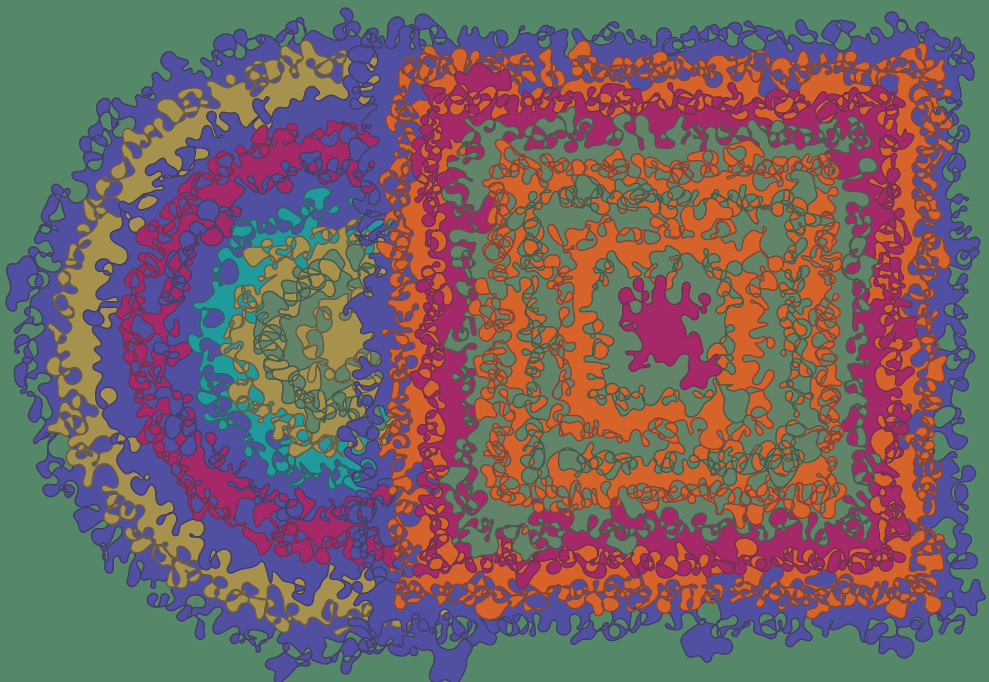
Wiskunde

3 VWO

Katern 3 / Opgaven

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

Begrippen

- statistisch onderzoek — populatie en steekproef — representatieve steekproef — absolute en relatieve frequenties — klassenindelingen — diagrammen;
- centrummaten — gemiddelde — modus — mediaan — spreidingsmaten — spreidingsbreedte — kwartielafstand) — boxplot — kwartielafstand — eerste kwartiel — tweede kwartiel;
- kans — relatieve frequentie;
- wegendiagram — boomdiagram.

Activiteiten

- omschrijven wat statistisch onderzoek is — herkennen wat een representatieve steekproef uit een populatie is — absolute en relatieve frequenties kunnen bepalen — frequentieverdelingen (met klassenindeling) en bijpassende diagrammen maken;
- het uitrekenen en aflezen van centrummaten (gemiddelde, modus, mediaan) en spreidingsmaten (spreidingsbreedte, kwartielafstand) — gegevens samenvatten in een boxplot;
- kansen bepalen door relatieve frequenties te bepalen of te beredeneren;
- kansen berekenen door overzichten van de mogelijkheden (in b.v. wegendiagrammen en boomdiagrammen) te tekenen;

Kansloos?!

Domein

Informatie verwerken

Hoofdstuk

Statistiek en kansrekening

Inhoud

1

1.1 Statistisch onderzoek

Verkennen

Opgave V1

Bekijk dit tekstje uit een folder van een theater.

> Uit onderzoek is gebleken dat veel theaterbezoekers het niet prettig vinden als zij in de pauze lang moeten wachten op een drankje. We heffen daarom een vaste servicetoeslag op de toegangsprijs zodat u op de avond van de voorstelling niet hoeft te betalen voor een drankje in de pauze en voor de bewaakte garderobe. Deze ‘portemonneeloze pauze’ bedraagt € 2,50, is verwerkt in de entreeprijs en staat vermeld op uw kaartje. Wanneer u kaarten boekt voor voorstellingen die plaatsvinden vanaf 1 september 2012 bedragen de kosten voor de ‘portemonneeloze pauze’ € 3.

a Wie heeft dit onderzoek uitgevoerd denk je?

b Is deze maatregel gunstig voor alle bezoekers?

c Zou er verschil zijn in de uitkomsten van een dergelijk onderzoek tussen verschillende theaters?

Opgave V2

Bij de **Rijksoverheid** vind je een aparte pagina voor jongeren van 13 of 14 jaar.
Deze pagina bevat informatie voor jongeren van die leeftijd over bijbaantjes.
In een bepaalde maand is deze site door ruim 300 jongeren geraadpleegd. Daarbij is onderzocht wat de leeftijd was van de jongeren die deze site bezochten. De gegevens staan in de tabel.

leeftijd	aantal
12	32
13	56
14	128
15	67
16	43

a Hoeveel jongeren hebben volgens dit tabelletje de site geraadpleegd?

b Hoeveel procent van de jongeren die de site raadpleegden was daadwerkelijk 14 jaar?

c Maak een extra kolom naast de kolom ‘aantal’ en noteer daar de relatieve frequenties. Wanneer zijn relatieve frequenties handiger dan absolute frequenties?

d Waarom is in deze tabel sprake van een klassenindeling? Om welke klassen gaat het dan?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** wat een representatieve steekproef is.

De eigenaar van een theater denkt dat veel theaterbezoekers het niet prettig vinden als zij in de pauze lang moeten wachten op een drankje.

a Waarom kun je zoiets alleen zeggen als je gedegen statistisch onderzoek pleegt?

b Wat is de populatie als hij een statistisch onderzoek wil houden?

c Hoe zou je een representatieve steekproef kunnen opstellen?

Opgave 2

Probeer een geschikte vragenlijst te maken voor een statistisch onderzoek zoals je dat bij de vorige opgave zou moeten uitvoeren.

Opgave 3

In **Uitleg 2** zie je nog eens het verschil tussen absolute en relatieve frequenties.

a Reken zelf na, dat de relatieve frequentie van het aantal 14-jarigen in de tweede maand ongeveer 34% is.

b Vergelijk het deel 13-jarigen in beide maanden. Welke conclusie trek je?

Opgave 4

In **Uitleg 2** wordt gesproken over een klassenindeling. Je had de bezoekers ook in drie klassen kunnen verdelen: de klasse jongeren die nog geen 14 jaar zijn, de klasse 14-jarigen en de klasse jongeren die ouder zijn dan 14 jaar.

Wat is het nadeel van deze klassenindeling?

Opgave 5

Je wilt onderzoek doen naar het aantal uren huiswerk voor wiskunde op een school met 1600 leerlingen.

a Wat is de populatie van dit onderzoek?

b Hoeveel leerlingen zou je moeten vragen om een goed beeld te krijgen?

Het is niet voldoende om de leerlingen uit één klas te vragen naar het aantal uren huiswerk per week.

c Waarom niet?

Het doel is om een representatieve steekproef te ondervragen.

d Hoeveel leerlingen en uit welke klassen zou jij vragen? Hoe kies je deze leerlingen?

Opgave 6

Het volgende stukje tekst stond in mei 2010 in de krant. Een onderzoeker wil nu weten hoe het met de konijnen op Texel gesteld is. Hij kan onmogelijk alle konijnen vangen, maar wil toch een beeld hebben van het aantal zieke konijnen op Texel.

> Het is een treurig gezicht: in de omgeving van de Texelse vuurtoren liggen heel veel dode konijnen. Er heerst myxomatose, een ernstige konijnenziekte. Al enkele honderden dieren zijn eraan doodgegaan. En dat terwijl het net weer een beetje beter ging met de konijnen op Texel.

a Wat is de populatie van dit onderzoek?

b Beschrijf hoe jij een steekproef zou kiezen en het onderzoek zou uitvoeren.

Opgave 7

Bekijk diagram in **Voorbeeld 2**.

a Maak bij het cirkeldiagram een frequentietabel met absolute en relatieve frequenties.

In de grafiek zijn meloenen niet opgenomen, deze behoren officieel namelijk tot groenten. De jaarlijkse productie van meloenen is ongeveer 100 miljard kg.

b Maak een nieuwe frequentietabel met daarin opgenomen de meloenen.

Opgave 8

In het bestand **Top 2000 in 2012** zie je hoe de Top 2000 er in 2012 uitzag, uit welk jaar een nummer kwam en in welk uur het gedraaid werd.

a Open dit bestand en sla het op je eigen computer op. Je kunt het bewerken met MS-Excel, bekijk eventueel het **Practicum**. Zoek uit hoeveel nummers er uit jouw geboortejaar in de Top2000 van 2012 staan en bereken hoeveel procent dat van het totaal aantal nummers is.

Wanneer je voor elk jaar apart wilt bekijken hoeveel nummers uit dat jaar in de Top2000 staan, dan wordt dat een onoverzichtelijke brij. Daarom wordt vaak gekeken naar decennia.

b Maak een tabel zoals deze en vul hem in.

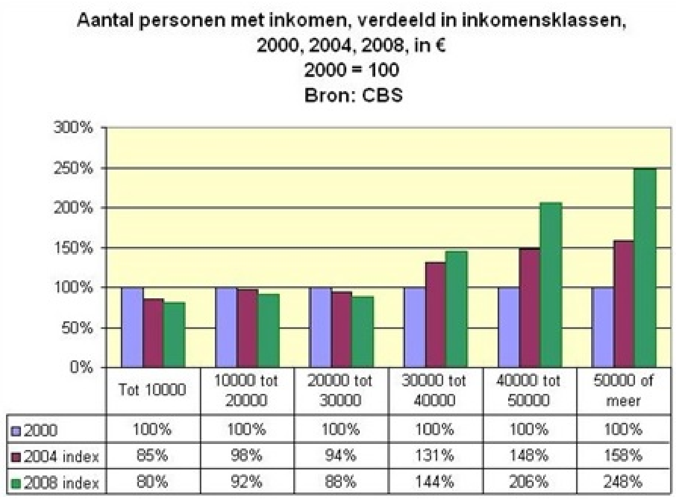
decennium	frequentie
1930 - 1939	
1940 - 1949	
1950 - 1959	
1960 - 1969	
1970 - 1979	
1980 - 1989	
1990 - 1999	
2000 - 2009	
2010 - 2019	

Meer dan de helft van de nummers uit de Top2000 kwam uit de jaren 1970 – 1990. Een dj heeft dit opgemerkt en vertelt op de radio dat er in deze twintig jaar daarom de beste muziek gemaakt is.

c Ben je het met hem eens? Geef commentaar op deze opmerking.

Opgave 9

Deze grafiek geeft de verdeling van de jaarinkomens in Nederland volgens het CBS in de jaren 2000, 2004 en 2008.



a Welke zes inkomensklassen zijn er?

b Wat is het grootste verschil tussen de lage inkomensklassen en de hoge inkomensklassen als je kijkt naar de jaren 2004 en 2008?

Opgave 10

In het schooljaar worden in de twee klassen van meneer De Wit de volgende cijfers voor wiskunde gehaald:

5,1	6,5	7,4	7,3	4,1	5,3	7,9	6,4
4,3	6,1	3,8	5,8	8,0	7,6	4,1	6,3
5,3	5,2	5,8	5,6	5,1	6,3	4,8	5,4
5,8	6,1	5,0	4,5	6,3	4,5	5,7	5,7
5,1	6,0	4,8	4,6	5,7	6,3	6,4	7,6
4,8	5,5	4,7	5,7	5,6	4,6	7,9	7,0

a Maak een geschikte klassenindeling met vijf klassen voor deze cijfers en verwerk de cijfers in een frequentietabel.

b Vind je dat de leerlingen van deze docent goede cijfers hebben gehaald dit jaar?

Opgave 11

Open **deze tabel in Excel** met daarin de lengtes van 20 meisjes en 18 jongens uit 4 havo. Je ziet een klassenindeling voor de meisjes.

Maak met behulp van Excel daarbij een frequentietabel van de lengtes van de jongens.

Oefen eventueel eerst het werken met Excel via en het **Practicum**.

Maak een bijpassend histogram, dat is een staafdiagram waarvan alle staven even breed zijn en er geen tussenruimte tussen de staven is. Maak ook een histogram voor de meisjes.

Verwerken

Opgave 12

Een onderzoeksbureau is geïnteresseerd in de gezondheid van mannen boven de 30 jaar. Ze doen onderzoek door een vragenlijst via internet voor te leggen aan bezoekers van de website www.volkskrant.nl. De volgende vragen maken deel uit van het onderzoek:

- Wat is uw leeftijd?
- Hoeveel uur sport u per week?
- Vindt u zichzelf gezond?
- Rookt u?
- Hoeveel dagen bent u de afgelopen 12 maanden week ziek thuis gebleven?

a Wat is de populatie van dit onderzoek?

b Is dit een representatieve steekproef? Leg uit.

c Wat vind je van de gestelde vragen? Kun je de vragenlijst verbeteren en uitbreiden?

Opgave 13

Volgens onderzoek van GFK in opdracht van Productschap Tuinbouw is de appel het meest gekochte verse fruit in Nederland met $24{,}2$ kilo per huishouden per jaar. Daarna volgen sinaasappels met $19{,}4$ kilo en bananen met $14{,}6$ kilo. Mandarijn staat op de vierde plaats met $9{,}7$ kilo en peer staat in dit onderzoek op de vijfde plaats met $6{,}1$ kilo per huishouden per jaar. Totaal is dit 82% van de fruitconsumptie in Nederland.

a Maak een frequentietabel met absolute en relatieve frequenties van de fruitconsumptie per huishouden per jaar in Nederland.

b Maak een bijpassend cirkeldiagram.

Opgave 14

Op **de website van het KNMI** staan heel veel data over het weer. Een van de zaken die je kunt nakijken is hoe vaak windsnelheden voorkomen.
Deze tabel gaat over alle uren tussen 1981 en 2000.

260		De Bilt			Uurwaarden van de gemiddelde windsnelheid in klassen van 1 m/s									
		1981 - 2000			Distributief in aantallen									
Klasse		Periode												
Van	Tot	Jan	Feb	Mrt	Apr	Mei	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec	Alle maanden
0.0	0.4	52	46	84	39	63	63	86	178	165	97	56	59	988
0.5	1.4	1395	1163	1480	1700	1836	1773	2112	2831	2774	2125	1707	1547	22443
1.5	2.4	2257	2140	2396	2736	3089	3223	3645	3848	3507	3151	2981	2640	35613
2.5	3.4	2500	2703	2917	3076	3507	3645	3670	3426	3241	3158	2863	2787	37493
3.5	4.4	2439	2305	2587	2704	2912	3007	2850	2501	2224	2603	2431	2381	30944
4.5	5.4	2085	1944	1910	1947	1906	1719	1662	1250	1381	1695	1898	2009	21406
5.5	6.4	1561	1242	1376	1174	905	678	615	550	696	958	1259	1453	12467
6.5	7.4	1133	874	1026	636	442	211	176	232	288	578	711	938	7245
7.5	8.4	699	580	528	269	164	61	50	49	95	318	338	531	3682
8.5	9.4	405	346	283	80	39	16	13	14	23	101	88	265	1673
9.5	10.4	211	131	174	30	10	4	1	1	6	62	35	150	815
10.5	11.4	70	43	74	2	2	-	-	-	-	20	15	71	297
11.5	12.4	47	32	31	3	3	-	-	-	-	11	9	35	171
12.5	13.4	13	7	11	-	2	-	-	-	-	3	2	10	48
13.5	14.4	7	4	3	3	-	-	-	-	-	-	1	2	20
14.5	15.4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	2	5
15.5	16.4	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	2	-	4
16.5	17.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	3
17.5	18.4	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3
18.5	19.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

a Hoeveel uren zijn dat (je hoeft geen rekening te houden met schrikkeljaren)?

b Maak een staafdiagram van de kolom ‘Alle maanden’.

In Den Helder waait het meer en harder dan in De Bilt, dat komt omdat Den Helder aan zee ligt. In deze tabel zijn de klassen ingedeeld volgens de windkracht (Beaufort).

235		Den Helder (De Kooy)			Uurwaarden van de gemiddelde windsnelheid naar Beaufort-klassen in m/s									
		1981 - 2000			Distributief in aantallen									
Klasse		Periode												
Van	Tot	Jan	Feb	Mrt	Apr	Mei	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec	Alle maanden
0.0	0.2	18	10	14	15	20	19	11	35	13	29	19	26	229
0.3	1.5	766	691	815	833	827	909	962	1314	1179	936	1025	960	11217
1.6	3.3	1825	1738	1965	2368	2412	2513	2794	3040	2857	2513	2078	2218	28321
3.4	5.4	2889	2719	3592	4089	4843	4616	5027	4571	4101	3698	3573	3069	46787
5.5	7.9	3296	3329	3843	4098	4277	4194	4112	3787	3447	3615	3648	3509	45155
8.0	10.7	2965	2826	2795	2208	2012	1775	1671	1603	1940	2433	2360	2723	27311
10.8	13.8	2170	1636	1414	710	448	361	292	452	718	1209	1323	1822	12555
13.9	17.1	772	511	398	72	39	13	11	78	131	392	347	462	3226
17.2	20.7	154	90	41	6	2	-	-	-	14	51	27	87	472
20.8	24.4	24	9	3	1	-	-	-	-	-	3	-	4	44
24.5	28.4	1	1	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	3
28.5	32.6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

c Zoek de benaming van de gebruikte klassen op en verwerk deze in een nieuwe tabel met daarin de gegevens van de kolom ‘Alle maanden’.

d Maak een staafdiagram van de relatieve frequenties van de windkrachten uit de tabel van opgave c.

Opgave 15

Open het **Excel-bestand Sportprestaties**. Je vindt er gegevens van 74 leerlingen in de leeftijdscategorie 11-12 jaar.

a Vergelijk de prestaties bij het verspringen van de meisjes en de jongens door bijpassende staafdiagrammen in Excel te maken. Probeer een conclusie te trekken.

b Is er verschil in de prestaties bij het verspringen tussen jongens en meisjes? Leg uit hoe je die conclusie trekt.

Toepassen

Je hebt al eerder gewerkt met MS-Excel. Misschien goed om dit nog even te herhalen. Je werkt via het **Practicum** met het bestand ‘Gegevens154Leerlingen’.

Opgave 16: Cijfer voor wiskunde

Excel kan je helpen bij het maken van frequentietabellen en diagrammen. Bekijk het **Practicum**.

Denk er wel om dat je op een pc het bijbehorende Excel-bestand eerst moet downloaden. Er wordt van uit gegaan dat je wel eens eerder met Excel hebt gewerkt en al weet hoe je met cellen werkt, met formules in cellen werkt, absoluut en relatief kopiëren begrijpt, etc.

a Maak zelf een frequentietabel van de gehele eindcijfers voor wiskunde van deze groep leerlingen in 4 vwo.

b Maak van deze eindcijfers een staafdiagram.

Zouden de leerlingen die wiskunde B hebben gekozen betere cijfers in klas 3 hebben gehaald dan de leerlingen die geen wiskunde B hebben gekozen?

c Om die vraag te kunnen beantwoorden moet je door sorteren eerst de leerlingen die wiskunde A hebben gekozen scheiden van de leerlingen die wiskunde B hebben gekozen. Daarna maak je van beide groepen een frequentietabel en een staafdiagram van de gehele eindcijfers in 3 vwo.

d Kun je concluderen dat de wiskunde B leerlingen inderdaad betere cijfers voor wiskunde hebben gehaald in 3 vwo?

