzekeraar biedt een autoverzekering aan. Hier vind je de bonus/malus-regeling voor de berekening van de premie voor deze autoverzekering. Ga uit van een basispremie van € 1000,00. Een automobilist die deze verzekering afsluit start op trede 4.

Bonus/Malus tabel			Nieuwe B/M-trede na			
Schadevrije jaren	B/M-trede	Korting / toeslag in %	0 schadegevallen per jaar	1 schadegeval per jaar	2 schadegevallen per jaar	3 schadegevallen per jaar
11 of meer	15	80%	15	12	8	4
10	14	80%	15	11	7	3
9	13	80%	14	10	6	3
8	12	80%	13	9	5	2
7	11	75%	12	7	4	2
6	10	70%	11	6	4	1
5	9	65%	10	5	3	1
4	8	60%	9	4	3	1
3	7	55%	8	4	2	1
2	6	50%	7	4	2	1
1	5	45%	6	3	1	1
0	4	35%	5	2	1	1
-1	3	20%	4	2	1	1
-2	2	+ 10%	3	1	1	1
-3	1	+ 20%	2	1	1	1
Na 4 of meer schade in één verzekeringsjaar wordt de bonus/malus-trede 1.						

Figuur 1.2

a Wat betekent bonus/malusregeling en hoeveel procent korting krijg je als je op bonus/malustrede 6 terecht bent gekomen?

b Bij welke trede(n) krijg je geen korting maar moet je extra betalen? En hoeveel jaar moet je minimaal schadevrij rijden om korting te krijgen, als je op trede 1 zit?

c Welke kolom(men) bevatten relatieve gegevens?

d Welke kolom(men) bevatten absolute gegevens?

Uitleg

Op de website van het CBS kun je cijfers vinden over de hoeveelheden afval die er jaarlijks door de Nederlandse gemeenten wordt ingezameld. Bekijk het deel van de tabel dat hier wordt weergegeven. De jaren (jaartallen) staan in de derde rij (horizontaal), per jaartal is er een kolom (verticaal) waarin de onderzoeksgegevens staan.

Gemeentelijke afvalstoffen; hoeveelheden															
regio: Nederland			perioden												
			2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
gemeentelijk afval	totaal	x 1000 ton	8986	8990	9043	8891	9120	9158	9166	9301	9211	9059	8860	8951	8670
	huishoudelijk restafval		3935	3958	3938	3900	3933	3958	3961	3964	3947	3878	3751	3734	3657
	grof huishoudelijk restafval		794	793	754	707	698	716	716	683	686	640	615	600	540
	verbouwings restafval		98	98	95	107	108	110	105	108	98	88	75	79	71
	GFT		1457	1404	1406	1340	1407	1362	1296	1315	1289	1302	1255	1297	1304

Figuur 1.3

In de onderste vijf rijen vind je afval dat door huishoudens wordt geproduceerd in duizenden tonnen per jaar (1 ton = 1000 kilogram). Elke rij met onderzoeksgegevens is een bepaalde categorie afvalstoffen. Op de website van het **CBS** kun je zo'n tabel volledig en met toelichting terugvinden. Regelmatig veranderen ze echter in naam en vormgeving.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de tabel van de gemeentelijke afvalstoffen in de loop van de jaren. Deze tabel komt van de site van het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek).

a Hoeveel kilogram afval haalden de Nederlandse gemeenten in 2000 op?

b Met hoeveel kilogram is dit in 2001 toegenomen?

c Met hoeveel kilogram was de GFT-afvalproductie in Nederland in 2006 afgenomen ten opzichte van het jaar 2000?

Opgave 2

In klas 4Ha is onderzocht welke kleur ogen de leerlingen hebben.

	bruin	zwart	blauw	totaal
jongens	7	3	2	12
meisjes	7	7	4	18
totaal	14	10	6	30

Tabel 1.1

a Hoeveel procent van de meisjes heeft blauwe ogen? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

b Hoeveel procent van de leerlingen met blauwe ogen is een meisje? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het is belangrijk om informatie in getallen beknopt en overzichtelijk weer te geven. Maar je moet er wel zorgvuldig en kritisch mee om leren gaan.

Een **tabel** is een getallenoverzicht in **rijen** en **kolommen**. Hier hebben de kolommen een **opschrift**, evenals de tabel zelf. De kolommen 1 en 2 bevatten **absolute getallen**; werkelijke aantallen die door tellen tot stand komen. Kolom 3 bevat **relatieve getallen**; het aantal mannen ten opzichte van (in relatie tot) het aantal vrouwen. Met behulp van die tabel kun je uitrekenen hoeveel mannen en hoeveel vrouwen er in een bepaald jaar in Deventer woonden.

Bevolking Deventer

jaartal	aantal personen	mannen per 100 vrouwen
2008	97328	98,1
2009	97904	97,6
2010	98541	98,1
2011	98779	98,2
2012	98673	99,1
2013	98558	99,0
2014	98356	98,3
2015	98540	97,7
2016	98869	98,0
2017	99295	97,7
2018	99653	97,8
2019	99957	97,8

telling 1-1-20XX

Tabel 1.2

Voorbeeld 1

Deze tabel geeft informatie over de bevolking van gemeente A. De opschriften per kolom geven de betekenis van de getallen weer.

1. Welke kolom(men) bevat(ten) relatieve gegevens?
2. Hoeveel mannen telde A in 2015?
3. Hoe groot was de oppervlakte van A in 2015?
4. Waaraan zie je dat A in 2015 is uitgebreid met een stuk landelijk gebied en hoe groot was de uitbreiding?

Bevolking A			
jaartal	aantal personen	mannen per 100 vrouwen	mensen per km^2
2008	63246	98,1	532
2009	62541	97,6	525
2010	63202	98,0	532
2011	63993	98,2	538
2012	65480	99,2	550
2013	66405	99,0	559
2014	68004	98,8	572
2015	79266	98,1	493
telling 1-1-20XX			

Tabel 1.3

Antwoord

1. Kolommen 3 en 4 bevatten relatieve gegevens.
2. Per 100 vrouwen waren er $98{,}1$ mannen, dus $198{,}1$ personen: $\frac{79266}{198{,}1} = 400{,}13$. Dus waren er $98{,}1 \cdot 400{,}13 = 39253$ mannen.
3. In 2015 waren er 79266 mensen in A en 493 mensen per km^2.
   Dus had A een grondgebied van $\frac{79266}{493} = 160{,}783$ km^2.
4. In 2014 waren er 68004 mensen in A en 572 mensen per km^2.
   Dus had A toen een grondgebied van $\frac{68004}{572} = 118{,}888$ km^2.
   In 2015 is er een gebied van $41{,}895$ km^2 bijgekomen met zo'n 11000 inwoners (hoeveel *precies* weet je niet). In dat extra gebied was het aantal mensen per km^2 veel lager dan in A.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je ziet een tabel met gegevens over de bevolking van A.

a Wat betekenen de getallen in de derde kolom?

b Hoeveel mannen en hoeveel vrouwen telde A in 2009?

c Hoe groot was de oppervlakte van A in 2009? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

d Klopt de bevolkingsdichtheid in 2010 met de oppervlakte van A in 2009?

e Bekijk de berekening van de toename van de oppervlakte van A in 2015. Waarom weet je niet precies hoeveel mensen er dat jaar als gevolg van de uitbreiding van A zijn bijgekomen?

f Hoeveel bedroeg de bevolkingsdichtheid in het uitbreidingsgebied maximaal? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Voorbeeld 2

In een kruistabel zet je twee grootheden tegen elkaar uit. Bijvoorbeeld het geslacht en de kleur haar.

In klas 4Ha is onderzocht welke kleur haar de leerlingen hebben. Het resultaat zie je in de tabel.

	bruin	zwart	blond	totaal
jongens	7	3	2	12
meisjes	7	7	4	18
totaal	14	10	6	30

Tabel 1.4

1. Is het waar dat de meeste meisjes blond haar hebben?
2. Is het waar dat van leerlingen met blond haar, de meeste een meisje zijn?
3. Hoe moet je de tabel veranderen om direct te kunnen zien of het relatieve aantal blonde jongens en het relatieve aantal blonde meisjes overeenkomen?

Antwoord

1. Nee, slechts vier van de achttien meisjes hebben blond haar.
2. Ja, want van de zes blonde leerlingen zijn er vier meisjes.
3. Je moet de getallen in de tabel omrekenen naar breuken of procenten om snel te kunnen vergelijken.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 2** over de kleur haar van klas 4Ha en vergelijk het aantal leerlingen met bruine haren.

a Is het absolute aantal jongens en het absolute aantal meisjes met bruin haar gelijk?

b Is het relatieve aantal jongens en het relatieve aantal meisjes met bruin haar gelijk?

c Maak van de tabel in het voorbeeld met absolute gegevens een tabel met relatieve gegevens in procenten. Geef je antwoorden in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 5

In een klas van dertig leerlingen in 4 havo wordt gevraagd aan te geven hoe ze naar school gaan: lopend, fietsend of anders. Van de zeventien meisjes komen er vier lopend en vullen er zes de categorie ‘anders’ in. Van de jongens vullen er vijf ‘fietsend’ in. In totaal zijn er zeven leerlingen die ‘lopend’ invullen.

	lopend	fietsend	anders	totaal
jongens				
meisjes				
totaal				

Tabel 1.5

a Neem de tabel over en vul de gegevens uit de tekst op de juiste plaatsen in de tabel in en maak de tabel verder af.

b Hoeveel jongens gaan er in die klas lopend naar school?

c Welk deel van de leerlingen die naar school fietsen, bestaat uit meisjes?

Voorbeeld 3

Een verzekeraar biedt een autoverzekering aan. Bekijk de tabel met de bonus/malus-regeling. Hiermee kun je de premie van je autoverzekering berekenen. Ga uit van een basispremie van € 1000,00. Een automobilist die deze verzekering afsluit start op trede 4.

Bonus/Malus tabel			Nieuwe B/M-trede na			
Schadevrije jaren	B/M-trede	Korting / toeslag in %	0 schadegevallen per jaar	1 schadegeval per jaar	2 schadegevallen per jaar	3 schadegevallen per jaar
11 of meer	15	80%	15	12	8	4
10	14	80%	15	11	7	3
9	13	80%	14	10	6	3
8	12	80%	13	9	5	2
7	11	75%	12	7	4	2
6	10	70%	11	6	4	1
5	9	65%	10	5	3	1
4	8	60%	9	4	3	1
3	7	55%	8	4	2	1
2	6	50%	7	4	2	1
1	5	45%	6	3	1	1
0	4	35%	5	2	1	1
-1	3	20%	4	2	1	1
-2	2	+ 10%	3	1	1	1
-3	1	+ 20%	2	1	1	1
Na 4 of meer schade in één verzekeringsjaar wordt de bonus/malus-trede 1.						

Figuur 1.4

1. Als je deze autoverzekering per 1 januari 2010 hebt afgesloten, hoeveel premie betaal je dan in 2016 als je in 2014 twee keer een schade hebt geclaimd?
2. Hoeveel verschil maakt het als je beide schades niet claimt?

Antwoord

1. In 2010 zit je op trede 4. Ga na dat je in 2014 dus op trede 8 zit. Je claimt twee schades, dus je zakt naar trede 3 in 2015. In 2016 zit je dan weer op trede 4 en betaal je (met 35% korting) € 650,00.
2. Zonder claim zou je in 2016 op trede 10 zitten en (met 70% korting) € 300,00 betalen, dat is € 350,00 minder. Maar het verschil is nog veel groter, want in 2015 heb je € 800,00 betaald en zonder claimen zou dat € 350,00 zijn geweest. Dat scheelt nog eens € 450,00. En ook in de jaren na 2016 betaal je meer als je de schade zou claimen. In 2017 betaal je € 300,00 meer, in 2018 ook € 300,00, in 2019 nog € 250,00, enzovoort. Pas in 2024 ben je op de maximale no-claim-korting. Ga na dat je in totaal € 2150,00 meer betaalt door de schade te claimen.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** tref je de bonus/malus regeling bij een autoverzekering aan. Je hebt deze verzekering afgesloten op 1 januari 2010.

a Hoeveel betaal je in 2016 als je geen schade hebt geclaimd in de tussenliggende jaren?

b Hoeveel premie heb je in totaal betaald in 2016?

c In 2016 claim je vanwege een schadegeval € 1800,00. Hoeveel kost je die schadeclaim uiteindelijk?

d Als je deze autoverzekering per 1 januari 2010 hebt afgesloten, hoeveel premie betaal je dan in 2016 als je in 2014 twee keer een schade hebt geclaimd?

e Hoeveel verschil maakt het als je beide schades niet claimt?

Verwerken

Opgave 7

Begin maart 2020 was dit de stand in de Eredivisie. Dit is de competitie van de hoogste divisie in het profvoetbal. Afkortingen: GW = gespeelde wedstrijden, W = winst, G = gelijk, V = verlies, P = punten, D = doelsaldo (aantal doelpunten gemaakt : aantal doelpunten tegen). Per overwinning krijgt een team drie punten, per gelijkspel één punt en bij verlies nul punten.

#	Team	GW	W	G	V	D	P
1.	Ajax	25	18	2	5	68:23	56
2.	AZ	25	18	2	5	54:17	56
3.	Feyenoord	25	14	8	3	50:35	50
4.	PSV	26	14	7	5	54:28	49
5.	Willem II	26	13	5	8	37:34	44
6.	Utrecht	25	12	5	8	50:34	41
7.	Vitesse	26	12	5	9	45:35	41
8.	Heracles	26	10	6	10	40:34	36
9.	Groningen	26	10	5	11	27:26	35
10.	Heerenveen	26	8	9	9	41:41	33
11.	Sparta	26	9	6	11	41:45	33
12.	Emmen	26	9	5	12	32:45	32
13.	VVV-Venlo	26	8	4	14	24:51	28
14.	Twente	26	7	6	13	34:46	27
15.	PEC Zwolle	26	7	5	14	37:55	26
16.	Fortuna Sittard	26	6	8	12	29:52	26
17.	ADO	26	4	7	15	25:54	19
18.	RKC	26	4	3	19	27:60	15

Figuur 1.5 bron: flashscore.nl

a Hoeveel punten heeft Ajax behaald?

b In hoeveel gespeelde wedstrijden heeft Ajax deze punten gehaald?

c Laat zien dat het puntenaantal van Ajax inderdaad overeenkomt met de gewonnen, verloren en gelijk gespeelde wedstrijden.

d Hoeveel doelpunten zijn er deze competitie in totaal gescoord tot en met deze speelronde?

e Ajax staat boven AZ hoewel ze beide evenveel punten hebben. Dat heeft te maken met het doelsaldo. Laat met een berekening zien dat de volgorde juist is.

f Je zou bij ploegen met evenveel punten ook naar het doelgemiddelde kunnen kijken. De voetbalbond stelt: "Onder doelgemiddelde wordt verstaan het getal, dat wordt verkregen door het aantal doelpunten vóór te delen door het aantal doelpunten tegen." Zou dit van invloed zijn geweest op de rangorde?

Opgave 8

Bekijk de tabel van het Centraal Bureau voor de Statistiek uit 2013.

	Onderwijsinstelling; grootte, soort							
	Aantal onderwijsinstellingen							
	2005/'06	2006/'07	2007/'08	2008/'09	2009/'10	2010/'11	2011/'12	2012/'13
Totaal basis- en speciaal basisonderwijs	7296	7261	7229	7223	7206	7157	7112	7039
basisonderwijs	6970	6941	6913	6910	6895	6849	6808	6743
speciaal basisonderwijs	326	320	316	313	311	308	304	296
speciale scholen	323	323	323	323	327	327	327	322
algemeen voortgezet onderwijs	670	663	658	660	657	659	659	658
middelbaar beroepsonderwijs	72	73	73	72	71	71	70	69
hoger beroepsonderwijs	52	52	51	51	51	50	39	39
wetenschappelijk onderwijs	13	13	13	13	13	13	14	14
	Aantal leerlingen - studenten							
	2005/'06	2006/'07	2007/'08	2008/'09	2009/'10	2010/'11	2011/'12	2012/'13
Totaal basis- en speciaal basisonderwijs	1597777	1595279	1597480	1597387	1591744	1577750	1559268	1538031
basisonderwijs	1549459	1548969	1552548	1553332	1548419	1534929	1517476	1498095
speciaal basisonderwijs	48318	46310	44932	44055	43325	42821	41792	39936
speciale scholen	59054	61920	64658	66264	67653	68863	70137	70332
algemeen voortgezet onderwijs	939896	942773	941136	934560	934934	939534	948949	961099
middelbaar beroepsonderwijs	483812	496227	509642	513925	522274	527917	523016	512819
hoger beroepsonderwijs	356842	366715	374802	383713	403278	416629	423719	421519
wetenschappelijk onderwijs	205894	208585	212713	220504	233118	242345	245322	241321

Figuur 1.6

a Waarover gaat deze tabel?

b Hoeveel rijen met aantallen leerlingen zijn er?

c Hoeveel leerlingen zaten er gemiddeld in 2005/2006 per school op het voortgezet onderwijs?

d En in 2012/2013?

e Bereken het gemiddeld aantal studenten per universiteit (wetenschappelijk onderwijs), zowel in 2005/2006 als in 2012/2013. Wat valt op?

f Het aantal hbo-studenten lijkt niet erg hard gestegen in de periode 2005/2006 tot en met 2012/2013. Laat met een berekening zien dat het gemiddelde aantal studenten per instelling echter wel sterk is gestegen.

Opgave 9

Een bioloog wil weten welke invloed de grootte van het broedsel (het aantal jonge vogels) heeft op de hoeveelheid voedsel die elk jong krijgt. Hij doet waarnemingen bij nestelende koolmezen. In de tabel staan zijn gegevens.

Broedselgrootte onderzoek bij koolmezen		
broedselgrootte (aantal jonge vogels)	voedselconsumptie (gram per jong per dag)	groei (gram per dag)
2	1,90	14
3	1,78	15
5	1,15	14
7	1,00	14
9	0,80	14
12	0,70	13

Figuur 1.7

a Welke kolom(men) bevat(ten) absolute gegevens?

b Vooraf vermoedde de bioloog dat hoe groter het broedsel, hoe kleiner de hoeveelheid voedsel per jong zou zijn. Komt dat vermoeden uit? Kun je er een verklaring voor bedenken?

c De totale hoeveelheid voedsel die de oudervogels aandragen is niet bij elke broedselgrootte even groot. Beschrijf wat er precies gebeurt.

d De groei van de jonge vogels is echter bij elke broedselgrootte vrijwel hetzelfde. Kun je daar een verklaring voor bedenken?

e In de vakliteratuur vindt de bioloog deze gegevens over de warmteproductie van de jonge vogels.

broedselgrootte	2	3	5	7	9	12
warmteproductie (kcal per jong)	0,287	0,265	0,229	0,202	0,189	0,177

Tabel 1.6

Vormen deze gegevens een verklaring voor de vrijwel constante groei van de jonge vogels?

Opgave 10

Bij een onderzoek naar kleurenblindheid zijn 12000 proefpersonen aan een test onderworpen. Van de 6500 mannen die aan het onderzoek deelnamen waren er 612 kleurenblind, bij de vrouwen bleken er slechts 53 kleurenblind te zijn.

	man	vrouw	totaal
kleurenblind			
niet kleurenblind			
totaal			

Tabel 1.7

a Neem de kruistabel over en vul hem in.

b Welk deel van de mannen is kleurenblind?

c Welk deel van de kleurenblinden is vrouwelijk?

d Welke kolom(men) bevat(ten) relatieve gegevens?

Opgave 11

Enkele wetenschappers onderzoeken de evolutie van de neushoornpopulatie. Een populatie van vrouwelijke neushoorns uit Kenia, verdeeld over vijf leeftijdsklassen, werd uitgekozen als studieobject. Alle onderzoeksresultaten werden verwerkt in een overgangstabel. De tabel zegt iets over de overlevingskansen en over de kans op nakomelingen per leeftijdsklasse. Zo zie je dat $\frac{3}{5}$ deel van de neushoorns uit leeftijdsklasse 1, leeftijdsklasse 2 zal halen. Het andere deel van de neushoorns uit leeftijdsklasse 1 zal komen te overlijden. Ook zie je dat een neushoorn uit leeftijdsklasse 4 gemiddeld één nakomeling krijgt.

leeftijdsklasse		van				
		1	2	3	4	5
naar	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{4}$	1	1
	2	$\frac{3}{5}$	0	0	0	0
	3	0	$\frac{2}{3}$	0	0	0
	4	0	0	$\frac{3}{4}$	0	0
	5	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0

Tabel 1.8

a Wat betekent de breuk $\frac{5}{4}$ in de tabel?

b Kan een neushoorn uit leeftijdsklasse 1 nakomelingen krijgen?

c Er zijn 60 neushoorns in leeftijdsklasse 4. Hoeveel zullen leeftijdsklasse 5 halen? En hoeveel nakomelingen zullen ze krijgen?

d Er zijn 72 neushoorns in leeftijdsklasse 2, hoeveel neushoorns zullen leeftijdsklasse 5 halen?

Opgave 12

Gegeven is dat twaalf van de 1500 mensen een bepaalde ziekte hebben. Er is een test ontwikkeld waarmee je kunt zien of je de ziekte hebt. Deze test geeft bij $\frac{2}{3}$ van de gezonde mensen de juiste uitslag en bij 75% van de zieke mensen de juiste uitslag.

a Neem aan dat je 12500 mensen gaat testen. Hoeveel mensen zijn er dan echt gezond?

b Hoeveel mensen krijgen een juiste uitslag van de test?

c Verwerk de gegevens van b in een kruistabel.

Toepassen

Opgave 13: Wereldbevolking in Utrecht?

Begin 2020 was de wereldbevolking ongeveer 7,8 miljard mensen. In de tabel zie je gegevens over de Nederlandse provincies.

provincie	inwonertal	oppervlakte (km^2)	bevolkingsdichtheid (aantal inw. per km^2)
Groningen	582728	2325,42	251
Friesland	646317	3339,95	194
Drenthe	488988	2638,95	185
Overijssel	1139697	3324,49	343
Gelderland	2019692	4969,52	406
Utrecht	1253672	1383,17	906
Flevoland	399893	1415,40	283
Noord-Holland	2741369	2665,43	1028
Zuid-Holland	3577032	2808,16	1274
Zeeland	380621	1784,11	213
Noord-Brabant	2479274	4913,96	505
Limburg	1120006	2149,72	521

Tabel 1.9

a Controleer of de bevolkingsdichtheid van Zuid-Holland inderdaad klopt.

Stel je de provincie Utrecht voor zonder bebouwing of enige vorm van infrastructuur. Je vult de provincie met mensen die zij aan zij naast elkaar staan.

b Past de hele wereldbevolking in de provincie Utrecht? Ga ervan uit dat er twaalf personen op één vierkante meter passen.

Testen

Opgave 14

Je ziet een tabel van het aantal Nederlanders in de loop van de jaren. Deze tabel is afkomstig van de website van het CBS.

Bevolking; kerncijfers naar diverse kenmerken			CBS juli 2009						
Onderwerpen	**Onderwerpen**	**Perioden**	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2008**
Bevolking naar geslacht	Totale bevolking	aantal	10026773	11417254	12957621	14091014	14892574	15863950	16405399
	Mannen	aantal	4998251	5686152	6465081	6994280	7358482	7846317	8112073
	Vrouwen	aantal	5028522	5731102	6492540	7096734	7534092	8017633	8293326
Bevolkingsgroei	Totale bevolkingsgroei	aantal	173507	138754	161809	117572	117871	123125	81188
	Totale bevolkingsgroei, relatief	per 1 000 inw	17,3	12,2	12,5	8,3	7,9	7,8	4,9
	Levendgeborenen	aantal	229718	239128	238912	181294	197965	206619	184669
	Overledenen	aantal	75929	87825	109619	114279	128824	140527	134996
	Geboorteoverschot	aantal	153789	151303	129293	67015	69141	66092	49673
	Geboorteoverschot, relatief	per 1 000 inw	15,2	13,2	9,9	4,7	4,6	4,2	3
Bevolkingsdichtheid	Bevolkingsdichtheid	aantal	309	352	384	415	439	468	486

Figuur 1.8

a Laat zien dat het aantal mannen en het aantal vrouwen in overeenstemming is met de totale bevolking.

b De totale bevolkingsgroei kun je niet afleiden uit het verloop van de totale bevolking. Heb je daarvoor een verklaring?

c Reken voor het jaar 2000 het getal dat hoort bij ‘totale bevolkingsgroei, relatief’ na.

d Laat voor het jaar 2000 zien dat het getal dat staat bij ‘geboorteoverschot’ klopt met de rest van de tabel.

e Bereken de oppervlakte van Nederland in het jaar 2000. Is die oppervlakte gedurende de jaren 1950 tot 2000 constant gebleven? Geef een verklaring.

f Welke kolom(men) bevat(ten) relatieve gegevens?

Opgave 15

	Italië	anders	totaal
vliegtuig			
touringcar			
anders			
totaal			

Tabel 1.10

Veel Nederlanders gaan naar het buitenland op vakantie. Bij bestemmingen verder weg (zoals Italië) wordt dan soms van het vliegtuig gebruikgemaakt, maar ook wel van de bus of de trein of de eigen auto. In 2008 werden 18458000 vakanties naar het buitenland geboekt. Daarvan waren er 1015000 met bestemming Italië. Er werden 6355000 vliegvakanties geboekt waarvan slechts $\frac{1}{20}$ deel een bestemming in Italië kende. Verder waren er 38200 touringcarreizen naar Italië geboekt, dat is een kwart van het totaal aantal touringcarreizen dat jaar.

a Vul met de gegevens uit de tekst de kruistabel in.

b Welk deel van de Italiëgangers in 2008 nam deel aan een touringcarreis?

c Welke kolom(men) bevat(ten) relatieve gegeven?

2.2 Procenten

Inleiding

In veel tabellen komen procenten voor. ‘Pro centum’ is Latijn en betekent per honderd, dus één van elke honderd, dus $\frac{1}{100}$ deel. Met procenten rekenen is daarom rekenen met honderdsten: 45% = $\frac{45}{100}$ = $0{,}45$. 45% ergens van uitrekenen komt neer op vermenigvuldigen met $0{,}45$. Het werken met procenten is al heel oud, zelfs de Oude Grieken kenden al het werken ‘per honderd’. Het teken voor procenten is echter nog niet heel oud en is vermoedelijk ontstaan uit de afkorting p.c. (pour cent).

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- opnieuw rekenen met procenten;
- werken met indexcijfers.

Voorkennis

- werken met tabellen, tabellen maken en interpreteren;
- werken met procenten in eenvoudige situaties.

Verkennen

Opgave V1

Een mobiele telefoon is in de aanbieding. Normaal kost deze € 189,00. Nu krijg je 20% korting. Hoeveel kost de telefoon nu?

Opgave V2

Een spijkerbroek kost in de opruiming met 30% korting nog maar € 42,00. Wat was de prijs van de broek zonder korting?

Uitleg

Regelmatig kom je procenten tegen. ‘Pro centum’ is Latijn en betekent per honderd, dus één van elke honderd, dus $\frac{1}{100}$ deel. Met procenten rekenen is daarom rekenen met honderdsten: 45% $= \frac{45}{100} = 0{,}45$.

Figuur 2.2

45% van een geheel is het $\frac{45}{100}$ deel ervan en dat kun je berekenen door te vermenigvuldigen met $0{,}45$.

Het werken met procenten is al heel oud, zelfs de Oude Grieken kenden al het werken ‘per honderd’.

Een voorbeeld van het werken met procenten is het indexcijfer. Een indexcijfer geeft een procentuele stijging of daling aan. Een indextabel begint op een bepaald moment met een index van 100 (= 100%).

Stel dat de prijs van een bepaald artikel in 2015 een index van 100 heeft gekregen. Na één jaar is de prijs 10% toegenomen; het indexcijfer wordt dan $100 + 0{,}10 \cdot 100 = 110$. Het jaar daarna is die prijs met 10% afgenomen; het indexcijfer wordt dan: $110 - 0{,}10 \cdot 110 = 99$. Het derde jaar is de prijs met 5% toegenomen; het indexcijfer is dan $99 + 0{,}05 \cdot 99 = 103{,}95$ geworden. In de tabel wordt dit weergegeven.

jaar	index	jaarmutatie
2015	100	
2016	110	+10
2017	99	−11
2018	103,95	+4,95

Tabel 2.1

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** wat je onder een percentage verstaat.

45% komt overeen met $\frac{45}{100}$ deel.

a Met welk deel komt 23% overeen?

b Bereken 23% van 150.

c Laat zien dat 25% overeenkomt met $\frac{1}{4}$ deel.

d Waarom is 33% niet precies gelijk aan $\frac{1}{3}$ deel? Is het meer of minder?

Opgave 2

Bekijk de tabel met indexcijfers in de **Uitleg**.

a Hoe zie je dat de prijs in 2018 $3{,}95\%$ hoger was dan in 2015?

b Als de prijs in 2015 65 euro bedroeg, hoeveel bedroeg dit dan in 2018?

c Is de prijs in 2018 gestegen ten opzichte van die in 2016?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

1 **procent** is $\frac{1}{100} = 0{,}01$. Dus 1% ergens van is $\frac{1}{100}$ deel daarvan.

Bij het rekenen met procenten kun je werken met verhoudingstabellen.
Daarin bereken je bijvoorbeeld hoeveel procent 150 is als 125 overeenkomt met 100%:
$\frac{150}{125} \cdot 100 = 120\%$.

getal	125	150
procent	100	?

Tabel 2.2

Je gebruikt procenten vooral om te vergelijken. Het is niet eenvoudig om te zeggen of 11 van de 43 een groter of kleiner deel is dan 23 van de 81. Wanneer je berekent hoeveel procent 11 van de 43 is ($25{,}58...\%$) en hoeveel procent 23 van de 81 is ($28{,}39...\%$), dan kun je het antwoord zo geven.

Het werken met een **index** en met een **indexcijfer** is een voorbeeld van het werken met procenten.

Voorbeeld 1

Wat is meer: 23 van de 53 of 31 van de 64?

Antwoord

Je kunt werken met een verhoudingstabel: $? = \frac{23}{53} \cdot 100 \approx 43{,}4\%$.

Of je deelt: $\frac{23}{53} \approx 0{,}434$, dus is het 43,4%.

aantal	53	23
procent	100	?

Tabel 2.3

Je kunt werken met een verhoudingstabel: $? = \frac{31}{64} \cdot 100 \approx 48{,}4\%$.

Of je deelt: $\frac{31}{64} \approx 0{,}484$, dus is dit 48,4%.

Conclusie: 31 van 64 is meer dan 23 van 53.

aantal	64	31
procent	100	?

Tabel 2.4

Opgave 3

Schrijf als percentage.

a 0,25

b 0,375

c 0,001

d 3,14

Opgave 4

Bereken.

a 24% van 150

b 11% van 2150

c 3,4% van 15600

d 0,4% van 530

Opgave 5

Schrijf als percentage.

a $\frac{1}{4}$ deel

b $\frac{1}{8}$ deel

c 5 van de 40

d $\frac{12}{50}$ deel

e 8 van de 25

f $\frac{11}{500}$ deel

Opgave 6

Wat is naar verhouding meer?

a 5 van de 11 of 45 van de 100

b 23% of $\frac{15}{71}$ deel

Voorbeeld 2

Ooit was al ons gas om te koken en het huis te verwarmen afkomstig uit Nederland, maar tegenwoordig wordt ook gas uit het buitenland gekocht. In 2013 was 63% van het gebruikte gas afkomstig uit Nederland. Dit was samen 38,7 miljard m^3 gas. Hoeveel aardgas was afkomstig uit het buitenland?

Antwoord

Het buitenland leverde $100 - 63 = 37\%$.

Met een verhoudingstabel: $? = \frac{37}{63} \cdot 38{,}7 \approx 22{,}7$ miljard m^3.

miljard m^3 gas	38,7	?
procent	63	37

Tabel 2.5

Opgave 7

Bereken de nieuwe prijs of het nieuwe bedrag.

a Je koopt een fiets van € 650,00 en krijgt 12,5% korting.

b De contributie van de tafeltennisclub is € 120,00 per jaar en wordt met 5% verhoogd.

c Sinds 1960 is de prijs van de benzine met ongeveer 180% gestegen. Toen kostte 1 liter benzine € 0,54.

Opgave 8

Je haalt van een bedrag eerst 10% af en doet er dan weer 10% van het nieuwe bedrag bij. Laat met een berekening zien of je weer hetzelfde bedrag hebt gekregen.

Opgave 9

Btw is de afkorting van 'belasting over de toegevoegde waarde'. Als consument moet je btw betalen. Ondernemers mogen de btw aan de belastingdienst terugvragen, omdat hun klanten de btw al betalen.

a De btw op een fiets die € 650,00 kost (dus zonder btw) is 21% van de prijs. Hoeveel betaal je voor de fiets inclusief btw?

b Je koopt een oudere versie van de iPad met 25% korting voor € 185,00. Hoeveel kostte deze iPad oorspronkelijk exclusief de 21% btw?