Opgave 17: Lengtes vergelijken

Werk met hetzelfde Excel-bestand als in de voorgaande opgave. Zet de gegevens over de lengtes van de meisjes en de jongens op een afzonderlijk werkblad.

a Waarom maak je klassenindelingen als je de lengtes van de meisjes en de jongens wilt vergelijken? En waarom gebruik je dan relatieve frequenties?

b Maak een klassenindeling en de bijbehorende frequentietabellen en histogrammen zowel voor de jongens als de meisjes.

c Probeer een conclusie te trekken uit beide diagrammen.

Practicum: Werken met Excel

Excel kan zelf frequentietabellen voor je maken. Je hoeft dan niet met de hand te tellen.

In het Excelbestand **Gegevens154Leerlingen.xls** vind je enkele gegevens van 154 leerlingen die in 2008 in 4 vwo zaten.
Je kunt daarbij een frequentieverdeling voor bijvoorbeeld ‘cijfwis’, het cijfer voor wiskunde van deze leerlingen, maken.
Dat gaat als volgt:

- Maak eerst een kolom met cijfers van (bijvoorbeeld) 3, 4, 5, t/m 10 in de cellen O20 t/m O27. Geef die het opschrift ‘cijfwis’.
- Dan zijn de cellen P20 t/m P27 bestemd voor de frequenties. Selecteer die allemaal.
- Klik nu in de formulebalk en zet daar in: =INTERVAL(H2:H155;O20:O27) en doe [ctrl][shift][enter].

Als het goed is krijg je nu de juiste frequenties. Excel telt dus in de cellen H2 t/m H155 (de cijfers voor wiskunde) hoeveel er steeds voorkomen van de waarden in de cellen O20 t/m O27, de verschillende cijfers die voorkomen.

Maar misschien wil je de leerlingen die wiskunde A hebben vergelijken met de wiskunde B leerlingen? Dan laat je Excel eerst sorteren op de kolom ‘wisgroep’. Dat doe je door die kolom te selecteren en ‘Sorteren en filteren’ te kiezen. Sorteer van laag naar hoog en klik op OK als Excel je vraagt of de selectie moet worden uitgebreid (want de andere kolommen moeten ook worden meegenomen bij het sorteren). Nu heb je de wiskunde A en de wiskunde B leerlingen als groepen bij elkaar staan en kun je de verdeling van hun cijfers vergelijken.

1.2 Centrum en spreiding

Verkennen

Opgave V1

Thijmen en Sven vergelijken de resultaten die ze het afgelopen jaar voor wiskunde hebben gehaald:

Sven	6,4	6,3	6,5	6,4	6,4	6,4	6,5	6,5	6,3
Thijmen	8,9	3,5	6,3	9,3	3,5	5,8	7,2	4,7	8,5

a Bereken het gemiddelde van deze resultaten voor zowel Sven als Thijmen.

b Wie van de beide jongens heeft de grootste spreiding in zijn resultaten dit jaar? Geef uitleg.

c Wie van de beide jongens heeft volgens jou beter gepresteerd dit jaar? Geef uitleg.

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de gegevens van Sven en Thijmen nog eens.

a Bepaal van elk van hen het modale cijfer.

b Bepaal van elk van hen de mediaan van de cijfers.

c Waarom kun je nu nog steeds weinig zeggen als je hun resultaten wilt vergelijken?

Opgave 2

Je gaat nu de spreiding van de gegevens van Sven en Thijmen in de **Uitleg** bekijken.

a Bepaal van elk van hen de spreidingsbreedte.

b Bepaal van elk van hen de kwartielafstand van de cijfers.

c Waarom kun je nu wel wat meer zeggen als je hun resultaten vergelijkt?

Opgave 3

Je kunt de resultaten van Sven en Thijmen in de **Uitleg** ook indelen in klassen.

a Maak een klassenindeling waarvan de klassenmiddens de gehele cijfers 3, 4, ..., 9 zijn.

b Schat met behulp van deze klassenindeling het gemiddelde cijfer. Waarom wijkt dit af van het werkelijke gemiddelde?

c Bepaal hun modale gehele cijfers. Wat valt je op?

d Bepaal van beide frequentieverdelingen de spreidingsbreedte.

Opgave 4

Werk met de gegevens in **Voorbeeld 1**.

a Maak een frequentietabel van de gehele rapportcijfers. Waarom heeft het geen zin om een frequentietabel van de rapportcijfers op één decimaal nauwkeurig te maken?

b Bereken het gemiddelde van de gehele rapportcijfers en dat van de rapportcijfers op twee decimalen nauwkeurig.

c Waarom is de modus van de gehele cijfers een zinvol getal en de modus van de cijfers op één decimaal niet? Wat is het modale cijfer?

d Maak een boxplot van de gehele cijfers. Vergelijk dit met het boxplot van de cijfers op één decimaal dat Excel voor je maakt.

Opgave 5

Bekijk de tabel in **Voorbeeld 1**.

a Waarom is er bij de rapportcijfers sprake van een klassenindeling? Over welke klassen gaat het dan?

De werkelijke cijfers zijn afgerond op één decimaal nauwkeurig. Ook dat zijn eigenlijk klassenmiddens.

b Van welke klassen?

Opgave 6

Bekijk de inkomenstabel in **Voorbeeld 2**.

a Waarom ontbreekt in de tabel een rij voor mensen die meer dan € 200.000 per jaar verdienen?

b Waarom is het twijfelachtig of de inkomens gelijkmatig over de klassen zijn verdeeld?

c Bereken ook de kwartielafstand uitgaande van een gelijkmatige verdeling en teken een bijpassend boxplot.

d Kun je op grond van de boxplot uitleggen waarom dit een scheve verdeling wordt genoemd?

Opgave 7

De vogelbescherming vraagt ieder jaar mensen met een tuin om te tellen hoeveel vogels er van verschillende soorten in hun tuin zijn. In 2010 was de top 10 als volgt samengesteld:

1	huismus	160119
2	koolmees	105838
3	merel	100705
4	vink	76790
5	pimpelmees	63547
6	spreeuw	61426
7	kauw	45924
8	Turkse tortel	44043
9	houtduif	37870
10	roodborst	34658

a Hoe vaak komt een vogel uit de top 10 gemiddeld in de tuinen voor?

b Waarom heeft het geen zin om een mediaan of een modus te bepalen?

Verwerken

Opgave 8

Het ministerie van OC en W waar onderwijs onder valt houdt jaarlijks bij hoeveel vroegtijdige schoolverlaters er zijn. Een vroegtijdige schoolverlater stopt met zijn/haar opleiding voordat het diploma is behaald. Voor het schooljaar 2011-2012 waren dat de volgende aantallen.

leeftijd	≤ 13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
aantal	253	385	503	1663	3645	10883	7783	5239	3533	2358

a Hoeveel bedraagt de gemiddelde leeftijd van een vroegtijdige schoolverlater?

b Hoeveel is de modale leeftijd van een vroegtijdige schoolverlater?

c Bepaal de mediaan.

d Wat vind je van deze resultaten?

Opgave 9

Het ministerie van OC en W waar onderwijs onder valt houdt jaarlijks bij hoeveel vroegtijdige schoolverlaters er zijn. Een vroegtijdige schoolverlater stopt met zijn/haar opleiding voordat het diploma is behaald. Hier zie je de resultaten van twee schooljaren.

leeftijd	2005 - 2006	2011 - 2012
≤ 13	467	253
14	1095	385
15	1450	503
16	4181	1663
17	10759	3645
18	11465	10883
19	8796	7783
20	6358	5239
21	4632	3533
22	3476	2358
totaal	52679	35245

a Bereken de spreidingsbreedte en de kwartielafstand bij de gegevens over vroegtijdige schoolverlaters over de schooljaren 2005-2006 en 2011-2012.

b Trek een conclusie over de verschillen en/of overeenkomsten tussen de beide jaren.

Opgave 10

Open het **Excel-bestand Sportprestaties**. Je vindt er gegevens van 74 leerlingen in de leeftijdscategorie 11-12 jaar.
Je wilt de prestaties bij het verspringen van de meisjes en de jongens vergelijken.

a Maak een klassenindeling met een klassenbreedte van 20 cm voor de afstanden van de jongens en de meisjes afzonderlijk. Bereken de relatieve frequenties en maak een staafdiagram.

b Schat vanuit de frequentietabel de modale afstand en het gemiddelde van zowel de jongens als de meisjes.

c Teken boxplots voor de jongens en de meisjes afzonderlijk vanuit de ruwe data.
Trek een conclusie.

d Je kunt op dezelfde wijze de prestaties van de 11-jarigen met die van de 12-jarigen vergelijken.
Maak er een eigen uitwerking van.

Toepassen

Je hebt al eerder gewerkt met MS-Excel. Misschien goed om dit weer even te herhalen. Je werkt via het **Practicum** met het bestand 'Gegevens154Leerlingen'.

Vervolgens kun je MS-Excel ook goed inzetten bij eigen onderzoekjes. En dat is de beste manier om te leren omgaan met statistiek.

Opgave 11: Cijfer voor wiskunde

Excel kan je helpen bij het berekenen van centrummaten en spreidingsmaten. Bekijk het **Practicum**.

Denk er wel om dat je op een pc het bijbehorende Excel-bestand eerst moet downloaden.

a Bereken de centrummaten en de spreidingsmaten van de gehele eindcijfers voor wiskunde van deze groep leerlingen in 4 vwo.

b Maak van deze eindcijfers een boxplot.

Zouden de leerlingen die wiskunde B hebben gekozen betere cijfers in klas 3 hebben gehaald dan de leerlingen die geen wiskunde B hebben gekozen?

c Om die vraag te kunnen beantwoorden moet je door sorteren eerst de leerlingen die wiskunde A hebben gekozen scheiden van de leerlingen die wiskunde B hebben gekozen. Bereken van beide groepen de centrummaten en de spreidingsmaten van de gehele eindcijfers in 3 vwo. Maak ook twee boxplots.

d Kun je concluderen dat de wiskunde B leerlingen inderdaad betere cijfers voor wiskunde hebben gehaald in 3 vwo?

Opgave 12: Lengtes vergelijken

Werk met hetzelfde Excel-bestand als in de voorgaande opgave. Zet de gegevens over de lengtes van de meisjes en de jongens op een afzonderlijk werkblad.

a Maak een klassenindeling en bereken de bijbehorende centrummaten en spreidingsmaten zowel voor de jongens als de meisjes.

b Probeer een conclusie te trekken uit beide series gegevens.

Opgave 13: Een eigen onderzoek

Bedenk samen met enkele medeleerlingen een onderzoek dat je onder jongeren zou kunnen uitvoeren door middel van een goede representatieve steekproef.

a Omschrijf en leg uit

- wat je wilt onderzoeken;
- welke vragen je wilt stellen, of welke gegevens je wilt verzamelen of welke metingen je wilt verrichten;
- of je denkt dat je steekproef representatief is voor alle jongeren van Nederland;
- of je denkt dat je steekproef representatief is voor alle 3 vwo leerlingen van Nederland;
- of je denkt dat je steekproef representatief is voor leerlingen op jouw school.

b Voer je onderzoek uit en verwerk de gegevens met behulp van MS-Excel.

c Probeer conclusies te trekken en die te motiveren met behulp van diagrammen, centrummaten en spreidingsmaten.

Practicum: Werken met Excel

Excel kan centrummaten en spreidingsmaten voor je berekenen. Je hebt daarvoor geen frequentietabellen nodig, die zijn alleen erg handig bij het maken van diagrammen.

In het Excelbestand **Gegevens154Leerlingen.xls** vind je enkele gegevens van 154 leerlingen die in 2008 in 4 vwo zaten.
Je kunt daarbij van bijvoorbeeld ‘cijfwis’, het cijfer voor wiskunde van deze leerlingen, het minimum, het eerste kwartiel, de mediaan, het derde kwartiel en het maximum laten berekenen.
Wil je die ook nog in een boxplot weergeven, dan ga je (in Excel2010) zo te werk:

- Maak eerst een kolom met onder elkaar Q1, minimum, mediaan, maximum en Q3 in die volgorde. Geef de kolom ernaast het opschrift ‘cijfwis’.
- In de cellen van die kolom maak je de formules =KWARTIEL(H2:H155;1), =MIN(H2:H155), =MEDIAAN(H2:H155), =MAX(H2:H155) en =KWARTIEL(H2:H155;3).
- Nu selecteer je beide kolommen en het opschrift en via Invoegen kies je een lijndiagram met markeringen.
- Je krijgt nu een lijndiagram. Klik met de rechtermuisknop op de figuur en kies ‘Gegevens selecteren’. Klik daar op ‘Schakelen tussen rij en kolom’. Je krijgt dan de vijf waarden boven elkaar.
- Bij ‘Hulpmiddelen voor grafieken’ kun je bij ‘Indeling’ kiezen voor ‘Omhoog/omlaag balken weergeven’ en ‘Hoog/laag lijnen’. Je krijgt dan je boxplot, dat je nog even zo mooi moet maken als je zelf wilt. (Rechtermuisknop op elke markering en opmaak kiezen.)

Misschien wil je de jongens en de meisjes vergelijken? Dan laat je Excel eerst sorteren op de kolom ‘geslacht’. Dat doe je door die kolom te selecteren en ‘Sorteren en filteren’ te kiezen. Sorteer van laag naar hoog en klik op OK als Excel je vraagt of de selectie moet worden uitgebreid (want de andere kolommen moeten ook worden meegenomen bij het sorteren). Nu heb je de jongens en de meisjes als groepen bij elkaar staan en kun je hun centrummaten en spreidingsmaten vergelijken en twee boxplots in één figuur maken.

1.3 Kansen

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een frequentietabel van de rapportcijfers voor het vak ‘wiskunde’ in klas 3G. Je hebt geen idee wie welk cijfer heeft gehaald. Je komt iemand uit die klas tegen.

wiskunde	
RE	freq
1	0
2	0
3	0
4	1
5	4
6	9
7	8
8	6
9	3
10	0

a Hoe groot is de kans dat zij een 8 voor wiskunde heeft op haar rapport?

b Hoe groot is de kans dat zij een 10 voor wiskunde heeft op haar rapport?

c Hoe groot is de kans dat zij een onvoldoende heeft?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je een frequentietabel van de rapportcijfers voor wiskunde van klas 3G. Daaruit kun je kansen afleiden.

a Hoe groot is de kans dat een willekeurige leerling uit 3G voor wiskunde het rapportcijfer 6 heeft?

b Hoe groot is de kans dat een willekeurige leerling uit 3G voor wiskunde een voldoende op het rapport heeft?

c Je weet dat Jan Buma en Roslyn Snijders uit 3G een 7 voor wiskunde staan op hun rapport. Je komt Christien Willemse uit 3G tegen en je hebt geen idee hoe goed ze is in wiskunde. Wat is de kans dat ze een voldoende op haar rapport heeft? Geef je antwoord in procenten.

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt ook gesproken over de kansen bij het gooien met een dobbelsteen. Er wordt gesteld dat elk vlakje een relatieve frequentie van $\frac{1}{6}$ heeft. Is dat wel zo?

a Pak een dobbelsteen en gooi er 60 keer mee, je kunt ook het **Practicum** gebruiken. Maak een frequentietabel zoals deze.

aantal ogen	1	2	3	4	5	6
aantal keer						

b Krijg je inderdaad allemaal gelijke relatieve frequenties van $\frac{1}{6}$?

c Waarom ligt het toch voor de hand om te veronderstellen dat als je maar vaak genoeg gooit alle relatieve frequenties $\frac{1}{6}$ worden?

d Hoe groot is de kans dat je met een dobbelsteen 5 ogen gooit als je naar jouw frequentietabel kijkt? En hoe groot zou je zeggen dat die kans ‘in werkelijkheid’ is?

e Hoe groot is de kans dat je met een dobbelsteen meer dan 4 ogen gooit als je naar jouw frequentietabel kijkt? En hoe groot zou je zeggen dat die kans 'in werkelijkheid' is?

Opgave 3

Werk met de gegevens in **Voorbeeld 1**.

a Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt 14 jaar oud is?

b Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt hoogstens 14 jaar oud is?

c Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt minstens 14 jaar oud is?

d Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt 17 jaar oud is?

e Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt ouder dan 11 is?

Opgave 4

In het Excel-bestand **Top 2000 in 2012** zie je hoe de Top 2000 er in 2012 uitzag, uit welk jaar een nummer kwam en in welk uur het gedraaid werd. Veel artiesten of groepen hebben meerdere nummers in de Top 2000 van 2012.

Je kiest een willekeurig nummer uit de Top 2000?

a Hoe groot is de kans dat het een nummer van The Beatles is?

b Hoe groot is de kans dat dit een nummer uit de jaren $1980- < 1990$ is?

Je kiest een willekeurig nummer uit de jaren $1980- < 1990$.

c Hoe groot is de kans dat het een nummer van Queen is?

Opgave 5

In alle derde klassen van een school is gevraagd wie er linkshandig is en wie rechtshandig. Hiernaast zie je de resultaten.

	linkshandig	rechtshandig
jongen	15	116
meisje	13	134

a Hoe groot is de kans dat een willekeurige derdeklasser van deze school linkshandig is?

b Hoe groot is de kans dat een willekeurig meisje uit de derde klas linkshandig is? Is die kans groter of kleiner dan die voor een willekeurige jongen uit de derde klas?

c Hoe groot is de kans dat een willekeurige linkshandige uit de derde klas een jongen is?

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je kansen bepaalt bij het gooien met twee dobbelstenen.

a Ga eerst zelf even experimenteren met behulp van twee dobbelstenen of het **Practicum**. Werp 360 keer met twee dobbelstenen en maak een tabel zoals deze.

aantal ogen	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
frequentie											
relatieve frequentie											

b Maak nu net zo'n tabel met frequenties en relatieve frequenties, maar nu gebaseerd op de kruistabel in het voorbeeld. Vergelijk beide tabellen. Zijn er grote verschillen?

c Hoe groot is de kans dat je met twee dobbelstenen 10 ogen gooit?

d Hoe groot is de kans dat je met twee dobbelstenen hoogstens 10 ogen gooit?

e Hoe groot is de kans dat je met twee dobbelstenen minstens 10 ogen gooit?

Opgave 7

Een volledig kaartspel bestaat uit 52 kaarten, 13 kaarten van elke ‘kleur’: ruiten, harten, schoppen en klaveren. Van elke kleur zijn er de kaarten 2, 3, ..., 9, 10, boer, vrouw, heer en aas.
Het kaartspel wordt goed geschud en er wordt gedeeld.

a Hoe groot is de kans dat de eerste kaart een aas is?

b Hoe groot is de kans dat de eerste kaart een hartenaas is?

De eerste kaart is een ruitennegen.

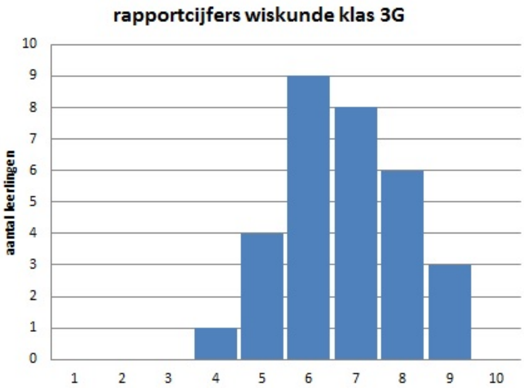
c Hoe groot is de kans dat de tweede kaart een aas is?

d Hoe groot is de kans dat de tweede kaart een ruitenkaart is?