Voorbeeld 3

De tabel 'consumentenprijsindex (CPI); alle huishoudens', geeft de gemiddelde prijsverandering weer van goederen en diensten die huishoudens aanschaffen. De CPI is een voorbeeld van het werken met procenten en indexcijfers. Het jaar 2006 is het indexjaar. De totale prijs van de 1600 artikelen en diensten waarvan het CBS de prijsontwikkeling volgt, wordt aan het begin van het jaar 2006 op 100 gesteld, dus 100% genoemd. Vervolgens wordt berekend hoeveel die totale prijs aan het begin van een ander jaar is en uitgerekend met hoeveel procent hij is gestegen of gedaald ten opzichte van de prijs in 2006. Dat is het indexcijfer voor dat jaar.

Voor 2013 is het indexcijfer 112,8. De prijzen zijn dus gemiddeld voor de consument met 12,8% gestegen ten opzichte van die in 2006.

Consumentenprijsindex (CPI); alle huishoudens		
onderwerpen	CPI	jaarmutatie
perioden	2006=100	CPI
2006	100	
2007	100,1	0,1
2008	102,1	2,0
2009	104,1	1,9
2010	104,9	0,8
2011	106,9	1,8
2012	109,5	2,5
2013	112,8	3,0
2014	114,4	1,4

Tabel 2.6

De prijsstijging begin 2014 ten opzichte van begin 2013 reken je zo uit:
De toename is $114{,}4 - 112{,}8 = 1{,}6$.

Dat is $\frac{1{,}6}{112{,}8} \cdot 100 \approx 1{,}4\%$.
De prijsstijging ten opzichte van januari 2013 is daarom $1{,}4\%$. In de tabel heet dit de 'jaarmutatie'.
Hoeveel is de prijsstijging van begin 2011 ten opzichte van begin 2009?

index	112,8	1,6
procent	100	?

Tabel 2.7

Antwoord

De toename begin 2011 ten opzichte van begin 2009 is $106{,}9 - 104{,}1 = 2{,}8$.

En dat is: $\frac{2{,}8}{104{,}1} \cdot 100 \approx 2{,}7\%$.

index	104,1	2,8
procent	100	?

Tabel 2.8

Opgave 10

Bekijk de tabel van de consumentenprijsindex in **Voorbeeld 3**.

a Welk jaar is het indexjaar en wat betekent dat?

b Hoeveel bedraagt het indexcijfer voor 2010?

c Met hoeveel procent zijn de prijzen dus gestegen ten opzichte van 2006?

d Met hoeveel procent zijn de prijzen in 2010 gestegen ten opzichte van 2009?

e Met hoeveel procent zijn de prijzen in 2010 gestegen ten opzichte van 2008? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 11

Stel dat in 2015 de jaarmutatie van de consumentenprijsindex $1{,}6$ bedroeg.

a Welk indexcijfer krijgt 2014 dan? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

b Met hoeveel procent zijn de prijzen in 2013 gestegen ten opzichte van het indexjaar 2006?

Verwerken

Opgave 12

Bereken het percentage.

a Hoeveel procent is $\frac{1}{10}$ deel?

b Hoeveel procent is 5 van de 20?

c Hoeveel procent is € 3,50 van € 21,00? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

d Een bedrag neemt af van € 125,00 naar € 100,00. Hoeveel procent is de korting?

e Een bedrag neemt toe van € 100,00 naar € 125,00. Hoeveel procent is de toename?

Opgave 13

Bereken het bedrag.

a Hoeveel is 4% van € 1000,00?

b Een bedrag van € 1,34 wordt met 12% verhoogd. Bereken de nieuwe prijs.

c Een bedrag van € 24,65 wordt met 28% verlaagd. Bereken de nieuwe prijs.

d Een bedrag is met 10% verhoogd en is nu € 127,50. Bereken de oude prijs.

e Een bedrag is met 24% verlaagd en is nu € 40,80. Bereken de oude prijs.

Opgave 14

Zet op volgorde, van klein naar groot met behulp van het < teken.

a $\frac{2}{3}$; 18%; $\frac{1}{7}$; 34%; $\frac{5}{6}$; 75%

b 42 van de 712; 12 van de 216; 8 van de 150.

c 20% van € 39,00; 12% van € 25,00; 90% van € 11,75.

Opgave 15

Bereken.

a Je krijgt $\frac{2}{7}$ deel van € 140,00. Hoeveel procent is dat? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

b Een trui is afgeprijsd van € 39,00 voor € 34,50. Hoeveel procent is de korting? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

c Een telefoonabonnement is duurder geworden, van € 15,00 naar € 18,00. Hoeveel procent is het duurder geworden?

Opgave 16

Prijzen worden vaak geïndexeerd om de ontwikkeling bij te kunnen houden. Dit geldt bijvoorbeeld voor de aandelenbeurs (AEX), de koopkracht en woningprijzen.
In de tabel is de prijsindex van koopwoningen in een bepaalde provincie af te lezen.

a Welk jaar is het indexjaar?

b In 2005 kostte een koopwoning € 150000.
Hoeveel kostte de woning in 2012?

c Een koopwoning werd in 2013 verkocht voor € 189000.
Hoeveel kostte de woning in 2005?

d Was de koopwoning in 2004 of in 2012 het meeste waard?
Licht je antwoord toe.

e Was er tussen 2005 en 2010 een prijsstijging of een prijsdaling?
Licht je antwoord toe.

jaar	index	jaarmutatie
2003	90	
2004	96	6,7
2005	100	4,2
2006	104	4,0
2007	108	3,8
2008	112	3,7
2009	109	-2,7
2010	103	-5,5
2011	96	-6,8
2012	92	-4,2
2013	89	-3,3
2014	86	-3,4

Tabel 2.9

Opgave 17

Beantwoord de volgende vragen door middel van een berekening.

a Je mag kiezen of je 20% of € 15,00 korting krijgt op een prijs van € 85,00. Wat kies je?

b Je hebt een telefoonabonnement van € 16,50 per maand. Dit abonnement wordt 7% duurder. Blijf je bij de provider of kies je een nieuw abonnement bij een andere provider voor € 17,75 per maand?

c Je hebt een spijkerbroek met 20% korting gekocht voor € 49,00. Hoeveel was de oorspronkelijke prijs?

d Een jonge scooterrijder betaalt € 20,83 per maand voor een scooterverzekering, inclusief de toeslag van 15% voor jonge scooterrijders. Hoeveel kost de verzekering zonder toeslag?

Toepassen

Onder **btw** wordt Belasting Toegevoegde Waarde verstaan. Elke ondernemer die een goed levert of een dienst verricht brengt deze omzetbelasting in rekening aan de afnemer. Vervolgens moet de ondernemer deze omzetbelasting afdragen aan de Belastingdienst. De afnemer kan de betaalde btw als voorbelasting terugkrijgen van de fiscus als hij kan aantonen dat hij een belastingplichtig ondernemer is en dat hij het geleverde goed/dienst gebruikt binnen zijn onderneming.
Er zijn verschillende tarieven:

- Het 21% tarief:
  Dit betaal je over vrijwel alle onroerende goederen en geleverde diensten.
- Het 9% tarief:
  Dit betaal je vooral voor voedsel en sommige diensten.
- Het 0% tarief:
  Dit geldt vaak voor zaken met het buitenland.
- In sommige gevallen is er vrijstelling van btw.

Voor meer details kun je bij de belastingdienst terecht.

Opgave 18

Je koopt een nieuwe laptop van € 400 exclusief btw. Daar moet je 21% btw bij betalen.

a Hoeveel moet je inclusief btw betalen?

b De leverancier van de laptop geeft 15% korting.
Heb je die korting liever over de prijs zonder btw of de prijs met btw?

Opgave 19

Een rijwielhandelaar koopt voor € 500,00 een tweedehands fiets terug van een klant. Dat is inclusief 21% btw. De btw moet worden afgedragen aan de Belastingdienst. Hij berekent dat de btw € 105,00 bedraagt.

Is dat juist? Zo nee, laat dan zien hoe je de btw wel moet berekenen.

Testen

Opgave 20

Bereken.

a 12% van 364 is ...

b 162 is ongeveer ...% van 364.

c 364 is 54% van ...

d 364 neemt toe tot 432, dat is een toename van ...%

e 364 neemt met 6% toe tot ...

f 364 neemt af met 6% tot ...

g 364 neemt af tot 320, dat is een afname van ongeveer ...%.

Opgave 21

Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) houdt voor Nederland alle prijzen bij.
De index in het jaar 2006 is gesteld op 100. De huidige index is 112.

a Wat kost een brood, dat in 2006 € 1,20 kostte?

b Wat kostte een pak koffie, dat nu € 6,05 kost, in 2006?

Opgave 22

In Nederland hebben we in 2008 ongeveer 2360 km aan autosnelweg, in België is dat 1763 km. Nederland kent 56,8 km snelweg per 1000 km^2.

a Hoeveel procent aan kilometer snelweg heeft Nederland meer dan België?

b Hoeveel procent aan kilometer snelweg heeft België minder dan Nederland?

c Hoe groot is de oppervlakte van Nederland?

d Neem aan dat een autosnelweg gemiddeld ongeveer 20 m breed is (een rijstrook is 3,50 m breed). Hoeveel procent van Nederland is autosnelweg?

e België heeft de grootste snelwegdichtheid van de Europese Unie. België heeft een oppervlakte van 30528 km^2. Hoeveel km snelweg per 1000 km^2 heeft België?

f Hoeveel procent is de landoppervlakte van Nederland groter dan die van België?

g Stel dat Nederland er in de periode 2009-2011 in het totaal 6% km snelweg bij krijgt. Hoeveel kilometer snelweg heeft Nederland dan in 2012?

h Stel dat in België het aantal kilometer snelweg in 2009 toegenomen is tot 1940 km. Met hoeveel procent nam het aantal km snelweg daar dan toe?

2.3 Grafieken

Inleiding

Het woord ‘grafiek’ wordt wel voor elke soort getekende voorstelling van gegevens gebruikt. Hier gaat het alleen om grafieken die horen bij tabellen met twee variabelen: bijvoorbeeld van het aantal mensen in een bepaalde gemeente afhankelijk van de tijd (het jaartal). Een grafiek laat dan het verloop van de bevolking van die gemeente heel duidelijk zien, duidelijker vaak dan een tabel. Er zijn verschillende soorten grafieken. Belangrijk is welke soort grafiek je wanneer gebruikt. En verder hebben grafieken eigenschappen zoals dalend en stijgend. Die moet je leren herkennen.

Je leert in dit onderwerp

- grafieken gebruiken om gegevens overzichtelijk te presenteren;
- soorten grafieken onderscheiden;
- eigenschappen van grafieken herkennen.

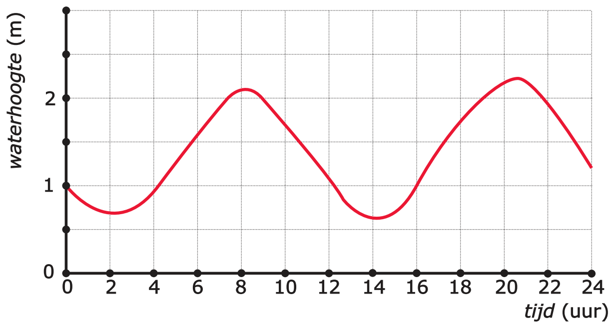
Voorkennis

- een grafiek tekenen bij een tabel;
- werken met procenten.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de grafiek.



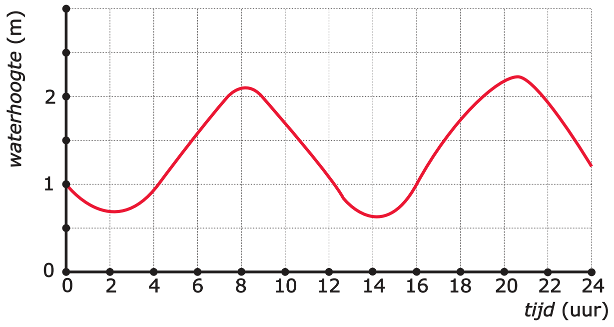
Figuur 3.1

a Tussen welke grootheden en eenheden geeft deze grafiek een verband weer?

b Beschrijf in je eigen woorden het verloop van de grafiek.

Uitleg

Je ziet een grafiek van de waterstand voor de komende uren op een locatie in Nederland.



Figuur 3.2

Er is sprake van twee variabelen: de hoogte van het water ten opzichte van NAP (Normaal Amsterdams Peil) is uitgezet tegen de tijd in uren. Op de verticale as vind je de variabele *waterhoogte* (in m), op de horizontale as staat de variabele *tijd* (in uren). De grafiek stijgt en daalt afwisselend. De waterhoogte is:

- stijgend als hij toeneemt met de tijd;
- dalend als hij afneemt met de tijd;
- maximaal als hij overgaat van stijgend naar dalend (hoogwater of vloed);
- minimaal als hij overgaat van dalend naar stijgend (laagwater of eb).

Omdat de waterhoogte voortdurend verandert, is er sprake van een vloeiend lopende grafiek. De waterstanden variëren tussen hoogwater en laagwater met een tijdsduur van ongeveer 6 uur en 10 minuten. Tussen twee opeenvolgende tijdstippen van laagwater zit een periode van ongeveer 12 uur en 20 minuten. Hetzelfde geldt voor twee opeenvolgende tijdstippen van hoogwater. Een grafiek die zichzelf (ongeveer) herhaalt, noem je periodiek.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de waterstanden in de **Uitleg**.

a Tussen welke tijdstippen is de grafiek stijgend?

b Geef de tijden waarop de waterstand maximaal is (hoogwater). Hoe hoog staat het water dan?

c Geef de tijden waarop de waterstand minimaal is (laagwater). Hoe hoog staat het water dan?

Opgave 2

De grafiek van de waterstanden wordt in de **Uitleg** ‘periodiek’ genoemd.

a Om de hoeveel tijd herhaalt zich de waterstand (ongeveer)?

b Stel dat deze grafiek geldt voor 10 mei 2015. Op welke tijdstippen was het dan hoogwater op 12 mei 2015?

c Kun je uitleggen waarom deze grafiek niet zuiver periodiek zal zijn?

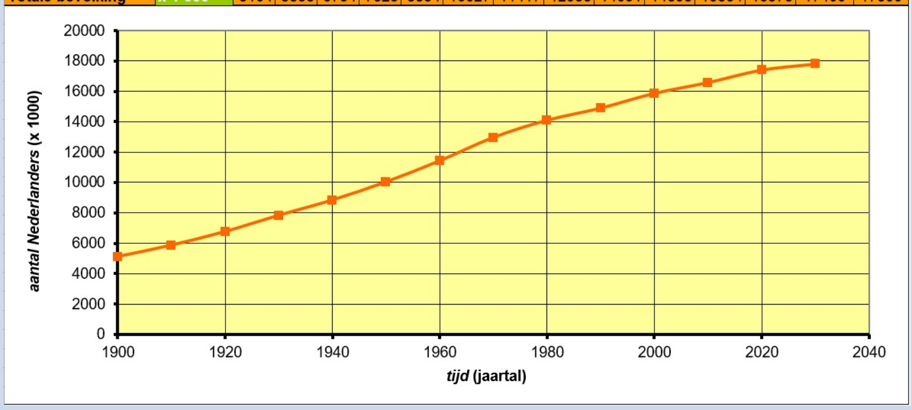
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een tabel met twee **variabelen** kun je een grafiek maken. Bij de CBS-tabel van de Nederlandse bevolking komen de twee variabelen *tijd* (jaartal) en *aantal Nederlanders* (×1000) voor. Hierbij hangt het *aantal Nederlanders* af van de *tijd*. Je maakt er daarom een grafiek bij met op de horizontale as de variabele *tijd* en op de verticale as de **afhankelijke variabele** *aantal Nederlanders*.