Verwerken

Opgave 8

Dit staafdiagram geeft de rapportcijfers wiskunde van klas 3G weer. Je komt een leerling uit die klas tegen en je hebt geen idee hoe goed hij in wiskunde is.



a Hoe groot is de kans dat hij een onvoldoende heeft?

b Hoe groot is de kans dat hij een 8 of hoger heeft?

Een leerling uit 3G vertelt dat zij een voldoende heeft.

c Hoe groot is de kans dat zij een 8 of hoger heeft?

Opgave 9

Uit onderzoek is gebleken dat wel 8% van de mannen lijdt aan een vorm van kleurenblindheid. Bij vrouwen is dat percentage veel lager. In de tabel zie je de percentages.

	mannen	vrouwen
kleurenblind	8%	0,5%
niet kleurenblind	92%	99,5%

a Je komt een mannelijke medeleerling tegen (waarvan je niet weet of hij kleurenblind is). Hoe groot is de kans dat hij kleurenblind is?

b Anne is kleurenblind. Hoe groot is de kans dat Anne een man is? (Ga er van uit dat er evenveel mannen als vrouwen zijn.)

c Hoeveel procent van de mensen is kleurenblind? (Ga er van uit dat er evenveel mannen als vrouwen zijn.)

Opgave 10

Met deze viervlaksdobbelsteen is zojuist een 1 gegooid, want bij elke ribbe van het ondervlak hoort een 1.

a Hoe groot is bij een viervlaksdobbelsteen de kans daarop?

Je gooit nu met twee van die dobbelstenen en telt bij elkaar wat je gooit.

b Hoe groot is de kans dat je 6 gooit?

c Hoe groot is de kans dat je minstens 6 gooit?

d Hoe groot is de kans dat je hoogstens 6 gooit?

Opgave 11

Hier zie je hoe in één van de eerste series afleveringen van ‘Ik hou van Holland’ door Jeroen van Koningsbrugge aan het rad wordt gedraaid om te bepalen hoeveel punten hij voor het goede antwoord krijgt.

a Hoe groot is de kans dat hij 50 punten krijgt?

b Het team van Jeroen staat 12 punten achter op het andere team. Hoe groot is de kans dat ze die achterstand in één keer inlopen?

c Gerekend over een heel seizoen wordt er een flink aantal keren aan dit rad gedraaid. Hoeveel punten zullen er gemiddeld worden gedraaid?

Toepassen

In de meeste gevallen kun je kansen alleen bepalen met behulp van statistiek. Neem bijvoorbeeld de kans dat een mens een bepaalde leeftijd haalt, dat een meteoriet op Aarde stort, dat er een jongetje of een meisje wordt geboren, dat jouw favoriete nummer in de Top 2000 terechtkomt, enz.

Stel je bijvoorbeeld voor dat je wilt weten hoe groot de kans is dat een punaise na opgooien met de punt omhoog komt te liggen. Er is maar één manier om de kans daarop te berekenen: heel vaak proberen en bijhouden wat er gebeurt.

Opgave 12: Punaises

Als je de kans wilt weten dat een punaise na opgooien met de punt omhoog komt te liggen, moet je experimenteren.

a Gooi 100 keer met een punaise. Houd bij hoe vaak de punt bovenkomt en hoe vaak niet.

b Hoe groot is volgens jou de kans dat een punaise met zijn punt bovenkomt? Vergelijk je resultaat met die van de andere leerlingen.

c Als je de resultaten van meerdere leerlingen vergelijkt, kun je dan een uitspraak doen over de kans dat een punaise met zijn punt bovenkomt.

Opgave 13: Kansen bij voetbal

Bekijk de volgende situaties. Geef aan of je de beschreven kans kunt beredeneren of alleen door experimenteren en statistieken kunt bepalen.

a De kans dat een bepaalde voetballer met de volgende strafschop een doelpunt scoort.

b Bij de toss aan het begin van een voetbalwedstrijd wordt een geldstuk opgeworpen; het gaat om kop of munt. Hoe groot is de kans dat jouw ploeg mag aftrappen?

c Bij de voetbaltoto moet je van 13 wedstrijden voorspellen of de thuisclub wint, verliest of dat er wordt gelijk gespeeld? Hoe groot is de kans dat je alles goed hebt als je deze voetbaltoto puur op de gok invult?

d Hoe groot is de kans dat Go Ahead Eagles van Ajax wint?

Opgave 14: Kansspel?

Een spel heet een **kansspel** als de uitkomsten ervan zuiver door het toeval worden bepaald.

Hieronder worden een paar spellen beschreven. Leg uit of er sprake is van een kansspel of niet.

a Je gooit met drie geldstukken en kijkt hoeveel keer kop boven komt.

b Bij het spelletje ‘Boter, kaas en eieren’ moet je om beurten een kruis (speler 1) of een rondje (speler 2) in een schema van 3 bij 3 plaatsen. Wie het eerst drie gelijke tekens op een rij (horizontaal, verticaal, of diagonaal) heeft, wint het spel?

c Het delen van kaarten uit een goed geschud volledig kaartspel.

d Het meespelen met de toto, waarbij je van een serie van 13 voetbalwedstrijden moet kiezen uit: de thuisclub wint, verliest of er wordt gelijk gespeeld.

Practicum

Applet

1.4 Wegen en bomen

Verkennen

Opgave V1

De menukaart bij een uitgebreid diner geeft de keuze uit 2 voorgerechten, 4 hoofdgerechten en 3 nagerechten.

a Hoeveel verschillende menu's van één voorgerecht, één hoofdgerecht en één nagerecht zijn er mogelijk?

b Er zijn mensen die geen voorgerecht en/of geen nagerecht willen, maar iedereen neemt een hoofdgerecht. Hoeveel menu's zijn er nu mogelijk?

Opgave V2

Je gooit met drie dobbelstenen. Je kijkt welke drie ogenaantallen er boven komen te liggen.

Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je een overzicht van keuzemogelijkheden kunt maken.

a Waarom moet je bij het berekenen van alle mogelijke menu's de keuzemogelijkheden voor het voorgerecht, het hoofdgerecht en het nagerecht met elkaar vermenigvuldigen?

b Hoe ziet het wegendiagram er uit als je één van de hoofdgerechten absoluut niet lekker vindt? Hoeveel mogelijkheden zijn er dan nog?

c Je neemt alleen een voorgerecht en een hoofdgerecht en koffie na. Hoe ziet nu het bijpassende boomdiagram er uit? En hoeveel mogelijke menu's zijn er?

Opgave 2

Je gooit met drie dobbelstenen. Je kijkt welke drie ogenaantallen er boven komen te liggen.

a Teken in een wegendiagram alle mogelijkheden. Laat zien dat het er 216 zijn.

b Hoe groot is de kans dat je drie zessen gooit?

c In hoeveel gevallen gooi je twee zessen en een vijf? Hoe groot is dus de kans daar op?

d Hoe groot is de kans dat je met drie dobbelstenen in totaal 17 ogen gooit?

e Hoe groot is de kans dat je met drie dobbelstenen in totaal 16 ogen gooit?

Opgave 3

Bekijk je kans op het vinden van de juiste PINcode in **Voorbeeld 1**.

a Hoe zie je aan het wegendiagram dat het gaat om vier verschillende cijfers?

b Hoe ziet het wegendiagram er uit als de cijfers niet verschillend hoeven te zijn? Hoeveel mogelijke PINcodes zijn er dus?

c Je weet alleen dat in je PINcode de cijfers 2, 3, 4 en 5 voorkomen. Hoe groot is de kans dat je de juiste PINcode intoetst?

d Je weet alleen dat in je PINcode de cijfers 2, 2, 4 en 5 voorkomen. Hoe groot is de kans dat je de juiste PINcode intoetst?

Opgave 4

Een voorbeeld van een bepaalde generatie Nederlandse nummerborden is 09-PXR-3.
Het gaat hier dus om nummerborden met eerst twee cijfers, dan drie letters en dan één cijfer. Alle cijfers zijn mogelijk, voor de letters mag niet alles. Ga er in deze opgave van uit dat alleen alle medeklinkers zijn toegestaan.

a Hoeveel van die nummerborden zijn er dan mogelijk?

b Jan weet alleen nog dat de letters van zijn nummerbord TRJ (in die volgorde) zijn en dat het van de generatie is die hierboven wordt beschreven. Hoe groot is de kans dat hij zijn nummerbord goed gokt?

c Sabrina weet alleen nog dat de letters van haar nummerbord N, X en P zijn (maar niet per sé in die volgorde) en dat het van de generatie is die hierboven wordt beschreven. Hoe groot is de kans dat zij haar nummerbord goed gokt?

Opgave 5

Sahin gooit met drie geldstukken. Hij let op wat er bovenkomt, kop of munt.

a Hoe groot is de kans op drie keer kop?

b Hoe groot is de kans op twee keer kop?

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Waarom is de kans op twee goede kaartjes 0?

b Hoe groot is de kans dat je alle kaartjes fout hangt?

c Hoe groot is de kans dat je alle kaartjes goed hangt?

d Ga na, dat het geen verschil zou maken voor je kansen als je had gedacht dat Kok = L, Bolkestein = M en Lubbers = R.

Opgave 7

Op een toernooi spelen vijf ploegen A, B, C, D, E een hele competitie tegen elkaar.

a Laat met een boomdiagram alle mogelijke wedstrijden zien. Hoeveel zijn het er?

b Je gaat de competitie indelen door willekeurig uit deze mogelijke wedstrijden te kiezen. Hoe groot is de kans dat de eerste wedstrijd A tegen C is, waarbij A 'thuis' speelt?

c Hoe groot is de kans dat de eerste wedstrijd tussen de ploegen A en C is?

Opgave 8

Op een toernooi spelen vijf ploegen A, B, C, D, E een halve competitie tegen elkaar.

a Laat met een boomdiagram alle mogelijke wedstrijden zien. Hoeveel zijn het er?

b Je gaat de competitie indelen door willekeurig uit deze mogelijke wedstrijden te kiezen. Hoe groot is de kans dat de eerste wedstrijd A tegen C is?

Verwerken

Opgave 9

Je ziet hier een cijferslot dat kan worden geopend door drie goede cijfers te kiezen. De mogelijke cijfers zijn 0 t/m 9.

a Laat met een wegendiagram zien hoeveel cijfercombinaties er in totaal mogelijk zijn. Hoeveel zijn het er?

Je kiest met de ogen dicht een cijfercombinatie.

b Hoe groot is de kans dat deze cijfercombinatie allemaal verschillende cijfers heeft?

c Hoe groot is de kans dat deze cijfercombinatie drie gelijke cijfers heeft?

Opgave 10

In de Eredivisie van de Nederlandse voetbalcompetitie spelen 18 clubs een hele competitie.

a Hoeveel wedstrijden moeten er worden gespeeld?

b Hoeveel wedstrijden kunnen er per competitieronde maximaal worden gespeeld?

c Hoe groot is de kans dat in de eerste competitieronde Ajax en Feijenoord tegen elkaar spelen?

Opgave 11

Iemand gaat naar een feestje en vraagt zich af wat hij aan zal trekken. Hij kan kiezen uit 3 paar schoenen, 6 paar sokken, 4 broeken en 5 T-shirts.

a Laat met een wegendiagram zien hoeveel combinaties er mogelijk zijn.

b Hoeveel kans heeft elke combinatie om gekozen te worden als dit volstrekt willekeurig gaat?

c Maar één bepaald paar schoenen is geschikt voor de gelegenheid en er zijn ook maar 2 broeken geschikt. Hoe groot is de kans dat hij die aanheeft als hij de kleren willekeurig pakt?

Opgave 12

Je gooit met vier geldstukken en let op het aantal keren kop en het aantal keren munt dat bovenkomt.

a Laat met een boomdiagram alle mogelijke uitkomsten zien. Hoeveel zijn het er?

b Hoe groot is de kans op drie keer munt?

c Hoe groot is de kans op twee keer munt?

Opgave 13

Iemand pakt willekeurig twee kaarten uit een volledig kaartspel van 52 kaarten, 13 van elke soort (harten, schoppen, klaveren, ruiten).

a Een boomdiagram dat alle mogelijke uitkomsten laat zien is niet goed te tekenen. Hoeveel uitkomsten zijn er mogelijk?

b Hoe groot is de kans op twee schoppenkaarten?

c Hoe groot is de kans op een schoppenkaart en een hartenkaart?

Toepassen

In casino's kun je terecht om tegen betaling mee te mogen doen aan allerlei spelletjes. Sommige daarvan zijn zuivere kansspelen, waarbij alleen het toeval een rol speelt. Bij andere spellen is ook je eigen vaardigheid van belang.

Kennelijk is er geld te verdienen aan het organiseren van dergelijke spelen, hoewel soms op onvoorspelbare momenten veel geld moet worden uitgekeerd aan bezoekers die hebben gewonnen. Hoe kan dat?
Het volgende spel maakt dat duidelijk.

Bij het spel ‘Heads up!’ wordt met vier precies gelijke muntstukken geworpen. Het aantal keren dat kop bovenkomt wordt geteld. Je mag met een spelletje meedoen als je een euro betaalt. Gooi je dan vier keer kop dan krijg je 10 euro terug (je winst is dan dus 9 euro). Gooi je drie keer kop dan krijg je 2 euro terug (je winst is dan 1 euro). In de andere gevallen ben je je euro kwijt.
Je kunt nu zelf wel berekenen of het casino op dit spel winst maakt.

Opgave 14: Heads up!

Bekijk het spel ‘Heads up!’ in **Toepassen**.

a Hoe groot is de kans dat dat je vier keer kop gooit?

b Hoe groot is de kans dat je drie keer kop gooit?

c Hoeveel zal voor de speler de gemiddelde winst per spel zijn als er veel spelletjes worden gespeeld?

d Hoeveel winst verwacht het casino te maken op 1000 spelletjes waarbij telkens 1 euro wordt ingezet?

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je je bezig gehouden met statistische gegevens en situaties waarin het toeval een rol speelt. Je hebt je vaardigheden op het gebied van het samenvatten van data met behulp van centrummaten en spreidingsmaten herhaald. En je hebt een eerste indruk gekregen van statistisch onderzoek, ook met grotere verzamelingen gegevens. Werken met een computerprogramma is daarbij onontbeerlijk.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **'Statistiek'** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3 en 4 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- statistisch onderzoek — populatie en steekproef — representatieve steekproef — absolute en relatieve frequenties — klassenindelingen — diagrammen;
- centrummaten — gemiddelde — modus — mediaan — spreidingsmaten — spreidingsbreedte — kwartielafstand) — boxplot — kwartielafstand — eerste kwartiel — tweede kwartiel;
- kans — relatieve frequentie;
- wegendiagram — boomdiagram.

Activiteiten

- omschrijven wat statistisch onderzoek is — herkennen wat een representatieve steekproef uit een populatie is — absolute en relatieve frequenties kunnen bepalen — frequentieverdelingen (met klassenindeling) en bijpassende diagrammen maken;
- het uitrekenen en aflezen van centrummaten (gemiddelde, modus, mediaan) en spreidingsmaten (spreidingsbreedte, kwartielafstand) — gegevens samenvatten in een boxplot;
- kansen bepalen door relatieve frequenties te bepalen of te beredeneren;
- kansen berekenen door overzichten van de mogelijkheden (in b.v. wegendiagrammen en boomdiagrammen) te tekenen;

Opgave 1

Je doet met een groepje leerlingen een statistisch onderzoek. Jullie willen weten hoeveel procent van de Nederlanders regelmatig twittert. Waarom zijn de volgende steekproeven niet representatief?

a Jullie vragen uit elke klas van jullie eigen school vier willekeurige leerlingen of ze wel of niet minstens één keer per week twitteren.

b Jullie gaan in een winkelcentrum staan en vragen daar de bezoekers die voorbijkomen of ze wel of niet minstens één keer per week twitteren.

Het bedenken van een manier om een goede steekproef te maken is nog niet zo eenvoudig. Beschrijf een aantal voorwaarden waaraan een representatieve steekproef in dit geval moet voldoen.

c Je moet diverse leeftijdscategorieën in de juiste verhouding hebben. Je moet zowel mensen die handig zijn met de pc in de steekproef hebben als mensen die weinig met een pc van doen hebben. Je moet hoger opgeleiden en lager opgeleiden in de juiste verhouding hebben. En zo zijn er nog wel meer voorwaarden te bedenken.

Opgave 2

Open het **Excel-bestand Sportprestaties**. Je vindt er gegevens van 74 leerlingen in de leeftijdscategorie 11-12 jaar.
De kolom 'Sprint (sec)' geeft de tijden die deze leerlingen hebben gelopen over een sprint van 60 m.

a Maak een frequentietabel van deze tijden voor de jongens en de meisjes afzonderlijk. Maak eerst een klassenindeling met als eerste klasse $8- < 8{,}5$.

b Teken bijbehorende staafdiagrammen van de relatieve frequenties. Waarom neem je relatieve frequenties? Kun je een conclusie trekken?

c Sla je resultaten op.

Opgave 3

Open het in de vorige opgave opgeslagen Excel-bestand Sportprestaties. Je hebt van de jongens en de meisjes afzonderlijk frequentietabellen gemaakt. Veel verschil tussen beide bijpassende staafdiagrammen is er niet.
Je kunt nog bekijken wat de centrummaten en de spreidingsmaten opleveren. Die bepaal je het liefst van de ruwe data, niet uit de frequentietabellen.

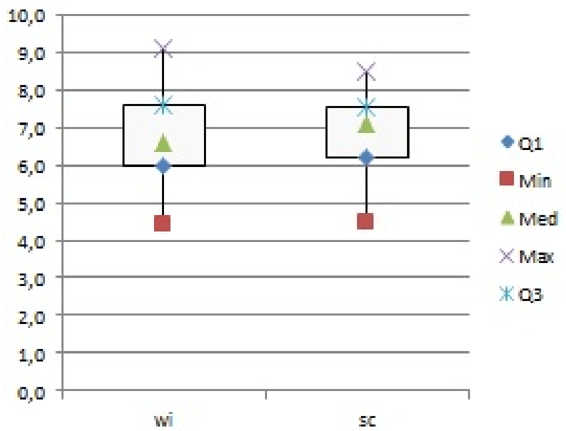
a Bepaal het gemiddelde en de mediaan van zowel de sprintgegevens van de meisjes als die van de jongens.

b Bereken de spreidingsbreedtes en de kwartielen. Bereken de kwartielafstanden.

c Teken bijpassende boxplots in één figuur. Zijn er nu conclusies te trekken?

Opgave 4

Je ziet hier boxplots van de jaarresultaten van klas 3G voor wiskunde en science.



a Waaraan zie je dat het hier om de niet afgeronde jaarcijfers gaat?

b Voor welk vak werd het hoogste cijfer gehaald? Welk cijfer was dat?

c Wat kun je zeggen over deze resultaten als je beide vakken vergelijkt?

d 50% van de cijfers voor science ligt tussen de 7,1 en de 8,5. Is dat percentage bij wiskunde groter of kleiner?

Opgave 5

In deze frequentietabel zie je de resultaten van tellingen van het aantal eieren dat dagelijks in een hok vol kippen werd geraapt.

aantal eieren	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
frequentie	1	2	3	6	12	15	27	35	23	12

Op grond van deze tabel kun je de kans schatten dat je op een bepaalde dag 40 eieren in dit kippenhok kunt rapen.

a Hoeveel dagen werd er geteld om de tabel te kunnen maken? Hoeveel eieren werden op die dagen in totaal geraapt?

b Hoe groot is de kans dat op een willekeurige dag 40 eieren worden geraapt?

c Hoe groot is de kans dat op een willekeurige dag minstens 40 eieren worden geraapt?