Bevolking van Nederland

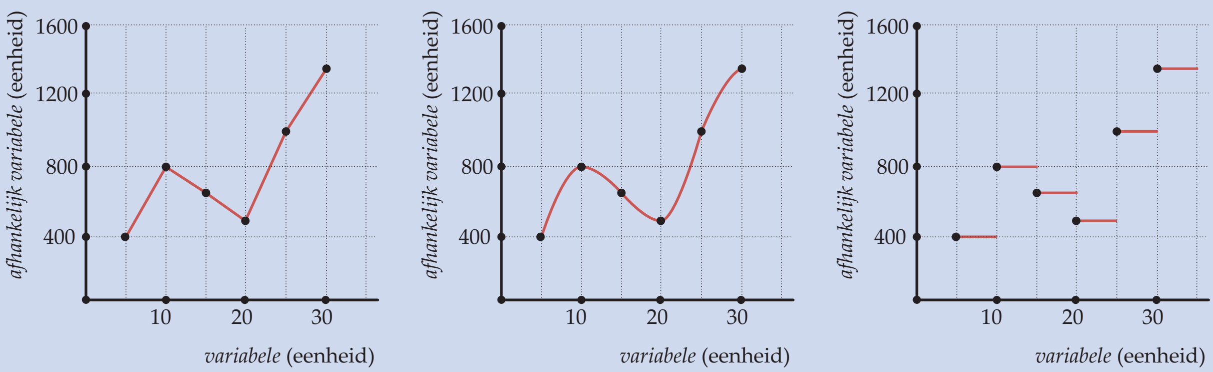
	Perioden	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020	2030
Totale bevolking	x 1 000	5104	5858	6754	7825	8834	10027	11417	12958	14091	14893	15864	16575	17400	17800



Figuur 3.3

Bij de assen zet je de namen van de variabelen als **bijschriften**. Ook gebruik je maatstreepjes met getallen. Soms krijgt een grafiek nog een **grafiektitel** mee. Er zijn verschillende soorten grafieken:

- bij een **lijngrafiek** verbind je de punten die bij de tabel horen met dunne lijnstukjes omdat je de tussenwaarden niet weet;
- bij een **vloeiende grafiek** verbind je de punten die bij de tabel horen met een kromme lijn omdat je aan kunt nemen dat je weet dat de tussenwaarden zonder grote sprongen toenemen of afnemen;
- bij een **trapgrafiek** ga je ervan uit dat de afhankelijke variabele sprongsgewijs verandert.



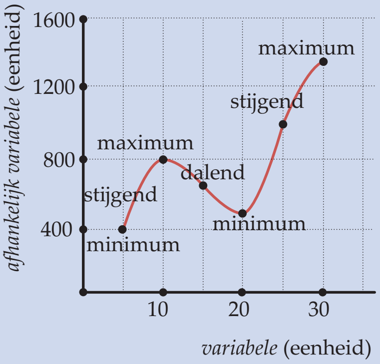
lijngrafiek

vloeiende grafiek

trapgrafiek

Figuur 3.4

Grafieken hebben bepaalde eigenschappen.



Figuur 3.5

Een (vloeiende) grafiek is:

- **stijgend** als de afhankelijke variabele toeneemt;
- **dalend** als de afhankelijke variabele afneemt.

De grafiek heeft:

- een **maximum** als hij overgaat van stijgend naar dalend;
- een **minimum** als hij overgaat van dalend naar stijgend.

Ook in randpunten zit vaak een maximum of een minimum. Je noemt de maxima en de minima wel **extremen** of **uiterste waarden**.

Soms varieert de afhankelijke variabele met een vaste **periode**. Een grafiek die zichzelf (ongeveer) herhaalt, noem je **periodiek**. Een grafiek met een periode van 1 seconde heeft een **frequentie** van 60 per minuut.

Voorbeeld 1

Bekijk de tabel van de bevolking van Deventer. Het *aantal personen* hangt af van de *tijd* (jaartal).

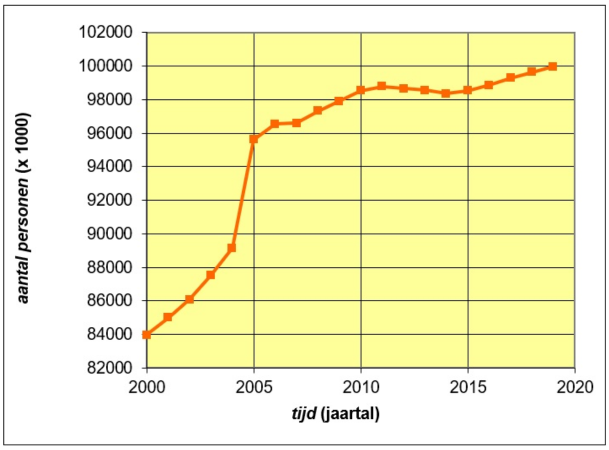
- Maak een bijpassende grafiek. Welke soort grafiek maak je en waarom?
- In de loop van 2004 is de gemeente Deventer uitgebreid. Hoe zie je dat in de grafiek?

Bevolking Deventer	
jaartal	aantal personen
2000	83956
2001	85008
2002	86072
2003	87526
2004	89142
2005	95620
2006	96540
2007	96596
2008	97328
2009	97904
2010	98541
2011	98779
2012	98673
2013	98558
2014	98356
2015	98540
2016	98869
2017	99295
2018	99653
2019	99957
telling 1-1-20XX	

Figuur 3.6

Antwoord

Zet de punten uit de tabel in een assenstelsel en verbind ze.



Figuur 3.7

Er is gekozen voor een lijngrafiek, omdat de tussenwaarden niet bekend zijn. Hier past ook wel een vloeiende grafiek bij, want er zullen waarschijnlijk geen rare uitschieters zijn gedurende een jaar. Zelfs een trapgrafiek is te verdedigen: je baseert je dan uitsluitend op de tellingen van 1 januari van elk jaar en neemt dat als waarde voor een heel jaar.

De uitbreiding van de gemeente is terug te vinden in de snelle stijging tussen de punten bij 2004 en 2005. Die stijging heeft in de loop van 2004 plaatsgevonden. Kennelijk nam het aantal personen toen sneller toe vanwege gebiedsuitbreiding.

Opgave 3

Je ziet een tabel van het aantal Nederlanders in de loop van de jaren. Deze tabel is afkomstig van de website van het CBS.

Bevolking, huishoudens en bevolkingsontwikkeling; vanaf 1949										
		Perioden								
Onderwerp		1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2016	2017
Bevolking op 1 januari | Naar geslacht										
Mannen en vrouwen	x 1 000	10027	11417	12958	14091	14893	15864	16575	16979	17082
Mannen	x 1 000	4998	5686	6465	6994	7358	7846	8203	8417	8475
Vrouwen	x 1 000	5029	5731	6493	7097	7534	8018	8372	8562	8606
Bevolkingsontwikkeling										
Levendgeborenen	x 1 000	230	239	239	181	198	207	184	173	
Overledenen	x 1 000	76	88	110	114	129	141	136	149	
Geboorteoverschot	x 1 000	154	151	129	67	69	66	48	24	
Totale bevolkingsgroei	x 1 000	174	139	162	118	118	123	81	102	
Totale bevolkingsgroei, relatief	%	1,7	1,2	1,2	0,8	0,8	0,8	0,5	0,6	
Bevolkingsdichtheid										
Bevolkingsdichtheid	aantal	309	352	384	415	439	468	491	502	510
Bron: CBS										

Figuur 3.8

a Maak een grafiek van het aantal inwoners van Nederland in de loop van de jaren.

b Welke twee variabelen heb je tegen elkaar uitgezet?

c Welke van beide variabelen is de onafhankelijke variabele?

d Hoe zie je dat aan de grafiek?

e Waarom kun je eigenlijk geen vloeiende grafiek maken?

f Wat is het voordeel van een grafiek boven een tabel?

g Zijn er ook nadelen?

Opgave 4

Bekijk in de tabel in **Opgave 3** de rijen ‘levendgeborenen’, ‘overledenen’ en ‘geboorteoverschot’.

a Teken de drie grafieken van deze variabelen uitgezet tegen de tijd (in jaren) in één figuur.

b Waarom noem je de grafiek van *geboorteoverschot* ook wel de ‘verschilgrafiek’ van de andere twee?

c In welke periode is de grafiek van *geboorteoverschot* stijgend?

d Het geboorteoverschot in Nederland is over het algemeen dalend. Wat betekent dat?

Voorbeeld 2

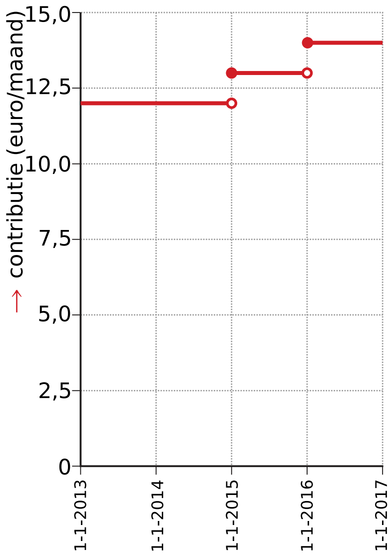
De maandelijkse contributie van de voetbalvereniging was:

- van 1 januari 2013 tot 1 januari 2015: € 12,00;
- van 1 januari 2015 tot 1 januari 2016: € 13,00;
- vanaf 1 januari 2016: € 14,00.

Teken een grafiek met daarin de maandelijkse contributie in euro uitgezet tegen de tijd.

Antwoord

De bijpassende grafiek moet een trapgrafiek zijn. Let goed op de open rondjes. Die zorgen ervoor dat er overal precies één uitkomst is.



Figuur 3.9

Opgave 5

Bekijk de grafiek van de maandelijkse contributie van de voetbalvereniging in **Voorbeeld 2**.

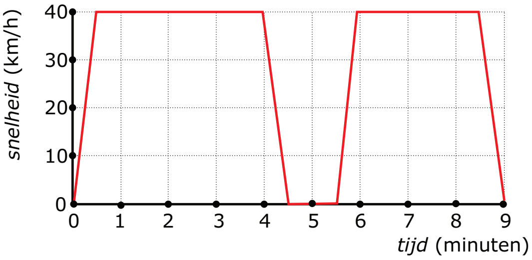
a Waarom moet de grafiek een trapgrafiek zijn?

b Hoeveel betaal je in juli 2014?

c In welk jaar was de maandcontributie € 13,00?

Voorbeeld 3

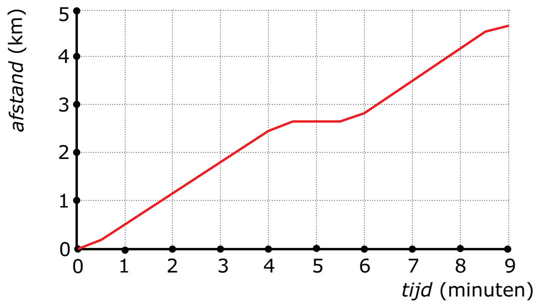
Deze grafiek geeft de snelheid aan van iemand die vanaf huis met zijn scooter naar school gaat. Je ziet dat hij de eerste halve minuut gemiddeld 20 km/h rijdt. Hoeveel km legt hij die eerste halve minuut af? Teken een grafiek van de afgelegde afstand afhankelijk van de tijd.



Figuur 3.10

Antwoord

De eerste halve minuut rijdt hij gemiddeld 20 km/h = $\frac{1}{3}$ km/min. In die halve minuut legt hij $\frac{1}{6}$ km af. Daarna rijdt hij drieënhalve minuut met 40 km/h = $\frac{2}{3}$ km/min. Hij legt dan elke halve minuut $\frac{1}{3}$ km af. Hierbij kun je een tabel maken voor de eerste vier minuten. De volgende halve minuut rijdt hij gemiddeld weer met 20 km/h = $\frac{1}{3}$ km/min. Dan staat hij een minuut stil. Zo kun je je tabel en je grafiek voortzetten en afmaken. Ga na dat er in totaal $4\frac{2}{3}$ km wordt afgelegd.



Figuur 3.11

Opgave 6

Je ziet de grafiek van twee wielrenners die een wedstrijd over 120 km rijden. Het is een individuele tijdrit, dus ze starten na elkaar.

a Welke van beide wielrenners startte het snelst? Hoe zie je dat aan de grafiek?

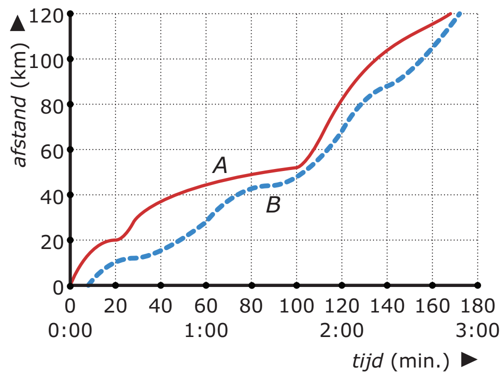
b Hoeveel bedroeg de gemiddelde snelheid van renner A gedurende de rit? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

c Welk stuk van de route gaan ze bergop? Licht je antwoord toe.

d Wie van beiden is de beste klimmer? Licht je antwoord toe.

e Wie wint de tijdrit? Licht je antwoord toe.

f Waarom hebben deze grafieken geen dalende stukken?



Figuur 3.12

Opgave 7

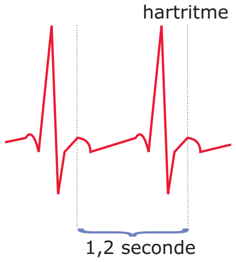
Op de intensive care van een ziekenhuis bewaakt men met hartbewakingsapparatuur de hartfunctie van patiënten. Je ziet een grafische weergave van de hartslag van een patiënt. De hartslag wordt gewoonlijk uitgedrukt in het aantal slagen per minuut.

a Wat is het aantal hartslagen van deze patiënt per minuut?

b Hoe groot is de hartslagfrequentie per seconde?

c De grafiek herhaalt zich steeds. Hoe groot is de periode van dit periodieke verschijnsel?

d Iemand die een zware lichamelijke inspanning heeft geleverd, heeft kort daarna meestal een verhoogde hartslagfrequentie. Hoe zal de grafiek van deze persoon eruitzien na een zware lichamelijke inspanning qua periode en hartslagfrequentie?



Figuur 3.13

Verwerken

Opgave 8

De tabel geeft het aantal dodelijke ongelukken ten gevolge van branden in de periode 1950 tot en met 1982 in de Verenigde Staten weer.

a Teken een geschikte grafiek bij de eerste twee kolommen.

b Welke variabele is de afhankelijke variabele?

c Kun je een conclusie trekken over het aantal doden als gevolg van brand?

d Zie je dat het best terug in de tabel of in de grafiek?

e Waarom is ook de derde kolom nodig om te concluderen dat het nemen van maatregelen voor brandpreventie na 1980 vruchten begon af te werpen?

f Schat met behulp van de tabel hoeveel inwoners de Verenigde Staten in 1982 had.

Dodelijke ongelukken als gevolg van brand in de U.S.A.

jaar	aantal doden	aantal doden per 1000 inwoners
1950	6405	4,2
1952	6922	4,4
1954	6003	3,7
1956	6405	3,8
1958	7291	4,2
1960	7645	4,2
1962	7534	4
1964	7379	3,8
1966	8084	4,1
1968	7335	3,7
1970	6718	3,3
1972	6714	3,2
1974	6236	2,9
1976	7480	3,5
1978	7440	3,4
1979	6245	2,8
1980	5765	2,6
1981	5860	2,6
1982	5325	2,3

Figuur 3.14

Opgave 9

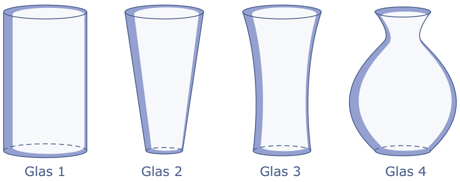
In de maand december van 2014 was het koud in Nederland. Vanaf sinterklaas tot en met eerste kerstdag waren de minimumtemperaturen per dag in °C achtereenvolgens -1; -3; -8; 3; -12; -10; 0; 1; -1; -1; -3; -2; 0; -5; -4; -3; -6; -11; 9; 7; 6.

a Teken een lijndiagram bij deze gegevens.

b Wat is de gemiddelde minimumtemperatuur in deze periode? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

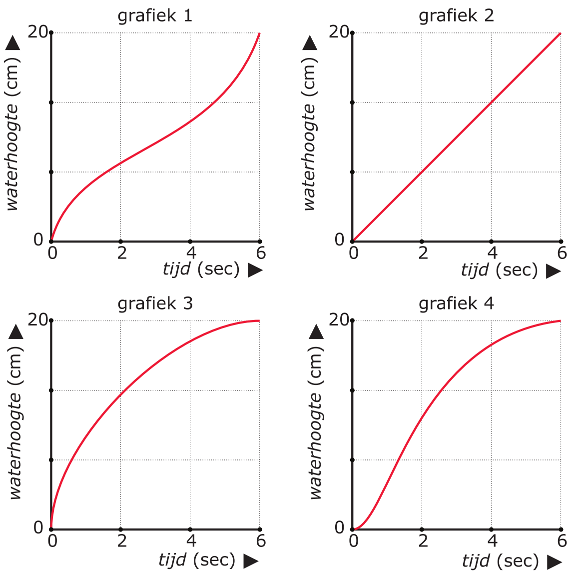
c Op hoeveel procent van de dagen vroor het in deze periode? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 10



Figuur 3.15

Als je een glazen vaas onder een gelijkmatig stromende kraan houdt, zie je de waterspiegel in de vaas stijgen. De vier vazen hebben dezelfde hoogte, maar een verschillende vorm. De vier grafieken geven de waterhoogte h (in centimeter) uitgezet tegen de tijd t (in seconden).