Opgave 6

Voor het slot van een kluis wordt een vijfcijferige code gebruikt. Alle cijfers 0, 1, t/m 9 zijn toegestaan.

a Hoeveel verschillende codes kun je zo maken? Gebruik een wegendiagram om dit duidelijk te maken.

b Hoeveel verschillende codes zijn er waarvan alle cijfers verschillend zijn?

Je bent de code die je hebt ingesteld vergeten. Je weet alleen de eerste twee cijfers nog.

c Hoe groot is de kans dat je de goede code kiest?

Opeens bedenk je dat de cijfers van je code allemaal verschillend zijn.

d Hoe groot is nu de kans dat je de goede code kiest?

Opgave 7

Je gooit met twee dobbelstenen.

Hoe groot is de kans dat er samen meer dan 8 ogen boven komen te liggen?

Toepassen

Op de meeste scholen kies je in het derde leerjaar in havo en vwo voor een profiel. Bij die **profielkeuze** moet je ook een keuze maken voor het soort wiskundeprogramma dat je daarna gaat volgen. Voor de meeste leerlingen betekent dit een keuze tussen het wiskunde A programma en het wiskunde B programma.

Er wordt wel gezegd dat je om wiskunde B te kunnen kiezen ‘goed’ moet zijn in wiskunde, ‘beter’ dan wanneer je wiskunde A zou kiezen. Dan zou je kunnen veronderstellen dat leerlingen die wiskunde B kiezen op het moment van hun keuze hogere cijfers zouden moeten hebben dan leerlingen die wiskunde A kiezen.

Ook wordt wel gezegd dat jongens vooral voor de N-profielen en met name het NT-profiel kiezen en dat meisjes meer voor de M-profielen kiezen.

Mooie onderwerpen voor statistisch onderzoek...

Opgave 8: Statistiek rond profielkeuze

Bekijk de onderzoeksmogelijkheden die bij **Toepassen** worden aangedragen. Misschien kun je nog wel andere onderzoeksvragen bedenken rond het thema ‘profielkeuze’. Zet samen met één of meer medeleerlingen een statistisch onderzoek op.

a Je kunt waarschijnlijk alleen op jouw eigen school onderzoek doen rond dit thema. Licht toe of de leerlingen van jouw school kunnen dienen als geschikte steekproef voor alle leerlingen in 3 havo/vwo.

b Formuleer een nauwkeurige onderzoeksvraag en mogelijke deelvragen.

c Verzamel de gegevens die nodig zijn in verband met jullie onderzoeksvraag en vat die gegevens samen in diagrammen en centrum- en spreidingsmaten.

d Probeer conclusies te trekken. Onderbouw die conclusies vanuit je diagrammen, centrummaten en spreidingsmaten.

Begrippen

- stelsel van vergelijkingen — xy-assenstelsel — snijpunt — strijdig stelsel;
- elimineren — substitueren;
- vergelijkingen combineren — oplossen van vergelijkingen.

Activiteiten

- het begrip stelsel vergelijkingen en stelsels oplossen met behulp van grafieken en snijpunten berekenen;
- stelsels oplossen door middel van substitutie, strijdige stelsels;
- stelsels oplossen door beide vergelijkingen (na een geschikte vermenigvuldiging) op te tellen of af te trekken;

Vergelijken...

Domein

Rekenen en algebra

Hoofdstuk

Stelsels vergelijkingen

Inhoud

2

2.1 Grafisch oplossen

Verkennen

Opgave V1

Harmonieorkest Apollo houdt een concert. Er zijn kinderkaartjes van € 2,50 per stuk en kaartjes voor personen van 16 jaar en ouder van € 4,50 per stuk. Alle 600 kaartjes zijn verkocht en de penningmeester van Apollo heeft € 2466,- aan inkomsten.

Hoeveel kinderkaartjes zijn er verkocht?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** het ‘probleem’ van harmonieorkest Apollo.

a Leg uit hoe je de twee vergelijkingen met twee onbekenden uit de gegevens kunt afleiden.

b Herleid beide vergelijking tot de vorm $v = ...$

c Teken de twee lijnen die bij de gegeven vergelijkingen horen in een kv-assenstelsel. Maak een schatting van het snijpunt.

d Bereken de coördinaten van het snijpunt van beide lijnen met behulp van een vergelijking.

e Wat is nu het antwoord op de gestelde vraag naar het aantal kinderkaartjes?

Opgave 2

De volgende puzzel heb je wellicht eerder gezien:

“Een man en een vrouw zijn samen 91 jaar oud. De vrouw is een aantal jaren jonger dan de man. Toen de man zo oud was als zij nu is, was de vrouw 26. Hoe oud zijn de man en de vrouw nu?”

Je gaat hem nu oplossen met behulp van een stelsel vergelijkingen.

a Neem voor de huidige leeftijd van de vrouw de variabele x en voor de huidige leeftijd van de man y. Welke twee vergelijkingen met twee onbekenden kun je uit de gegevens afleiden?

b Herleid beide vergelijking tot de vorm $y = ...$

c Teken de twee lijnen die bij de gegeven vergelijkingen horen in een xy-assenstelsel. Maak een schatting van het snijpunt.

d Bereken de coördinaten van het snijpunt van beide lijnen met behulp van een vergelijking.

e Wat is nu het antwoord op de gestelde vraag naar hun huidige leeftijden?

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden kunt oplossen.

a Schrijf zelf beide vergelijkingen in de vorm $y = ...$ en bereken met behulp daarvan het snijpunt van de bijbehorende lijnen.

b Je hebt de y-waarde van het snijpunt gevonden door invullen. Ga na dat het geen verschil maakt in welke vergelijking van het stelsel je de gevonden x-waarde invult.

Opgave 4

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 16 \end{cases}$

b $\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 2x + 5y = 21 \end{cases}$

Opgave 5

Bekijk in de **Theorie** wat een strijdig stelsel is.

Laat zien dat het stelsel vergelijkingen $3x - 2y = 5 \wedge y = 1{,}5x$ een strijdig stelsel is.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** het probleem van het berekenen van de afmetingen van een rechthoek met gegeven omtrek en oppervlakte.

a Schrijf beide vergelijkingen in de vorm $l = ...$

b Teken grafieken van de bij a gevonden formules in één bl-assenstelsel.

c Laat zien hoe je de b-waarden van de snijpunten kunt uitrekenen met behulp van een vergelijking.

Opgave 7

Van twee getallen is het product 836 en de som 60.

Bereken met behulp van een stelsel vergelijkingen welke getallen dit zijn..

Verwerken

Opgave 8

Los de volgende stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden exact op.

a $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$

b $\begin{cases} y = \text{-}0{,}5x + 1{,}5 \\ 2y - x + 10 = 0 \end{cases}$

c $x = 2y + 1 \wedge 0{,}5x - y = 8$

d $\begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Opgave 9

Een tuincentrum heeft dennen en sparren in de aanbieding. Twee buren kopen er voor een (deels gezamenlijke) tuinafscheiding dennen en sparren. De familie De Vries koopt 12 dennen en 15 sparren en de familie Jansen koopt 16 dennen en 11 sparren. De familie De Vries betaalt daarmee € 162,00 en de familie Jansen is € 160,20 kwijt.

Hoeveel kost één den en hoeveel kost één spar in deze aanbieding?

Opgave 10

Van een rechthoekige fabriekshal met een vloeroppervlakte van 120 m^2 is de lengte 7 meter groter dan de breedte.

Bereken de afmetingen van deze hal met behulp van een stelsel vergelijkingen.

Opgave 11

Van driehoek ABC zijn twee hoekpunten gegeven, namelijk $A(1,1)$ en $B(7,1)$. De lijn AC gaat behalve door punt A ook door $P(3,4)$. De lijn BC gaat behalve door punt B ook door $Q(1,4)$.

Bereken de exacte oppervlakte van deze driehoek.

Opgave 12

Achilles en de schildpad is een bekende paradox uit de Griekse Oudheid: “De snelle loper Achilles en een schildpad wilden een hardloopwedstrijd houden. De schildpad kreeg een voorsprong van 200 m. De schildpad overtuigde Achilles er echter van dat die hem nooit zou kunnen inhalen. Hij redeneerde: als Achilles de 200 m heeft afgelegd, dan legt de schildpad 1 m af en als Achilles die éne meter heeft afgelegd, dan heeft de schildpad intussen ook weer een stukje afgelegd, enzovoorts. Hier kon Achilles niets tegen in brengen en dus gaf hij de wedstrijd gewonnen.”
Toch kun je eenvoudig narekenen, dat Achilles wel degelijk zou hebben gewonnen. Neem maar eens aan dat hij 10 m/s kan lopen en de schildpad slechts 0,1 m/s. De tijd t is in seconden, beiden starten op $t = 0$.

a Leg uit dat voor de afgelegde afstand a (in m) van Achilles geldt $a = 10t$ en dat voor de afgelegde afstand van de schildpad geldt $a = 200 + 0{,}1t$.

b Bereken met het bij a gevonden stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden de tijd waarbinnen Achilles de schildpad heeft ingehaald.

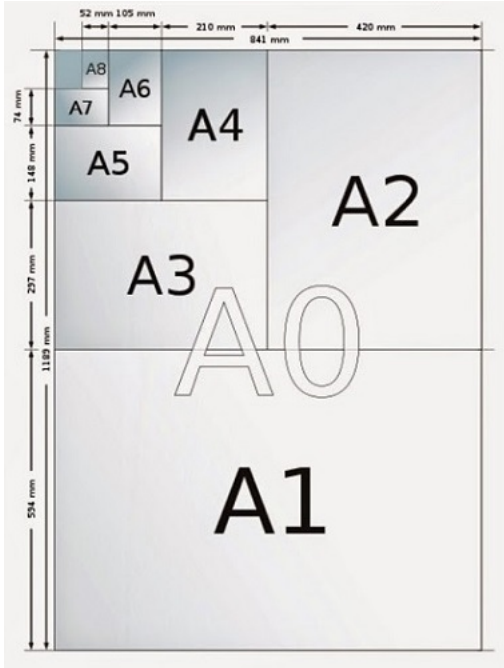
c Na hoeveel m lopen heeft Achilles de schildpad ingehaald?

Toepassen

De standaard papierformaten zijn A0, A1, A2, A3, A4, A5, ...
Voor deze papierformaten geldt:

- de breedte van A0 is de lengte van A1, de breedte van A1 is de lengte van A2, enzovoorts;
- de verhouding tussen lengte en breedte is voor elk formaat hetzelfde;
- de oppervlakte van A0 is 1 m^2, die van A1 is $0{,}5$ m^2, die van A2 is $0{,}25$ m^2, enzovoorts;

Hiermee kun je de lengte en de breedte van alle papierformaten uitrekenen...



Opgave 13: Papierformaten

Bekijk in **Toepassen** hoe de standaard papierformaten zijn samengesteld.

Ga uit van een lengte l en een breedte b van het A0-formaat, beide in m.

a Laat zien dat uit de drie eigenschappen van de papierformaten volgt: $l^2 = 2b^2$.

b Omdat je ook de oppervlakte van het A0-formaat weet, krijg je twee vergelijkingen met twee onbekenden. Welke twee?

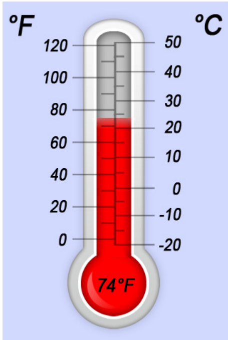
c Los dit stelsel vergelijkingen op.

d Welke afmetingen heeft het A0-formaat? En het A4-formaat? Geef de antwoorden in mm nauwkeurig.

2.2 Een variabele elimineren

Verkennen

Opgave V1



De omzet van ijs van een ijscoman hangt af van de buitentemperatuur. Stel dat voor het verband tussen de hoeveelheid ijs h (in liter) die hij op een dag verkoopt en de gemiddelde temperatuur gedurende de uren waarin hij ijs verkoopt geldt $h = 2C - 34$, waarin C buitentemperatuur in graden Celsius is.
Je kunt de temperatuur ook meten in graden Fahrenheit. Voor het verband tussen de temperatuur in graden Celsius en die in graden Fahrenheit geldt $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

Welke formule geeft het verband weer tussen de verkochte hoeveelheid ijs en de buitentemperatuur in graden Fahrenheit? Schrijf deze formule zo eenvoudig mogelijk.

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe het probleem van harmonieorkest Apollo wordt opgelost door v te elimineren.

a Laat zien hoe je het probleem verder kunt oplossen.

b Laat zien dat je dit stelsel ook kunt oplossen door k te elimineren. Schrijf stap voor stap op hoe je dan te werk gaat.

Opgave 2

Je wilt het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 4x - y = -9 \\ 2x = 2y - 7 \end{cases}$ oplossen.

a Schrijf de tweede vergelijking in de vorm $x = ...$ en los het stelsel op door dit in de eerste vergelijking te substitueren.

b Schrijf de eerste vergelijking in de vorm $y = ...$ en los het stelsel op door dit in de tweede vergelijking te substitueren.

Opgave 3

Als je te maken hebt met twee formules met drie variabelen, kun je vaak ook één variabele elimineren. Je zag dat al in **Opgave 1**.

a Leg uit hoe je in die opgave de formule van h afhankelijk van F kunt maken.

Neem de formules $R = p \cdot q$ en $q = 400 - 20p$.

b Schrijf R als functie van alleen p.

c Je kunt een grafiek van R als functie van p maken. Wat voor soort grafiek wordt het?

Je wilt nu R als functie van alleen q schrijven.

d Wat moet je dan eerst doen?

e Schrijf R als functie van alleen q.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** heb je een stelsel vergelijkingen opgelost door één variabele te elimineren.

a Los het stelsel nog eens op door de eerste vergelijking in de vorm $y = ...$ te schrijven en dan de gevonden uitdrukking in de tweede vergelijking te substitueren.

b Los het stelsel op door een vergelijking in de vorm $x = ...$ te schrijven en dan de gevonden uitdrukking in de andere vergelijking te substitueren.

c Waarom kun je zeggen dat in het voorbeeld de handigste aanpak is gekozen?

Opgave 5

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 2y = x + 4 \end{cases}$

b $x - 2y = 6 \wedge y - 2x = 4$

c $\begin{cases} 4x - y = 20 \\ x - 3 = 5 \end{cases}$

d $5x - y = 12 \wedge x = y$

Opgave 6

Een appel en drie peren kosten samen € 2,75.
Twee appels en een peer kosten € 1,75.

Hoeveel euro kost één appel?

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je van twee vergelijkingen met drie variabelen één vergelijking met twee variabelen kunt maken door de variabele die in beide vergelijkingen voorkomt te elimineren.

a Schrijf y als functie van x als $y = 2a + 6 \wedge x + a = 4$.

b Schrijf A als functie van b als $A = l \cdot b \wedge 2l + 2b = 19$.

c Schrijf q als functie van p als $4p - 0{,}5r = 20$ en $2r - 3q = 6$.

Opgave 8

Bekijk hoe in **Voorbeeld 3** een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden wordt opgelost waar ook een kwadraat in voorkomt.

a Loop zelf de oplossing na en voer elke stap zelf uit.

Je kunt dit stelsel ook oplossen zonder eerst één van beide te herleiden tot de vorm $x = ...$.
De tweede vergelijking staat immers al in die vorm!

b Los de vergelijking ook op deze manier op.

c Je kunt ook de eerste vergelijking naar de vorm $y = ...$ herleiden. Wat is daarvan het nadeel?

Opgave 9

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a $\begin{cases} y = x^2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

b $pq^2 = 2 \wedge p(5q - 8) = 1$

c $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Verwerken

Opgave 10

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a $5x - y = 10 \wedge x = y$

b $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

c $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 5y = 31 \end{cases}$

d $x^2 = 11 - y \wedge 2x - y = 3$

e $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}16y = 1{,}26 \\ 0{,}55x - 0{,}7y = 0{,}61 \end{cases}$

f $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}y = 1 \wedge y - 2x + 3 = 0$

Opgave 11

In de volgende stelsels formules wil je het aantal variabelen verminderen.

a Stel een formule op voor y als functie van x als $y = 3p - 3$ en $p = 2x + 2$.

b Stel een formule op voor z als functie van a als $a = 2x - 2$ en $x = z - 1$.

c Stel een formule op voor a als functie van q als $a = 2p^2 - 1$ en $2p - q = 4$.

d Stel een formule op voor y als functie van x als $x = \sqrt{k - 1}$ en $y = 2k - 3$.

Opgave 12

Van twee naast elkaar gelegen boerderijen is door een storm het rieten dak beschadigd. Beide boeren laten dezelfde rietdekker komen om het dak te repareren. Boer Brandwijk is voor $2{,}5$ uur werk plus voorrijkosten € 167,50 kwijt en boer Klein Besselink betaalt voor 6 uur werk plus voorrijkosten € 325,00.

Hoeveel bedraagt het uurloon van deze dakdekker?

Opgave 13

Gegeven is een kubus met ribben van r cm. De inhoud van deze kubus is V en de oppervlakte is A.

a Stel formules op voor V en voor A.

b Stel een formule op voor V als functie van A en schrijf deze formule zo eenvoudig mogelijk.

c Stel een formule op voor A als functie van V.

d Bereken het volume van een kubus waarvan de totale oppervlakte 100 cm^2 is in cm^3 nauwkeurig.

e Bereken de oppervlakte van een kubus waarvan de inhoud 100 cm^3 is in cm^2 nauwkeurig.

Opgave 14

Loes verkoopt koppen koffie. Het aantal dat zij verkoopt hangt af van de prijs die ze vraagt: $a = 400 - 100p$. Hierin is a het aantal koppen koffie dat ze verkoopt en p is de prijs in euro per kop. De kosten per kop bedragen € 0,50. De winst W die Loes maakt berekent ze met de formule $W = (p - 0{,}50) \cdot a$.

a Licht toe hoe Loes aan de formule voor de winst komt.

b Bij welke prijs per kop en welk aantal koppen koffie maakt Loes de meeste winst?

Toepassen

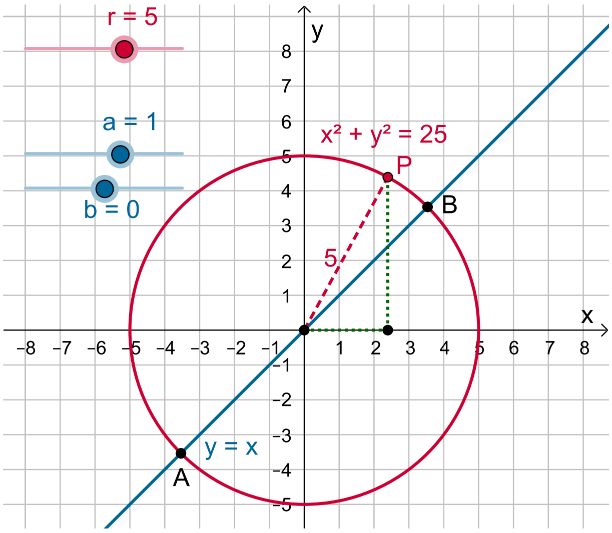
Applet

Dit is een toepassing die typisch is voor wiskunde B in de bovenbouw.

In de figuur zie je een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal r.

Als $r = 5$, dan geldt voor elk punt P op de cirkel dat $x^2 + y^2 = 5^2$. Dit noem je wel de **vergelijking van de cirkel**.

Elke cirkel met middelpunt O heeft een dergelijke vergelijking.



Je ziet ook een rechte lijn met een vergelijking van de vorm $y = ax + b$ waarbij a en b instelbaar zijn.

Als je in een bepaald geval (bijvoorbeeld $r = 5$, $a = 1$ en $b = 0$) de snijpunten van de lijn en de cirkel wilt berekenen, dan kun je dit doen door het bijbehorende stelsel van twee vergelijkingen met onbekenden x en y op te lossen.

Opgave 15: Snijpunten van cirkels en lijnen

Ga uit van $r = 5$, $a = 1$ en $b = 0$.

a Leg uit, waarom voor elk punt op deze cirkel geldt $x^2 + y^2 = 5^2$.

b Je ziet bij deze instellingen een cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ en een lijn met vergelijking $y = x$. Bereken de twee snijpunten van de lijn en de cirkel.

Door andere waarden van a en/of b en/of r te kiezen, kun je het berekenen van snijpunten van een lijn en een cirkel oefenen. Meestal komen de coördinaten niet op gehele getallen uit. Om veel vervelend rekenwerk te vermijden kun je dan bijvoorbeeld op één decimaal gaan afronden.

c Oefen jezelf of oefen samen met een medeleerling.

d Neem $r = 5$ en $b = 0$. Voor welke waarden van a krijg je snijpunten met gehele coördinaten?

e Neem $b = 0$. Bij de meeste cirkels krijg je dan alleen als $a = 0$ snijpunten met gehele coördinaten. Voor welke waarden van r krijg je ook voor andere waarden van a snijpunten met gehele coördinaten?

Opgave 16: Snijpunten of raakpunten

Neem in de applet hierboven $r = 5$ en $a = 1$. Er zijn nu waarden van b waarvoor de twee snijpunten van de lijn en de cirkel samenvallen. De lijn raakt dan de cirkel.

a Bepaal eerst zo nauwkeurig mogelijk met de applet welke waarden dit zijn.

Verzin een manier om deze waarden van b te berekenen vanuit de vergelijkingen van de cirkel en de lijn.

b Je ziet bij deze instellingen een cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ en een lijn met vergelijking $y = x$. Bereken de twee snijpunten van de lijn en de cirkel.

2.3 Handig combineren

Verkennen

Opgave V1

In het vorige onderdeel stond deze opgave:

"Van twee naast elkaar gelegen boerderijen is door een storm het rieten dak beschadigd. Beide boeren laten dezelfde rietdekker komen om het dak te repareren. Boer Brandwijk is voor $2{,}5$ uur werk plus voorrijkosten € 167,50 kwijt en boer Klein Besselink betaalt voor 6 uur werk plus voorrijkosten € 325,00.
Hoeveel bedraagt het uurloon van deze dakdekker?"

a Als u het uurloon en v de voorrijkosten zijn, dan volgt uit de tekst $2{,}5u + v = 167{,}50$ en $6u + v = 325$. Ga dit zelf na.

b Leg uit hoe je uit deze vergelijkingen meteen kunt afleiden dat $3{,}5u = 157{,}50$.

c Hoeveel bedraagt dus het uurloon u?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je soms de twee vergelijkingen van een stelsel handig kunt combineren tot een nieuwe vergelijking waarin één van beide variabelen is geëlimineerd.

a Waarom mag je beide vergelijkingen op de beschreven manier optellen?

b Je vindt op deze manier heel snel dat $x = 28$. Hoe vind je de bijbehorende y-waarde?

c Je kon hier beide vergelijkingen ook van elkaar aftrekken. Laat zien hoe dan de oplossing verloopt.

Opgave 2

Bekijk nu het stelsel $2x + 3y = 51 \wedge y - 2x = 21$.

Ook dit stelsel vergelijkingen kun je handig oplossen.

a Zet eerst beide vergelijkingen onder elkaar en wel zo, dat de termen met x onder elkaar komen evenals de termen met y en de termen die alleen uit getallen bestaan.

b Moet je nu beide vergelijkingen optellen of juist aftrekken om een variabele te elimineren?

c Los het stelsel vergelijkingen op.

d Welk snijpunt hebben de twee lijnen $2x + 3y = 51$ en $y - 2x = 21$?

Opgave 3

Bekijk nu het stelsel $4x + 3y = 51 \wedge y - 2x = 21$.

Ook dit stelsel vergelijkingen kun je handig oplossen.

a Zet eerst beide vergelijkingen onder elkaar en wel zo, dat de termen met x onder elkaar komen evenals de termen met y en de termen die alleen uit getallen bestaan.

Optellen of aftrekken van beide vergelijkingen helpt nu niet om een variabele te elimineren. Maar bij elke afzonderlijke vergelijking kun je ook de balansmethode toepassen. Vermenigvuldig bij de onderste vergelijking aan beide zijden van het isgelijkteken met 2.

b Schrijf op welk stelsel vergelijkingen er dan ontstaat.

c Los het stelsel vergelijkingen op door beide vergelijkingen op te tellen.

Je hebt nu het stelsel vergelijkingen opgelost door met behulp van een vermenigvuldiging ervoor te zorgen dat er gelijke termen met x ontstaan. Daarna kon je ze handig combineren, in dit geval optellen.
Maar je had er ook voor kunnen zorgen dat de termen met y gelijk worden.

d Laat zien, hoe je dan het stelsel vergelijkingen kunt oplossen.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** heb je een stelsel vergelijkingen opgelost door beide vergelijkingen zodanig te combineren dat de termen met x wegvielen.

a Los het stelsel nog eens op door de vergelijkingen zodanig te combineren dat de termen met y wegvallen.

b Los het stelsel op door een vergelijking in de vorm $x = \dots$ of $y = \dots$ te schrijven en dan de gevonden uitdrukking in de andere vergelijking te substitueren.

c Welke aanpak vind je het handigst?

Opgave 5

Los de volgende stelsels vergelijkingen op. Gebruik de manier die je het handigst vindt.

a $\begin{cases} 4y - 3x = 74 \\ 4x + 9y = -27 \end{cases}$

b $4x - y = 1 \wedge 2x + 5y = 1$

c $x^2 = y - 1 \wedge 2x + y = 16$

Opgave 6

Bekijk het stelsel vergelijkingen $a^2 + b^2 = 17 \wedge a + b = 5$.

a Waarom kun je dit stelsel niet oplossen door beide vergelijkingen (na handig vermenigvuldigen) op te tellen of af te trekken?

b Je kunt dit stelsel vergelijkingen alleen oplossen door de onderste vergelijking in de vorm $a = \dots$ of $b = \dots$ te schrijven en dan te substitueren. Los het stelsel vergelijkingen op.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je twee bijzondere stelsels vergelijkingen. Het éne stelsel heeft geen oplossingen en het andere stelsel heeft er oneindig veel.

a Bekijk het strijdige stelsel nog eens. Schrijf beide vergelijkingen in de vorm $y =$ .... Wat valt op? Wat kun je van de bijbehorende grafieken zeggen?

b Bekijk nu het andere stelsel. Schrijf beide vergelijkingen in de vorm $y =$ .... Wat valt op? Wat kun je van de bijbehorende grafieken zeggen? En waarom zijn er oneindig veel oplossingen?

Opgave 8

Ga van de volgende stelsels vergelijkingen na hoeveel oplossingen ze hebben.

a $\begin{cases} 3p + 2q = 6 \\ 1{,}5p = 5 - q \end{cases}$

b $\begin{cases} 3p + 2q = 6 \\ 1{,}5p = 5 + q \end{cases}$

c $\begin{cases} 3p + 2q = 6 \\ 1{,}5p = 3 - q \end{cases}$

Verwerken

Opgave 9

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ \text{-}2x + y = 7 \end{cases}$

b $\begin{cases} a + b = \text{-}1 \\ 2a - 2b = 3 \end{cases}$

c $3p + 5q = 326 \wedge 4p - 3q = 19$

d $y - 2x = 6 \wedge 2y - 12 = 4x$

e $\begin{cases} 0{,}1c + b = 99 \\ c - 100b = 0{,}99 \end{cases}$

f $\begin{cases} x + y^2 = 28 \\ 2y = 3x + 1 \end{cases}$

Opgave 10

Een oud raadseltje:
In januari 2006 was Harry viermaal zo oud als Pieter.
In januari 2012 was Harry tweemaal zo oud als Pieter.

Hoe oud waren Harry en Pieter in januari 2006?

Opgave 11

Arash en Ymke zijn jarig en halen ijs voor hun klas: Magnums en Cornetto's.
Arash haalt voor de jongens 6 Cornetto's en 5 Magnums. Ymke haalt voor de meiden 7 Cornetto's en 10 Magnums. Arash is € 22,95 kwijt en Ymke betaalt € 36,15.

Hoeveel kost een Magnum? En een Cornetto?

Opgave 12

Hier zie je een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden.

$$\begin{cases} x + y + z = 1200 \\ 2x - y = 652 \\ 3x + y = 103 \end{cases}$$

Los dit stelsel op.

Opgave 13

Voor de klemspanning, het spanningsverschil U tussen de twee polen van een batterij, geldt $U = U_{\text{bron}} - R_{\text{i}} \cdot I$ waarin U_{bron} de bronspanning (in volt), R_{i} de inwendige weerstand (in ohm) en I stroomsterkte (in ampère) voorstelt.

Bij een stroomsterkte van $1{,}5$ ampère is de klemspanning 10 volt. Bij een stroomsterkte van 3 ampère is de klemspanning 8 volt.

Bereken de bronspanning en de inwendige weerstand van deze batterij.

Toepassen

In een meubelfabriek worden twee verschillende eikenhouten tafels geproduceerd: een designtafel en een klassieke tafel. Beide tafels worden in de fabriek geschuurd en gelakt. Het schuren gebeurt in een andere afdeling dan het lakken. In de tabel zie je hoeveel uur elke tafel op de verschillende afdelingen wordt bewerkt.

	designtafel	klassieke tafel
schuren	2 uur	3 uur
lakken	2,5 uur	2 uur

In deze fabriek wordt op elk van de twee genoemde afdelingen 40 uur per week aan deze tafels gewerkt.
Hoeveel van elke soort tafels kan er dan per week worden geproduceerd?

Opgave 14: Tafels

Bekijk hierboven het probleem van de meubelfabriek bij de productie van twee soorten tafels.

a Welke twee vergelijkingen met twee onbekenden kun je bij dit probleem opstellen?

b Los dit stelsel vergelijkingen op.

c Je wilt geen tafels laten staan die nog niet volledig zijn afgewerkt op een afdeling. Welk antwoord geef je op de vraag?

Opgave 15: Stoelen

Dezelfde meubelfabriek maakt ook bijpassende eiken stoelen. Ook die stoelen worden geschuurd en gelakt. Maar de stoelen worden ook nog bekleed met een bepaalde soort stof. De verwerkingstabel voor de stoelen zie je hiernaast.

	designstoel	klassieke stoel
schuren	0,5 uur	1,25 uur
lakken	0,75 uur	1 uur
bekleden	1,5 uur	0,75 uur

Op elk van deze drie afdelingen wordt wekelijks maximaal 40 uur aan deze stoelen gewerkt.

a Welke drie vergelijkingen met twee onbekenden kun je bij dit probleem opstellen?

b Hoeveel van deze stoelen kunnen er wekelijks worden geproduceerd? Op welke afdeling houd je dan de meeste werktijd over?

Practicum: Stelsels oplossen

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **oplossen van stelsels vergelijkingen, het snijpunt van twee lijnen berekenen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

2.4 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je kennis gemaakt met situaties waarin meerdere variabelen voorkomen en meerdere vergelijkingen nodig zijn om de situatie te beschrijven. Je hebt deze stelsels vergelijkingen op drie manieren leren oplossen: door de vergelijkingen te herleiden tot formules van functies en naar snijpunten van hun grafieken te zoeken (of die te berekenen), door één van beide vergelijkingen te herleiden en dan substitutie toe te passen en door beide vergelijkingen handig te combineren. Alle drie zijn deze methoden belangrijk genoeg om te onthouden.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Stelsels vergelijkingen** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2 en 3 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

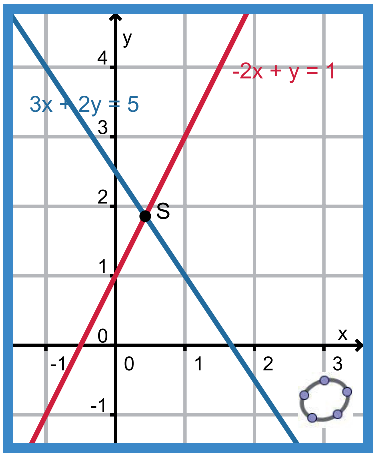
- stelsel van vergelijkingen — xy-assenstelsel — snijpunt — strijdig stelsel;
- elimineren — substitueren;
- vergelijkingen combineren — oplossen van vergelijkingen.

Activiteiten

- het begrip stelsel vergelijkingen en stelsels oplossen met behulp van grafieken en snijpunten berekenen;
- stelsels oplossen door middel van substitutie, strijdige stelsels;
- stelsels oplossen door beide vergelijkingen (na een geschikte vermenigvuldiging) op te tellen of af te trekken;

Opgave 1

Iemand heeft de vergelijkingen van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden in GeoGebra ingevoerd. Je ziet hiernaast de grafieken die dit heeft opgeleverd. De vergelijkingen staan in de figuur bij de juiste grafiek. S is het snijpunt van beide grafieken. GeoGebra kan de coördinaten van S wel geven, maar alleen afgerond.



a Schrijf beide vergelijkingen in de vorm van een lineaire functie.

b Bereken met behulp van de vergelijkingen uit a de exacte coördinaten van S.

Opgave 2

Los de volgende stelsels op door gebruik te maken van substitutie.

a $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases}$

b $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 6x - 10y + 15 = 0 \end{cases}$

c $2x - 4y = 22 \wedge y^2 = x - 3$

Opgave 3

Om een rechthoekig veld met een oppervlakte van 188 m^2 komt een afrastering met een complete lengte van 102 m (inclusief het toegangshek).

Bereken de lengte en de breedte van dit veld.

Opgave 4

In totaal 60 appels en peren kosten € 30,00. Een appel kost 45 cent en een peer 60 cent.

Hoeveel appels zitten er bij?

Opgave 5

Los de volgende stelsels op. Kies steeds de handigste oplossingsmethode.

a $\begin{cases} 0{,}25a + 1{,}35b = 2 \\ 0{,}50a - 0{,}75b = 1 \end{cases}$

b $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 7x - y = 1 \end{cases}$

c $\frac{x}{5} + \frac{2y}{3} = 2{,}5 \wedge x - \frac{y}{2} = 3$

Opgave 6

20 L-mapjes en 5 ordners kosten € 19,25. 30 L-mapjes en 10 ordners kosten € 37,00.

Hoeveel kost een L-mapje?

Toepassen

En natuurlijk zijn er ook stelsels van meer dan twee vergelijkingen met soms ook meer dan twee onbekenden.

De technieken om een **stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden** op te lossen zijn hetzelfde als de technieken die je in dit onderwerp hebt geleerd. Van een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden ga je naar een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden en daarna naar één vergelijking met één onbekende.
In de opgaven hieronder leer je hoe dat gaat.

Vervolgens ga je dit toepassen op het vinden van de formule bij een parabool (wiskunde B) door drie gegeven punten en bij een probleem rond eiwitten, vetten en koolhydraten (wiskunde A).

Opgave 7: Drie vergelijkingen met drie onbekenden (1)

Je wilt het volgende stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden oplossen.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y - 6z = 1 \\ 7x - 8y + 9z = 1 \end{cases}$$

a Neem eerst de bovenste twee vergelijkingen en elimineer de z.

b Neem nu de bovenste en de onderste vergelijking en elimineer weer de z.

c Je hebt nu twee vergelijkingen met twee onbekenden gekregen. Los dat stelsel op.

d Bereken tenslotte de waarde van z door de gevonden waarden voor x en y in één van de drie gegeven vergelijkingen in te vullen.

Opgave 8: Drie vergelijkingen met drie onbekenden (2)

Los de volgende stelsels van drie vergelijkingen met drie onbekenden op. Soms zitten er vergelijkingen tussen die al meteen maar twee onbekenden hebben, dan kun je sneller werken dan in de vorige opgave.

a
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ 3x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 2x - y + z = \text{-}3 \\ x + y - 3z = \text{-}4 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} u = v + 0{,}5 \\ w = v + 2{,}5 \\ u + v + w = \text{-}1{,}5 \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} p + q = 4 \\ q + r = 6 \\ p - q + r = 10 \end{cases}$$

Opgave 9: Parabool door drie punten

Bij een kwadratische functie hoort als grafiek een parabool. Stel dat die parabool door de punten $(2,0)$, $(0,3)$ en $(-2,8)$ gaat, welke formule past er dan bij? En welk punt is de top van de parabool?

a Om deze vraag te kunnen beantwoorden ga je bijvoorbeeld uit van een formule van de vorm $y = ax^2 + bx + c$. Je vult de drie gegeven punten in en je vindt drie vergelijkingen met onbekenden a, b en c. Welke drie vergelijkingen krijg je?

b Bereken de waarden van a, b en c door het stelsel dat je bij a hebt gevonden op te lossen.

c Welke top heeft de parabool?

Je kunt deze techniek toepassen om een formule te maken voor elke parabool waarvan drie punten zijn gegeven. Alleen als de nulpunten en/of de top zijn gegeven ga je anders te werk.

d Bereken de top van de parabool door $(-1,2)$, $(1,1)$ en $(7,10)$

Opgave 10: Eiwitten, vetten en koolhydraten

Hoeveel calorieën er in eten zitten, hangt af van de hoeveelheid vet, koolhydraten en eiwitten. Dat aantal calorieën heet de voedingswaarde, meestal uitgedrukt in kcal (kilocalorie). Via **voedingswaardetabel.nl** kun je van heel veel levensmiddelen de voedingswaarde per 100 mg bekijken. Een paar voorbeelden vind je in de tabel hiernaast. Die voedingswaarde wordt berekend door uit te gaan van vaste caloriewaarden per gram eiwit, per gram vet en per gram koolhydraten.

levensmiddel	eiwit (gram)	vet (gram)	koolhydr. (gram)	aantal kcal
achterham	18,2	5,5	1,7	129
komijnekaas	20,0	21,5	0,1	271
hagelslag (melk)	6,5	16,0	70,0	458
sla	1,3	0,2	1,0	11

Bereken de hoeveelheid kcal in 1 gram eiwit, in 1 gram vet en in 1 gram koolhydraten.