Figuur 3.16

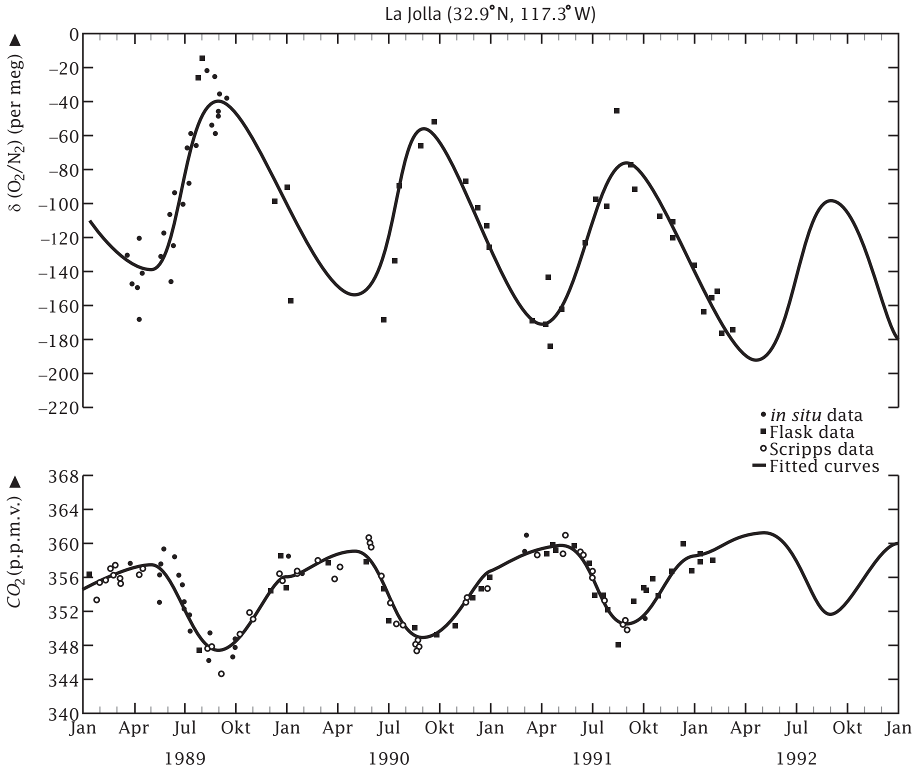
a Geef aan welke grafiek bij welk glas hoort. Waarom zijn dit allemaal vloeiend lopende grafieken?

b Leg uit waarom de grafiek die je bij a hebt aangegeven bij glas 4 hoort.

c Teken de grafieken van h afhankelijk van t als het water twee keer zo snel stroomt.

Opgave 11

De hoeveelheid kooldioxide (CO_2) en de hoeveelheid zuurstof (O_2) in de lucht worden onder andere in balans gehouden doordat de planten op aarde kooldioxide omzetten in zuurstof. Deze grafieken laten dat zien.



p.p.m.v. = parts per million by volume = cm^3 per m^3

δ (O_2/N_2) (per meg) = afname verhouding zuurstof tot stikstof

Figuur 3.17

a Hoe groot is de periode van de grafiek van CO_2?

b Waarom daalt de hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer in de periode mei tot en met augustus?

c Hoeveel cm³ CO_2 zat er in 1990 per m³ minimaal in de atmosfeer en hoeveel maximaal?

d De maxima van de bovenste grafiek komen overeen met de minima van de onderste grafiek en andersom. Verklaar dit.

e Teken een trendlijn voor de kooldioxidegrafiek.

f Voorspel het gehalte kooldioxide in januari 2010 als deze trend zich voortzet.

Opgave 12

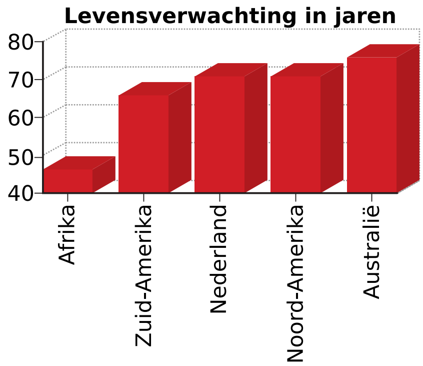
Bekijk de figuur met de levensverwachting in verschillende delen van de wereld.

a Leg uit waarom er geen lijngrafiek getekend is.

b Alle staven van de figuur zijn minimaal drie keer zo hoog als die van Afrika. Worden de mensen in Australië drie keer zo oud als in Afrika? Licht je antwoord toe.

c Welke gegevens zijn in deze figuur tegen elkaar uitgezet?

d Wat zou je moeten veranderen om een betere grafische voorstelling van de werkelijkheid te krijgen?



Figuur 3.18

Toepassen

Om de groei van kinderen te volgen zijn er zogenaamde **schoolartsenkaarten** ontwikkeld. Je kunt ze hier downloaden:

- **schoolartsenkaart voor jongens**
- **schoolartsenkaart voor meisjes**

Je kunt er twee groeigrafieken op bijhouden: een grafiek voor *lengte* in cm en een grafiek voor *gewicht* in kg, beide afhankelijk van *leeftijd* in jaren.

Opgave 13

Bekijk de schoolartsenkaart voor jongens. Als een grafiek op deze kaart een P-waarde van 50 heeft, betekent dit dat 50% van de jongens daar onder zit.

a Welke twee variabelen worden er in het onderste deel van deze kaart tegen elkaar uitgezet?

b Waarom staan er op deze kaart al grafieken voorgedrukt?

c Hoe kun je met behulp van deze schoolartsenkaart de lengte voorspellen van een gemiddelde man van 20 jaar?

d Welke twee variabelen worden er in het bovenste deel van deze kaart tegen elkaar uitgezet?

e Hoe zwaar is een gemiddelde jongen van 15 jaar ongeveer?

Opgave 14

Bekijk de schoolartsenkaart voor meisjes. Een uitdrukking als P_{10} bij een grafiek op deze kaart betekent dat 10% van de meisjes daar onder zit.

a Hoe lang is een gemiddeld meisje van 15 jaar ongeveer?

b Hoe zwaar is een gemiddelde vrouw van 15 jaar?

c Hoe lang en hoe zwaar is 90% van de vrouwen van 15 jaar minstens?

Testen

Opgave 15

In de tabel vind je de levensverwachting van mannen en vrouwen bij hun geboorte in Nederland.

jaar	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
mannen	70,0	71,0	71,0	72,2	74,3	75,5	78,8
vrouwen	72,5	75,5	76,9	77,8	79,5	80,6	82,7

Tabel 3.1

a Teken de twee bijbehorende grafieken in één figuur.

b Hoe heb je de punten die horen bij waarden uit de tabel met elkaar verbonden? Motiveer je keuze.

c In een bepaalde periode is het verschil tussen de levensverwachting bij vrouwen en bij mannen sterk toegenomen. In welke periode was dat?

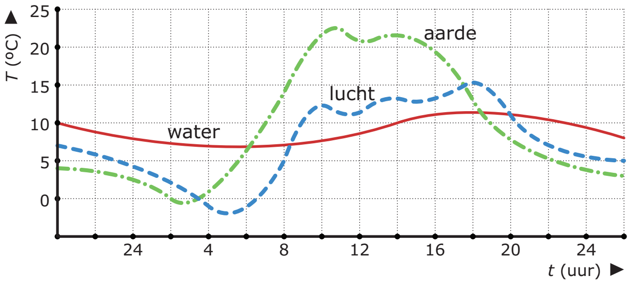
Opgave 16

De grafieken geven het temperatuurverloop van het aardoppervlak, de lucht en het water op een zonnige voorjaarsdag in Nederland weer.

a Leg uit hoe je aan de grafieken kunt zien dat het om een zonnige voorjaarsdag in Nederland gaat.

b Hoeveel bedroeg de minimale temperatuur van de atmosfeer die dag? Op welk tijdstip werd die temperatuur bereikt?

c Op een deel van de dag was het die dag zo bewolkt dat de temperatuur van de aarde daalde. Welk deel van de dag was dat?



Figuur 3.19

d Wat houdt de temperatuur het beste vast: aarde, lucht of water? Hoe zie je dat aan de grafieken?

e De volgende dag is het dicht bewolkt. Maak een schets van het verloop van de drie grafieken op die dag.

f Leg uit waarom deze temperatuurgrafieken wel een vaste periode hebben, maar dat er toch geen sprake is van een zuiver periodiek verschijnsel.

Practicum

Met **Excel** (een spreadsheetprogramma, een rekenblad) werken is ook handig bij het maken van grafieken bij tabellen. Je kunt bj gegeven tabellen gemakkelijk diagrammen en grafieken maken.

Als je nog weinig met Excel hebt gewerkt, doe dan ook het eerste practicum. Anders is het tweede voldoende.

- **Basistechnieken Excel**
- **Grafieken bij tabellen met Excel**

2.4 Waarden toevoegen

Inleiding

Grafieken en tabellen worden vooral gemaakt om het verloop van een bepaalde variabele afhankelijk van bijvoorbeeld de tijd duidelijk in beeld te krijgen. Waarom wil men dat? Om voorspellingen te kunnen doen of tussenliggende waarden te kunnen vaststellen. Het gaat dus vrijwel altijd om het toevoegen van nieuwe waarden op grond van het verloop in de tabel of de grafiek. Maar zoiets kun je niet zomaar doen. Je gebruikt de regelmaat die je aantreft, de eigenschappen van de grafieken...

Je leert in dit onderwerp

- grafieken gebruiken om waarden toe te voegen in tabellen, interpoleren en extrapoleren;
- waarden aflezen in bundels grafieken;
- waarden toevoegen in periodieke grafieken.

Voorkennis

- grafieken tekenen en de eigenschappen van grafieken herkennen;
- de periode in een zich herhalende grafiek herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je een tabel van de bevolking van Deventer. Het 'aantal personen' hangt af van het 'jaartal' (de tijd). Je kunt de tabel gebruiken om de bevolking op tussenliggende of toekomstige tijdstippen te voorspellen. De volkstelling is elk jaar op 1 januari.

a Hoeveel mensen telde Deventer op 1 juli 2010 ongeveer?

b Waarom kun je het aantal mensen op 1 juli 2007 heel moeilijk schatten?

c Schat het aantal mensen in Deventer op 1 januari 2025.

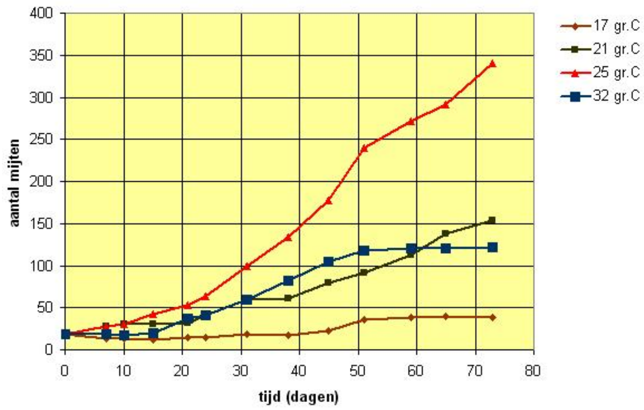
Bevolking Deventer	
jaartal	aantal personen
2006	96540
2007	96596
2008	97328
2009	97904
2010	98541
2011	98779
2012	98673
2013	98558
2014	98356
2015	98540
2016	98869
2017	99295
2018	99653
2019	99957
telling 1-1-20XX	

Figuur 4.1

Uitleg

De huisstofmijt is bijna onzichtbaar klein (circa 0,3 mm). Huisstofmijten leven in huisstof en zitten bijvoorbeeld in matrassen en het tapijt. Ideaal voor de huisstofmijt is een temperatuur van ongeveer 25 graden Celsius en een luchtvochtigheid van 50-75%.

Je ziet hier grafieken van het aantal huisstofmijten dat ontstaat uit een kleine beginpopulatie bij de juiste leefomstandigheden. Elke grafiek beschrijft het aantal mijten uitgezet tegen de tijd in dagen, steeds bij een andere temperatuur. Dit is een grafiekenbundel. De getekende punten zijn de echte meetpunten. Aan de hand van deze punten kun je:



Figuur 4.2

- schatten dat het aantal mijten na 55 dagen bij een temperatuur van 25 °C ongeveer 250 bedraagt, terwijl dit bij een temperatuur van 21 °C slechts ongeveer 100 is. Je doet dit door de rechte lijnstukjes tussen twee meetpunten af te lezen. Je spreekt dan van interpoleren tussen twee punten.
- schatten dat het aantal mijten na 75 dagen bij een temperatuur van 25 °C ongeveer 350 bedraagt, terwijl dit bij een temperatuur van 21 °C slechts ongeveer 160 is. Je doet dit door de rechte lijnstukjes van de laatste twee meetpunten door te trekken. Je spreekt dan van extrapoleren.

Opgave 1

Bekijk de grafieken van het aantal huisstofmijten in de **Uitleg**.

a Controleer de schatting van het aantal mijten bij een temperatuur van 21 °C na 55 dagen.

b Controleer de schatting van het aantal mijten bij een temperatuur van 25 °C na 75 dagen.

c Wat is het verschil tussen interpoleren en extrapoleren?

d Schat het aantal mijten na 55 dagen bij een temperatuur van 23 °C.

Opgave 2

Bekijk de grafieken van het aantal huisstofmijten in de **Uitleg**.

a Hoeveel huisstofmijten waren er bij het begin van het onderzoek?

b Hoeveel zijn er na 45 dagen bij een temperatuur van 32 °C? Met hoeveel procent is het aantal dus toegenomen?

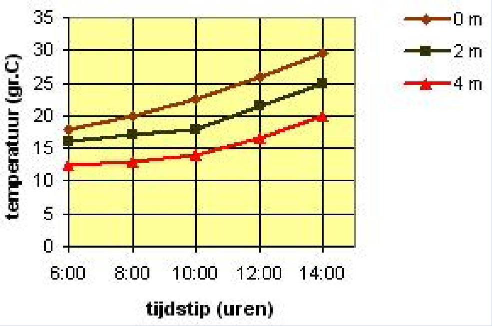
c Schets de grafiek van de groei van huisstofmijten bij 20 °C.

d Waarom kun je de grafiek bij 26 °C niet tekenen op grond van de gegeven grafieken?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Veel grafieken horen bij tabellen met metingen. De manier waarop je de meetpunten met elkaar verbindt is een keuze. Bij een lijngrafiek trek je rechte lijnstukken tussen twee meetpunten, soms teken je een vloeiende kromme.



Figuur 4.3

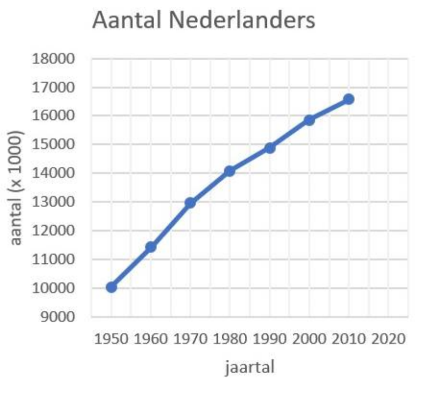
Waarden die niet in de tabel voorkomen, kun je alleen schatten:

- **interpoleren** is het schatten van punten tussen twee meetpunten, vaak door er een lijnstukje tussen te trekken en dan af te lezen;
- **extrapoleren** is het schatten van punten buiten het gebied met meetpunten, vaak door een lijnstukje tussen de twee voorgaande (of de twee opvolgende) meetpunten te verlengen en dan af te lezen.

Soms heb je te maken met meerdere grafieken die bij dezelfde variabelen op de assen horen. Dat is een **grafiekenbundel**. Ook daarin kun je waarden aflezen die niet in de tabellen voorkomen, zelfs in het gebied tussen twee grafieken.

Voorbeeld 1

Je ziet een grafiek van het aantal Nederlanders (×1000) uitgezet tegen het jaartal. Schat door interpoleren het aantal Nederlanders in 1955. Schat door extrapoleren het aantal Nederlanders in 2020.



Figuur 4.4

Antwoord

Er zijn al rechte lijnstukjes getrokken tussen de meetpunten. Je zoekt 1955 op de horizontale as en leest af: ongeveer 11600. Dat zijn 11,6 miljoen Nederlanders.

Om het aantal Nederlanders in 2020 te kunnen bepalen, verleng je het lijnstukje behorende bij de laatste twee meetpunten. Ga na dat je dan ongeveer 17500 afleest bij 2020, dus ongeveer 17,5 miljoen Nederlanders.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van de bevolking van Nederland in **Voorbeeld 1**.

a Schat het aantal Nederlanders in 1950 met behulp van de grafiek.