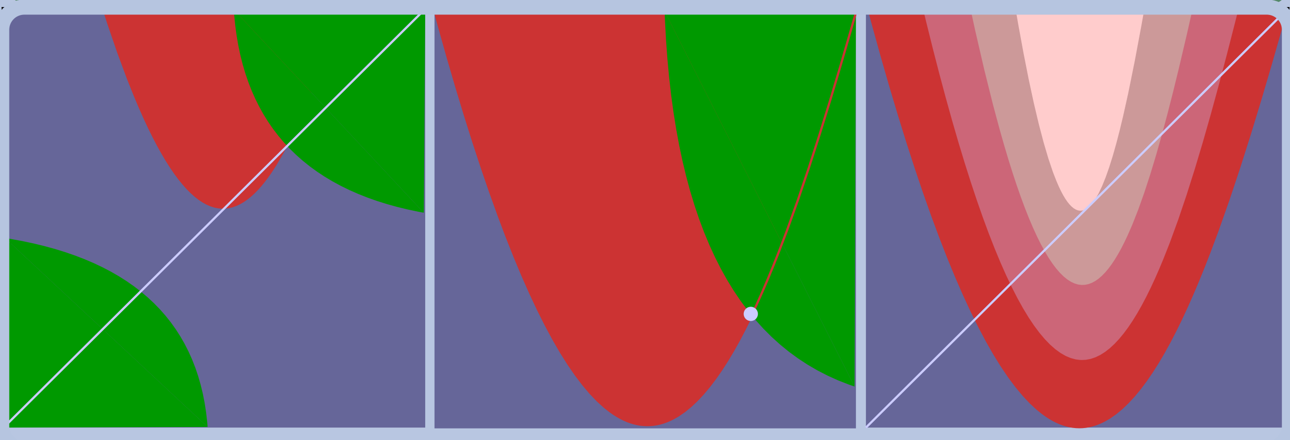
Begrippen

- het begrip functie — onafhankelijk variabele — functiewaarden;
- domein — bereik — interval;
- machtsfunctie — transformatie (vervorming) — wortelfunctie — gebroken functie;
- vergelijking — ongelijkheid;
- families van functies — functievoorschriften met een of meer parameters.

Activiteiten

- werken met het functiebegrip en de bijbehorende termen;
- domein en bereik van een functie bepalen;
- werken met standaardfuncties zoals de standaard lineaire, kwadratische, gebroken en wortelfunctie — de transformaties herkennen waarmee grafieken van functies uit die van de bijpassende standaardfunctie kunnen worden afgeleid;
- vergelijkingen en ongelijkheden bij allerlei functies oplossen;
- werken met parameters — een parameter berekenen onder andere in het geval dat functies elkaar raken.

Functies in beeld



Domein

Functies en grafieken

Hoofdstuk

Functies

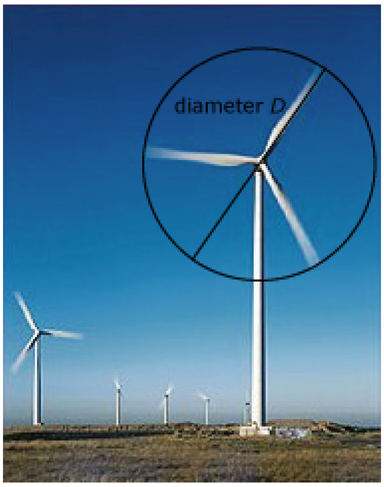
Inhoud

3

3.1 Wat is een functie?

Verkennen

Opgave V1



Iedere Nederlander kent ze: de windmolens die elektrische energie opwekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windkracht en van de bouw van de molen. Dat vermogen P in kW (kiloWatt) per uur kan worden berekend met een formule zoals deze:

$P = 0{,}0013 \cdot v^3 \cdot D^2$

Hierin is v de windsnelheid in m/s en D de diameter van de cirkel die de ronddraaiende wieken maken in m.

a De windmolen op de foto heeft wieken van 10 m. Laat zien dat voor die windmolen geldt: $P = 0{,}520 \cdot v^3$.

b Welk vermogen levert zo'n windmolen per uur als de windsnelheid 10 m/s is? Zijn er meerdere antwoorden mogelijk op deze vraag?

c Bij welke windsnelheid levert deze windmolen een vermogen van 400 kW/uur? Zijn er meerdere antwoorden mogelijk op deze vraag?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de functie die het vermogen van een windmolen met wieken van 10 m weergeeft.

a Hoe groot is $P(15)$? Wat betekent dit getal?

b Waarom kun je in de uitdrukking $P(15)$ hier niet gewoon de haakjes uitwerken en er $15P$ van maken?

c Schrijf de functiewaarde bij $v = 20$ met haakjes op en bereken die waarde.

d Teken de grafiek van $P(v)$ waarbij je voor v waarden neemt vanaf 0 tot en met 30.

e Hoe zie je aan de grafiek dat er bij elk origineel precies één functiewaarde hoort?

Opgave 2

Gegeven is de formule $y^2 = 4x$.

a Neem $x = 1$ en bereken welke waarden van y hierbij horen.

Bij deze formule is y geen functie van x, want bij de meeste waarden van x horen twee y-waarden.

b Kun je de formule in de vorm $y = ...$ schrijven?

c Maak een grafiek bij deze formule.

d Hoe kun je aan de grafiek zien dat het niet de grafiek van een functie is?

Opgave 3

Bekijk de functie die in **Voorbeeld 1** is gegeven.

a Reken na, dat f(1) = -3.

b Bereken ook de functiewaarde bij $x = 3$.

c Waarom kan het functievoorschrift worden geschreven als f$(x) = x\left(x^2 - 4\right)$?

d Bekijk het functievoorschrift bij c. Welke verschillende betekenis hebben de haakjes links en rechts van het isgelijkteken?

Opgave 4

Gegeven zijn de formules $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$ en $y = 3 - 2{,}5x$. Beide formules beschrijven een functie, de eerste formule beschrijft functie f en de tweede functie g.

a Schrijf de bijbehorende functievoorschriften op.

b Bereken f(3) en g(3).

c Los op: f$(x) = 4$. Welke punten van de grafiek van f vind je hiermee?

d Wat betekent f(x) = g(x) voor de grafieken van beide functies? Los deze vergelijking op.

Opgave 5

Bekijk de grafiek en de bijbehorende formule die in **Voorbeeld 2** zijn gegeven.

a Welke waarden van y horen er bij $x = 1$? Welke punten van de grafiek vind je daarmee?

b Welke waarden van y horen er bij $x = 0$? Welke punten van de grafiek vind je daarmee?

c Welke waarden van x horen er bij $y = 1$? Welke punten van de grafiek vind je daarmee?

d Welke waarden van x horen er bij $y = -1$? Welke punten van de grafiek vind je daarmee?

e Waarom is y geen functie van x?

f Waarom is x geen functie van y?

Opgave 6

Bij de formule $p^2 = 2q$ is p geen functie van q.

a Laat dat met een getallenvoorbeeld zien.

b Schrijf de formule in de vorm $q = ...$

c Waarom is q wel een functie van p?

Opgave 7

Bekijk de formule voor de inhoud van een cilinder in **Voorbeeld 3**. Neem nu een blik waarvan de diameter 10 cm is.

a Geef het functievoorschrift van I als functie van h.

b Bereken $I(10)$.

c Los op $I(h) = 1000$. Geef de waarde van h in mm nauwkeurig.

Opgave 8

Voor de oppervlakte A van een cilinder geldt $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ waarin r de straal en h de hoogte van de cilinder is, beide in cm.

Ga eerst uit van een cilinder met een hoogte van 10 cm.

a Schrijf het voorschrift op van A als functie van r.

b Bereken $A(5)$. Wat betekent de uitkomst?

Ga vervolgens uit van een cilinder met een straal van 10 cm.

c Schrijf het voorschrift op van A als functie van h.

d Bereken $A(5)$. Wat betekent de uitkomst?

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de functie f met functievoorschrift $\text{f}(x) = x^2 + 2x - 6$.

a Bereken f(0) en f(-2).

b Welke vorm heeft de grafiek van deze functie? Heeft deze functie een maximum of een minimum?

c Bereken de nulpunten van de grafiek.

d Voor welke waarden van x is de functiewaarde gelijk aan 9?

Opgave 10

In 2012 hanteerde PostNL de volgende tarieven voor het versturen van brieven tot 500 gram binnen Nederland:

- tot en met 20 gram: € 0,54
- tot en met 50 gram: € 1,08
- tot en met 100 gram: € 1,62
- tot en met 250 gram: € 2,16
- tot en met 500 gram: € 2,70

Noem het gewicht van een brief g en de prijs T.

a Teken een grafiek van $T(g)$.

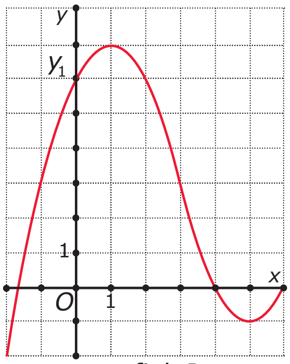
b Hoeveel bedraagt $T(100)$?

c Waarom is T een functie van g?

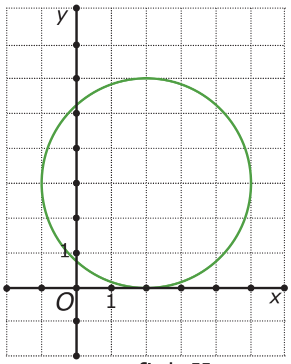
d Waarom is g geen functie van T?

Opgave 11

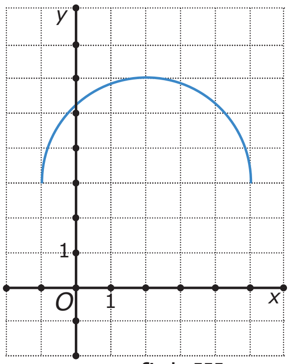
Bij welke van deze grafieken is y geen functie van x?



grafiek I



grafiek II



grafiek III

Opgave 12

Gegeven zijn de functies f en g door hun functievoorschriften:

- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$
- $g(x) = -x$

a De grafiek van f is een parabool met top T. Bereken de coördinaten van T.

b Bereken de exacte snijpunten van de grafiek van f met de assen. Teken de grafiek van f en g in één figuur.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de snijpunten van beide grafieken.

Opgave 13

Van een balk is het grondvlak een vierkant met zijden van x cm en is de hoogte h cm.

Neem eerst aan dat $h = 20$ cm.

a Geef een formule voor de totale oppervlakte A van deze balk als functie van x.

b Bereken $A(5)$.

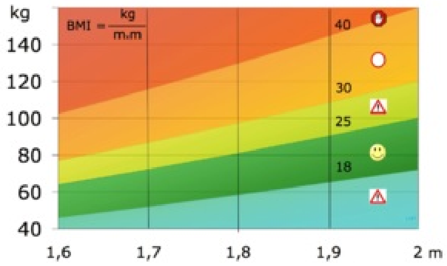
c Los op $A(x) = 300$. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Ga er nu van uit dat $x = 0{,}5h$ en dat h kan variëren.

d Geef het functievoorschrift van $A(h)$.

e Los op $A(h) = 300$. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Toepassen



Of iemand leidt aan overgewicht kun je bepalen aan de hand van de **body mass index**, de BMI. Een andere naam hiervoor is de **Queteletindex**. De grafiek hiernaast geeft weer bij welke BMI er sprake is van overgewicht. Hij geldt voor volwassenen.
Je BMI kun je eenvoudig uitrekenen door je gewicht in kg te delen door het kwadraat van je lengte in m.

Als je de BMI voorstelt door Q, je gewicht door g en je lengte door l, dan vind je

$Q = \frac{g}{l^2}$

Bij mensen van een bepaalde lengte hangt de BMI alleen van het gewicht af. Dan is Q een functie van g. Bij mensen van een bepaald gewicht hangt de BMI alleen van de lengte af. Dan is Q een functie van l.

Opgave 14: BMI en gewicht

Je ziet in **Toepassen** wat je verstaat onder de BMI. Ook tref je een formule aan voor het berekenen van de BMI.

Bekijk de groep mensen die een lengte heeft van $1{,}80$ m.

a De BMI is nu een functie van het gewicht g. Stel een formule op voor Q als functie van g.

b Bereken $Q(80)$. Welke betekenis heeft de uitkomst?

c Bereken bij welke waarde van g iemand met een lengte van $1{,}80$ m lijdt aan zeer ernstig overgewicht (rood in de grafiek). Welke betekenis heeft de uitkomst?

Opgave 15: BMI en lengte

Je ziet in **Toepassen** wat je verstaat onder de BMI. Ook tref je een formule aan voor het berekenen van de BMI.

Bekijk de groep mensen die een gewicht heeft van 100 kg.

a De BMI is nu een functie van de lengte l. Stel een formule op voor Q als functie van l.

b Bereken $Q(1{,}80)$. Welke betekenis heeft de uitkomst?

c Bereken bij welke waarde van l iemand met een gewicht van 100 kg lijdt aan zeer ernstig overgewicht. Welke betekenis heeft de uitkomst?

3.2 Domein en bereik

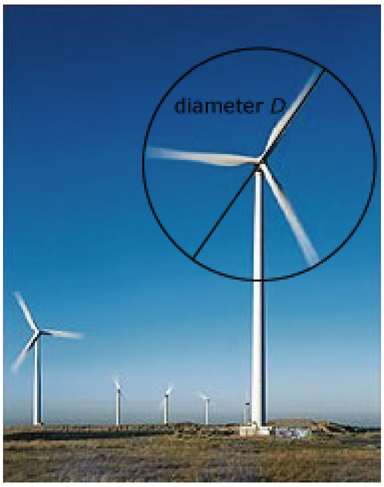
Verkennen

Opgave V1

Iedere Nederlander kent ze: de windmolens die elektrische energie opwekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windkracht en van de bouw van de molen. Dat vermogen P in kW (kiloWatt) per uur kan worden berekend met een formule zoals deze:

$P = 0{,}52 \cdot v^3$.

Hierin is v de windsnelheid in m/s en de diameter van de cirkel die de ronddraaiende wieken maken is 20 m. Bij hoge windsnelheden slaan de turbines van deze windmolens af.



a Welke waarden denk je dat v kan aannemen?

b Schat welke vermogens een windmolen zoals deze kan leveren.

Opgave V2

Gegeven is de functie f met $f(x) = \sqrt{x}$.

a Welke waarden denk je dat x kan aannemen?

b Maak een tabel en een grafiek bij deze functie.

c Welke functiewaarden heeft deze functie?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** vind je de functie die het vermogen van een windmolen met wieken van 10 m weergeeft. Nu bekijk je een windmolen met wieken van 15 m. Daarvoor geldt $P(v) = 1{,}17v^3$.

a Heeft het vergroten van de wieken invloed op het domein van de functie? Schrijf het domein van deze functie op als interval.

b Neem aan dat alle windsnelheden van 0 tot en met 25 m/s voor dit soort molens is toegestaan. Schrijf dan het domein en het bijbehorende bereik op.

Opgave 2

Gegeven is de functie f door $f(x) = 3 + \sqrt{x}$.

a Uit welke getallen bestaat het domein van deze functie? En waarom?

Het domein van deze functie wordt wel geschreven als $D_f = [0, \rightarrow \rangle$.

b Wat betekent de pijl? En waarom zou het rechterhaakje een andere vorm hebben gekregen als het linkerhaakje?

c Reken enkele functiewaarden uit, maak eventueel een tabel. Welke functiewaarden kunnen voorkomen?

d Schrijf het bereik van deze functie op. Gebruik dezelfde notatie als voor het domein.

Opgave 3

Je ziet hier de baan van een kogel die door een kogelstoter zo ver mogelijk wordt weggestoten. De kogel komt 14 m ver. Het hoogste punt van de baan zit 4 m boven de grond. De baan van de kogel kan worden beschreven met de formule $h(x) = -0{,}0625(x-6)^2 + 4$ waarin h de hoogte van de kogel boven de grond is en x de afstand is die het punt op de grond recht onder de kogel heeft afgelegd vanaf het moment van loslaten.

a Laat zien, dat de kogel inderdaad 14 m ver komt.

b Schrijf het domein van functie $h(x)$ op als interval.

c Laat zien dat het hoogste punt van de baan inderdaad 4 m boven de grond zit.

d Schrijf het bereik van deze functie op als interval.

Opgave 4

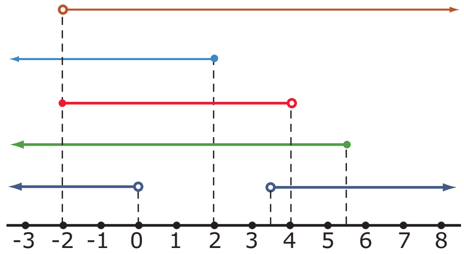
Bekijk de intervallen in **Voorbeeld 1**. Let goed op de open en gesloten rondjes en op de bijpassende vorm van de haakjes.

Teken de intervallen $\langle -2{,}4]$, $[2, \rightarrow \rangle$, $[1;3{,}5]$, $\langle \leftarrow ,0]$ en $\langle \leftarrow ,4\rangle \cup \langle 6, \rightarrow \rangle$.

Opgave 5

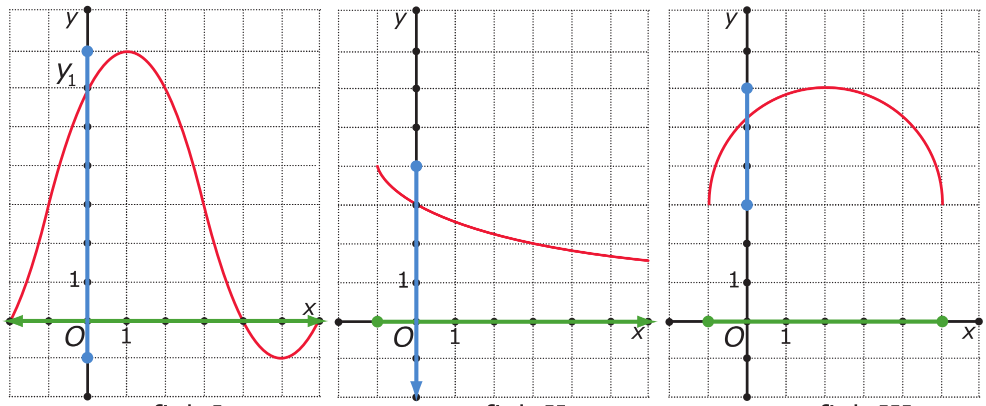
Hier zie je een aantal intervallen getekend.

Schrijf ze in intervalnotatie.



Opgave 6

Hier zie je een aantal grafieken van functies. Het domein en het bereik van de functie is bij de grafiek aangegeven.



Schrijf domein en bereik van elk van deze functies in intervalnotatie.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** is de lengte l van een rechthoek een functie van de breedte b.

a Leg uit hoe je aan het functievoorschrift komt.

b De oppervlakte A van dit landje is ook een functie van de breedte. Welk functievoorschrift hoort daar bij?

c Bepaal domein en bereik van $A(b)$.

Opgave 8

Gegeven is de functie $y = \text{-}0{,}25x^2 + 20x$.

a Hoe ziet de grafiek van $y(x)$ er uit?

b Schrijf het domein van $y(x)$ op.

c Bepaal de extreme waarde van deze functie en schrijf het bereik op.

Opgave 9

Gegeven is de functie $g(x) = 3 - \sqrt{x}$.

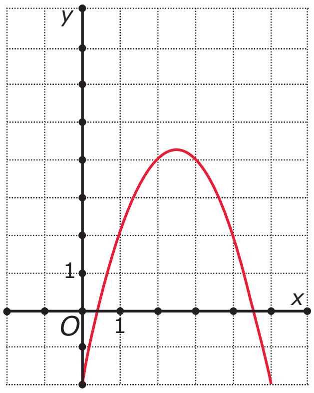
a Teken de grafiek van g.

b Schrijf het domein van g op.

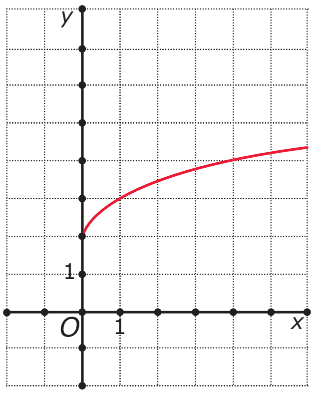
c Schrijf het bereik van g op.