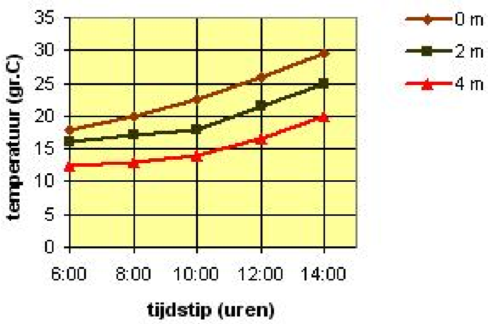
b Denk je dat het antwoord bij a betrouwbaar is? Licht je antwoord toe.

c Schat het aantal Nederlanders in 1965 met behulp van de grafiek.

d Schat het aantal Nederlanders in 2020. Leg uit hoe je te werk bent gegaan.

Voorbeeld 2

Je ziet een bundel grafieken van de watertemperatuur (in °C) afhankelijk van het tijdstip op de dag. De metingen zijn verricht in een groot meer op een tropische dag. De watertemperatuur loopt, zoals je kan zien, in de loop van de ochtend al behoorlijk op. Echter, het is niet op elke diepte even warm. Hoe warm is het om 13:00 uur op 1 meter diepte? Waarom heeft extrapoleren naar 15:00 uur niet veel zin?



Figuur 4.5

Antwoord

Om 13:00 uur is het op 0 meter diepte ongeveer $27{,}5$ °C. Om 13:00 uur is het op 2 meter diepte ongeveer 23 °C. Op 1 meter diepte zal het op dat tijdstip daar ongeveer $25{,}25$ °C zijn.

Het heeft weinig zin om de watertemperatuur na 14:00 uur te extrapoleren, want daarna gaat de zon weer zakken en zal de opwarming niet meer zo sterk zijn.

Opgave 4

Gebruik de grafieken van de watertemperatuur uit **Voorbeeld 2**.

a Hoe warm is het water om 11:00 uur op drie meter diepte?

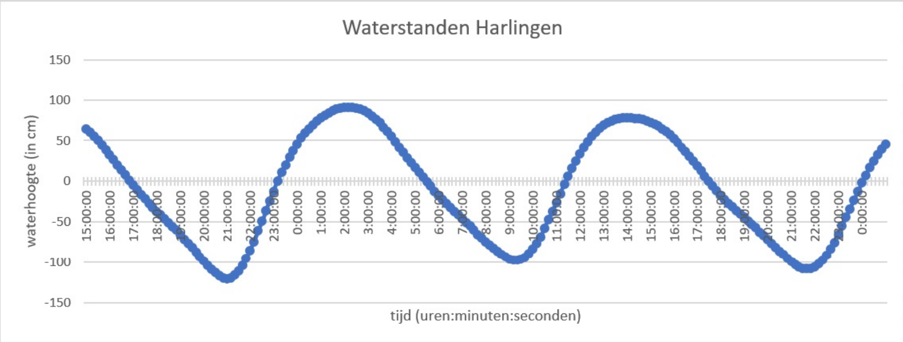
b Waarom loopt de grafiek bij een diepte van 0 meter tussen 6:00 en 10:00 uur steiler dan de andere twee grafieken?

c Waarom is dit na 10:00 uur niet meer het geval?

d Kun je iets zeggen over de grafieken na 14:00 uur?

Voorbeeld 3

Op het internet kun je de getijvoorspellingen van de waterstanden voor de komende dagen op verschillende locaties in Nederland en op de Noordzee vinden. Bekijk de grafiek van de waterstanden in Harlingen. Als je nu de waterstand om 14:00 uur de volgende dag wilt weten, hoe ga je dan te werk?



Figuur 4.6

Antwoord

Omdat de waterstand periodiek is, heeft extrapoleren door het eind van de grafiek door te trekken geen enkele zin. Nu maak je gebruik van de periode van de grafiek.
De waterstand kent een periode van ongeveer 12 uur en 20 minuten. Je kunt dat in de grafiek zien. Dit betekent dat de grafiek om de 12 uur en 20 minuten (ongeveer) dezelfde waterstand aangeeft. De waterstand zal om 1:00 uur ongeveer dezelfde hoogte hebben als om 13:20 uur. De waterstand is wel erg afhankelijk van het weer, van wind en regen, dus heel erg betrouwbaar is deze schatting niet.

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** vind je de grafiek van de waterstanden bij Harlingen. Dit is een periodieke grafiek.

a Voorspel de waterstand om 14:00 uur van de volgende dag.

b Hoe hoog is de waterstand twee dagen later om 14:00 uur?

c Waarom zijn deze antwoorden toch alleen maar schattingen?

Verwerken

Opgave 6

De tabel geeft het aantal werklozen in een bepaalde stad weer. De aantallen werklozen zijn afgerond op honderdtallen.

tijd	mrt '14	mei '14	jul '14	sep '14	nov '14	jan '15	mrt '15	mei '15	jul '15	sep '15	nov '15
aantal	10700	11400	11100	10300	10000	10700	11900	12600	12300	11500	11200

Tabel 4.1

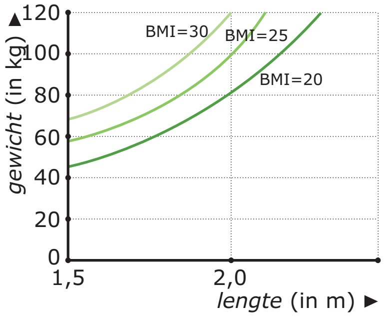
a Maak een grafiek van deze werkloosheidscijfers.

b Hoe kun je aan de grafiek zien dat er bij werkloosheid sprake is van seizoensinvloeden?

c Ga ervan uit dat deze trend zich voortzet. Voorspel het aantal werklozen in deze stad in januari 2016.

Opgave 7

De *Body Mass Index* (*BMI*) geeft aan of mensen van boven de 16 jaar:
op het juiste gewicht zitten ($20 < BMI \leq 25$),
matig overgewicht hebben ($25 < BMI \leq 30$)
of te zwaar ($BMI > 30$)
of te licht ($BMI \leq 20$) zijn.
Met deze grafieken kun je de *BMI* bepalen.



Figuur 4.7

a Schat de *BMI* van iemand die 18 jaar is, 1,90 meter lang is en 90 kilogram weegt.

b Hoe zwaar moet iemand van boven de 16 jaar zijn als hij 1,65 meter lang is en een gezond gewicht wil hebben? Geef de ondergrens en de bovengrens.

c Schets de grafiek die hoort bij een *BMI* van 23.

d Waarom gelden deze grafieken voor de *BMI* alleen voor mensen boven de 16 jaar, denk je?

Opgave 8

In de tabel zie je een overzicht van het aantal personenauto's in Nederland.

jaar	1999	2005	2007	2008	2009	2010
aantal personenauto's	4100000	4300000	4350000	4410000	4500000	4660000

Tabel 4.2

a Bepaal door interpoleren de aantallen voor het jaar 2000 en het jaar 2006.

b Bepaal door extrapoleren de aantallen voor 2014 en 2016.

c Hoeveel auto's zijn er per Nederlander in 1990? Ons land telde toen 14,89 miljoen inwoners. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

d Hoeveel Nederlanders waren er per auto in 1990? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

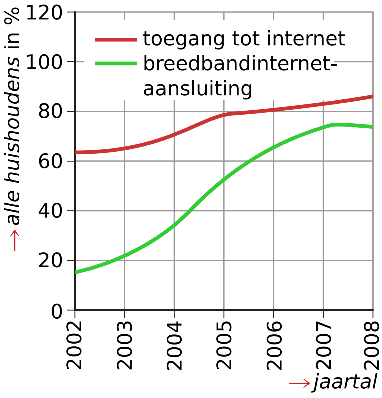
Opgave 9

Bekijk het percentage huishoudens met een internetaansluiting van 2002 tot en met 2008.

a Kun je aan deze grafiek zien of het aantal breedbandaansluitingen is gestegen? Licht je antwoord toe.

b Leg uit of - en zo ja hoe - je met behulp van extrapoleren het percentage breedbandaansluitingen in 2028 kunt schatten.

c Huishoudens die wel internet hebben maar geen breedbandaansluiting, hebben een andere aansluiting. Teken de grafiek van het percentage huishoudens dat een andere internetaansluiting heeft.



Figuur 4.8

Opgave 10

Op een kermis staan een groot reuzenrad van twintig meter hoog en een klein reuzenrad van tien meter hoog. Beide draaien in twee minuten één keer rond. Je stapt onderaan in een bakje van het grote reuzenrad en je vriend(in) doet hetzelfde in het kleine reuzenrad. Jullie beginnen tegelijkertijd te draaien.

a Teken een grafiek van de hoogte van zowel jouw bakje als dat van je vriend(in) over drie rondes.

b Bepaal door grafisch interpoleren de hoogte van jouw bakje in het grote reuzenrad na 75 seconden.

c Bepaal door grafisch extrapoleren de hoogte van het bakje van je vriend(in) na 11,5 minuten.

d Teken de grafiek met het hoogteverschil tussen het grote reuzenrad en het kleine reuzenrad.

Toepassen

Om de groei van kinderen te volgen zijn er zogenaamde **schoolartsenkaarten** ontwikkeld. Je kunt ze hier downloaden:

- **schoolartsenkaart voor jongens**
- **schoolartsenkaart voor meisjes**

Je kunt er twee groeigrafieken op bijhouden: een grafiek voor *lengte* in cm en een grafiek voor *gewicht* in kg, beide afhankelijk van *leeftijd* in jaren.

Opgave 11

Bekijk de schoolartsenkaart voor meisjes. De P_{50}-lijn geeft de lengte aan van een gemiddeld meisje.

a Schat door grafisch interpoleren de lengte van een gemiddeld meisje van vijftien jaar en drie maanden.

b Katja is op haar dertiende verjaardag 168 cm en op haar veertiende verjaardag 172 cm. Voorspel hoe lang zij op haar twintigste zal zijn door gebruik te maken van de groeigrafieken.

c Waarom is extrapoleren met behulp van een rechte lijn door beide punten hier onzinnig?

Testen

Opgave 12

De tabel geeft het aantal inwoners en het aantal woningen in een bepaalde gemeente weer.

jaar	1990	2000	2005	2010
aantal inwoners	11220	13910	14730	14990
aantal woningen	2800	4000	4400	4800

Tabel 4.3

a Maak een grafiek van het aantal inwoners in de periode van 1990-2010.

b Bereken door interpoleren het aantal inwoners in 1995 en het aantal inwoners in 1998.

c Bereken door extrapoleren het aantal inwoners in 2018.

d Maak een grafiek van het aantal inwoners per woning in de periode van 1990-2010. Wat valt op?

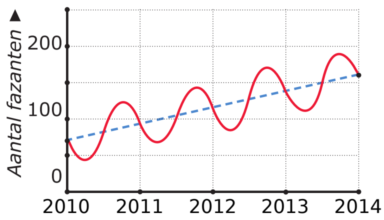
e Bereken door extrapoleren het aantal inwoners per woning in 2018. Dat kan op twee manieren; ga na of de antwoorden met elkaar overeenkomen.

Opgave 13

In de grafiek over het aantal fazanten is sprake van een duidelijke trend. Het aantal fazanten in dit gebied neemt gestaag toe.

a Waaraan kun je zien dat het aantal fazanten onderhevig is aan seizoensinvloeden?

b Bepaal het aantal fazanten in juni 2020 als deze trend zich voortzet.



Figuur 4.9

2.5 Combineren en vergelijken

Inleiding

Regelmatig heb je te maken met meerdere grafieken in één figuur. Soms zet je bijvoorbeeld op de verticale as zowel de kosten als de opbrengst uit tegen het aantal verkochte exemplaren. Dan kan het interessant zijn om naar het snijpunt van beide grafieken te kijken. Daar begin je winst te maken... Ook kun je een afzonderlijke winstgrafiek maken door opbrengst en kosten van elkaar af te trekken.

Je leert in dit onderwerp

- grafieken vergelijken en snijpunten aflezen en interpreteren;
- werken met somgrafiek en verschilgrafiek;
- grafieken schakelen.

Voorkennis

- grafieken tekenen en de eigenschappen van grafieken herkennen;
- waarden uit grafieken aflezen.

Verkennen

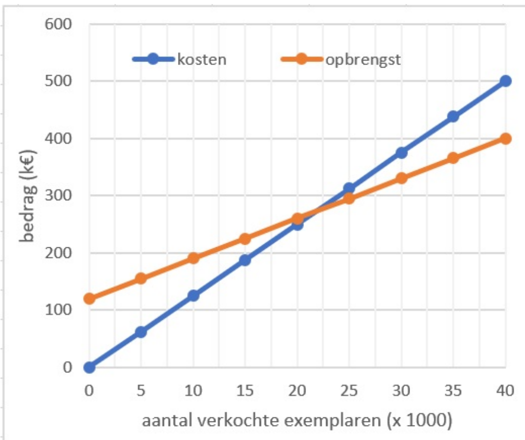
Opgave V1

Je ziet hier in één figuur de opbrengst en de kosten van een fabrikant bij de verkoop van een bepaald artikel. Zowel de opbrengst als de kosten hangen in duizenden euro's (k€) af van het aantal verkochte exemplaren (×1000).

a Het snijpunt van beide grafieken wordt wel het 'break-even-point' genoemd. Begrijp je waarom?

b Teken de grafiek van de winst uitgezet tegen de verkochte hoeveelheid.

c Waar vind je in de winstgrafiek bij b het 'break-evenpoint' terug?



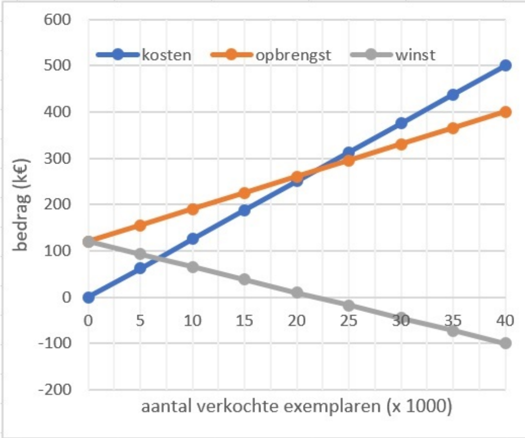
Figuur 5.1

Uitleg

De figuur laat de opbrengst en de kosten in duizenden euro (k€) zien bij de verkoop van een bepaald artikel.

Beide grafieken ontstaan vanuit tabellen. Zowel de opbrengst als de kosten hangen af van het aantal verkochte exemplaren (×1000). Ze staan daarom in één figuur. Het snijpunt van beide grafieken heeft een duidelijke betekenis: dan zijn opbrengst en kosten gelijk. De bijbehorende waarde van het aantal verkochte exemplaren kun je aflezen: ongeveer 22000. Bij een verkoop van 22000 of meer is er daarom sprake van winst.

Je kunt hiermee ook de grafiek maken van de winst: je trekt dan opbrengst en kosten van elkaar af. De verschilgrafiek van opbrengst en kosten is de winstgrafiek. Ook aan de winstgrafiek zie je dat de winst pas positief is bij een verkoop van 22000 artikelen of meer.



Figuur 5.2

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de grafieken van de opbrengst, de kosten en de winst bij de verkoop van een bepaald artikel. Bekijk de tabel van de opbrengst en de kosten.

aantal (×1000)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
opbrengst (k€)	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
kosten (k€)	120	148	176	204	232	260	288	316	344	372	400

Tabel 5.1

a Laat zien hoe de tabel voor de winstgrafiek uit deze tabel kan worden afgeleid.

b Kun je het snijpunt van beide grafieken met deze tabellen nauwkeuriger benaderen? Licht je antwoord toe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms heb je te maken met meerdere grafieken in één assenstelsel.

Kun je twee variabelen uitdrukken in dezelfde eenheden en hangen beide van dezelfde variabele af, dan kun je de bijbehorende grafieken in één figuur tekenen.

- In een **snijpunt** van beide grafieken hebben de twee variabelen op de verticale as dezelfde waarde.
- Je maakt een **somgrafiek** door steeds bij elkaar passende uitkomsten op te tellen.
- Je maakt een **verschilgrafiek** door steeds bij elkaar passende uitkomsten van elkaar af te trekken.

Heb je te maken met twee grafieken waarbij in de ene grafiek een variabele y afhangt van x en in de andere x weer afhangt van t, dan kun je deze variabelen **schakelen**: bij een waarde van t vind je een waarde van x en dan daarbij weer een passende waarde van y.

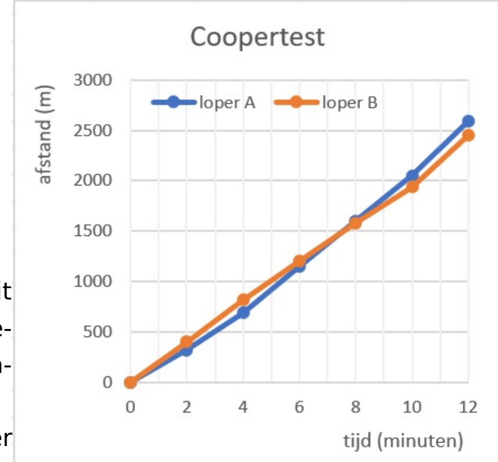
Voorbeeld 1

In de figuur zie je de grafieken van twee lopers die de Coopertest doen. Het gaat om het afleggen van een zo groot mogelijke afstand binnen 12 minuten.

- Hoeveel minuten ligt loper B voor op loper A?
- Wie van beiden levert de beste prestatie?

Antwoord

- Het snijpunt van beide grafieken kun je aflezen (schatten). Dit snijpunt is ongeveer $(7{,}5; 1490)$. De grafiek van loper B ligt gedurende de eerste $7{,}5$ minuten boven die van loper A. Gedurende die tijd ligt loper B voor op loper A.
- Loper A levert de beste prestatie. Hij loopt ongeveer 2600 meter in 12 minuten.



Figuur 5.3

Opgave 2

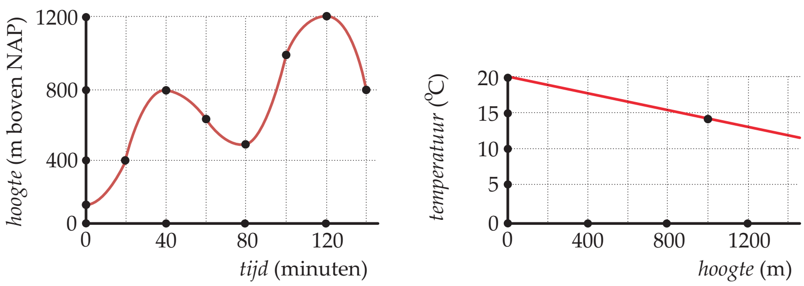
Bekijk de grafieken van de twee hardlopers in **Voorbeeld 1**.

a Maak een verschiltabel en een verschilgrafiek.

b Op welke punten gaat de verschilgrafiek door de horizontale as en wat betekent dit?

Voorbeeld 2

Beide grafieken geven informatie over een bergwandeling. De variabele tijd geeft het aantal minuten na het begin van de wandeling.



Figuur 5.4

- Hoeveel bedraagt de temperatuur na 80 minuten lopen?
- Hoeveel bedraagt het temperatuurverschil tussen het begin en eind van de wandeling?

Antwoord

- Na 80 minuten lopen is de wandelaar op 500 meter hoogte. In de tweede grafiek zie je dat de temperatuur op die hoogte ongeveer 17 °C is. Op deze manier schakel je de drie variabelen *tijd* → *hoogte* → *temperatuur*.

- Aan het begin van de wandeling is de wandelaar op ongeveer 150 meter hoogte. De temperatuur is dan ongeveer 19 °C. Aan het einde van de wandeling is de wandelaar op 800 meter hoogte. De temperatuur is dan ongeveer 15 °C. Het temperatuurverschil is daarom ongeveer 4 °C.

Opgave 3

Gebruik de grafieken bij de bergwandeling uit **Voorbeeld 2**.

a Hoeveel bedraagt de temperatuur na 40 minuten lopen?

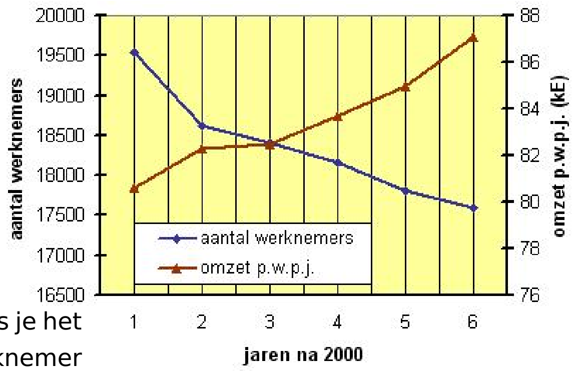
b Hoeveel bedraagt de temperatuur na 100 minuten lopen?

c Bekijk de temperatuur na 60 minuten lopen. Op welke andere twee momenten is de temperatuur gelijk aan dit moment?

d Hoeveel bedraagt het temperatuurverschil tussen het warmste en het koudste moment van de wandeling?

Voorbeeld 3

In de figuur zie je hoe binnen een groot bedrijf het aantal werknemers terugloopt, terwijl de omzet per werknemer per jaar stijgt (een mogelijke verklaring hiervoor is automatisering). Beide grafieken snijden elkaar. Leg uit waarom dit snijpunt geen enkele betekenis heeft en bereken de totale omzet van het bedrijf in dat jaar.



Figuur 5.5

Antwoord

Er zijn twee verschillende verticale assen: op de linkeras lees je het aantal werknemers af, op de rechteras de omzet per werknemer per jaar (in duizenden euro).

In het punt waar beide grafieken elkaar lijken te snijden (in 2003 dus), is het aantal werknemers ongeveer 18350 en de omzet per werknemer per jaar (p.w.p.j.) ongeveer € 82500,00. Deze uitkomsten zijn totaal verschillend. Wel kun je zo gemakkelijk de totale jaaromzet van het bedrijf uitrekenen.

Opgave 4

In **Voorbeeld 3** vind je twee grafieken die het aantal werknemers en de omzet van een bedrijf beschrijven.

a Waarom heeft het snijpunt van beide grafieken geen betekenis?

b Hoeveel bedraagt de totale jaaromzet in 2003?

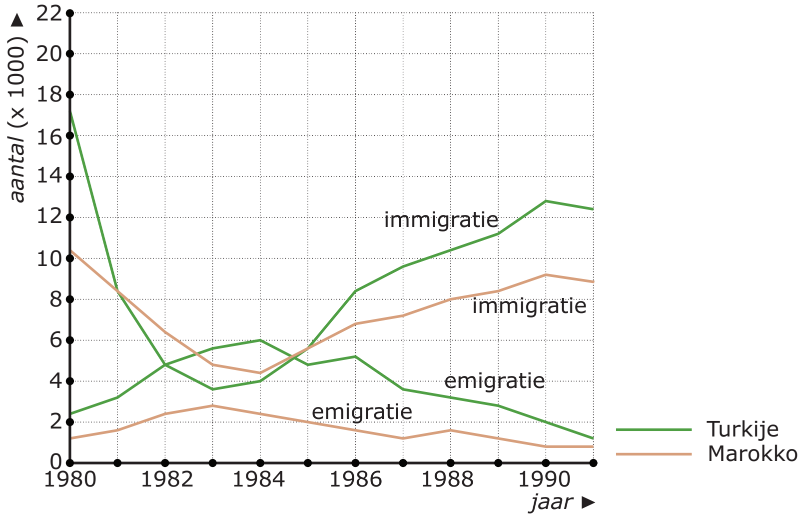
c Hoeveel bedraagt de totale jaaromzet in 2006?

d Betekent de daling van het aantal werknemers ook een daling van de omzet? Hoe zit het waarschijnlijk met de winst?

Verwerken

Opgave 5

Onder het migratiesaldo wordt het verschil verstaan tussen het aantal mensen dat naar Nederland immigreert en het aantal mensen dat uit Nederland emigreert. In de grafiek vind je gegevens over de migratie van Marokkanen en Turken van en naar Nederland in de periode 1980 - 1991.



Figuur 5.6

a Welke betekenis hebben de snijpunten van de grafieken van 'immigratie' en 'emigratie' bij dezelfde bevolkingsgroep?

b Welke betekenis hebben de snijpunten van de twee immigratiegrafieken?

c Welke van deze beide bevolkingsgroepen kende in een deel van deze periode een negatief migratiesaldo?

d Kun je op grond daarvan zeggen dat deze bevolkingsgroep in Nederland in aantal achteruit ging?

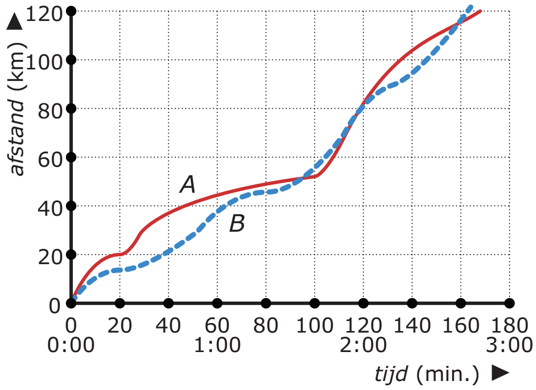
e Opvallend is het feit dat in de jaren 1982 - 1984 de immigratie veel lager is dan in de andere jaren en de emigratie juist wat hoger is. Geef daar redenen voor.

f Teken de grafiek van het migratiesaldo van de Turken.

g In welk jaar daalt dit migratiesaldo het sterkst?

Opgave 6

Je ziet de grafieken van twee wielrenners die samen een dag zijn gaan fietsen.



Figuur 5.7

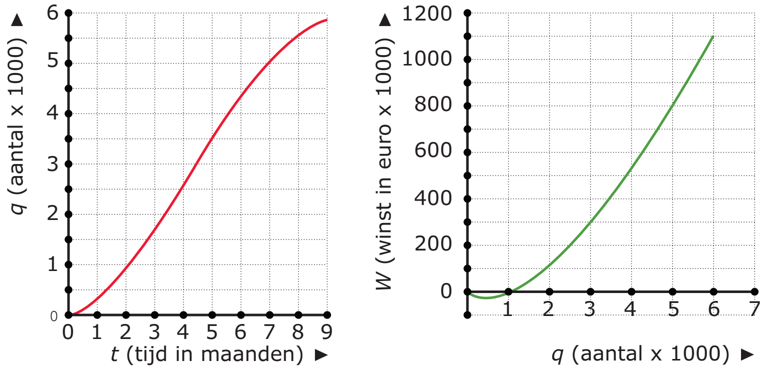
a Welke betekenis hebben de snijpunten van beide grafieken?

b Gedurende welke periode rijdt renner A voor renner B?

c Op welke momenten fietsen beide renners even snel?

Opgave 7

Deze grafieken laten zien hoeveel exemplaren q (in duizendtallen) een bedrijf van een artikel heeft verkocht en hoeveel winst W (in duizenden euro) het daarbij heeft gemaakt. q is uitgezet tegen de tijd t (in maanden) na de introductie van dit artikel op de markt.



Figuur 5.8

a Hoeveel exemplaren zijn er na vier maanden verkocht en hoeveel winst is daarop gemaakt?

b Tot welk aantal verkochte exemplaren werd er nog geen winst gemaakt?

c Maak een tabel van de winst W (in duizenden euro) afhankelijk van de tijd t (in maanden).

Opgave 8

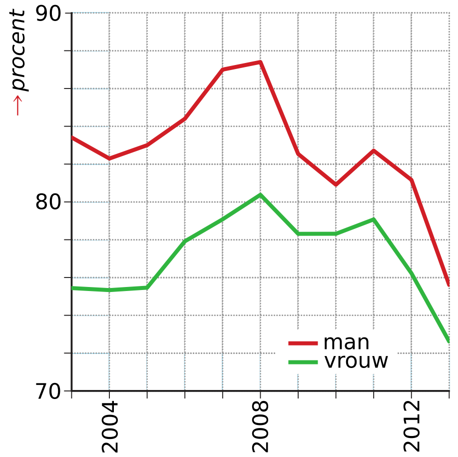
Bekijk deze grafieken van het CBS.

a Waarom is de arbeidsparticipatie van mannen en vrouwen samen niet gewoon de somgrafiek van de twee gegeven grafieken?

b Hoe kun je de grafiek wel maken? Ga uit van een gelijke verdeling tussen mannen en vrouwen.

c Maak een verschilgrafiek.

d Wat is de betekenis van de verschilgrafiek?



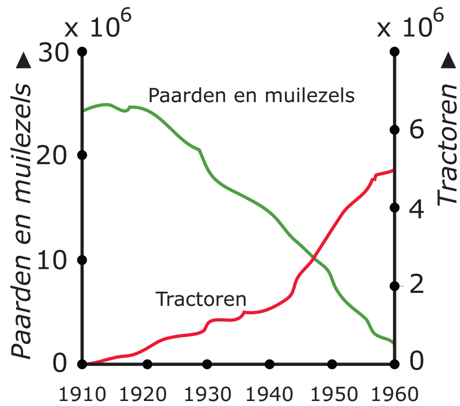
Figuur 5.9

Opgave 9

De figuur laat zien hoe in de vorige eeuw in de VS de paarden en muilezels als trekdieren werden vervangen door tractoren.

a De grafieken hebben een snijpunt. Heeft dat enige betekenis? Licht je antwoord toe.

b Op welk moment waren er even veel tractoren als paarden en muilezels?



Figuur 5.10

Toepassen

Om de groei van kinderen te volgen zijn er zogenaamde **schoolartsenkaarten** ontwikkeld. Je kunt ze hier downloaden:

- **schoolartsenkaart voor jongens**
- **schoolartsenkaart voor meisjes**

Je kunt er twee groeigrafieken op bijhouden: een grafiek voor *lengte* in cm en een grafiek voor *gewicht* in kg, beide afhankelijk van *leeftijd* in jaren.

Opgave 10

Bekijk de schoolartsenkaart voor meisjes. Door de twee P_{50}-grafieken te schakelen, kun je de grafiek maken van het gewicht afhankelijk van de leeftijd van een gemiddeld meisje van 3 tot 16 jaar. Leg uit hoe je dan te werk moet gaan en teken die grafiek.

Opgave 11

Bekijk de schoolartsenkaart voor jongens. Maak ook de grafiek van het gewicht afhankelijk van de leeftijd van een gemiddelde jongen van 3 tot 16 jaar. Vergelijk die grafiek met de grafiek van de meisjes en trek enkele conclusies.

Testen

Opgave 12

Klaas en Frits deden mee aan een halve triathlon: 3 km zwemmen, 75 km fietsen en 24 km hardlopen. De gemiddelde snelheden voor Klaas waren: zwemmen 3 km/h; fietsen 30 km/h; hardlopen 12 km/h. Voor Frits waren ze: zwemmen 4 km/h; fietsen 25 km/h; hardlopen 16 km/h.

a Teken beide grafieken in één assenstelsel.

b Wie van de twee was het eerst bij de finish? Hoeveel minuten was zijn voorsprong?

c Hebben de snijpunten van deze grafieken betekenis?

d Kun je de vraag wie na drie uur voor lag beantwoorden? Licht je antwoord toe.

e Bereken de gemiddelde snelheid van Klaas over de halve triathlon.

Opgave 13

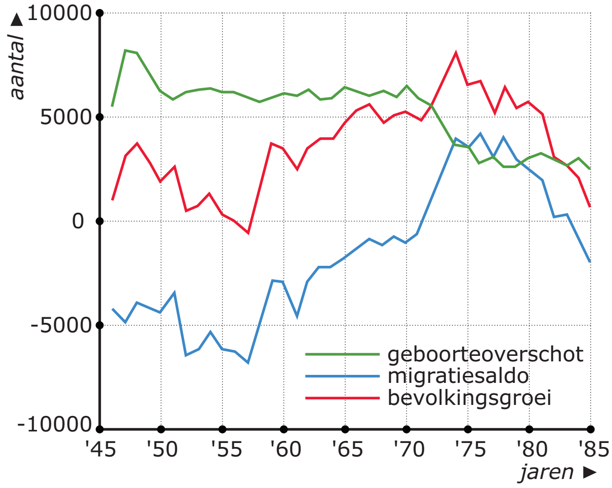
In de figuur vind je grafieken van de bevolkingsgroei, het migratiesaldo en het geboorteoverschot in een bepaalde regio in de periode 1946-1985.

a Welk verband is er tussen deze drie grafieken?

b Er zijn twee jaren waarin het geboorteoverschot en de bevolkingsgroei gelijk zijn. Welke jaren zijn dat?

c Wat betekent dat voor het migratiesaldo?

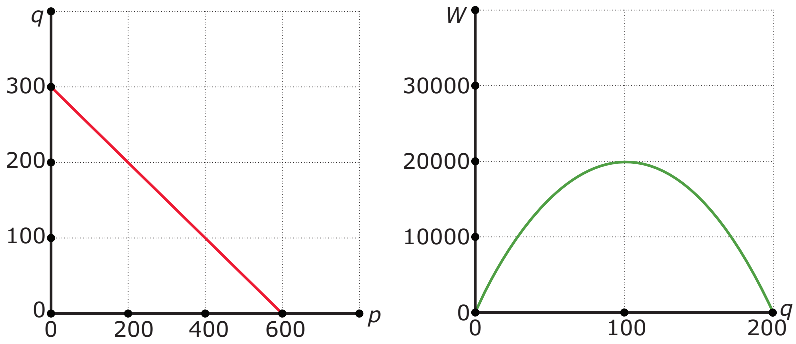
d Er is een periode waarin het geboorteoverschot vrijwel constant is. Wat betekent dat voor de grafieken van het migratiesaldo en de bevolkingsgroei?