Opgave 10

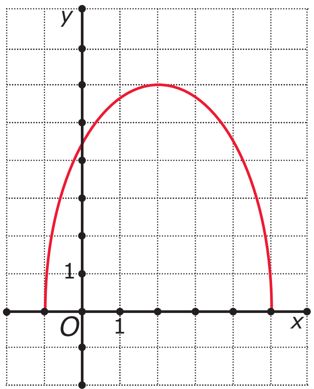
Hier zie je een aantal grafieken van functies. De functievoorschriften zijn er bij gezet.



$f(x)=-(x-2{,}5)^2+4{,}25$



$g(x)=2+\sqrt{x}$



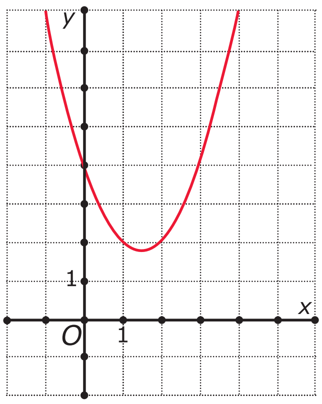
$h(x) = 2\sqrt{9-(x-2)^2}$

Schrijf domein en bereik van elk van deze functies in intervalnotatie.

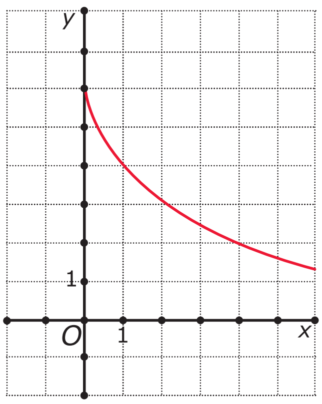
Verwerken

Opgave 11

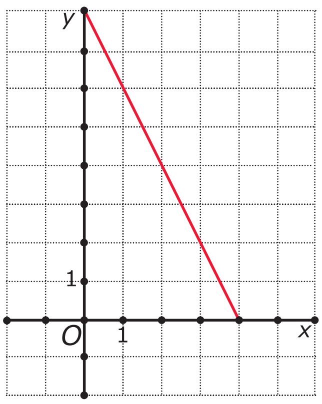
Hier zie je een aantal grafieken van functies. De functievoorschriften zijn er bij gezet.



$f(x)=(x-1{,}5)^2+1{,}75$



$g(x)=6-2\sqrt{x}$



$h(x)=8-2x$ met $x>0$ en $y>0$

Schrijf domein en bereik van elk van deze functies in intervalnotatie.

Opgave 12

Twee kaarsen worden op hetzelfde moment ($t = 0$) aangestoken.
Kaars 1 brandt gelijkmatig op: h_1 is een lineaire functie van t met $h_1(0) = 25$ en $h_1(20) = 0$.
Kaars 2 brandt niet gelijkmatig op: $h_2 = \frac{1}{12}(t-19)^2 - \frac{1}{12}$.
Hierin is h in cm en t in uren.

a Stel een functievoorschrift $h_1(t)$ op voor het opbranden van de eerste kaars.

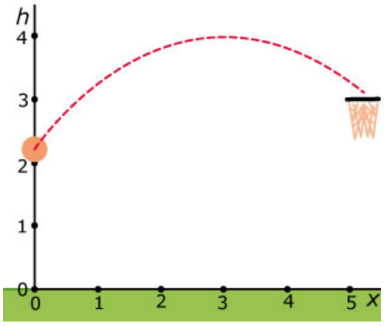
b Bepaal domein en bereik van h_1.

c Bepaal domein en bereik van h_2.

d Hoe lang is kaars 2 langer dan kaars 1?

Opgave 13

Een basketballer gooit de bal precies in de basket. De baan van het middelpunt van de bal is (bij benadering) een deel van een parabool. Je ziet dit deel van de parabool in de figuur hiernaast in een assenstelsel. Zowel x als h zijn in m uitgedrukt. Bij die parabool hoort de formule $h = -0{,}2 \cdot (x-3)^2 + 4$.



a Op het moment dat de speler de bal loslaat is $x = 0$. Op welke hoogte wordt de bal losgelaten? Het gaat daarbij om het middelpunt van de bal.

b Welk punt is het hoogste punt van de parabool?

De ring van de basket hangt op 3 m boven de grond. De speler scoort, want het middelpunt van de bal gaat door het midden van deze ring.

c Op hoeveel m voor de basket laat deze speler de bal los?

d Bepaal domein en bereik van $h(x)$.

Opgave 14

In 2012 hanteerde PostNL de volgende tarieven voor het versturen van brieven tot 500 gram binnen Nederland:

- tot en met 20 gram: € 0,54
- tot en met 50 gram: € 1,08
- tot en met 100 gram: € 1,62
- tot en met 250 gram: € 2,16
- tot en met 500 gram: € 2,70

De prijs T (in €) is een functie van het gewicht g (in g) van een brief.

a Wat is het domein van $T(g)$?

b Wat is het bereik van $T(g)$?

Opgave 15

Het bereik van een functie hangt af van het gekozen domein.

a Bepaal het bereik van de functie f met $f(x) = 6 - 1{,}5x$ en domein $\langle 0{,}6]$.

b Bepaal het bereik van de functie g met $g(x) = (x - 3)^2 + 1$ en domein $\langle 0{,}6]$.

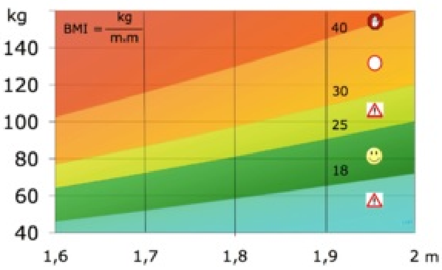
Opgave 16

Van een rechthoekige driehoek is de hypotenusa 10 cm.

Welke waarden kan de oppervlakte aannemen?

Toepassen

Of iemand leidt aan overgewicht kun je bepalen aan de hand van de **body mass index**, de BMI. Een andere naam hiervoor is de **Queteletindex**. De grafiek hiernaast geeft weer bij welke BMI er sprake is van overgewicht. Hij geldt voor volwassenen.
Je BMI kun je eenvoudig uitrekenen door je gewicht in kg te delen door het kwadraat van je lengte in m.



Als je de BMI voorstelt door Q, je gewicht door g en je lengte door l, dan vind je

$Q = \frac{g}{l^2}$

Bij mensen van een bepaalde lengte hangt de BMI alleen van het gewicht af. Dan is Q een functie van g. Bij mensen van een bepaald gewicht hangt de BMI alleen van de lengte af. Dan is Q een functie van l.

Opgave 17: BMI en gewicht

Je ziet in **Toepassen** wat je verstaat onder de BMI. Ook tref je een formule aan voor het berekenen van de BMI.

Bekijk de groep mensen die een lengte heeft van $1{,}70$ m.

a De BMI is nu een functie van het gewicht g. Stel een formule op voor Q als functie van g.

b Lees uit de figuur het bereik van Q af voor mensen van deze lengte met een gezond gewicht.

c Bereken het domein van deze functie voor mensen met een gezond gewicht. Rond je antwoord af op gehele kg. Wat betekent dit antwoord?

Opgave 18: BMI en lengte

Je ziet in **Toepassen** wat je verstaat onder de BMI. Ook tref je een formule aan voor het berekenen van de BMI.

Bekijk de groep mensen die een gewicht heeft van 80 kg.

a De BMI is nu een functie van de lengte l. Stel een formule op voor Q als functie van l.

b Lees uit de figuur het bereik van Q af voor mensen met matig overgewicht.

c Bereken het domein van deze functie voor mensen met een licht overgewicht. Rond je antwoord af op gehele cm. Wat betekent dit antwoord?

3.3 Standaardfuncties

Verkennen

Opgave V1

Applet

Je ziet in de applet de grafiek van de functie $y = x^2$ zolang je niet aan de schuifbalkjes komt.

Ga bij de volgende vragen steeds uit van de begininstellingen $n = 2$, $a = 1$, $p = 0$ en $q = 0$.

a Welk domein en welk bereik heeft deze functie?

b Verander de waarde van q. Wat gebeurt er met de grafiek? Veranderen domein en bereik van de functie hierdoor?

c Verander nu de waarde van p. Wat gebeurt er met de grafiek? Veranderen domein en bereik van de functie hierdoor?

d Verander nu de waarde van a (neem ook negatieve waarden voor a). Wat gebeurt er met de grafiek? Veranderen domein en bereik van de functie hierdoor?

Voor n kun je maar een paar gehele waarden instellen. Je krijgt dan telkens een ander type grafiek.

e Experimenteer met elk van die waarden van n en bekijk wat het aanpassen van q, p en a met de grafiek doet en welke invloed dit heeft op het domein en het bereik van de functie.

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de grafiek van een machtsfunctie.

a Deze grafiek kan ontstaan uit die van de machtsfunctie $y = x^4$. Hoe zie je dat aan het functievoorschrift?

b Neem de tabel in de uitleg over. Maak met behulp van de stappen die daar zijn beschreven de tabel van functie f en ga na dat de getekende grafiek overeen komt met de tabel.

Je kunt de grafiek van f ook maken met de applet in het **Practicum**. Daarbij lijkt het geen verschil te maken in welke volgorde je de transformatie uitvoert.

c Bekijk de tabel bij b nog eens. Is de volgorde waarin je de stappen uitvoert belangrijk?

Het domein van alle machtsfuncties met gehele positieve exponent is $\mathbb{R}$, je mag voor x elk reëel getal invullen. Het bereik van de machtsfunctie $y = x^4$ is $[0, \rightarrow\rangle$.

d Wat is het bereik van f? Hoe leid je dat af uit het bereik van $y = x^4$?

Opgave 2

Gegeven is de functie g door $g(x) = -2(x-2)^4 + 5$.

a Leg uit hoe de grafiek van g kan ontstaan uit die van $y = x^4$.

b Neem de tabel in de uitleg over. Maak vanuit de transformaties bij a een tabel van functie g. Controleer of je tabel overeenkomt met de grafiek van g die je in het **Practicum** maakt.

c Wat is het bereik van g?

Voor het terugrekenen vanuit een vierde macht heb je een vierdemachtswortel nodig.

d De grafiek van g heeft twee nulpunten. Bereken algebraïsch de coördinaten ervan op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Gegeven is de functie h door $h(x) = -2(x+1)^3 + 5$.

a Leg uit hoe de grafiek van h kan ontstaan uit die van $y = x^3$.

b Maak een tabel voor $y = x^3$. Maak met de transformaties van a een tabel van functie h. Controleer of je tabel overeenkomt met de grafiek van h die je in het **Practicum** maakt.

c Wat is het bereik van h?

Voor het terugrekenen vanuit een derde macht heb je een derdemachtswortel nodig.

d De grafiek van h heeft één nulpunt. Bereken algebraïsch de coördinaten ervan op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

Bekijk de functie in **Voorbeeld 1**.

a Waaraan zie je welke standaardfunctie er bij hoort?

b Teken eerst de grafiek van die standaardfunctie. En maak vervolgens de grafiek van f door de twee transformaties uit te voeren.

c Voer zelf de berekening van het nulpunt uit.

Opgave 5

Gegeven is de functie g door $g(x) = 4 - 2\sqrt{x}$.

Om te zien welke transformaties vanuit $y = \sqrt{x}$ er nodig zijn om de grafiek van g te krijgen, schrijf je de functie als $g(x) = -2\sqrt{x} + 4$.

a Waarom? En welke transformaties moet je uitvoeren?

b Teken eerst de grafiek van de standaardfunctie. En maak vervolgens de grafiek van g door de transformaties uit te voeren.

c Bereken de coördinaten van het nulpunt van de grafiek van g.

Opgave 6

Bekijk de functie f in **Voorbeeld 2**.

a Waaraan zie je dat hij bij de gegeven standaardfunctie hoort?

b Teken eerst de grafiek van die standaardfunctie. En maak vervolgens de grafiek van f door de twee transformaties uit te voeren.

c De grafiek van de standaardfunctie heeft de lijn $y = 0$ als horizontale asymptoot. Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van f?

d Schrijf domein en bereik van f op.

e Bereken het nulpunt van de grafiek van f.

Opgave 7

Gegeven is de functie g door $\text{g}(x) = \frac{4}{x-2} + 1$.

a Welke transformaties vanuit $y = \frac{1}{x}$ moet je uitvoeren om de grafiek van g te krijgen?

b Schrijf domein en bereik van g op.

c Bereken de coördinaten van het nulpunt van de grafiek van g.

Verwerken

Opgave 8

Voor de inhoud V van een cilindervormig blik waarvan de hoogte en de diameter even groot zijn, geldt $V(r) = 2\pi r^3$. Hierin is r de straal van het blik in cm.

a Laat zien, hoe je deze formule zelf kunt vinden.

b Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van $V(r)$ worden afgeleid. En hoe dan?

c Waarom kun je zeggen dat V recht evenredig is met de derde macht van r?

Opgave 9

Gegeven zijn de functies f en g door $\text{f}(x) = (x-3)^6 - 4$ en $\text{g}(x) = (x-3)^3 - 4$.

a Waarom heeft de grafiek van f een top en die van g niet?

b Teken beide grafieken in één figuur. Beschrijf hoe ze kunnen ontstaan uit de grafieken van de bijbehorende standaardfuncties.

c Bereken van beide grafieken de snijpunten met de assen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Gegeven de functie f door $f(x) = 2\sqrt{x+3} - 1$.

a De grafiek van f kan door transformatie ontstaan uit die van een standaardfunctie. Welke standaardfunctie is dat en welke transformaties moeten er worden toegepast?

b Schrijf domein en bereik van f op.

c Bereken de exacte snijpunten van de grafiek van f met de assen.

Opgave 11

Ga uit van de standaardfunctie $y = \sqrt{x}$.
De grafiek van een functie f ontstaat uit deze standaardfunctie door

- eerst 4 eenheden in de x-richting te verschuiven;
- dan met -$0,5$ in de y-richting te vermenigvuldigen;
- tenslotte 1 eenheden in de y-richting te verschuiven.

a Schrijf het functievoorschrift van f op.

b Schrijf domein en bereik van f op.

c Bereken de exacte snijpunten van de grafiek van f met de assen.

Opgave 12

Stel dat je bij een bepaalde energiemaatschappij voor het afnemen van elektriciteit per jaar € 85,00 aan vaste kosten en € 0,15 per afgenomen kWh (kiloWattuur) kwijt bent. Je kosten k per kWH elektriciteit (in euro) hangen dan af van je jaarlijkse verbruik a.

a Leg uit, dat $k(a) = \frac{85}{a} + 0{,}15$.

b De grafiek van $k(a)$ kan ontstaan uit die van $y = \frac{1}{x}$ met $x > 0$. Leg uit hoe.

c Schrijf domein en bereik van $k(a)$ op.

d Vanaf welk verbruik komen je kosten per kWh lager uit dan 16 cent?

Toepassen

Als een automobilist plotseling moet remmen, dan duurt het even voordat zijn auto ook echt stilstaat. De afstand die de auto dan nog aflegt heet de **remweg** R (in m). Deze remweg hangt af van de snelheid die de auto had op het moment van remmen. Voor die remweg bestaat de volgende formule:

$$R = \frac{3}{4}\left(\frac{v}{10}\right)^2$$

waarin v de snelheid in km/uur is.
Deze formule is een soort van vuistregel. Want natuurlijk hangt die remweg van nog veel andere factoren af, zoals het gewicht van de auto, de kwaliteit van de remmen, en dergelijke. Maar zo gemiddeld klopt het wel ongeveer.
Als je dus op de snelweg 120 km/uur rijdt, is je remweg ongeveer 108 m!

Opgave 13: Remweg

Je ziet in **Toepassen** een formule voor het berekenen van de remweg van een auto.

a Laat zien dat deze formule kan worden geschreven als $R(v) = 0{,}0075v^2$.

b Welke standaardfunctie hoort er bij deze remwegformule? En hoe kun je de grafiek van $R(v)$ uit deze standaardfunctie afleiden?

c Reken het getallenvoorbeeld na dat hierboven wordt gegeven.

Bij het aanplanten van struiken langs wegen wordt met de remweg rekening gehouden. Als het gaat om een weg waar de maximum toegestane snelheid bijvoorbeeld 80 km per uur is, dan worden geen struiken gezet tot 50 m vanaf een kruispunt.

d Reken na dat hierbij inderdaad met de remweg rekening is gehouden.

Opgave 14: Snelheid berekenen

Na een ongeluk meet de politie de remweg van de auto's die erbij betrokken zijn. Dan kunnen ze de snelheid schatten waarmee de auto's hebben gereden. Het is voor de politie handiger om de formule voor de remweg in de vorm $v = ...$ te hebben.

a Schrijf de hierboven gegeven formule voor de remweg in die vorm.

b Welke standaardfunctie hoort er bij deze remwegformule? En hoe kun je de grafiek van $v(R)$ uit deze standaardfunctie afleiden?

c Hoe snel heeft een auto gereden als de gemeten remweg 120 m bedraagt?

Practicum: Transformaties

Applet

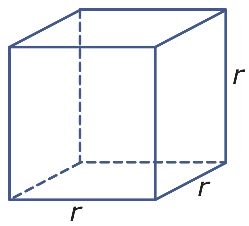
Met deze applet kun je machtsfuncties, wortelfuncties en/of gebroken functies maken. Dat gebeurt door transformatie van de bijbehorende **standaardfuncties**.

3.4 Functies vergelijken

Verkennen

Opgave V1

Stel je een kubus voor met ribben van r cm lang.



kubus

a Geef een formule voor de inhoud $V(r)$ (in cm^3) van de kubus.

b Voor welke waarde van r is de $V(r) > 100$?

c Geef een formule voor de oppervlakte $A(r)$ van de kubus.

d Voor welke waarde van r is de $A(r) > 100$?

e Voor welke waarden van r is de inhoud van de kubus een kleiner getal dan de oppervlakte?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de grafieken van twee functies die de inhoud en de oppervlakte van een kubus beschrijven.

a Je wilt weten voor welke r is $V(r) = 100$? Maak eerst een schatting met behulp van de grafiek.

b Welke vergelijking in r hoort er bij deze vraag? Laat zien hoe je die vergelijking in vier decimalen nauwkeurig oplost met behulp van terugrekenen.

c Geef de exacte oplossing van de ongelijkheid $V(r) > 100$. Hoe gebruik je hier de grafiek bij?

d Geef nu de oplossing van de ongelijkheid $V(r) > 100$ in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Gebruik uit de **Uitleg** de functie die de oppervlakte van een kubus beschrijft.

a Je wilt weten voor welke r is $A(r) = 100$? Maak eerst een schatting met behulp van de grafiek.

b Welke vergelijking in r hoort er bij deze vraag? Laat zien hoe je die vergelijking in vier decimalen nauwkeurig oplost met behulp van terugrekenen.

c Geef de exacte oplossing van de ongelijkheid $A(r) > 100$. Hoe gebruik je hier de grafiek bij?

d Geef nu de oplossing van de ongelijkheid $A(r) > 100$ in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Gebruik uit de **Uitleg** de twee functies die de inhoud en de oppervlakte van een kubus beschrijven.

a Je wilt weten voor welke r is $V(r) = A(r)$? Bepaal de oplossing hiervan eerst met de grafieken.

b Welke vergelijking in r hoort er bij deze vraag? Laat zien hoe je die vergelijking oplost.

c Hoe kun je nu aan de grafieken zien voor welke r geldt dat $V(r) < A(r)$?

Opgave 4

Bekijk de twee functies in **Voorbeeld 1**.

a Los zelf de vergelijking $\text{f}(x) = \text{g}(x)$ op.

b Hoe kun je controleren dat ook $x = 4$ een oplossing van de vergelijking is?

c Schrijf de oplossing van de ongelijkheid $\text{f}(x) < \text{g}(x)$ op.

Opgave 5

Gegeven zijn de functies f en g door $\text{f}(x) = x^4$ en $\text{g}(x) = 8x^2$.

Je wilt de ongelijkheid $\text{f}(x) \leq \text{g}(x)$ oplossen.

a Los de vergelijking $\text{f}(x) = \text{g}(x)$ op.

b Maak een schets van de grafieken van beide functies in één figuur.

c Schrijf de oplossing van de ongelijkheid $\text{f}(x) \leq \text{g}(x)$ op.

Opgave 6

Los de volgende ongelijkheden exact op.

a $x^3 \geq 6x - x^2$

b $0{,}5x + 2 < 5 - x^2$

c $x^4 \geq 9x^2$

Opgave 7

Bekijk de functie in **Voorbeeld 2**.

a Los zelf de vergelijking $\text{f}(x) = 5$ op.

b Geef nu de oplossing van de ongelijkheid in twee decimalen nauwkeurig. (Let goed op de afrondingen!)

c Los de ongelijkheid $\text{f}(x) < 3$ eerst exact op en daarna in twee decimalen nauwkeurig.

d Hoeveel oplossingen heeft de ongelijkheid $\text{f}(x) < 1$?

e Hoeveel oplossingen heeft de ongelijkheid $\text{f}(x) \leq 1$?

f Hoeveel oplossingen heeft de ongelijkheid $\text{f}(x) \geq 1$?

Opgave 8

Bekijk de functie g met $g(x) = 0{,}25(x-2)^3 + 3$.

a Hoe kan deze grafiek door transformatie uit de grafiek van $y = x^3$ ontstaan?

b Los exact op: $g(x) \leq 5$.

Opgave 9

Gegeven zijn de functies f en g door $f(x) = (x+1)^4$ en $g(x) = (2-x)^4$.

a Maak een schets van beide grafieken in één figuur.

b Los exact op: $f(x) \leq g(x)$.

Opgave 10

Bekijk de ongelijkheid in **Voorbeeld 3**. Er worden twee functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = 2$ vergeleken.

a Wat is het domein van functie f? En waarom?

b Leg uit waarom de oplossing van de ongelijkheid $0 \leq x < 4$ is.

c Los nu zelf op $\sqrt{x} \leq 3$.

Opgave 11

Je wilt de ongelijkheid $6 - \sqrt{x-3} > 4$ oplossen.
Daartoe gebruik je de grafiek van $f(x) = 6 - \sqrt{x-3}$.

a Teken eerst de grafiek van f. Bedenk hoe hij kan ontstaan uit een standaardfunctie.

b Los de vergelijking $6 - \sqrt{x-3} = 4$ op.

c Schrijf de oplossing van de ongelijkheid op.

Opgave 12

Je wilt de ongelijkheid $\frac{6}{x-3} + 2 \geq 4$ oplossen.
Daartoe gebruik je de grafiek van $g(x) = \frac{6}{x-3} + 2$.

a Teken eerst de grafiek van g. Bedenk hoe hij kan ontstaan uit een standaardfunctie.

b Los de vergelijking $\frac{6}{x-3} + 2 = 4$ op.

c Schrijf de oplossing van de ongelijkheid op.

Verwerken

Opgave 13

Voor de inhoud V van een bol met straal r geldt $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Voor de oppervlakte A van zo'n bol geldt $A(r) = 4\pi r^2$.

a Voor welke waarden van r is $A(r) > 100$?

b Voor welke waarden van r is $V(r) > 100$?

c Voor welke waarden van r geldt $V(r) < A(r)$?

Opgave 14

Los de volgende ongelijkheden op.

a $4 - x^2 > 2 - x$

b $x^3 < 9x$

c $x^3 < 9x^2$

d $x^3 - 6x^2 + 9x > 0$

Opgave 15

Gegeven is de functie f met f(x) = $-0{,}1(x-3)^4 + 62{,}5$.

a Bereken f(0).

b De grafiek van f kan door transformatie ontstaan uit die van een standaardfunctie. Welke standaardfunctie is dat en welke transformaties moeten er worden toegepast?

c Los op: f$(x) \geq 0$.

Opgave 16

Gegeven zijn de functies f en g door f$(x) = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2$ en g$(x) = -x^2$.

a Los op: f$(x) = 0$.

b Teken de grafieken van f en g in één figuur.

c Los op: f$(x) <$ g(x).

Opgave 17

Los de volgende ongelijkheden op.

a $2\sqrt{x} < 6$

b $3\sqrt{x-2} + 1 > 7$

c $\frac{3}{2x} \leq 1$

d $\frac{3}{x-2} + 1 \geq 1{,}5$

Toepassen

De tijd die een slinger van een wandklok nodig heeft om één keer heen en weer te bewegen heet de **slingertijd**. De formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ geeft het verband aan tussen de slingertijd T in seconde en de lengte L van de slinger van een bepaalde wandklok in m. Het getal g heeft te maken met de zwaartekracht en in $g \approx 9{,}8$.

Omdat de slinger van deze klok in 1 seconde heen en weer slingert, kun je de lengte van de slinger van deze klok berekenen. Je moet daarvoor een vergelijking oplossen.

Opgave 18: Slinger en slingertijd

Je ziet in **Toepassen** een formule voor het berekenen van de slingertijd van de slinger van een wandklok.

a Een klok heeft een slinger met een lengte van 40 cm. Hoe groot is de slingertijd?

b Wordt de slingertijd van de klok tweemaal zo groot als de lengte van de slinger twee maal zo groot wordt? Licht je antwoord toe.

Opgave 19: Lengte slinger

In **Toepassen** staat dat je lengte van de slinger kunt uitrekenen door een vergelijking op te lossen.

a Welke vergelijking is dat?

b Los deze vergelijking op. Geef de juiste waarde van L in mm nauwkeurig.

3.5 Familie van functies

Verkennen

Opgave V1

Applet

De grafiek van de functie f met $\text{f}(x) = (x-3)^2 - 1$ is een parabool. Door het punt $(0,2)$ gaat een hele serie rechte lijnen.

Welke van deze rechte lijnen raken de parabool?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt beschreven wat je onder een familie van functies verstaat. En ook hoe je door met een parameter te werken raaklijnen aan een parabool kun opstellen.

a Voer de berekening van de raaklijnen aan de parabool die door $(0,2)$ gaan zelf uit, als je dat bij **Opgave 1** nog niet hebt gedaan.

b Er zijn twee mogelijke raaklijnen door $(0,2)$ aan de parabool. Geldt voor elk ander punt ook dat je er twee raaklijnen aan de parabool door kunt tekenen?

Opgave 2

Gebruik de parabool in de **Uitleg** nog eens. Er zijn ook lijnen met formules van de vorm $y = \text{-}2x + b$ die aan deze parabool raken.

a Hoeveel van die lijnen zijn er?

b Voor welke waarde van de parameter b raakt zo'n lijn de parabool?

Opgave 3

Gegeven is de familie van functies f_q met $\text{f}_q(x) = (x-3)^2 + q$.

Voor elke waarde van de parameter q heb je met een andere functie te maken.

a Welke vorm heeft de grafiek van f_2? En welk punt is de top van die grafiek?

b Voor welke q is het minimum van zo'n functie 0?

c Voor welke q gaat de grafiek van zo'n functie door $(0,2)$?

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** is een familie van functies gegeven. Hun grafieken zijn allemaal parabolen. Je wilt weten voor welke waarden van de parameter p de top van zo'n parabool op de gegeven lijn ligt.

a Welke top heeft de grafiek van f_3?

b Probeer de antwoorden op de vraag in het voorbeeld te vinden met behulp van de applet.

c Bekijk vervolgens hoe je de top van elke parabool van deze familie in p kunt uitdrukken. Voer zelf de berekening uit.

d Geef nu antwoord op de vraag die in het voorbeeld wordt gesteld.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** is een familie van functies gegeven. Hun grafieken zijn allemaal parabolen. Bereken voor welke waarden van de parameter p zo'n parabool raakt aan de gegeven lijn.

a Probeer eerst de antwoorden te vinden met behulp van de applet.

b Bereken de gewenste waarden voor p in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Bekijk de formule voor het afkoelen van verwarmd water in **Voorbeeld 2**.

a Hoeveel bedraagt de temperatuur van het verwarmde water op $t = 0$?

b Waarom moet $0 < g < 1$? Maak een schets van een mogelijke grafiek van $T(t)$.

c Bereken g in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 7

Een pan kokend water van 100 °C wordt in een kamer met een temperatuur van 20 °C gezet. Vanaf dat moment geldt voor de temperatuur van het water $T(t) = 20 + a \cdot g^t$. Na 20 minuten is de temperatuur van het water gezakt tot 30 °C.

Bereken de waarden van a in gehelen en g in twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Applet

Opgave 8

Gegeven is de familie van tweedegraads functies f_p door $f_p(x) = x^2 - px + 2p$.

a Hoeveel nulpunten heeft de grafiek van f_{-1}?

b Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f_p twee nulpunten?

c Voor welke waarden van p ligt de top van de grafiek van f_p op de lijn $y = x$?

d Welke van de functies f_p heeft een minimum van -4?

Opgave 9

Gegeven is een parabool met formule $y = 4 - x^2$.

a Welke lijnen door het punt $(0,6)$ raken deze parabool?

b Welke lijnen met richtingscoëfficiënt 2 raken deze parabool?

Opgave 10

De derdegraads functies g_p met $\mathrm{g}_p(x) = x^3 - px$ hebben nogal verschillende grafieken.

a Welke van deze functies hebben drie nulpunten?

b Welke van deze functies hebben precies één punt met de lijn $y = x$ gemeen?

Opgave 11

Water dat lang in de koelkast heeft gestaan krijgt een temperatuur van 6 °C. Als je dat water uit de koelkast haalt, gaat het opwarmen tot kamertemperatuur volgens de formule $T(t) = 20 - a \cdot g^t$. Hierin is t de tijd in minuten na het uit de koelkast halen van het water en T de temperatuur in °C.

a Hoeveel bedraagt de waarde van a?

b 10 minuten nadat het water uit de koelkast is gehaald, is het opgewarmd tot 18 °C. Hoe warm is het water na 25 minuten?

Toepassen

In de natuurkunde komen regelmatig formules voor met meer dan twee variabelen. Een voorbeeld is de formule voor de afgelegde afstand van een bewegend voorwerp dat vanuit een zekere beginsnelheid eenparig versnelt (dat wil zeggen dat zijn snelheid gelijkmatig groter wordt). Voor de afgelegde afstand s vanaf het moment dat de versnelling begint, geldt $s(t) = v(0)\,t + \frac{1}{2}at^2$

Hierin is s in m, t de tijd vanaf het begin van de versnelling in seconden, $v(0)$ de snelheid op $t = 0$ in m/s en a de (constante) versnelling in m/s^2.

In deze formule is t de onafhankelijk variabele die je op de horizontale as uitzet en s de variabele die je op de verticale as uitzet. Je maakt hierbij een **s,t-diagram**. De andere variabelen zijn eigenlijk parameters die van de omstandigheden afhangen.

Voor de veranderende snelheid van het voorwerp bij deze eenparige versnelling geldt $v(t) = v(0) + at$.

Opgave 12: Eenparige versnelling

Je ziet in **Toepassen** een formule voor het berekenen van de afgelegde afstand van een eenparig versnellend voorwerp.

a Een voorwerp heeft een snelheid van 10 m/s. Op $t = 0$ begint het eenparig te versnellen en de snelheid neemt elke seconde met 2 m/s toe. Welke formule geldt er voor de afgelegde afstand $s(t)$?

b Welke afstand heeft dit voorwerp na 5 seconden afgelegd?

c Een voorwerp heeft een snelheid van 10 m/s. Op $t = 0$ begint het eenparig te versnellen. 8 seconden later heeft het voorwerp 200 m afgelegd. Hoeveel bedraagt de versnelling?

d Een voorwerp begint op $t = 0$ eenparig te versnellen. 4 seconden later heeft het voorwerp 80 m afgelegd. En weer 6 seconden later heeft het nog eens 180 m afgelegd. Hoeveel bedragen de beginsnelheid en de versnelling?

Opgave 13: Cheetah

De snelste sprinter ter wereld is de cheetah (het jachtluipaard). Hij kan in 17 seconden vanuit stilstand een snelheid van 110 km/uur bereiken. Die snelheid kan hij daarna zo'n 450 m volhouden.

a Bereken de afstand die de cheetah aflegt voor hij op topsnelheid (110 km/uur) is.

De cheetah start de achtervolging van een zebra die met een constante snelheid van 50 km/uur aan hem voorbij rent met een voorsprong van 300 m.

b Haalt de cheetah deze zebra in, en zo ja, na hoeveel seconden?

3.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is uitgebreider ingegaan op het begrip 'functie'. Wat is een functie nou precies en welke notaties gebruik je er bij? Vooral begrippen als domein en bereik zijn belangrijk en ook is inzicht in transformatie van standaardfuncties erg nuttig. Natuurlijk wil je functies kunnen vergelijken en met name ongelijkheden oplossen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **'Functies'** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- het begrip functie — onafhankelijk variabele — functiewaarden;
- domein — bereik — interval;
- machtsfunctie — transformatie (vervorming) — wortelfunctie — gebroken functie;
- vergelijking — ongelijkheid;
- families van functies — functievoorschriften met een of meer parameters.

Activiteiten

- werken met het functiebegrip en de bijbehorende termen;
- domein en bereik van een functie bepalen;
- werken met standaardfuncties zoals de standaard lineaire, kwadratische, gebroken en wortelfunctie — de transformaties herkennen waarmee grafieken van functies uit die van de bijpassende standaardfunctie kunnen worden afgeleid;
- vergelijkingen en ongelijkheden bij allerlei functies oplossen;
- werken met parameters — een parameter berekenen onder andere in het geval dat functies elkaar raken.

Opgave 1

Bij een parabool hoort de formule $y = \text{-}0{,}5x^2 + 4x - 6$.

a Waarom is y een functie van x?

b Je noemt deze kwadratische functie f. Schrijf het functievoorschrift op.

c Bereken f(3) en f$(\text{-}3)$.

d Los op f$(x) = 0$.

Opgave 2

Gegeven is de functie g met functievoorschrift $g(x) = 4 - \sqrt{x+1}$.

a Welk domein heeft deze functie?

b Bereken de snijpunten van de grafiek van g met beide assen.

c Bepaal het bereik van g.

Opgave 3

Gegeven is de functie h met functievoorschrift $h(x) = \frac{4}{x-2} + 3$.

a Welk domein heeft deze functie?

b Bereken de snijpunten van de grafiek van h met beide assen.

c De grafiek van h kan door transformatie ontstaan uit die van $y = \frac{1}{x}$. Beschrijf welke transformaties je dan moet toepassen.

d Bepaal het bereik van h.

Opgave 4

Gegeven zijn de functies f en g door $f(x) = -x^3 + 5x$ en $g(x) = 2x$.

a Teken de grafieken van deze functies in één figuur. Maak eerst een tabel zoals deze.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							

b Los op $f(x) < g(x)$.

Opgave 5

De functies f_p zijn gegeven door $f_p(x) = px^2 - 4x + p$.

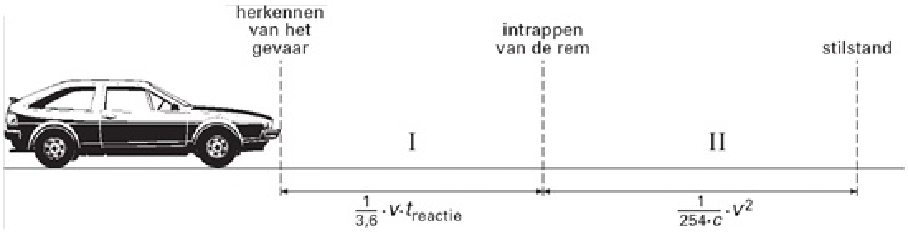
a Voor welke waarden van p hebben deze functies een positief maximum?

b Voor welke p raakt de grafiek van zo'n functie de lijn $y = 2x$?

Toepassen

Voor het bepalen van een veilige afstand tussen twee auto's wordt vaak de **remweg** gebruikt. Dat is de afstand die een automobilist nodig heeft om, vanaf het moment dat hij gevaar herkent, zijn auto tot stilstand te brengen. De remweg bestaat uit twee gedeelten:

- de afstand die wordt afgelegd tussen het moment van het herkennen van het gevaar en het moment van het intrappen van de rem;
- de afstand die remmend wordt afgelegd tot de auto stilstaat.



De formule voor de remweg bestaat dus ook uit twee gedeelten

$R = \frac{v}{3,6} \cdot t + \frac{v^2}{254c}$

Hierin is R de remweg in m, v de snelheid in km/uur en t de reactietijd in seconden, dat wil zeggen de tijd tussen het moment van het herkennen van het gevaar en het moment van het intrappen van de rem.

De parameter c is een constante die afhangt van het wegdek, de kwaliteit van de banden en de weersomstandigheden. Voor een aantal wegtypen en weersomstandigheden geven deze tabellen enkele waarden van c.

nat wegdek	oude banden	nieuwe banden
1 mm water	0,55	0,40
2 mm water	0,45	0,30
ijs	0,10	0,10

droog wegdek	oude banden	nieuwe banden
beton	0,85	0,95
asfalt	0,80	0,90
zandweg	0,50	0,50

Opgave 6: Remweg en snelheid

Je ziet in **Toepassen** een formule voor het berekenen van de remweg van een auto afhankelijk van zijn snelheid, maar ook van de reactietijd van de bestuurder, het wegtype en de weersomstandigheden.

Een automobilist rijdt met nieuwe banden onder zijn auto op een droge asfaltweg met een snelheid van 100 km/uur. Zijn reactietijd is $0,4$ seconden.

a Bereken zijn remweg in m nauwkeurig.

b Als je er van uit gaat dat de reactietijd van deze automobilist altijd $0,4$ seconden is, welke formule voor zijn remweg op een droge asfaltweg kun je dan opstellen als hij met nieuwe banden rijdt?

c Als bij een noodstop zijn remweg 90 m blijkt te zijn, hoe hard heeft hij dan gereden?

Een automobiliste rijdt met een snelheid van 60 km/uur op oude banden in een regenbui, waardoor er 1 mm water op de weg ligt. Het begint harder te regenen: de hoeveelheid water op de weg neemt toe tot 2 mm. Haar reactietijd is in beide situaties $0{,}3$ seconden.

d Bereken met hoeveel procent haar remweg toeneemt als zij haar snelheid niet aanpast.

Opgave 7: Reactietijd of rempedaal?

Men zegt wel eens dat bij lage snelheden de reactietijd de belangrijkste bijdrage levert aan de remweg, terwijl bij hoge snelheden de snelheid de belangrijkste bijdrage levert.

Ga uit van een reactietijd van $0{,}5$ seconden en neem $c = 0{,}75$.

Bij welke snelheid is de bijdrage aan de remweg als gevolg van de reactietijd net zo groot als de bijdrage aan de remweg als gevolg van het remmen? Licht je antwoord toe.

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

www.math4all.nl