Figuur 5.11

Opgave 14

De winst W op een bepaald artikel hangt af van de prijs per stuk p en de hoeveelheid q die wordt verkocht. De grafieken geven het verband tussen W, p en q weer.



Figuur 5.12

Teken een grafiek van W uitgezet tegen p.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Tabellen en grafieken**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- tabel, rij en kolom — opschriften — absolute en relatieve getallen
- procent — percentage
- variabelen en eenheden — afhankelijk variabele — grafiek — maatstreepjes en bijschriften — vloeiende grafiek, lijngrafiek, trapgrafiek
- interpoleren en extrapoleren — grafiekenbundel
- snijpunt van twee grafieken — somgrafiek en verschilgrafiek — geschakelde grafiek

Activiteitenlijst

- soorten tabellen onderscheiden
- rekenen met procenten — indexcijfers gebruiken
- soorten grafieken onderscheiden — weten wanneer je welke soort grafiek toepast
- waarden toevoegen door inter(extra)poleren — waarden bepalen in een grafiekenbundel
- snijpunten aflezen — som(verschil)grafiek maken — grafieken en tabellen schakelen

Achtergronden

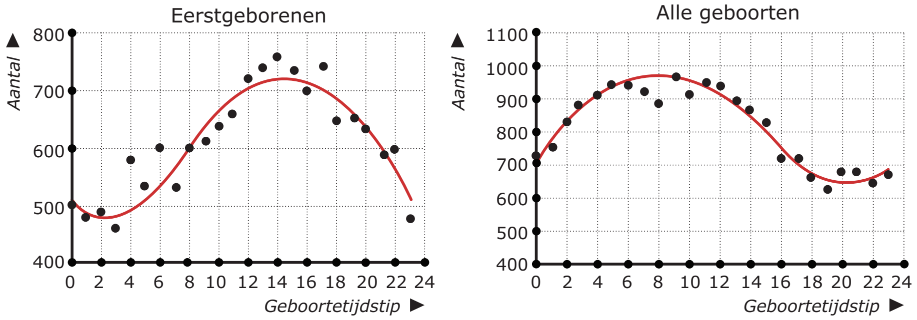
Nicole d'Oresme (1323—1382) was een Frans theoloog. Na zijn theologiestudie werd Oresme benoemd tot thesauriër (schatbewaarder) van de universiteit van Parijs. Later werd hij kanunnik en vervolgens deken van Rouen. In 1370 volgde zijn benoeming tot kapelaan van Charles V, de toenmalige koning van Frankrijk. Oresme was behalve Rooms Katholiek bisschop ook wetenschapper en econoom. Hij is de uitvinder van de **grafiek**. Oresme bestudeerde de beweging van voorwerpen en bedacht een manier om die in een figuur weer te geven. Hij gaf de grootte van de snelheid aan met een lijnstuk: hoe groter de snelheid des te langer het lijnstuk. Die lijnstukken zette hij rechtop op een horizontale as die de tijd voorstelt. Oresme's werk op dit gebied verscheen diverse keren in gedrukte vorm. Het was dan ook bekend onder wetenschappers als Galileï, die er (zo'n 250 jaar later) gebruik van maakte.

Figuur 6.1

Testen

Opgave 1

Opvallend is de verdeling van geboortetijdstippen over een etmaal zoals je die in deze grafieken ziet. Het gaat hierbij alleen om spontane (dus niet kunstmatig opgewekte) bevallingen.



Figuur 6.2

a Hoe groot is de periode van beide grafieken?

b Hoeveel eerstgeborenen heeft de onderzoekster ongeveer bij haar onderzoek betrokken?

c Welk opvallend verschil is er tussen beide grafieken? Kun je dat verklaren?

d Maak zelf een grafiek van alle niet-eerstgeborenen voor de eerste twaalf uur. Is deze grafiek ook periodiek?

e Hoeveel is het gemiddeld aantal spontane geboortes per uur?

f Hoeveel is het gemiddeld aantal spontaan eerstgeborenen per uur?

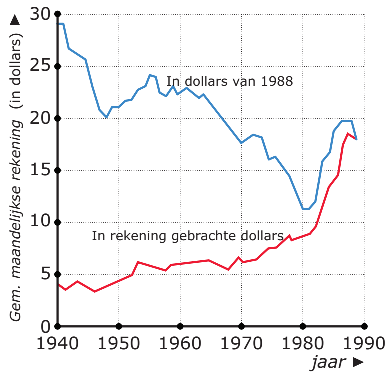
Opgave 2

De grafiek toont de gemiddelde maandelijkse telefoonrekening in de Verenigde Staten voor normale lokale telefoongesprekken van onbeperkte duur.

a Hoe hoog was in 1940 in de VS de gemiddelde maandelijkse telefoonrekening?

b Wat wordt in de grafiek bedoeld met ‘in dollars van 1988’?

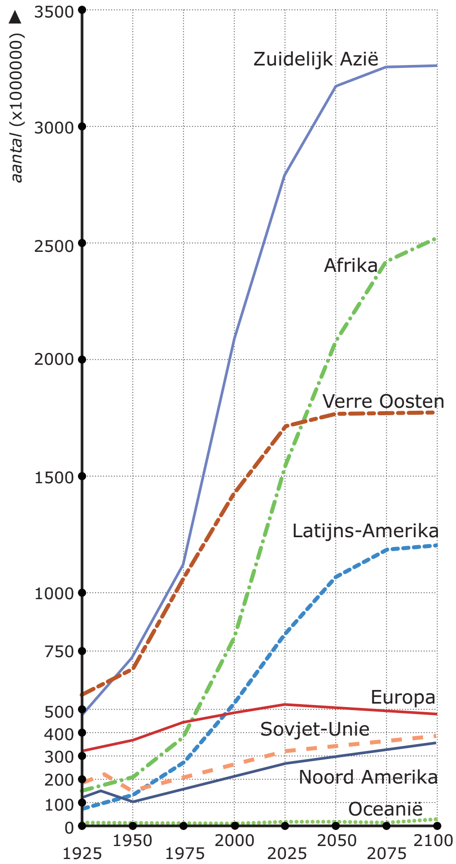
c De tarieven zijn voortdurend gedaald. Kun je dat op grond van deze grafieken concluderen? Licht je antwoord toe.



Figuur 6.3

Opgave 3

Deze figuur beschrijft de vermoedelijke ontwikkeling van de wereldbevolking in acht grote regio's.



Figuur 6.4

regio	*aantal* (mln) in 2000	*aantal* (mln) in 2100
Zuid-Azië	2100	3250
Oost-Azië	1400	1750
Afrika	800	2550
Latijns-Amerika	550	1200
Europa	495	495
Rusland	260	400
Noord-Amerika	205	360
Oceanië	10	30
Totaal	5820	10035

Tabel 6.1

a Hoeveel procent van de wereldbevolking bestond in 2000 uit Europeanen?

b Hoeveel is dat percentage in 2100 volgens deze grafieken?

c In welk jaar is het aantal Europeanen maximaal?

d Welke regio vertoont de sterkste stijging en in welke periode gebeurt dat?

e Welke regio vertoont nagenoeg geen verandering? Wat betekent dat voor hun aandeel in de totale wereldbevolking?

f Bepaal door interpoleren het aantal mensen in Zuid-Azië in 2010.

g De somgrafiek van Noord-Amerika en Latijns-Amerika geeft de bevolkingsontwikkeling van heel Amerika weer. Teken die somgrafiek.

Opgave 4

In 2008 liep Haile Gebreselassie de marathon in een tijd van 2 uur, 3 minuten en 59 seconden. Hij vestigde daarmee een nieuw wereldrecord op die afstand (42,195 km). In datzelfde jaar liep Usain Bolt de 100 meter in 9,69 seconden.

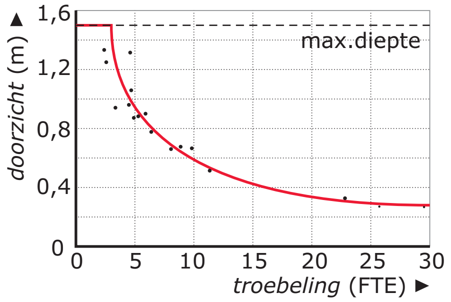
a Hoe snel liep Gebreselassie zijn marathon gemiddeld? Geef je antwoord in km/h op drie decimalen nauwkeurig.

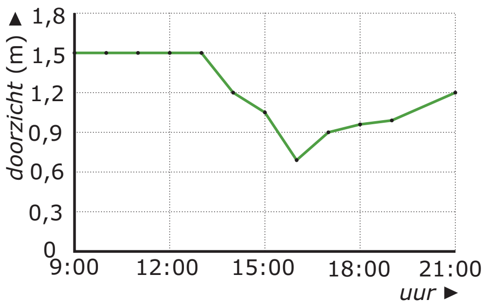
b Hoe snel liep Bolt zijn 100 meter gemiddeld? Geef je antwoord in km/h in drie decimalen nauwkeurig.

c Hoeveel procent liep Bolt sneller dan Gebreselassie? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 5

De kwaliteit van het water in recreatieplassen wordt regelmatig gecontroleerd. Als er veel zwemmers zijn, wordt het water na verloop van tijd troebel. De troebeling wordt gemeten in een zekere eenheid, genaamd FTE. Er bestaat een verband tussen de troebeling en het doorzicht (hoe diep je nog kunt zien). Dat verband is hier grafisch weergegeven. Het doorzicht is daarbij uitgedrukt in meter.





Figuur 6.5

a De troebeling neemt toe van 15 FTE tot 20 FTE. Hoeveel cm neemt het doorzicht af?

b Als je op twee plekken eenzelfde waarde vindt voor de toename van de troebeling, wil dat dan ook zeggen dat de afname van het doorzicht op beide plekken dezelfde waarde heeft? Licht je antwoord toe.

c Op zekere dag is het doorzicht ieder uur gemeten. Hoeveel FTE is de troebeling om 18:00 uur? Geef in de grafieken aan hoe je aan je antwoord gekomen bent.

d Op welk uur van de dag bereikt de troebeling de hoogste waarde? Licht je antwoord toe.

(bron: examen havo wiskunde A in 1991, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 6: Daglengte

De daglengte varieert door het jaar heen als gevolg van de periodiek veranderende tijden van zonsopkomst en zonsondergang. Van die tijden van zonsopkomst en zonsondergang bestaan nauwkeurige tabellen. Via **buienradar.nl** vind je een tabel met zonsopkomst en zonsondergang.

Hier zie je een tabel met tijden van zonsopkomst en -ondergang. Alle tijden zijn gemeten op de eerste van de maand. De grafiek van de daglengte is de verschilgrafiek van beide. Die kun je nu zelf maken. Alle tijden zijn in uren in M.E.T. (Midden-Europese Tijd), dus het gebruik van de zomertijd is uit de tabel weggewerkt.

a Teken bijbehorende grafieken van zonsopkomst en -ondergang. Welke periode hebben al deze grafieken?

b Wat verandert er aan deze grafieken als je wel met de zomertijd rekening houdt?

c Teken ook de grafiek van de daglengte.

d Op welke data zijn de daglengtes minimaal? En wanneer maximaal?

Zonsopkomst en zonsondergang in Nederland
De tijdstippen gelden steeds voor de eerste dag van de maand
Alle tijden zijn in M.E.T. (geen zomertijd dus)

maand	opkomst	ondergang
1	8:48	16:39
2	8:20	17:28
3	7:26	18:20
4	6:15	19:14
5	5:10	20:05
6	4:25	20:50
7	4:24	21:03
8	5:02	20:30
9	5:52	19:27
10	6:41	18:17
11	7:35	17:12
12	8:26	16:32

Figuur 6.6

Examen

Opgave 7

Aan bezoekers van het Nederlandse strand is op een aantal dagen gevraagd hoe zij het weer beoordelen. Omdat dagen met neerslag door vrijwel iedereen als onaangenaam worden ervaren, heeft men zich bij de enquête beperkt tot droge dagen. Factoren die dan een rol spelen, zijn onder andere: temperatuur, (mate van) bewolking en windsnelheid. Dit onderzoek heeft geleid tot een diagram met waarderingscijfers.

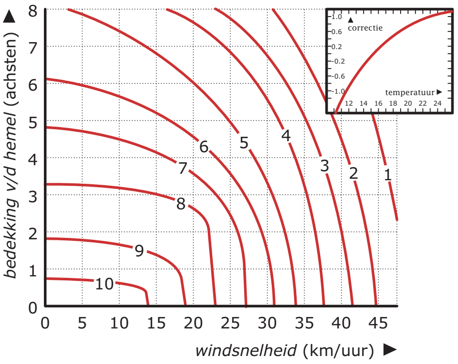


Diagram voor het bepalen van de aangenaamheid van droog weer. Horizontaal staat de windsnelheid op 10 meter hoogte en verticaal de bedekkingsgraad van de hemel in achtsten (geheel bewolkt is dus 8 achtsten). De kromme lijnen geven het waarderingscijfer dat loopt van 0 - 10. Bij een windsnelheid van 18 km/uur en een halfbewolkte hemel zou men het weer dus het cijfer 7 geven.
Het grafiekje rechts boven geeft de temperatuurcorrectie op dit cijfer aan. Als het bijv. 18 graden is, dan moet men 0,4 bij het waarderingscijfer optellen; bij 12 graden moet er één punt af.

Figuur 6.7

a Bij welke temperatuur kun je de waarderingscijfers rechtstreeks uit de figuur aflezen en hoef je er dus geen correctie bij te tellen?

b In het zomerseizoen spreek je van een recreatiedag als het waarderingscijfer 7 of hoger is. Op een dag is het twintig graden, half bewolkt en is de windsnelheid 20 km/h. Is dit een recreatiedag?

c Het weerbericht luidt: licht tot half bewolkt (2/8 tot 4/8), met windsnelheden van 15 tot 25 km/h. Hoe hoog moet de temperatuur zijn, wil je met zekerheid kunnen spreken van een recreatiedag?

d De kromme lijnen die bij de waarderingscijfers horen, lopen in de hoek linksonder bijna horizontaal. Welke conclusie kun je daaruit trekken?

(bron: examen wiskunde A in 1991, tweede tijdvak)

Opgave 8

Een van de methoden om inzicht te krijgen in het aantal keer en de duur dat er geparkeerd wordt in een bepaald gebied is kenteken-onderzoek. Met vaste tussenpozen (*waarnemingsinterval*) worden daarbij de kentekens van de geparkeerde auto's geregistreerd. Het aantal *achtereenvolgende* malen dat een auto is geregistreerd (*registratiefrequentie*) levert een schatting op van de parkeerduur per auto, terwijl het aantal verschillende auto's dat is geregistreerd een schatting oplevert van het aantal keer dat er geparkeerd wordt. Zo'n parkeeronderzoek is gehouden in Heerlen en resultaten daarvan staan in de tabel.

registratiefrequentie	*aantal auto's*	*geschatte parkeerduur* (in min)
1	5247	60
2	1804	120
3	753	180
4	359	240
5	287	300
6	443	360
7	290	420
8	165	480
9	115	540
	totaal 9463	gemiddeld 133

Tabel 6.2

Frequentieverdeling van het aantal achtereenvolgende malen dat geparkeerde auto's zijn geregistreerd:

- waarnemingsinterval: 60 minuten;
- eerste waarneming: 9:30 uur;
- laatste waarneming: 17:30 uur;
- parkeerterrein open: 8:30-18:30 uur.

Van 1804 auto's is de registratiefrequentie 2. De geschatte parkeerduur van elk van die auto's is 120 minuten. De werkelijke parkeerduur kan natuurlijk korter of langer zijn.

a Hoelang is de werkelijke parkeerduur op zijn hoogst bij een registratiefrequentie van 2?

b In de tabel staat dat het gemiddelde van de geschatte parkeerduur 133 minuten is. Leg uit hoe je dat gemiddelde met de overige gegevens uit de tabel kunt uitrekenen.

c Deze onderzoeksmethode levert een schatting van de gemiddelde parkeerduur per auto op die hoger is dan de werkelijke gemiddelde parkeerduur per auto. Leg uit wat daarvan de oorzaak kan zijn.

(bron: examen wiskunde A in 1989, tweede tijdvak)

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

Math4all
www.math4all.nl